

**UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ**  
**CENTRO DE TECNOLOGIA**  
**DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA CIVIL**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA CIVIL**

**EVERTON LUIS CONSONI DA SILVA**

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS  
METÁLICAS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

**Maringá**

**2023**

**EVERTON LUIS CONSONI DA SILVA**

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS  
METÁLICAS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

Dissertação apresentada como parte dos requisitos necessários do título de Mestre em Engenharia Civil do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Vanalli

**Maringá**

**2023**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)  
(Biblioteca Central - UEM, Maringá - PR, Brasil)

S586a

Silva, Everton Luis Consoni da

Análise estática e dinâmica de estruturas metálicas com ligações semirrígidas / Everton Luis Consoni da Silva. -- Maringá, PR, 2023.

101 f.: il. color., figs., tabs.

Orientador: Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza.

Coorientador: Prof. Dr. Leandro Vanalli.

Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, 2023.

1. Estruturas metálicas. 2. Ligações semirrígidas. 3. Não linearidade geométrica. 4. Análise dinâmica. 5. Formulação corrotacional. I. Souza, Luiz Antonio Farani de, orient. II. Vanalli, Leandro, coorient. III. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Tecnologia. Departamento de Engenharia Civil. Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil. IV. Título.

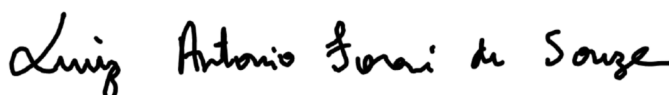
CDD 23.ed. 624.1821

EVERTON LUIS CONSONI DA SILVA

**ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS  
COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**

Dissertação de Mestrado apresentada no dia 19/06/2023, julgada adequada para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL e aprovada em sua forma final, como requisito parcial para a obtenção do título de MESTRE EM ENGENHARIA CIVIL DA UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

**BANCA EXAMINADORA**



**Prof. Dr. Luiz Antonio Farani de Souza**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá  
Professor Orientador

LEANDRO

VANALLI:92947  
263987

Assinado de forma digital  
por LEANDRO  
VANALLI:92947263987  
Dados: 2023.06.26 15:12:29  
-03'00'

**Prof. Dr. Leandro Vanalli**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá  
Professor Coorientador



**Prof. Dr. Carlos Humberto Martins**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá

Documento assinado digitalmente

gov.br

JESELAY HEMETERIO CORDEIRO DOS REIS  
Data: 26/06/2023 12:24:10-0300  
Verifique em <https://validar.iti.gov.br>

**Prof. Dr. Jeselay Hemetério Cordeiro dos Reis**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Estadual de Maringá



**Prof. Dr. Cássio Barros de Aguiar**  
Curso de Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

*Este trabalho é dedicado à minha família*

## AGRADECIMENTOS

Primeiramente a Deus, por tudo que sou.

Agradeço aos meus pais, Luiz e Iraci, que sempre fizeram o máximo pra me ajudar nessa caminhada, amo vocês.

A Marília Aguiar Favaro por todo o amor, apoio e carinho durante essa caminhada, por sempre me incentivar a ser o melhor possível, te amo.

A Mariana Aguiar Favaro, Antônio Carlos Favaro e Ana Maria Aguiar Favaro (In memoriam), agradeço por toda a ajuda e carinho, vocês permanecerão eternamente em meu coração.

Ao professor e meu orientador Luiz Antonio Farani de Souza, que sempre dedicou ao máximo o seu tempo e conhecimento para tornar a realização deste trabalho possível.

Aos amigos Paulo, André, Karol, Adriano, Erick e Lucas durante todo o período de mestrado e aos demais amigos de PCV em que tive o prazer de conhecer e compartilhar conhecimentos e experiências.

Ao professor Wilson Wesley, que sempre se mostrou disposto a me ajudar.

Ao Juarez e Joseane pela contribuição, auxílio, amizade e cafezinhos durante esse período.

A todos os professores e funcionários do Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da Universidade Estadual de Maringá que contribuíram para a minha formação.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) – Código de Financiamento 001, pela bolsa de mestrado concedida.

*“Tenha sempre como meta muita força, muita determinação e sempre faça tudo com muito amor e com muita fé em Deus, que um dia você chega lá. De alguma maneira você chega lá”.*

*Ayrton Senna*

## RESUMO

SILVA, E. L. C **ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**.2023.101p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

É fundamental compreender o comportamento estático e dinâmico de uma estrutura para conceber projetos que sejam ótimos em termos de segurança e qualidade, sem negligenciar a complexidade da análise. Assim, é preciso utilizar teorias mais avançadas, como formulações não lineares, evitando simplificações que possam comprometer o resultado. Portanto, esse trabalho tem como objetivo desenvolver uma ferramenta computacional para análise estática e dinâmica de estruturas metálicas semirrígidas. Para tanto, o Método dos Elementos Finitos é utilizado para discretizar as estruturas, utilizando a formulação corrotacional, bem como as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Além disso, a solução do sistema de equações não lineares é obtida por métodos numéricos, como Newton-Raphson e PotraPták, acoplados a distintas técnicas iterativas. Duas metodologias para a análise de ligações semirrígidas são implementadas e avaliadas quanto à capacidade de representar a semirrígidez da ligação. Adicionalmente, é apresentada a aplicação do método dos Mínimos Quadrados para simulação da degradação da ligação. Por fim, é realizada uma análise dinâmica não linear de estruturas metálicas semirrígidas sujeitas a carregamento de impacto, utilizando o integrador temporal explícito do Método de Newmark e -Generalizado. A estabilidade estática e dinâmica de vários sistemas estruturais com ligações rígidas e semirrígidas é avaliada, e as soluções obtidas são comparadas com resultados analíticos ou numéricos encontrados na literatura, de modo a validar a metodologia proposta.

**Palavras-chave:** Ligações semirrígidas, Não Linearidade Geométrica, Formulação corrotacional, Análise dinâmica.



## ABSTRACT

SILVA, E. L. C **ANÁLISE ESTÁTICA E DINÂMICA DE ESTRUTURAS METÁLICAS COM LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS**. 2023. 101p. Dissertation (Master) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2023.

It is essential to understand a structure's static and dynamic behaviour to conceive projects that are optimal in terms of safety and quality while paying attention to the complexity of the analysis. Thus, more advanced theories, such as nonlinear formulations, must be used, avoiding simplifications that could compromise the result. Therefore, this work aims to develop a computational tool for static and dynamic analysis of semi-rigid metallic structures. For that, the Finite Element Method is used to discretize the structures, using the corotational formulation and the theories of Euler-Bernoulli and Timoshenko. Furthermore, the solution of the system of nonlinear equations is obtained by numerical methods, such as Newton-Raphson and PotraPták, coupled with different iterative techniques. Two methodologies for analyzing semi-rigid connections are implemented and evaluated for their ability to represent the semi-rigidity of the connection. Additionally, the application of the Least Squares method to simulate link degradation is presented. Finally, a nonlinear dynamic analysis of semi-rigid metallic structures subjected to impact loading is carried out using the explicit temporal integrator of the Newmark and -Generalized Method. The static and dynamic stability of several structural systems with rigid and semi-rigid connections is evaluated, and the obtained solutions are compared with analytical or numerical results found in the literature to validate the proposed methodology.

**Keywords:** Semi-rigid connections, Geometric Nonlinearity, Corrotational formulation, Dynamic analysis.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Efeitos globais ( $P-\Delta$ ) e locais ( $P-\delta$ ) . . . . .	20
Figura 2.2 – Comparação entre a consideração da seção da viga para os modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko . . . . .	21
Figura 2.3 – Sistema corrotacional . . . . .	23
Figura 2.4 – Pórtico com ligações semirrígidas . . . . .	27
Figura 2.5 – Comportamento momento-rotação de uma ligação . . . . .	29
Figura 2.6 – Curvas momento-rotação para distintos tipos de ligação . . . . .	29
Figura 2.7 – Caminho de equilíbrio . . . . .	32
Figura 3.1 – Coordenada inicial e corrente do elemento de viga . . . . .	34
Figura 3.2 – Pequena variação dos deslocamentos na configuração atual . . . . .	37
Figura 3.3 – Viga com ligações semirrígidas . . . . .	45
Figura 5.1 – Pórtico de Lee . . . . .	59
Figura 5.2 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga. . . . .	60
Figura 5.3 – Arco com carga excêntrica . . . . .	62
Figura 5.4 – Caminho de equilíbrio para o arco . . . . .	62
Figura 5.5 – Viga com ligações semirrígidas . . . . .	64
Figura 5.6 – Curvas carga-deslocamento da viga semirrígida obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão. . . . .	64
Figura 5.7 – Curva carga-deslocamento da viga semirrígida obtidas com teoria de viga de Timoshenko e elemento de ligação. . . . .	65
Figura 5.8 – Arco Senoidal abatido . . . . .	65
Figura 5.9 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão. . . . .	66
Figura 5.10–Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão. . . . .	66
Figura 5.11–Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão. . . . .	67
Figura 5.12–Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga. . . . .	67
Figura 5.13–Viga em balanço com carga pontual . . . . .	68
Figura 5.14–Comparação entre a Curvas momento-rotação da viga semirrígida . . . . .	69
Figura 5.15–Curva carga-deslocamento viga em balanço . . . . .	69
Figura 5.16–Geometria e carregamento da estrutura . . . . .	70
Figura 5.17–Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de dois andares. . . . .	71
Figura 5.18–Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de dois andares. . . . .	71
Figura 5.19–Caminho de Equilíbrio pórtico biapoado . . . . .	72
Figura 5.20–Curvas carga - deslocamento para o pórtico com base engastada . . . . .	73
Figura 5.21–Pórtico de 7 andares . . . . .	74
Figura 5.22–Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de sete andares. . . . .	75
Figura 5.23–Curvas carga- deslocamento para o pórtico de sete andares . . . . .	76

Figura 6.1 – Viga com ligações semirrígidas . . . . .	84
Figura 6.2 – Resultado para a viga com ligações rígidas e semirrígidas . . . . .	84
Figura 6.3 – Arco senoidal abatido . . . . .	85
Figura 6.4 – Resultados para os campos de deslocamento e velocidade para o arco senoidal abatido . . . . .	85
Figura 6.5 – Resultados para os campos de aceleração e velocidade/posição para o arco senoidal abatido. . . . .	86
Figura 6.6 – Pórtico de dois andares sem carga gravitacional . . . . .	86
Figura 6.7 – Resultado para o pórtico sem carga gravitacional. . . . .	87
Figura 6.8 – Pórtico de dois andares com carga gravitacional . . . . .	88
Figura 6.9 – Resultado para o pórtico com carga gravitacional. . . . .	88
Figura 6.10–Comparação entre as respostas do pórtico sem e com cargas gravitacionais. . . . .	89
Figura 6.11–Viga com ligações semirrígidas . . . . .	89
Figura 6.12–Resultado do pórtico biengastado em L sem amortecimento . . . . .	90
Figura 6.13–Resultado do pórtico biengastado em L com amortecimento . . . . .	90
Figura 6.14–Resultado do pórtico biengastado em L carregamento distinto . . . . .	91
Figura 6.15–Resultado do pórtico biengastado em L carregamento distinto. . . . .	91

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Propriedades físicas e geométricas da estruturas . . . . .	60
Tabela 2 – Resultado numérico para o método de Newthom-Raphson associado a distintas técnicas de iteração . . . . .	61
Tabela 3 – Resultado numérico para o método de Potra-Pták associado a distintas técnicas de iteração . . . . .	61
Tabela 4 – Propriedades físicas e geométricas da estrutura . . . . .	62
Tabela 5 – Resultado numérico para o método de Newthom Raphson associado a distintas técnicas de iteração . . . . .	63
Tabela 6 – Resultado numérico para o método de Potra-ák associado a distintas técnicas de iteração . . . . .	63
Tabela 7 – Propriedades físicas e geométricas da viga semirrígida . . . . .	64
Tabela 8 – Propriedades físicas e geométricas do arco senoidal sob carregamento distribuído . . . . .	66
Tabela 9 – Propriedades físicas e geométricas . . . . .	68
Tabela 10 – Polinômio interpolador da curva momento rotação . . . . .	69
Tabela 11 – Propriedades físicas dos Perfis W 360x72 e W 310x143 . . . . .	70
Tabela 12 – Polinômio interpolador para cada curva . . . . .	72
Tabela 13 – Carga limite de estabilidade para o pórtico com base biapoiada . . . . .	73
Tabela 14 – Carga limite de estabilidade para o pórtico com base engastada . . . . .	73
Tabela 15 – Propriedades físicas e geométricas dos perfis IPE 400 e IPB 450 . . . . .	74
Tabela 16 – Propriedades físicas e geométricas dos perfis IPB 600 . . . . .	75
Tabela 17 – Polinômio interpolador para os modelos de ligação do pórtico de 7 andares . . . . .	75
Tabela 18 – Carga limite de estabilidade para o pórtico de 7 andares . . . . .	76
Tabela 19 – Métodos da família de Newmark. . . . .	80
Tabela 20 – Propriedades físicas e geométricas da viga semirrígida . . . . .	84
Tabela 21 – Propriedades físicas e geométricas do arco senoidal abatido rotulado . . . . .	85
Tabela 22 – Propriedades físicas dos Perfis W 360x72 e W 310x143 . . . . .	87
Tabela 23 – Propriedades físicas e geométricas da estrutura . . . . .	90

## LISTA DE SÍMBOLOS

$L_0$	Comprimento inicial
$L$	Comprimento corrente
$X_1$	Nó inicial do elemento corrotacional no eixo das abcissas
$X_2$	Nó final do elemento corrotacional no eixo das abcissas
$Y_1$	Nó inicial do elemento corrotacional no eixo das ordenadas
$Y_2$	Nó final do elemento corrotacional no eixo das ordenadas
$u_1$	O deslocamento axial no sistema corrotacional
$\theta_1$	Rotação nodal local para posição 1
$\theta_2$	Rotação nodal local para posição 2
$N$	Força Normal
$M_1$	Momento no nó 1 do elemento
$M_2$	Momento no nó 2 do elemento
$E$	Módulo de elasticidade
$I$	Inércia
$V_1$	Força de cisalhamento no nó 1
$V_2$	Força de cisalhamento no nó 2
$\delta d_{21}$	Diferença entre variação dos deslocamentos no nó 1 e 2.
$\delta p$	Diferença entre variação dos deslocamentos no nó 1 e 2.
$K_M$	Matriz de rigidez Material
$K_G$	Matriz de rigidez Geométrica
$K_T$	Matriz de rigidez tangente
$G$	Módulo transversal de cisalhamento
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$\mu$	Fator de correção da energia de cisalhamento.

$\theta_r$	Rotação relativa ou capacidade de rotação da ligação.
$S_{c1}$	Rigidez da ligação 1.
$S_{c2}$	Rigidez da ligação 2.
$\Gamma_i$	Função de estabilidade.
$B$	Matriz de transformação.
$\kappa$	Curvatura da seção
$\gamma$	Deformação por cisalhamento
$\epsilon$	Deformação por cisalhamento
$\delta \mathbf{u}_r$	Vetor de deslocamento nodais tangenciais.
$\Delta l$	Incremento de comprimento de arco
$S_A$	Rigidez tangente axial
$S_R$	Rigidez tangente rotacional
$S_T$	Rigidez tangente translacional
$\Delta l$	Incremento de comprimento de arco
$k$	Número da iteração
$\delta u_r$	Vetor de deslocamentos nodais tangenciais
$\mathbf{f}_r$	Vetor de forças externas
$\mathbf{f}_{int}$	Vetor de forças internas
$\Delta \lambda_0$	Incremento inicial do parâmetro de carga
$\Delta \mathbf{u}$	Deslocamentos nodais incrementais tangências
$\lambda$	Parâmetro de força total
$\mathbf{G}$	Vetor de forças desequilibradas
$\delta \mathbf{u}_g$	Correção do vetor de deslocamentos
$I_d$	Número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente,
${}^t I$	Número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse

$\vec{u}$  Vetor de deslocamentos

$\dot{\vec{u}}$  Vetor de velocidade

$\ddot{\vec{u}}$  Vetor de aceleração

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>16</b>
1.1	CONSIDERAÇÕES INICIAIS	16
1.2	JUSTIFICATIVA	18
1.3	OBJETIVOS	18
1.3.1	Objetivo geral	18
1.3.2	Objetivos específicos	18
<b>2</b>	<b>FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA</b>	<b>20</b>
2.1	ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA	20
2.2	TEORIA DE VIGAS	21
2.3	CINEMÁTICA CORROTACIONAL	22
2.4	LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	26
2.5	METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO LINEAR	31
2.5.1	Métodos incrementais e iterativos acoplados a técnicas de continuação	31
<b>3</b>	<b>FORMULAÇÕES NUMÉRICAS</b>	<b>34</b>
3.1	FORMULAÇÃO CORROTACIONAL PARA PÓRTICOS PLANOS	34
3.2	ELEMENTO DE VIGA DE THIMOSHENKO	41
3.3	MODELANDO O COMPORTAMENTO DA LIGAÇÃO	44
3.3.1	Elemento híbrido proposto por Chen e Lui (1991)	45
3.3.2	Elemento de ligação proposto por DelSavio (2004)	46
3.4	MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS	47
3.5	SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL	48
3.5.1	Solução Preditada	48
3.5.2	Ciclo de iterações - Método de Newton- Raphson	49
3.5.3	Ciclo de Iterações - Método de Potra- Pták (1984)	51
3.6	ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA	51
3.6.1	Incremento de Comprimento de Arco - Crisfield (1991)	52
3.6.2	Sinal do Incremento inicial do parâmetro de carga	53
3.7	ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO	53
3.7.1	Método do comprimento de arco linear hiperplano fixo	53
3.7.2	Método do comprimento de arco linear hiperplano atualizado	54
3.7.3	Comprimento de Arco Cilíndrico	54
3.7.4	Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais	55
3.7.5	Iteração Baseada nos deslocamentos generalizados	56
3.8	CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA	56
3.8.1	Crítério 1	56
3.8.2	Crítério 2	57



<b>4</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>58</b>
<b>5</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>59</b>
5.1	EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DA ANÁLISE ESTÁTICA COM DIFERENTES TEORIAS DE VIGA E MÉTODOS DE ITERAÇÃO	59
5.1.1	Pórtico de Lee	59
5.1.2	Semicírculo birrotulado	61
5.2	LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS	64
5.2.1	Viga com ligações semirrígidas na extremidades	64
5.2.2	Arco Senoidal sob carregamento distribuído	65
5.3	LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS COM COMPORTAMENTO NÃO LINEAR OBTIDAS PELO MÉTODOS DOS MÍNIMO QUADRADOS	68
5.3.1	Viga Semirrígida com ligações não Lineares	68
5.3.2	Pórtico de dois andares	70
5.3.3	Pórtico de sete andares	74
<b>6</b>	<b>ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS</b>	<b>77</b>
6.1	FORMULAÇÃO DINÂMICA	78
6.1.1	Modelo implícito de Newmark	79
6.1.2	Método implícito $\alpha$ -Generalizado	81
6.2	RESULTADOS DO MODELO DINÂMICO	83
6.2.1	Viga com ligações semirrígidas na extremidades	83
6.2.2	Arco senoidal abatido rotulado	85
6.2.3	Pórtico de dois andares	86
6.2.4	Pórtico biengastado em L	89
<b>7</b>	<b>CONCLUSÕES</b>	<b>93</b>
	<b>Referências</b>	<b>95</b>

# 1 INTRODUÇÃO

## 1.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

Para o dimensionamento estrutural, o objetivo é definir os membros do sistema que apresentem uma melhor estabilidade e capacidade resistente, a fim de atender às solicitações encontradas na análise de estruturas. Dessa forma, o desenvolvimento de novos materiais e de técnicas construtivas, a disponibilidade de recursos computacionais e os fatores econômicos têm motivado o emprego de elementos estruturais cada vez mais otimizados (GALVÃO, 2004).

Nesse quesito, as estruturas metálicas constituem uma solução estrutural excelente para uma ampla variedade de edificações. Sua concepção resulta em uma estrutura esbelta, leve, eficiente e de rápida montagem, oferecendo ainda economia de recursos (BATELO, 2014). No entanto, quando a esbeltez de um elemento estrutural aumenta, problemas de instabilidade podem surgir em decorrência de grandes deslocamentos gerados por carregamentos estáticos ou dinâmicos, entre os quais se destaca a não linearidade geométrica.

A não linearidade geométrica decorre das diferentes posições de equilíbrio que a estrutura pode assumir quando submetida a esforços. Esses deslocamentos podem gerar o aumento de esforços capazes de levar a estrutura ao colapso. Ao considerar essa não linearidade, é possível identificar a existência de múltiplas configurações de equilíbrio, tanto estáveis quanto instáveis, além de pontos críticos, como limite e bifurcação, ao longo do caminho não linear de equilíbrio. Esses fatores são de suma importância para a análise e concepção de estruturas seguras e econômicas (CUNHA, 2018).

Ademais, para uma análise não linear geométrica de estruturas, que abrange análises estáticas ou dinâmicas, aspectos como a descrição cinemática do problema, a teoria de viga empregada, a metodologia não linear utilizada, integrador temporal, além de outros fatores que podem ser adicionados, no caso deste trabalho, a semirrigidez da ligação, desempenham um papel fundamental na resposta final da análise.

A escolha da descrição cinemática apresenta influência direta no desenvolvimento das equações do problema. Em uma análise não linear geométrica, três tipos de formulações têm se destacado, são elas: a lagrangiana total, lagrangiana atualizada e a formulação corrotacional. Essas descrições se diferenciam entre si basicamente com respeito à configuração de referência do elemento (MENIN, 2006).

No que tange à teoria de flexão, o comportamento da barra pode ser idealizado pelas teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. A solução mais comum para flexão de barras é a utilização da teoria de Euler-Bernoulli. Entretanto, em algumas situações, essa teoria não consegue prever de forma satisfatória o comportamento da estrutura e, assim, faz-se necessária a consideração da teoria de flexão de Timoshenko (RODRIGUES, 2019).

Além disso, outro fator muito comum em estruturas aporticadas de aço é a simplificação do seu comportamento. Usualmente, no desenvolvimento de projetos, adota-se que o comportamento das ligações entre viga-pilar do sistema é idealizado por meio de dois extremos: as ligações flexíveis em que nenhum momento é transmitido entre o pilar e a viga e esses elementos se comportam independentemente; e as ligações totalmente rígidas nas quais ocorre a transmissão total do momento.

Entretanto, nas estruturas reais, investigações experimentais demonstram que a maioria das conexões entre os elementos deve ser tratada como semirrígidas, ou seja, o comportamento dessas ligações é intermediário entre as idealizadas, fato esse que acarreta uma significativa alteração dos deslocamentos e na distribuição de esforços internos na estrutura.

Em geral, qualquer rigidez para uma determinada ligação pode ser alcançada para atender o comportamento estrutural desejado. Esse comportamento é descrito por intermédio de curvas momento-rotação, que, por sua vez, devem ser incorporadas à análise estrutural para que se obtenha informações mais precisas sobre o desempenho da conexão (SANTOS, 1998).

Nesse contexto, de modo a incorporar de forma mais sistemática e eficiente as curvas momento-rotação na análise computacional, são geralmente utilizados modelos baseados em funções matemáticas. Alguns exemplos incluem o modelo proposto por Richard e Abbott (1975), o modelo de potência desenvolvido por Colson (1983), o modelo exponencial proposto por Lui e Chen (1986), entre outros. No entanto, em alguns casos, esses modelos não conseguem representar com fidelidade o comportamento da conexão estudada, uma vez que foram calibrados a partir de um número limitado de dados. Nesses casos, é possível utilizar modelos matemáticos que permitam a inserção direta das curvas momento-rotação na análise. Um exemplo é o modelo multilinear desenvolvido no trabalho de Silva (2009).

Sendo assim, para descrever a curva de equilíbrio, é fundamental a implementação de algoritmos eficientes de solução do sistema de equações não lineares. A adoção de uma metodologia eficiente é de suma importância, pois deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear e traçar a trajetória de equilíbrio completa do sistema estrutural em análise. A obtenção da trajetória de equilíbrio possibilita a identificação de zonas de instabilidade na estrutura, auxiliando no melhor entendimento do seu comportamento (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014).

Dessa forma, este trabalho visa realizar uma análise não linear geométrica e dinâmica de estruturas metálicas. Na análise não linear geométrica, são avaliados aspectos como teoria das vigas, métodos numéricos iterativos e semirrígidez da conexão. Adicionalmente, propõe-se uma abordagem que incorpora curvas momento-rotação diretamente na análise, utilizando o método de ajuste de curva dos mínimos quadrados, de modo a considerar a degradação da conexão durante o processo de carregamento. Enquanto, para a análise dinâmica, são avaliados dois integradores temporais, além do comportamento de estruturas semirrígidas.

## 1.2 JUSTIFICATIVA

De acordo com dados divulgados pela Associação Brasileira de Construção de Estruturas Metálicas (ABCEM), em colaboração com o Centro Brasileiro da Construção em Aço (CBCA), em 2021, o Brasil obteve uma produção de aproximadamente 1,04 milhão de toneladas de aço, representando um crescimento de cerca de 62,7% em relação ao ano de 2018. Dessas, cerca de 550,4 mil toneladas foram destinadas à fabricação de estruturas metálicas, o que representa um aumento de aproximadamente 12,9% em relação ao ano de 2020.

Devido a esse extenso crescimento, a análise de estruturas metálicas é de extrema importância para a indústria da construção civil, uma vez que tais estruturas são amplamente utilizadas em pontes, plataformas *off-shore*, torres de transmissão e edifícios comerciais, dentre outras. O comportamento dessas estruturas sujeitas a carregamentos estáticos e dinâmicos pode resultar em instabilidades e falhas estruturais, o que pode levar a acidentes catastróficos e perda de vidas humanas. Portanto, é essencial estudar e compreender o desempenho dessas estruturas diante dessas condições adversas.

Outro fator importante a ser considerado é a adoção da semirrigidez da ligação, comumente, por simplificação, projetistas adotam extremos nesses casos (ligações rotuladas ou engastadas), entretanto, estudos tem demonstrado que essas considerações subestimam as reais solicitações que estão sendo impostas a estruturas.

Portanto, esta dissertação tem por objetivo realizar uma análise não linear geométrica e dinâmica de estruturas metálicas. Na análise não linear geométrica, são avaliados aspectos como teoria das vigas, métodos numéricos iterativos e semirrigidez da conexão. Adicionalmente, propõe-se uma abordagem que incorpora curvas momento-rotação diretamente na análise, utilizando o método de ajuste de curva dos mínimos quadrados, de modo a considerar a degradação da conexão durante o processo de carregamento. Enquanto, para a análise dinâmica, são avaliados dois integradores temporais, além do comportamento de estruturas semirrígidas.

## 1.3 OBJETIVOS

### 1.3.1 Objetivo geral

Esse trabalho consiste na proposta de analisar o comportamento estático e dinâmico de estruturas reticuladas com ligações semirrígidas, considerando as teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e a não linearidade geométrica.

### 1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos desse trabalho são:

- Validar o código computacional desenvolvido em linguagem Python por meio de exemplos numéricos que apresentem não linearidade geométrica, semirrigidez e estejam sujeitos

a carregamentos estáticos e dinâmicos, comparando os resultados obtidos com os da literatura;

- Investigar o comportamento não linear geométrico de estruturas metálicas utilizando as cinemáticas de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko;
- Analisar a eficácia de técnicas incrementais e iterativas associadas às técnicas de solução de Newton-Raphson e Potra-Pták para resolver sistemas de equações não lineares, e avaliar sua eficiência e capacidade computacional em detectar instabilidades;
- Realizar o estudo do efeito da semirrigidez linear e não linear no comportamento de estruturas metálicas;
- Propor um modelo não linear de ligação semirrígida baseado no Método dos Mínimos Quadrados;
- Analisar o comportamento dinâmico de estruturas com diferentes ligações (flexíveis, rígida e semirrígidas);

## 2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Este capítulo apresentará um panorama teórico abrangente de modo a possibilitar ao leitor uma compreensão prévia dos temas abordados nesta dissertação. Dentre os tópicos a serem abordados, destacam-se a não linearidade geométrica em um contexto do Método dos Elementos Finitos (MEF), as teorias das vigas, a descrição cinemática e as ligações semirrígidas. Esse último aspecto receberá maior ênfase, tendo em vista que é o principal objeto de estudo desta pesquisa.

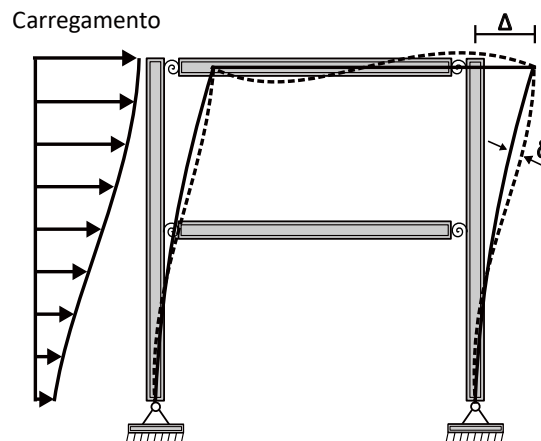
### 2.1 ANÁLISE NÃO LINEAR GEOMÉTRICA

Ao realizar uma análise mais minuciosa, pode-se afirmar que a maioria dos problemas reais modelados em MEF apresentam, em sua essência, não linearidades. No entanto, sempre que possível, é recomendável aproximar o modelo para uma análise puramente linear, a fim de reduzir o custo computacional (OLIVEIRA, 2016).

No entanto, é importante ressaltar que em certas situações a análise linear pode não fornecer resultados precisos do problema em questão. Fenômenos como instabilidade estrutural e flambagem, frequentemente observados em estruturas esbeltas, não podem ser identificados por uma análise puramente linear. Nesses casos, os efeitos de segunda ordem, como a não linearidade geométrica, tornam-se relevantes, portanto, sua consideração se torna imprescindível para prever e garantir a estabilidade do sistema estrutural (LEVY; SPILLERS, 2013).

A não linearidade geométrica está relacionada às diferentes configurações que a estrutura pode assumir à medida que um carregamento é aplicado, tanto a nível global (P- $\Delta$ ) quanto a nível local (P- $\delta$ ), conforme ilustrado na Figura 2.1. Em termos conceituais, pode ser definida como as distintas posições de equilíbrio que a estrutura pode assumir quando submetida a carregamentos (CUNHA, 2018).

Figura 2.1 – Efeitos globais (P- $\Delta$ ) e locais (P- $\delta$ )



Fonte: O autor

Essencialmente, à medida que a estrutura é submetida a carregamentos, ela sofre deslocamentos que podem alterar sua geometria de forma significativa. Quando isso ocorre, é necessário estabelecer novas equações de equilíbrio para representar a posição atual da estrutura, já que o princípio da superposição de efeitos não é mais aplicável. Essa necessidade se deve ao fato de que grandes alterações na configuração da estrutura geram um aumento de forças internas que não podem ser desconsideradas (FERREIRA, 2009).

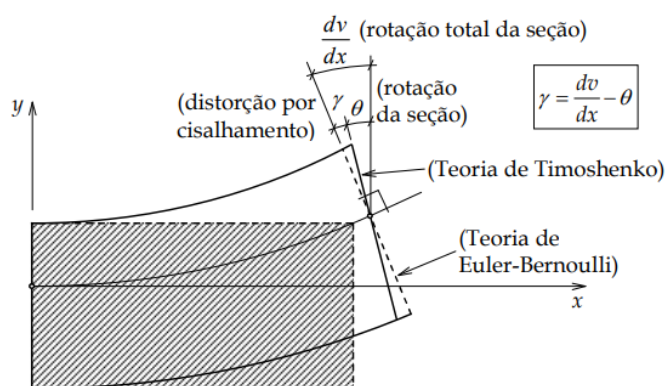
## 2.2 TEORIA DE VIGAS

Elementos de vigas são amplamente utilizados nas mais diversas áreas da engenharia prática, tais como grandes edifícios, plataformas petrolíferas, centros esportivos, entre outras. É possível afirmar que esses elementos constituem um dos componentes estruturais mais relevantes, sendo indispensável compreender a sua teoria de forma a realizar uma análise consistente da estrutura estudada.

Na mecânica estrutural, geralmente, são utilizados dois modelos distintos de vigas para discretizar os elementos que compõem a estrutura. O primeiro deles referente à teoria clássica, também chamado modelo de Euler-Bernoulli e o segundo é modelo de Timoshenko.

Na teoria da viga de Euler-Bernoulli, considera-se que as seções planas permanecem inalteradas após a deformação. O ângulo de rotação da seção transversal é negligenciável e pode ser aproximado pela sua tangente. Desprezam-se as deformações e tensões normais na direção vertical da viga. Por fim, a suposição de que as seções transversais são simétricas em relação a um eixo no plano de flexão simplifica os cálculos e é aplicável a inúmeros casos práticos (BAUCHAU; CRAIG, 2009).

Figura 2.2 – Comparação entre a consideração da seção da viga para os modelos de viga de Euler-Bernoulli e Timoshenko



Fonte: Rodrigues (2019)

O segundo modelo, conhecido como teoria de Timoshenko, aperfeiçoa a teoria clássica das vigas ao considerar os efeitos das deformações cisalhantes de primeira ordem. Nessa teoria, as seções transversais permanecem planas e sofrem rotações em torno do eixo neutro, assim

como no modelo de Euler-Bernoulli. No entanto, as seções não permanecem perpendiculares ao eixo longitudinal deformado (RODRIGUES, 2019). A diferença angular em relação ao eixo normal é causada pelo esforço cortante transversal, que é considerado constante ao longo da seção transversal, conforme ilustrado na Figura 2.2.

De acordo com Felippa (2000), ambos modelos matemáticos descritos estão anteriormente baseados na hipótese de comportamento elástico e isotrópico do material. Assim, podem considerar a não linearidade geométrica devido ao efeito de grandes deslocamentos e rotações, desde que as aja os acoplamentos de uma cinemática que permita esse efeito.

### 2.3 CINEMÁTICA CORROTACIONAL

A escolha da descrição cinemática do problema desempenha um papel singular e fundamental na análise de uma estrutura, uma vez que influenciará diretamente o desenvolvimento das equações do problema e, conseqüentemente, o custo computacional da análise (RODRIGUES, 2019).

Nesse âmbito, em geral, três descrições cinemáticas ganharam amplo destaque na comunidade científica voltada à análise não linear geométrica. Essas descrições podem ser distinguidas entre si, basicamente, pela escolha da configuração de referência.

A primeira delas é a descrição lagrangiana total, na qual a configuração de referência é raramente ou nunca mudada. A segunda descrição é a lagrangiana atualizada, para a qual a última configuração em equilíbrio, uma vez atingida, passa a ser a nova configuração de referência para os passos subsequentes (MENIN, 2006).

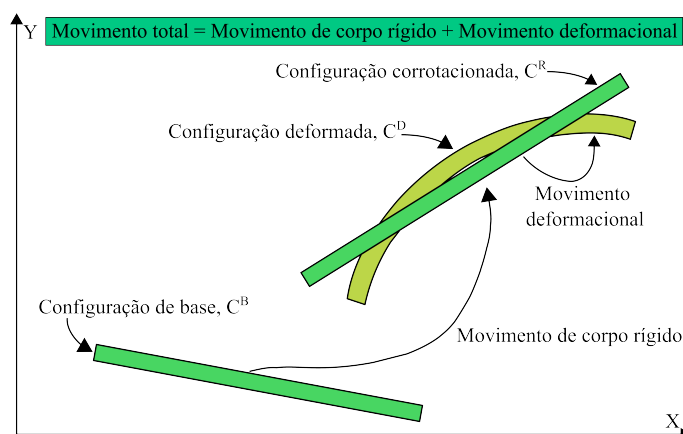
Por fim, há a descrição corrotacional, que consiste na utilização de sistemas de coordenadas locais que acompanham o movimento dos elementos finitos, portanto, giram e transladam como um corpo rígido junto ao elemento. Assim, torna-se possível considerar os efeitos de curvatura por meio da utilização de medidas de tensão e deformação empregadas na análise de pequenos deslocamentos e deformações (CRISFIELD, 1991).

Contudo, segundo Felippa (2000), a descrição corrotacional está gradualmente substituindo as descrições lagrangianas. Esse fato se deve a constatação de diversos pesquisadores que a formulação corrotacional é superior as demais supramencionadas para a análise de estruturas sujeitas a pequenas deformações. De acordo com MONTEIRO (2004), a formulação corrotacional independente do elemento suplanta, com elegância, as demais formulações mencionadas. Entretanto, seu emprego na análise de estruturas sujeitas a grandes deformações se torna inviável.

O conceito da formulação corrotacional surgiu nas décadas de 1950 e 1960, sendo empregado por projetistas aeroespaciais. Ela se baseia em uma ideia bastante antiga da mecânica dos meios contínuos: a separação dos movimentos de corpo rígido e deformacional conforme ilustrado na Figura 2.3. (MENIN, 2006).



Figura 2.3 – Sistema corrotacional



Fonte: Adaptada de [Belo \(2012\)](#)

A premissa básica é a decomposição dos movimentos totais do corpo, de modo a separar os movimentos de corpo rígido dos deformacionais. Na formulação corrotacional, há a divisão em duas configurações de referência.

1- Configuração de base ou inicial  $C^B$ , essa se mantém fixa durante a análise e serve como ponto de referência do sistema para a verificação dos deslocamentos de corpo rígido.

2- Configuração corrotacionada  $C^R$  que se movimenta durante a análise, é obtida a partir do movimento do corpo rígido em relação à configuração inicial do elemento, sendo responsável por medir as tensões e deformações do sólido.

Conforme aponta [Belo \(2012\)](#), a descrição cinemática corrotacional mantém a ortogonalidade do sistema de coordenadas do elemento, assegurando a decomposição exata dos movimentos deformacionais e de corpo rígido. Essa propriedade garante uma melhora na eficiência computacional, desde que exista a matriz inversa do tensor que mapeia uma configuração em outra.

Matematicamente, a presença explícita de uma configuração corrotacional não é essencial. Em princípio, a divisão pode ser apresentada como uma decomposição do campo de deslocamentos. No entanto, a configuração corrotacional é útil para uma compreensão física do elemento estudado e para a identificação das vantagens e desvantagens da abordagem corrotacional ([FELIPPA, 2000](#)).

O conceito de descrição cinemática corrotacional foi introduzido no contexto do Método de Elementos Finitos (MEF) por Argyris (1965), o qual foi o pioneiro na ideia de decomposição do movimento, inicialmente denominada de "aproximação natural". Posteriormente, [Wempner \(1969\)](#) adaptou a teoria de cascas de Kirchhoff para incluir deformações por cisalhamento e desenvolveu a formulação corrotacional para análise de cascas sujeitas a pequenas deformações e grandes deslocamentos.

[Veubeke \(1976\)](#) desenvolveu uma formulação para análise dinâmica utilizando apenas

um único sistema de eixos corrotacionais, denominada "shadow element". Entretanto, essa formulação apresentava limitações na contabilização de pequenas deformações. Além disso, as derivadas do vetor de forças internas não eram utilizadas diretamente na formação da matriz de rigidez tangente, o que resultou em perda de consistência do modelo.

Uma importante contribuição para a evolução da formulação corrotacional no âmbito do MEF foi feita por [Rankin e Brogan \(1986\)](#). Eles introduziram um novo conceito chamado de Element Independent Corotational Formulation (EICR), ou formulação corrotacional de elemento independente, que foi posteriormente aprimorado nos trabalhos de [Rankin e Nour-Omid \(1988\)](#) e [Nour-Omid e Rankin \(1991\)](#). Sua premissa se baseia no uso de projetores (operadores de projeção) para a obtenção dos deslocamentos deformacionais, permitindo a solução de problemas com grandes rotações. Ao contrário do conceito de "shadow element", a matriz de rigidez tangente do elemento é obtida diretamente.

Em [Crisfield \(1990\)](#), é possível encontrar uma formulação corrotacional consistente para análise não linear geométrica pertinente aos elementos de pórtico plano e espacial. Nesse trabalho, o autor demonstra que qualquer elemento que se baseia na teoria geométrica aproximada ou ainda na teoria de deslocamentos infinitesimais é eficiente para acomodar rotações finitas com uma formulação corrotacional generalizada.

O estudo de [Peng e Crisfield \(1992\)](#), descreve uma formulação corrotacional consistente que considera grandes rotações no estudo de estruturas de cascas. Para tanto, os autores utilizando uma combinação do elemento triangular de membrana com deformações constantes e um elemento triangular de placa com curvatura constante. Em [Crisfield e Moita \(1996\)](#), é descrito um procedimento teórico, inicialmente voltado ao estudo de elementos finitos sólidos, que foi posteriormente modificado para englobar o estudo de vigas e pórticos espaciais.

No início do século XXI, [Battini \(2002\)](#) implementou a formulação corrotacional para a análise de vigas planas e espaciais através das formulações propostas por [Crisfield \(1990\)](#) e [Pacoste e Eriksson \(1997\)](#), com o intuito de analisar problemas de instabilidade elástica e elastoplástica. Outrossim, o autor propõe alterações relativas à parametrização das rotações finitas, a definição do referencial local, a inclusão de efeitos de deformação através da introdução de um sétimo grau de liberdade nodal e a consideração de ligações rígidas.

[Yaw \(2009\)](#) apresenta uma formulação corrotacional para elementos de viga bidimensionais baseada no trabalho [Crisfield \(1990\)](#), de maneira que a estrutura ao nível global comporta deslocamentos e rotações arbitrariamente grandes, entretanto, as tensões locais dos elementos de viga devem ser pequenas.

[Xu, Lee e Tan \(2012\)](#) apresenta uma formulação corrotacional aplicada ao Método dos Elementos Finitos Estendidos (XFEM), a fim de resolver problemas de não linearidades severas relativas a conexões por pinos e rótulas plásticas, abrangendo tanto deformações infinitesimais quanto deformações finitas.

Tang *et al.* (2021) propõem uma nova formulação corrotacional consistente para os elementos de vigas de Euler – Bernoulli e Timoshenko, com a finalidade de permitir uma análise da estrutura sujeita a carregamentos distribuídos. Dessa forma, é superada a premissa que o elemento finito esteja sujeito apenas a cargas nodais.

Para além do considerável número de publicações, observa-se nos últimos anos a ocorrência de trabalhos que já não tem como principal objetivo o desenvolvimento teórico da formulação propriamente dita, mas sim utilizar-se da formulação corrotacional em aplicações diretas na resolução de problemas práticos da engenharia estrutural, no âmbito dos assuntos desenvolvidos neste trabalho até o momento pode-se destacar.

Oliveira (2016) desenvolveu a formulação da cinemática corrotacional para elemento de viga unificado com as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko na análise de pórticos e arcos, objetivando-se a avaliação do comportamento não-linear geométrico na análise estática estrutural.

Silva, Cunha e Gutiérrez (2017) apresentaram a formulação corrotacional de um elemento de viga unificado que integra as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Os autores destacam que a principal vantagem da formulação corrotacional é o desacoplamento entre os efeitos locais e globais da estrutura, permitindo a utilização de uma biblioteca de elementos finitos oriundos da análise linear. A extensão destes para a análise não linear geométrica é dada a considerar os efeitos globais devido ao movimento sólido rígido.

Elkaranshawy, Elerian e Hussien (2018) desenvolveram um código em linguagem MATLAB para a análise estática e dinâmica de vigas e pórticos bidimensionais com a utilização da formulação corrotacional e comportamento geometricamente não linear. Os elementos das vigas e pórticos foram discretizadas pelos modelos de Euler-Bernoulli e Timoshenko em que buscou avaliar o efeito de cisalhamento em vigas e pórticos esbeltos (com grande relação comprimento / espessura) e robustos (com pequena relação comprimento / espessura). Os exemplos apresentados são validados com a literatura e com resultados obtidos por modelagens no software ANSYS. Conclui-se que para vigas esbeltas o modelo de viga Euler-Bernoulli e de Timoshenko apresentaram resultados idênticos, entretanto, para vigas robustas houve diferenças significativas, que quando confrontados com os resultados obtidos pelo ANSYS o modelo de viga Timoshenko produz resultados mais precisos devido à inclusão dos efeitos de cisalhamento.

Nascimento (2021) descreve a obtenção de elementos finitos consistentes na análise não linear de vigas, pórticos e arcos a partir de formulações corrotacionais baseadas em diferentes teorias, apontando as semelhanças que justificam sua unificação. Os esforços internos são obtidos a partir do princípio dos trabalhos virtuais em relação ao sistema local, uma vez definidas as funções de interpolação que descrevem o estado de deformação para as três teorias de viga Euler-Bernoulli, Timoshenko e Euler-Bernoulli não linear utilizada. O autor descreve a obtenção da matriz de rigidez tangente em diferentes parcelas, sendo uma delas, denominada matriz de rigidez elástica, distinta para cada uma das 3 teorias de viga. Com alguns exemplos numéricos,

se demonstrou a habilidade da formulação unificada para obter respostas de comportamento severamente não linear para vigas.

## 2.4 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

Conforme mencionado anteriormente, a forma como os elementos são discretizados, a cinemática adotada e o tipo de análise aplicado exercem forte influência nos resultados analíticos e na concepção estrutural. Adicionalmente, um campo de estudo que tem despertado grande interesse na comunidade acadêmica é a análise das ligações entre vigas e pilares, bem como sua influência no desempenho estrutural.

Segundo [Chan e Chui \(2000\)](#), as ligações são projetadas para interligar e permitir a transferência de forças e momentos entre os membros estruturais (vigas e colunas), tendo impacto direto na análise, desempenho e no custo final das estruturas. Além de influenciar os deslocamentos, como flechas e deslocamentos laterais, falhas nas ligações podem ser um fator determinante para o colapso da estrutura, de acordo com ([FERREIRA, 1999](#)).

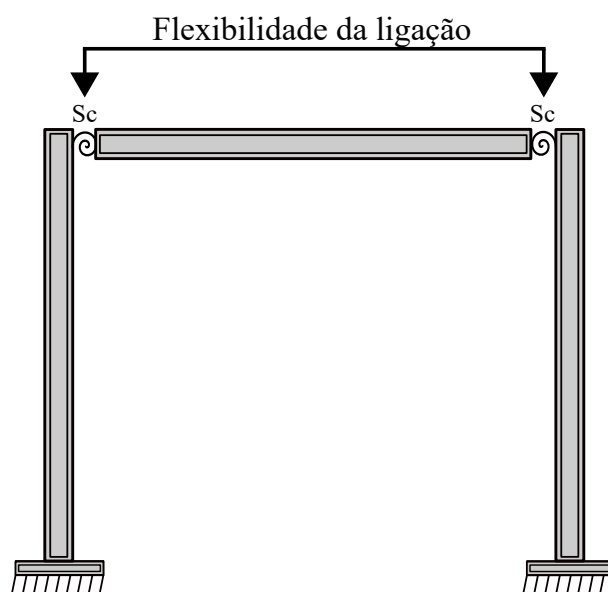
Convencionalmente, as conexões estruturais são analisadas e projetadas considerando a adoção de extremos, tais como ligações extremamente rígidas (engastes) ou extremamente flexíveis (rótulas), em função das simplificações de projeto. A condição de rigidez implica na transmissão total dos momentos e na ausência de rotações entre os elementos, enquanto a condição de rotulagem implica na ausência de transmissão de momento e em rotações independentes para cada elemento do sistema de viga-pilar ([CHEN; KISHI; KOMURO, 2011](#)).

No entanto, pesquisas experimentais conduzidas por [Wilson e Moore \(1917\)](#), [Nader e Astaneh \(1991\)](#) e [Benussi, Nethercot e Zandonini \(1996\)](#) demonstraram que as conexões estruturais apresentam comportamento intermediário entre os extremos mencionados. Isso significa que há um grau de flexibilidade finita, o que indica que, na prática, as conexões são semirrígidas.

Considerando esse comportamento semirrígido das conexões estruturais, é possível obter uma resposta mais precisa do comportamento estrutural real. Para isso, os nós devem ser modelados como elementos de mola e inseridos na intersecção da conexão entre a viga e a coluna, conforme ilustrado na Figura 2.4. Os valores de  $S_c$  são obtidos conforme as características de cada conexão. É importante ressaltar que essa modelagem afeta apenas a concepção da conexão, sem alterar as propriedades geométricas da estrutura.

Embora o estudo do comportamento das conexões semirrígidas não seja essencialmente novo (as primeiras investigações desse fenômeno remontam a 1917, quando Wilson e Herbert conduziram experimentos com juntas rebitadas), ainda há muito a ser explorado nesse campo. Nesse sentido, nas últimas décadas, diversos trabalhos têm sido realizados sobre o tema.

Figura 2.4 – Pórtico com ligações semirrígidas



Fonte: O autor

Embora o estudo do comportamento das conexões semirrígidas não seja essencialmente novo (as primeiras investigações desse fenômeno remontam a 1917, quando Wilson e Herbert conduziram experimentos com juntas rebitadas), ainda há muito a ser explorado nesse campo. Nesse sentido, nas últimas décadas, diversos trabalhos têm sido realizados sobre o tema.

Lui e Chen (1986) propõem um método analítico baseado no método dos elementos finitos para determinar os esforços e deslocamentos atuantes em pórticos de aço, considerando os efeitos de não linearidade geométrica e semirrígidez da conexão. Esse estudo demonstrou a importância da consideração real do comportamento da conexão e como tal consideração afeta diretamente na estabilidade, comportamento e resistência das estruturas metálicas.

O estudo de Junior (1990) consistiu no desenvolvimento de um código computacional para um elemento híbrido de viga-pilar, que considera a não linearidade geométrica e a semirrígidez das conexões. Esse código utilizou vários modelos de comportamento de diferentes categorias de conexão. Já Monteiro (1997) desenvolveu um código computacional para análise de pórticos planos, que possibilitou a avaliação da influência das conexões semirrígidas nas estruturas.

Christopher e Bjorhovde (1999) analisaram o comportamento de pórticos com ligações semirrígidas e com diferentes cenários de carga e descarga. Dhillon e O'Malley (1999) expuseram uma análise não linear de segunda ordem, que inclui os efeitos da flexibilidade das conexões e da não linearidade geométrica, em conjunto disposições projetivas do AISC.

Chan e Chui (2000) desenvolveram um elemento híbrido com duas molas e rigidez à rotação localizada na extremidade. No entanto, esse elemento apresentou imprecisão na avaliação dos momentos fletores da estrutura quando submetido a cargas distribuídas. Observando essa deficiência, DelSavio (2004) propôs um novo modelo que possibilitou uma modelagem mais

precisa do comportamento da estrutura, sem a necessidade de qualquer tipo de discretização do carregamento. Além disso, o elemento consegue acoplar os efeitos das rizezas axial, translacional e rotacional.

[Pinheiro \(2003\)](#) expõe um código computacional para análise estática não linear geométrica de pórticos planos com ligações semirrígidas. Dando continuidade ao trabalho de [Pinheiro \(2003\)](#), [Silva \(2009\)](#) apresenta uma ferramenta computacional para uma análise estática e dinâmica de estruturas metálicas com ligações semirrígidas.

[Castro \(2006\)](#) analisou diferentes modelos de pórticos de aço, utilizando-se de molas rotacionais não lineares para representar analiticamente o efeito da semirrigidez em ligações viga-pilar.

[Agostini \(2014\)](#) desenvolveu um programa computacional para determinar o nível de segurança de estruturas projetadas considerando os efeitos da não linearidade geométrica e da flexibilidade das ligações. Os resultados demonstraram que existe uma baixa influência da não linearidade geométrica e considerável influência da semirrigidez das ligações para a confiabilidade de estruturas, tendo em vista o estado limite de serviço estabelecido em função de deslocamento.

[Zhang et al. \(2018\)](#) propõem um modelo de componentes multimolas para avaliar a rigidez rotacional de pórticos. Os resultados obtidos demonstraram que o efeito da ligação semirrígida é crucial para obter uma distribuição realista de cargas e deformação da estrutura.

[Hai et al. \(2019\)](#) criaram um modelo numérico computacional em linguagem de programação MATLAB de um elemento híbrido para simular a semirrigidez da ligação viga-coluna de estruturas planas de aço sujeitas a grandes deslocamentos e cargas estáticas. Esse modelo é capaz de considerar não apenas o efeito de  $P-\Delta$ , mas também a deformação axial causada pela flexão do elemento.

[Mohammed e Ismael \(2019\)](#) apresentaram uma análise numérica utilizando o método dos elementos finitos para investigar o efeito de conexões semirrígidas no comportamento pós-flambagem de pórticos bidimensionais com diferentes tipos de apoio e carregamento lateral. [Souza, Vanalli e Luz \(2020\)](#) expuseram um modelo numérico-computacional desenvolvido em linguagem SCILAB para análise estática de pórticos planos considerando a não linearidade geométrica e conexões semirrígidas. A semirrigidez é simulada por um elemento de ligação de comprimento nulo, que considera a rigidez axial, tangencial e rotacional.

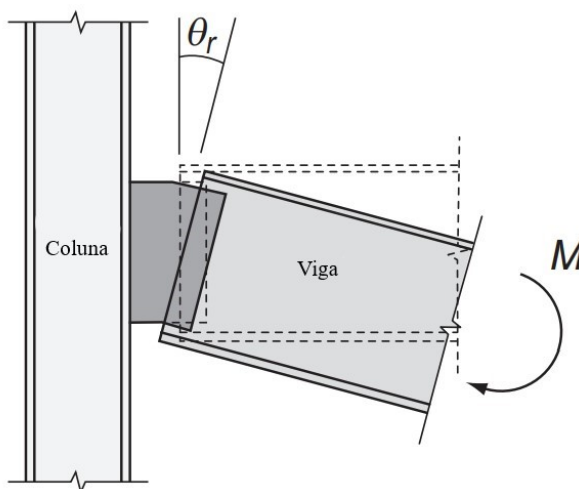
[Hou et al. \(2021\)](#) enunciam um estudo para análise tridimensional de pórticos metálicos com ligações semirrígidas. Molas rotacionais são utilizadas para simular a semirrigidez da ligação. Além disso, os autores propõem um método de duas etapas de modo a quantificar o dano da ligação.

Geralmente, para uma conexão viga-coluna semirrígida, o conjunto geral de forças transmitidas pode incluir força axial, força de cisalhamento, momento de flexão e torção. Para

estudos que se tem um referencial plano (bidimensional), o efeito da torção pode ser desprezado. Inclusive, para a maioria das conexões, as deformações axiais e de cisalhamento são geralmente pequenas em comparação com a deformação rotacional. Conseqüentemente, para fins práticos, apenas a deformação rotacional da ligação precisa ser considerada. (CHEN; LUI, 1991).

Isto posto, no processo de análise estrutural de uma conexão é considerado apenas os efeitos do momento fletor transmitido pela ligação ( $M$ ) e o ângulo de rotação ( $\theta_r$ ) conforme exposto na Figura 2.5.

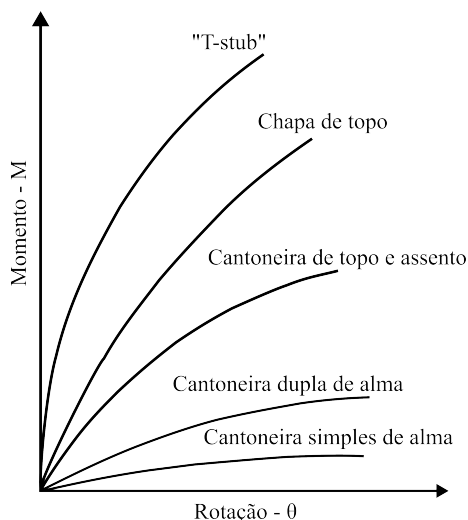
Figura 2.5 – Comportamento momento-rotação de uma ligação



Fonte: Adaptado de CHEN, KISHI e KOMURO (2011)

A descrição desse comportamento à flexão da conexão é caracterizada por curvas momento-rotação, conforme mostrado na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Curvas momento-rotação para distintos tipos de ligação



Fonte: Adaptado de Avakian(2007)

A partir de uma análise da Figura 2.6, algumas observações podem ser feitas em relação

as curvas momento-rotação.

A ligação de cantoneira simples de alma representa a conexão com maior flexibilidade. Por outro lado, a conexão T-stub é conhecida por apresentar maior rigidez. Isso significa que, para um mesmo valor específico de momento, uma maior rotação é encontrada na ligação de cantoneira simples de alma. Porém, para um valor específico de rotação, um valor menor de momento é transmitido por essa conexão.

Fica evidenciado que todas as conexões apresentam curvas de momento-rotação que se encontram entre os casos extremos de rótulas (eixo horizontal) e engastes (eixo vertical). Isso comprova que, na prática, todas as ligações possuem comportamento semirrígido.

Além disso, observa-se que, na fase inicial, há uma tendência das diferentes conexões reagirem de forma linear diante da atuação de momento fletor, o que permite definir a rigidez inicial. De acordo com [Silva \(2009\)](#), essa resposta linear da curva momento-rotação sugere a existência de uma fase elástica que desaparece à medida que o carregamento assume valores mais elevados. Essa mudança de comportamento é geralmente causada pela existência de concentração de tensões, imperfeições geométricas e descontinuidades nos elementos que compõem a ligação, ou mesmo pela plastificação de seus componentes.

Outrossim, a mesma autora afirma que, após essa fase linear, as ligações desenvolvem comportamento fortemente não linear devido ao aumento do momento fletor solicitante, mas que apresentam um certo padrão de comportamento. Por fim, observa-se também a existência de comportamento assintótico ao final do processo de carregamento, que caracteriza o momento último suportado pela ligação antes da ruína.

Em geral, a categorização das relações entre momento e rotação das conexões pode ser dividida em três tipos principais: modelos analíticos, matemáticos e mistos. Nos modelos analíticos, a relação é baseada nas propriedades físicas da conexão. Nos modelos matemáticos, por outro lado, a relação é expressa por uma função matemática na qual os parâmetros são determinados pelo ajuste da curva dos resultados do teste. Por último, os modelos mistos são combinações dos modelos analíticos e matemáticos. Ao formular modelos mistos, as funções são expressas como constantes de ajuste de curva e parâmetros geométricos ([CHEN; KISHI; KOMURO, 2011](#)).

No entanto, de acordo com [Chen e Lui \(1991\)](#), os modelos matemáticos apresentam maior simplicidade em comparação com os modelos analíticos e mistos. [Pinheiro \(2003\)](#) e [Silva \(2009\)](#) justificam a escolha desse modelo, o qual proporciona eficiência computacional, primeiras derivadas sempre positivas, precisão e ajuste satisfatório aos dados experimentais. O Modelo de [Richard e Abbott \(1975\)](#) e o modelo exponencial de [Lui e Chen \(1986\)](#) são exemplos da sua aplicação. Como muitos testes extensivos foram conduzidos em diferentes tipos de conexões nas últimas décadas, há disponibilidade de muitas curvas momento-rotação para calcular as funções por meio das técnicas de ajuste de curva.



Dessa forma, com o intuito de obter análises cada vez mais realistas e condizentes, diversos pesquisadores buscam formas de uma melhor representação e incorporação da curva momento-rotação nas análises. Em [Ahmed \(2017\)](#) uma formulação baseada em três mecanismos de falha simples considerando deformações de flexão e cisalhamento é desenvolvida. [Zhou et al. \(2019\)](#) propõem um modelo analítico prático para a relação momento-rotação. Esse modelo exponencial é composto de dois parâmetros baseados na resistência ao momento último e na rigidez rotacional inicial.

Os autores em [ADEOTI et al. \(2021\)](#) apresentam um modelo polinomial de quarta ordem para descrever o comportamento momento-rotação da conexão. Por outro lado, [Tran e Kim \(2022\)](#) propõem um novo modelo híbrido que integra redes neurais artificiais para prever o comportamento momento-rotação ( $M-\theta$ ) da ligação. Além disso, [Souza et al. \(2022\)](#) desenvolvem um modelo constitutivo unidimensional da conexão baseado na Mecânica do Dano Contínuo, que leva em consideração a redução gradual da rigidez rotacional.

No entanto, a maioria desses métodos possui alta complexidade, requer múltiplos parâmetros, apresenta formulações extensas e são adequados apenas para certos tipos de conexões. Dessa forma, com o intuito de contornar essas limitações, este trabalho considera a possibilidade do usuário fornecer pontos da curva momento-rotação da conexão obtidos diretamente de ensaios experimentais. A técnica de ajuste de curva pelo método dos mínimos quadrados é implementada para determinar uma função que estime a rigidez da conexão em cada nova iteração.

## 2.5 METODOLOGIA DE SOLUÇÃO NÃO LINEAR

### 2.5.1 Métodos incrementais e iterativos acoplados a técnicas de continuação

Para análise de sistemas estruturais com comportamento não linear, é fundamental ter uma estratégia eficiente para resolver sistemas de equações algébricas não lineares. Para tanto, são empregadas metodologias combinadas com procedimentos incrementais e iterativos de solução.

O método de Newton-Raphson é um método numérico clássico utilizado na engenharia para resolver sistemas de equações não lineares. Esse método é caracterizado por ser incremental-iterativo e considerar as forças internas e a carga externa prescrita. Atualmente, é um dos métodos mais empregados para solucionar problemas não lineares em engenharia estrutural.

Entretanto, em alguns casos, é necessário recorrer a métodos com ordem de convergência superior, especialmente quando se busca utilizar aproximações iniciais que apresentam imprecisão no método de Newton-Raphson, ou quando se procura uma maior eficiência computacional. Nesse contexto, [Potra e Pták \(1984\)](#) apresentaram um método de terceira ordem que consiste em duas avaliações da função e uma avaliação da primeira derivada em duas etapas.

Vale ressaltar que o estudo de métodos com duas ou mais etapas na função objetivo tem sido recorrente, especialmente na área da programação matemática. Em [Soleymani et al. \(2012\)](#)

e [Cordero et al. \(2010\)](#), são apresentados dois métodos iterativos para a solução de equações não lineares, baseados na modificação do método de Potra-Pták.

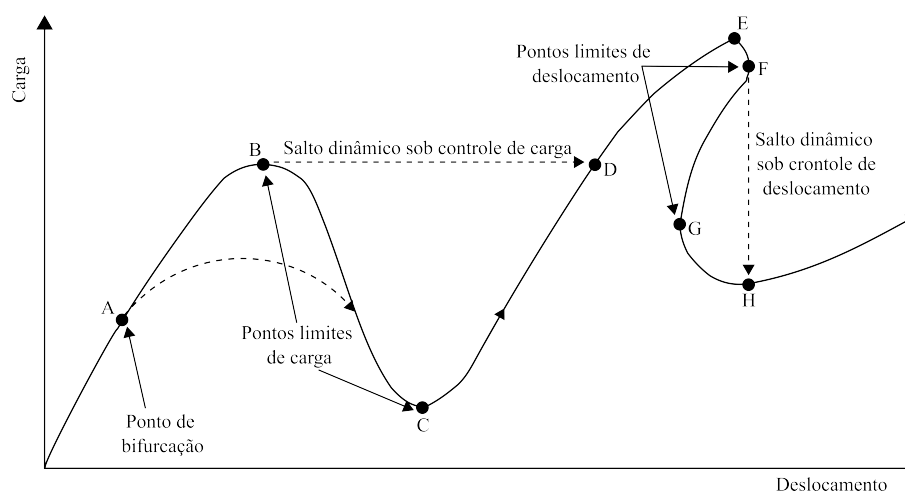
Apesar de possuir uma vasta relevância no campo matemático, o método de Potra-Pták, somente agora, está ganhando destaque na análise estrutural. [Souza et al. \(2017\)](#) desenvolveu um código computacional em ambiente Matlab para o estudo da não linearidade geométrica aplicada a problemas de treliças espaciais. Onde foi evidenciado o melhor desempenho numérico do algoritmo proposto com o método de Potra-Pták, em comparação com as análises feitas com o esquema iterativo de Newton-Raphson Padrão.

Em [Segundo \(2019\)](#), o método foi utilizado no estudo da não linearidade geométrica em vigas, colunas, pórticos e arcos. Já em [Reis \(2003\)](#), foi aplicado na análise de treliças metálicas com não linearidade física.

Além disso, [Soares \(2021\)](#) comparou a eficiência computacional dos métodos de Newton-Raphson e Potra-Pták aplicados na análise de pórticos semirrígidos. Os resultados indicaram que o método de Potra-Pták apresentou melhor eficiência tanto no número de iterações quanto no tempo de processamento.

Contudo, uma dificuldade inerente a esses métodos de solução é a aproximação próxima aos pontos limites na trajetória de equilíbrio, conforme ilustrado na Figura 2.7. Nesses pontos, há dificuldades em estabelecer fenômenos como snap-through (ponto crítico em relação à carga), snap-back (ponto crítico em relação ao deslocamento) e pontos de bifurcação, a partir dos quais se originam duas ou mais trajetórias de equilíbrio.

Figura 2.7 – Caminho de equilíbrio



Fonte: Adaptado de [Maximiano \(2012\)](#)

Esse fenômeno ocorre porque esses métodos utilizam uma estratégia que mantém o parâmetro de carga constante durante as iterações, resultando em um mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, tornando-a singular nestes pontos ([CHAN; CHUI, 2000](#)). Em outras palavras, somente esses métodos não são suficientes para ultrapassar os pontos limites de carga

que possam surgir ao longo da trajetória de equilíbrio.

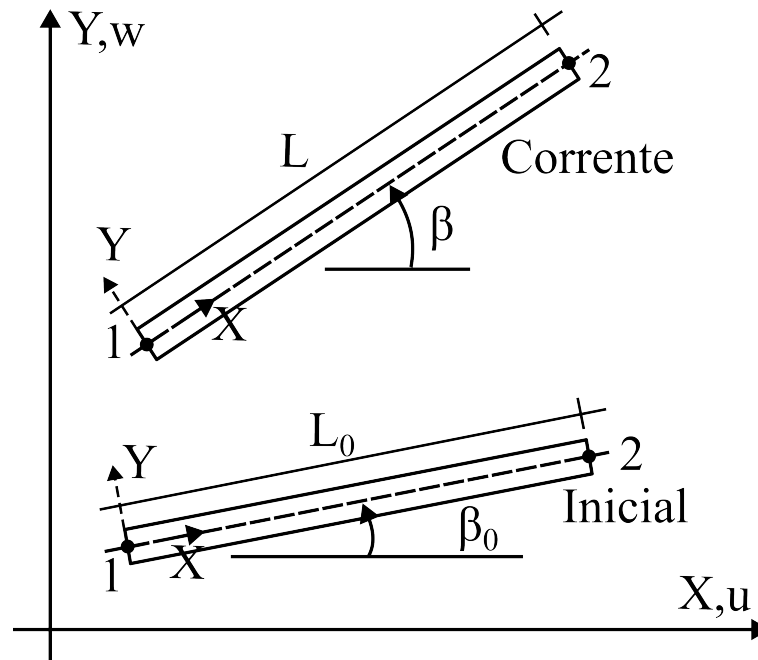
Para contornar esse problema, é preciso incorporar ao método de solução estratégias de incremento de carga e iteração. Dessa forma, é possível ultrapassar os pontos limites e traçar toda a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural em análise. As próximas seções abordarão essas estratégias em detalhes.

### 3 FORMULAÇÕES NUMÉRICAS

#### 3.1 FORMULAÇÃO CORROTACIONAL PARA PÓRTICOS PLANOS

A descrição cinemática corrotacional para o elemento de viga de Euler-Bernoulli utiliza duas configurações de referência, como ilustrado na Figura 3.1. A primeira configuração, chamada de configuração inicial (fixa), é utilizada para obter os movimentos de translação e rotação do elemento. Já a segunda configuração, chamada de configuração corrotacionada (ou corrente), é empregada para calcular as tensões e deformações.

Figura 3.1 – Coordenada inicial e corrente do elemento de viga



Fonte: Adaptado de Yaw (2009)

A configuração de referência inicial, representada pela Equação (3.1), permite obter o comprimento do elemento a partir das coordenadas iniciais dos nós. Nessa configuração,  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$  correspondem, respectivamente, aos nós inicial e final do elemento, localizados no plano cartesiano.

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (3.1)$$

Após cada novo incremento de carga, é possível calcular o comprimento corrente  $L$  de cada barra utilizando por meio de uma aproximação linear dada na Equação (3.2). Nessa equação,  $u$  e  $w$  correspondem aos deslocamentos nodais do referencial global nas direções  $X$  e  $Y$ , respectivamente.

$$L = \sqrt{((X_2 + u_2) - (X_1 + u_1))^2 + ((Y_2 + w_2) - (Y_1 + w_1))^2} \quad (3.2)$$

O deslocamento axial no sistema corrotacionada do elemento é calculado conforme a Equação (3.3).

$$u_1 = L - L_0 \quad (3.3)$$

Porém, em situações em que a diferença entre  $L$  e

A primeira delas consiste na translação do elemento como um corpo rígido, conforme indicado pelas linhas tracejadas que ligam o nó 1 ao nó 2, e que estão paralelas à configuração de referência. A segunda etapa é a rotação de corpo rígido, representada pelo ângulo  $\alpha$ . Já a terceira etapa corresponde à deformação axial e flexional do elemento, sendo  $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$  os ângulos de rotação medidos a partir da configuração de referência, representados pelas Equações (3.4) e (3.5), respectivamente, e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  os ângulos de rotação no sistema local.

$$\theta_{1l} = \theta_1 - \beta_0 - \beta \quad (3.4)$$

$$\theta_{2l} = \theta_2 - \beta_0 - \beta \quad (3.5)$$

O ângulo atual de rotação do pórtico em relação às coordenadas globais do sistema é representado como  $\beta$ . Os valores de  $\cos\beta$  e  $\sin\beta$  são expressos pelas Equações (3.6) e (3.7), respectivamente.

$$\cos\beta = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L} \quad (3.6)$$

$$\sin\beta = \frac{Y_2 + w_2 - Y_1 - w_1}{L} \quad (3.7)$$

As expressões para os ângulos inicial  $\beta_0$  e atual do elemento  $\beta$  são obtidas, respectivamente, pelas Equações (3.8) e (3.9).

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right) \quad (3.8)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + w_2 - Y_1 - w_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right) \quad (3.9)$$

No entanto, é importante destacar que as equações (3.4), (3.5), (3.8) e (3.9) só são válidas para valores de  $\beta$  tais que  $|\beta < \pi/2|$ . Para contornar essa limitação, Souza (2000) propôs uma abordagem alternativa. Assumindo que as rotações locais são moderadas, as Equações (3.4) e (3.5) foram modificadas e escritas como (3.10) e (3.11), respectivamente.

$$\sin\theta_{1l} = \sin(\theta_1 - \beta_0 - \beta) = \sin(\beta_1 - \beta) = \cos\beta\sin\beta_1 - \sin\beta\cos\beta_1 \quad (3.10)$$

$$\cos\theta_{1l} = \cos(\theta_1 - \beta_0 - \beta) = \cos(\beta_1 - \beta) = \cos\beta\cos\beta_1 + \sin\beta\sin\beta_1 \quad (3.11)$$

Nessa abordagem, o valor de  $\beta_1$  é descrito pela Equação (3.12).

$$\beta_1 = \theta_1 + \beta_0 \quad (3.12)$$

E analogamente para  $\beta_2$  na Equação (3.13).

$$\beta_2 = \theta_2 + \beta_0 \quad (3.13)$$

A partir das Equações (3.6) e (3.7), os ângulos  $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$  podem ser reescritos como mostrado nas Equações (3.14) e (3.15).

$$\theta_{1l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta\sin\beta_1 - \sin\beta\cos\beta_1}{\cos\beta\cos\beta_1 + \sin\beta\sin\beta_1}\right). \quad (3.14)$$

$$\theta_{2l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta\sin\beta_2 - \sin\beta\cos\beta_2}{\cos\beta\cos\beta_2 + \sin\beta\sin\beta_2}\right), \quad (3.15)$$

Caso não haja carregamentos concentrados aplicados entre os nós do elemento finito, a relação entre a força normal (N) e o deslocamento axial é definida pela Equação (3.16).

$$N = \frac{EAu_1}{L_0} \quad (3.16)$$

Em que A é a área da seção transversal e E é o módulo de Young, como indicado na Equação (3.16). Enquanto, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga ( $M_1$  e  $M_2$ ) podem ser diretamente relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$ ), conforme mostrado nas Equações (3.17).

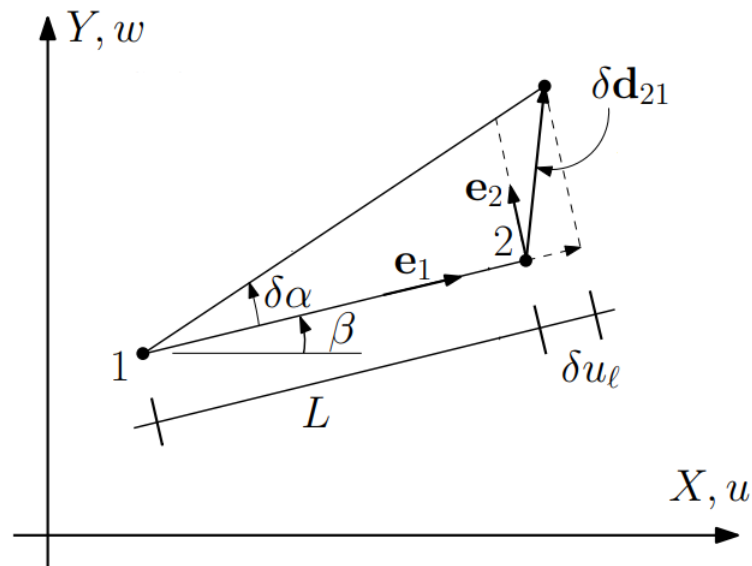
$$\begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Em que  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. Considerando que os deslocamentos transversais locais são nulos, as forças transversais locais de cisalhamento podem ser calculadas com base em estática simples, já que os momentos finais são conhecidos no sistema local. Assumindo que nenhuma força é aplicada entre os nós de uma viga e somando momentos em torno do nó 2, a força de cisalhamento nos nós 1 e 2 pode ser determinada utilizando a relação descrita na Equação (3.18)

$$V_1 = \frac{M_1 + M_2}{L} = -V_2 \quad (3.18)$$

A Figura 3.2 estabelece a relação entre as variáveis nos sistemas corrotacional e global. Considere uma pequena variação nas diferenças dos deslocamentos nos nós 1 e 2, representada por  $\delta \mathbf{d}_{21}$ .

Figura 3.2 – Pequena variação dos deslocamentos na configuração atual



Fonte: Adaptado de Yaw (2009)

A projeção de  $\delta \mathbf{d}_{21}$  no versor  $\mathbf{e}_1$  leva a um pequeno movimento na direção axial em coordenadas locais  $\delta u_1$ , conforme descrito na Equação (3.19).

$$\delta u_1 = (\mathbf{e}_1)^T \delta \mathbf{d}_{21} \quad (3.19)$$

Ao reescrever a Equação (3.19) em termos de deslocamentos virtuais, obtém-se a Equação (3.20).

$$\begin{aligned}
\delta u_1 &= \cos \beta \cdot \delta u_2 - \cos \beta \cdot \delta u_1 + \sin \beta \cdot \delta v_2 - \sin \beta \cdot \delta v_1 \\
&= -\cos \beta \cdot \delta u_1 - \sin \beta \cdot \delta v_1 + 0 \cdot \delta \theta_1 + \cos \beta \cdot \delta u_2 + \sin \beta \cdot \delta v_2 + 0 \cdot \delta \theta_2 \\
&= \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 & -\cos \beta & \sin \beta & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{p} = (\mathbf{r})^T \delta \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{3.20}$$

A variação dos deslocamentos globais do vetor  $\mathbf{p}^T$  do elemento, representada por  $\delta \mathbf{p}$ , é definida pela Equação (3.21).

$$(\mathbf{p})^T = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{bmatrix} \tag{3.21}$$

Para estabelecer a relação entre as rotações no sistema corrotacional e global, é necessário realizar uma pequena rotação, como ilustrado na Figura 3.2. Ao considerar uma mudança infinitesimal no ângulo de rotação, a variação no comprimento do arco pode ser descrita como  $L\delta\alpha = (\mathbf{e}_2)^T \delta \mathbf{d}_{21}$ , como indicado na Equação (3.22).

$$\delta\alpha = \frac{1}{L} (\mathbf{e}_2)^T \delta \mathbf{d}_{21} \tag{3.22}$$

A Equação (3.22) pode ser reescrita em termos de deslocamentos nodais, assumindo a forma da Equação (3.23).

$$\begin{aligned}
\delta\alpha &= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{L} (\sin \beta \cdot \delta u_1 - \sin \beta \cdot \delta u_2 - \cos \beta \cdot \delta v_1 + \cos \beta \cdot \delta v_2) \\
&= \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix} \delta \mathbf{p}
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Definindo  $\mathbf{z}$  na Equação (3.24).

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3.24}$$

A Equação (3.23) pode ser reescrita conforme Equação (3.25).

$$\delta\alpha = \frac{1}{L} (\mathbf{z})^T \delta \mathbf{p} \tag{3.25}$$

Ao variar o ângulo de rotação no sistema de coordenadas corrotacionais, é possível chegar à Equação (3.26).



$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_{1l} \\ \delta\theta_{2l} \end{Bmatrix} = \delta \begin{Bmatrix} \theta_1 + \beta_0 - \beta \\ \theta_1 + \beta_0 - \beta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 + \delta\alpha \\ \delta\theta_2 + \delta\alpha \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

A Equação (3.26) pode ser reescrita como dado na Equação (3.27).

$$\begin{Bmatrix} \delta\theta_{1l} \\ \delta\theta_{2l} \end{Bmatrix} = \left[ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} (\mathbf{z})^T \\ (\mathbf{z})^T \end{bmatrix} \right] \delta\mathbf{p} = (\mathbf{A})^T \delta\mathbf{p} \quad (3.27)$$

Por fim, combinando as Equações (3.20) e (3.27), é possível determinar a relação entre os deslocamentos nos sistemas corrotacional e global, conforme a Equação (3.28).

$$\delta\mathbf{p}_1 = \begin{Bmatrix} \delta u_1 \\ \delta\theta_{1l} \\ \delta\theta_{2l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r})^T \\ (\mathbf{A})^T \end{bmatrix} \delta\mathbf{p} = \mathbf{B}\delta\mathbf{p} \quad (3.28)$$

A matriz  $\mathbf{B}$  descrita na Equação (3.29) relaciona diretamente os deslocamentos em ambos os sistemas de coordenadas.

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 1 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 0 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Após determinar a relação entre as variáveis nos dois sistemas de coordenadas, é necessário impor a equivalência do trabalho virtual interno para a teoria de vigas de Euler-Bernoulli, de modo a obter a Equação (3.30).

$$\delta\mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = N\delta u_{lv} + \bar{M}_1\delta\theta_{1vv} + \bar{M}_2\delta\theta_{2lv} = (\delta\mathbf{p}_{lv})^T \mathbf{q}_i \quad (3.30)$$

Em que  $\mathbf{q}_i$  é representado pela Equação (3.31).

$$\mathbf{q}_i = \begin{bmatrix} N & \bar{M}_1 & \bar{M}_2 \end{bmatrix}^T \quad (3.31)$$

Substituindo (3.28) em (3.30) chega-se à Equação (3.32)

$$\delta\mathbf{p}_v^T \mathbf{q}_i = N\delta u_{lv} + \bar{M}_1\delta\theta_{1lv} + \bar{M}_2\delta\theta_{2lv} = (\delta\mathbf{p}_{lv})^T \mathbf{q}_i \quad (3.32)$$

Por inspeção, é possível concluir que a equação (3.32) demonstra a relação entre as forças internas no eixo de coordenadas global e corrotacional, e pode ser reescrita conforme mostrado na Equação (3.33).

$$\mathbf{q}_i = \mathbf{B}^T \mathbf{q}_i^c \quad (3.33)$$

Ao fazer a variação da Equação (3.33), é possível obter a matriz de rigidez no sistema global, representada pela Equação (3.34).

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{q}_i &= (\mathbf{B})^T \delta \mathbf{q}_{li} + \delta (\mathbf{B})^T \mathbf{q}_{li} = (\mathbf{B})^T \delta \mathbf{q}_{li} + N \delta \mathbf{B}_1 + \bar{M}_1 \delta \mathbf{B}_2 + \bar{M}_2 \delta \mathbf{B}_3 \\ &= \mathbf{k}_{t1} \delta \mathbf{p} + \mathbf{k}_{t\sigma} \delta p\end{aligned}\quad (3.34)$$

Ao fazer a variação das Equações (3.15) e (3.17) e organizá-las em uma matriz, pode-se obter a Equação (3.35).

$$\delta \mathbf{q}_{li} = \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta \bar{M}_1 \\ \delta \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \delta \mathbf{p}_1 = \mathbf{C}_1 \delta \mathbf{p}_1 \quad (3.35)$$

Em que  $r = \sqrt{I/A}$  representa o raio de giração. Ao substituir a Equação (3.35) no primeiro termo da Equação (3.34), obtém-se a Equação (3.36).

$$(\mathbf{B})^T \delta \mathbf{q}_{li} = (\mathbf{B})^T \mathbf{C}_1 \delta \mathbf{p}_1 = (\mathbf{B})^T \mathbf{C}_l \mathbf{B} \delta \mathbf{p} = \mathbf{k}_{t1} \delta \mathbf{p} \quad (3.36)$$

Por inspeção, é possível observar que a Equação (3.36) resulta na matriz de rigidez material  $\mathbf{K}_M$ , apresentada na Equação (3.37).

$$\mathbf{K}_M = (\mathbf{B})^T \mathbf{C}_l \mathbf{B} \quad (3.37)$$

Ao variar o vetor  $\mathbf{B}_1$  chega-se à Equação (3.38).

$$\begin{aligned}\delta \mathbf{B}_1 &= \delta \mathbf{r} = \delta \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & 0 & \cos \beta & \sin \beta & 0 \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \sin \beta & -\cos \beta & 0 & -\sin \beta & \cos \beta & 0 \end{bmatrix}^T \delta \beta = \mathbf{z} \delta \beta\end{aligned}\quad (3.38)$$

Observando a Figura 3.2 que  $\delta \beta = \delta \alpha$  e substituindo (3.25) em (3.38) encontra-se a Equação (3.39).

$$\delta \mathbf{B}_1 = \frac{1}{L} \mathbf{z}(\mathbf{z})^T \delta \mathbf{p} \quad (3.39)$$

Ao realizar a variação dos vetores  $\mathbf{B}_2$ ,  $\mathbf{z}$  e  $\delta \left(-\frac{1}{L}\right)$  chega-se às Equações (3.40), (3.41) e (3.42), respectivamente.

$$\delta \mathbf{B}_2 = \delta \left( -\frac{1}{L} \mathbf{z} \right) = \delta \left( -\frac{1}{L} \right) \mathbf{z} + \left( -\frac{1}{L} \right) \delta \mathbf{z} \quad (3.40)$$

$$\delta \mathbf{z} = \delta \begin{Bmatrix} \text{sen } \beta \\ -\text{cos } \beta \\ 0 \\ -\text{sen } \beta \\ \text{cos } \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{cos } \beta \\ \text{sen } \beta \\ 0 \\ -\text{cos } \beta \\ -\text{sen } \beta \\ 0 \end{Bmatrix} \delta \alpha = -\mathbf{r} \delta \alpha = \frac{-1}{L} \mathbf{r}(\mathbf{z})^T \delta \mathbf{p} \quad (3.41)$$

$$\delta \left( -\frac{1}{L} \right) = (-1) \delta (L^{-1}) = (-1) (L^{-2}) \delta u_1 = \frac{\delta u_1}{L^2} = \frac{1}{L^2} (\mathbf{r})^T \delta \mathbf{p} \quad (3.42)$$

Substituindo (3.41) e (3.42) em (3.39) chega-se a Equação (3.43).

$$\delta \mathbf{B}_2 = \frac{1}{L^2} \mathbf{z}(\mathbf{r})^T \delta \mathbf{p} + \frac{1}{L^2} \mathbf{r}(\mathbf{z})^T \delta \mathbf{p} = \frac{1}{L^2} (\mathbf{r}(\mathbf{z})^T + \mathbf{z}(\mathbf{r})^T) \delta \mathbf{p} \quad (3.43)$$

Ao observar que a variação do vetor  $\mathbf{B}_3$  é análoga ao vetor  $\mathbf{B}_2$ , conclui-se que:

$$\delta \mathbf{B}_3 = \delta \mathbf{B}_2 \quad (3.44)$$

Ao substituir as Equações (3.39), (3.43) e (3.44) na Equação (3.34), obtém-se a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ , conforme a Equação (3.45).

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z}(\mathbf{z})^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}(\mathbf{z})^T + \mathbf{z}(\mathbf{r})^T) \quad (3.45)$$

A matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_T$ , apresentada na Equação (3.46), é composta pela soma da matriz de rigidez material  $\mathbf{K}_M$  e da matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_G$ , definidas nas Equações (3.37) e (3.45), respectivamente.

$$\mathbf{K}_T = (\mathbf{B})^T \mathbf{C}_1 \mathbf{B} + \frac{N}{L} \mathbf{z}(\mathbf{z})^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}(\mathbf{z})^T + \mathbf{z}(\mathbf{r})^T) \quad (3.46)$$

Ou simplesmente escrita conforme a Equação (3.47).

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (3.47)$$

## 3.2 ELEMENTO DE VIGA DE THIMOSHENKO

O elemento de viga de Timoshenko clássico com dois nós é definido com interpolações lineares para as variáveis de deslocamento  $u$  e  $v$ , e para a rotação  $\theta$ , no sistema de coordena-

das locais. Essas interpolações são fornecidas por meio das Equações (3.48), (3.49) e (3.50), respectivamente, e foram desenvolvidas no trabalho de (SILVA, 2011).

$$u = \frac{x}{L_0} \quad (3.48)$$

$$v = 0 \quad (3.49)$$

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \theta_{11} + \frac{x}{L_0} \theta_{21} \quad (3.50)$$

A curvatura  $\kappa$ , a deformação por cisalhamento  $\gamma$  e a deformação axial  $\epsilon$  são definidas pelas Equações (3.51), (3.52) e (3.53), respectivamente.

$$\kappa = \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{-\theta_{11}}{L_0} + \frac{-\theta_{21}}{L_0} = \frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0} \quad (3.51)$$

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial x} - \theta = - \left(1 - \frac{x}{L_0}\right) \theta_{11} - \frac{x}{L_0} \theta_{21} \quad (3.52)$$

$$\epsilon = \frac{\partial u}{\partial x} - ky = \frac{u}{L_0} - \frac{\theta_{21} - \theta_{11}}{L_0} y \quad (3.53)$$

As forças internas são calculadas com base nas seguintes premissas: definição de deformação linear de Timoshenko; relação constitutiva linear elástica; e princípio dos trabalhos virtuais. Nesse caso, é necessário contabilizar a deformação por cisalhamento, que é expressa pela Equação (3.54).

$$V = \int_V (\sigma \delta \epsilon + \tau \delta \gamma) dv = N \delta u_1 + M_1 \delta \theta_{11} + M_2 \delta \theta_{21} \quad (3.54)$$

O cálculo de  $\delta \epsilon$  e  $\delta \gamma$  é realizado através da diferenciação das Equações (3.52) e (3.53), seguida da substituição dessas variações na Equação (3.54), encontra-se a Equação (3.55).

$$V = \int_V \left\{ \frac{\sigma}{L} [\delta u_1 - z (\delta \theta_{21} - \delta \theta_{11})] - \tau \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \delta \theta_{11} + \frac{x}{L} \delta \theta_{21} \right] \right\} dv \quad (3.55)$$

As forças internas locais são calculadas a partir das Equações (3.54) e (3.55), adotando-se  $x = \frac{L}{2}$ , a fim de evitar o travamento por cisalhamento conhecido como *shear locking*. Dessa forma, obtém-se as Equações (3.56), (3.57) e (3.58), respectivamente.

$$N = \int_V \frac{\sigma}{L} dv \quad (3.56)$$

$$M_1 = \int_v \left( \frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv \quad (3.57)$$

$$M_2 = \int_v \left( -\frac{\sigma}{L} z - \frac{\tau}{2} \right) dv \quad (3.58)$$

A correção da formulação de forças internas locais pode ser feita de uma maneira mais simples integrando os coeficientes anteriores sobre o volume do elemento e considerando a rigidez axial e de flexão constantes ao longo do eixo-x. Com isso, é possível obter o vetor de forças internas exposto na Equação (3.59).

$$\mathbf{f}_i = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N = \frac{EAu_1}{L_0} \\ \frac{EI}{L_0} (\theta_{11} - \theta_{21}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0 (\theta_{11} + \theta_{21}) \\ \frac{EI}{L_0} (\theta_{11} - \theta_{21}) + \frac{1}{4}\mu GAL_0 (\theta_{11} + \theta_{21}) \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

As mesmas suposições adotadas na determinação do vetor de forças internas são consideradas. Ao diferenciar as equações (3.56), (3.57) e (3.58), é possível obter os coeficientes da matriz de rigidez tangente local, representada pela Equações (3.60), (3.61), (3.62), (3.63), (3.64), (3.65), (3.66), (3.67).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial u_1} & \frac{\partial N}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial N}{\partial \theta_{21}} \\ \frac{\partial M_1}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial M_1}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial M_1}{\partial \theta_{21}} \\ \frac{\partial M_2}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial M_2}{\partial \theta_{11}} & \frac{\partial M_2}{\partial \theta_{21}} \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$K_{11} = \frac{\partial N}{\partial u_1} = \frac{1}{L^2} E \int_v dv \quad (3.61)$$

$$K_{12} = \frac{\partial N}{\partial \theta_{11}} = \frac{1}{L^2} E \int_v z dv \quad (3.62)$$

$$K_{13} = \frac{\partial N}{\partial \theta_{21}} = -\frac{1}{L^2} E \int_v z dv \quad (3.63)$$

$$K_{22} = \frac{\partial M_1}{\partial \theta_{11}} = \frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2} \int_v \mu G \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dv \quad (3.64)$$

$$K_{23} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_{11}} = -\frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2} \int_v \mu G \left( 1 - \frac{x}{L} \right) dv \quad (3.65)$$

$$K_{33} = \frac{\partial M_2}{\partial \theta_{21}} = \frac{1}{L^2} \int_v E z^2 dv + \frac{1}{2L} \int_v \mu G x dv \quad (3.66)$$

$$K_{21} = K_{12}; K_{31} = K_{13}; K_{32} = K_{23} \quad (3.67)$$

Ao integrar as equações (3.60) sobre o volume do elemento, levando em conta a constância das rizezas axial e de flexão ao longo do eixo-x, é possível obter os coeficientes da matriz de rigidez tangente, conforme descrito na Equação (3.68).

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4}GA l_0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4}\mu GA l_0 \\ 0 & -\frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4}GA l_0 & \frac{EI}{l_0} + \frac{1}{4}\mu GA l_0 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Na equação,  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  representa o módulo transversal de cisalhamento,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $\mu$  é o fator de correção da energia de cisalhamento, que depende do formato da seção. Para seções retangulares, é comumente adotado o valor de  $\mu = 5/6$ .

### 3.3 MODELANDO O COMPORTAMENTO DA LIGAÇÃO

Nesta seção, serão apresentadas as formulações utilizadas para simular o comportamento da ligação semirrígida. Para análise de pórticos com ligações semirrígidas, é essencial compreender e modelar o comportamento da ligação. Matematicamente, a relação pode ser escrita, de forma geral, utilizando a relação estabelecida pela Equação (3.69).

$$M = f(\theta_r) \quad (3.69)$$

Ou inversamente conforme a Equação (3.70)

$$\theta_r = g(M) \quad (3.70)$$

Em que  $f$  e  $g$  representam funções matemáticas,  $M$  representa o momento que atua na ligação, e  $\theta_r$  é a rotação relativa.

A rigidez da ligação  $S_c$  é determinada pela inclinação da reta tangente à curva momento-rotação, calculada pelas Equações (3.71) e (3.72), respectivamente.

$$S_{c1} = \frac{\overline{M}_1}{\theta_{1A}} \quad (3.71)$$

$$S_{c2} = \frac{\overline{M}_2}{\theta_{2B}} \quad (3.72)$$

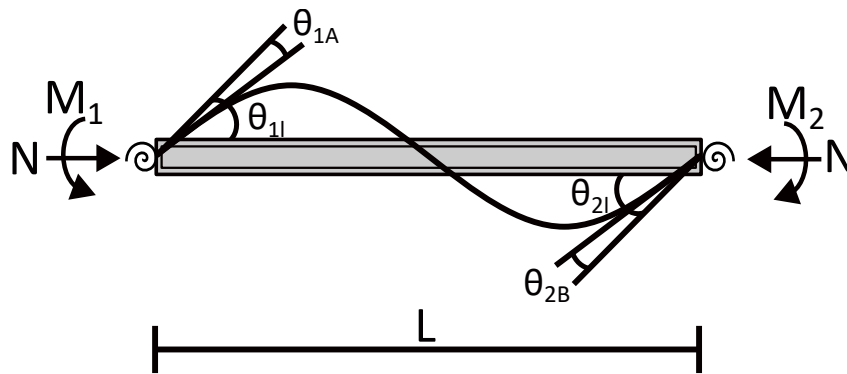
A intensidade da rigidez da ligação  $S_{c1-2}$  não determina se a ligação terá um comportamento rígido ou flexível. Esse comportamento só pode ser verificado por meio de um parâmetro que relacione a rigidez da ligação com a rigidez do membro ao qual ela está interligada. Para isso, neste trabalho são adotados dois métodos distintos para simular essa flexibilidade. O primeiro deles é o elemento híbrido proposto por [Chen e Lui \(1991\)](#), e o segundo é o elemento de ligação proposto por [DelSavio \(2004\)](#).

### 3.3.1 Elemento híbrido proposto por Chen e Lui (1991)

A partir da análise da Figura 3.3, chega-se às seguintes expressões de momentos finais. Substituindo na Equação (3.17) as rotações  $\theta_{11}$  e  $\theta_{21}$  por  $(\theta_{11} - \theta_{1A})$  e  $(\theta_{21} - \theta_{2B})$ , respectivamente, pode-se determinar a relação estabelecida em (3.73).

$$\begin{pmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{L_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_{11} - \theta_{1A} \\ \theta_{21} - \theta_{2B} \end{pmatrix} \quad (3.73)$$

Figura 3.3 – Viga com ligações semirrígidas



Fonte: Adaptado de Degertekin e Hayalioglu (2004)

Ao escrever as Equações (3.71) e (3.72) em função da rotação e substituí-las em (3.73),  $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$  podem ser reescritos pelas Equações (3.74) e (3.75).

$$\bar{M}_1 = \frac{EI}{L} \left[ 4 \left( \theta_{11} - \frac{\bar{M}_1}{k_1} \right) + 2 \left( \theta_{21} - \frac{\bar{M}_2}{k_2} \right) \right] \quad (3.74)$$

$$\bar{M}_2 = \frac{EI}{L} \left[ 4 \left( \theta_{21} - \frac{\bar{M}_2}{k_2} \right) + 2 \left( \theta_{11} - \frac{\bar{M}_1}{k_1} \right) \right] \quad (3.75)$$

Ou simplificadamente pelas Equações (3.76) e (3.77).

$$\bar{M}_1 = \frac{EI}{L} (r_{ii}\theta_{11} + r_{ij}\theta_{21}) \quad (3.76)$$

$$\bar{M}_2 = \frac{EI}{L} (r_{ij}\theta_{11} + r_{jj}\theta_{21}) \quad (3.77)$$

em que  $r_{ii}$ ,  $r_{ij}$ ,  $r_{jj}$  e  $kr$  são obtidos, respectivamente, pelas Equações descritas em (3.78), (3.79), (3.80) e (3.81).

$$r_{ii} = \left( \Gamma_1 + \frac{EI\Gamma_1^2}{Lk_2} - \frac{EI\Gamma_2^2}{Lk_2} \right) / kr \quad (3.78)$$

$$r_{jj} = \left( \Gamma_1 + \frac{EI\Gamma_1^2}{Lk_1} - \frac{EI\Gamma_2^2}{Lk_1} \right) / kr \quad (3.79)$$

$$r_{ij} = r_{ji} = \Gamma_2 / kr \quad (3.80)$$

$$kr = \left( 1 + \frac{EIr_{ii}}{Lk_1} \right) \left( 1 + \frac{EIr_{ii}}{Lk_2} \right) - \left( \frac{EI}{L} \right)^2 \frac{r_{ij}^2}{k_1 k_2} \quad (3.81)$$

Na qual os termos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$  representam as funções de estabilidade, e são obtidas conforme as Equações (3.82) e (3.83).

$$\Gamma_1 = \begin{cases} \frac{\rho \sin(\rho) - \rho^2 \cos(\rho)}{2 - 2 \cos(\rho) - \rho \sin(\rho)}, & \text{para } P < 0 \\ \frac{\rho^2 \cosh(\rho) - \rho \sinh(\rho)}{2 - 2 \cosh(\rho) + \rho \sinh(\rho)}, & \text{para } P > 0 \end{cases} \quad (3.82)$$

$$\Gamma_2 = \begin{cases} \frac{\rho^2 - \rho \sin(\rho)}{2 - 2 \cos(\rho) - \rho \sin(\rho)}, & \text{para } P > 0 \\ \frac{\rho \sinh(\rho) - \rho^2}{2 - 2 \cosh(\rho) + \rho \sinh(\rho)}, & \text{para } P < 0 \end{cases} \quad (3.83)$$

Em que  $\rho = \pi \sqrt{|\rho_e|}$ , com  $\rho_e = N / (\pi^2 EI / L^2)$ . Quando a força axial  $N$  for nula, as funções de estabilidade são indeterminadas. Nesse caso, adota-se  $\Gamma_1 = 4$  e  $\Gamma_2 = 2$ .

A matriz do elemento híbrido é representada pela Equação (3.84)

$$\begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & & & & & & & & & & \\ 0 & (r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & & & & & & & & & \\ 0 & (r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & r_{ii} \frac{EI}{L} & & & & & & & & \\ -\frac{AE}{L} & 0 & 0 & & \frac{AE}{L} & & & & & & \\ 0 & -(r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & -(r_{ii} + r_{ij}) \frac{EI}{L^2} & & 0 & & (r_{ii} + 2r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^3} & & & & \\ 0 & (r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} & r_{ij} \frac{EI}{L} & & 0 & & -(r_{ij} + r_{jj}) \frac{EI}{L^2} & & r_{jj} \frac{EI}{L} & & \end{bmatrix} \quad (3.84)$$

Para uma adoção de uma ligação idealmente flexível, a rigidez se torna nula ( $Sc_{1-2} \rightarrow 0$ ), conseqüentemente  $k_r \cong \infty$  e  $r_{ii-ij-ji} \cong 0$ . Já em uma ligação perfeitamente rígida a rigidez é adota de forma extremamente elevada ( $Sc_{1-2} \rightarrow \infty$ ), acarretando, em  $k_r = 1$ ,  $r_{ii-ji} = 4$  e  $r_{ij} = 2$ .

### 3.3.2 Elemento de ligação proposto por DelSavio (2004)

A ligação semirrígida em uma estrutura pode ser simulada como um elemento de mola de comprimento zero, colocado nos pontos de interseção entre os membros da estrutura (como entre vigas e pilares ou em pontos de apoio), onde as ligações parcialmente rígidas são encontradas.



Inicialmente proposto por [Chan e Chui \(2000\)](#), o desenvolvimento deste tipo de elemento não satisfaz completamente o comportamento da estrutura quando submetido a cargas distribuídas. Para superar essa limitação, [DelSavio \(2004\)](#) propôs um elemento de mola representado pela matriz exposta na Equação (3.85), visando simular uma ligação parcialmente rígida que pudesse acomodar qualquer tipo de carga, sem a necessidade de discretização da carga.

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \\ N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_A & 0 & 0 & -S_A & 0 & 0 \\ 0 & S_T & 0 & 0 & -S_T & 0 \\ 0 & 0 & S_R & 0 & 0 & -S_R \\ -S_A & 0 & 0 & S_A & 0 & 0 \\ 0 & -S_T & 0 & 0 & S_T & 0 \\ 0 & 0 & -S_R & 0 & 0 & S_R \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (3.85)$$

Em que  $S_A$ ,  $S_T$  e  $S_R$  são as rigidezes tangencial axial, translacional e rotacional da mola, respectivamente.

### 3.4 MÉTODOS DOS MÍNIMOS QUADRADOS

Segundo [Meister \(2006\)](#) esse método se baseia na ideia central de que ao reduzir ao máximo a soma dos quadrados das diferenças entre os valores reais e os valores estimados, obtém-se o ajuste para a função de aproximação, ou seja, a estimativa ótima.

A partir dos pontos críticos que minimizam esta função podem-se calcular os coeficientes dos termos da função de aproximação e este procedimento é conhecido como Método dos Mínimos Quadrados para ajuste de curvas.

Este procedimento será detalhado a seguir, de acordo com a metodologia definida em [Datta \(2010\)](#).

Uma forma otimizada de encontrar a estimativa polinomial é por meio da soma dos quadrados dos resíduos descrita na Equação(3.86).

$$R = \sum_{i=1}^n (y_i - a_0 - a_1x_i - a_2x_i^2 - \dots - a_mx_i^m)^2 \quad (3.86)$$

A minimização é feita ao zerar as derivadas parciais da função de acordo com à Equação (3.87).

$$\frac{\partial R}{\partial a_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (3.87)$$

A Equação (3.87) equivale ao conjunto descrito na Equação (3.88).

$$\begin{bmatrix} a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^0 + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n \\ a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^2 + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{n+1} \\ \vdots \\ a_0 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n + a_1 \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{n+1} + \dots + a_n \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^{2n} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^0 M_i \\ \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^1 M_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^p \theta_{ri}^n M_i \end{pmatrix} \quad (3.88)$$

Ou simplificada pela Equação (3.89).

$$\begin{bmatrix} G_0 & G_1 & \dots & G_n \\ G_1 & G_2 & \dots & G_{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_n & G_{n+1} & \dots & G_{2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

Na qual  $\sum_{i=1}^n x_i^k = G_k; k = 0, 1, \dots, 2n$

### 3.5 SOLUÇÃO DO PROBLEMA ESTRUTURAL

Para considerar os efeitos de segunda ordem presentes nas estruturas, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  da Equação (3.90) é obtida em termos dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  e das forças internas  $\mathbf{P}$ .

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{u}, \mathbf{p}) \quad (3.90)$$

Se além dos efeitos da não linearidade geométrica, também for considerada a influência da flexibilidade da ligação, é necessário incluir o parâmetro de flexibilidade correspondente  $\mathbf{S}_c$ . Nesse caso, a matriz de rigidez sofre alterações e pode ser definida de forma simplificada pela Equação (3.91).

$$\mathbf{K} = f(\mathbf{u}, \mathbf{p}, \mathbf{S}_c) \quad (3.91)$$

Ao estudar o comportamento não linear de uma estrutura, é essencial atualizar a matriz de rigidez constantemente para levar em conta as alterações na geometria e a influência da rigidez da ligação sobre a posição de equilíbrio. Por esse motivo, é necessário realizar uma análise incremental-iterativa. Esse tipo de análise é caracterizado por duas fases distintas: a primeira é chamada de predita e a segunda de corretiva.

#### 3.5.1 Solução Predita

Na solução incremental predita, a matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}$  é montada com base nos dados da última configuração de equilíbrio da estrutura. A partir disso, é possível obter o vetor de deslocamentos nodais tangenciais  $\delta \mathbf{u}_r$  usando a Equação (3.92).

$$\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_r \quad (3.92)$$

Por meio da utilização de estratégias de incremento de carga, é possível realizar uma seleção automática do incremento inicial do parâmetro de carga  $\Delta\lambda^0$ . Técnicas para realizar essa escolha serão abordadas na seção 3.6.

Com a definição de  $\Delta\lambda^{(0)}$ , é possível determinar os deslocamentos nodais incrementais tangenciais  $\Delta\mathbf{u}^{(k)}$  utilizando a Equação (3.93).

$$\Delta\mathbf{u}^{(0)} = \Delta\lambda^{(0)} \delta \mathbf{u}_r \quad (3.93)$$

Com isso, é possível obter o parâmetro de força total ( $\lambda$ ) e o vetor de deslocamentos nodais ( $\mathbf{u}$ ) no passo de força e iteração iniciais, respectivamente pelas Equações (3.94) e (3.95).

$${}^{(t+\Delta t)}\lambda = {}^t\lambda + \Delta\lambda^{(0)} \quad (3.94)$$

$${}^{(t+\Delta t)}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u}^{(0)} \quad (3.95)$$

As grandezas  ${}^t\lambda$  e  ${}^t\mathbf{u}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido durante o passo de carga inicial. No entanto, as Equações (3.94) e (3.95) nem sempre satisfazem a condição de equilíbrio do sistema. Portanto, são necessárias novas iterações para restaurar o equilíbrio. Para isso, são utilizados procedimentos numéricos que envolvem estratégias de iterações, permitindo variações do parâmetro de carga.

### 3.5.2 Ciclo de iterações - Método de Newton- Raphson

Na análise numérica, o método de Newton-Raphson é utilizado para determinar as raízes ou zeros de uma equação não linear. Neste método, a partir de uma estimativa inicial para a raiz, busca-se uma sequência de correções que levará à solução com a precisão desejada (COOK *et al.*, 1989).

Atualmente, uma ampla variedade de métodos para a solução de problemas estruturais não lineares baseia-se o método de Newton-Raphson para resolver a Equação (3.96), que governa o equilíbrio estático.

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.96)$$

Em que  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas que deve se anular ao longo do ciclo iterativo, indicando assim que um novo ponto de equilíbrio da estrutura foi atingido,  $\mathbf{f}_r$  é o vetor de referência que caracteriza a direção da força externa,  $\lambda$  é o parâmetro de força e  $\mathbf{f}_{\text{int}}$  é o vetor de forças internas.

Adicionando o esquema iterativo de Newton-Raphson na Equação (3.96), tem-se o problema estrutural não linear Equação (3.97).

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{f}_r - \mathbf{f}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (3.97)$$

Na qual os subíndices (k) e (k-1) referem-se, respectivamente, às iterações corrente e anterior.  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. A partir da (3.97) os deslocamentos nodais iterativos podem ser decompostos em duas parcelas conforme mostrado na Equação (3.98).

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (3.98)$$

Na qual  $\delta \lambda^{(k)}$  é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo,  $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$  e  $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$  são obtidos, respectivamente pelas equações (3.99) e (3.100).

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (3.99)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \mathbf{f}_r \quad (3.100)$$

Aqui,  $\delta \mathbf{u}_g^{(k)}$  é a correção que seria obtida da aplicação do método de Newton-Raphson com a estratégia de incremento do parâmetro de carga constante, e  $\delta \mathbf{u}_r^{(k)}$  é o vetor de deslocamentos iterativos resultante da aplicação de  $\mathbf{f}_r$ .

Com a obtenção da solução iterativa, realiza-se a atualização dos parâmetros incrementais de força ( $\Delta \lambda$ ), Equação (3.101) e do vetor de deslocamentos nodais ( $\Delta \mathbf{u}$ ), Equação (3.102).

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (3.101)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.102)$$

Para os parâmetros totais de força ( $\lambda$ ) e do vetor de coordenadas nodais ( $\mathbf{u}$ ) no passo de força ( $t + \Delta t$ ) e iteração (k) Equações (3.103) e (3.104).

$${}^{(t+\Delta t)} \lambda^{(k)} = {}^t \lambda + \delta \lambda^{(k)} \quad (3.103)$$

$${}^{(t+\Delta t)} \mathbf{u}^{(k)} = {}^t \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}^{(k)} \quad (3.104)$$

em que  $\lambda^{(k)}$  e  $\mathbf{u}^{(k)}$  caracterizam o ponto de equilíbrio obtido no último passo de carga.

### 3.5.3 Ciclo de Iterações - Método de Potra- Pták (1984)

Na procura de uma melhor convergência do processo iterativo e um maior índice de eficiência que o obtido através do método de Newton-Raphson, Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos. Esse consiste de duas avaliações da função e de apenas cálculos de derivadas de primeira ordem. Este esquema iterativo pode ser observado através da Equação (3.105).

$$\mathbf{K}^{(k-1)}\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\lambda_1^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}^{(k-1)} + \delta\lambda_2^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \quad (3.105)$$

Assumindo que a  $[\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1}$  exista, o vetor  $\mathbf{y}^{(k-1)}$  é calculado pelas Equações (3.106) e (3.107).

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \left( \delta\lambda_1^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right) \quad (3.106)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \left( \delta\lambda_2^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}) \right) \quad (3.107)$$

Isolando  $\delta\mathbf{u}^{(k)}$  encontra-se a Equação (3.108).

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \delta\mathbf{u}_1^{(k)} + \delta\mathbf{u}_2^{(k)} \quad (3.108)$$

As parcelas dos deslocamentos residuais são descritas nas Equações (3.109) e (3.110).

$$\delta\mathbf{u}_1^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \left( \delta\lambda_1^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right) = \delta\lambda_1^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_g^{(k)} \quad (3.109)$$

$$\delta\mathbf{u}_2^{(k)} = [\mathbf{K}^{(k-1)}]^{-1} \left( \delta\lambda_2^{(k)}\mathbf{f}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k-1)}) \right) = \delta\lambda_2^{(k)}\delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \delta\mathbf{u}_g^{(k)} \quad (3.110)$$

## 3.6 ESTRATÉGIAS DE INCREMENTO DE CARGA

Esta seção visa apresentar as estratégias utilizadas para incrementar a carga e a iteração, as quais são ferramentas importantes para obter os pontos limites de carga (snap-through) e de deslocamento (snap-back). Esses pontos são os principais objetivos da aplicação de uma técnica incremental em uma análise não-linear. Entre as estratégias de incremento automático do parâmetro de carga encontrada na literatura, este trabalho se concentra na seguinte formulação.

### 3.6.1 Incremento de Comprimento de Arco - Crisfield (1991)

A seguinte relação proposta por Crisfield (1981), Ramm (1981) e Ramm (1982) sugeriram estratégias de incremento automático de carga e de outros parâmetros (deslocamento, comprimento de arco, trabalho externo) baseadas no emprego da seguinte relação estabelecida pela Equação (3.111).

$$\left(\frac{I_d}{tI}\right)^\alpha \quad (3.111)$$

em que  $I_d$  é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, especificado pelo usuário,  $t$  é o número de iterações que foram necessárias para que o passo de carga anterior convergisse. Conforme sugestão de Ramm (1982) passou-se a adotar  $\alpha = 1/2$ . O aumento de  $\Delta l$  pode ser usado como parâmetro de controle na etapa de tempo atual de acordo com a Equação (3.112).

$$\Delta l = \Delta l_{p,a} \left(\frac{I_d}{tI}\right)^\alpha \quad (3.112)$$

Na qual  $\Delta l_{p,a}$  representa os incrementos do comprimento de arco no passo de carga anterior. É importante destacar que o usuário de um programa de elementos finitos normalmente tem alguma ideia do incremento do parâmetro de carga no primeiro passo de carga para uma dada análise.

Assim, uma vez especificado esse valor, a técnica fornecida em (3.112) pode levar a um cálculo automático dos incrementos iniciais nos passos de cargas seguintes. Através da utilização da equação (3.111) e da condição de restrição escrita para a solução incremental inicial Equação (3.113).

$$(\Delta \mathbf{u}^{(0)})^T \Delta \mathbf{u}^{(0)} = \Delta l^2 \quad (3.113)$$

Pode-se obter facilmente usando a equação (3.93) em (3.113), chega-se à expressão do incremento inicial do parâmetro de carga Equação (3.114):

$$\Delta \lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta \mathbf{u}_r)^T \delta \mathbf{u}_r}} \quad (3.114)$$

Caso a Equação (3.114) proposta por Riks (1972) seja imposta a solução incremental predita Equação (3.115)

$$(\Delta \mathbf{u}^{(0)})^T \Delta \mathbf{u}^{(0)} + (\Delta \lambda^{(0)})^2 (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r = \Delta l^2 \quad (3.115)$$

Obtém-se a seguinte Equação (3.116).

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \frac{\Delta l}{\sqrt{(\delta\mathbf{u}_r)^T \delta\mathbf{u}_r + (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r}} \quad (3.116)$$

### 3.6.2 Sinal do Incremento inicial do parâmetro de carga

O sinal do incremento inicial do parâmetro força ( $\Delta\lambda^{(0)}$ ) pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é de suma importância para a correta representação do caminho de equilíbrio Equação (3.117)

$$(\Delta\mathbf{u})^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)} < 0 \quad (3.117)$$

Se a desigualdade for verdadeira na Equação (3.117), então o preditor  $\Delta\mathbf{u}^{(0)}$  tem o mesmo sentido de  $\delta\mathbf{u}_r^{(k)}$ , caso contrário, o preditor tem sentido oposto ( $\Delta\lambda^{(0)} \leftarrow -\Delta\lambda^{(0)}$ ).

## 3.7 ESTRATÉGIAS DE ITERAÇÃO

Os estudos conduzidos por [Wempner \(1971\)](#) e [Riks \(1972\)](#) propiciaram o surgimento de diversas estratégias que impõem, em cada iteração, a condição de comprimento de arco constante e são baseadas na equação de restrição proposta por [Riks \(1972\)](#) descrita na (3.118).

$$(\Delta\mathbf{u}^{(k)})^T \Delta\mathbf{u}^{(0)} + (\Delta\lambda^{(k)}) \mathbf{f}_r^T \mathbf{f}_r = \Delta l^2 \quad (3.118)$$

### 3.7.1 Método do comprimento de arco linear hiperplano fixo

A restrição de comprimento de arco constante (3.118) foi utilizada por [Riks \(1972\)](#) e [Riks \(1979\)](#) apenas para a obtenção do incremento inicial do parâmetro de carga,  $\Delta\lambda^{(0)}$ . No processo iterativo subsequente ( $k \geq 1$ ), a equação de restrição usada para calcular  $\delta\lambda$  é obtida fazendo com que a solução iterativa ( $\delta\mathbf{u}^{(k)}, \delta\lambda^{(k)} e \mathbf{f}_r$ ) seja ortogonal à solução incremental predita ( $\Delta\mathbf{u}^{(0)}, \Delta\lambda^{(0)} \mathbf{f}_r$ ), expressa pela Equação (3.119).

$$(\delta\mathbf{u}^{(k)})^T \Delta\mathbf{u}^{(0)} + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^{(0)} (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r = 0 \quad (3.119)$$

A substituição da Equação (3.98) em (3.118) fornece a expressão procurada para que se determine da correção do parâmetro de carga Equação (3.120).

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{(\Delta\mathbf{u}^{(0)})^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\left( (\Delta\mathbf{u}^{(0)})^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \Delta\lambda^{(0)} (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r \right)} \quad (3.120)$$

### 3.7.2 Método do comprimento de arco linear hiperplano atualizado

Um procedimento iterativo alternativo a esse usado por [Riks \(1972\)](#) foi sugerido por [Ramm \(1981\)](#) e [Ramm \(1982\)](#). Ele propôs basicamente a substituição da solução incremental predita na Equação (3.120) pela solução "secante"  $(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}, \Delta \lambda^{(k-1)} \mathbf{f}_r)$ . Isso garante que as correções  $(\delta \mathbf{u}^{(k)}, \delta \lambda^{(k)} \mathbf{f}_r)$  sejam ortogonais à solução incremental da iteração anterior, conforme descrita na Equação (3.121).

$$(\delta \mathbf{u}^{(k)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)} \Delta \lambda^{(k-1)} (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r = 0 \quad (3.121)$$

Mais uma vez, substituindo (3.98) na equação anterior, chega-se a Equação (3.122)

$$\delta \lambda^{(k)} = - \frac{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T \delta \mathbf{u}_g^{(k)}}{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T \delta \mathbf{u}_r^{(k)} + \delta \lambda^{(k-1)} (\mathbf{f}_r)^T \mathbf{f}_r} \quad (3.122)$$

Nesse caso, o hiperplano de restrição é normal a uma secante que passa pela solução incremental da iteração anterior, e não mais à tangente da trajetória de equilíbrio. Ao contrário da proposta original de [Riks \(1972\)](#), o plano normal é atualizado em cada nova iteração.

### 3.7.3 Comprimento de Arco Cilíndrico

Para o comprimento de arco cilíndrico [Crisfield \(1981\)](#), propôs que, a cada iteração, a Equação (3.123) fosse satisfeita.

$$(\Delta \mathbf{u}^{(k)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta l^2 \quad (3.123)$$

Substituindo (3.102) na equação anterior, chega-se novamente a uma equação quadrática em  $\delta \lambda$ , que pode ser escrita através da Equação (3.124).

$$A (\delta \lambda^{(k)})^2 + B \delta \lambda^{(k)} + C = 0 \quad (3.124)$$

em que os coeficientes A, B e C são assim definidos pelas Equações (3.125), (3.126) e (3.127).

$$A = (\delta \mathbf{u}_r^{(k)})^T \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (3.125)$$

$$B = 2 (\delta \mathbf{u}_r^{(k)})^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)}) \quad (3.126)$$

$$C = (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)})^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)}) - \Delta l^2 \quad (3.127)$$

Com a solução de (3.124), chega-se a dois valores de  $\delta \lambda$ ,  $\delta \lambda_1$  e  $\delta \lambda_2$ , de forma que se deve escolher entre as soluções apresentadas nas Equações (3.128) e (3.129).



$$\Delta \mathbf{u}_1^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (3.128)$$

$$\Delta \mathbf{u}_2^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)} \quad (3.129)$$

a que mais se aproxima da solução incremental da iteração anterior,  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ . Essa escolha deve prevenir um possível retorno, o que faria a solução regredir ao longo do caminho já calculado.

Um procedimento bastante simples a ser seguido, e usado neste trabalho, consiste em achar o menor ângulo entre  $\Delta \mathbf{u}^{(k)}$  e  $\Delta \mathbf{u}^{(k-1)}$ . Isso equivale a achar o máximo cosseno do ângulo conforme Equação (3.130).

$$\cos \theta_{1,2} = \frac{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T \Delta \mathbf{u}^{(k)}}{\Delta l^2} = \frac{(\Delta \mathbf{u}^{(k-1)})^T (\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_g^{(k)})}{\Delta l^2} + \delta \lambda_{1,2}^{(k)} \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}}{\Delta l^2} \quad (3.130)$$

A Equação (3.130) poderá ter raízes imaginárias, se  $B^2 - 4AC < 0$ . Isso ocorrerá quando o incremento inicial do parâmetro de carga for muito grande, ou se a estrutura exibir múltiplos caminhos de equilíbrio em torno de um ponto Meek e Tan (1984).

#### 3.7.4 Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais

Chan (1988) apresenta uma estratégia de iteração bastante eficiente, definida como o método dos deslocamentos residuais (MDR). Nessa estratégia, procura-se eliminar diretamente os deslocamentos residuais (deslocamentos iterativos) devido às forças desequilibradas.

Para a implementação do MDR, deve-se reescrever a componente  $j$  do vetor de deslocamentos  $\delta \mathbf{U}$ , numa dada iteração  $k$ , na forma da Equação (3.131)

$$e_j = \delta \mathbf{u}^{(k)}(j) = \delta \mathbf{u}_g^{(k)}(j) + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}(j) \quad (3.131)$$

onde  $e_j$  é definido como um dado erro, e  $j$ . Chan (1988), então, propôs que a condição de mínimos quadrados desse erro, para um sistema de  $m$  graus de liberdade poderiam ser expressa pela Equação (3.132).

$$\frac{d \left( \sum_{j=1}^m (e_j)^2 \right)}{d \delta \lambda^k} = 0 \quad (3.132)$$

A equação anterior é equivalente à condição da norma mínima dos deslocamentos residuais, escrita numa forma mais adequada Equação (3.133)

$$\frac{d \left[ (\delta \mathbf{u}^{(k)})^T \delta \mathbf{u}^{(k)} \right]}{d \delta \lambda^{(k)}} = 0 \quad (3.133)$$

Substituindo a Equação (3.98) em (3.133) e derivando essa equação em relação a  $\delta\lambda^k$  chega-se à Equação (3.134).

$$\delta\lambda^k = \frac{\left(\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\right)^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\left(\delta\mathbf{u}_r^{(k)}\right)^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}} \quad (3.134)$$

### 3.7.5 Iteração Baseada nos deslocamentos generalizados

Com a estratégia de incremento de carga baseada no parâmetro GSP foi mostrado que, de acordo com o trabalho de Yang e Kuo (1994), a Equação (3.135) deveria ser considerada para o parâmetro de carga ao longo da solução não linear.

$$\delta\lambda^k = \frac{1}{\Delta\lambda^{(0)} \left({}^t\delta\mathbf{u}_r\right)^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \left(H_k - \Delta\lambda^{(0)} \left({}^t\delta\mathbf{u}_r\right)^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}\right) \quad (3.135)$$

Na obtenção da solução incremental predita ( $k = 0$ ), os referidos pesquisadores definiram que o parâmetro incremental  $H_0$  (no caso, deslocamento generalizado) deveria ser obtido de acordo com a Equação (3.136).

$$\Delta\lambda^{(0)} = \pm \sqrt{\frac{H_0}{\left(\delta\mathbf{U}_r^{(k-1)}\right)^T \delta\mathbf{U}_r}} \quad (3.136)$$

Durante o ciclo iterativo é assumido que esse parâmetro de deslocamento generalizado se mantenha constante, ou seja,  $H_k = 0$  para  $k > 0$ . Dessa forma, pode-se rescrever (3.135) como a Equação (3.137)

$$\delta\lambda^k = \frac{\left({}^t\delta\mathbf{u}_r\right)^T \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\left({}^t\delta\mathbf{u}_r\right)^T \delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (3.137)$$

## 3.8 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

Para uma análise iterativa, a solução a solução é encontrada de maneira aproximada, ou seja, não é exata. Portanto, alguns limites de tolerância devem ser fixados para a interrupção desse processo. O processo iterativo se encerra, indicando uma nova posição de equilíbrio para a estrutura em análise, quando um dos critérios de convergência apresentados a seguir se tornar verdadeiro.

### 3.8.1 Critério 1

O primeiro critério de convergência adotado para cada passo de carga é expresso pela norma da força residual e da força total aplicada dada na Equação (3.138)

$$\|\mathbf{g}\| \leq \zeta_1 \|\mathbf{F}_r\| \quad (3.138)$$

na qual  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana e  $\zeta_1$  é a tolerância fornecida pelo usuário.

### 3.8.2 Critério 2

O segundo critério de convergência obedece a relações de deslocamentos descritas na Equação (3.139).

$$\|\delta\mathbf{u}^{(k)}\| \leq \zeta_2 \|\Delta\mathbf{u}^{(k)}\| \quad (3.139)$$

## 4 METODOLOGIA

Para realizar as simulações numéricas com a formulação proposta neste trabalho, foi utilizado um notebook ACER com processador Intel(R) Core(TM) i5-6200U CPU 2.40 GHz e memória RAM de 4GB. Em que foi desenvolvido um código computacional em linguagem Python utilizando a IDE gratuita Spyder.

Para simular a não linearidade geométrica das estruturas, foi empregada a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos para pórticos planos, conforme proposto em [Crisfield \(1991\)](#) e [Yaw \(2009\)](#).

De modo a modelar o comportamento dos elementos de viga, serão empregadas as formulações das teorias de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Para simular a semirrigidez da ligação, serão utilizados dois métodos distintos: o elemento híbrido desenvolvido por [Chen e Lui \(1991\)](#) e o elemento ligação proposto por [DelSavio \(2004\)](#).

A fim de obter uma análise mais precisa do comportamento de cada tipo de ligação, será utilizado o método de ajuste de curva dos Mínimos Quadrados, descrito no trabalho de [Datta \(2010\)](#). Esse método permitirá obter uma função que determinará a rigidez em cada iteração, a partir da inserção dos pontos que correspondem às curvas momento-rotação de cada tipo de ligação.

Realizou-se a implementação dos métodos de solução de Newton-Raphson e de Potra-Pták (1984) desenvolvido no trabalho de ([SOUZA et al., 2017](#)), para solucionar o problema estrutural. Além disso, serão adicionados processos incrementais de Comprimento de Arco, conforme proposto por [crisfield1991](#), e técnicas de continuação, como Comprimento de Arco Linear hiperplano fixo de [Wempner \(1971\)](#) e [Riks \(1972\)](#), hiperplano atualizado de [Ramm \(1981\)](#), Comprimento de Arco Cilíndrico [Crisfield \(1981\)](#), Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais de [Chan \(1988\)](#) e Deslocamentos Generalizados de [Yang e Kuo \(1994\)](#).

Com o intuito de prever o comportamento dinâmico de estruturas rígidas e semirrígidas é adotado os integradores temporais de Newmark descrito por [Newmark \(1959\)](#) e  $\alpha$ -Generalizado de ([CHUNG; HULBERT, 1993](#)).

## 5 RESULTADOS

### 5.1 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO DA ANÁLISE ESTÁTICA COM DIFERENTES TEORIAS DE VIGA E MÉTODOS DE ITERAÇÃO

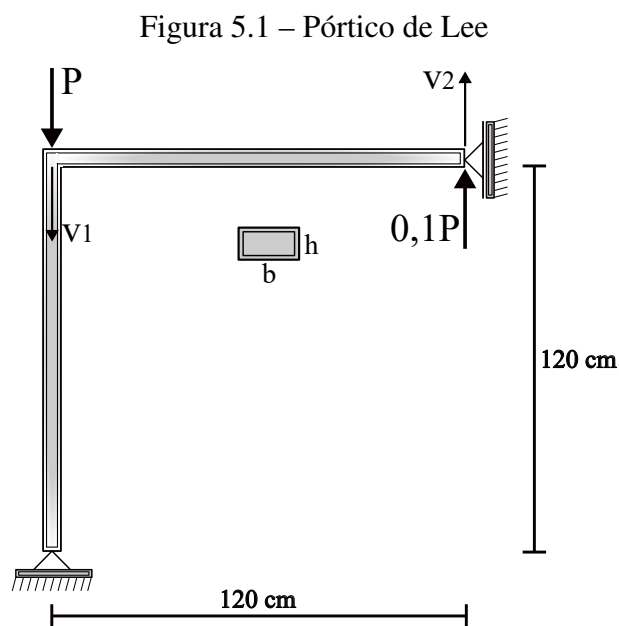
Com o objetivo de validar e verificar a metodologia implementada, foram simulados exemplos e os resultados comparados com outros trabalhos já consagrados na literatura.

No primeiro capítulo, foram simulados os deslocamentos de estruturas de vigas, pórticos e arcos. O intuito foi verificar a cinemática de viga de Euler-Bernoulli e de Timoshenko na previsão dos deslocamentos, além da eficiência computacional dos métodos de Newton-Raphson e Potra-Pták, acoplados a diferentes técnicas iterativas.

No segundo tópico, é analisado o acoplamento de técnicas que simulam a semirrígidez da ligação, juntamente com as teorias de viga utilizadas no item anterior. Por fim, no terceiro capítulo, é realizada a aplicação do método dos Mínimos Quadrados para simular o comportamento semirrígido de ligações de pórticos planos metálicos, por meio do acoplamento com um modelo numérico-computacional para previsão de pórticos com comportamento não linear geométrico e ligações semirrígidas.

#### 5.1.1 Pórtico de Lee

Este exemplo, trata-se de um sistema estrutural constituído por uma viga e uma coluna, com propriedades físicas e geométricas idênticas, conectadas rigidamente entre si, conforme ilustrado na Figura 5.1.



A extremidade possui um apoio de segundo gênero, enquanto a outra apresenta um apoio com apenas uma restrição, permitindo o deslocamento na direção do eixo  $y$ . As análises foram efetuadas através de modelos estruturais compostos de vinte elementos finitos de mesmo comprimento, dez em cada um dos membros. As propriedades físicas e geométricas são mostradas na Tabela 1.

Tabela 1 – Propriedades físicas e geométricas da estruturas

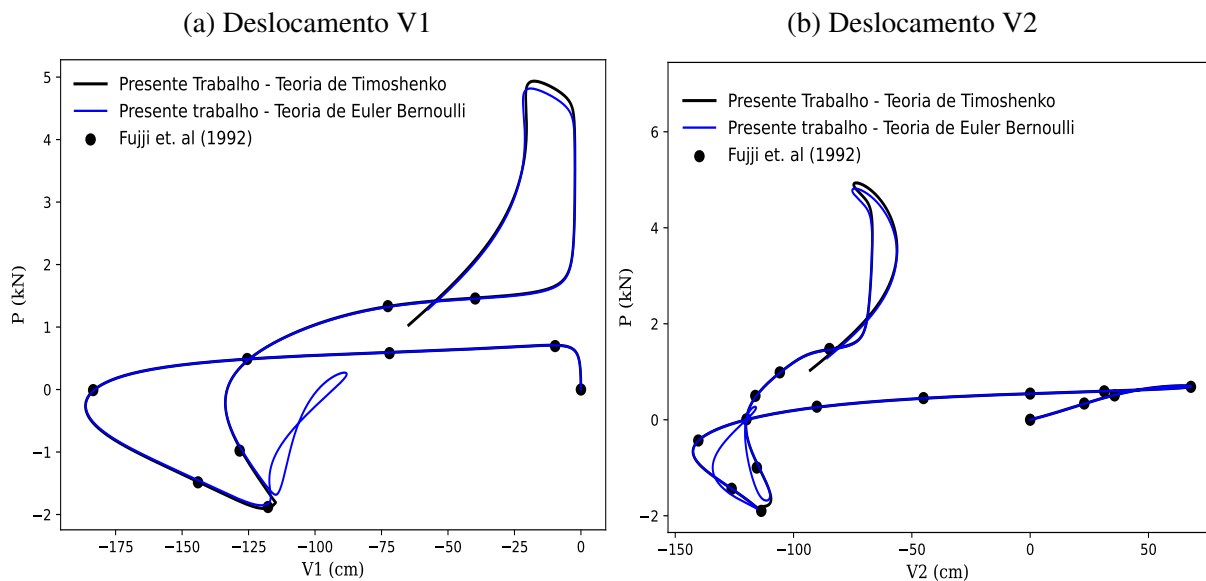
E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	( $\nu$ )	( $\mu$ )	b (cm)	h (cm)
720	2	6	0.3	5/6	3	2

Fonte: O autor

Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são  $\Delta l_{(0)} = 0,25$ ,  $K_{max} = 250$ ,  $Nd = 3$ , tolerância =  $1,0 \times 10^{-10}$ ,  $P = -1$ .

As curvas carga-deslocamento obtidas para o deslocamento vertical dos pontos dos pontos V1 e V2 são ilustradas nas Figuras 5.2 (a) e (b), respectivamente. Os resultados são comparados com os obtidos por Fujii, Choong e Gong (1992).

Figura 5.2 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga.



Fonte: O autor.

Verifica-se que, ao longo da maior parte da trajetória de equilíbrio, a adoção de os distintos elementos de viga apresentaram caminhos de equilíbrio em similares tanto para V1 quanto para V2. Entretanto, constata-se discrepâncias no pico máximo de descarregamento, no qual a cinemática de Euler-Bernoulli exibiu uma trajetória que não foi capturada pela cinemática de Timoshenko. Ademais, a cinemática de Timoshenko revelou os mais altos picos de carregamento.

Os resultados da análise utilizando diferentes técnicas de iteração associadas aos métodos de solução de Newton-Raphson e Potra-Pták, são mostrados nas Tabelas 2 e 3, respectivamente.

Tabela 2 – Resultado numérico para o método de Newthton-Raphson associado a distintas técnicas de iteração

Métodos Incrementais	kt	Np	kt/Np	t(s)
Comprimento de arco linear (Hiperplano Fixo)	6575	3087	2,1298	65,56
Comprimento de arco linear (Hiperplano Atualizado)	6573	3086	2,1299	65,11
Comprimento de arco cilíndrico	6574	3086	2,1303	72,38
Norma mínima dos deslocamentos residuais	6595	3089	2,1349	67,64
Norma mínima dos deslocamentos generalizados	6578	3087	2,1308	69,34

Fonte: O autor

Tabela 3 – Resultado numérico para o método de Potra-Pták associado a distintas técnicas de iteração

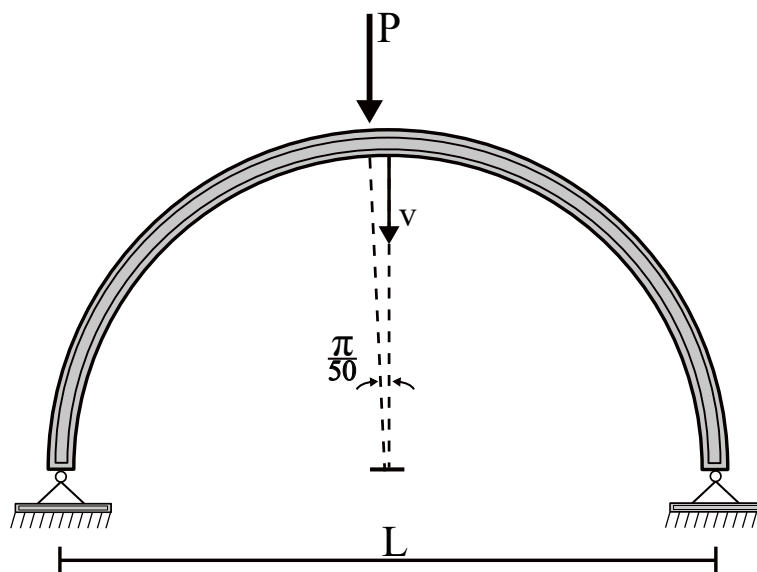
Métodos Incrementais	kt	Np	kt/Np	t(s)
Comprimento de arco linear (Hiperplano Fixo)	5385	2868	1,8776	84,30
Comprimento de arco linear (Hiperplano Atualizado)	5382	2866	1,8778	83,190
Comprimento de arco cilíndrico	5385	2866	1,8789	88,41
Norma mínima dos deslocamentos residuais	5382	2866	1,8778	86,366
Norma mínima dos deslocamentos generalizados	5388	2869	1,8780	86,23

Fonte: O autor

### 5.1.2 Semicírculo birrotulado

No segundo exemplo, considera-se um arco semicircular biapoado submetido a uma carga  $P$  excêntrica em seu vértice, conforme ilustrado na Figura 5.3. A estrutura foi discretizada com 50 elementos de viga-coluna para ambas as cinemáticas. As propriedades físicas e geométricas são expostas na Tabela 4. Os parâmetros de entrada considerados para os métodos de solução de Newthton-Raphson e Potra Pták são:  $\Delta l_{(0)} = 0,5$ ,  $K_{max} = 250$ ,  $Nd = 5$ , tolerância  $1,0 \times 10^{-10}$ ,  $P = -1$ .

Figura 5.3 – Arco com carga excêntrica



Fonte: O autor

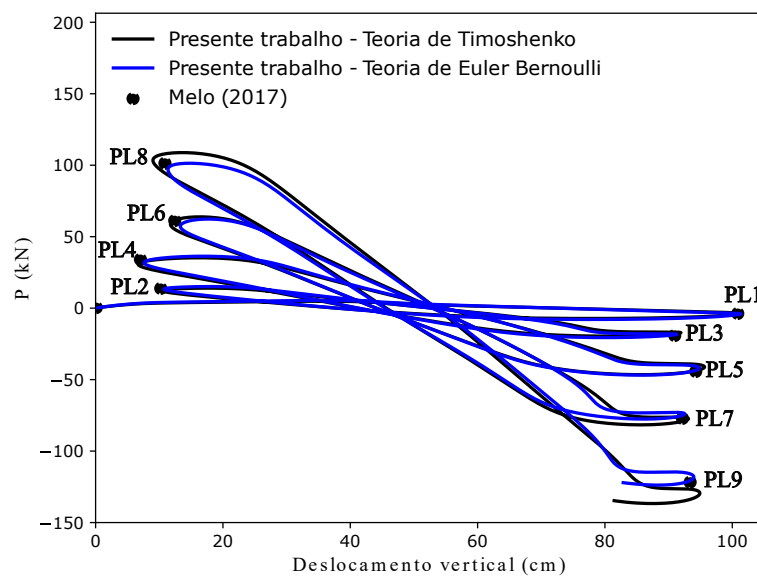
Tabela 4 – Propriedades físicas e geométricas da estrutura

E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	G (kN/cm <sup>2</sup> )	$\mu$
2000	10	1	1000	5/6

Fonte: O autor

Na Figura 5.4 é mostrada as trajetórias de equilíbrio, correlacionando a carga P com o deslocamento vertical do vértice (V) para as duas tipologias de viga utilizadas.

Figura 5.4 – Caminho de equilíbrio para o arco



Fonte: O autor

Conforme evidenciado na Figura 5.4, para os pontos limites (PL) PL1, PL2, PL3, PL4 e PL5, apresentam uma boa acurácia entre as trajetórias de equilíbrio para ambas as cinemáticas. No



entanto, à medida que o carregamento aumenta, é possível notar uma diminuição na concordância entre as duas abordagens. Os pontos PL6 e PL7 começam a apresentar leves discrepâncias, enquanto em PL8 e PL9 são observadas diferenças mais acentuadas.

Os resultados da análise utilizando diferentes técnicas de iteração associadas aos métodos de solução de Newton-Raphson e Potra-Pták, são mostrados nas Tabelas 5 e 6, respectivamente.

Tabela 5 – Resultado numérico para o método de Newton Raphson associado a distintas técnicas de iteração

Métodos Incrementais	kt	Np	kt/Np	t(s)
Comprimento de arco linear (Hiperplano Fixo)	16416	6919	2,3726	360,48
Comprimento de arco linear (Hiperplano Atualizado)	16414	6918	2,3727	343,76
Comprimento de arco cilíndrico	16422	6920	2,3731	368,25
Norma mínima dos deslocamentos residuais	16428	6921	2,3744	372,58
Norma mínima dos deslocamentos generalizados	16435	6922	2,375	381,31

Fonte: O autor

Tabela 6 – Resultado numérico para o método de Potra-ák associado a distintas técnicas de iteração

Métodos Incrementais	kt	Np	kt/Np	t(s)
Comprimento de arco linear (Hiperplano Fixo)	12914	6448	2,0028	452,67
Comprimento de arco linear (Hiperplano Atualizado)	12912	6446	2,0031	436,89
Comprimento de arco cilíndrico	12923	6449	2,015	486,20
Norma mínima dos deslocamentos residuais	12913	6449	2,003	436,65
Norma mínima dos deslocamentos generalizados	12926	6451	2,004	466,66

Fonte: O autor

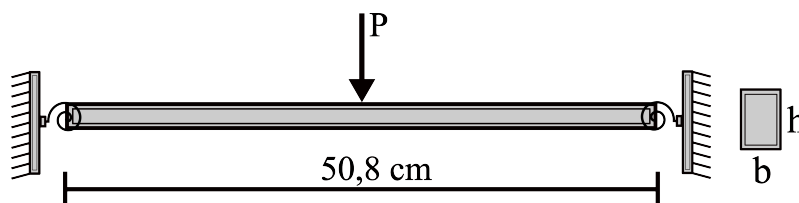
Tanto a abordagem de solução de Newton-Raphson quanto a de Potra Pták, quando utilizadas em conjunto com técnicas iterativas, conseguiram reproduzir o caminho completo de equilíbrio, superando todos os pontos críticos de *snap-back* e *snap-through*. É possível verificar que a combinação das técnicas iterativas com a metodologia de Potra Pták reduziu, em média, a número total de iterações (kt) em 21,86% e o número de incrementos de carga (Np) em 7,48%. No entanto, houve um aumento no tempo de processamento.

## 5.2 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS

## 5.2.1 Viga com ligações semirrígidas na extremidades

A Figura 5.5 representa a estrutura analisada nesta seção. O comportamento desta viga, considerando seus apoios perfeitamente engastados, já foi investigado por Mondkar e Powell (1977), Yang e Saigal (1984), Silva (2009) e Dias (2021). A viga é submetida a uma carga concentrada  $P$ , localizada no centro do vão. Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são  $\Delta l_{(0)} = 0.1$ ,  $K_{max} = 250$ ,  $Nd = 5$ , tolerância  $1,0 \times 10^{-10}$ ,  $P = -1$ .

Figura 5.5 – Viga com ligações semirrígidas



Fonte: Adaptada de Silva (2009)

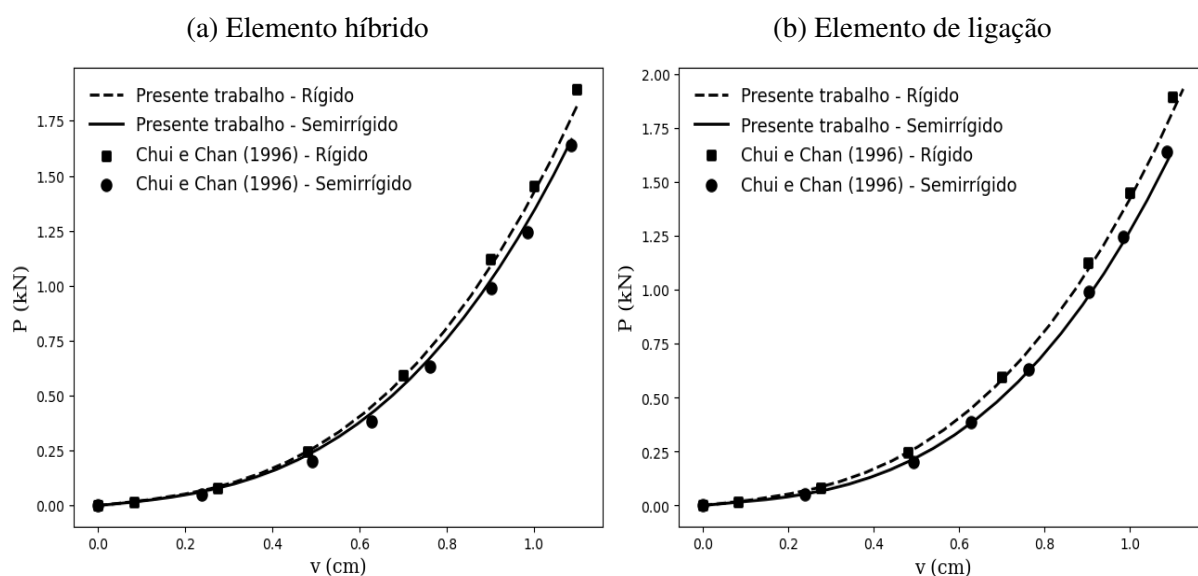
Tabela 7 – Propriedades físicas e geométricas da viga semirrígida

$E$ (kN/cm <sup>4</sup> )	$I$ (cm <sup>4</sup> )	$A$ (cm <sup>2</sup> )	$G$ (kN/cm <sup>2</sup> )	$\mu$	$b$ (cm)	$h$ (cm)
20700	$6,7746 \times 10^{-3}$	0,80645	$E/2$	$5/6$	2,54	0,3175

Fonte: O autor

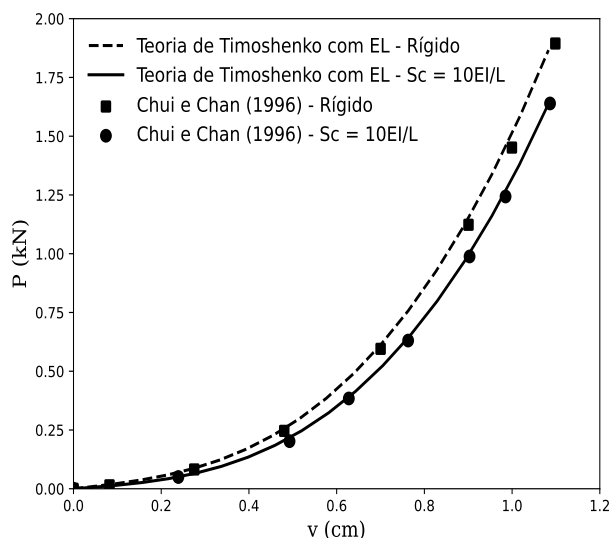
As trajetórias de Equilíbrio é exposta na Figuras 5.6 (a) para EH e (b) para o elemento híbrido. Já na Figura 5.7 é considera-se a cinemática de Timoshenko com EL.

Figura 5.6 – Curvas carga-deslocamento da viga semirrígida obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão.



Fonte: O autor

Figura 5.7 – Curva carga-deslocamento da viga semirrígida obtidas com teoria de viga de Timoshenko e elemento de ligação.



Fonte: O autor.

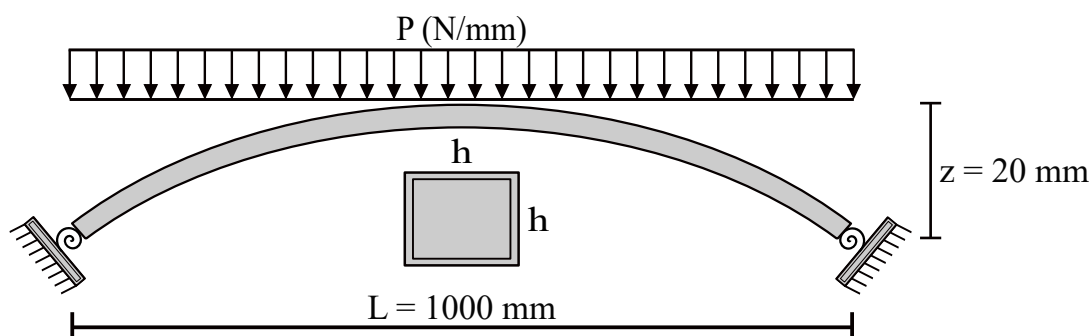
Para a análise, a viga foi discretizada com 20 elementos e análise utilizando o elemento de ligação (EL) de [Chen e Lui \(1991\)](#) e elemento híbrido (EH) de [DelSavio \(2004\)](#) acoplados a teoria de viga de Euler Bernoulli e de Timoshenko. As ligações entre as extremidades da viga e os apoios foram consideradas rígidas e semirrígidas. Para o caso de ligações rígidas, adotou-se um valor elevado para a rigidez da ligação, igual a  $S_c = 10 \times 10^{10}$ . Já, para a simular a ligação semirrígida, considerou-se  $S_c = 10EI/L$ .

É possível observar que tanto a cinemática de Euler-Bernoulli acoplada às técnicas de semirrígidez de EH e EL quanto a de Timoshenko com EL apresentaram ótima concordância com os resultados obtidos por [Chui e Chan \(1996\)](#).

### 5.2.2 Arco Senoidal sob carregamento distribuído

Considera-se o sistema estrutural clássico encontrado na literatura [Bergan \(1980\)](#), [GALVÃO \(2004\)](#) e [Silva \(2009\)](#) que é o arco biarticulado submetido a uma carga vertical uniformemente distribuída  $P$ , conforme ilustrado na Figura 5.8.

Figura 5.8 – Arco Senoidal abatido



Fonte: O autor

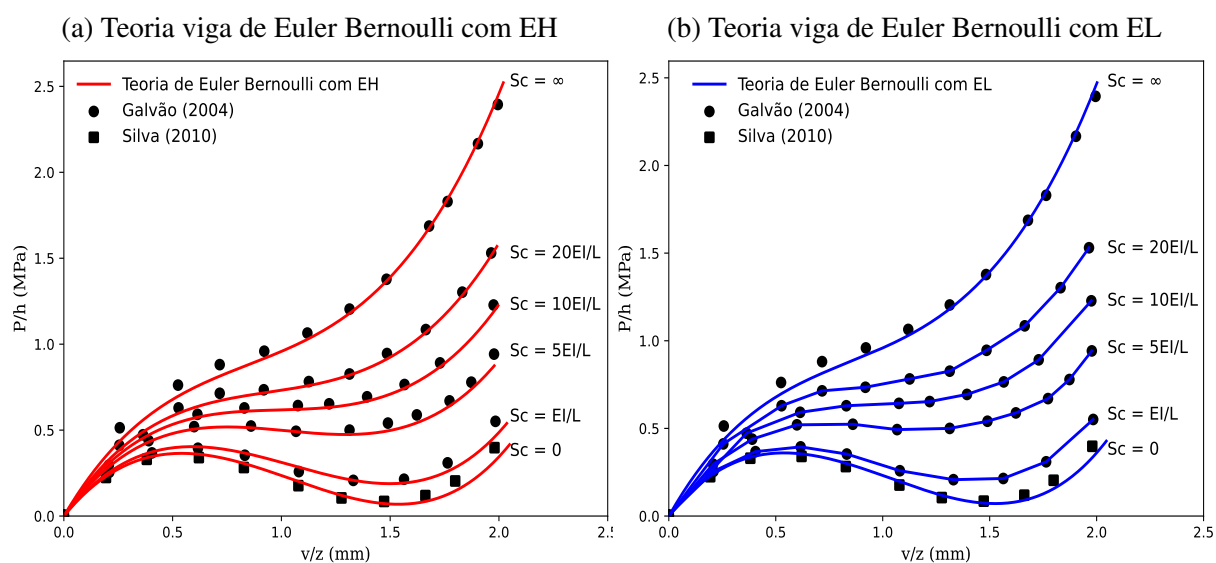
Tabela 8 – Propriedades físicas e geométricas do arco senoidal sob carregamento distribuído

$E$ (N/mm <sup>2</sup> )	$A$ (mm <sup>2</sup> )	$I$ (mm <sup>4</sup> )	$h$ (mm)	$\mu$
210000	400	13333,33	20	5/6

Fonte: O autor

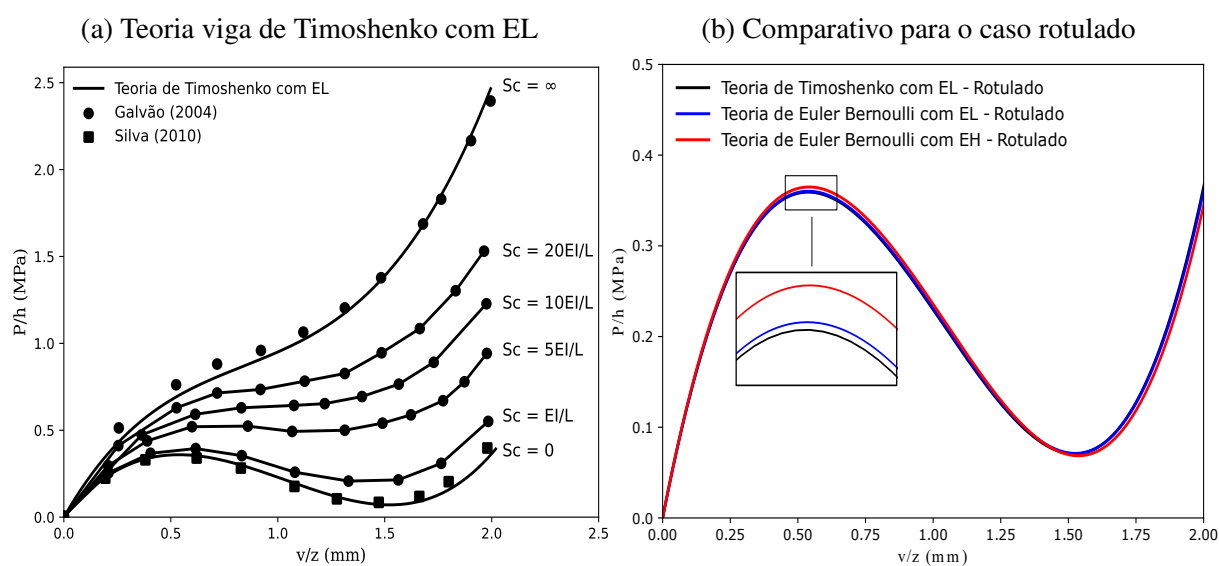
As Figuras 5.9 (a) e (b), 5.10 (a) exibem a trajetória de equilíbrio da estrutura considerando a rigidez dos apoios variável.

Figura 5.9 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão.



Fonte: O autor.

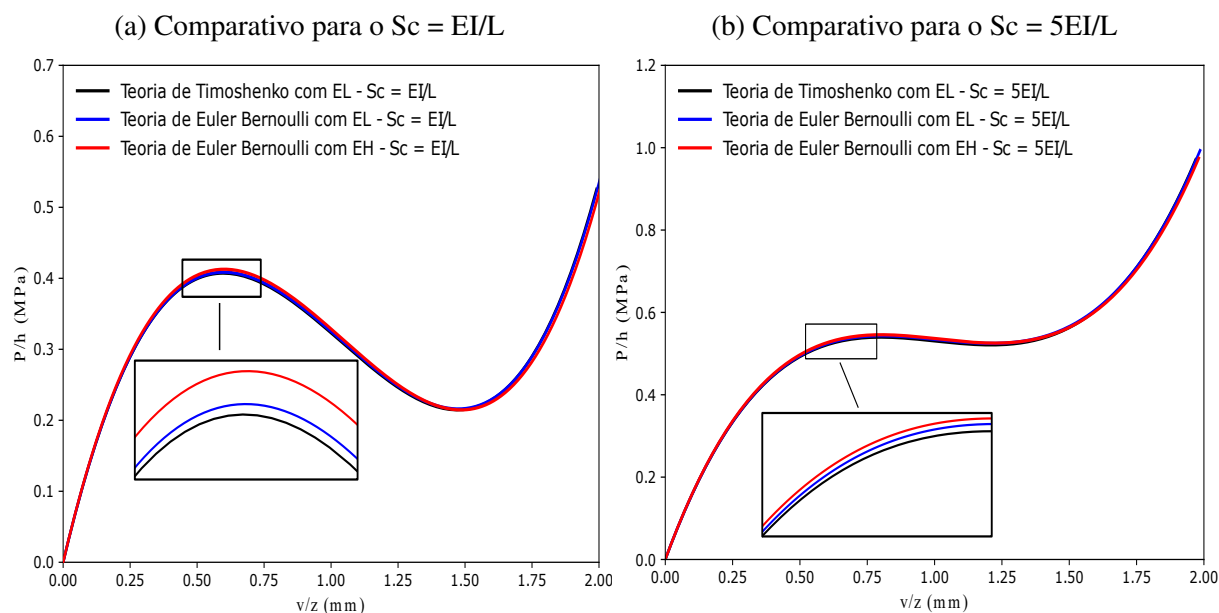
Figura 5.10 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão.



Fonte: O autor.

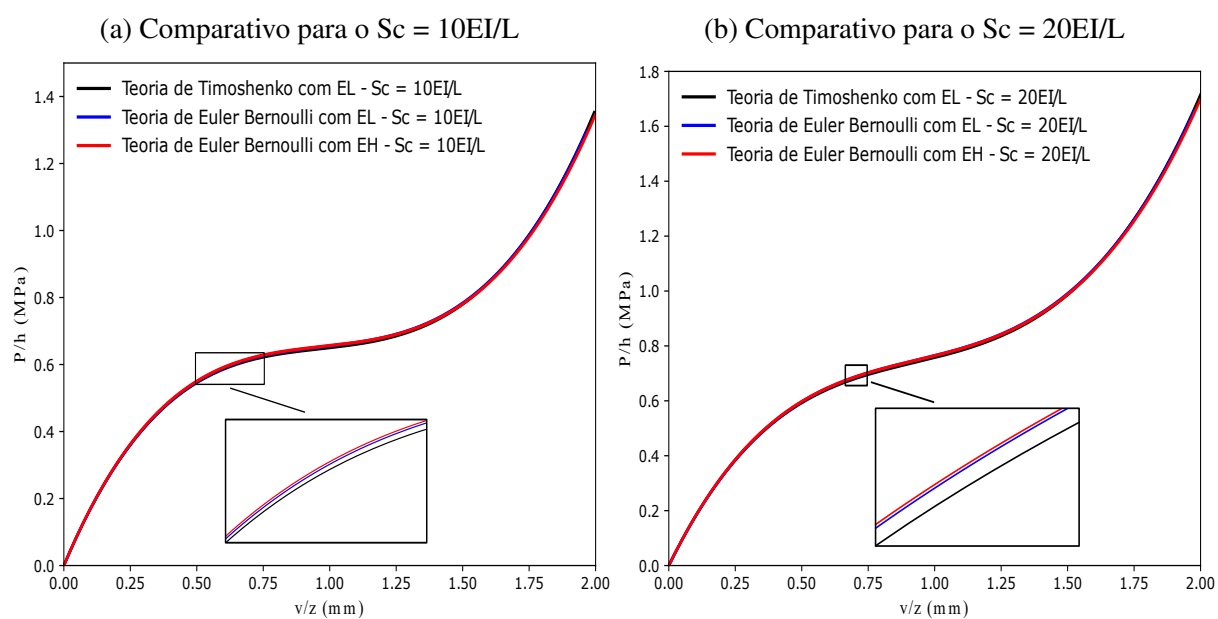
Já nas Figuras 5.10 (b), 5.11 (a) e (b), 5.12 (a) e (b) apresentam a comparação de deslocamentos para as os diferentes tipologias de vigas, método de ligação para cada rigidez adotada para a ligação.

Figura 5.11 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga e conexão.



Fonte: O autor.

Figura 5.12 – Curvas carga-deslocamento obtidas com diferentes tipologias de viga.



Fonte: O autor.

Com base nos resultados obtidos, pode-se afirmar que os métodos empregados para simular a semirrígidez neste estudo apresentaram excelente concordância com a literatura, com

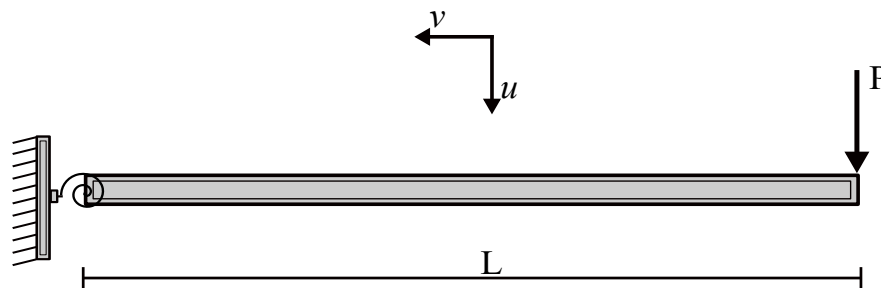
diferenças mínimas sendo observadas. É importante destacar que o aumento da rigidez  $S_c$  reduz o efeito de perda de estabilidade por ponto limite de carga seguido de salto (*snap-through*). Na qual, para valores de  $S_c$  maiores que  $10EI/L$ , não são mais observados pontos críticos na trajetória da viga.

### 5.3 LIGAÇÕES SEMIRRÍGIDAS COM COMPORTAMENTO NÃO LINEAR OBTIDAS PELO MÉTODOS DOS MÍNIMO QUADRADOS

#### 5.3.1 Viga Semirrígida com ligações não Lineares

No primeiro exemplo dessa seção é estudado uma viga em balanço com apoio semirrígido e submetida a uma carga pontual na extremidade livre. Essa viga inicial foi estudada por [Aristizábal-Ochoa \(2004\)](#) e [Hai et al. \(2019\)](#). A estrutura é discretizada em 10 elementos de viga de Euler-Bernoulli de mesmo comprimento, a rigidez é adotada como  $S_c = 1 \times 10^{10}$ . A estrutura juntamente com a curva momento-rotação que descreve o seu comportamento é mostrado na Figura 5.13.

Figura 5.13 – Viga em balanço com carga pontual



Fonte: O autor

Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução de Potrá Ptak são: comprimento de arco inicial  $\Delta l_{(0)} = 0,2$ ; número máximo de iterações no passo de carga  $K_{max} = 200$ ; tolerância  $\zeta_{1,2} = 1 \times 10^{-10}$  e incremento de força inicial  $P = -1N$ . As propriedades físicas e geométricas são apresentadas na Tabela 9.

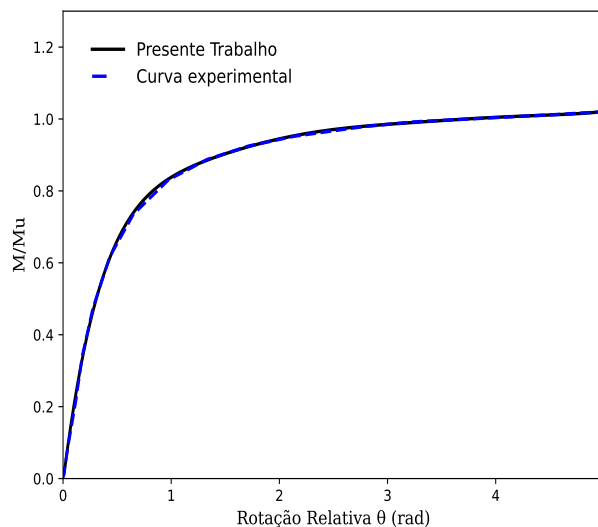
Tabela 9 – Propriedades físicas e geométricas

E (kN/m <sup>2</sup> )	I (m <sup>4</sup> )	A (m <sup>2</sup> )	L (m)	M <sub>u</sub>	ϕ <sub>0</sub>
210 x 10 <sup>6</sup>	1 x 10 <sup>-4</sup> /12	0,01	2,7786 x 10 <sup>-5</sup>	EI/L	1

Fonte: O autor

Já na Figura 5.14 é mostrada a comparação entre a curva gerada pelo MMQ e a curva experimental. O polinômio que descreve a curva momento-rotação é mostrado na Tabela 10.

Figura 5.14 – Comparação entre a Curvas momento-rotação da viga semirrígida



Fonte: O autor

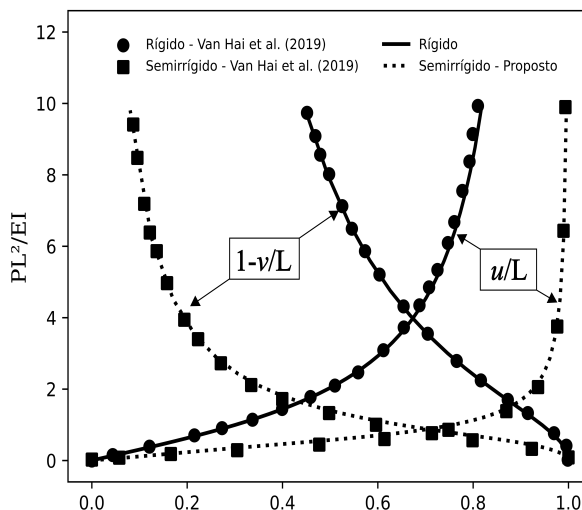
Tabela 10 – Polinômio interpolador da curva momento rotação

$$M = -0,07863\theta_r^8 + 2,054\theta_r^7 - 22,64\theta_r^6 + 137\theta_r^5 - 497,3\theta_r^4 + 1109\theta_r^3 - 1504\theta_r^2 + 1200\theta_r - 4,96$$

Fonte: O autor

Na Figura 5.15 são mostrados os resultados obtidos, com u sendo o deslocamento horizontal e v, o vertical.

Figura 5.15 – Curva carga-deslocamento viga em balanço



Fonte: O autor

Quando comparamos os deslocamentos obtidos com ligações rígidas e semirrígidas, observamos um aumento considerável. No deslocamento vertical (u), a diferença foi de aproximadamente 21,76%, saindo de um deslocamento de 0,818 m com a ligação rígida para alcançar

o valor de 0,998 m com a vinculação semirrígida. Já para o deslocamento horizontal ( $v$ ), os valores atingidos foram de 0,55 m com a ligação rígida e 0,9195 m com a vinculação semirrígida, o que representa um aumento de cerca de 67,18%.

### 5.3.2 Pórtico de dois andares

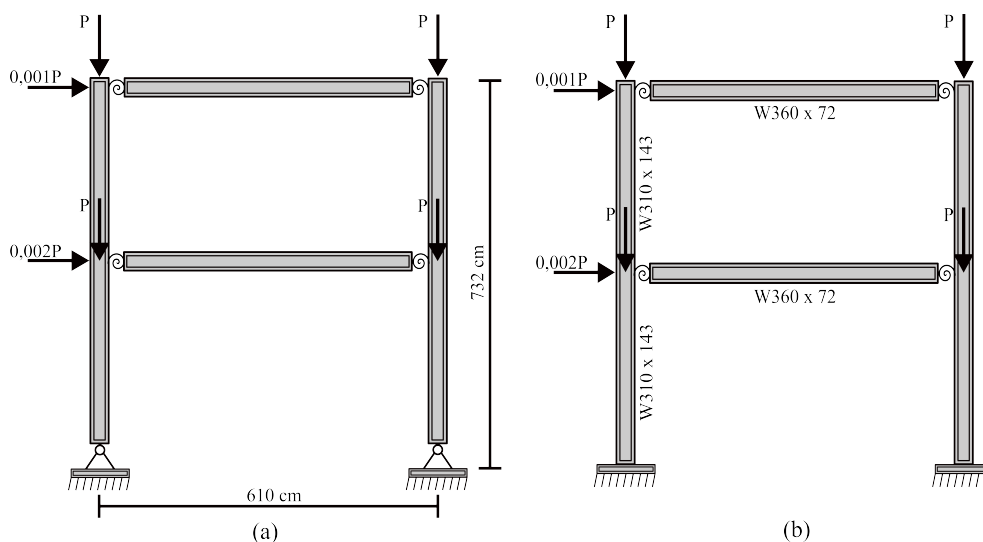
A Figura 5.16 mostra dois pórticos de dois andares e um vão, com base biapoiada Figura 5.16 (a) e engastada Figura 5.16 (b). Esses pórticos foram analisados previamente por Pinheiro e Silveira (2005). As vigas e os pilares são constituídos, respectivamente, pelos perfis W 360x72 e W 310x143 e suas propriedades são apresentadas na Tabela 11. O carregamento é representado por cargas verticais concentradas ( $P$ ) aplicadas nos pilares e por duas cargas horizontais, de  $0,002P$  aplicada no primeiro andar e outra de  $0,001P$  aplicada no segundo andar.

Tabela 11 – Propriedades físicas dos Perfis W 360x72 e W 310x143

W 360 x 72			W 310 x 143		
E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )
2,05 x 10 <sup>4</sup>	2,01 x 10 <sup>4</sup>	91	2,05 x 10 <sup>4</sup>	3,48 x 10 <sup>4</sup>	182

Fonte: O autor

Figura 5.16 – Geometria e carregamento da estrutura

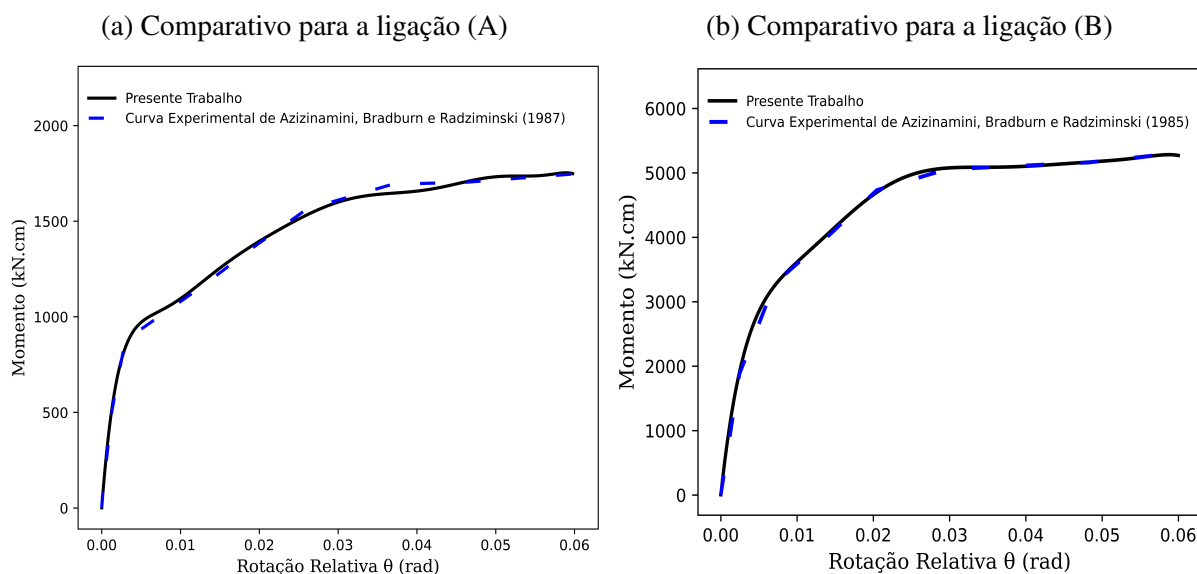


Fonte: O autor

Para considerar as ligações não lineares, Pinheiro e Silveira (2005) utilizaram curva momento-rotação de quatro tipos de ligações, sendo uma ligação com cantoneira simples na alma (A), uma ligação com cantoneiras de topo e assento (B), uma ligação com placa de extremidade ajustada (C) e uma ligação com placa de extremidade estendida (D). Segundo Chen e Lui (1991), a ligação A foi testada por Azizinamini, Bradburn e Radziminski (1987), enquanto B foi ensaiada por Azizinamini, Bradburn e Radziminski (1985) Já as conexões C e D foram testadas por Ostrander (1970) e Johnstone e Walpole (1981), respectivamente.

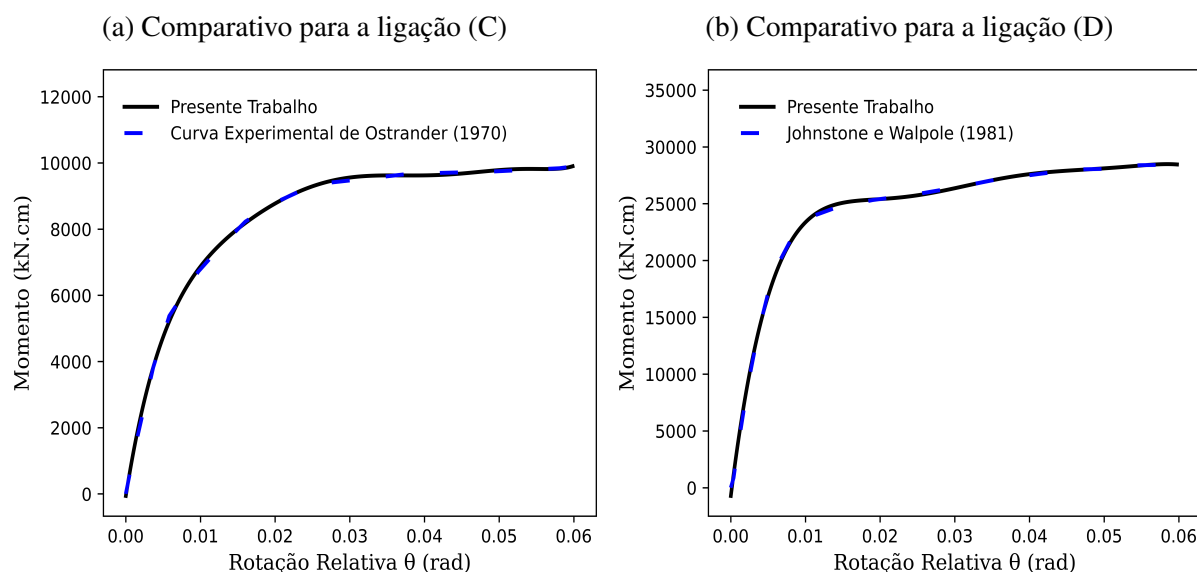


Figura 5.17 – Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de dois andares.



Fonte: O autor.

Figura 5.18 – Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de dois andares.



Fonte: O autor.

Nas Figuras 5.17 (a) e (b) e 5.18 (a) e (b) são apresentadas as comparações entre as curvas experimentais e as obtidas nesse trabalho. Para cada curva momento-rotação, obteve-se o polinômio interpolador para cada tipo de ligação, conforme exposto na Tabela 12.

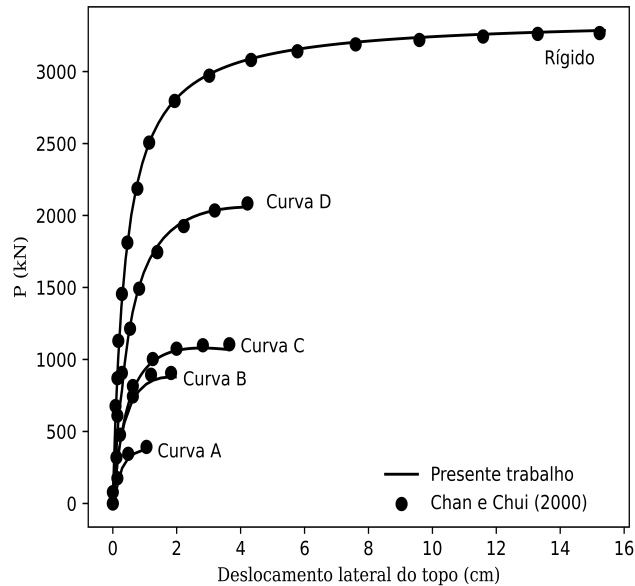
Tabela 12 – Polinômio interpolador para cada curva

A	$M = -2,612x10^{16}\theta_r^8 + 5,949x10^{15}\theta_r^7 - 5,532x10^{14}\theta_r^6 + 2,711 \times 10^{13}\theta_r^5 - 7,545 \times 10^{11}\theta_r^4 + 1,198x10^{10}\theta_r^3 - 1,037x10^8\theta_r^2 + 4,694x10^5\theta_r - 2,794x10^{-9}$
B	$M = -8,563x10^{15}\theta_r^8 + 2,368x10^{15}\theta_r^7 - 2,732x10^{14}\theta_r^6 + 1,697x10^{13}\theta_r^5 - 6,122 \times 10^{11}\theta_r^4 + 1,29x10^{10}\theta_r^3 - 1,552x10^8\theta_r^2 + 1,092x10^6\theta_r - 8,225$
C	$M = 2,869x10^{15}\theta_r^8 - 4,841x10^{14}\theta_r^7 + 1,797x10^{13}\theta_r^6 + 1,398x10^{12}\theta_r^5 - 1,507 \times 10^{11}\theta_r^4 + 5,763x10^9\theta_r^3 - 1,165x10^8\theta_r^2 + 1,418x10^6\theta_r - 75,92$
D	$M = 7,243x10^{16}\theta_r^8 - 1,724x10^{16}\theta_r^7 + 1,646x10^{15}\theta_r^6 - 7,927x10^{13}\theta_r^5 + 1,928 \times 10^{12}\theta_r^4 - 1,688x10^{10}\theta_r^3 - 1,789x10^8\theta_r^2 + 4,594x10^6\theta_r - 419,7$

Fonte: O autor

Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são:  $\Delta l_{(0)} = 0,5$ ;  $K_{max} = 100$ ; tolerância  $\zeta_{1-2} = 1x10^{-8}$ ;  $P = -1N$ . Para cada um dos caminhos de equilíbrio obtidos, utilizou-se o critério de instabilidade para a verificação e parada da análise de cada uma das análises. Os resultados obtidos foram confrontados com [Chan e Chui \(2000\)](#) de modo a possibilitar a verificação da intensidade do carregamento e deslocamento atuante. As trajetórias de equilíbrio obtidas para as diferentes curvas que descrevem o comportamento da ligação conforme a Tabela 12 e os resultados numéricos para o pórtico biapoado são expostos na Figura 5.19 e na Tabela 13.

Figura 5.19 – Caminho de Equilíbrio pórtico biapoado



Fonte: O autor

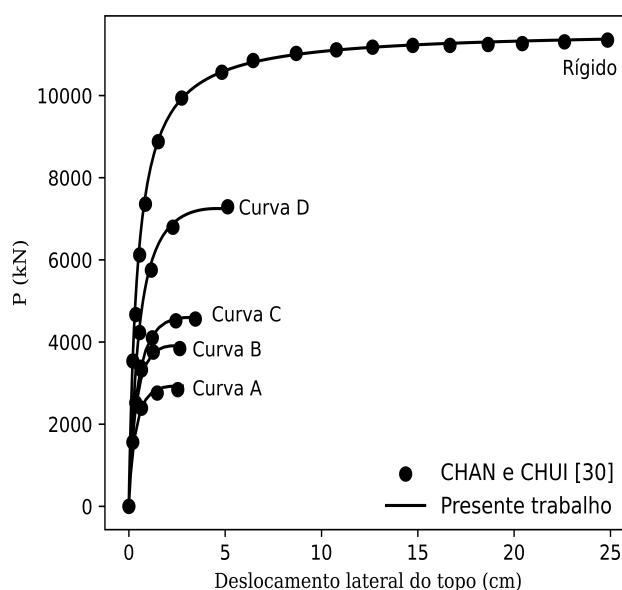
Enquanto, para o pórtico engastado são demonstrados na Figura 5.20 e na Tabela 14.

Tabela 13 – Carga limite de estabilidade para o pórtico com base biapoiada

Curvas	Chan e Chui (2000)	Presente trabalho
A	395,9	396,08
B	907,4	899,5
C	1107,6	1096,35
D	2121,8	2119,82
Ligação Rígida	3318,4	3302,48

Fonte: O autor

Figura 5.20 – Curvas carga - deslocamento para o pórtico com base engastada



Fonte: O autor

Tabela 14 – Carga limite de estabilidade para o pórtico com base engastada

Curvas	Chan e Chui (2000)	Presente trabalho
A	2838	2861,87
B	3892,2	3857,27
C	4617,3	4628,07
D	7330,7	7297,18
Ligação Rígida	11387,5	11400,39

Fonte: O autor

Para os pórticos representados nas Figuras 5.16 (a) e (b), é de extrema importância os diferentes comportamentos exibidos pelas conexões utilizadas. Em que, a conexão com cantoneira simples de alma demonstra maior flexibilidade, ou seja, pode suportar uma rotação mais significativa e uma carga menor para um momento específico. Por outro lado, a conexão com placa de extremidade estendida apresenta maior rigidez, transmitindo um momento menor

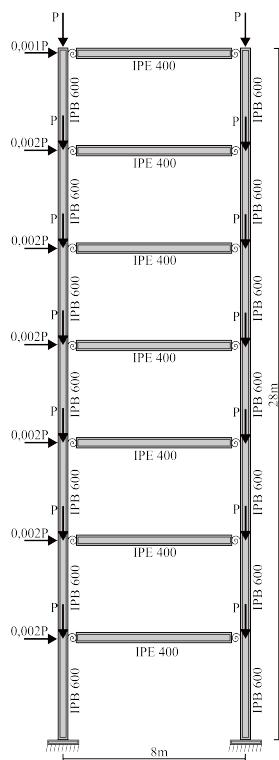
para uma rotação específica e suportando um maior carregamento. Essa análise é crucial para auxiliar na seleção da ligação a ser adotada. Como pode ser observado nas Tabelas ?? e 14, verifica-se que, para ligações mais flexíveis, as cargas limites são menores.

Outro aspecto a ser considerado é o tipo de apoio utilizado. Nos casos estudados, foram adotados os apoios engastado e biapoioado. Observa-se que a escolha pelo apoio engastado aumenta consideravelmente o valor da carga crítica. Conclui-se, portanto, que o uso de apoios fixos e conexões mais rígidas seria uma maneira de aumentar o valor da carga limite e reduzir o deslocamento horizontal.

### 5.3.3 Pórtico de sete andares

O último sistema estrutural considerado neste artigo é o pórtico metálico de sete andares e um vão, conforme ilustrado na Figura 5.21, enquanto as propriedades dos perfis adotados são mostrados nas Tabelas 15 e 16.

Figura 5.21 – Pórtico de 7 andares



Fonte: O autor

Tabela 15 – Propriedades físicas e geométricas dos perfis IPE 400 e IPB 450

IPE 400			IPB 450		
E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )
205	0,0002313	0,00845	205	0,0007989	0,0218

Fonte: O autor

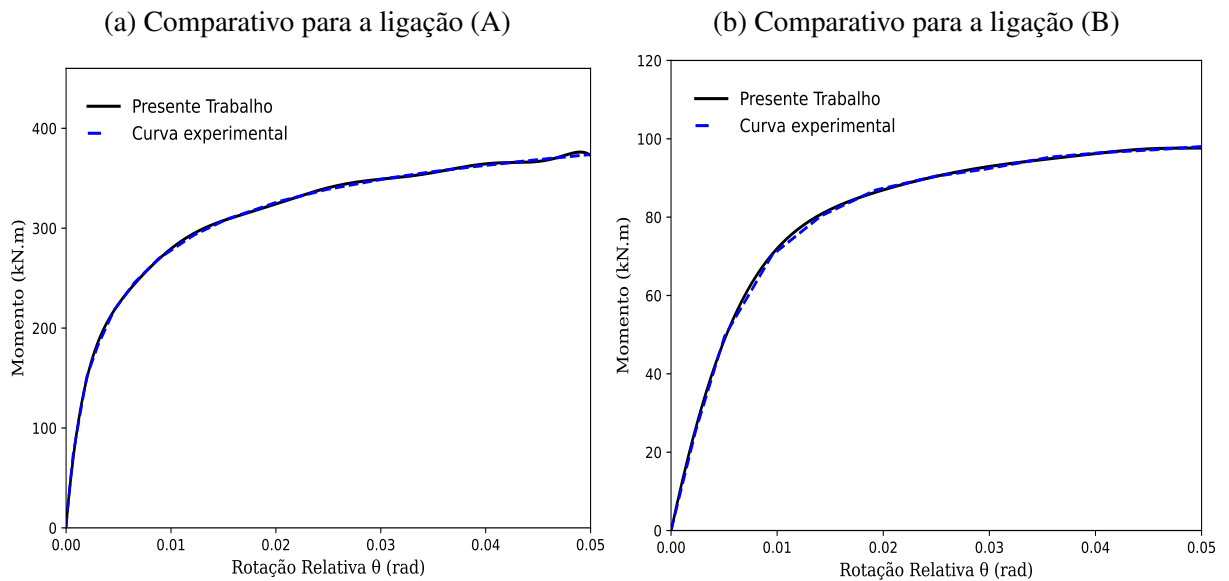
Tabela 16 – Propriedades físicas e geométricas dos perfis IPB 600

IPB 600		
E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )
205	0,00171	0,0270

Fonte: O autor

Essa estrutura foi estudada inicialmente por [Nefovska-Danilović e Sekulović \(2004\)](#). Dois tipos de comportamento são estudados, o primeiro com e ligação rígida e o segundo com 2 tipos de ligações semirrígidas utilizando o modelo linear, em que a rigidez é fixa durante toda a análise e assume os valores de  $Sc = 2,0 \times 10^5 \text{ kNm/rad}$ , para o Modelo Linear – A e  $Sc = 1,243 \times 10^4 \text{ kNm/rad}$  para o Modelo linear – B. Enquanto o modelo não linear proposto nesse trabalho é descrito pelas curvas experimentais demonstradas na Figura 5.22 (a) e (b), juntamente com a gerada pelo polinômio interpolador dado pela Tabela 17. Para os elementos de viga a rigidez é adotada como  $k = 1 \times 10^{10} \text{ kNm/rad}$ . Os parâmetros de entrada considerados para o método de solução são  $\Delta l_{(0)} = 0,05$ ;  $K_{(max)} = 100$ ;  $Nd = 5$ ;  $tolerncia = 1,0 \times 10^{-10}$ ;  $P = -1N$ .

Figura 5.22 – Comparação entre a Curvas momento-rotação do pórtico de sete andares.



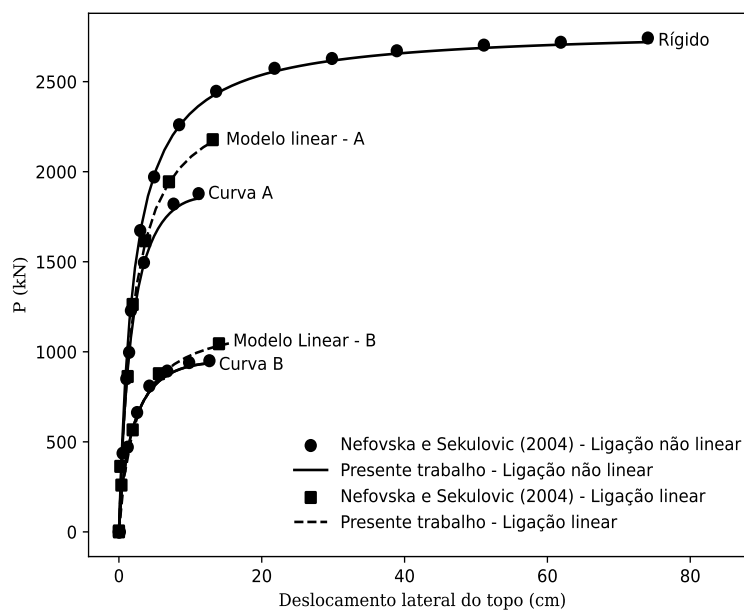
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 17 – Polinômio interpolador para os modelos de ligação do pórtico de 7 andares

A	$M = -5,165 \times 10^{15} \theta_r^8 + 1,109 \times 10^{15} \theta_r^7 - 9,858 \times 10^{13} \theta_r^6 + 4,694 \times 10^{12} \theta_r^5 - 1,294 \times 10^{11} \theta_r^4 + 2,096 \times 10^9 \theta_r^3 - 1,951 \times 10^7 \theta_r^2 + 1,039 \times 10^5 \theta_r + 3,463$
B	$M = 1,523 \times 10^{14} \theta_r^8 - 3,267 \times 10^{13} \theta_r^7 + 2,829 \times 10^{12} \theta_r^6 - 1,238 \times 10^{11} \theta_r^5 + 2,664 \times 10^9 \theta_r^4 - 1,323 \times 10^7 \theta_r^3 - 5,875 \times 10^5 \theta_r^2 + 1,274 \times 10^4 \theta_r - 0,2053$

Fonte: O autor

Figura 5.23 – Curvas carga- deslocamento para o pórtico de sete andares



Fonte: O autor

Na Tabela 18 são comparados os resultados obtidos para carga limite de estabilidade para cada tipo de ligação e modelo.

Tabela 18 – Carga limite de estabilidade para o pórtico de 7 andares

Curvas	Chan e Chui (2000)	Presente Trabalho
Curva A	1878,33	1853,34
Modelo linear - A	2177,75	2175,89
Curva B	940,24	937,79
Modelo linear - B	1044,07	1044,04
Ligação Rígida	2742,43	2722,95

Fonte: O autor

O pórtico de sete andares foi comparado em relação às metodologias linear e não linear. Na abordagem linear, a rigidez é fixa durante toda a análise, enquanto na abordagem não linear, a rigidez varia em cada iteração. Neste trabalho, a abordagem não linear foi simulada por meio da adaptação do método dos mínimos quadrados.

Verificou-se que, na fase inicial do carregamento, ambas as metodologias apresentaram comportamentos similares. Entretanto, à medida que o carregamento aumentou, os resultados obtidos pela abordagem não linear mostraram maiores deslocamentos para menores níveis de carregamento, como pode ser observado na Figura 5.23 e na Tabela 18. Durante a análise, constatou-se que, no que diz respeito à ligação (A), o carregamento necessário para comportamento linear com o mesmo nível de deslocamento foi aproximadamente 14,84% maior em comparação com o caso não linear. No caso da ligação (B), esse aumento foi de cerca de 10,18%. Esse fato ocorreu devido ao início da deterioração da rigidez da ligação.

## 6 ANÁLISE DINÂMICA DE ESTRUTURAS

Na área da engenharia, é crucial considerar a resposta dinâmica ao projetar e manter diversas estruturas, como arranha-céus, pontes, navios, estruturas *offshore*, aeronaves, veículos terrestres e espaciais. É importante ressaltar que praticamente todas as estruturas estão sujeitas, de alguma forma, aos efeitos dinâmicos durante toda a sua vida útil (JIA, 2014).

O termo dinâmico pode ser definido de forma simples como uma grandeza que varia com o tempo. Sendo assim, um carregamento dinâmico é caracterizado por uma carga cuja magnitude, direção e/ou posição variam ao longo do tempo. Da mesma forma, a resposta estrutural a um carregamento dinâmico, ou seja, as tensões e deflexões resultantes, também variam no tempo (CLOUGH; PENZIEN, 1975).

A análise dinâmica utiliza integradores temporais e equações diferenciais parciais para descrever o equilíbrio dinâmico, que relaciona espaço e tempo. É importante que as variáveis sejam separáveis na formulação. Para isso, os algoritmos de integração temporal são mecanismos que estabelecem soluções aproximadas para as equações diferenciais geradas pelo MEF, à medida que o tempo avança (COOK *et al.*, 1989).

Em geral, os métodos de integração de tempo podem ser classificados como explícitos ou implícitos. Nos métodos explícitos, a solução do passo de tempo atual ( $t + \Delta t$ ) é obtida com base nas condições de equilíbrio dos passos anteriores conforme a Equação (6.1), o que significa que não é necessário inverter a matriz de rigidez. Portanto, esses métodos são computacionalmente eficientes, especialmente quando as matrizes de massa e amortecimento são diagonais (CHOPRA, 1995).

$$u_{t+\Delta t} = f(u_t, \dot{u}_t, \ddot{u}_t, u_{t-\Delta t}, \dot{u}_{t-\Delta t}, \ddot{u}_{t-\Delta t}, \dots) \quad (6.1)$$

Em contrapartida, os métodos implícitos usam informações atuais para avaliar os deslocamentos demonstrado pela Equação (6.2). Isso significa que os deslocamentos no intervalo de tempo atual levam em conta as velocidades e acelerações da própria etapa atual, o que exige mais custos computacionais nas operações de matriz em cada etapa.

$$u_{t+\Delta t} = f(\dot{u}_{t+\Delta t}, \ddot{u}_{t+\Delta t}, u_t, \dot{u}_t, \ddot{u}_t, \dots) \quad (6.2)$$

Entretanto, é importante destacar que os algoritmos explícitos são condicionalmente estáveis, ou seja, é necessário utilizar intervalos de tempo muito pequenos para garantir sua estabilidade. Eles são ideais para problemas de propagação de onda. Por outro lado, os algoritmos implícitos apresentam a vantagem de serem incondicionalmente estáveis, permitindo o uso de

intervalos de tempo maiores. Assim, em análises dinâmicas estruturais de longa duração, os algoritmos implícitos são mais eficazes do que os algoritmos explícitos (COOK *et al.*, 1989).

Na literatura acadêmica, o método de Newmark, desenvolvido por Newmark (1959), é amplamente utilizado devido à sua simplicidade e alta eficiência, assim como os métodos da regra trapezoidal, da diferença central e de Fox-Goodwin. No entanto, é importante ressaltar que esses métodos não possuem amortecimento artificial, o que significa que não conseguem filtrar os falsos modos de alta frequência introduzidos pela discretização espacial. Para contornar esse problema, foram desenvolvidos outros métodos que incluem um parâmetro extra, como os métodos de HHT- $\alpha$ , WBZ- $\alpha$  e  $\alpha$ -generalizado. Esses métodos incorporam a dissipação desejável e alcançam precisão de segunda ordem e estabilidade incondicional.

## 6.1 FORMULAÇÃO DINÂMICA

A equação geral de equilíbrio que governa a resposta dinâmica não linear do sistema estrutural é dada pela Equação (6.3).

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (6.3)$$

Em que  $\ddot{\mathbf{u}}$ ,  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\mathbf{u}$  são, respectivamente, os vetores de acelerações, de velocidades e de deslocamentos nodais;  $\mathbf{f}_e$  representa o vetor de cargas externas;  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  e  $\mathbf{K}$  são, as matrizes de massa, amortecimento e rigidez, respectivamente.

A matriz de massa consistente para o elemento de viga-pilar convencional é simétrica e definida de acordo com a Equação (6.4).

$$\mathbf{M} = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ & & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ & & & 140 & 0 & 0 \\ & \text{sim.} & & & 156 & -22L \\ & & & & & 4L \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Na qual  $A$  é a área da seção transversal,  $L$  é o comprimento do elemento e  $\rho$  é a massa volumétrica (massa por unidade de volume).

É possível considerar ou modelar o sistema utilizando a massa concentrada (*lumped mass model*) nos pontos nodais. Nesse modelo, admite-se que a massa total dos elementos é transferida diretamente para seus nós e a matriz resultante é diagonal, sendo representada conforme a Equação (6.5) (CHOPRA, 1995).



$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho AL}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho AL^3}{24} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\rho AL^3}{24} \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

Além da matriz de massa, é imprescindível considerar o amortecimento estrutural, pois esse representa a medida de dissipação de energia capaz de conduzir o sistema estrutural de um estado de vibração para um estado de repouso. Neste trabalho, é adotado o modelo de amortecimento proporcional, conforme a Equação (6.6).

$$\mathbf{C} = 2C_m\mathbf{M} \quad (6.6)$$

Na qual  $C_m$  representa o coeficiente de amortecimento.

### 6.1.1 Modelo implícito de Newmark

Com base na ideia de transformar o tempo contínuo em discreto, a literatura apresenta diversas propostas de integradores temporais. Um dos mais simples e eficientes para a análise estrutural dinâmica é o algoritmo de Newmark (NEWMARK, 1959). Nesse método, as estimativas dos campos de deslocamento e velocidades são obtidas a partir das Equações (6.7) e (6.8), respectivamente.

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \dot{\mathbf{u}}_t\Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{u}}_t + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right] \Delta t^2 \quad (6.7)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + (1 - \gamma)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \quad (6.8)$$

Os coeficientes de Newmark,  $\beta$  e  $\gamma$ , são parâmetros de ajuste que determinam a influência da aceleração na estimativa de deslocamento e velocidade ao final do intervalo de tempo. Por exemplo, quando  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$ , as Equações (6.7) e (6.8) se reduzem às equações do movimento retilíneo uniformemente acelerado, o que significa que a aceleração é constante em um passo de tempo. Esses valores são adotados como padrão na solução de problemas usuais, mas podem ser ajustados para lidar com aplicações que envolvam impacto ou não linearidades físicas mais intensas.

A família de Newmark apresenta várias particularidades que se distinguem entre si pelo uso de diferentes valores de  $\beta$  e  $\gamma$ . A Tabela 19 apresenta alguns dos métodos da família de Newmark.

Tabela 19 – Métodos da família de Newmark.

Método	Tipo	$\beta$	$\gamma$	Condição de estabilidade	Ordem de precisão
Aceleração média	Implícito	1/4	1/2	Incondicional	2
Aceleração linear	Implícito	1/6	1/2	Condicional	2
Fox - Goodwin	Implícito	1/12	1/2	Condicional	2
Diferenças centrais	Explícito	0	1/2	Condicional	2

Fonte: O autor

Deseja-se expressar a aceleração e a velocidade em função dos deslocamentos no passo atual e dos valores conhecidos no passo anterior. Para isso, basta isolar essas variáveis nas Equações (6.7) e (6.8), obtendo as Equações (6.9) e (6.10).

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\beta\Delta t^2} - \left( \frac{\mathbf{u}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\beta\Delta t^2} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \quad (6.9)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - [\dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_t] - \left( \frac{\mathbf{u}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\beta\Delta t^2} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \gamma\Delta t \quad (6.10)$$

Ou simplificada de acordo com as equações (6.11) e (6.12).

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t}}{\beta\Delta t^2} - \mathbf{q}_s \quad (6.11)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} + \mathbf{r}_s - \gamma\Delta t \mathbf{q}_s \quad (6.12)$$

Em que vetores de contribuição dinâmica  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$  são representados pelas Equações (6.13) e (6.14), respectivamente.

$$\mathbf{q}_s = \left( \frac{\mathbf{u}_t}{\beta\Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{u}}_t}{\beta\Delta t^2} + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{u}}_t \right) \quad (6.13)$$

$$\mathbf{r}_s = [\dot{\mathbf{u}}_t + \Delta t(1 - \gamma)\ddot{\mathbf{u}}_t] \quad (6.14)$$

Substituindo (6.9) e (6.10) em (6.3), chega-se a Equação (6.15) que representa o equilíbrio dinâmico temporal.

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} \mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \cdot \mathbf{q}_s + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{r}_s - \gamma\Delta t \cdot \mathbf{q}_s - \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (6.15)$$

A equação (6.15) se resume em  $\mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \mathbf{0}$  resultando numa equação não linear com relação a  $(\mathbf{u}_{t+\Delta t})$ , que será solucionada por meio do método de Newton-Raphson. A matriz de rigidez dinâmica  $\mathbf{K}_{\text{din}}$  pode então ser estabelecida de acordo com a Equação (6.16).

$$\mathbf{K}_{\text{din}} = \mathbf{K} + \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t} \quad (6.16)$$

Da equação (6.16) resulta o sistema linear para o cálculo da correção dos deslocamentos no instante considerado, conforme a Equação (6.17).

$$-\mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \mathbf{K}_{\text{din}} \cdot \Delta \mathbf{u} \quad (6.17)$$

Na qual  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  é o deslocamento predito. No início de um passo de tempo ele é assumido como o resultado do passo anterior, ou seja,  $\mathbf{u}_t$ . Resolvendo a correção  $\Delta \mathbf{u}$  na equação (6.17) uma nova tentativa para  $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$  é calculada conforme Equação (6.18).

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta \mathbf{u} \quad (6.18)$$

A partir da obtenção dos deslocamento atuais, a aceleração e a velocidade devem ser, respectivamente, recalculadas para cada iteração conforme as Equações (6.19) e (6.20).

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_s}{\beta\Delta t^2} \quad (6.19)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\beta\Delta t} \mathbf{u}_{t+\Delta t} + \mathbf{r}_s - \gamma\Delta t \mathbf{q}_s \quad (6.20)$$

Lembrando que  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$  permanecem constantes durante as iterações, uma vez que representam valores do passado e somente serão atualizados após a convergência em um passo de tempo, para serem utilizados no próximo passo.

### 6.1.2 Método implícito $\alpha$ -Generalizado

Visando aprimorar a precisão em baixas frequências, dissipando numericamente altas frequências e reduzindo respostas espúrias geradas por erros numéricos, [Hilber, Hughes e Taylor \(1977\)](#) propuseram uma nova metodologia de integração temporal baseada no método de [Newmark \(1959\)](#), chamada de HHT- $\alpha$ . Esse método inclui um novo parâmetro de dissipação numérica,  $\alpha_f$ , na equação de equilíbrio, afetando a energia de deformação, o vetor de carregamento externo e as forças de amortecimento.

Outro algoritmo desenvolvido com base no método de Newmark é o WBZ- $\alpha$ , criado por [Wood, Bossak e Zienkiewicz \(1980\)](#). Assim como o método HHT- $\alpha$ , o WBZ- $\alpha$  incorpora um parâmetro de amortecimento numérico,  $\alpha_m$ , modificando a parcela das forças inerciais.

Posteriormente, [Chung e Hulbert \(1993\)](#) apresentaram uma generalização desses algoritmos, chamado  $\alpha$ -Generalizado, que combina os métodos HHT- $\alpha$  e WBZ- $\alpha$ .

Desta forma, a expressão de equilíbrio para o método de  $\alpha$ -Generalizado é representada pela Equação (6.21).

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) = \mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t-\alpha_f} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t-\alpha_m} - \mathbf{f}_{t+\Delta t-\alpha_f}^{\text{ext}} = 0 \quad (6.21)$$

Nesse método, considera-se que a aceleração, a velocidade, os deslocamentos, as forças internas e externas são obtidos por meio da média ponderada de seus respectivos valores nos passos de tempo  $t$  e  $t + \Delta t$ . Portanto, as equações que descrevem essas variáveis ficam definidas conforme as equações (6.22), (6.23), (6.24), (6.25) e (6.26), respectivamente.

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t-\alpha_m} = (1 - \alpha_m)\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \alpha_m\ddot{\mathbf{u}}_t \quad (6.22)$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \alpha_f\dot{\mathbf{u}}_t \quad (6.23)$$

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1 - \alpha_f)\mathbf{u}_{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{u}_t \quad (6.24)$$

$$\mathbf{f}_{t+\Delta t-\alpha_f}^{\text{int}} = (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + \alpha_f\mathbf{f}_t^{\text{int}} \quad (6.25)$$

$$\mathbf{f}_{t+\Delta t-\alpha_f}^{\text{ext}} = (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} + \alpha_f\mathbf{f}_t^{\text{ext}} \quad (6.26)$$

Na qual  $\alpha_f$  e  $\alpha_m$  são parâmetros de ponderação pré-estabelecidos, que descrevem a dissipação numérica. Conforme a Equação (6.21), ressalta-se que o parâmetro  $\alpha_m$  dissipa as forças inercias, ao mesmo tempo que  $\alpha_f$  trata do vetor de carregamento externo, energia de deformação e das perdas de energia ocasionadas pelo amortecimento.

Desta forma, relacionando as Equações (6.22), (6.23), (6.24), (6.25) e (6.26) com (6.21) tem-se.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) &= (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + (1 - \alpha_m)\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_f)\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ &\quad (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} + \alpha_f\mathbf{f}_t^{\text{ext}} - \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t - \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t - \alpha_f\mathbf{f}_t^{\text{int}} \end{aligned} \quad (6.27)$$

As Equações (6.8) e (6.9) de Newmark são mantidas e substituídas na equação de equilíbrio (6.27), resultando em:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{u}_{t+\Delta t}) &= (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{int}} + (1 - \alpha_m)\frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2}\mathbf{u}_{t+\Delta t} - (1 - \alpha_m)\mathbf{M}\mathbf{q}_s \\ &\quad + (1 - \alpha_f)\frac{\gamma\mathbf{C}}{\beta\Delta t}\mathbf{u}_{t+\Delta t} + (1 - \alpha_f)\mathbf{C}\mathbf{r}_s - (1 - \alpha_f)\gamma\Delta t\mathbf{C}\mathbf{q}_s \\ &\quad - (1 - \alpha_f)\mathbf{f}_{t+\Delta t}^{\text{ext}} - \alpha_f\mathbf{f}_t^{\text{ext}} + \alpha_m\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha_f\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{f}_t^{\text{int}} \end{aligned} \quad (6.28)$$

Os vetores  $\mathbf{q}_s$  e  $\mathbf{r}_s$ , referente as contribuições do passado, são mantidos, conforme as Equações (6.13) e (6.14). A matriz de rigidez dinâmica  $\mathbf{K}_{\text{din}}$  para o método de  $\alpha$  - Generalizado pode então ser estabelecida de acordo com a Equação (6.29).

$$\mathbf{K}_{\text{din}} = \mathbf{K} + (1 - \alpha_m) \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + (1 - \alpha_f) \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (6.29)$$

Com o objetivo de aprimorar a dissipação das altas frequências e garantir consistência e estabilidade, [Chung e Hulbert \(1993\)](#) recomendam as escolhas dos parâmetros em função de um raio espectral da região de alta frequência no infinito  $\rho_\infty$ , obedecendo as relações estabelecidas nas Equações (6.30) e (6.31).

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (6.30)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1}, \quad (6.31)$$

O raio espectral é definido como  $\rho_\infty \in [0, 1]$ . Quando  $\rho_\infty = 1$ , indica-se a ausência de dissipação numérica, enquanto que  $\rho_\infty = 0$  corresponde à aniquilação assintótica das respostas de alta frequência.

O método  $\alpha$ -Generalizado é incondicionalmente estável e apresenta precisão de segunda ordem. Além disso, permite a máxima dissipação de altas frequências e a mínima dissipação de baixas frequências para os parâmetros indicados nas Equações (6.32) e (6.33).

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (6.32)$$

$$\beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2 \quad (6.33)$$

É importante notar que a escolha de  $\alpha_f = 0$  implica no método WBZ-  $\alpha$ , enquanto  $\alpha_m = 0$  resulta no método HHT-  $\alpha$ . Se  $\alpha_m = 0$  e  $\alpha_f = 0$  forem adotados, o algoritmo é reduzido ao método de Newmark.

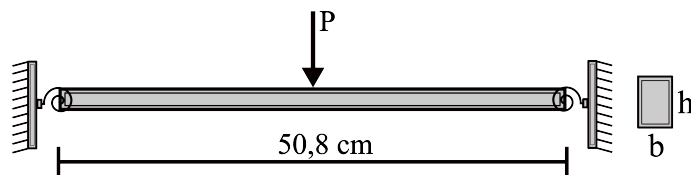
## 6.2 RESULTADOS DO MODELO DINÂMICO

### 6.2.1 Viga com ligações semirrígidas na extremidades

No primeiro exemplo desta seção, é apresentado o comportamento dinâmico de uma viga com ligações semirrígidas, conforme ilustrado na Figura 6.1. Esse exemplo foi previamente estudado por [Chan e Chui \(2000\)](#), [Silva \(2009\)](#) e [Fernandes, Vasconcellos e Greco \(2018\)](#). A viga foi dividida em 10 elementos de viga de Euler-Bernoulli, todos com o mesmo comprimento, e submetida a uma carga concentrada  $P$  aplicada no centro do vão. A semirrígidez da ligação é

simulada por EH, adotado como  $S_c = EI/L$ . Enquanto, a resposta dinâmica é obtida utilizando o método de Newmark.

Figura 6.1 – Viga com ligações semirrígidas



Fonte: O autor

Na Tabela 20 são expostas as propriedades físicas e geométricas da estrutura. Para a análise transiente, os incrementos de tempo são constantes e de magnitude  $\Delta t = 1 \times 10^{-6}$  segundos.

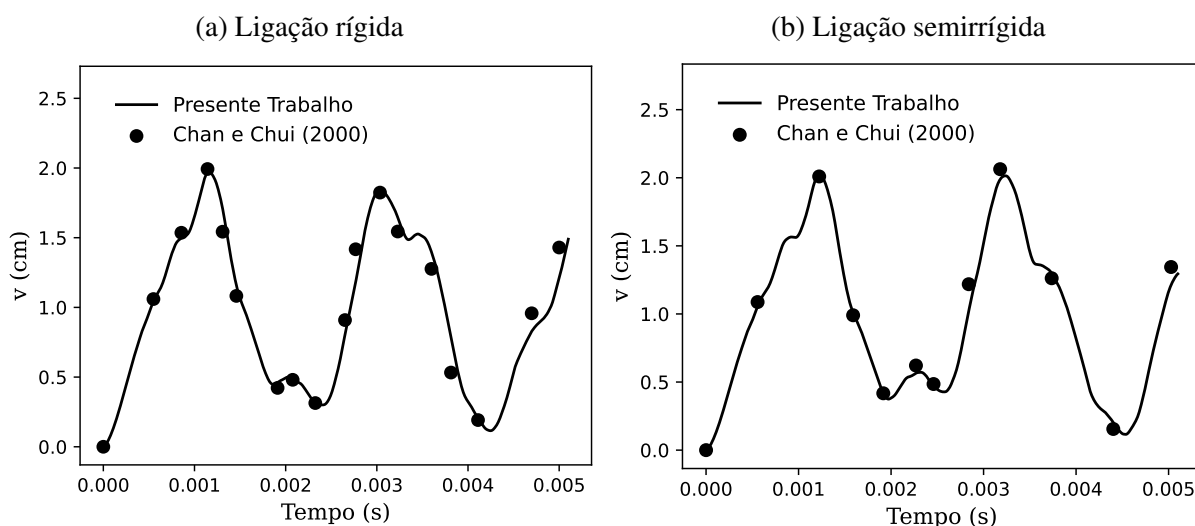
Tabela 20 – Propriedades físicas e geométricas da viga semirrígida

E (N/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	$\rho$ (Ns <sup>2</sup> /cm <sup>4</sup> )
2,0684x10 <sup>7</sup>	0,00677	0,806	2,7786 x 10 <sup>-5</sup>

Fonte: O autor

Uma carga  $P = 2,85$  kN é aplicada na estrutura durante 1 segundo, e o deslocamento vertical no centro da viga foi monitorado durante 0,005s. Nas Figuras 6.2 (a) e (b), é possível observar o comportamento da estrutura para o caso rígido e semirrígido, respectivamente.

Figura 6.2 – Resultado para a viga com ligações rígidas e semirrígidas



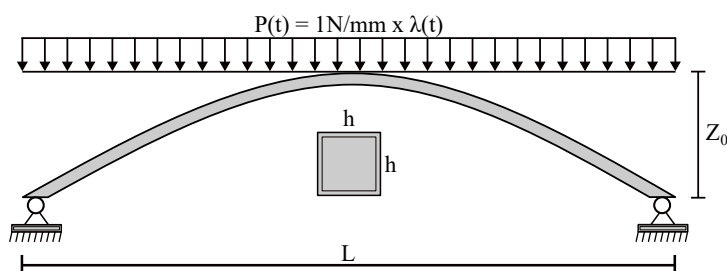
Fonte: O autor.

Observou-se que a resposta obtida é precisa quando comparada com a literatura. A relação deslocamento-tempo para a viga com ligações rígidas apresentou semelhanças com a resposta obtida para a viga com ligação semirrígida. No entanto, é perceptível que a ligação semirrígida exibe um pico de deslocamento mais elevado e uma menor frequência de vibração.

### 6.2.2 Arco senoidal abatido rotulado

Neste exemplo, é estudado um arco senoidal abatido, conforme ilustrado na Figura 6.3, em que é possível observar o comportamento dinâmico de *snap-through*. A estrutura é discretizada por meio de 20 elementos de viga de Euler-Bernoulli e o efeito de rótula é simulado pelo elemento híbrido (EH) com  $Sc = 1 \times 10^{-10}$ . Assim como nas análises apresentadas por [Fernandes, Vasconcellos e Greco \(2018\)](#) e [Li e Yu \(2020\)](#), o fator de carga externa  $\lambda$  é assumido como  $\lambda(t) = 0,2t$ , o que indica um aumento gradual da carga triangular. O passo de tempo utilizado é de  $\Delta t = 1 \times 10^{-5}$  segundos e  $Z_0 = 20\text{mm}$  e  $L = 1000\text{mm}$ .

Figura 6.3 – Arco senoidal abatido



Fonte: O autor

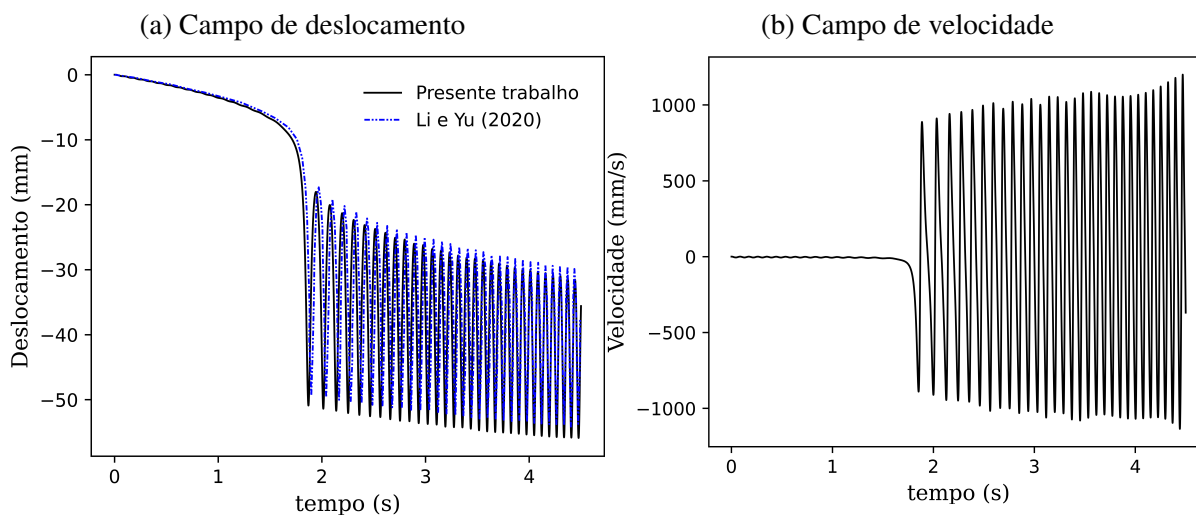
Para esse exemplo é utilizado o integrador temporal de Método implícito  $\alpha$ -Generalizado com  $\rho_\infty = 0,90$ . Na Tabela 21 são dadas as propriedades físicas e geométricas da estrutura.

Tabela 21 – Propriedades físicas e geométricas do arco senoidal abatido rotulado

E (N/mm <sup>2</sup> )	I (mm <sup>4</sup> )	A (mm <sup>2</sup> )	h (mm)	$\rho$ (Ns <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup> )
$2,1 \times 10^5$	$1,3333 \times 10^4$	400	20	$78 \times 10^{-8}$

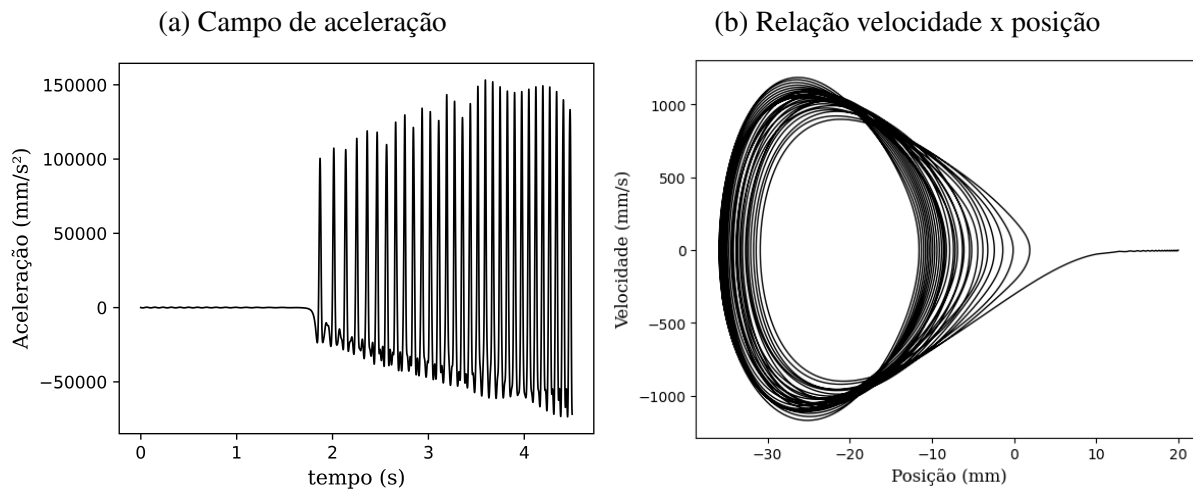
Fonte: O autor

Figura 6.4 – Resultados para os campos de deslocamento e velocidade para o arco senoidal abatido



Fonte: O autor.

Figura 6.5 – Resultados para os campos de aceleração e velocidade/posição para o arco senoidal abatido.



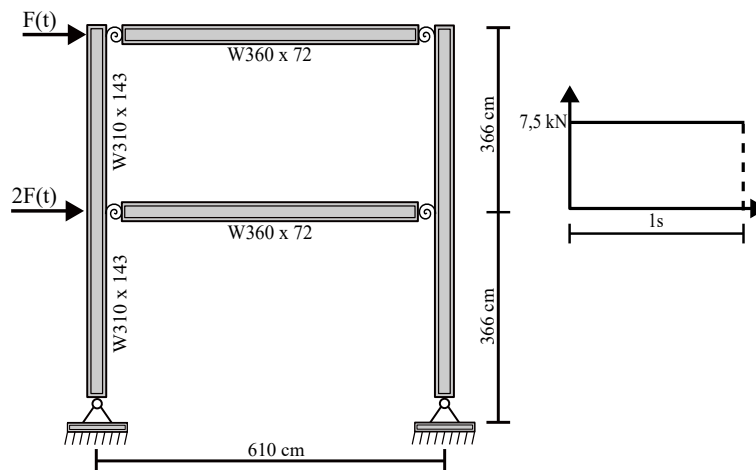
Fonte: O autor.

A Figura 6.4 (a) mostra a resposta transiente do deslocamento vertical do nó central do arco. É possível observar o comportamento de *snap-through* ocorre aproximadamente em  $t = 1,9$  segundos, após o qual o arco entra em vibração. Antes desse efeito, tanto a velocidade mostrada na Figura 6.4 (b) quanto a aceleração na Figura 6.5 (a) são aproximadamente zero, mas crescem rapidamente após o *snap-through*, indicando a ocorrência de vibrações significativas na estrutura que podem ser observadas na Figura 6.5 (b).

### 6.2.3 Pórtico de dois andares

Neste exemplo, é realizada uma investigação em um pórtico de dois pavimentos, apresentado na Figura 6.6.

Figura 6.6 – Pórtico de dois andares sem carga gravitacional



Fonte: O autor



Tabela 22 – Propriedades físicas dos Perfis W 360x72 e W 310x143

W 360 x 72			W 310 x 143		
E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )	E (kN/cm <sup>2</sup> )	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )
2,05 x 10 <sup>4</sup>	2,01 x 10 <sup>4</sup>	91	2,05 x 10 <sup>4</sup>	3,48 x 10 <sup>4</sup>	182

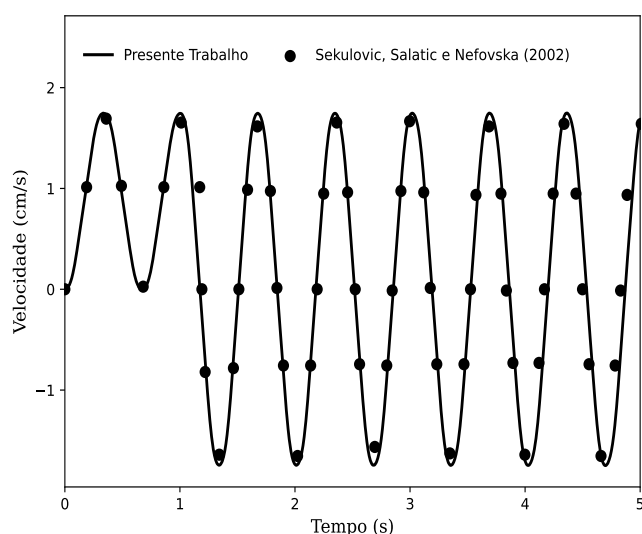
Fonte: O autor

Essa estrutura foi utilizada para validar as formulações e implementações computacionais desenvolvidas para realizar a análise estática de estruturas de aço reticuladas planas com ligações semirrígidas. Para as vigas, assim como na análise estática, é adotado o perfil W 360x72, enquanto que para as colunas, o perfil W 310x143 é escolhido, as propriedades físicas e geométricas são dadas na Tabela 22. Na discretização das vigas e colunas, são usados dois e um elementos finitos com teoria de Timoshenko, respectivamente. Massas concentradas de intensidades 3730 kg e 7460 kg são adotadas nas extremidades e no centro da viga. O método utilizado é o  $\alpha$ -Generalizado e os incrementos de tempo são constantes e de magnitude  $\Delta t = 1 \times 10^{-3}$  segundos.

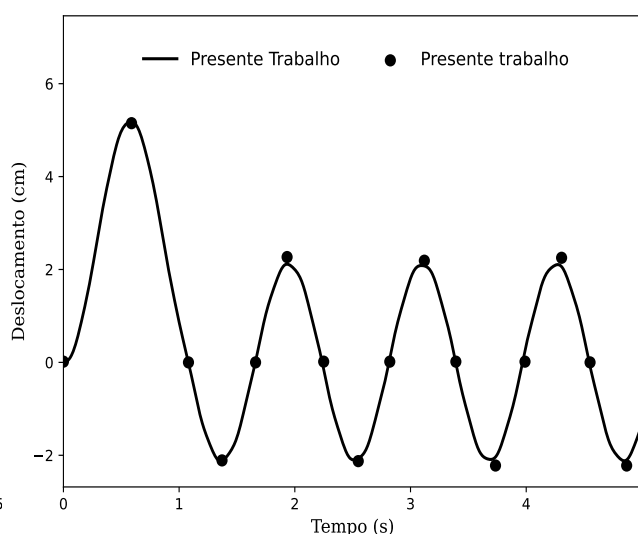
A resposta dinâmica do pórtico rígido e semirrígido é mostrada nas Figuras 6.7 (a) e (b).

Figura 6.7 – Resultado para o pórtico sem carga gravitacional.

(a) Ligações rígidas



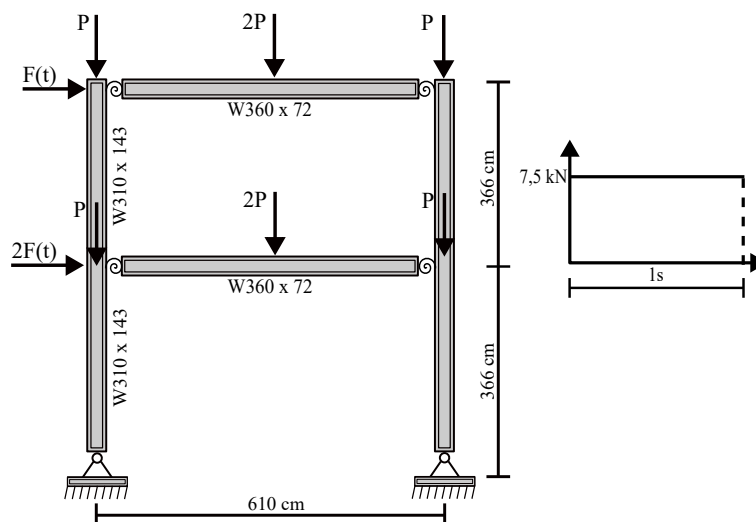
(b) Ligações semirrígidas



Fonte: O autor

Para prever de uma forma mais realística o comportamento da estrutura, foram consideradas cargas gravitacionais aplicadas estaticamente à estrutura, de magnitudes 36.6 kN e 73.2 kN, atuando nas extremidades e no centro das vigas conforme ilustrado na Figura 6.8. Essas cargas induzem esforços axiais nas colunas e, em virtude desses esforços, surgem momentos fletores adicionais, reduzindo a rigidez desses membros e, conseqüentemente, do sistema estrutural.

Figura 6.8 – Pórtico de dois andares com carga gravitacional

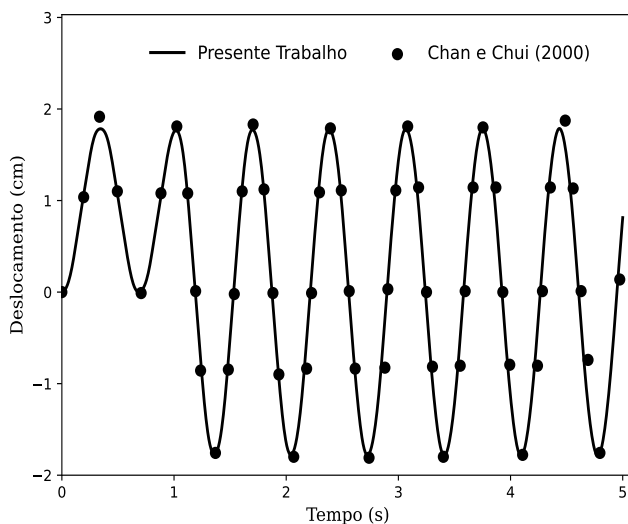


Fonte: O autor

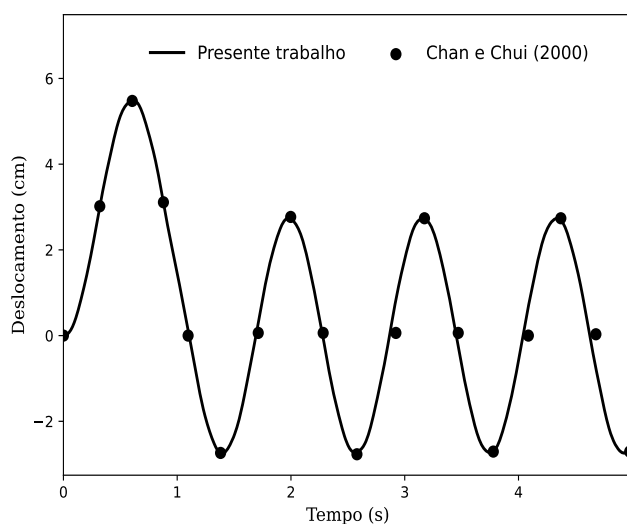
Os resultados para a o pórtico om cagas gravitacionais é mostrado nas Figuras 6.9 (a) e (b).

Figura 6.9 – Resultado para o pórtico com carga gravitacional.

(a) Ligações rígidas



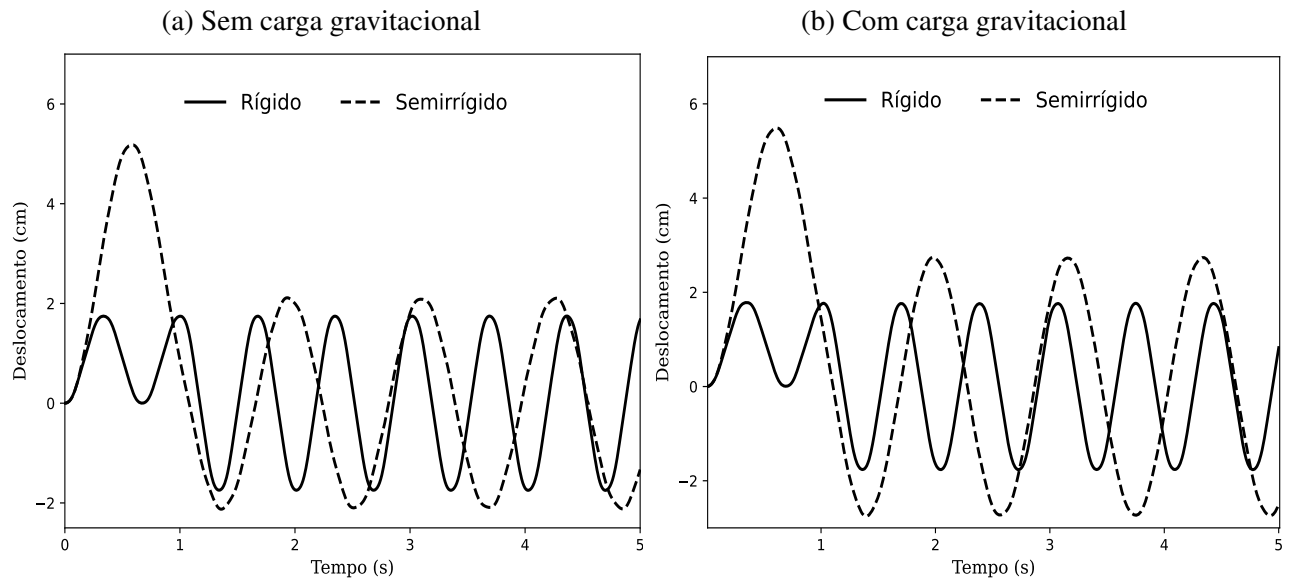
(b) Ligações semirrígidas



Fonte: O autor

Nas Figuras 6.10 (a) e (b), é mostrado a comparação entre o deslocamento para o caso rígido e semirrígido. A partir da análise dos resultados verifica-se que a a consideração da ligação semirrígida ampliou consideravelmente os deslocamentos para ambas as estruturas, em contraponto, à frequência de vibração é maior quando se consideram as ligações rígidas. Adicionalmente, conforme esperado, a adição das cargas gravitacionais elevou o nível dos deslocamentos da estrutura.

Figura 6.10 – Comparação entre as respostas do pórtico sem e com cargas gravitacionais.

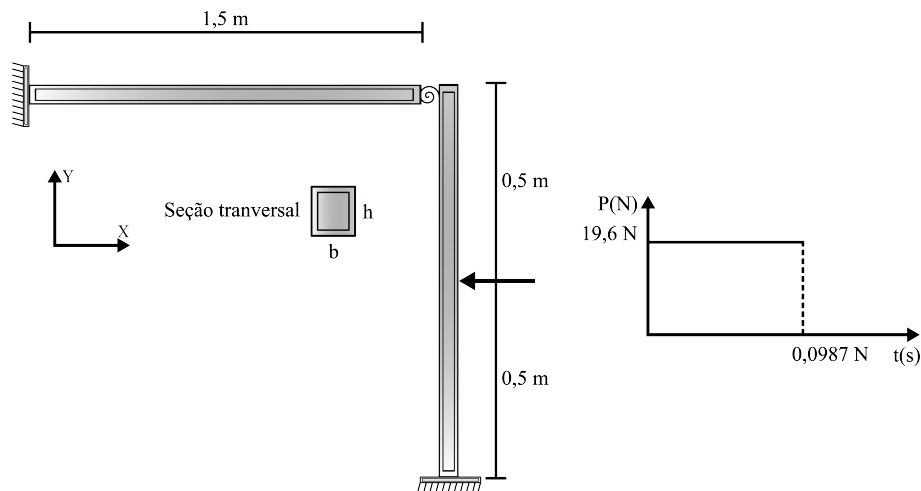


Fonte: O autor

#### 6.2.4 Pórtico biengastado em L

Este exemplo é um pórtico em L com ligação semirrígida submetido a uma carga dinâmica de impacto  $P$  que atua durante os primeiros 0,0987 segundos, conforme Figura (6.11). A viga e o pilar são discretizados com 10 elementos de Euler-Bernoulli cada um e analisada pelo método de  $\alpha$ -Generalizado com  $\rho_{\infty} = 0,9$ . Foi considerado um passo de tempo para integração temporal de  $\Delta t = 1 \times 10^{-4}$  e uma tolerância de  $1 \times 10^{-10}$ . As propriedades físicas e geométricas da estrutura são dadas na Tabela 23.

Figura 6.11 – Viga com ligações semirrígidas



Fonte: O autor

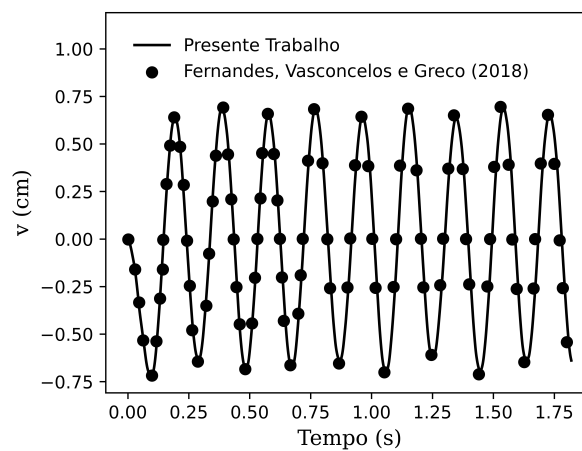
Tabela 23 – Propriedades físicas e geométricas da estrutura

$E$ (N/m <sup>2</sup> )	$A$ (m <sup>2</sup> )	$I$ (m <sup>4</sup> )	$\rho$ (N/m <sup>3</sup> )	$Sc$ (Nm/rad)
$200 \times 10^9$	$1,448 \times 10^{-4}$	$2,074 \times 10^{-10}$	76518	137,3

Fonte: O autor

A Figura 6.12 mostra os resultados obtidos para o deslocamento horizontal do ponto de aplicação da carga  $P(N)$ .

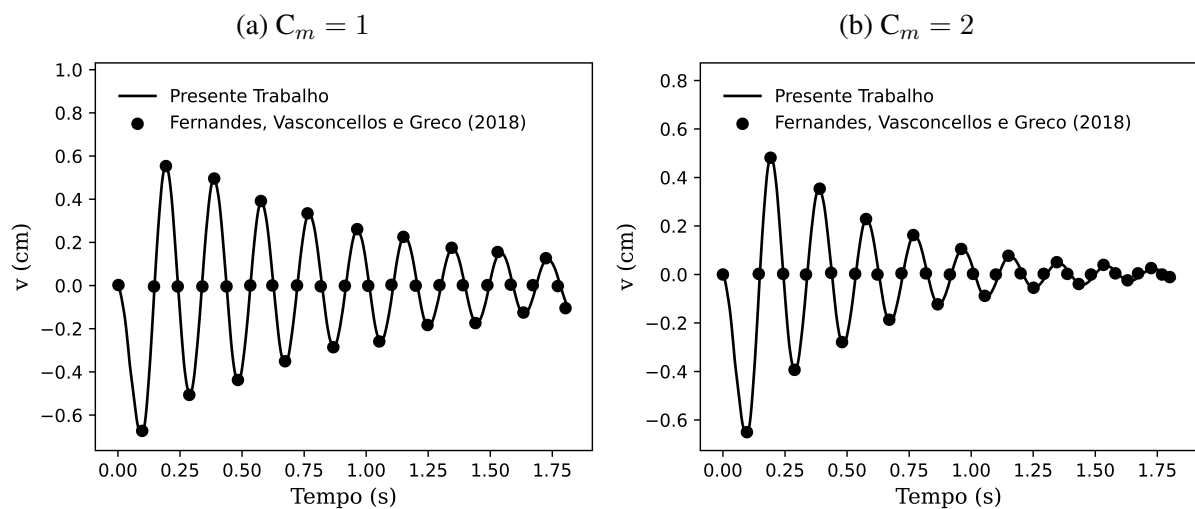
Figura 6.12 – Resultado do pórtico biengastado em L sem amortecimento



Fonte: O autor

Além disso, foram adotados dois valores de coeficiente de amortecimento ( $C_m$ ): 1,0 (amortecido 1) e 2,0 (amortecido 2). As Figuras 6.13 (a) e (b) ilustram os resultados obtidos.

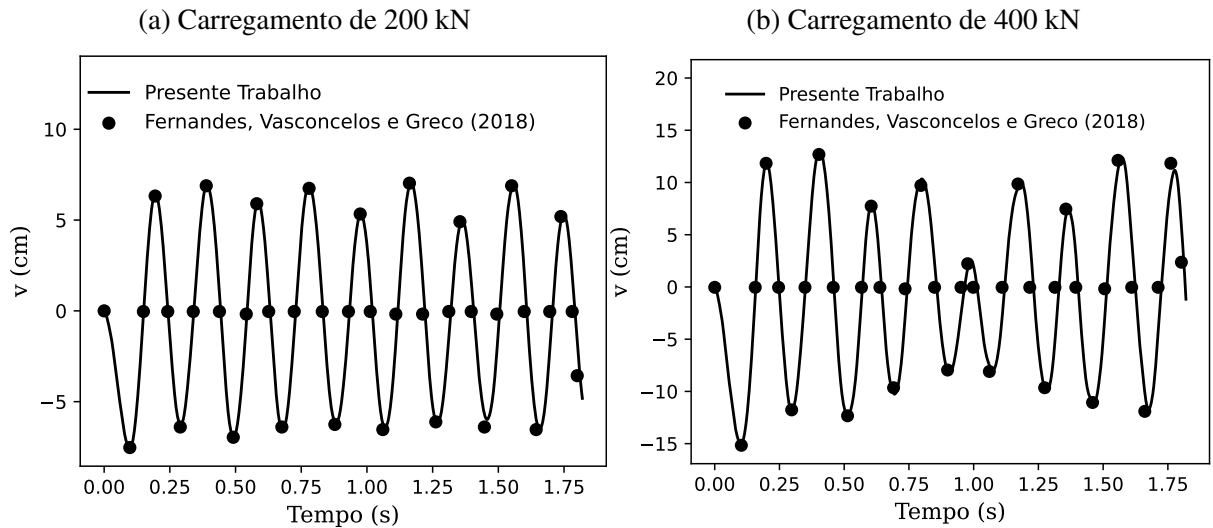
Figura 6.13 – Resultado do pórtico biengastado em L com amortecimento



Fonte: O autor

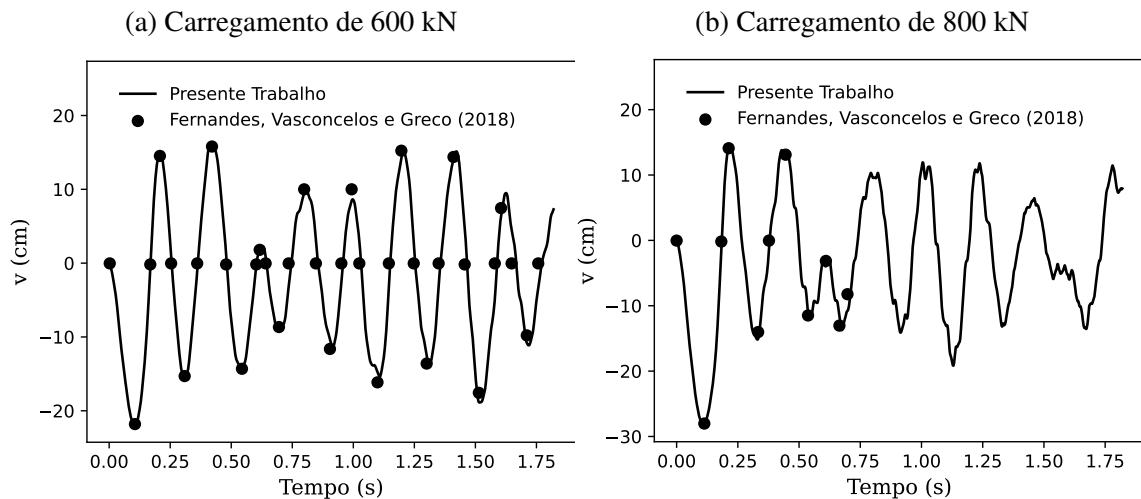
Enquanto, nas Figuras 6.14 (a) e (b) e 6.15 mostram a resposta do pórtico para diferentes valores de  $P(t)$ .

Figura 6.14 – Resultado do pórtico biengastado em L carregamento distinto



Fonte: O autor

Figura 6.15 – Resultado do pórtico biengastado em L carregamento distinto.



Fonte: O autor

Observa-se que os resultados obtidos apresentam excelente concordância com os encontrados por [Fernandes, Vasconcelos e Greco \(2018\)](#). Ademais, é possível verificar que nos casos em que o amortecimento é empregado, a mesma frequência de fase da estrutura não amortecida é observada. Conforme esperado, devido à dissipação de energia que o amortecimento impõe ao sistema, a amplitude relativa dos deslocamentos diminui em função de um maior valor de  $C_m$ . Além disso, percebe-se que à medida que o carregamento atuante aumenta, há um

aumento na amplitude dos deslocamentos. Já para o carregamento de  $P = 800$  kN, observa-se um comportamento não periódico e irregular, bem como uma instabilidade numérica.

## 7 CONCLUSÕES

Na primeira seção, foram estudados o comportamento de um pórtico e um arco com caminho de equilíbrio altamente não linear por distintas teorias de vigas. Conforme observado, os elementos utilizados aqui apresentaram boa concordância quando confrontados com a literatura, entretanto, foi possível observar maiores picos de carregamento para o mesmo nível de deslocamento para a viga de Timoshenko. Além disso, foi estudado o acoplamento de métodos de solução, como o método de Newton-Raphson e o método de Potra-Pták, com diferentes técnicas iterativas. Os resultados mostraram que a metodologia de Potra-Pták reduziu significativamente o número de passos de carga e iterações, entretanto, houve também um aumento do tempo de processamento.

No segundo tópico, foram utilizados dois métodos de simulação da rigidez EH e EL, ambos acoplados às cinemáticas de vigas estudadas na primeira seção. Ambos se mostraram eficientes em inserir o fenômeno de semirrigidez da ligação na estrutura.

Na terceira seção, é proposta uma forma de aplicação do método dos mínimos quadrados para a simulação do comportamento semirrígido da ligação. Esse comportamento é simulado diretamente, por meio da extração dos pontos que formam as curvas momento-rotação e a obtenção de equações que interpolam o comportamento momento-rotação. Por meio dessas expressões, foi possível obter a rigidez rotacional durante toda a análise. Foram estudadas quatro estruturas com diferentes curvas momento-rotação para simular o comportamento de distintas conexões. A metodologia implementada mostrou-se eficiente e capaz de prever o comportamento da ligação para o crescente nível de carregamento. Além disso, a técnica desenvolvida é de fácil adaptação.

As mesmas formulações mencionadas anteriormente para simular os efeitos da não linearidade geométrica e a flexibilidade da ligação foram usadas nessas análises. O procedimento incremental e iterativo que combina os métodos implícitos de  $\alpha$ -Generalizado e de Newmark com a técnica de Newton-Raphson foram adotados na solução do problema não linear. Ambas as formulações se mostraram eficientes em descrever o caminho de equilíbrio da estrutura. Foi observado que a consideração do comportamento semirrígido da ligação aumentou consideravelmente os deslocamentos.

Por fim, destaca-se que todos os objetivos elencados nessa dissertação foram alcançados. Visando a continuidade deste trabalho, como proposta para implementações futuras, sugerem-se:

- Formular um rotina de histerese para incorporar a não linearidade física da ligação nas análises dinâmicas.
- Análise dinâmica no campo das frequências.

- Análise dinâmica inelástica de segunda ordem de elementos estruturais com restrições de contato impostas por um meio elástico, como o solo.



## REFERÊNCIAS

- ADEOTI, G. O. *et al.* Review on aluminum and steel semi-rigid connections behavior design model. 2021.
- AGOSTINI, B. M. Análise de confiabilidade estrutural de pórticos metálicos planos com ligações semirrígidas. 2014.
- AHMED, A. Prediction of moment–rotation characteristic of top-and seat-angle bolted connection incorporating prying action. **International Journal of Advanced Structural Engineering**, Springer, v. 9, p. 79–93, 2017.
- ARISTIZÁBAL-OCHOA, J. D. 1. o. Large deflection stability of slender beam-columns with semirigid connections: Elastica approach. **Journal of engineering mechanics**, American Society of Civil Engineers, v. 130, n. 3, p. 274–282, 2004.
- AZIZINAMINI, A.; BRADBURN, J.; RADZIMINSKI, J. **Static and cyclic behavior of semi-rigid steel beam-column connections**. [S.l.: s.n.]: University of South Carolina Columbia, SC, 1985.
- \_\_\_\_\_. Initial stiffness of semi-rigid steel beam-to-column connections. **Journal of constructional steel research**, Elsevier, v. 8, p. 71–90, 1987.
- BATELO, E. A. P. Análise dinâmica avançada de estruturas de aço sob cargas extremas. 2014.
- BATTINI, J.-M. **Co-rotational beam elements in instability problems**. 2002. Tese (Doutorado) — KTH, 2002.
- BAUCHAU, O. A.; CRAIG, J. I. Euler-bernoulli beam theory. **Structural analysis**, Springer, p. 173–221, 2009.
- BELO, I. M. Desenvolvimento da formulação corrotacional em elementos finitos de casca para a análise hiperelástica. 2012.
- BENUSSI, F.; NETHERCOT, D.; ZANDONINI, R. Experimental behaviour of semi-rigid connections in frames. *In: Connections in Steel Structures III*. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 1996. p. 57–66.
- BERGAN, P. G. Solution algorithms for nonlinear structural problems. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 12, n. 4, p. 497–509, 1980.
- CASTRO, R. **Modelagem Computacional de Ligações Semi-rígidas e sua Influência no Comportamento Dinâmico de Pórticos de Aço**. 2006. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil/FEN . . . , 2006.
- CHAN, S. L. Geometric and material non-linear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 26, n. 12, p. 2657–2669, 1988.
- CHAN, S.-L.; CHUI, P.-T. **Non-linear static and cyclic analysis of steel frames with semi-rigid connections**. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 2000.

- CHEN, W.-F.; KISHI, N.; KOMURO, M. **Semi-rigid connections handbook**. [S.l.: s.n.]: J. Ross Publishing, 2011.
- CHEN, W.-K.; LUI, E. **Stability design of steel frames**. [S.l.: s.n.]: CRC press, 1991.
- CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake engineering: Anil K. Chopra Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ (1995) ISBN 0-13-855214-2**. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 1995.
- CHRISTOPHER, J. E.; BJORHOVDE, R. Semi-rigid frame design methods for practicing engineers. **Engineering Journal-American Institute of Steel Construction**, AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC., v. 36, p. 12–28, 1999.
- CHUI, P.; CHAN, S. L. Transient response of moment-resistant steel frames with flexible and hysteretic joints. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 39, n. 3, p. 221–243, 1996.
- CHUNG, J.; HULBERT, G. A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method. 1993.
- CLOUGH, R.; PENZIEN, J. **Dynamics Of structures**. [S.l.: s.n.]: McGraw-Hill NY, USA, 1975.
- COLSON, A. Connections incidence on the inelastic behaviour of steel structures. *In: EuroMech Colloquium 174*. [S.l.: s.n.], 1983.
- COOK, R. D. *et al.* **Concepts and applications of finite element analysis**. [S.l.: s.n.]: John wiley & sons, 1989.
- CORDERO, A. *et al.* New modifications of potra–pták’s method with optimal fourth and eighth orders of convergence. **Journal of computational and applied mathematics**, Elsevier, v. 234, n. 10, p. 2969–2976, 2010.
- CRISFIELD, M. **Non-linear Finite Analysis of Solids and Structures: Vol. 1: advanced Topics**. [S.l.: s.n.]: Wiley, 1991.
- CRISFIELD, M.; MOITA, G. A unified co-rotational framework for solids, shells and beams. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 33, n. 20-22, p. 2969–2992, 1996.
- CRISFIELD, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles “snap-through”. *In: Computational methods in nonlinear structural and solid mechanics*. [S.l.: s.n.]: Elsevier, 1981. p. 55–62.
- \_\_\_\_\_. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 81, n. 2, p. 131–150, 1990.
- CUNHA, J. P. F. B. d. Análise estática e dinâmica de pórticos planos com o uso da formulação corrotacional. Universidade Federal de Goiás, 2018.
- DATTA, B. N. **Numerical linear algebra and applications**. [S.l.: s.n.]: Siam, 2010. v. 116.
- DEGERTEKIN, S.; HAYALIOGLU, M. Design of non-linear semi-rigid steel frames with semi-rigid column bases. **Electronic journal of structural engineering**, v. 4, p. 1–16, 2004.

- DELSAVIO, A. A. **Modelagem computacional de estruturas de aço com ligações semi-rígidas**. 2004. Tese (Doutorado) — MSc. Dissertation, Civil Engineering Department—PUC-Rio, Brazil,(in Portuguese), 2004.
- DHILLON, B.; O'MALLEY, J. W. Interactive design of semirigid steel frames. **Journal of Structural Engineering**, American Society of Civil Engineers, v. 125, n. 5, p. 556–564, 1999.
- DIAS, C. L. **Análise de estruturas metálicas com ligações semirrígidas utilizando a ferramenta educacional FTOOL**. 2021. Tese (Doutorado) — PUC-Rio, 2021.
- ELKARANSHAWY, H. A.; ELERIAN, A. A.; HUSSIEN, W. I. A corotational formulation based on hamilton's principle for geometrically nonlinear thin and thick planar beams and frames. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2018, 2018.
- FELIPPA, C. A. A systematic approach to the element-independent corotational dynamics of finite elements. Technical Report CU-CAS-00-03, Center for Aerospace Structures, 2000.
- FERNANDES, W. L.; VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. Dynamic instability in shallow arches under transversal forces and plane frames with semirigid connections. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2018, 2018.
- FERREIRA, I. **Análise dinâmica não linear geométrica de treliças espaciais**. [S.l.: s.n.]: Belo Horizonte, Brazil, 2009.
- FERREIRA, M. d. A. **Deformabilidade de ligações viga-pilar de concreto pré-moldado**. 1999. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1999.
- FUJII, F.; CHOONG, K.; GONG, S.-X. Variable displacement control to overcome turning points of nonlinear elastic frames. **Computers & structures**, Elsevier, v. 44, n. 1-2, p. 133–136, 1992.
- GALVÃO, A. S. **INSTABILIDADE ESTÁTICA E DINÂMICA DE PÓRTICOS PLANOS COM LIGAÇÕES SEMI-RÍGIDAS**. 2004. Tese (Doutorado) — Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, Rio de Janeiro, 2004.
- HAI, N. V. *et al.* Large displacement elastic analysis of planar steel frames with flexible beam-to-column connections under static loads by corotational beam-column element. **Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-HUCE**, v. 13, n. 3, p. 85–94, 2019.
- HILBER, H. M.; HUGHES, T. J.; TAYLOR, R. L. Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics. **Earthquake Engineering & Structural Dynamics**, Wiley Online Library, v. 5, n. 3, p. 283–292, 1977.
- HOU, R. *et al.* Structural damage detection of space frame structures with semi-rigid connections. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 235, p. 112029, 2021.
- JIA, J. **Essentials of applied dynamic analysis**. [S.l.: s.n.]: Springer, 2014. v. 750.
- JOHNSTONE, N. D.; WALPOLE, W. R. **Bolted End Plate Beam to Column Connections Under Earthquake Type Loading**. [S.l.: s.n.]: Department of Civil Engineering, University of Canterbury, 1981.
- JUNIOR, R. C. **Análise do Comportamento de Estruturas Reticuladas de Aço com Ligações Semi-Rígidas**. 1990. Tese (Doutorado) — Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica, Rio de Janeiro . . . , 1990.

- LEVY, R.; SPILLERS, W. R. **Analysis of geometrically nonlinear structures**. [S.l.: s.n.]: Springer Science & Business Media, 2013.
- LI, J.; YU, K. A truly self-starting implicit family of integration algorithms with dissipation control for nonlinear dynamics. **Nonlinear Dynamics**, Springer, v. 102, n. 4, p. 2503–2530, 2020.
- LUI, E.; CHEN, W.-F. Analysis and behaviour of flexibly-jointed frames. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 8, n. 2, p. 107–118, 1986.
- MAXIMIANO, D. P. **Uma técnica eficiente para estabilizar a estratégia do resíduo ortogonal na análise não linear de estruturas**. [S.l.: s.n.]: Ouro Preto: Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil, DECIV/Escola de . . . , 2012.
- MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D. d.; SILVEIRA, R. A. d. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Rem: Revista Escola de Minas**, SciELO Brasil, v. 67, p. 143–150, 2014.
- MEEK, J.; TAN, H. S. Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 47, n. 3, p. 261–282, 1984.
- MEISTER, D. Aplicação dos métodos dos mínimos quadrados na estimação de parâmetros do modelo de um transformador. 2006.
- MENIN, R. C. G. Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas. 2006.
- MOHAMMED, D. R.; ISMAEL, M. A. Effect of semi-rigid connection on post-buckling behaviour of frames using finite element method. **Civil Engineering Journal**, v. 5, n. 7, p. 1619–1630, 2019.
- MONDKAR, D.; POWELL, G. Finite element analysis of non-linear static and dynamic response. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 11, n. 3, p. 499–520, 1977.
- MONTEIRO, F. A. C. Uma formulação co-rotacional geral: aplicação a porticos espaciais. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Aeronáutica e Mecânica, Instituto Tecnológico de Aeronáutica, 2004.
- MONTEIRO, R. C. Análise de estruturas de aço com ligações semi-rígidas. Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.
- NADER, M.; ASTANEH, A. Dynamic behavior of flexible, semirigid and rigid steel frames. **Journal of Constructional Steel Research**, Elsevier, v. 18, n. 3, p. 179–192, 1991.
- NASCIMENTO, É. L. d. R. Unificação de diferentes formulações corrotacionais aplicadas na análise não linear de vigas, pórticos e arcos. 2021.
- NEFOVSKA-DANILOVIĆ, M.; SEKULOVIĆ, M. Static inelastic analysis of steel frames with flexible connections. **Theoretical and Applied Mechanics**, Srpsko društvo za mehaniku, Beograd, v. 31, n. 2, p. 101–134, 2004.

- NEWMARK, N. M. A method of computation for structural dynamics. **Journal of the engineering mechanics division**, American Society of Civil Engineers, v. 85, n. 3, p. 67–94, 1959.
- NOUR-OMID, B.; RANKIN, C. Finite rotation analysis and consistent linearization using projectors. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 93, n. 3, p. 353–384, 1991.
- OLIVEIRA, G. C. d. Aplicação do elemento de viga unificado bernoulli-timoshenko e da formulação co-rotacional na análise não-linear de pórticos e arcos. 2016.
- OSTRANDER, J. R. **An experimental investigation of end plate connections**. 1970. Tese (Doutorado) — University of Saskatchewan, 1970.
- PACOSTE, C.; ERIKSSON, A. Beam elements in instability problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, Elsevier, v. 144, n. 1-2, p. 163–197, 1997.
- PENG, X.; CRISFIELD, M. A consistent co-rotational formulation for shells using the constant stress/constant moment triangle. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 35, n. 9, p. 1829–1847, 1992.
- PINHEIRO, L. Análises não-lineares de sistemas estruturais metálicos rotulados e semi-rígidos. 2003.
- PINHEIRO, L.; SILVEIRA, R. A. d. M. Computational procedures for nonlinear analysis of frames with semi-rigid connections. 2005.
- POTRA, F.-A.; PTÁK, V. **Nondiscrete induction and iterative processes**. [S.l.: s.n.]: Pitman Advanced Publishing Program, 1984. v. 10.
- RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. *In*: **Nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. [S.l.: s.n.]: Springer, 1981. p. 63–89.
- \_\_\_\_\_. The riks/wempner approach—an extension of the displacement control method in nonlinear analysis. **Recent Advance in Non-linear Computation Mechanics**, Pineridge Press Limited, 1982.
- RANKIN, C.; BROGAN, F. An element independent corotational procedure for the treatment of large rotations. 1986.
- RANKIN, C.; NOUR-OMID, B. The use of projectors to improve finite element performance. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 30, n. 1-2, p. 257–267, 1988.
- REIS, R. A. d. Implementação de um código computacional destinado à solução de sistemas de equações lineares e não lineares via métodos iterativos: Aplicações em treliças metálicas. 2003.
- RICHARD, R. M.; ABBOTT, B. J. Versatile elastic-plastic stress-strain formula. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, American Society of Civil Engineers, v. 101, n. 4, p. 511–515, 1975.
- RIKS, E. The application of newton's method to the problem of elastic stability. 1972.
- \_\_\_\_\_. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 15, n. 7, p. 529–551, 1979.

- RODRIGUES, M. A. C. **Soluções integradas para as formulações do problema de não linearidade geométrica**. 2019. Tese (Doutorado) — Tese de doutorado em andamento, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental . . . , 2019.
- SANTOS, L. B. d. **Influência da rigidez das ligações em estruturas de aço**. 1998. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo, 1998.
- SEGUNDO, J. da S. R. **Estratégias Numéricas para Otimização da Solução Não Linear de Problemas Estruturais**. 2019. 81 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, 2019.
- SILVA, A. R. D. d. Sistema computacional para análise avançada estática e dinâmica de estruturas metálicas. Programa de Pós Graduação em Engenharia Civil. Departamento de Engenharia . . . , 2009.
- SILVA, S. S. d. Análise não linear de pórticos planos utilizando uma formulação co-rotacional e plasticidade por camadas. 2011.
- SILVA, W. M.; CUNHA, A.; GUTIÉRREZ, M. D. Análisis no lineal de pórticos planos usando la formulación corrotacional con elemento de viga timoshenko. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, Elsevier, v. 33, n. 1-2, p. 115–122, 2017.
- SOARES, A. L. **Estudo de modelos não lineares de ligação viga-coluna para pórticos planos**. 2021. 96 p. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2021.
- SOLEYMANI, F. *et al.* An optimized derivative-free form of the potra-pták method. **Mathematical and computer modelling**, Elsevier, v. 56, n. 5-6, p. 97–104, 2012.
- SOUZA, L. A. F. d.; VANALLI, L.; LUZ, A. B. d. Numerical-computational model for nonlinear analysis of frames with semirigid connection. **Mathematical Problems in Engineering**, Hindawi, v. 2020, 2020.
- SOUZA, L. A. F. de *et al.* Modelo numérico-computacional de ligação semirrígida baseado na mecânica do dano. **Matéria (Rio de Janeiro)**, SciELO Brasil, v. 27, 2022.
- SOUZA, L. d. *et al.* Métodos iterativos de terceira e quarta ordem associados à técnica de comprimento de arco linear. **Ciência & Engenharia**, v. 26, n. 1, p. 39–49, 2017.
- SOUZA, R. M. D. **Force-based finite element for large displacement inelastic analysis of frames**. [*S.l.*: *s.n.*]: University of California, Berkeley, 2000.
- TANG, Y.-Q. *et al.* Consistent co-rotational framework for euler-bernoulli and timoshenko beam-column elements under distributed member loads. **Advances in Structural Engineering**, SAGE Publications Sage UK: London, England, v. 24, n. 9, p. 1847–1858, 2021.
- TRAN, V.-L.; KIM, J.-K. Revealing the nonlinear behavior of steel flush endplate connections using ann-based hybrid models. **Journal of Building Engineering**, Elsevier, v. 57, p. 104878, 2022.
- VEUBEKE, B. F. D. The dynamics of flexible bodies. **International Journal of Engineering Science**, Elsevier, v. 14, n. 10, p. 895–913, 1976.

- WEMPNER, G. Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 5, n. 2, p. 117–153, 1969.
- WEMPNER, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 7, n. 11, p. 1581–1599, 1971.
- WILSON, W. M.; MOORE, H. F. **Tests to determine the rigidity of riveted joints of steel structures**. [S.l.], 1917.
- WOOD, W.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. An alpha modification of newmark's method. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 15, n. 10, p. 1562–1566, 1980.
- XU, J.; LEE, C.; TAN, K. A two-dimensional co-rotational timoshenko beam element with xfem formulation. **Computational Mechanics**, Springer, v. 49, n. 5, p. 667–683, 2012.
- YANG, T.; SAIGAL, S. A simple element for static and dynamic response of beams with material and geometric nonlinearities. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 20, n. 5, p. 851–867, 1984.
- YANG, Y.-B.; KUO, S.-R. Theory and analysis of nonlinear framed structures. Prentice Hall PTR, 1994.
- YAW, L. L. 1 2d corotational beam formulation. Citeseer, 2009.
- ZHANG, J. *et al.* An investigation of the effect of semi-rigid connections on sudden column removal in steel frames. *In: ELSEVIER. Structures*. [S.l.: s.n.], 2018. v. 13, p. 166–177.
- ZHOU, G. *et al.* Analytical model of moment-rotation relation for steel beam to cfst column connections with bidirectional bolts. **Engineering Structures**, Elsevier, v. 196, p. 109374, 2019.