UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

CESAR POSTINGEL RAMOS

Endomorfismos sobrejetores de grupos e anéis de matrizes triangulares superiores de ordem infinita

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

CESAR POSTINGEL RAMOS

ORIENTADORA: PROFª DRª ÉRICA ZANCANELLA FORNAROLI

Endomorfismos sobrejetores de grupos e anéis de matrizes triangulares superiores de ordem infinita

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática - PMA/UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maringá-PR
2018

CESAR POSTINGEL RAMOS

ENDOMORFISMOS SOBREJETORES DE GRUPOS E ANÉIS DE MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM INFINITA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Érica Zancanella
Profa. Dra. Érica Zancanella Fornaroli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Thiago F
Prof. Dr. Thiago Henrique de Freitas
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Guarapuava

Ednei A. Santulo Jr
Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 25 de abril de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente aos meus pais, por sempre me propiciar a chance de estudar e estarem ao meu lado dando total apoio.

Agradeço a minha namorada, por sempre ser minha parceira, pelo apoio e pelas boas palavras em momentos complicados.

Agradeço a todos os meus professores, do Departamento de Matemática e da Pós-Graduação em Matemática, que direta ou indiretamente contribuíram para a elaboração deste trabalho. Queria agradecer em particular a Profª. Drª. Lilian Akemi Kato, pelos, excelentes conselhos, dentre eles, o de realizar o mestrado e, por possibilitar auxílio nos primeiros meses do mestrado, no programa PROINTE.

Agradeço também aos meus amigos de curso por terem me apoiado nas horas difíceis e terem me ajudado em vários momentos de dúvidas.

Agradeço principalmente a minha orientadora Profª. Drª. Érica Zancanella Fornaroli, por ter aceitado ser minha orientadora, pelos seus ensinamentos, por ser uma pessoa íntegra, comprometida e dedicada.

Por fim, agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível dedicar-me integralmente à jornada de estudos.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é descrever os endomorfismos sobrejetores do anel das matrizes triangulares superiores de ordem $|\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}|$ sobre um corpo com pelo menos três elementos. Para isso, primeiro descrevemos os endomorfismos sobrejetores do grupo das matrizes triangulares superiores inversíveis de mesma ordem.

ABSTRACT

The aim of this work is to describe the onto endomorphisms of the ring of triangular matrices of order $|\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}|$ over a field with at least three elements. To do so, we first describe the onto endomorphisms of the group of the invertible upper triangular matrices of the same order.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O início do desenvolvimento da teoria das matrizes infinitas pode ser encontrado em [1]. Segundo o autor, essa teoria começou a se desenvolver com Henri Poincaré em 1884 e ganhou um grande impulso em 1906, quando David Hilbert usou formas quadráticas infinitas, que são equivalentes a matrizes infinitas, para resolver uma equação integral. Os primeiros e mais importantes estudos envolvendo matrizes infinitas vieram de problemas decorrentes da Análise, e não da Álgebra.

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre os endomorfismos sobrejetores do anel das matrizes triangulares superiores de ordem $|\mathbb{N}| \times |\mathbb{N}|$ com entradas em um corpo F, $\mathcal{T}_\infty(F)$, e é baseado em [9]. Para isso, apresentamos também uma descrição dos endomorfismos sobrejetores do grupo $T_\infty(F)$ formado pelas matrizes inversíveis de $\mathcal{T}_\infty(F)$. Tal resultado pode ser encontrado em [7].

No Capítulo 1 descrevemos os elementos inversíveis de $\mathcal{T}_\infty(F)$ e, portanto, o grupo multiplicativo $T_\infty(F)$ formado pelas matrizes inversíveis. Além disso, consideramos vários subgrupos de $T_\infty(F)$ e descrevemos algumas de suas propriedades. Dentre eles, destacamos o subgrupo $UT_\infty(F)$, formado pelas matrizes de $T_\infty(F)$ que possuem apenas 1's na diagonal.

No Capítulo 2 descrevemos os endomorfismos sobrejetores dos grupos $T_\infty(F)$ e $UT_\infty(F)$.

No Capítulo 3 utilizamos os resultados obtidos no Capítulo 2 para descrever os endomorfismos sobrejetores do anel $\mathcal{T}_\infty(F)$.

CAPÍTULO 1

GRUPO DAS MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES

Neste capítulo inicial fazemos uma abordagem das notações que usaremos no decorrer da dissertação, bem como das definições e resultados sobre os subgrupos das matrizes triangulares superiores. Tais conceitos e resultados encontram-se em [7] e em suas referências.

1.1 Matrizes triangulares infinitas inversíveis

Dado um corpo F, vamos denotar por $\mathcal{T}_\infty(F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores de ordem $|\mathbb{N}|$ com entradas em F, isto é,

$$\mathcal{T}_\infty(F) = \{a = (a_{ij}) : a_{ij} \in F \text{ para todos } i, j \in \mathbb{N}^* \text{ e } a_{ij} = 0 \text{ se } i > j\},$$

sendo $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Vamos denotar por e_∞ a matriz de $\mathcal{T}_\infty(F)$ que tem 1 na posição (i, i) para todo $i \geq 1$ e 0 nas demais. Note que $\mathcal{T}_\infty(F)$ é um anel com as operações usuais de adição e multiplicação de matrizes e que e_∞ é a identidade desse anel.

Proposição 1.1.1. *Dado $a \in \mathcal{T}_\infty(F)$ são equivalentes:*

(i) *a tem um inverso à direita;*

(ii) *a tem um inverso à esquerda;*

(iii) *a é inversível;*

(iv) *$a_{ii} \neq 0$ para todo i.*

Demonstração. $(i) \Rightarrow (iv)$ Suponhamos que a tenha inverso à direita b, assim $ab = e_\infty$. Então, para cada i,

$$1 = (e_\infty)_{ii} = (ab)_{ii} = \sum_{i \leq r \leq i} a_{ir} b_{ri} = a_{ii} b_{ii}.$$

Logo $a_{ii} \neq 0$ para todo i.

$(iv) \Rightarrow (i)$ Suponhamos $a_{ii} \neq 0$ para todo i. Vamos definir $b \in \mathcal{T}_\infty(F)$ tal que $ab = e_\infty$. Sejam i, j tais que $i \leq j$ e seja $n = j - i$. Se $n = 0$, então $i = j$. Neste caso definimos $b_{ii} = a_{ii}^{-1}$. Seja $n > 0$ e suponhamos que para cada par k, l com $1 \leq k < l$ e $l - k < n$, b_{kl} já esteja definido. Sejam i, j tais que $1 \leq i < j$ e $j - i = n$. Como $i < j$, devemos ter

$$0 = (ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = a_{ii} b_{ij} + \sum_{i < r \leq j} a_{ir} b_{rj},$$

ou, equivalentemente,

$$b_{ij} = a_{ii}^{-1} \left[- \sum_{i < r \leq j} a_{ir} b_{rj} \right].$$

Como $j - r < n$ para todo r tal que $i < r \leq j$, pela hipótese de indução, b_{rj} já está definido e, portanto, b_{ij} está definido. Portanto, definimos $b \in \mathcal{T}_\infty(F)$ tal que $ab = e_\infty$.

Analogamente, prova-se $(ii) \Leftrightarrow (iv)$. Logo (iv) implica (i) e (ii) e, portanto, (iv) implica (iii) . Além disso, (iii) implica (i) que implica (iv) e assim o resultado está provado. ☐

Para uma matriz inversível $u = (u_{ij}) \in \mathcal{T}_\infty(F)$, vamos denotar as entradas de u^{-1} por $\bar{u}_{ij}$.

Seja $T_\infty(F)$ o grupo dos elementos inversíveis de $\mathcal{T}_\infty(F)$. Pela proposição anterior,

$$T_\infty(F) = \{a \in \mathcal{T}_\infty(F) : a_{ii} \neq 0 \text{ para todo } i\}.$$

Os subconjuntos

$$D_\infty(F) = \{a \in T_\infty(F) : a_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j\}$$

e

$$UT_\infty(F) = \{a \in T_\infty(F) : a_{ii} = 1 \text{ para todo } i\},$$

claramente, são subgrupos de $T_\infty(F)$. Os elementos de $D_\infty(F)$ são chamados de matrizes *diagonais* e os elementos de $UT_\infty(F)$ de matrizes *unitriangulares*.

Proposição 1.1.2. *Para cada $t \in T_\infty(F)$, existe $d \in D_\infty(F)$ e $u \in UT_\infty(F)$ tais que $t = du$.*

Demonstração. Dado $t \in T_\infty(F)$ tomemos $d \in D_\infty(F)$ com $d_{ii} = t_{ii}$ para todo i, e $u \in UT_\infty(F)$ com $u_{ij} = t_{ii}^{-1} t_{ij}$ para $i < j$. Para todo i, temos

$$(du)_{ii} = \sum_{i \leq r \leq i} d_{ir} u_{ri} = d_{ii} u_{ii} = t_{ii}.$$

E se $i < j$,

$$(du)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} d_{ir} u_{rj} = d_{ii} u_{ij} = d_{ii}(d_{ii}^{-1} t_{ij}) = t_{ij}.$$

Portanto $du = t$. ☐

Vejamos agora alguns subgrupos do grupo $UT_\infty(F)$.

(1) Denotemos $UT^0_\infty(F) = UT_\infty(F)$ e, para cada inteiro $k \geq 1$, seja

$$UT^k_\infty(F) = \{u \in UT_\infty(F) : u_{ij} = 0 \text{ se } 0 < j - i \leq k\}.$$

Para um elemento arbitrário $a \in \mathcal{T}_\infty(F)$, chamaremos de *$n$-ésima diagonal* de a àquela formada pelas entradas $(i, i+n)$, onde $n \geq 1$. Portanto, $UT^k_\infty(F)$ é o subconjunto de $\mathcal{T}_\infty(F)$ formado pelas matrizes que tem apenas $1'$s na diagonal principal e $0'$s na n-ésima diagonal para todo n tal que $1 \leq n \leq k$.

Para provar que $UT^k_\infty(F)$ é um subgrupo de $UT_\infty(F)$, sejam $a, b \in UT^k_\infty(F)$ e seja $c = ab$. Temos, para $i < j$,

$$c_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = \sum_{i \leq r < j} a_{ir} b_{rj} + a_{ij} b_{jj}.$$

Se $0 < j - i \leq k$, então $a_{ij} = 0$. Além disso, $b_{rj} = 0$ para todo $r \in \{i, \ldots, j-1\}$, pois $0 < j - r \leq j - i \leq k$. Logo $c_{ij} = 0$ e, portanto, $c = ab \in UT^k_\infty(F)$. Agora, como $e_\infty = aa^{-1}$, temos

$$0 = (e_\infty)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} \bar{a}_{rj} = \sum_{i < r \leq j} a_{ir} \bar{a}_{rj} + a_{ii} \bar{a}_{ij}.$$

Se $0 < j - i \leq k$ e $r \in \{i+1, \ldots, j\}$, então $0 < r - i \leq j - i \leq k$, o que implica que $a_{ir} = 0$. Logo $0 = a_{ii} \bar{a}_{ij} = 1 \bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}$ de onde segue que $a^{-1} \in UT^k_\infty(F)$.

(2) Dados $k, l \in \mathbb{N}^*$, com $k < l$, tomemos

$$R^{kl}_\infty(F) = \{u \in UT_\infty(F) : u_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } (i > k \text{ ou } j < l)\}.$$

Para provar que $R^{kl}_\infty(F)$ é um subgrupo de $UT_\infty(F)$, sejam $a, b \in R^{kl}_\infty(F)$ e seja $c = ab$. Para $i < j$, $c_{ij} = \sum\limits_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj}$. Se $i > k$, então $a_{ir} = 0$ sempre que $r \in \{i+1, \ldots, j\}$, e para $r = i$ temos que $b_{ij} = 0$. Logo $c_{ij} = 0$. Agora, se $j < l$, analogamente, temos que $b_{rj} = 0$ sempre que $r \in \{i, \ldots, j-1\}$, e para $r = j$ temos $a_{ij} = 0$, portanto $c_{ij} = 0$. Logo $c \in R^{kl}_\infty(F)$. Para todo $a \in R^{kl}_\infty(F)$ temos que a^{-1} também pertence a $R^{kl}_\infty(F)$, pois como $aa^{-1} = e_\infty$, então para $k < i < j$,

$$0 = (e_\infty)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} \overline{a}_{rj} = a_{ii} \overline{a}_{ij} = \overline{a}_{ij}.$$

De forma análoga, considerando $a^{-1}a = e_\infty$ obtemos que $\overline{a}_{ij} = 0$ se $i < j < l$.

Para cada $l > 0$, vamos também considerar $R^{0l} = \{e_\infty\}$.

Para quaisquer $k, l \in \mathbb{N}$, com $k < l$, o subgrupo $R^{kl}_\infty(F)$ é abeliano e normal em

$UT_\infty(F)$; de fato, sejam $a, b \in R^{kl}_\infty(F)$. Para $i \leq k < l \leq j$, temos

$$(ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = a_{ii} b_{ij} + \sum_{l \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = a_{ii} b_{ij} + a_{ij} b_{jj} = b_{ij} + a_{ij}$$

e, analogamente,

$$(ba)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} a_{rj} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Portanto $ab = ba$. Se $t \in UT_\infty(F)$, tomemos $q = tat^{-1}$. Se $i < j < l$ ou $k < i < j$, então

$$q_{ij} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} t_{ip} a_{pr} \bar{t}_{rj} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} t_{ir} \bar{t}_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0,$$

pois para $p \neq r$, $a_{pr} = 0$ se $r < l$ ou $p > k$. Logo, $q \in R^{kl}_\infty(F)$.

Observação 1.1.3. Note que se $a \in R^{kl}_\infty(F)$, então $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}$ sempre que $i < j$, pois $0 = (e_\infty)_{ij} = (aa^{-1})_{ij} = a_{ij} + \bar{a}_{ij}$.

(3) Para $k, l \in \mathbb{N}^*$ com $k < l$, seja

$$Q^{kl}_\infty(F) = \{a \in R^{kl}_\infty(F) : a_{kl} = 0\}.$$

Portanto $Q^{kl}_\infty(F)$ é um subconjunto de $R^{kl}_\infty(F)$. Esse conjunto é um subgrupo de $UT_\infty(F)$, pois para dois elementos a e b desse conjunto, temos que $ab \in R^{kl}_\infty(F)$ e

$$(ab)_{kl} = \sum_{k \leq r \leq l} a_{kr} b_{rl} = a_{kl} + b_{kl} = 0.$$

Logo $ab \in Q^{kl}_\infty(F)$. Temos também que $a^{-1} \in Q^{kl}_\infty(F)$, pois $\bar{a}_{kl} = -a_{kl} = 0$.

(4) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, consideremos

$$H^k_\infty(F) = \{u \in UT_\infty(F) : u_{ij} = 0 \text{ se } i \neq k \text{ e } i < j\}.$$

Vamos verificar que esse subconjunto é um subgrupo de $UT_\infty(F)$. Sejam $a, b \in H^k_\infty(F)$ e seja $i \neq k$. Se $i < j$, então $(ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj}$, onde $a_{ir} = 0$ para todo $r > i$, e para $r = i$ temos que $b_{ij} = 0$. Segue que $(ab)_{ij} = 0$ e, portanto, $ab \in H^k_\infty(F)$. Como $aa^{-1} = e_\infty$, então para $i < j$ com $i \neq k$, temos que $0 = (e_\infty)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} \bar{a}_{rj}$, onde $a_{ir} = 0$ para todo $r > i$. Isso implica que $0 = a_{ii} \bar{a}_{ij} = \bar{a}_{ij}$. Logo $a^{-1} \in H^k_\infty(F)$.

(5) Para todo $k \in \mathbb{N}^*$, seja

$$V^k_\infty(F) = \{u \in UT_\infty(F) : u_{ij} = 0 \text{ se } j \neq k \text{ e } i < j\}.$$

A demonstração de que $V^k_\infty(F)$ é um subgrupo de $UT_\infty(F)$ é análoga à do item (4).

(6) Para $k, l \in \mathbb{N}^*$ com $k < l$, consideremos

$$T_\infty^{kl}(F) = \{u \in UT_\infty(F) : u_{ij} = 0 \text{ se } i \neq j \text{ e } (i,j) \neq (k,l)\}.$$

Se $u \in T_\infty^{kl}(F)$ e $u_{kl} = \alpha$, denotamos $u = t_{kl}(\alpha)$. Para mostrar que $T_\infty^{kl}(F)$ é um subgrupo de $UT_\infty(F)$, sejam $a, b \in T_\infty^{kl}(F)$ e seja $c = ab$. Dado $(n,m) \neq (k,l)$, com $n < m$ temos

$$c_{nm} = \sum_{n \leq r \leq m} a_{nr} b_{rm}.$$

Se $n \neq k$, então $a_{nr} = 0$ sempre que $n < r \leq m$. Logo $c_{nm} = a_{nn} b_{nm} = b_{nm} = 0$. Se $m \neq l$, então $b_{rm} = 0$ sempre que $n \leq r < m$. Logo $c_{nm} = a_{nm} b_{mm} = a_{nm} = 0$. Portanto, $c_{nm} = 0$ e $c \in T_\infty^{kl}(F)$. Note que $c_{kl} = a_{kk} b_{kl} + a_{kl} b_{ll} = a_{kl} + b_{kl}$. Portanto, se considerarmos $b \in T_\infty^{kl}(F)$ com $b_{kl} = -a_{kl}$, teremos que $ab \in T_\infty^{kl}(F)$ e $(ab)_{kl} = a_{kl} + b_{kl} = a_{kl} - a_{kl} = 0$. Logo $ab = e_\infty$ e, portanto, $a^{-1} = b \in T_\infty^{kl}(F)$. Segue que $[t_{kl}(\alpha)]^{-1} = t_{kl}(-\alpha)$. As matrizes de $T_\infty^{kl}(F)$ serão chamadas de *transvecções*.

Denotaremos por e_{ij} a matriz de $\mathcal{T}_\infty(F)$ que possui 1 na posição (i,j) e 0 nas demais. Note que $e_{ij} e_{kl} = \delta_{jk} e_{il}$, sendo δ_{jk} o delta de Kronecker. Para uma matriz $a \in \mathcal{T}_\infty(F)$ que possui entradas não nulas apenas, possivelmente, nas posições (i,j) com $i \in I$ e $j \in J$, denotamos

$$a = \sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} e_{ij}.$$

Apresentamos, a seguir, algumas propriedades dos subgrupos de $UT_\infty(F)$ que listamos acima. Começamos com os subgrupos $UT_\infty^k(F)$.

Recordemos que se G é um grupo e $g, h \in G$, então o produto $ghg^{-1}h^{-1}$ é denotado por $[g,h]$ e é chamado de *comutador de g e h*.

Proposição 1.1.4. *Seja $a \in UT_\infty^k(F)$. Temos que $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}$ para todo par i, j tal que $j - i = k + 1$.*

Demonstração. Primeiramente, suponhamos que $k > 0$. Se $j - i = k + 1$, então

$$0 = (e_\infty)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} \bar{a}_{rj} = \bar{a}_{ij} + a_{ij},$$

pois para $i < r < j$, temos $0 < r - i < j - i = k + 1$, portanto $a_{ir} = 0$. Se $k = 0$ e $j - i = k + 1$, então $j = i + 1$. Neste caso,

$$0 = (e_\infty)_{i,i+1} = \sum_{i \leq r \leq i+1} a_{ir} \bar{a}_{r,i+1} = \bar{a}_{i,i+1} + a_{i,i+1}.$$

$\square$

Proposição 1.1.5. *As transvecções satisfazem as seguintes propriedades:*

(1) $[t_{nm}(\alpha), t_{mk}(\beta)] = t_{nk}(\alpha\beta)$ *para todos* $\alpha, \beta \in F$ *e* $1 \leq n < m < k$*;*

(2) $t_{nm}(\alpha)t_{kl}(\beta) = t_{kl}(\beta)t_{nm}(\alpha)$*, para todos* $\alpha, \beta \in F$ *se* $n < m, k < l$ *e* $m \neq k$ *e* $n \neq l$*.*

Demonstração. (1) Sejam $a = t_{nm}(\alpha)$, $b = t_{mk}(\beta)$ e $c = [a, b]$, com $1 \leq n < m < k$. Temos

$$\begin{aligned} c_{nk} &= \sum_{n\leq p\leq r\leq q\leq k} a_{np}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qk} = \sum_{n\leq r\leq q\leq k} b_{nr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qk} + a_{nm}\left(\sum_{m\leq r\leq q\leq k} b_{mr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qk}\right) \\ &= \bar{a}_{nm}\bar{b}_{mk} + a_{nm}\sum_{m\leq q\leq k} b_{mq}\bar{b}_{qk} = (-\alpha)(-\beta) + \alpha(e_\infty)_{mk} = \alpha\beta. \end{aligned}$$

Para $i = n$ e $i < j < k$ temos,

$$c_{nj} = \sum_{n\leq p\leq r\leq q\leq j} a_{np}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = \sum_{n\leq p\leq j} a_{np}\bar{a}_{pj} = (e_\infty)_{nj} = 0.$$

Se $j > k$ temos,

$$c_{nj} = \sum_{n\leq p\leq r\leq q\leq j} a_{np}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = \sum_{n\leq p\leq r\leq j} a_{np}b_{pr}\bar{a}_{rj} = \sum_{n\leq r\leq j} b_{nr}\bar{a}_{rj} + a_{nm}\left(\sum_{m\leq r\leq j} b_{mr}\bar{a}_{rj}\right) = 0,$$

pois $\bar{a}_{rj} = 0$ para todo $r < j$, e para $r = j$ temos $b_{nj} = b_{mj} = 0$. Agora, consideremos $i \neq n$ e $i < j$. Se $i < n < m \leq j$, então

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{i\leq p\leq r\leq q\leq j} a_{ip}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = \sum_{i\leq r\leq q\leq j} b_{ir}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} \\ &= \sum_{i\leq r\leq j} b_{ir}\bar{b}_{rj} + b_{in}\bar{a}_{nm}\bar{b}_{mj} = (e_\infty)_{ij} + b_{in}\bar{a}_{nm}\bar{b}_{mj} = 0, \end{aligned}$$

pois $b_{in} = 0$, já que $i < n < m$. Se n ou m não pertence a $\{i+1, \ldots, j\}$, então

$$c_{ij} = \sum_{i\leq p\leq r\leq q\leq j} a_{ip}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = \sum_{i\leq r\leq q\leq j} b_{ir}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = \sum_{i\leq r\leq j} b_{ir}\bar{b}_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0.$$

Portanto $c = t_{nk}(\alpha\beta)$.

(2) Consideremos $a = t_{nm}(\alpha)$ e $b = t_{kl}(\beta)$. Note que se $n = k$, temos $ab = ba$, pois $a, b \in R_\infty^{n,\min\{m,l\}}$ que é um grupo abeliano. Suponhamos então, sem perda de generalidade, que $n < k$. Dados $i \leq n$ e $j < l$, temos

$$(ab)_{ij} = \sum_{i\leq r\leq j} a_{ir}b_{rj} = a_{ij} \quad \text{e} \quad (ba)_{ij} = \sum_{i\leq r\leq j} b_{ir}a_{rj} = a_{ij},$$

pois $b_{rj} = 0$ se $r < j$ e $b_{ir} = 0$ se $r > i$. Se $j = l$, então

$$(ab)_{il} = \sum_{i \leq r \leq l} a_{ir} b_{rl} = a_{ik} b_{kl} + a_{il} = 0 b_{kl} + a_{il} = a_{il},$$

pois $k \neq m$ e $i \leq n < k$. E

$$(ba)_{il} = \sum_{i \leq r \leq l} b_{ir} a_{rl} = a_{il},$$

pois $i \leq n < k$. Se $j > l$, então $b_{rj} = 0$ sempre que $r < j$, assim $(ab)_{ij} = a_{ij}$. E

$$(ba)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} a_{rj} = a_{ij} + b_{il} a_{lj} = a_{ij} + b_{il} 0 = a_{ij},$$

pois $n < k < l$. Por fim, para $i > n$,

$$(ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = b_{ij}$$

e

$$(ba)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} a_{rj} = b_{ij},$$

pois a_{ir} e a_{rj} são iguais a zero se $r \neq i$ e se $r \neq j$, respectivamente. Com isso temos $ab = ba$. □

O lema a seguir é usado em vários resultados do Capítulo 2. Ele mostra que toda matriz de $H^n_\infty(F)$ é conjugada em $UT_\infty(F)$ a uma transvecção de $T^{nk}_\infty(F)$, para algum $k > n$.

Vamos denotar $F \setminus \{0\} = F^*$.

Lema 1.1.6. *Sejam $\alpha \in F^*$ e $m, n \in \mathbb{N}^*$ tais que $n < m$. Para quaisquer $\alpha_p \in F$, a matriz*

$$t_{nm}(\alpha) + \sum_{p=m+1}^{\infty} \alpha_p e_{np}$$

é conjugada à $t_{nm}(\alpha)$ em $UT_\infty(F)$.

Demonstração. Seja

$$u = e_\infty + \sum_{p=m+1}^{\infty} \alpha^{-1} \alpha_p e_{mp}$$

e seja $b = t_{nm}(\alpha)$. Sabemos pela Observação 1.1.3 que $u^{-1} = e_\infty - \sum_{p=m+1}^{\infty} \alpha^{-1} \alpha_p e_{mp}$. Consideremos $c = u^{-1} b u$. Para $i < n$ e $i < j$ temos

$$c_{ij} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{ip} b_{pr} u_{rj} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} u_{rj} = u_{ij} = 0,$$

pois $\bar{u}_{ip} = 0$ para todo $p > i$ e $b_{ir} = 0$ para todo $r > i$, uma vez que $i < n < m$. Se $n < i < j$, então $b_{pr} = 0$ para $p \neq r$, pois $n < i \leq p$. Sendo assim, $c_{ij} = \sum\limits_{i \leq r \leq j} \bar{u}_{ir} u_{rj} = 0$. Se $n = i < j < m$, então

$$c_{nj} = \sum_{n \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{np} b_{pr} u_{rj} = \sum_{n \leq r \leq j} \bar{u}_{np} u_{pj} = (e_\infty)_{ij} = 0,$$

pois $b_{pr} \neq 0$ somente quando $p = r$ já que $r \leq j < m$. Se $j = m$

$$c_{nm} = \sum_{n \leq p \leq r \leq m} \bar{u}_{np} b_{pr} u_{rm} = \sum_{n \leq r \leq m} \bar{u}_{np} u_{pm} + b_{nm} = (e_\infty)_{nm} + \alpha = \alpha.$$

Finalmente, se $j > m$, então

$$c_{nj} = \sum_{n \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{np} b_{pr} u_{rj} = \sum_{n \leq p \leq j} \bar{u}_{np} u_{pj} + b_{nm} u_{mj} = (e_\infty)_{nj} + \alpha(\alpha^{-1}\alpha_j) = \alpha_j.$$

Portanto $c = t_{nm}(\alpha) + \sum\limits_{p=m+1}^{\infty} \alpha_p e_{np}$. □

Um resultado análogo vale para as matrizes de $V_\infty^m(F)$.

Lema 1.1.7. *Sejam $\alpha \in F^*$ e $n, m \in \mathbb{N}^*$ tais que $n < m$. Para quaisquer $\alpha_p \in F$, a matriz*

$$t_{nm}(\alpha) + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha_p e_{pm}$$

é conjugada a $t_{nm}(\alpha)$ em $UT_\infty(F)$.

Demonstração. A demonstração é análoga à do lema anterior considerando

$$u = e_\infty + \sum_{p=1}^{n-1} \alpha^{-1} \alpha_p e_{pm}.$$

□

Usaremos a notação $UT_n(F)$ para designar o grupo das matrizes unitriangulares de ordem n com entradas no corpo F. Se uma matriz $a \in UT_n(F)$ tiver exatamente uma entrada não nula acima da diagonal principal, na posição (k, l), diremos que a é uma *transvecção* e denotaremos $a = t_{kl}(a_{kl})$. O subconjunto $\{a \in UT_n(F) : a_{ij} = 0 \text{ se } i < j \text{ e } (i, j) \neq (k, l)\}$ será denotado por $T_n^{kl}(F)$.

Lema 1.1.8. *O grupo $UT_n(F)$ é gerado por suas transvecções.*

Demonstração. Seja $a \in UT_n(F)$. Mostraremos que é possível escrever $au = e_n$, com $u = \prod_{i=1}^{p} t_i$ para algum $p \in \mathbb{N}$, onde t_i é uma transvecção para todo $i = 1, \ldots, p$ e e_n é a matriz identidade de ordem n. Se $n = 2$, então qualquer matriz de $UT_2(F)$ é uma transvecção. Consideremos $n \geq 3$. Seja $t^{(1)} = t_{12}(-a_{12})$ e seja $c^{(2)} = at^{(1)}$. Temos

$$c_{12}^{(2)} = \sum_{1 \leq r \leq 2} a_{1r} t_{r2}^{(1)} = a_{12} + t_{12}^{(1)} = 0.$$

Suponhamos que para algum $k \geq 2$ tenhamos uma matriz $c^{(k)} = a \prod_{i=1}^{l} t^{(i)}$, onde $t^{(i)}$ é uma transvecção, para todo $i = 1, \ldots, l$, de forma que $c_{ij}^{(k)} = 0$ se $i < j \leq k$. Sejam $b^{(1)} = t_{1,k+1}(-c_{1,k+1}^{(k)})$ e $d^{(1)} = c^{(k)} b^{(1)}$. Temos

$$d_{1,k+1}^{(1)} = \sum_{1 \leq r \leq k+1} c_{1r}^{(k)} b_{r,k+1}^{(1)} = c_{1,k+1}^{(k)} + b_{1,k+1}^{(1)} = 0.$$

Para $i > 1$, temos $d_{i,k+1}^{(1)} = c_{1,k+1}^{(k)}$, pois $b_{r,k+1}^{(1)} = 0$ para $r = i, \ldots, k$. Se $i < j \neq k+1$, então $d_{ij}^{(1)} = c_{ij}^{(k)}$. Considere $b^{(2)} = t_{2,k+1}(-d_{2,k+1}^{(1)})$ e $d^{(2)} = d^{(1)} b^{(2)}$. Temos

$$d_{1,k+1}^{(2)} = \sum_{1 \leq r \leq k+1} d_{1r}^{(1)} b_{r,k+1}^{(2)} = d_{12}^{(1)} b_{2,k+1}^{(2)} = d_{12}^{(1)}(-d_{2,k+1}^{(1)}) = c_{12}^{(k)}(-c_{1,k+1}^{(k)}) = 0 \cdot (-c_{1,k+1}^{(k)}) = 0.$$

Temos também que

$$d_{2,k+1}^{(2)} = \sum_{2 \leq r \leq k+1} d_{2r}^{(1)} b_{r,k+1}^{(2)} = d_{2,k+1}^{(1)} + b_{2,k+1}^{(2)} = c_{1,k+1}^{(k)} - c_{1,k+1}^{(k)} = 0.$$

Para $i > 2$, temos $d_{i,k+1}^{(2)} = d_{i,k+1}^{(1)}$, pois $b_{r,k+1}^{(2)} = 0$ para $r = i, \ldots, k$. Se $i < j \neq k+1$, então $d_{ij}^{(2)} = d_{ij}^{(1)}$. Repetindo esse processo k vezes, obteremos uma matriz $d^{(k)} = c^{(k)} \prod_{i=1}^{k} b^{(i)}$, tal que $d_{ij}^{k} = 0$ se $i < j \leq k+1$ e $b^{(i)} = t_{i,k+1}(-d_{i,k+1}^{(i-1)})$ para todo $i \geq 2$. Portanto, é possível escrever $e_n = a(\prod_{i=1}^{p} t_i)$ para algum $p \in \mathbb{N}$. Logo $a = (\prod_{i=1}^{p} (t_i)^{-1})$. □

1.2 Os centros de $T_\infty(F)$ e $UT_\infty(F)$

Os grupos $T_\infty(F)$ e $UT_\infty(F)$ não são abelianos. Nesta seção calculamos os centros desses grupos e também o centralizador de $UT_\infty(F)$ em $T_\infty(F)$.

Denotaremos o centro de um grupo G por $Z(G)$ e se H é um subgrupo de G, denotaremos o centralizador de H em G por $C_G(H)$.

Proposição 1.2.1. *(1)* $Z(UT_\infty(F)) = \{e_\infty\}$.

(2) $Z(T_\infty(F)) = \{\alpha e_\infty : \alpha \in F^*\}$.

(3) $C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F)) = \{\alpha e_\infty : \alpha \in F^*\}$.

Demonstração. (1) Seja $b \in Z(UT_\infty(F))$ e seja $a = t_{kl}(\alpha) \in UT_\infty(F)$ uma transvecção com $k \geq 2$ e $\alpha \in F^*$. Tome $i, j \geq 1$ com $j > i + 1$. Como

$$(ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir} b_{rj} = b_{ij} + a_{ij} + \sum_{i<r<j} a_{ir} b_{rj},$$

$$(ba)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} a_{rj} = a_{ij} + b_{ij} + \sum_{i<r<j} b_{ir} a_{rj}$$

e $ab = ba$, então

$$\sum_{i<r<j} a_{ir} b_{rj} = \sum_{i<r<j} b_{ir} a_{rj}. \tag{1.1}$$

Tomando $j = l$ e $i \geq 1$ de forma que $k \in [i+1, j-1]$, segue da equação (1.1) que $0 = b_{ik} a_{kl} = b_{ik} \alpha$. Portanto $b_{ik} = 0$ para todos $i \geq 1$ e $k \geq 2$ com $i < k$. Logo podemos concluir que $b = e_\infty$ e, portanto, $Z(UT_\infty(F)) = \{e_\infty\}$.

(2) Seja $b \in Z(T_\infty(F))$ e seja $a = t_{kl}(\alpha)$ uma transvecção com $k \geq 2$ e $\alpha \in F^*$. De maneira análoga ao que foi feito no item (1), se tomarmos $i \geq 1$ e $j > i + 1$, obtemos

$$\sum_{i<r\leq j} a_{ir} b_{rj} = \sum_{i \leq r < j} b_{ir} a_{rj}.$$

Tomando $j = l$ e $i \geq 1$ de forma que $k \in [i+1, j-1]$, obtemos $0 = b_{ik} a_{kl} = b_{ik} \alpha$. Portanto, $b_{ik} = 0$ se $1 \leq i < k$ e, consequentemente, $b \in D_\infty(F)$. Consideremos, agora, $c = t_{k,k+1}(\alpha)$ com $\alpha \in F^*$ e $k \geq 1$. Como $cb = bc$ e

$$(cb)_{k,k+1} = c_{kk} b_{k,k+1} + c_{k,k+1} b_{k+1,k+1} = \alpha b_{k+1,k+1},$$

$$(bc)_{k,k+1} = b_{kk} c_{k,k+1} + b_{k,k+1} c_{k+1,k+1} = b_{kk} \alpha,$$

podemos concluir que $b_{k+1,k+1} = b_{kk}$ para todo $k \geq 1$. Logo $b = \beta e_\infty$ para algum $\beta \in F^*$.

Por outro lado, se $b = \beta e_\infty$ com $\beta \in F^*$, mostremos que b comuta com qualquer matriz de $T_\infty(F)$. Seja $d \in T_\infty(F)$ e considere $i < j$. Temos,

$$(bd)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} d_{rj} = b_{ii} d_{ij} = \beta d_{ij}$$

e

$$(db)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} d_{ir} b_{rj} = d_{ij} b_{jj} = d_{ij} \beta.$$

Portanto $bd = bd$ e $Z(T_\infty(F)) = \{\alpha e_\infty : \alpha \in F^*\}$.

(3) Seja $b \in C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F))$. Então, em particular, b comuta com todas as transvecções. Segue da demonstração do item (2) que $b = \beta e_\infty$ para algum $\beta \in F^*$. Por outro lado, como $Z(T_\infty(F)) \subseteq C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F))$, então $\alpha e_\infty \in C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F))$, para todo $\alpha \in F^*$. Portanto, $C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F)) = \{\alpha e_\infty : \alpha \in F^*\}$. □

As matrizes da forma αe_∞ com $\alpha \in F$ serão chamadas de *matrizes escalares*.

Vamos agora determinar o centro do grupo das matrizes unitriangulares de ordem finita.

Proposição 1.2.2. $Z(UT_n(F)) = \{t_{1n}(\alpha) : \alpha \in F\}$.

Demonstração. Seja $b \in Z(UT_n(F))$. Se $n = 2$ então $b = t_{12}(b_{12})$. Consideremos então $n > 2$ e seja $a = t_{kl}(\alpha)$ uma transvecção de $UT_n(F)$ com $k \geq 2$ e $\alpha \neq 0$. Tome $i, j \geq 1$ tais que $j > i + 1$. Como $ab = ba$, então

$$\sum_{i+1 \leq r \leq j-1} a_{ir} b_{rj} = \sum_{i+1 \leq r \leq j-1} b_{ir} a_{rj}. \tag{1.2}$$

Assim, tomando $j = l$ e $i \geq 1$ de forma que $k \in [i+1, j-1]$ segue da equação (1.2) que $b_{ik} a_{kl} = b_{ik}\alpha$. Portanto $b_{ik} = 0$ para todos $i \geq 1$ e $k \geq 2$ com $i < k < n$. Logo b possui todas as entradas acima da diagonal iguais a zero, com exceção da última coluna. Agora, consideremos $k = 1$ e $l < n$. Pela equação (1.2) segue que $a_{1l} b_{ln} = 0$ e assim, $b_{ln} = 0$ se $2 \leq l \leq n-1$. Portanto $b = t_{1n}(b_{1n})$.

Por outro lado, seja $b = t_{1n}(\alpha)$ e seja $d \in UT_n(F)$ uma matriz arbitrária. Se $1 < i < j < n$, então

$$(bd)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir} d_{rj} = d_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} d_{ir} b_{rj} = (db)_{ij},$$

e, se $1 = i < j < n$, então

$$(bd)_{1j} = \sum_{1 \leq r \leq j} b_{1r} d_{rj} = d_{1j} = \sum_{1 \leq r \leq j} d_{1r} b_{rj} = (db)_{1j}.$$

Finalmente,

$$(bd)_{1n} = \sum_{1 \leq r \leq n} b_{1r} d_{rn} = d_{1n} + b_{1n}$$

e

$$(db)_{1n} = \sum_{1 \leq r \leq n} d_{1r} b_{rn} = b_{1n} + d_{1n}.$$

Portanto $bd = db$. Logo $Z(UT_n(F)) = \{t_{1n}(\alpha) : \alpha \in F\}$. □

1.3 Propriedades dos subgrupos $R_\infty^{kl}(F)$

Já sabemos que os subgrupos $R_\infty^{kl}(F)$ são abelianos e normais em $UT_\infty(F)$. Nesta seção, apresentamos outras propriedades de tais subgrupos, sendo a principal delas que os subgrupos abelianos maximais e normais de $UT_\infty(F)$ são exatamente os subgrupos $R_\infty^{k,k+1}(F)$, com $k > 0$.

Observação 1.3.1. Note que $R_\infty^{kl}(F) = T_\infty^{kl}(F)Q_\infty^{kl}(F)$. Como $T_\infty^{kl}(F)$ e $Q_\infty^{kl}(F)$ são subgrupos de $R_\infty^{kl}(F)$, temos que $T_\infty^{kl}(F)Q_\infty^{kl}(F) \subseteq R_\infty^{kl}(F)$. Para a outra inclusão, basta observar que dados $a \in R_\infty^{kl}(F)$, $t = t_{kl}(a_{kl})$ e $q \in Q_\infty^{kl}(F)$ com $q_{ij} = a_{ij}$ para todo par $(i,j) \neq (k,l)$, teremos que $a = tq$. De fato, sejam $i < j$. Se $i \neq k$, então

$$(tq)_{ij} = \sum_{i \le r \le j} t_{ir}q_{rj} = q_{ij} = a_{ij},$$

pois $t_{ir} = 0$ para todo $r > i$. Para $i = k$ e $j \geq l$, temos

$$(tq)_{kj} = \sum_{k \le r \le j} t_{kr}q_{rj} = q_{kj} + t_{kl}q_{lj}, \tag{1.3}$$

pois na k-ésima linha a transvecção t possui apenas duas entradas não nulas. Como $l > k$, temos que $q_{lj} \neq 0$ apenas quando $j = l$. Se $j > l$, então pela equação (1.3), $(tq)_{kj} = q_{kj} = a_{kj}$ e $(tq)_{kl} = q_{kl} + t_{kl} = 0 + a_{kl} = a_{kl}$.

Observação 1.3.2. Dado $a \in R_\infty^{kl}(F)$, podemos escrever $a = \prod_{i=1}^{k} u^{(i)}$, em que

$$u^{(i)} = e_\infty + \sum_{r=l}^{\infty} a_{ir}e_{ir},$$

para todo $i = 1, \dots, k$. De fato, claramente $u^{(i)} \in R_\infty^{kl}(F)$ para todo $i = 1, \dots, k$. Além disso, para quaisquer $a, b \in R_\infty^{kl}(F)$, temos que $(ab)_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ sempre que $i < j$. Portanto, se considerarmos $c = \prod_{i=1}^{k} u^{(i)}$, teremos $c_{ij} = u_{ij}^{(i)} = a_{ij}$ para todos $i < j$ e $1 \leq i \leq k$.

Lema 1.3.3. *Seja F um corpo e seja H um subgrupo normal de $UT_\infty(F)$. Sejam k e l números naturais tais que $1 \leq k < l$.*

(1) Se $H \cap T_\infty^{kl}(F) \neq \{e_\infty\}$, então $Q_\infty^{kl}(F) \subseteq H$. Além disso, se $T_\infty^{kl}(F) \subseteq H$, então $R_\infty^{kl}(F) \subseteq H$.

(2) Se existir uma matriz $u \in H$ tal que $u_{kl} \neq 0$ e $u_{ij} = 0$ para $(i,j) \neq (k,l)$ com $k \leq i < j \leq l$, então $Q_\infty^{k-1,l}(F) \subset H$ e $Q_\infty^{k,l+1}(F) \subseteq H$.

Demonstração. (1) Vamos, inicialmente, considerar $k \geq 2$. Pela Proposição 1.1.5,

$$[t_{rk}(\alpha), t_{kl}(\beta)] = t_{rl}(\alpha\beta),$$

para todos $\alpha, \beta \in F$ e $1 \leq r < k < l$. Portanto, dado $t_{kl}(\alpha) \in H$, para algum $\alpha \in F^*$, temos

$$T_\infty^{rl}(F) = [T_\infty^{rk}(F), t_{kl}(\alpha)] \subseteq H$$

para todo $r < k$, uma vez que H é normal em $UT_\infty(F)$. Mas, pelo Lema 1.1.6, $t_{rl}(\gamma)$ com $\gamma \in F^*$, é conjugada a quaisquer matrizes da forma

$$b^{(rl)} = t_{rl}(\gamma) + \sum_{s=l+1}^{\infty} a_s e_{rs},$$

com $a_s \in F$, $s \geq l+1$. Como H é normal, podemos concluir que $b^{(rl)} \in H$. Novamente, pela Proposição 1.1.5, temos

$$T_\infty^{k,l+1}(F) = [t^{kl}(\alpha), T_\infty^{l,l+1}(F)] \subseteq H,$$

e, portanto, podemos concluir que as matrizes da forma $b^{(k,l+1)}$ também pertencem a H. Pela Observação 1.3.2, dado $a \in Q_\infty^{kl}(F)$, podemos escrever $a = \left(\prod_{r=1}^{k-1} b^{(rl)}\right) b^{(k,l+1)}$. Logo $a \in H$ e, portanto, $Q_\infty^{kl}(F) \subseteq H$.

Se $T_\infty^{kl}(F) \subseteq H$, então $Q_\infty^{kl}(F) \subseteq H$, pelo o que acabamos de mostrar. Pela Observação 1.3.1, $R_\infty^{kl}(F) = T_\infty^{kl}(F)Q_\infty^{kl}(F) \subseteq H$.

Agora se $k = 1$, como $T_\infty^{1,l+1}(F) = [t^{1l}(\alpha), T_\infty^{l,l+1}(F)] \subseteq H$, segue imediatamente pelo Lema 1.1.6 que $Q_\infty^{1l}(F) \subseteq H$.

(2) Suponha que exista $u \in H$ tal que $u_{kl} \neq 0$ e $u_{ij} = 0$ para $(i,j) \neq (k,l)$ com $k \leq i < j \leq l$. Para tais pares (i,j) temos

$$0 = (e_\infty)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} u_{ir}\bar{u}_{rj} = \bar{u}_{ij}.$$

Além disso,

$$0 = (e_\infty)_{kl} = \sum_{k \leq r \leq l} u_{kr}\bar{u}_{rl} = u_{kl} + \bar{u}_{kl}$$

e, portanto, $\bar{u}_{kl} = -u_{kl}$.

Consideremos, inicialmente, $k \geq 3$. Pelo fato de H ser um subgrupo normal de $UT_\infty(F)$, temos que $[h, v] \in H$ para quaisquer $h \in H$ e $v \in UT_\infty(F)$. Seja $a = t_{k-1,k}(\alpha)$

com $\alpha \in F^*$ e seja $c = [u^{-1}, a] \in H$. Para $i < j < k$, temos

$$c_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le q \le j} \bar{u}_{ip} a_{pr} u_{rq} \bar{a}_{qj} = \sum_{i \le r \le j} \bar{u}_{ir} u_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0,$$

pois $\bar{a}_{qj} = a_{pr} = 0$ para $p \neq r$ e $q \neq j$. De forma análoga temos que $c_{ij} = 0$ se $k-1 < i < j$, portanto $c \in R_\infty^{k-1,k}(F)$. Para $i \le k-1 < j$, temos

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{i \le p \le r \le q \le j} \bar{u}_{ip} a_{pr} u_{rq} \bar{a}_{qj} = \sum_{i \le r \le q \le j} \bar{u}_{ir} u_{rq} \bar{a}_{qj} + \bar{u}_{i,k-1} a_{k-1,k} \sum_{k \le r \le j} u_{kr} \bar{a}_{rj} \\ &= \sum_{i < q \le k} (e_\infty)_{iq} \bar{a}_{qj} + \bar{a}_{ij} + \bar{u}_{i,k-1} a_{k-1,k} u_{kj} = \bar{a}_{ij} + \bar{u}_{i,k-1} a_{k-1,k} u_{kj}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Note que $c_{k-1,k} = \bar{a}_{k-1,k} + \bar{u}_{k-1,k-1} a_{k-1,k} u_{kk} = \bar{a}_{k-1,k} + a_{k-1,k} = 0$. Portanto $c \in Q_\infty^{k-1,k}(F)$.

Vamos considerar agora $b = t_{k-2,k-1}(1)$ e $d = [c^{-1}, b] \in H$. Sejam $i < j$. Se $i < j \le k-2$, então

$$d_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le q \le j} \bar{c}_{ip} b_{pr} c_{rq} \bar{b}_{qj} = \sum_{i \le r \le j} \bar{c}_{ir} c_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0.$$

De forma análoga, $d_{ij} = 0$ para $k-2 < i < j$. Se $i < k-2 < j$, então, como $c \in Q_\infty^{k-1,k}(F)$, temos

$$\begin{aligned} d_{ij} &= \sum_{i \le p \le r \le q \le j} \bar{c}_{ip} b_{pr} c_{rq} \bar{b}_{qj} = \sum_{i \le r \le q \le j} \bar{c}_{ir} c_{rq} \bar{b}_{qj} + \bar{c}_{i,k-2} b_{k-2,k-1} \left(\sum_{k-1 \le q \le j} c_{k-1,q} \bar{b}_{qj} \right) \\ &= \sum_{i < q \le j} (e_\infty)_{iq} \bar{b}_{qj} + \bar{b}_{ij} + \bar{c}_{i,k-2} b_{k-2,k-1} c_{k-1j} = \bar{b}_{ij} + \bar{c}_{i,k-2} c_{k-1,j} = 0, \end{aligned}$$

pois $\bar{c}_{i,k-2} = 0$ e, para $i < k-2$, tem-se que $\bar{b}_{ij} = 0$. Concluímos assim que $d \in H_\infty^{k-2}(F)$. Além disso, $d_{k-2,k} = c_{k-1,k} = 0$ e $d_{k-2,k-1} = \bar{b}_{k-2,k-1} + 1 = -1 + 1 = 0$. Finalmente, se $j \ge k+1$, então $d_{k-2,j} = \bar{b}_{k-2,j} + c_{k-2,k-2} c_{k-1,j} = c_{k-1,j}$. Portanto podemos escrever a matriz d da forma

$$d = e_\infty + \sum_{r=k+1}^{\infty} c_{k-1,r} e_{k-2,r} = e_\infty + \sum_{r=k+1}^{\infty} \alpha u_{kr} e_{k-2,r},$$

pela equação (1.4). Como, por hipótese, $u_{kr} = 0$ para $k < r < l$, segue que

$$d = e_\infty + \sum_{r=l}^{\infty} \alpha u_{kr} e_{k-2,r}.$$

Isso nos dá que

$$A = \left[\left[u^{-1}, T_\infty^{k-1,k}(F) \right], t_{k-2,k-1}(1) \right] = \left\{ e_\infty + \sum_{r=l}^{\infty} \alpha u_{kr} e_{k-2,r} : \alpha \in F^* \right\} \subseteq H.$$

Seja $z \in A$. Como $z_{k-2,l} = \alpha u_{kl}$, com $\alpha \in F^*$, então pelo Lema 1.1.6 temos que z é conjugada a $t_{k-2,l}(\alpha u_{kl})$ em $UT_\infty(F)$. Para qualquer $\beta \in F^*$, podemos escrever $\beta = \gamma u_{kl}$ com $\gamma \in F^*$. Portanto $T_\infty^{k-2,l}(F) \subseteq H$. Pelo item (1) temos que $R_\infty^{k-2,l}(F) \subseteq H$.

Agora vamos mostrar que $T_\infty^{k-1,l+1}(F) \subseteq H$. Continuaremos a considerar $c = [u^{-1}, a]$. Seja $b = t_{l,l+1}(1)$ e seja $d = [c, b] \in H$. Sejam $i < j$. Se $j < l + 1$, então

$$d_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le q \le j} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{rq} \bar{b}_{qj} = \sum_{i \le r \le j} c_{ir} \bar{c}_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0.$$

Se $j > l + 1$, então

$$d_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le q \le j} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{rq} \bar{b}_{qj} = \sum_{i \le p \le r \le j} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{rj} = (e_\infty)_{ij} + c_{il} b_{l,l+1} \bar{c}_{l+1,j} = 0,$$

pois $c^{-1} \in Q_\infty^{k-1,k}(F)$, o que implica $\bar{c}_{l+1,j} = 0$ para todo $j > l+1$. Portanto $d \in V_\infty^{l+1}(F)$. Para $i < j = l + 1$, temos

$$\begin{aligned} d_{i,l+1} = & \sum_{i \le p \le r \le q \le l+1} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{rq} \bar{b}_{q,l+1} = \sum_{i \le p \le r \le l+1} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{r,l+1} + \left(\sum_{i \le p \le r \le l} c_{ip} b_{pr} \bar{c}_{rl} \right) \bar{b}_{l,l+1} \\ = & (e_\infty)_{i,l+1} + c_{il} b_{l,l+1} + (e_\infty)_{il} \bar{b}_{l,l+1} = c_{il}. \end{aligned}$$

Como $c \in Q_\infty^{k-1,k}(F)$, então $c_{il} = 0$ para $i > k - 1$, portanto, podemos escrever d da seguinte forma:

$$d = e_\infty + \sum_{r=1}^{k-1} c_{rl} e_{r,l+1} = e_\infty + \sum_{r=1}^{k-1} \bar{u}_{r,k-1} \alpha u_{kl} e_{r,l+1}.$$

Assim, concluímos que

$$B = \left[\left[u^{-1}, T_\infty^{k-1,k}(F) \right], t_{l,l+1}(1) \right] = \left\{ e_\infty + \sum_{r=1}^{k-1} \bar{u}_{r,k-1} \alpha u_{kl} e_{r,l+1} : \alpha \in F^* \right\} \subseteq H.$$

Dada uma matriz $v \in B$, temos que $v_{k-1,l+1} \neq 0$, portanto pelo Lema 1.1.7, segue que v é conjugada a $t_{k-1,l+1}(v_{k-1,l+1})$. Logo, $T_\infty^{k-1,l+1}(F) \subseteq H$ e, pelo item (1), temos $R_\infty^{k-1,l+1}(F) \subseteq H$. Pela Observação 1.3.2, dado $z \in Q_\infty^{k-1,l}(F)$, temos que $z = \prod_{r=1}^{k-1} u^{(r)}$ onde, para $r = 1, \ldots, k-2$, temos $u^{(r)} \in R_\infty^{k-2,l}(F) \subseteq H$ e $u^{(k-1)} \in R_\infty^{k-1,l+1}(F) \subseteq H$. Logo $Q_\infty^{k-1,l}(F) \subseteq H$.

Vamos mostrar que $T_\infty^{k,l+2}(F) \subseteq H$. Seja $a = t_{l,l+1}(\alpha)$ com $\alpha \in F^*$ e seja $c = [u, a] \in H$. Fazendo cálculos análogos aos da construção do conjunto A, podemos concluir que $c \in Q_\infty^{l,l+1}(F)$ e $c_{ij} = u_{il} \alpha \bar{u}_{l+1,j}$ para $i \le l < j$. Como, por hipótese, $u_{il} = 0$ para $k < i < l$, temos que $c \in R_\infty^{k,l+1}(F)$. Seja $b = t_{l+1,l+2}(1)$ e $d = [c, b] \in H$. Analogamente ao que fizemos na construção do conjunto B, podemos concluir que $d \in V_\infty^{l+2}(F)$ e que

$$d = e_\infty + \sum_{r=1}^{k} c_{r,l+1} e_{r,l+2} = e_\infty + \sum_{r=1}^{k} u_{rl} \alpha e_{r,l+2}.$$

Portanto

$$C = \left[\left[u, T_\infty^{l,l+1}(F)\right], t_{l+1,l+2}(1)\right] = \left\{ e_\infty + \sum_{r=1}^{k} u_{rl} \alpha e_{r,l+2} : \alpha \in F^* \right\} \subseteq H.$$

Pelo Lema 1.1.7, podemos concluir que $T_\infty^{k,l+2}(F) \subseteq H$. Pelo item (1), $R_\infty^{k,l+2}(F) \subseteq H$ e, pela Observação 1.3.2, $Q_\infty^{k,l+1}(F) \subseteq H$.

Para o caso $k = 2$, temos

$$D = [u, T_\infty^{12}(F)] = \left\{ e_\infty + \sum_{r=l}^{\infty} \gamma u_{2r} e_{1r} : \gamma \in F^* \right\} \subseteq H.$$

Seja $b \in D \subseteq R_\infty^{12}(F)$. Temos que $b_{1l} \neq 0$, implicando que $T_\infty^{1l}(F) \subseteq H$. Pelo item (1) segue que $R_\infty^{1l}(F) \subseteq H$. Logo $Q_\infty^{1l}(F) \subseteq H$. Temos também que

$$E = \left[\left[u, T_\infty^{l,l+1}(F)\right], t_{l+1,l+2}(1)\right] = \left\{ e_\infty + \sum_{r=1}^{2} u_{rl} \alpha e_{r,l+2} : \alpha \in F^* \right\} \subseteq H.$$

Portanto $R_\infty^{2,l+2}(F) \subseteq H$. Pela Observação 1.3.2 temos $Q_\infty^{2,l+1}(F) \subseteq H$.

O caso $k = 1$ é análogo ao caso $k = 2$. □

Teorema 1.3.4. *Seja F um corpo e seja S a família dos subgrupos abelianos maximais de $UT_\infty(F)$ que são normais. Então $S = \{R_\infty^{k,k+1}(F) : k \in \mathbb{N}^*\}$.*

Demonstração. Já sabemos que $R_\infty^{k,k+1}(F)$ é um subgrupo abeliano e normal em $UT_\infty(F)$. Para provar sua maximalidade consideremos $g \in C_{UT_\infty(F)}(R_\infty^{k,k+1}(F))$ e escrevamos

$$g = \left(\begin{array}{c|c} \widetilde{g} & \widehat{g} \\ \hline 0 & \overline{g} \end{array}\right)$$

onde $\widetilde{g}$ é uma matriz de ordem k. Seja $u = t_{nm}(1)$ com $n \leq k$ e $m \geq k+1$. Então $u \in R_\infty^{k,k+1}(F)$ e, portanto, $gu = ug$. Se $i < n$, então

$$(gu)_{im} = \sum_{i \leq r \leq m} g_{ir} u_{rm} = g_{in} + g_{im}$$

e

$$(ug)_{im} = \sum_{i \leq r \leq m} u_{ir} g_{rm} = g_{im}.$$

Logo $g_{in} = 0$ para todo $i < n$ com $n \leq k$. Portanto $\tilde{g} = e_k$. De maneira análoga, se $j > m$ então $(gu)_{nj} = g_{nj}$ e $(ug)_{nj} = g_{mj} + g_{nj}$. Logo $g_{mj} = 0$ para todo $j > m$ com $m \geq k+1$. Podemos concluir então que $\bar{g} = e_\infty$ e, consequentemente $g \in R^{k,k+1}$. Isto nos dá que $C_{UT_\infty(F)}(R_\infty^{k,k+1}(F)) \subseteq R_\infty^{k,k+1}(F)$. Como qualquer subgrupo abeliano de $UT_\infty(F)$ que contém $R_\infty^{k,k+1}(F)$ está contido em $C_{UT_\infty(F)}(R_\infty^{k,k+1}(F))$, temos que $R_\infty^{k,k+1}(F)$ é um subgrupo abeliano maximal de $UT_\infty(F)$.

Seja $H \in S$. Como $H \neq \{e_\infty\}$, então H possui matrizes diferentes da matriz identidade. Pelo item (2) do lema anterior podemos concluir que H possui subconjuntos da forma

$$A_{nm} = Q_\infty^{n-1,m}(F) \cup Q_\infty^{n,m+1}(F),$$

com $2 \leq n < m$. Caso exista $k \in \mathbb{N}^*$ tal que todo A_{nm} de H esteja contido em $R_\infty^{k,k+1}(F)$, teremos $H \subseteq R_\infty^{k,k+1}(F)$; de fato, se H não estiver contido em $R_\infty^{k,k+1}(F)$, então existirá uma matriz $a \in H$ tal que $a_{ij} \neq 0$ para algum $i > k$ ou $j < k+1$. Portanto, a matriz a terá uma entrada que satisfaz as condições do item (2) do lema anterior e, consequentemente, teremos $A_{ij} \subseteq H$, com $i > k$ ou $j < k+1$, contradizendo o fato de $R_\infty^{k,k+1}(F)$ conter todos os subconjuntos A_{nm} de H. Suponhamos, agora, que não exista $k \in \mathbb{N}^*$ de forma que $R_\infty^{k,k+1}(F)$ contenha todos os subconjuntos A_{nm} de H. Seja $m = \min\{j \in \mathbb{N}^* : A_{ij} \subseteq H\}$ e seja $i \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq i < m$ e $A_{im} \subseteq H$. Portanto existe $u \in H$ tal que $u_{ij} = 0$ para todo $j < m$ e $u_{nm} \neq 0$ para algum $n = 1, \ldots, m-1$. Seja $A_{rs} \subseteq H$ tal que $A_{rs} \nsubseteq R_\infty^{m-1,m}(F)$. Como $s \geq m$, então devemos ter $r > m-1$. Com isso, podemos garantir que $t_{ml}(\beta) \in A_{rs} \subseteq H$ para algum $\beta \in F^*$ e $l \geq s$. Seja $a = t_{ml}(\beta)$. Temos que

$$(au)_{nl} = \sum_{n \leq r \leq l} a_{nr}u_{rl} = u_{nl},$$

pois $n < m$. E, por outro lado,

$$(ua)_{nl} = \sum_{n \leq r \leq l} u_{nr}a_{rl} = u_{nl} + u_{nm}a_{ml} = u_{nl} + u_{nm}\beta.$$

Como H é abeliano, obtemos que $u_{nm}\beta = 0$, o que é uma contradição. Portanto, existe $k \in \mathbb{N}^*$ tal que $R_\infty^{k,k+1}(F)$ contém todos os A_{ij} de H e, consequentemente, $H \subseteq R_\infty^{k,k+1}(F)$. Como H é abeliano maximal, segue que $H = R_\infty^{k,k+1}(F)$. □

Proposição 1.3.5. *Seja F um corpo arbitrário. Dados quaisquer $k, l \in \mathbb{N}^*$ com $k \neq l$, temos*

$$[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)] = R_\infty^{\min(k,l),\max(k,l)+1}(F).$$

Demonstração. Vamos primeiramente mostrar que

$$[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)] = [R_\infty^{l,l+1}(F), R_\infty^{k,k+1}(F)].$$

Dados $a \in R_\infty^{k,k+1}(F)$ e $b \in R_\infty^{l,l+1}(F)$, temos

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1} = aba^{-1}(a^{-1}a)b^{-1}(a^{-1}a) = (aba^{-1})a^{-1}(ab^{-1}a^{-1})a = [aba^{-1}, a^{-1}].$$

Como $R_\infty^{l,l+1}(F)$ é um subgrupo normal de $UT_\infty(F)$, então $aba^{-1} \in R_\infty^{l,l+1}(F)$. Isto nos dá que os geradores de $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)]$ pertencem a $[R_\infty^{l,l+1}(F), R_\infty^{k,k+1}(F)]$ e, portanto, $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)] \subseteq [R_\infty^{l,l+1}(F), R_\infty^{k,k+1}(F)]$. A inclusão contrária pode ser provada de maneira análoga. Sendo assim, podemos considerar sem perda de generalidade que $k < l$. Portanto, queremos provar que $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)] = R_\infty^{k,l+1}(F)$.

Sejam $a \in R_\infty^{k,k+1}(F)$, $b \in R_\infty^{l,l+1}(F)$ e sejam $i < j$. Se $i > k$, então

$$[a,b]_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le q \le j} a_{ip} b_{pr} \bar{a}_{rq} \bar{b}_{qj} = \sum_{i \le q \le j} b_{iq} \bar{b}_{qj} = (e_\infty)_{ij} = 0.$$

Analogamente, se $j < l+1$ então $[a,b]_{ij} = 0$. Logo $[a,b] \in R_\infty^{k,l+1}(F)$ e, portanto, $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)] \subseteq R_\infty^{k,l+1}(F)$.

Para provar a inclusão contrária, note que para cada $i \le k$, temos $T_\infty^{il}(F) \subseteq R_\infty^{k,k+1}(F)$ e para cada $j \ge l+1$, temos $T_\infty^{lj}(F) \subseteq R_\infty^{l,l+1}(F)$. Logo, pelo item (1) da Proposição 1.1.5,

$$T_\infty^{ij}(F) = [T_\infty^{il}(F), T_\infty^{lj}(F)] \subset [R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)],$$

para todos $i \le k$ e $j \ge l+1$. Seja $d \in R_\infty^{k,l+1}(F)$. Pela Observação 1.3.2, podemos escrever $d = \prod_{i=1}^{k} u^{(i)}$, onde

$$u^{(i)} = e_\infty + \sum_{r=l+1}^{\infty} d_{ir} e_{ir} \in H_\infty^{i}(F).$$

Para cada $i = 1, \ldots, k$, temos que $u^{(i)} = e_\infty$ ou $u_{ij}^{(i)} = d_{ij} \neq 0$ para algum $j \ge l+1$. Se $u^{(i)} \neq e_\infty$, seja $m = \min\{j \ge l+1 : u_{ij}^{(i)} \neq 0\}$. Pelo Lema 1.1.6, $u^{(i)}$ é conjugada à transvecção $t_{im}(d_{im}) \in T_\infty^{im}(F) \subset [R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)]$. É fácil ver que $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)]$ é um subgrupo normal de $UT_\infty(F)$, portanto $u^{(i)} \in [R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)]$ se $1 \le i \le k$. Logo $d \in [R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{l,l+1}(F)]$. □

1.4 O subgrupo derivado de $T_\infty(F)$

O objetivo desta seção é provar que o subgrupo derivado de $T_\infty(F)$ coincide com o subgrupo $UT_\infty(F)$ quando $|F| \ge 3$. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 1.4.1. *$[UT_\infty^{k}(F), UT_\infty(F)] = UT_\infty^{k+1}(F)$ para todo $k \ge 0$. Além disso, todo elemento $u \in UT_\infty^{k+1}(F)$ pode ser escrito como $u = [v,w]$ com $v \in UT_\infty^{k}(F)$ e $w \in UT_\infty(F)$.*

Demonstração. Sejam $a \in UT_\infty^k(F)$, $b \in UT_\infty(F)$ e $c = [a,b]$. Para $1 \leq j-i \leq k+1$, temos

$$c_{ij} = \sum_{i\leq p\leq r\leq q\leq j} a_{ip}b_{pr}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj} = a_{ii}\left(\sum_{i\leq r\leq q\leq j} b_{ir}\bar{a}_{rq}\bar{b}_{qj}\right) + a_{ij}, \tag{1.5}$$

pois $a_{ip} = 0$ para $i < p < j$ uma vez que $0 < p-i < j-i \leq k+1$ e $a \in UT_\infty^k(F)$. Agora, se $i \leq r < q < j$, então $0 < q-r \leq q-i < j-i \leq k+1$ e, portanto, $0 < q-r \leq k$. Logo, $\bar{a}_{rq} = 0$. Assim, a equação (1.5) pode ser reescrita como

$$c_{ij} = \sum_{i\leq r\leq j} b_{ir}\bar{b}_{rj} + \sum_{i\leq r<j} b_{ir}\bar{a}_{rj} + a_{ij}.$$

Mas, para $i < r < j$, temos $0 < j-r < j-i \leq k+1$ e, portanto, $\bar{a}_{rj} = 0$. Logo,

$$c_{ij} = (e_\infty)_{ij} + \bar{a}_{ij} + a_{ij}.$$

Se $0 < j-i < k+1$, então $a_{ij} = 0$ e $\bar{a}_{ij} = 0$ e, se $j-i = k+1$, então $\bar{a}_{ij} = -a_{ij}$, pela Proposição 1.1.4. Logo, $c_{ij} = 0$ e, portanto, $c = [a,b] \in UT_\infty^{k+1}(F)$. Segue que $[UT_\infty^k(F), UT_\infty(F)] \subseteq UT_\infty^{k+1}(F)$.

Para a outra inclusão, mostraremos que dado $u \in UT_\infty^{k+1}(F)$, existem $v \in UT_\infty^k(F)$ e $w \in UT_\infty(F)$ tais que $u = [v,w]$. Seja $v = e_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} e_{i,i+k+1} \in UT_\infty^k(F)$. Se existir $w \in UT_\infty(F)$ tal que $u = [v,w]$ então $vw = uwv$. Vamos verificar que existe tal w. Seja $c = vw$, $d = uwv$ e consideremos $i \geq 1$. Temos

$$c_{i,i+k+2} = \sum_{i\leq r\leq i+k+2} v_{ir}w_{r,i+k+2} = w_{i,i+k+2} + w_{i+k+1,i+k+2}$$

e

$$\begin{aligned} d_{i,i+k+2} = \sum_{i\leq p\leq r\leq i+k+2} u_{ip}w_{pr}v_{r,i+k+2} &= \sum_{i\leq r\leq i+k+2} w_{ir}v_{r,i+k+2} + u_{i,i+k+2} \\ &= w_{i,i+k+2} + w_{i,i+1} + u_{i,i+k+2}. \end{aligned}$$

Para que tenhamos $c = d$ devemos ter $c_{i,i+k+2} = d_{i,i+k+2}$ e assim

$$w_{i+k+1,i+k+2} = w_{i,i+1} + u_{i,i+k+2},$$

para todo $i \geq 1$. Sendo assim, é possível construirmos a primeira diagonal de w se inserirmos suas $k+1$ primeiras entradas $(w_{i,i+1} : 1 \leq i \leq k+1)$ de forma arbitrária.

Para a construção das demais diagonais de w, considere $l > i+k+2$. Neste caso, temos

$$c_{il} = \sum_{i \leq r \leq l} v_{ir} w_{rl} = w_{il} + w_{i+k+1,l}$$

e

$$d_{il} = \sum_{i \leq p \leq r \leq l} u_{ip} w_{pr} v_{rl} = \sum_{i \leq r \leq l} w_{ir} v_{rl} + \sum_{i+k+2 \leq p \leq r \leq l} u_{ip} w_{pr} v_{rl},$$

pois $u_{ip} = 0$ se $i < p < i + (k+2)$. Portanto,

$$d_{il} = w_{il} + w_{i,l-k-1} + \left(\sum_{i+k+2 \leq p \leq l} u_{ip} w_{pl} \right) v_{ll} + \left(\sum_{i+k+2 \leq p \leq l-k-1} u_{ip} w_{p,l-k-1} \right) v_{l-k-1,l}.$$

Como queremos $c_{il} = d_{il}$, devemos ter

$$w_{i+k+1,l} = w_{i,l-k-1} + \sum_{i+k+2 \leq p \leq l} u_{ip} w_{pl} + \sum_{i+k+2 \leq p \leq l-k-1} u_{ip} w_{p,l-k-1}.$$

Observe que se $l - (i - k - 1) = n$ para algum $n \geq 2$, então as entradas $w_{i,l-k-1}$, w_{pl} (com $i + k + 2 \leq p \leq l$) e $w_{p,l-k-1}$ (com $i + k + 2 \leq p \leq l - k - 1$) pertencem a diagonais anteriores a n-ésima diagonal. Portanto, se inserirmos arbitrariamente as k-primeiras entradas da segunda diagonal, podemos construi-la usando as entradas da matriz u e as entradas da primeira diagonal. Logo, indutivamente, é possível definirmos todas as diagonais da matriz w a partir de diagonais anteriores já definidas. Sendo assim, existe $w \in UT_\infty(F)$ tal que $u = [v, w]$. □

Teorema 1.4.2. *Seja F um corpo com pelo menos 3 elementos. O grupo derivado de $T_\infty(F)$ coincide com o grupo $UT_\infty(F)$.*

Demonstração. Se $a, b \in T_\infty(F)$, então $[a, b]_{ii} = a_{ii} b_{ii} \bar{a}_{ii} \bar{b}_{ii} = 1$. Portanto, $[T_\infty(F), T_\infty(F)] \subseteq UT_\infty(F)$. Seja $a \in UT_\infty(F)$ e seja $\alpha \in F^*$ tal que $1 - \alpha \in F^*$. Tomemos $b = [x, d]$ onde

$$x = \begin{bmatrix} 1 & a_{12}(1-\alpha)^{-1} & & & \\ & 1 & a_{23}(1-\alpha^{-1})^{-1} & & \\ & & 1 & a_{34}(1-\alpha)^{-1} & \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

e

$$d = \begin{bmatrix} \alpha & & & \\ & 1 & & \\ & & \alpha & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

Mais precisamente, $x = e_\infty + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i-1,2i}(1-\alpha)^{-1} e_{2i-1,2i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{2i,2i+1}(1-\alpha^{-1})^{-1} e_{2i,2i+1}$

e $d = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^{i \pmod 2} e_{ii}$. Para todo $i \geq 1$, temos $b_{ii} = 1$. Temos também que

$$\begin{aligned} b_{i,i+1} = & \sum_{i \leq p \leq r \leq q \leq i+1} x_{ip} d_{pr} \bar{x}_{rq} \bar{d}_{q,i+1} = \sum_{i \leq p \leq i+1} x_{ip} d_{pp} \bar{x}_{p,i+1} \bar{d}_{i+1,i+1} \\ = & x_{ii} d_{ii} \bar{x}_{i,i+1} \bar{d}_{i+1,i+1} + x_{i,i+1} d_{i+1,i+1} \bar{x}_{i+1,i+1} \bar{d}_{i+1,i+1} \\ = & d_{ii} \bar{x}_{i,i+1} \bar{d}_{i+1,i+1} + x_{i,i+1}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Se i for ímpar, pela equação (1.6) e pela Proposição 1.1.4, temos

$$b_{i,i+1} = \alpha[-a_{i,i+1}(1-\alpha)^{-1}] + a_{i,i+1}(1-\alpha)^{-1} = a_{i,i+1}(1-\alpha)^{-1}(1-\alpha) = a_{i,i+1}.$$

Se i for par, temos

$$b_{i,i+1} = [-a_{i,i+1}(1-\alpha^{-1})^{-1}]\alpha^{-1} + a_{i,i+1}(1-\alpha^{-1})^{-1} = a_{i,i+1}(1-\alpha^{-1})^{-1}(1-\alpha^{-1}) = a_{i,i+1}.$$

Portanto, a primeira diagonal de b é igual a primeira diagonal de a. Vamos considerar $c = b^{-1}a$. Para todo $i = 1, \ldots, n$, temos

$$c_{i,i+1} = \sum_{r=i}^{i+1} \bar{b}_{ir} a_{r,i+1} = a_{i,i+1} + \bar{b}_{i,i+1} = a_{i,i+1} - b_{i,i+1} = 0.$$

Portanto, $c \in UT_\infty^1(F)$ e, pelo Lema 1.4.1, $c = [u, v]$ com $u, v \in UT_\infty(F)$. Como $c = b^{-1}a$, temos que $a = [x, d][u, v]$. □

CAPÍTULO 2

ENDOMORFISMOS SOBREJETORES DE $UT_\infty(F)$ E DE $T_\infty(F)$

O objetivo deste capítulo é descrever os endomorfismos sobrejetores dos grupos $UT_\infty(F)$ e $T_\infty(F)$ onde F é um corpo com pelo menos três elementos. Todos os resultados apresentados neste capítulo encontram-se em [7] e em suas referências.

2.1 Alguns endomorfismos de $T_\infty(F)$ e de $UT_\infty(F)$

Antes de apresentar os resultados, vamos definir alguns endomorfismos sobrejetores de $T_\infty(F)$ e de $UT_\infty(F)$.

(1) Dado σ um endomorfismo sobrejetor de F, definimos a aplicação $\overline{\sigma}$: $T_\infty(F) \to T_\infty(F)$ por $(\overline{\sigma}(x))_{nm} = \sigma(x_{nm})$ para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}^*$. Note que $\overline{\sigma}$ é um endomorfismo sobrejetor de $T_\infty(F)$ o qual chamaremos *endomorfismo induzido (por σ)*.

Se considerarmos σ como sendo um automorfismo de F, então $\overline{\sigma}$ será um automorfismo de $T_\infty(F)$.

Analogamente, definimos endomorfismos induzidos sobre $UT_\infty(F)$.

(2) Dado $t \in T_\infty(F)$, vamos denotar por Inn_t o *automorfismo interno* de $T_\infty(F)$ definido por t, isto é, $Inn_t : T_\infty(F) \to T_\infty(F)$ é a aplicação definida por $Inn_t(x) = txt^{-1}$.

Os automorfismos internos de $UT_\infty(F)$ serão denotados da mesma forma.

(3) Dado $d \in D_\infty(F)$, consideremos a aplicação $Diag_d : UT_\infty(F) \to UT_\infty(F)$ definida por $Diag_d(x) = dxd^{-1}$. É fácil ver que $Diag_d$ é um automorfismo de $UT_\infty(F)$ o qual será chamado de *automorfismo diagonal*.

(4) Seja $k \in \mathbb{N}$ e considere a aplicação $\mathcal{U}p_k : T_\infty(F) \to T_\infty(F)$ definida por

$$(\mathcal{U}p_k(x))_{nm} = x_{n+k,m+k},$$

para todos $m, n \in \mathbb{N}^*$. Mostremos que $\mathcal{U}p_k$ é um endomorfismo sobrejetor de $T_\infty(F)$.

Sejam $x, y \in T_\infty(F)$. Para $n \leq m$, temos

$$(\mathcal{U}p_k(xy))_{nm} = (xy)_{n+k,m+k} = \sum_{l=n+k}^{m+k} x_{n+k,l}y_{l,m+k}.$$

Por outro lado, consideremos $\mathcal{U}p_k(x) = a$ e $\mathcal{U}p_k(y) = b$. Temos

$$(\mathcal{U}p_k(x)\mathcal{U}p_k(y))_{nm} = \sum_{i=n}^{m} a_{ni}b_{im} = \sum_{i=n}^{m} x_{n+k,i+k}y_{i+k,m+k} = \sum_{l=n+k}^{m+k} x_{n+k,l}y_{l,m+k}.$$

Portanto, $\mathcal{U}p_k(xy) = \mathcal{U}p_k(x)\mathcal{U}p_k(y)$. Mostremos, agora, a sobrejetividade de $\mathcal{U}p_k$. Seja $x \in T_\infty(F)$. Considere $y \in T_\infty(F)$ onde, para $i \leq j$, temos $y_{ij} = (e_\infty)_{ij}$ se $i \leq k$ e $y_{ij} = x_{i-k,j-k}$ se $i > k$. Então $\mathcal{U}p_k(y)_{ij} = y_{i+k,j+k} = x_{i+k-k,j+k-k} = x_{ij}$ e, portanto, $\mathcal{U}p_k(y) = x$. Logo, $\mathcal{U}p_k$ é um endomorfismo sobrejetor.

Analogamente, definimos $\mathcal{U}p_k : UT_\infty(F) \to UT_\infty(F)$, o qual também é um endomorfismo sobrejetor.

Dado um grupo G (ou corpo F), usaremos o símbolo $\mathcal{E}p(G)$ (ou $\mathcal{E}p(F)$) para denotar o conjunto de todos os endomorfismos sobrejetores de G (ou F). E $Aut(G)$ (ou $Aut(F)$) para denotar o conjunto dos automorfismos de G (ou F).

2.2 Endomorfismos sobrejetores de $UT_\infty(F)$

Antes de descrevemos, os endomorfismos sobrejetores do grupo $UT_\infty(F)$, precisamos de alguns resultados preliminares.

Lema 2.2.1. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$, então $\phi(UT_\infty^k(F)) \subseteq UT_\infty^k(F)$, para todo $k \geq 0$. E se $\phi \in Aut(UT_\infty(F))$ então $\phi(UT_\infty^k(F)) = UT_\infty^k(F)$, para todo $k \geq 0$.*

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$. Se $k = 0$, então $\phi(UT_\infty(F)) \subseteq UT_\infty(F)$. Suponhamos por indução que $\phi(UT_\infty^k(F)) \subseteq UT_\infty^k(F)$, para todo $k \leq n$, para algum $n \geq 0$. Vamos mostrar que $\phi(UT_\infty^{n+1}(F)) \subseteq UT_\infty^{n+1}(F)$. Seja $u \in UT_\infty^{n+1}(F)$. Pela Proposição 1.4.1, temos que $u = [v, w]$ para algum $v \in UT_\infty^n(F)$ e $w \in UT_\infty(F)$. Portanto, $\phi(u) = [\phi(v), \phi(w)]$. Pela hipótese de indução, $\phi(v) \in UT_\infty^n(F)$ e $\phi(w) \in UT_\infty(F)$. Novamente pela Proposição 1.4.1 segue que $\phi(u) = [\phi(v), \phi(w)] \in UT_\infty^{n+1}(F)$. Logo, $\phi(UT_\infty^{n+1}(F)) \subseteq UT_\infty^{n+1}(F)$.

Consideremos agora $\phi \in Aut(UT_\infty(F))$. Como $\phi^{-1} \in Aut(UT_\infty(F))$, então, pelo que mostramos acima, $\phi^{-1}(UT_\infty^k(F)) \subseteq UT_\infty^k(F)$ e, portanto, $UT_\infty^k(F) \subseteq \phi(UT_\infty^k(F))$. □

A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [7, Proposição 2.1].

Proposição 2.2.2. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $l \in \mathbb{N}$ com $l > k$, $\phi(R^{l,l+1}_\infty(F)) = R^{l-k,l-k+1}_\infty(F)$, e para $l \leq k$, $\phi(R^{l,l+1}_\infty(F)) = \{e_\infty\}$.*

A próxima proposição é um resultado sobre endomorfismos sobrejetores de $UT_\infty(F)$ que preservam os subgrupos da forma $R^{k,k+1}_\infty(F)$ para todo $k \geq 1$.

Proposição 2.2.3. *Seja $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$. Se $\phi(R^{n,n+1}_\infty(F)) = R^{n,n+1}_\infty(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$, então existe $u \in UT_\infty(F)$ tal que, para todo $\alpha \in F^*$ e para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, $u(\phi(t_{nm}(\alpha))u^{-1} = t_{nm}(\alpha')$, para algum $\alpha' \in F$.*

Demonstração. Vamos fazer a demonstração em etapas.

(1) Para cada par $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$ existe $\alpha^{(nm)} \in F^*$ tal que $\phi(t_{nm}(\alpha^{(nm)}))_{nm} \neq 0$.

Por hipótese, $\phi(R^{n,n+1}_\infty(F)) = R^{n,n+1}_\infty(F)$ e $\phi(R^{m-1,m}) = R^{m-1,m}_\infty(F)$. Pela Proposição 1.3.5, $R^{nm}_\infty(F) = [R^{n,n+1}_\infty(F), R^{m-1,m}_\infty(F)]$, sendo assim, $\phi(R^{nm}_\infty(F)) = R^{nm}_\infty(F)$. Portanto, dado $b \in R^{nm}_\infty(F)$ com $b_{nm} \neq 0$, existe $d \in R^{nm}_\infty(F)$ tal que $\phi(d) = b$. Pela Observação 1.3.2, sabemos que $d = \prod_{r=1}^{n} h^{(i)}$, com $h^{(i)} \in H^i_\infty(F)$ para todo $i = 1, \ldots, n$ e, além disso, $h^{(i)}_{ij} = d_{ij}$ para todo $j > i$. Note que $h^{(i)} \in UT^{m-n}_\infty(F)$ para todo $i < n$. Pelo Lema 2.2.1, $\phi(UT^{m-n}_\infty(F)) \subseteq UT^{m-n}_\infty(F)$. Como $b_{nm} \neq 0$, então $b \notin UT^{m-n}_\infty(F)$ e, portanto, $d \notin UT^{m-n}_\infty(F)$. Logo, $h^{(n)} \notin UT^{m-n}_\infty(F)$, ou seja, $h^{(n)}_{nm} \neq 0$ e, consequentemente, $b_{nm} = \phi(h^{(n)})_{nm}$. Pelo Lema 1.1.6, existe $a \in UT_\infty(F)$ tal que $h^{(n)} = at_{nm}(h^{(n)}_{nm})a^{-1}$. Se $\phi(t_{nm}(h^{(n)}_{nm}))_{nm} = 0$, então

$$\phi(h^{(n)})_{nm} = \sum_{n \leq p \leq r \leq m} \phi(a)_{np}\phi(t_{nm}(h^{(n)}_{nm}))_{pr}\overline{\phi(a)}_{rm} = (e_\infty)_{nm} = 0,$$

uma vez que $t_{nm}(h^{(n)}_{nm}) \in R^{nm}_\infty(F)$ e $\phi(R^{nm}_\infty(F)) = R^{nm}_\infty(F)$. Logo, $\phi(t_{nm}(h^{(n)}_{nm}))_{nm} \neq 0$.

O passo (1) nos garante que $\phi(t_{k,k+1}(1))_{k,k+1} \neq 0$ para todo $k \geq 1$; de fato, pela Proposição 1.1.5, $t_{k,k+2}(\alpha^{(k,k+2)}) = [t_{k,k+1}(1), t_{k+1,k+2}(\alpha^{(k,k+2)})]$. Suponhamos que $\phi(t_{k,k+1}(1))_{k,k+1} = 0$. Então $\phi(t_{k,k+1}(1)) \in UT^1_\infty(F)$, pois $\phi(t_{k,k+1}(1)) \in R^{k,k+1}_\infty(F)$. Pelo Lema 1.4.1, $[\phi(t_{k,k+1}(1)), \phi(t_{k+1,k+2}(\alpha^{(k,k+2)}))] \in UT^2_\infty(F)$ e, portanto, $\phi(t_{k,k+2}(\alpha^{(k,k+2)})) = \phi([t_{k,k+1}(1), t_{k+1,k+2}(\alpha^{(k,k+2)})]) \in UT^2_\infty(F)$, o que é uma contradição, pois pelo passo (1), $\phi(t_{k,k+2}(\alpha^{(k,k+2)})_{k,k+2} \neq 0$.

(2) Existe $u \in UT_\infty(F)$ tal que $u\phi(t_{1k}(\alpha^{(1k)}))u^{-1} = t_{1k}(\gamma^{(1k)})$ para algum $\gamma^{(1k)} \in F^*$, para todo $k \geq 2$.

Sabemos que $\phi(t_{1k}(\alpha^{(1k)}) \in R^{1k}_\infty(F)$ e, portanto, pelo item anterior, $\phi(t_{1k}(\alpha^{(1k)})) = e_\infty + \gamma^{(1k)}e_{1k} + \sum_{p=k+1}^{\infty} a_{kp}e_{1p}$, com $\gamma^{(1k)} \in F^*$ e $a_{kp} \in F$, para todo $p \geq k+1$. Pelo Lema 1.1.6, $\phi(t_{1k}(\alpha^{(1k)}))$ é conjugada à transvecção $t^{1k}(\gamma^{(1k)})$ pela matriz $v^{(k)} = e_\infty + \sum_{p=k+1}^{\infty}(\gamma^{(1k)})^{-1}a_{kp}e_{kp}$. Mostremos que a matriz u que estamos procurando é

$$u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & 1 & (\gamma^{12})^{-1}a_{23} & (\gamma^{12})^{-1}a_{24} & (\gamma^{12})^{-1}a_{25} & \cdots \\ & & 1 & (\gamma^{13})^{-1}a_{34} & (\gamma^{13})^{-1}a_{35} & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & & \end{bmatrix}.$$

Note que a k-ésima linha da matriz u é igual a k-ésima linha da matriz $v^{(k)}$ para todo $k \geq 2$. Como $uu^{-1} = e_\infty$, então, para todo $j > 1$,

$$0 = (e_\infty)_{1j} = \sum_{1 \leq r \leq j} u_{1r}\bar{u}_{rj} = \bar{u}_{1j}.$$

Consideremos $b = t_{1k}(\gamma^{(1k)})$ e $c = u^{-1}bu$. Para $j = 2, \ldots, k-1$, temos

$$c_{1j} = \sum_{1 \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{1p}b_{pr}u_{rj} = \sum_{1 \leq r \leq j} \bar{u}_{1r}u_{rj} = (e_\infty)_{1j} = 0.$$

Se $j = k$, então

$$c_{1k} = \sum_{1 \leq p \leq r \leq k} \bar{u}_{1p}b_{pr}u_{rk} = \sum_{1 \leq r \leq k} \bar{u}_{1r}u_{rk} + b_{1k}u_{kk} = \gamma^{(1k)}.$$

Para $j > k$, temos

$$c_{1j} = \sum_{1 \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{1p}b_{pr}u_{rj} = \sum_{1 \leq r \leq j} \bar{u}_{1r}u_{rj} + b_{1k}u_{kj} = \gamma^{(1k)}(\gamma^{(1k)})^{-1}a_{kj} = a_{kj}.$$

Para $i \geq 2$ e $j > i$, temos

$$c_{ij} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} \bar{u}_{ip}b_{pr}u_{rj} = \sum_{i \leq r \leq j} \bar{u}_{ir}u_{rj} = (e_\infty)_{ij} = 0.$$

Logo, $u^{-1}t_{1k}(\gamma^{(1k)})u = \phi(t_{1k}(\alpha^{(1k)}))$, como queríamos.

Tomemos $\phi' = Inn_u\phi$.

(3) Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$ e seja $\alpha \in F^*$. Temos que $\phi'(t_{nm}(\alpha)) = e_\infty + \sum_{r=m}^{\infty} a_{1r}e_{1r} + \sum_{r=m}^{\infty} a_{nr}e_{nr}$, para alguns $a_{1r}, a_{nr} \in F$, para todo $r \geq m$.

Seja $l \geq 2$ com $l \neq n$. Pela Proposição 1.1.5,

$$t_{1l}(\alpha^{(1l)})t_{nm}(\alpha) = t_{nm}(\alpha)t_{1l}(\alpha^{(1l)}).$$

Considerando $a = \phi'(t_{nm}(\alpha))$ e $b = \phi'(t_{1l}(\alpha^{(1l)}))$, temos que $ab = ba$. Como $t_{nm}(\alpha) \in R_\infty^{nm}(F)$, então $\phi(t_{nm}(\alpha)) \in R_\infty^{nm}(F)$. Além disso, como $R_\infty^{nm}(F)$ é um subgrupo normal de $UT_\infty(F)$, então $a = \phi'(t_{nm}(\alpha)) \in R_\infty^{nm}(F)$. Pelo item (2), $b = \phi'(t_{1l}(\alpha^{(1l)})) = t_{1l}(\gamma^{(1l)})$ para algum $\gamma^{(1l)} \in F^*$. Logo, para $j > l$, temos

$$(ba)_{1j} = \sum_{1\leq p\leq j} b_{1p}a_{pj} = a_{1j} + b_{1l}a_{lj}$$

e

$$(ab)_{1j} = \sum_{1\leq p\leq j} a_{1p}b_{pj} = a_{1j}.$$

Logo, $a_{lj} = 0$.

(4) Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$ e seja $\alpha \in F^*$. Temos que $\phi'(t_{nm}(\alpha)) = e_\infty + a_{1m}e_{1m} + a_{nm}e_{nm}$.

Sejam $n', m' \in \mathbb{N}^*$ com $n < n' < m'$ e $n' \neq m$. Pela Proposição 1.1.5, temos

$$t_{nm}(\alpha)t_{n'm'}(\alpha^{(n'm')}) = t_{n'm'}(\alpha^{(n'm')})t_{nm}(\alpha).$$

Considerando $a = \phi'(t_{nm}(\alpha))$ e $b = \phi'(t_{n'm'}(\alpha^{(n'm')}))$, temos $ab = ba$, onde

$$(ba)_{nm'} = \sum_{n\leq p\leq m'} b_{np}a_{pm'} = a_{nm'} + b_{nm'}$$

e

$$(ab)_{nm'} = \sum_{n\leq p\leq m'} a_{np}b_{pm'} = a_{nm'} + b_{nm'} + a_{nn'}b_{n'm'}.$$

Como $b_{n'm'} \neq 0$, temos que $a_{nn'} = 0$ para todo $n' > n$ com $n' \neq m$. Temos também que

$$(ba)_{1m'} = \sum_{1\leq p\leq m'} b_{1p}a_{pm'} = a_{1m'} + b_{1m'}$$

e

$$(ab)_{1m'} = \sum_{1\leq p\leq m'} a_{1p}b_{pm'} = a_{1m'} + b_{1m'} + a_{1n'}b_{n'm'}.$$

Portanto, $a_{1n'} = 0$ para todo $n' > n$ com $n' \neq m$.

O passo (4) nos garante que $\phi'(t_{1m}(\alpha)) \in T_\infty^{1m}(F)$ para todo $\alpha \in F$ e para todo $m > 1$.

(5) Existe $z \in UT_\infty(F)$ tal que $Inn_{z^{-1}}\phi'(t_{k,k+1}(1)) \in T_\infty^{k,k+1}(F)$ para todo $k \geq 1$.

Sabemos que para todo $k \geq 1$, $\phi'(t_{k,k+1}(1)) = e_\infty + a_{1,k+1}e_{1,k+1} + a_{k,k+1}e_{k,k+1}$, com $a_{1,k+1} \in F$ e $a_{k,k+1} \in F^*$. Vamos mostrar que

$$z = e_\infty + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_{1,i+1}}{a_{i,i+1}} e_{1i}$$

é a matriz que procuramos. Consideremos $k > 1$ e seja $a = \phi'(t_{k,k+1}(1))$. Temos, pela

Observação 1.1.3,

$$\begin{aligned}(z^{-1}az)_{1,k+1} = &\sum_{1\leq p\leq r\leq k+1} \overline{z}_{1p}a_{pr}z_{r,k+1} = \sum_{1\leq p\leq k+1} \overline{z}_{1p}a_{p,k+1} + z_{1,k+1}\\ =&a_{1,k+1} + \overline{z}_{1k}a_{k,k+1} + \overline{z}_{1,k+1} + z_{1,k+1} = -\frac{a_{1,k+1}}{a_{k,k+1}}a_{k,k+1} + a_{1,k+1} = 0.\end{aligned}$$

Se $1 < j \neq k+1$, temos

$$(z^{-1}az)_{1j} = \sum_{1\leq p\leq r\leq j} \overline{z}_{1p}a_{pr}z_{rj} = \sum_{1\leq p\leq j} \overline{z}_{1p}a_{pj} + z_{1j} = \overline{z}_{1j} + z_{1j} = 0.$$

Para $1 < i < j$, temos

$$(z^{-1}az)_{ij} = \sum_{i\leq p\leq r\leq j} \overline{z}_{ip}a_{pr}z_{rj} = a_{ij},$$

pois $\overline{z}_{ip} = 0$ para todo $p > i > 1$ e $z_{rj} = 0$ para todo $r = i, \ldots, j-1$. Portanto, pelo passo (4), $\phi'(t_{k,k+1}(1)) \in T_\infty^{k,k+1}(F)$.

Note que $z^{-1}\phi'(t_{1m}(\alpha))z \in T_\infty^{1m}(F)$ para todo $\alpha \in F$ e $m > 1$; de fato, dado $b = \phi'(t_{1m}(\alpha))$, para $1 < j < m$, temos

$$(z^{-1}bz)_{1j} = \sum_{1\leq p\leq r\leq j} \overline{z}_{1p}b_{pr}z_{rj} = (e_\infty)_{1j} = 0$$

e para $j \geq m$, temos

$$(z^{-1}bz)_{1j} = \sum_{1\leq p\leq r\leq j} \overline{z}_{1p}b_{pr}z_{rj} = (e_\infty)_{1j} + b_{1m}z_{mj} = b_{1m}z_{mj}.$$

Como $m > 1$, então $(z^{-1}bz)_{1j} = b_{1m}z_{mj} = 0$ se $j > m$. Para $1 < i < j$, temos $(z^{-1}bz)_{ij} = b_{ij}$.

Consideremos $\phi_2 = Inn_{z^{-1}}\phi'$.

(6) $\phi_2(T_\infty^{k,k+1}(F)) \subseteq T_\infty^{k,k+1}(F)$.

Já sabemos que $\phi_2(T_\infty^{12}(F)) \subseteq T_\infty^{12}(F)$. Fixemos $k \geq 2$. Dado $\alpha \in F$, pelo passo (4) e fazendo cálculos análogos aos do passo (5), temos que $\phi_2(t_{k,k+1}(\alpha)) = e_\infty + \beta e_{k,k+1} + \gamma e_{1,k+1}$, para alguns $\beta, \gamma \in F$. Consideremos $a = \phi_2(t_{k,k+1}(\alpha))$. Pela Proposição 1.1.5, $t_{k-1,k+1}(\alpha) = [t_{k-1,k}(1), t_{k,k+1}(\alpha)]$. Portanto, $\phi_2(t_{k-1,k+1}(\alpha)) = [\phi_2(t_{k-1,k}(1)), a]$. Se $k = 2$, então pelo passo (4), temos que $\phi_2(t_{k-1,k+1}(\alpha)) = t_{k-1,k+1}(\beta)$. Para $k > 2$, consideremos

$b = \phi_2(t_{k-1,k}(1))$, sabemos que $b \in T_\infty^{k-1,k}(F)$, pelo passo (5). Logo,

$$\begin{aligned}\phi_2(t_{k-1,k+1}(\alpha))_{1,k+1} &= \sum_{1\leq p\leq r\leq q\leq k+1} b_{1p}a_{pr}\overline{b}_{rq}\overline{a}_{q,k+1} = \sum_{1\leq r\leq q\leq k+1} a_{1r}\overline{b}_{rq}\overline{a}_{q,k+1}\\ &= \sum_{1\leq q\leq k+1} \overline{b}_{1q}\overline{a}_{q,k+1} + a_{1,k+1} = \overline{a}_{1,k+1} + a_{1,k+1} = 0.\end{aligned}$$

No passo (4), vimos que $\phi'(t_{k-1,k+1}(\alpha)) = e_\infty + \lambda e_{k-1,k+1} + \lambda' e_{1,k+1}$, para alguns $\lambda', \lambda \in F$. Note que $\phi_2(\phi'(t_{k-1,k+1}(\alpha)))$ também manterá as mesmas entradas nulas. Portanto, $\phi_2(T_\infty^{k-1,k+1}(F)) \subseteq T_\infty^{k-1,k+1}(F)$, para todo $k \geq 2$.

Podemos ver também que $t_{k,k+2}(\alpha) = [t_{k,k+1}(\alpha), t_{k+1,k+2}(1)]$, consequentemente, $\phi_2(t_{k,k+2}(\alpha)) = [a, \phi_2(t_{k+1,k+2}(1))]$. Considerando $c = \phi_2(t_{k+1,k+2}(1))$, temos que $c \in T_\infty^{k+1,k+2}(F)$, pelo passo (5). Logo,

$$\begin{aligned}\phi_2(t_{k,k+2}(\alpha))_{1,k+2} &= \sum_{1\leq p\leq r\leq q\leq k+2} c_{1p}a_{pr}\overline{c}_{rq}\overline{a}_{q,k+2} = \sum_{1\leq r\leq q\leq k+2} a_{1r}\overline{c}_{rq}\overline{a}_{q,k+2}\\ &= a_{1,k+1}\overline{c}_{k+1,k+2}\overline{a}_{k+2,k+2} = \gamma(-c_{k+1,k+2}) = -\gamma c_{k+1,k+2}.\end{aligned}$$

Como $\phi_2(T_\infty^{k,k+2}(F)) \subseteq T_\infty^{k,k+2}(F)$, então $-\gamma c_{k+1,k+2} = 0$, portanto $\gamma = 0$, pois já sabemos que $c_{k+1,k+2} \neq 0$. Logo, $\phi_2(t_{k,k+1}(\alpha)) = t_{k,k+1}(\beta)$.

(7) Sejam $k, l \in \mathbb{N}^*$ com $k < l$. Temos que $\phi_2(T_\infty^{kl}(F)) \subseteq T_\infty^{kl}(F)$.
Já sabemos pelo passo (6) que a afirmação acima é verdadeira para $l = k+1$. Seja $r > 1$ e suponhamos que ela seja verdadeira para todo l tal que $l - k < r$. Se $l - k = r$, segue pela Proposição 1.1.5, que

$$\begin{aligned}\phi_2(T_\infty^{kl}(F)) =&\phi_2([T_\infty^{k,k+1}(F), T_\infty^{k+1,l}(F)]) = [\phi_2(T_\infty^{k,k+1}(F)), \phi_2(T_\infty^{k+1,l}(F))] \subseteq\\ \subseteq&[T_\infty^{k,k+1}(F), T_\infty^{k+1,l}(F)] = T_\infty^{kl}(F).\end{aligned}$$

$\square$

Vamos à última proposição necessária para a demonstração do principal resultado desta seção.

Proposição 2.2.4. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$ satisfaz as seguintes condições:*

(1) $\phi(R_\infty^{n,n+1}(F)) = R_\infty^{n,n+1}(F)$ para todo $n \in \mathbb{N}$,

(2) $\phi(T_\infty^{nm}(F)) = T_\infty^{nm}(F)$ para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$,

então existe $d \in D_\infty(F)$ tal que $\phi = Diag_d\bar{\sigma}$ para algum $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$.

Demonstração. Dados $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, considere a aplicação $\sigma_{nm} : F \to F$ definida por

$$\sigma_{nm}(\alpha) = \alpha' \Leftrightarrow \phi(t_{nm}(\alpha)) = t_{nm}(\alpha').$$

Como $t_{nm}(0) = e_\infty$, então $\sigma_{nm}(0) = 0$.

Sejam m, n tais que $m > n + 1$. Pela Proposição 1.1.5,

$$[t_{n,n+1}(\beta_1), t_{n+1,m}(\beta_2)] = t_{nm}(\beta_1\beta_2),$$

para quaisquer $\beta_1, \beta_2 \in F$. Portanto

$$\phi(t_{nm}(\beta_1\beta_2)) = [\phi(t_{n,n+1}(\beta_1)), \phi(t_{n+1,m}(\beta_2))] = [t_{n,n+1}(\beta_1'), t_{n+1,m}(\beta_2')] = t_{nm}(\beta_1'\beta_2')$$

e, consequentemente,

$$\sigma_{nm}(\beta_1\beta_2) = \beta_1'\beta_2' = \sigma_{n,n+1}(\beta_1)\sigma_{n+1,m}(\beta_2).$$

Em particular,

$$\sigma_{nm}(\alpha) = \sigma_{n,n+1}(1)\sigma_{n+1,m}(\alpha), \tag{2.1}$$

para todo $\alpha \in F$. Note que, se $\sigma_{n,n+1}(1) = 0$, então $\sigma_{nm}(\alpha) = 0$, e assim, $\phi(t_{nm}(\alpha)) = e_\infty$ para qualquer $\alpha \in F$, o que contradiz o item (2). Logo $\sigma_{n,n+1}(1) \neq 0$. Analogamente, temos

$$\sigma_{nm}(\alpha) = \sigma_{n,n+1}(\alpha)\sigma_{n+1,m}(1), \tag{2.2}$$

com $\sigma_{n+1,m}(1) \neq 0$.

Mostremos que, dados $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$, existem $\gamma_n, \gamma_m' \in F^*$ tais que $\sigma_{nm}(\alpha) = \gamma_n\gamma_m'\sigma_{12}(\alpha)$. Se $n = 1$ e $m = 2$, tomemos $\gamma_1, \gamma_2' = 1$. Se $n = 1$ e $m \geq 3$, segue da equação (2.2) que $\sigma_{1m} = \sigma_{12}(\alpha)\sigma_{2m}(1)$. Tomemos então $\gamma_m' = \sigma_{2m}(1)$. Suponhamos que para algum $n \geq 1$ e qualquer $m > n$ tenhamos $\sigma_{nm}(\alpha) = \gamma_n\gamma_m'\sigma_{12}(\alpha)$. Da equação (2.1) obtemos, para todo $m > n + 1$,

$$\sigma_{n+1,m}(\alpha) = \sigma_{n,n+1}(1)^{-1}\sigma_{nm}(\alpha) = \sigma_{n,n+1}(1)^{-1}\gamma_n\gamma_m'\sigma_{12}(\alpha) = \gamma_{n+1}\gamma_m'\sigma_{12}(\alpha),$$

onde,

$$\gamma_{n+1} = \sigma_{n,n+1}(1)^{-1}\gamma_n \quad \text{e} \quad \gamma_m' = \sigma_{2m}(1),$$

para todos $n \geq 1$ e $m \geq 3$. Segue da equação (2.2) que, para todo $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\gamma_n =& \sigma_{n-1,n}(1)^{-1}\sigma_{n-2,n-1}(1)^{-1}\cdots\sigma_{23}(1)^{-1}\sigma_{12}(1)^{-1} = [\sigma_{12}(1)\sigma_{23}(1)\cdots\sigma_{n-1,n}(1)]^{-1}\\ =&\sigma_{1n}(1)^{-1}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma_n = \sigma_{1n}(1)^{-1}, \text{ para todo } n \geq 2.$$

Logo, para todo $\alpha \in F$ e quaisquer $n < m$,

$$\phi(t_{nm}(\alpha)) = t_{nm}(\sigma_{nm}(\alpha)) = t_{nm}(\gamma_n \gamma'_m \sigma_{12}(\alpha)),$$

onde γ_n e γ'_m são dados acima.

Considere a matriz diagonal

$$d = \sigma_{12}(1)^{-1} e_{11} + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma'_i e_{ii}$$

e seja $b = t_{nm}(\sigma_{nm}(\alpha)) = t_{nm}(\gamma_n \gamma'_m \sigma_{12}(\alpha))$. É fácil mostrar que $dbd^{-1} = t_{nm}(d_{nn} b_{nm} \overline{d}_{mm})$. Se $n = 1$ e $m = 2$, $(dbd^{-1})_{12} = d_{11} b_{12} \overline{d}_{22} = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha)$. Se $n = 1$ e $m > 2$, $(dbd^{-1})_{1m} = \sigma_{12}(1)^{-1}\gamma'_m \sigma_{12}(\alpha)(\gamma'_m)^{-1} = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha)$. Se $m > n = 2$, $(dbd^{-1})_{2m} = \gamma_2 \gamma'_m \sigma_{12}(\alpha)(\gamma'_m)^{-1} = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha)$. Finalmente, se $m > n > 2$, segue de (2.2) que

$$\begin{aligned}(dbd^{-1})_{nm} =& \gamma'_n \gamma_n \gamma'_m \sigma_{12}(\alpha)(\gamma'_m)^{-1} = \sigma_{2n}(1)\sigma_{1n}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha) = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{1n}(1)\sigma_{1n}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha) \\ =& \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha).\end{aligned}$$

Logo,

$$d\, t_{nm}(\gamma_n \gamma'_m \sigma_{12}(\alpha)) d^{-1} = t_{nm}(\sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\alpha)). \tag{2.3}$$

Considere as aplicações $\phi' : UT_\infty(F) \to UT_\infty(F)$ e $\sigma : F \to F$ definidas por

$$\phi' = Diag_d \phi \quad \text{e} \quad \sigma = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}.$$

Mostremos que σ é um homomorfismo sobrejetor e que $\phi' = \overline{\sigma}$. Seja $x \in UT_\infty(F)$.
<u>1º caso :</u> $x = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$ com $x_1 \in UT_n(F)$.

Pelo Lema 1.1.8, $x_1 = \prod_{k=1}^{p} a_k$ com $a_k \in T_n^{i_k j_k}(F)$, $1 \leq i_k < j_k \leq n$. Logo $x = \prod_{k=1}^{p} b_k$, onde

$$b_k = \left(\begin{array}{c|c} a_k & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \in T_\infty^{i_k j_k}(F).$$

Segue da equação (2.3) que

$$\begin{aligned}\phi'(x) &= \prod_{k=1}^{p} \phi'(b_k) = \prod_{k=1}^{p} d\phi(b_k)d^{-1} = \prod_{k=1}^{p} d\, t_{i_k j_k}(\sigma_{i_k j_k}(x_{i_k j_k}))d^{-1} \\ &= \prod_{k=1}^{p} d\, t_{i_k j_k}(\gamma_{i_k}\gamma'_{j_k}\sigma_{12}(x_{i_k j_k}))d^{-1} = \prod_{k=1}^{p} t_{i_k j_k}(\sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(x_{i_k j_k})) \\ &= \prod_{k=1}^{p} t_{i_k j_k}(\sigma(x_{i_k j_k})).\end{aligned}$$

Como $\sigma(1) = \sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(1) = 1$ e $\sigma(0) = 0$, então $\phi'(x) = \overline{\sigma}(x)$.

2º caso: $x = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$ com $x_1 \in UT_n(F)$.

Se considerarmos

$$x' = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ e } x'' = \left(\begin{array}{c|c} e_n & x_1^{-1}x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$$

em $UT_\infty(F)$, teremos $x = x'x''$. Note que $x'' \in R_\infty^{n,n+1}(F)$. Segue de (1) que $\phi(x'') \in R_\infty^{n,n+1}(F)$ e, portanto, $\phi'(x'') = d\phi(x'')d^{-1} \in R_\infty^{n,n+1}(F)$. Além disso, pelo 1º caso, $\phi'(x') = \overline{\sigma}(x')$. Sejam $i, j \in \mathbb{N}^*$ com $i < j$. Se $j \leq n$, então

$$\begin{aligned} \phi'(x)_{ij} =& (\phi'(x')\phi'(x''))_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} \phi'(x')_{ir}\phi'(x'')_{rj} = \phi'(x')_{ij} \\ =& \overline{\sigma}(x')_{ij} = \sigma(x'_{ij}) = \sigma(x_{ij}) = \overline{\sigma}(x)_{ij}. \end{aligned}$$

Analogamente, se $n < i$, $\phi'(x)_{ij} = \overline{\sigma}(x)_{ij}$. No caso em que $i \leq n < j$, consideremos x dividida em blocos da seguinte forma:

$$x = \left(\begin{array}{c|c} x_3 & x_4 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ com } x_3 \in UT_j(F).$$

De maneira análoga ao que fizemos acima, se considerarmos

$$y' = \left(\begin{array}{c|c} x_3 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ e } y'' = \left(\begin{array}{c|c} e_j & x_3^{-1}x_4 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$$

teremos $x = y'y''$ com $y'' \in R_\infty^{j,j+1}(F)$ e $\phi'(y') = \overline{\sigma}(y')$. Portanto,

$$\begin{aligned} \phi'(x)_{ij} =& (\phi'(y')\phi'(y''))_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} \phi'(y')_{ir}\phi'(y'')_{rj} = \phi'(y')_{ij} = \overline{\sigma}(y')_{ij} \\ =& \sigma(y'_{ij}) = \sigma(x_{ij}) = \overline{\sigma}(x)_{ij}, \end{aligned}$$

e assim, $\phi'(x) = \overline{\sigma}(x)$.

3º caso: $x \in UT_\infty(F)$ é um elemento arbitrário.

Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n < m$. Queremos mostrar que $\phi'(x)_{nm} = \overline{\sigma}(x)_{nm}$. Para isso, note que, dados

$$z = \left(\begin{array}{c|c} e_{m+1} & 0 \\ \hline 0 & z_3 \end{array}\right) \text{ e } z' = \left(\begin{array}{c|c} z_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$$

em $UT_\infty(F)$ com $z_1 \in UT_{m+1}(F)$, temos $zz' = z'z$ e, portanto $\phi'(z)\phi'(z') = \phi'(z')\phi'(z)$.

Do 1º caso sabemos que $\phi'(z') = \overline{\sigma}(z')$, e assim

$$\phi'(z') = \left(\begin{array}{c|c} y_1' & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ com } y_1' \in UT_{m+1}(F).$$

Então, se escrevermos

$$\phi'(z) = \left(\begin{array}{c|c} y_1 & y_2 \\ \hline 0 & y_3 \end{array}\right) \text{ com } y_1 \in UT_{m+1}(F),$$

devemos ter $y_1 y_1' = y_1' y_1$. Note que y_1' é uma matriz arbitrária de $UT_{m+1}(F)$; de fato, dado $y \in UT_{m+1}(F)$ e

$$w = \left(\begin{array}{c|c} y & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right),$$

pelo Lema 1.1.8, podemos escrever $w = \prod_{k=1}^{p} b_k$, com $b_k \in T_\infty^{i_k j_k}(F)$. Por (2.3), podemos garantir que $\phi'(T_\infty^{nm}(F)) \subseteq T_\infty^{nm}(F)$ para quaisquer $1 \leq n < m$. Seja $t_{nm}(\alpha) \in T_\infty^{nm}(F)$, com $\alpha \in F$. Como σ_{12} é uma aplicação sobrejetora, existe $\beta \in F$ tal que $\sigma_{12}(\beta) = \alpha\sigma_{12}(1)$. Portanto, por (2.3), temos $\phi'(t_{nm}(\beta)) = t_{nm}(\sigma_{12}(1)^{-1}\sigma_{12}(\beta)) = t_{nm}(\alpha)$. Sendo assim, $\phi'(T_\infty^{nm}(F)) = T_\infty^{nm}(F)$. Logo, podemos garantir que para cada $k = 1, \ldots, p$, existe $c_k \in T_\infty^{i_k j_k}(F)$ tal que $\phi'(c_k) = b_k$. Portanto, se considerarmos $w' = \prod_{k=1}^{p} c_k$, teremos

$$w' = \left(\begin{array}{c|c} w_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ com } w_1 \in UT_{m+1}(F)$$

e $\phi'(w') = w$. Logo, $y_1 \in Z(UT_{m+1}(F))$. Pela Proposição 1.2.2, $y_1 \in T_{m+1}^{1,m+1}(F)$. Escrevamos

$$x = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & x_3 \end{array}\right) \text{ com } x_1 \in UT_{m+1}(F).$$

Temos

$$\phi'(x)_{nm} = \left(\phi'\left(\begin{array}{c|c} e_{m+1} & 0 \\ \hline 0 & x_3 \end{array}\right)\phi'\left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)\right)_{nm},$$

onde $\phi'\left(\begin{array}{c|c} e_{m+1} & 0 \\ \hline 0 & x_3 \end{array}\right) \in T_{m+1}^{1,m+1}(F)$ e $\phi'\left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) = \overline{\sigma}\left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)$, pelo 2º caso. Logo,

$$\phi'(x)_{nm} = \phi'\left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)_{nm} = \overline{\sigma}\left(\begin{array}{c|c} x_1 & x_2 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right)_{nm} = \overline{\sigma}(x)_{nm}.$$

Portanto, $\phi' = \bar{\sigma}$.

Dado $a \in F$, seja $x = t_{nm}(a)$, $1 \leq n < m$. Como $x \in UT_\infty(F)$ e ϕ' é sobrejetora, existe

$y \in UT_\infty(F)$ tal que $x = \phi'(y) = \overline{\sigma}(y)$. Assim, $a = x_{nm} = \overline{\sigma}(y)_{nm} = \sigma(y_{nm})$ e, portanto, σ é sobrejetora.

Resta mostrar que σ é um homomorfismo. Sabemos que $\overline{\sigma}$ é um homomorfismo, pois $\overline{\sigma} = \phi'$. Sejam $a, b \in F$ e sejam $x = t_{nm}(a)$, $y = t_{nm}(b)$. Temos

$$\overline{\sigma}(x)\overline{\sigma}(y) = t_{nm}(\sigma(a))t_{nm}(\sigma(b)) = t_{nm}(\sigma(a) + \sigma(b))$$

e

$$\overline{\sigma}(xy) = \overline{\sigma}(t_{nm}(a)t_{nm}(b)) = \overline{\sigma}(t_{nm}(a + b)) = t_{nm}(\sigma(a + b))$$

e, portanto, $\sigma(a + b) = \sigma(a) + \sigma(b)$. Consideremos, agora, $x = t_{nm}(a)$, $y = t_{mp}(b)$. Temos

$$[\overline{\sigma}(x), \overline{\sigma}(y)] = [t_{nm}(\sigma(a)), t_{mp}(\sigma(b))] = t_{np}(\sigma(a)\sigma(b))$$

e

$$\overline{\sigma}([x, y]) = \overline{\sigma}([t_{nm}(a), t_{mp}(b)]) = \overline{\sigma}(t_{np}(ab)) = t_{np}(\sigma(ab)),$$

logo $\sigma(ab) = \sigma(a)\sigma(b)$ e, portanto, σ é um homomorfismo.

Concluímos assim que $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$ e $\phi = Diag_d\overline{\sigma}$, como queríamos. □

O teorema a seguir nos fornece uma caracterização dos endomorfismos sobrejetores do grupo $UT_\infty(F)$.

Teorema 2.2.5. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$, então existem $u \in UT_\infty(F)$, $d \in D_\infty(F)$, $k \in \mathbb{N}$ e $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$ tais que*

$$\phi = Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k.$$

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$. Pela Proposição 2.2.2, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(R^{l,l+1}_\infty(F)) = R^{l-k,l-k+1}_\infty(F)$ para todo $l > k$ e $\phi(R^{l,l+1}_\infty(F)) = \{e_\infty\}$ para todo $l \leq k$. Seja $\phi' : UT_\infty(F) \to UT_\infty(F)$ tal que $\phi'(v) = \phi(u)$, sendo $v = \mathcal{U}p_k(u)$. Note que ϕ' está bem definida; de fato, seja $v \in UT_\infty(F)$ e tomemos $u_1, u_2 \in UT_\infty(F)$ tais que $\mathcal{U}p_k(u_1) = \mathcal{U}p_k(u_2) = v$. Temos $(u_1)_{ij} = (u_2)_{ij}$ para $j > i \geq k + 1$. Tomemos $u \in UT_\infty(F)$ tal que $u_{ij} = (u_1)_{ij} = (u_2)_{ij}$ se $i \geq k + 1$ e $u_{ij} = 0$ para todo $i < k + 1$. Note que podemos escrever $u_1 = u \prod\limits_{1 \leq i \leq k} h_i$ e $u_2 = u \prod\limits_{1 \leq i \leq k} h'_i$, em que $h_i, h'_i \in H^i_\infty(F)$ e $(h_i)_{ij} = (u_1)_{ij}$ e $(h'_i)_{ij} = (u_2)_{ij}$, se $j > i$. Como $H^i_\infty(F) \subseteq R^{i,i+1}_\infty(F)$, então $\phi(H^i_\infty(F)) \subseteq \phi(R^{i,i+1}_\infty(F)) = \{e_\infty\}$ para todo $i \leq k$. Portanto, $\phi(u_1) = \phi(u_2) = \phi(u)$, como queríamos. Sejam $v_1, v_2 \in UT_\infty(F)$ e sejam $u_1, u_2 \in UT_\infty(F)$ tais que $\mathcal{U}p_k(u_1) = v_1$ e $\mathcal{U}p_k(u_2) = v_2$. Como $\mathcal{U}p_k(u_1u_2) = \mathcal{U}p_k(u_1)\mathcal{U}p_k(u_2) = v_1v_2$, então $\phi'(v_1v_2) = \phi(u_1u_2) = \phi(u_1)\phi(u_2) = \phi'(v_1)\phi'(v_2)$. Logo, ϕ' é um homomorfismo. Seja $w \in UT_\infty(F)$, $w = \phi(u)$. Se $v = \mathcal{U}p_k(u)$, segue que $\phi'(v) = \phi(u) = w$ e, portanto, ϕ' é sobrejetora.

Pela forma como definimos ϕ', temos que $\phi = \phi'\mathcal{U}p_k$. Dado $l > k$, temos $\phi(R^{l,l+1}_\infty(F)) = R^{l-k,l-k+1}_\infty(F)$ e, portanto, $\phi'(\mathcal{U}p_k(R^{l,l+1}_\infty(F))) = R^{l-k,l-k+1}$. Logo, $\phi'(R^{l-k,l-k+1}_\infty(F)) =$

$R_\infty^{l-k,l-k+1}(F))$ para todo $l > k$. Pela Proposição 2.2.3, existe $u \in UT_\infty(F)$ de forma que para todo par (n,m) com $n < m$ e $\alpha \in F^*$, $u(\phi'(t_{nm}(\alpha)))u^{-1} = t_{nm}(\alpha')$ para algum $\alpha' \in F$. Assim, se considerarmos $\phi_2 = Inn_u\phi'$, temos que $\phi_2 \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$ e satisfaz as hipóteses da Proposição 2.2.4. Assim, existem $d \in D_\infty(F)$ e $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$ tais que $\phi_2 = Diag_d\bar{\sigma}$. Logo, $\phi = Inn_{u^{-1}}Diag_d\bar{\sigma}\mathcal{U}p_k$. □

2.3 Endomorfismos sobrejetores de $T_\infty(F)$

Antes de descrever os endomorfismos sobrejetores de $T_\infty(F)$, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.3.1. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(T_\infty(F))$, então $\phi(UT_\infty(F)) = UT_\infty(F)$.*

Demonstração. Segue do Teorema 1.4.2 que

$$\phi(UT_\infty(F)) = \phi([T_\infty(F), T_\infty(F)]) = [\phi(T_\infty(F)), \phi(T_\infty(F))] = [T_\infty(F), T_\infty(F)] = UT_\infty(F).$$

□

Teorema 2.3.2. *Se $\phi \in \mathcal{E}p(T_\infty(F))$, então existem $t \in T_\infty(F)$, $\sigma \in Aut(F)$, $k \in \mathbb{N}$ e um homomorfismo de grupos $f : (F^*)^k \to F^*$ tal que*

$$\phi(x) = f(x_{11}, \ldots, x_{kk})Inn_t\bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(x)$$

para todo $x \in T_\infty(F)$. (No caso em que $k = 0$, $\phi(x) = Inn_t\bar{\sigma}(x)$.)

Demonstração. Seja $\phi \in \mathcal{E}p(T_\infty(F))$. Pelo lema anterior e pelo Teorema 2.2.5, para qualquer $x \in UT_\infty(F)$, temos

$$\phi(x) = Inn_uDiag_d\bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(x),$$

para alguns $u \in UT_\infty(F)$, $d \in D_\infty(F)$, $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$ e $k \in \mathbb{N}$. Suponhamos, primeiramente, que $k > 0$. Seja $v \in T_\infty(F)$. Pela Proposição 1.1.2, existem $w \in D_\infty(F)$ e $y \in UT_\infty(F)$ tais que $v = wy$. Logo,

$$\phi(v) = \phi(w)\phi(y) = \phi(w)Inn_uDiag_d\bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(y). \qquad (2.4)$$

Seja $x \in D_\infty(F)$,

$$x = \left(\begin{array}{c|c} x_1 & 0 \\ \hline 0 & e_\infty \end{array}\right) \text{ com } x_1 \in D_k(F).$$

Note que x comuta com todas as matrizes da forma

$$z = \left(\begin{array}{c|c} e_k & 0 \\ \hline 0 & u_3 \end{array}\right) \text{ com } u_3 \in UT_\infty(F)$$

e, portanto, $\phi(x)\phi(z) = \phi(z)\phi(x)$. Mas, se $c \in UT_\infty(F)$ é um elemento arbitrário, existe $b \in UT_\infty(F)$ tal que $c = Inn_u Diag_d \overline{\sigma}(b)$, pois $Inn_u Diag_d \overline{\sigma} \in \mathcal{E}p(UT_\infty(F))$. Além disso, $b = \mathcal{U}p_k \left(\begin{array}{c|c} e_k & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right)$ e, portanto, $c = Inn_u Diag_d \overline{\sigma} \mathcal{U}p_k \left(\begin{array}{c|c} e_k & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right) = \phi \left(\begin{array}{c|c} e_k & 0 \\ \hline 0 & b \end{array}\right)$. Segue que $\phi(x) \in C_{T_\infty(F)}(UT_\infty(F))$. Pelo Lema 1.2.1, $\phi(x) = \alpha e_\infty$, para algum $\alpha \in F^*$. Consideremos, então, a aplicação $f : (F^*)^k \to F^*$ definida por

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \phi \left(\begin{array}{ccc|c} \alpha_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \alpha_k & \\ \hline & 0 & & e_\infty \end{array}\right)_{ii}$$

para qualquer $i \in \mathbb{N}^*$. Como ϕ é homomorfismo, então f é homomorfismo de grupos.

Escrevamos $w = a'a$, onde

$$a' = \left(\begin{array}{ccc|c} w_{11} & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & w_{kk} & \\ \hline & 0 & & e_\infty \end{array}\right) \quad \text{e} \quad a = \left(\begin{array}{c|ccc} e_k & & 0 & \\ \hline & w_{k+1,k+1} & & \\ 0 & & w_{k+2,k+2} & \\ & & & \ddots \end{array}\right).$$

Temos

$$\phi(w) = \phi(a')\phi(a) = f(w_{11}, \ldots, w_{kk})\phi(a). \tag{2.5}$$

Seja $\phi' = Diag_{d^{-1}} Inn_{u^{-1}} \phi$. Para quaisquer $\alpha \in F$ e $j > i > k$, temos que $t_{ij}(\alpha) \in UT_\infty(F)$ e, consequentemente,

$$\begin{aligned} \phi'(t_{ij}(\alpha)) =& Diag_{d^{-1}} Inn_{u^{-1}} \phi(t_{ij}(\alpha)) = Diag_{d^{-1}} Inn_{u^{-1}} Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(t_{ij}(\alpha)) \\ &= \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(t_{ij}(\alpha)) = t_{i-k,j-k}(\sigma(\alpha)). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Para cada $i \geq 1$, seja

$$\tilde{d}^{(i)} = e_{ii} + \sum_{p \neq i} \beta_{ip} e_{pp}, \text{ com } \beta_{ip} \in F^*.$$

Note que se $d \in D_\infty(F)$, podemos escrever $d = \tilde{d}^{(i)} \tilde{d}^{(j)}$, onde $\tilde{d}^{(i)} = e_{ii} + \sum_{p \neq i} d_{pp} e_{pp}$ e $\tilde{d}^{(j)} = e_{jj} + d_{ii} e_{ii} + \sum_{p \neq i,j} e_{pp}$, para quaisquer $i, j \in \mathbb{N}^*$ com $i \neq j$. Mostremos que

$$\tilde{d}^{(i)} t_{nm}(1) (\tilde{d}^{(i)})^{-1} = t_{nm}((\tilde{d}^{(i)})_{nn} (\tilde{d}^{(i)})^{-1}_{mm}), \tag{2.7}$$

para quaisquer $n < m$. Se $p < r$, então

$$\begin{aligned}(\tilde{d}^{(i)}t_{nm}(1)(\tilde{d}^{(i)})^{-1})_{pr} =&(\tilde{d}^{(i)})_{pp}(t_{nm}(1))_{pr}((\tilde{d}^{(i)})^{-1})_{rr}\\ =&\begin{cases}(\tilde{d}^{(i)})_{nn}(\tilde{d}^{(i)})^{-1}_{mm}, & \text{se } (p,r)=(n,m)\\ 0, & \text{caso contrário}\end{cases}.\end{aligned}$$

Além disso, $((\tilde{d}^{(i)})t_{nm}(1)(\tilde{d}^{(i)})^{-1})_{pp} = (\tilde{d}^{(i)})_{pp}(t_{nm}(1))_{pp}((\tilde{d}^{(i)})^{-1})_{pp} = 1$. Mostramos assim a igualdade (2.7). Segue de (2.6) e (2.7) que

$$\phi'(\tilde{d}^{(j)}\ t_{ij}(1)(\tilde{d}^{(j)})^{-1}) = \phi'(t_{ij}(\tilde{d}^{(j)}_{ii}((\tilde{d}^{(j)})^{-1})_{jj})) = \phi'(t_{ij}(\beta_{ji})) = t_{i-k,j-k}\left(\sigma\left(\beta_{ji}\right)\right).$$

Por outro lado,

$$\phi'(\tilde{d}^{(j)}t_{ij}(1)(\tilde{d}^{(j)})^{-1}) = \phi'(\tilde{d}^{(j)})\phi'(t_{ij}(1))\phi'((\tilde{d}^{(j)})^{-1}) = \phi'(\tilde{d}^{(j)})t_{i-k,j-k}(\sigma(1))\phi'((\tilde{d}^{(j)})^{-1}),$$

por (2.6). Portanto,

$$\phi'(\tilde{d}^{(j)})t_{i-k,j-k}(1)\phi'((\tilde{d}^{(j)})^{-1}) = t_{i-k,j-k}\left(\sigma\left(\beta_{ji}\right)\right). \tag{2.8}$$

Pelas igualdades (2.6) e (2.7), também podemos garantir que $\phi'(\tilde{d}^{(j)}) \in D_\infty(F)$ para todo $j \in \mathbb{N}^*$, pois caso $\phi'(\tilde{d}^{(j)})_{nm} \neq 0$ para algum par (n,m) com $n < m$, teremos para $l > m$ que

$$\begin{aligned}(\phi'(\tilde{d}^{(j)})t_{ml}(1)\phi'((\tilde{d}^{(j)}))^{-1})_{nl} =& \sum_{n\le p\le r\le l}\phi'(\tilde{d}^{(j)})_{np}(t_{ml}(1))_{pr}(\phi'(\tilde{d}^{(j)})^{-1})_{rl}\\ =&(e_\infty)_{nl} + \phi'(\tilde{d}^{(j)})_{nm}(t_{ml}(1))_{ml}(\phi'(\tilde{d}^{(j)})^{-1})_{ll}\\ =&\phi'(\tilde{d}^{(j)})_{nm}(\phi'(\tilde{d}^{(j)})^{-1})_{ll} \neq 0,\end{aligned}$$

contradizendo a igualdade (2.8).

Por (2.8), segue que
$$\phi'(\tilde{d}^{(j)})_{i-k,i-k} = \sigma(\beta_{ji}).$$

Isto nos garante que σ é um automorfismo de F, pois $\phi'(\tilde{d}^{(j)}) \in D_\infty(F)$ e, portanto, $\sigma(\beta_{ij}) \neq 0$ para qualquer $\beta_{ji} \in F^*$.

Como a matriz a pode ser escrita como $a = \tilde{d}^{(j)}\tilde{d}^{(j')}$, temos para $i > k$ que $\phi'(a)_{i-k,i-k} = \phi'(\tilde{d}^{(j)}\tilde{d}^{(j')})_{i-k,i-k} = \phi'(\tilde{d}^{(j)})_{i-k,i-k}\phi'(\tilde{d}^{(j')})_{i-k,i-k} = \sigma((\tilde{d}^{(j)})_{ii})\sigma((\tilde{d}^{(j')})_{ii}) = \sigma((\tilde{d}^{(j)})_{ii}(\tilde{d}^{(j')})_{ii}) = \sigma(a_{ii})$. Sendo assim, $\phi'(a) = \bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(a) = \bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(w)$. Portanto, $\phi(a) = Inn_u Diag_d \bar{\sigma}\mathcal{U}p_k(w)$.

Logo, $\phi(w) = f(w_{11}, \dots, w_{kk}) Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(w)$. Por (2.4), temos

$$\begin{aligned}\phi(v) =& f(w_{11}, \dots, w_{kk}) Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(w) Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(y)\\ =& f(v_{11}, \dots, v_{kk}) Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(wy)\\ =& f(v_{11}, \dots, v_{kk}) Inn_u Diag_d \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(v).\end{aligned}$$

Seja $t = ud \in T_\infty(F)$. Temos

$$\phi(v) = f(v_{11}, \dots, v_{kk}) Inn_t \bar{\sigma} \mathcal{U}p_k(v).$$

Suponhamos agora que $k = 0$. Seja $v \in T_\infty(F)$. Vamos escrever $v = wy$ com $w \in D_\infty(F)$ e $y \in UT_\infty(F)$. Pelo Teorema 2.2.5

$$\phi(v) = \phi(w) Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(y), \tag{2.9}$$

para alguns $d \in D_\infty(F)$, $u \in UT_\infty(F)$ e $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$. Assim como no caso $k > 0$, consideremos $\phi' = Diad_{d^{-1}} Inn_{u^{-1}} \phi$. Repetindo cálculos semelhantes aos que acabamos fazer, podemos concluir que $\phi'(\tilde{d}^{(j)})_{ii} = \sigma((\tilde{d}^{(j)})_{ii})$ para todo $i \geq 1$. Portanto, $\phi'(\tilde{d}^{(j)}) = \bar{\sigma}(\tilde{d}^{(i)})$ e, assim, $\phi'(w) = \bar{\sigma}(w)$. Logo, $\phi(w) = Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(w)$. Por (2.9), temos

$$\phi(v) = Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(w) Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(y) = Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(wy) = Inn_u Diag_d \bar{\sigma}(v).$$

Se $t = du$, então $\phi(v) = Inn_t \bar{\sigma}(v)$. □

2.4 Automorfismos de $T_\infty(F)$ e de $UT_\infty(F)$

Finalizamos este capítulo descrevendo os automorfismos de $UT_\infty(F)$ e de $T_\infty(F)$. Para isso, precisamos da seguinte proposição.

Proposição 2.4.1. *Se $\phi \in Aut(UT_\infty(F))$, então $\phi(R_\infty^{k,k+1}(F)) = R_\infty^{k,k+1}(F)$, para todo $k \geq 0$.*

Demonstração. Seja $\phi \in Aut(UT_\infty(F))$. Para $k = 0$, por definição,

$$R_\infty^{k,k+1}(F) = \{e_\infty\} = \phi(\{e_\infty\}) = \phi(R_\infty^{k,k+1}(F)).$$

Para $k > 0$, $R_\infty^{k,k+1}(F)$ é um subgrupo abeliano maximal e normal de $UT_\infty(F)$. Como ϕ é um automorfismo de $UT_\infty(F)$, $\phi(R_\infty^{k,k+1}(F))$ também é um subgrupo abeliano maximal e normal. Sendo assim, existe $l > 0$ tal que $\phi(R_\infty^{k,k+1}(F)) = R_\infty^{l,l+1}(F)$. Além disso, pela Proposição 1.3.5, $[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{k+1,k+2}(F)] = R_\infty^{k,k+2}(F)$. Como $t_{k,k+2}(1) \in R_\infty^{k,k+2}(F)$, segue que

$$[R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{k+1,k+2}(F)] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset.$$

Note que para quaisquer $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $|m-n| > 1$,

$$[R_\infty^{n,n+1}(F), R_\infty^{m,m+1}(F)] = R_\infty^{\min\{m,n\},\max\{m,n\}+1}(F) \subseteq UT_\infty^2(F).$$

Logo, para $n \geq 2$

$$[R_\infty^{n,n+1}(F), R_\infty^{m,m+1}(F)] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset \tag{2.10}$$

se, e somente se, $m = n-1$ ou $m = n+1$. E, se $n = 1$,

$$[R_\infty^{12}(F), R_\infty^{m,m+1}(F)] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset$$

se, e somente se, $m = 2$. Agora, como

$$\phi([R_\infty^{k,k+1}(F), R_\infty^{k+1,k+2}(F)]) = [\phi(R_\infty^{k,k+1}(F)), \phi(R_\infty^{k+1,k+2}(F))]$$

e $t_{k,k+2}(1) \in UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)$, pelo Lema 2.2.1 podemos garantir que

$$[\phi(R_\infty^{k,k+1}(F)), \phi(R_\infty^{k+1,k+2}(F))] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset. \tag{2.11}$$

Se $\phi(R_\infty^{12}(F)) = R_\infty^{n,n+1}(F)$ para algum $n > 1$, então por (2.10), (2.11) e pelo Lema 2.2.1, temos

$$[R_\infty^{12}(F), \phi^{-1}(R_\infty^{n-1,n}(F))] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset$$

e

$$[R_\infty^{12}(F), \phi^{-1}(R_\infty^{n+1,n+2}(F))] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset,$$

o que é uma contradição, pois $\phi^{-1}(R_\infty^{n+1,n+2}(F)) \neq \phi^{-1}(R_\infty^{n-1,n}(F))$. Portanto, $\phi(R_\infty^{12}(F)) = R_\infty^{12}(F)$. Suponhamos agora que para algum $n \in \mathbb{N}^*$, $\phi(R_\infty^{i,i+1}(F)) = R_\infty^{i,i+1}(F)$, se $1 \leq i \leq n$. Sabemos que

$$[\phi(R_\infty^{n,n+1}(F)), \phi(R_\infty^{n+1,n+2}(F))] \cap (UT_\infty^1(F) \backslash UT_\infty^2(F)) \neq \emptyset.$$

Logo, se $n = 1$, devemos ter $\phi(R_\infty^{n+1,n+2}(F)) = R_\infty^{23}(F)$, ou seja, $\phi(R_\infty^{23}(F)) = R_\infty^{23}(F)$. Se $n \geq 2$, devemos ter $\phi(R_\infty^{n+1,n+2}(F)) = R_\infty^{n-1,n}(F)$ ou $\phi(R_\infty^{n+1,n+2}(F)) = R_\infty^{n+1,n+2}(F)$. Mas $\phi(R_\infty^{n-1,n}(F)) = R_\infty^{n-1,n}(F)$, pela hipótese de indução. Logo $\phi(R_\infty^{n+1,n+2}(F)) = R_\infty^{n+1,n+2}(F)$, uma vez que ϕ é bijetora. □

O próximo resultado é um corolário do Teorema 2.2.5.

Corolário 2.4.2. *Se $\phi \in Aut(UT_\infty(F))$, então existem $u \in UT_\infty(F)$, $d \in D_\infty(F)$ e $\sigma \in Aut(F)$ tais que*

$$\phi = Inn_u Diag_d \overline{\sigma}.$$

Demonstração. Pela Proposição 2.4.1, $\phi(R_\infty^{k,k+1}(F)) = R_\infty^{k,k+1}(F)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, pela demonstração do Teorema 2.2.5, existem $u \in UT_\infty(F)$, $d \in D_\infty(F)$ e $\sigma \in \mathcal{E}p(F)$ tais que $\phi = Inn_u Diag_d \overline{\sigma}$. Como $\overline{\sigma} = Diag_{d^{-1}} Inn_{u^{-1}} \phi$ é uma composta de automorfismos, então $\overline{\sigma}$ é um automorfismo de $UT_\infty(F)$ e, consequentemente, $\sigma \in Aut(F)$. □

Finalmente, descrevemos os automorfismos de $T_\infty(F)$. Tal resultado é uma consequência do Teorema 2.3.2 e do corolário acima.

Corolário 2.4.3. *Se $\phi \in Aut(T_\infty(F))$, então existem $t \in T_\infty(F)$ e $\sigma \in Aut(F)$ tais que*

$$\phi = Inn_t \overline{\sigma}.$$

Demonstração. Uma vez que ϕ é um automorfismo, segue do corolário acima e da demonstração do Teorema 2.3.2 que existem $u \in UT_\infty(F)$, $d \in D_\infty(F)$ e $\sigma \in Aut(F)$ tais que

$$\phi(x) = Inn_u Diag_d \overline{\sigma}(x),$$

para todo $x \in UT_\infty(F)$. Logo, estamos no caso $k = 0$ do Teorema 2.3.2. Portanto, existe $t \in T_\infty(F)$ tal que $\phi = Inn_t \overline{\sigma}$. □

CAPÍTULO 3

ENDOMORFISMOS SOBREJETORES DO ANEL DE MATRIZES TRIANGULARES SUPERIORES DE ORDEM INFINITA

Neste capítulo usaremos os resultados anteriores para descrever os endomorfismos sobrejetores do anel $\mathcal{T}_\infty(F)$ onde F é um corpo com pelo menos 3 elementos. Os resultados aqui apresentados podem ser encontrados em [9] e em suas referências.

3.1 Elementos idempotentes e o radical de Jacobson de $\mathcal{T}_\infty(F)$

Considere o seguinte subconjunto de $\mathcal{T}_\infty(F)$:

$$\mathcal{N}_\infty(F) = \{a \in \mathcal{T}_\infty(F) : a_{ii} = 0, \text{ para todo } i \in \mathbb{N}^*\}.$$

Vamos mostrar que $\mathcal{N}_\infty(F)$ é o radical de Jacobson de $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Começamos recordando a definição do radical de Jacobson de um anel com unidade.

Definição 3.1.1. Seja R um anel com unidade. O *radical de Jacobson* de R, denotado por $J(R)$, é o conjunto

$$J(R) = \{y \in R : 1 - xy \text{ tem inverso à esquerda para todo } x \in R\}.$$

Proposição 3.1.2. $\mathcal{N}_\infty(F) = J(\mathcal{T}_\infty(F))$.

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{N}_\infty(F)$ e seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Para todo $i \geq 1$, temos

$$(e_\infty - xa)_{ii} = 1 - x_{ii}a_{ii} = 1 - 0 = 1.$$

Pela Proposição 1.1.1, $e_\infty - xa$ é inversível em $\mathcal{T}_\infty(F)$ e, portanto, $a \in J(\mathcal{T}_\infty(F))$. Por outro lado, seja $y \in J(\mathcal{T}_\infty(F))$ e suponhamos que $y_{jj} \neq 0$ para algum $j \geq 1$. Se $b = y_{jj}^{-1}e_{jj}$, então $(e_\infty - by)_{jj} = 1 - b_{jj}y_{jj} = 1 - y_{jj}^{-1}y_{jj} = 1 - 1 = 0$. Pela Proposição 1.1.1, $e_\infty - by$ não é inversível à esquerda, o que é uma contradição. Logo $y_{ii} = 0$ para todo $i \geq 1$, isto é, $y \in \mathcal{N}_\infty(F)$. □

Segue da proposição a seguir que $\phi(\mathcal{N}_\infty(F)) \subseteq \mathcal{N}_\infty(F)$ para todo endomorfismo sobrejetor $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$.

Proposição 3.1.3. *Se $\phi : R \to S$ for um homomorfismo sobrejetor de anéis com unidade, então $\phi(J(R)) \subseteq J(S)$.*

Demonstração. Seja $x \in J(R)$ e seja $a \in S$. Como ϕ é sobrejetora existe $b \in R$ tal que $\phi(b) = a$. Consideremos $s \in R$ tal que $s(1 - bx) = 1$. Aplicando ϕ em ambos os lados da igualdade, obtemos $\phi(s)(1 - a\phi(x)) = 1$. Portanto, $\phi(x) \in J(S)$. □

Denotamos por $\mathcal{D}_\infty(F)$ o subanel de $\mathcal{T}_\infty(F)$ formado pelas matrizes diagonais.

Proposição 3.1.4. $Z(\mathcal{T}_\infty(F)) = \{\alpha e_\infty : \alpha \in F\}$.

Demonstração. Seja $\alpha \in F$ e seja $b \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Considerando $a = \alpha e_\infty$, temos

$$(ab)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir}b_{rj} = a_{ii}b_{ij} = \alpha b_{ij} \quad \text{e} \quad (ba)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} b_{ir}a_{rj} = b_{ij}a_{jj} = b_{ij}\alpha.$$

Portanto, $\alpha e_\infty \in Z(\mathcal{T}_\infty(F))$. Por outro lado, se $a \in Z(\mathcal{T}_\infty(F))$, então $ae_{ii} = e_{ii}a$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Para $j > i$, temos

$$(ae_{ii})_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} a_{ir}(e_{ii})_{rj} = 0 \quad \text{e} \quad (e_{ii}a)_{ij} = \sum_{i \leq r \leq j} (e_{ii})_{ir}a_{rj} = (e_{ii})_{ii}a_{ij} = a_{ij}$$

e, portanto, $a_{ij} = 0$. Logo, $a \in \mathcal{D}_\infty(F)$. Sejam $i, j \in \mathbb{N}^*$ com $i < j$ e consideremos $b = t_{ij}(1)$. Temos $(ab)_{ij} = a_{ii}b_{ij} = a_{ii}$ e $(ba)_{ij} = b_{ij}a_{jj} = a_{jj}$, portanto $a_{ii} = a_{jj}$. Logo, $a = \alpha e_\infty$ para algum $\alpha \in F$. □

Vejamos agora alguns resultados sobre idempotentes de $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Lema 3.1.5. *Se $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ é idempotente, então existe $t \in T_\infty(F)$ tal que $t^{-1}xt$ é uma matriz diagonal.*

Demonstração. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ uma matriz idempotente. Consideremos $d \in \mathcal{D}_\infty(F)$ tal que $d_{ii} = x_{ii}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Como x é idempotente, então d é idempotente. Seja $a = x - d$. Temos

$$a - a^2 = (x - d) - (x - d)^2 = x - d - x^2 - d^2 + xd + dx = -2d + xd + dx$$

e

$$da + ad = d(x-d) + (x-d)d = dx - d^2 + xd - d^2 = -2d + xd + dx.$$

Logo,

$$a - a^2 = da + ad. \tag{3.1}$$

Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por d, obtemos $da - da^2 = da + dad$ e, portanto,

$$dad + da^2 = 0. \tag{3.2}$$

Seja $b = e_\infty + (2d - e_\infty)a$. Como $a \in \mathcal{N}_\infty(F)$, então $((2d - e_\infty)a)_{ii} = (2d - e_\infty)_{ii}a_{ii} = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $b \in T_\infty(F)$. Agora

$$\begin{aligned} bx =& (e_\infty + 2da - a)(d + a) = d + 2dad - ad + a + 2da^2 - a^2 \\ =& d + a + 2(dad + da^2) - ad - a^2 \\ =& d + a - ad - a^2, \text{ por (3.2)} \\ =& d + da + ad - ad, \text{ por (3.1)} \\ =& d + da. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$db = d(e_\infty + 2da - a) = d + 2d^2a - da = d + da.$$

Logo, $bx = db$, donde segue que $bxb^{-1} = d$. □

Sejam $n, m \in \mathbb{N}^*$ com $n \leq m$, e sejam

$$\mathcal{R}_\infty^{nm}(F) = \{x \in \mathcal{T}_\infty(F) : x_{ij} = 0 \text{ se } i > n \text{ ou } j < m\}.$$

e

$$\mathcal{H}_\infty^{n}(F) = \{x \in \mathcal{T}_\infty(F) : x_{ij} = 0 \text{ se } i \neq n\}.$$

É fácil mostrar que $\mathcal{R}_\infty^{nm}(F)$ e $\mathcal{H}_\infty^{n}(F)$ são subanéis (não unitários) de $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Observe que se $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ é um idempotente, então $x_{ii} = (xx)_{ii} = x_{ii}x_{ii}$ para todo $i \geq 1$. Logo x_{ii} é um idempotente de F e, como F é um corpo, então $x_{ii} = 1$ ou $x_{ii} = 0$ para cada $i \geq 1$.

Proposição 3.1.6. *Se $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ é um idempotente tal que $x_{nn} = 1$ para exatamente um*

$n \in \mathbb{N}^*$, então x é da forma

$$\left(\begin{array}{c|c|c} 0_{n-1,n-1} & y & yz \\ \hline 0 & 1 & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{R}_\infty^{nn}(F),$$

com $y \in M_{n-1\times 1}(F)$ e $z \in M_{1\times\infty}(F)$.

Demonstração: Mostremos inicialmente que $x \in \mathcal{R}_\infty^{nn}(F)$. Para $i > n$ temos,

$$x_{i,i+1} = (xx)_{i,i+1} = \sum_{i\leq r\leq i+1} x_{ir}x_{r,i+1} = x_{ii}x_{i,i+1} + x_{i,i+1}x_{i+1,i+1} = 0,$$

pois $x_{ii} = x_{i+1,i+1} = 0$. Suponhamos por indução que para algum $m \in \mathbb{N}^*$ tenhamos $x_{i,i+p} = 0$ para todo $p \leq m$. Então

$$x_{i,i+m+1} = (xx)_{i,i+m+1} = \sum_{i\leq r\leq i+m+1} x_{ir}x_{r,i+m+1} = x_{i,i+m+1}x_{i+m+1,i+m+1} = 0.$$

Logo $x_{ij} = 0$ para todo $i > n$. Assim, se $n = 1$, então $x \in \mathcal{R}_\infty^{11}(F)$. Se $n = 2$, então $x_{ij} = 0$ se $i > 2$. Se $j < 2$ então $j = 1$ e $x_{11} = 0$. Logo $x \in \mathcal{R}_\infty^{22}(F)$. Vamos então considerar $n > 2$. Seja $1 < j < n$. Temos

$$x_{j-1,j} = (xx)_{j-1,j} = x_{j-1,j-1}x_{j-1,j} + x_{j-1,j}x_{jj} = 0,$$

pois $x_{j-1,j-1} = x_{jj} = 0$. Podemos mostrar indutivamente que $x_{j-p,j} = 0$ para todo $p = 1, \ldots, j-1$, de maneira análoga ao caso $i > n$. Logo, $x \in \mathcal{R}_\infty^{nn}(F)$.

Se $j > n > i$, então

$$x_{ij} = (xx)_{ij} = \sum_{i\leq r\leq j} x_{ir}x_{rj} = \sum_{n\leq r\leq j} x_{ir}x_{rj} = x_{in}x_{nj}.$$

Logo x é da forma desejada. □

3.2 Endomorfismos sobrejetores do anel $\mathcal{T}_\infty(F)$

Lema 3.2.1. *Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e seja $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ um endomorfismo sobrejetor. Se $\phi(e_{nn}) = 0$, então $\phi(\mathcal{R}_\infty^{nn}(F)) = \{0\}$.*

Demonstração. Seja $\alpha \in F^*$ e seja $x = \alpha e_{nn}$. Note que $xe_{nn} = x$ e, portanto, $\phi(x) =$

$\phi(xe_{nn}) = \phi(x)\phi(e_{nn}) = 0$. Considere, agora, um elemento x da forma

$$x = \alpha e_{nn} + \sum_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i e_{ni}, \tag{3.3}$$

com $\alpha \in F^*$ e $\alpha_i \in F$ para todo $i \geq n+1$. Mostremos que para $z = e_\infty + \alpha^{-1} \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \alpha_i e_{ni}$, temos $zxz^{-1} = \alpha e_{nn}$. Se $n \neq i \leq j$, então

$$(zxz^{-1})_{ij} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} z_{ip} x_{pr} \bar{z}_{rj} = \sum_{i \leq r \leq j} x_{ir} \bar{z}_{rj} = 0.$$

Para $n = i < j$, temos

$$(zxz^{-1})_{nj} = \sum_{n \leq p \leq r \leq j} z_{np} x_{pr} \bar{z}_{rj} = \sum_{n \leq p \leq j} z_{np} x_{pj} + x_{nn} \bar{z}_{nj} = x_{nj} + x_{nn} \bar{z}_{nj} = \alpha_j + \alpha(-\alpha^{-1}\alpha_j) = 0.$$

E $(zxz^{-1})_{nn} = z_{nn} x_{nn} z_{nn}^{-1} = \alpha$. Logo $zxz^{-1} = \alpha e_{nn}$ e, portanto, $\phi(x) = \phi(z^{-1}\alpha e_{nn} z) = \phi(z^{-1})\phi(\alpha e_{nn})\phi(z) = 0$.

Considere

$$x = \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i e_{ni}, \tag{3.4}$$

com $m > n$ e $\alpha_i \in F$ para todo $i \geq m$. Tomando $w = \alpha e_{nn} + \sum\limits_{i=n+1}^{m-1} \gamma_i e_{ni}$ com $\gamma_i \in F$ para todo $i = n+1, \ldots, m-1$ e $\alpha \in F^*$, temos $\phi(w + x) = 0$ e $\phi(w) = 0$ e, portanto $\phi(x) = 0$.

Por sua vez, defina

$$x = \sum_{i=m}^{\infty} \alpha_i e_{ki}, \tag{3.5}$$

com $k < n \leq m$, $\alpha_m \in F^*$ e $\alpha_i \in F$ para todo $i > m$. Sejam $z = \sum\limits_{i=m}^{\infty} \alpha_i e_{ni}$ e $t = t_{kn}(1)$. Mostremos que $z + x = tzt^{-1}$. Sejam $i \leq j$. Se $i < k$, então

$$(tzt^{-1})_{ij} = \sum_{i \leq p \leq r \leq j} t_{ip} z_{pr} \bar{t}_{rj} = \sum_{i \leq r \leq j} z_{ir} \bar{t}_{rj} = 0.$$

Analogamente, $(tzt^{-1})_{kj} = 0$ para $j < n$. Para $i = k$ e $j \geq n$, temos

$$(tzt^{-1})_{kj} = \sum_{k \leq p \leq r \leq j} t_{kp} z_{pr} \bar{t}_{rj} = \sum_{k \leq r \leq j} z_{kr} \bar{t}_{rj} + t_{kn} \left(\sum_{n \leq r \leq j} z_{nr} \bar{t}_{rj} \right) = 0 + 1 \cdot z_{nj} \bar{t}_{jj} = z_{nj} = x_{kj}.$$

Para $k < i$, temos

$$(tzt^{-1})_{ij} = \sum_{i \le p \le r \le j} t_{ip} z_{pr} \bar{t}_{rj} = \sum_{i \le r \le j} z_{ir} \bar{t}_{rj} = z_{ij} \bar{t}_{jj} = z_{ij}.$$

Logo, $z + x = tzt^{-1}$. Assim, $\phi(z + x) = \phi(tzt^{-1})$. Como z é da forma (3.3) ou (3.4), então $\phi(z) = 0$ e, portanto, $\phi(x) = \phi(z) + \phi(x) = \phi(t)\phi(z)\phi(t^{-1}) = 0$.

Dado $y \in \mathcal{R}_\infty^{nn}(F)$, podemos escrever $y = \sum_{i=1}^n x_i$, onde x_n é da forma (3.3) ou (3.4) e, para $1 \le i < n$, x_i é da forma (3.5), consequentemente, $\phi(y) = 0$. Logo, $\phi(\mathcal{R}_\infty^{nn}(F)) = \{0\}$. □

Proposição 3.2.2. *Se $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ é um endomorfismo sobrejetor, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\phi = \psi \mathcal{U} p_k$, sendo ψ um endomorfismo sobrejetor de $\mathcal{T}_\infty(F)$ que leva matrizes não inversíveis em matrizes não inversíveis.*

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em etapas.

(1) Existe uma aplicação $\mu : \mathbb{N}^* \to 2^{\mathbb{N}^*}$ tal que $\phi(\alpha e_{nn})_{kk} = 0$ para todo $k \notin \mu(n)$, para qualquer $\alpha \in F^*$, onde $2^{\mathbb{N}^*}$ é o conjunto das partes de $\mathbb{N}^*$.

Seja $\alpha \in F^*$. Vamos considerar $\mu_\alpha : \mathbb{N}^* \to 2^{\mathbb{N}^*}$ definida por $\mu_\alpha(n) = \{k \in \mathbb{N}^* : \phi(\alpha e_{nn})_{kk} \neq 0\}$. Note que $\phi(\alpha e_{nn}) = \phi(\alpha e_{nn})\phi(e_{nn})$, sendo assim, $\mu_\alpha(n) \subset \mu_1(n)$, para todo $\alpha \in F^*$. Portanto, μ_1 é aplicação que estamos procurando. Vamos denotar $\mu = \mu_1$.

(2) $\mu(n) \cap \mu(m) = \emptyset$ se $n \neq m$.

Se $n \neq m$, então $e_{nn} e_{mm} = 0$ e, consequentemente,

$$0 = (\phi(e_{nn})\phi(e_{mm}))_{kk} = \phi(e_{nn})_{kk} \phi(e_{mm})_{kk}$$

para todo $k \in \mathbb{N}^*$. Logo, $\mu(n) \cap \mu(m) = \emptyset$.

(3) Para quaisquer $d \in \mathcal{D}_\infty(F)$ e $n \in \mathbb{N}^*$, temos $\phi(d)_{kk} = \phi(d_{nn} e_{nn})_{kk}$ para todo $k \in \mu(n)$.

Como $e_{nn}(d - d_{nn} e_{nn}) = 0$, então $\phi(e_{nn})(\phi(d) - \phi(d_{nn} e_{nn})) = 0$. Seja $k \in \mu(n)$. Temos que $0 = (\phi(e_{nn})(\phi(d) - \phi(d_{nn} e_{nn})))_{kk} = \phi(e_{nn})_{kk}(\phi(d) - \phi(d_{nn} e_{nn}))_{kk}$ e, portanto, $(\phi(d) - \phi(d_{nn} e_{nn}))_{kk} = 0$, ou seja, $\phi(d)_{kk} - \phi(d_{nn} e_{nn})_{kk} = 0$. Logo, $\phi(d)_{kk} = \phi(d_{nn} e_{nn})_{kk}$.

(4) Para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mu(n)| \le 1$.

Vamos supor que para algum $n \in \mathbb{N}^*$ existam $k_1, k_2 \in \mu(n)$ tais que $k_1 < k_2$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que não existe $k \in \mu(n)$ tal que $k_1 < k < k_2$. Como e_{nn} é idempotente, pelo Lema 3.1.5 existe $t \in T_\infty(F)$ tal que $t^{-1}\phi(e_{nn})t$ é uma matriz diagonal. Tomemos $\phi' = Inn_t \phi$. Se $\alpha \in F$, então $\alpha e_{nn} = (\alpha e_\infty) e_{nn}$. Pela Proposição 3.1.4, $\alpha e_\infty \in Z(\mathcal{T}_\infty(F))$, logo $\phi'(\alpha e_\infty) \in Z(\mathcal{T}_\infty(F))$. Portanto, $\phi'(\alpha e_{nn}) \in \mathcal{D}_\infty(F)$, em particular,

$$\phi'(\alpha e_{nn})_{k_1k_2} = 0 \tag{3.6}$$

para todo $\alpha \in F$. Dado $m \neq n$, temos que $(\alpha e_{mm})e_{nn} = 0$ para todo $\alpha \in F$ e, portanto, $\phi'(\alpha e_{mm})\phi'(e_{nn}) = 0$. Logo

$$0 = (\phi'(\alpha e_{mm})\phi'(e_{nn}))_{k_1k_2} = \sum_{k_1 \leq r \leq k_2} \phi'(\alpha e_{mm})_{k_1r}\phi'(e_{nn})_{rk_2} = \phi'(\alpha e_{mm})_{k_1k_2}\phi'(e_{nn})_{k_2k_2}.$$

Como $k_2 \in \mu(n)$, $\phi'(e_{nn})_{k_2k_2} = \bar{t}_{k_2k_2}\phi(e_{nn})_{k_2k_2}t_{k_2k_2} \neq 0$. Portanto,

$$\phi'(\alpha e_{mm})_{k_1k_2} = 0, \tag{3.7}$$

para todo $m \neq n$. Sejam $k, l \in \mathbb{N}^*$ com $k < l$. Se $l \neq n$, então $\alpha e_{kl}e_{nn} = 0$. Analogamente ao que acabamos de mostrar, temos $\phi'(\alpha e_{kl})_{k_1k_2} = 0$. Se $l = n$, então $k \neq n$. Assim, $e_{nn}(\alpha e_{kl}) = 0$ e, portanto,

$$0 = (\phi'(e_{nn})\phi'(\alpha e_{kl}))_{k_1k_2} = \sum_{k_1 \leq r \leq k_2} \phi'(e_{nn})_{k_1r}\phi'(\alpha e_{kl})_{rk_2} = \phi'(e_{nn})_{k_1k_1}\phi'(\alpha e_{kl})_{k_1k_2}.$$

Como $k_1 \in \mu(n)$, então

$$\phi'(\alpha e_{kl})_{k_1k_2} = 0, \tag{3.8}$$

para quaisquer $k < l$. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ e escrevamos $x = x_a + x_b + x_c$, onde x_a, x_b e x_c são as matrizes

$$\begin{array}{cc} & (k_2-k_1+1)\text{ - diagonal} \\ \begin{array}{c} \\ \\ n+1 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & a & & \ddots & & 0 & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & 0 & & & \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} & \\ \begin{array}{c} \\ \\ n \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & b & & & \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{cc} & (k_2-k_1)\text{ - diagonal} \\ \begin{array}{c} \\ \\ n+1 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} & & 0 & & & & \\ & 0 & & \ddots & & c & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & 0 & & & \end{array}\right] \end{array}$$

respectivamente. Note que $x_be_{nn} = 0$ e, consequentemente,

$$0 = (\phi'(x_b)\phi'(e_{nn}))_{k_1k_2} = \sum_{k_1 \leq r \leq k_2} \phi'(x_b)_{k_1r}\phi'(e_{nn})_{rk_2} = \phi'(x_b)_{k_1k_2}\phi'(e_{nn})_{k_2k_2}.$$

Como $\phi'(e_{nn})_{k_2k_2} \neq 0$, então $\phi'(x_b)_{k_1k_2} = 0$. Observe que $(x_c)_{ij} = 0$ quando $j - i \leq k_2 - k_1$. Portanto, $e_\infty + x_c \in UT_\infty^{k_2-k_1}(F)$. Pelo Lema 2.2.1, $\phi'(e_\infty + x_c) \in UT_\infty^{k_2-k_1}(F)$. Como

$\phi'(e_\infty) = e_\infty$, então $\phi'(x_c)_{ij} = 0$ se $0 < j - i \leq k_2 - k_1$. Logo, $\phi'(x_c)_{k_1 k_2} = 0$. Note que

$$x_a = \sum_{i=1}^{n} \sum_{0 \leq j-i \leq k_2 - k_1} x_{ij} e_{ij}.$$

Portanto,

$$\phi'(x_a) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{0 \leq j-i \leq k_2 - k_1} \phi'(x_{ij} e_{ij}).$$

Segue de (3.6), (3.7) e (3.8) que $\phi'(x_{ij}e_{ij})_{k_1 k_2} = 0$ para quaisquer $i \leq j$. Portanto, $\phi'(x_a)_{k_1 k_2} = 0$ e, portanto, $\phi'(x)_{k_1 k_2} = 0$. Como x é um elemento arbitrário de $\mathcal{T}_\infty(F)$ e ϕ' é sobrejetor, temos uma contradição. Logo, $|\mu(n)| \leq 1$.

De agora em diante, se $\mu(n) = \{k\}$, vamos algumas vezes escrever $\mu(n) = k$.

(5) Se $\mu(n), \mu(m) \neq \emptyset$ e $n < m$, então

$$\phi(\alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{\min\{\mu(n),\mu(m)\},\max\{\mu(n),\mu(m)\}}(F), \tag{3.9}$$

para qualquer que seja $\alpha \in F$. Além disso, existe $\alpha \in F$ tal que $\phi(\alpha e_{nm}) \neq 0$.

É fácil ver que $e_{nn} + \alpha e_{nm}$ e $e_{mm} + \alpha e_{nm}$ são idempotentes. Como $\phi(\alpha e_{nm}) \in \mathcal{N}_\infty(F)$, pelo passo (4) e pela Proposição 3.1.6 podemos afirmar que $\phi(e_{nn}), \phi(e_{nn} + \alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(n)\mu(n)}(F)$, e que $\phi(e_{mm}), \phi(e_{mm} + \alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(m)\mu(m)}(F)$. Portanto, $\phi(\alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{\min\{\mu(n),\mu(m)\},\max\{\mu(n),\mu(m)\}}(F)$.

Vamos mostrar que existe $\alpha \in F$ tal que $\phi(\alpha e_{nm}) \neq 0$. Suponhamos que $\mu(n) < \mu(m)$ e seja $l = \max\{m, \mu(m)\}$. Como $m, \mu(m) > 1$, então $l > 1$. Mostremos que existe $u \in T_\infty(F)$ tal que $Inn_u \phi(e_{ii}) \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Consideremos $p \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $\mu(p) > 1$ (que existe pelo passo (2)) e $\mu(p)$ é o mínimo do conjunto $\{\mu(1), \ldots, \mu(l)\} \backslash \{1\}$. Seja

$$u_1 = e_\infty + \sum_{i=1}^{\mu(p)-1} \phi(e_{pp})_{i\mu(p)} e_{i\mu(p)} \in V_\infty^{\mu(p)}(F).$$

Mostremos que

$$u_1^{-1} \phi(e_{pp}) u_1 = \sum_{i=\mu(p)}^{\infty} \phi(e_{pp})_{\mu(p)i} e_{\mu(p)i} \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(p)}(F).$$

Como $(u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1)_{ii} \neq 0$ se, e somente, se $i = \mu(p)$, $(u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1)_{\mu(p)\mu(p)} = 1$ e $u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1$ é uma matriz idempotente, pela Proposição 3.1.6, temos

$$u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1 = \left(\begin{array}{l|c|c} 0_{(\mu(p)-1)\times(\mu(p)-1)} & y & yz \\ \hline 0 & 1 & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Para $i < \mu(p)$, temos

$$\begin{aligned}(u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1)_{i\mu(p)} &= \sum_{i \leq r_1 \leq r_2 \leq \mu(p)} (\overline{u}_1)_{ir_1}\phi(e_{pp})_{r_1r_2}(u_1)_{r_2\mu(p)} \\ &= \sum_{i \leq r_2 \leq \mu(p)} \phi(e_{pp})_{ir_2}(u_1)_{r_2\mu(p)} + (\overline{u}_1)_{i\mu(p)} = \phi(e_{pp})_{i\mu(p)} + (\overline{u}_1)_{i\mu(p)} \\ &= \phi(e_{pp})_{i\mu(p)} - \phi(e_{pp})_{i\mu(p)} = 0,\end{aligned}$$

uma vez que $\phi(e_{pp}) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(p)\mu(p)}(F)$. Portanto $y = 0$ e, consequentemente, $yz = 0$. Logo, $u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1 \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(p)}(F)$. Além disso, para $j > \mu(p)$, temos

$$\begin{aligned}(u_1^{-1}\phi(e_{pp})u_1)_{\mu(p)j} &= \sum_{\mu(p) \leq r_1 \leq r_2 \leq j} (\overline{u}_1)_{\mu(p)r_1}\phi(e_{pp})_{r_1r_2}(u_1)_{r_2j} = \sum_{\mu(p) \leq r_1 \leq j} (\overline{u}_1)_{\mu(p)r_1}\phi(e_{pp})_{r_1j} \\ &= \phi(e_{pp})_{\mu(p)j},\end{aligned}$$

pois $(\overline{u}_1)_{\mu(p)r_1} = 0$ se $r_1 > \mu(p)$. Seja $\mu(q) = \max\{\mu(i) : i = 1, \ldots l\}$. Vamos supor por indução que exista $\tilde{u} \in T_\infty(F)$ tal que para algum $k_1 \in \{1, 2, \ldots, l\}$ com $\mu(p) \leq \mu(k_1) \leq \mu(q)$, tenhamos $Inn_{\tilde{u}}\phi(e_{ii}) \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $\mu(p) \leq \mu(i) \leq \mu(k_1)$. Consideremos $\phi' = Inn_{\tilde{u}}\phi$. Seja $k_2 \in \{1, 2, \ldots, l\}$ tal que $\mu(k_2)$ é o mínimo do conjunto $\bigcup_{i=1}^{l} \mu(i) \backslash \{\mu(p), \ldots, \mu(k_1)\}$ e seja

$$\hat{u} = e_\infty + \sum_{i=1}^{\mu(k_2)-1} \phi(e_{k_2k_2})_{i\mu(k_2)}e_{i\mu(k_2)}.$$

É possível verificar que $\hat{u}^{-1}\phi'(e_{k_2k_2})\hat{u} \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(k_2)}(F)$. Além disso, $\hat{u}^{-1}\phi'(e_{ii})\hat{u} \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$, para todo i com $\mu(p) \leq \mu(i) \leq \mu(k_1)$, pois se $s < \mu(i)$ e $s \leq j < \mu(k_2)$, temos

$$(\hat{u}^{-1}\phi'(e_{ii})\hat{u})_{sj} = \sum_{s \leq r_1 \leq r_2 \leq j} (\hat{u}^{-1})_{sr_1}\phi'(e_{ii})_{r_1r_2}\hat{u}_{r_2j} = \sum_{s \leq r_2 \leq j} \phi'(e_{ii})_{sr_2}\hat{u}_{r_2j} = 0,$$

pois pela hipótese de indução, $\phi'(e_{ii}) \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$. Para $j \geq \mu(k_2)$, temos

$$\begin{aligned}(\hat{u}^{-1}\phi'(e_{ii})\hat{u})_{sj} &= \sum_{s \leq r_1 \leq r_2 \leq j} (\hat{u}^{-1})_{sr_1}\phi'(e_{ii})_{r_1r_2}\hat{u}_{r_2j} \\ &= \sum_{s \leq r_2 \leq j} \phi'(e_{ii})_{sr_2}\hat{u}_{r_2j} + (\hat{u}^{-1})_{s\mu(k_2)}\left(\sum_{\mu(k_2) \leq r_2 \leq j} \phi'(e_{ii})_{\mu(k_2)r_2}\hat{u}_{r_2j}\right) \\ &= 0 + (\hat{u}^{-1})_{s\mu(k_2)}0 = 0.\end{aligned}$$

Portanto, existe $u \in T_\infty(F)$ tal que $Inn_u\phi(e_{ii}) \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$ para todo $i \leq l$. Consideremos $\phi'' = Inn_u\phi$.

Mostremos que existe $v \in T_\infty(F)$ tal que $Inn_v\phi''(e_{ii}) = e_{\mu(i)\mu(i)}$ para todo $i \leq l$. Para o mesmo p dado acima, tomemos

$$v_1 = e_\infty - \sum_{j=\mu(p)+1}^{\infty} \phi''(e_{pp})_{\mu(p)j} e_{\mu(p)j}.$$

É possível mostrar que $v_1^{-1}\phi''(e_{pp})v_1 = e_{\mu(p)\mu(p)}$. Procedendo analogamente ao que fizemos para encontrar a matriz u acima, mostra-se que existe tal matriz $v \in T_\infty(F)$. Se $\mu(n) > \mu(m)$ podemos, de maneira análoga, encontrar matrizes $u, v \in T_\infty(F)$ tais que $Inn_u\phi(e_{ii}) \in \mathcal{H}_\infty^{\mu(i)}(F)$ e $Inn_v\phi''(e_{ii}) = e_{\mu(i)\mu(i)}$ para todo $i \leq \max\{m, \mu(n)\}$.

Seja $\tilde{\phi} = Inn_v\phi''$ e seja $l = \max\{n, m, \mu(n), \mu(m)\}$. Provemos que, para cada $\alpha \in F$, existe $\beta \in F$ tal que $\tilde{\phi}(\alpha e_{ij}) = \beta e_{\mu(i)\mu(j)}$ ou $\beta e_{\mu(j)\mu(i)}$ para todo $i < j \leq l$. Note que $e_{ii} + \alpha e_{ij}$ e $e_{jj} + \alpha e_{ij}$ são idempotentes. Assim, $\tilde{\phi}(e_{ii} + \alpha e_{ij})$ e $\tilde{\phi}(e_{jj} + \alpha e_{ij})$ também são idempotentes. Considerando $y = \tilde{\phi}(\alpha e_{ij})$ temos

$$e_{\mu(i)\mu(i)} + ye_{\mu(i)\mu(i)} + e_{\mu(i)\mu(i)}y + y^2 = e_{\mu(i)\mu(i)} + y$$

e

$$e_{\mu(j)\mu(j)} + ye_{\mu(j)\mu(j)} + e_{\mu(j)\mu(j)}y + y^2 = e_{\mu(j)\mu(j)} + y.$$

Logo

$$ye_{\mu(i)\mu(i)} + e_{\mu(i)\mu(i)}y = ye_{\mu(j)\mu(j)} + e_{\mu(j)\mu(j)}y. \tag{3.10}$$

Note que $ye_{\mu(i)\mu(i)} + e_{\mu(i)\mu(i)}y$ contém entradas não nulas apenas na linha $\mu(i)$ e na coluna $\mu(i)$, e a matriz $ye_{\mu(j)\mu(j)} + e_{\mu(j)\mu(j)}y$ contém entradas não nulas apenas na linha $\mu(j)$ e na coluna $\mu(j)$. Suponhamos que $\mu(i) < \mu(j)$, assim, pela igualdade (3.10), podemos concluir que

$$y_{k\mu(i)} = 0 \text{ para todo } k \leq \mu(i) \text{ e } y_{\mu(i)k} = 0 \text{ para todo } k \neq \mu(j). \tag{3.11}$$

Como $y = \tilde{\phi}(\alpha e_{ij})$ com $i < j$, então pela Proposição 3.1.3, $y \in \mathcal{N}_\infty(F)$. Pela Proposição 3.1.6, temos

$$\tilde{\phi}(e_{ii} + \alpha e_{ij}) = e_{\mu(i)\mu(i)} + y = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{(\mu(i)-1)\times(\mu(i)-1)} & w & wz \\ \hline 0 & 1 & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(i)\mu(i)}(F).$$

Portanto,

$$y = \left(\begin{array}{c|c|c} 0_{(\mu(i)-1)\times(\mu(i)-1)} & w & wz \\ \hline 0 & 0 & z \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(i)\mu(i)}(F).$$

Por (3.11), w é uma matriz nula e, portanto, wz também é uma matriz nula. Novamente por (3.11), podemos concluir que a única entrada não nula possível de z é $z_{\mu(i)\mu(j)}$ e, consequentemente, $y = \tilde{\phi}(\alpha e_{ij}) = \beta e_{\mu(i)\mu(j)}$ para algum $\beta \in F$. Agora, suponhamos que $\mu(i) > \mu(j)$. Pela igualdade (3.10) podemos concluir de forma análoga ao caso $\mu(i) < \mu(j)$ que $y = \tilde{\phi}(\alpha e_{ij}) = \beta e_{\mu(j)\mu(i)}$ para algum $\beta \in F$. Portanto, dado $\alpha \in F$ e $1 \leq i < j \leq l$, temos

$$\tilde{\phi}(\alpha e_{ij}) = \beta e_{\min\{\mu(i),\mu(j)\},\max\{\mu(i),\mu(j)\}} \text{ para algum } \beta \in F. \tag{3.12}$$

Seja $l' = \min\{\mu(n), \mu(m)\}$ e $l'' = \max\{\mu(n), \mu(m)\}$. Suponhamos que $\phi(\alpha e_{nm})_{l'l''} = 0$ para todo $\alpha \in F$. Note que $\tilde{\phi}(\alpha e_{nm})_{l'l''} = 0$, pois dado $t = vu$, temos

$$\tilde{\phi}(\alpha e_{nm}) = (t\phi(\alpha e_{nm})t^{-1})_{l'l''} = \sum_{l' \leq r_1 \leq r_2 l''} t_{l'r_1}\phi(\alpha e_{nm})_{r_1 r_2}\bar{t}_{r_2 l''} = t_{l'l'}\phi(\alpha e_{nm})_{l'l''}\bar{t}_{l''l''} = 0,$$

pois por (3.9), $\phi(\alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{l'l''}(F)$. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ e escrevamos $x = x_a + x_b + x_c$ onde x_a, x_b e x_c são

$$\begin{array}{cc} & (l-l'+1)\text{ - diagonal} \\ \begin{array}{c} \\ \\ l'+1 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & & & & \\ & a & & \ddots & & 0 & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & 0 & & & \end{array}\right] \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \\ \\ l' \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & b & & & \end{array}\right] \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} & (\ \ l-l'\ \ )\text{ - diagonal} \\ \begin{array}{c} \\ \\ l'+1 \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} & & & 0 & & & & \\ & 0 & & \ddots & & c & & \\ 0 & 0 & & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots \\ & & & & 0 & & & \end{array}\right] \end{array}$$

respectivamente. De forma análoga ao que fizemos no passo (4), temos que $\tilde{\phi}(x_b)_{l'l''} = 0$, $\tilde{\phi}(x_c)_{l'l''} = 0$. Portanto, $\tilde{\phi}(x)_{l'l''} = \tilde{\phi}(x_a)_{l'l''}$. Como $x_a = \sum_{1 \leq i \leq l'} \sum_{i \leq j \leq l-l'} x_{ij}e_{ij}$, então por (3.12) temos

$$\tilde{\phi}(x_a) = \sum_{1 \leq i \leq l'} \sum_{i \leq j \leq l-l'} \tilde{\phi}(x_{ij}e_{ij}) = \sum_{1 \leq i \leq l'} \sum_{i \leq j \leq l-l'} \gamma_{ij} e_{\min\{\mu(i),\mu(j)\},\max\{\mu(i),\mu(j)\}},$$

com $\gamma_{ij} \in F$. Logo, $\tilde{\phi}(x_a)_{l'l''} = 0$. Como x é um elemento arbitrário de $\mathcal{T}_\infty(F)$ e $\tilde{\phi}$ é sobrejetor, temos uma contradição. Logo, $\phi(\alpha e_{nm})_{\min\{\mu(n),\mu(m)\},\max\{\mu(n),\mu(m)\}} \neq 0$ para algum $\alpha \in F$.

(6) Se $n < m$ e $\mu(n), \mu(m) \neq \emptyset$, então $\mu(n) < \mu(m)$.

Sabemos pelo passo (2) que $\mu(n) \neq \mu(m)$. Suponhamos que $\mu(n) > \mu(m)$. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ e sejam $d \in \mathcal{D}_\infty(F)$ e $a \in \mathcal{N}_\infty(F)$ tais que $x = d + a$. Pela Proposição 3.1.3, $\phi(a) \in \mathcal{N}_\infty(F)$. Sendo assim, $\phi(x)_{ii} = \phi(d)_{ii}$ para todo $i \geq 1$. Pelo passo (2) podemos garantir que existe $k > m > n$ de forma que $\mu(k) > \mu(n) > \mu(m)$. Seja $t = t_{mk}(1)$. É fácil mostrar que para qualquer $\alpha \in F$, $t^{-1}(\alpha e_{nm})t = \alpha e_{nm} + \alpha e_{nk}$. O passo (5) nos garante que podemos escolher $\alpha \in F$ tal que $\phi(\alpha e_{nk})_{\mu(n)\mu(k)} \neq 0$. Agora, como $\phi(t^{-1}\alpha e_{nm} t) = \phi(\alpha e_{nm} + \alpha e_{nk})$, então $\phi(\alpha e_{nk}) = \phi(t)^{-1}\phi(\alpha e_{nm})\phi(t) - \phi(\alpha e_{nm})$. Como $\phi(\alpha e_{nm}) \in \mathcal{R}_\infty^{\mu(m)\mu(n)}(F)$, pelo passo (5), então

$$\phi(\alpha e_{nk})_{\mu(n)\mu(k)} = \sum_{\mu(n)\leq r\leq s\leq \mu(k)} \overline{\phi(t)}_{\mu(n)r}\phi(\alpha e_{nm})_{rs}\phi(t)_{s\mu(k)} - \phi(\alpha e_{nm})_{\mu(n)\mu(k)} = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto $\mu(n) < \mu(m)$.

(7) Se $\mu(n) = \emptyset$, então $\mu(k) = \emptyset$ para todo $k < n$.

Suponhamos que exista $m < n$ tal que $\mu(m) \neq \emptyset$. Pelo passo (2), existe $p > n > m$ tal que $\mu(p) > \mu(m)$. Como $\mu(m), \mu(p) \neq \emptyset$, pelo passo (5) existe $\alpha \in F^*$ tal que $\phi(\alpha e_{mp}) \neq 0$. Como $m < n < p$, então $\alpha e_{mp} \in \mathcal{R}_\infty^{nn}(F)$. Note que $\phi(e_{nn}) = 0$; de fato, como $\mu(n) = \emptyset$, então $\phi(e_{nn})_{kk} = 0$ para todo $k \geq 1$. Além disso, como $\phi(e_{nn})$ é idempotente, existe $t \in T_\infty(F)$ tal que $t^{-1}\phi(e_{nn})t$ é uma matriz diagonal, pelo Lema 3.1.5. Mas, para todo $i \geq 1$, $(t^{-1}\phi(e_{nn})t)_{ii} = (t^{-1})_{ii}\phi(e_{nn})_{ii}t_{ii} = 0$ e, portanto, $t^{-1}\phi(e_{nn})t = 0$. Logo, $\phi(e_{nn}) = 0$. Pelo Lema 3.2.1, $\phi(\mathcal{R}_\infty^{nn}(F)) = \{0\}$, o que é uma contradição.

(8) Existe um endomorfismo sobrejetor $\psi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ de forma que $\phi = \psi\mathcal{U}p_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Além disso, ψ leva matrizes não inversíveis em matrizes não inversíveis.

Suponhamos, primeiramente, que $\mu(n) \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}^*$. Mostremos que, neste caso, ϕ leva matriz não inversível em matriz não inversível. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ uma matriz não inversível e sejam $d \in \mathcal{D}_\infty(F)$ e $a \in \mathcal{N}_\infty(F)$ tais que $x = d+a$. Como $\phi(a) \in \mathcal{N}_\infty(F)$, então $\phi(x)_{ii} = \phi(d)_{ii}$ para todo $i \in \mathbb{N}^*$. Uma vez que x é uma matriz não inversível, pela Proposição 1.1.1 existe $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_{nn} = 0$. Pelo passo (3), $\phi(d)_{kk} = \phi(d_{nn}e_{nn})_{kk}$ para todo $k \in \mu(n)$. Logo, como $d_{nn} = x_{nn} = 0$, então $\phi(x)_{kk} = \phi(d)_{kk} = \phi(0e_{nn})_{kk} = 0$. Pela Proposição 1.1.1 segue que $\phi(x)$ é não inversível. Portanto, neste caso, basta tomar $\psi = \phi$ e $k = 0$.

Suponhamos, agora, que exista $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mu(n) = \emptyset$. Seja $m \in \mathbb{N}^*$ tal que $\mu(m) \neq \emptyset$. Pelo passo (7), temos que $n < m$. Seja $k = \max\{l \in \mathbb{N}^* : \mu(l) = \emptyset\}$. Considere $\psi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ definida da seguinte forma: $\psi(v) = \phi(u)$, onde $u \in \mathcal{T}_\infty(F)$ é tal que $\mathcal{U}p_k(u) = v$. Verifiquemos inicialmente que ψ está bem definida. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{T}_\infty(F)$

tais que $\mathcal{U}p_k(u_1) = \mathcal{U}p_k(u_2)$. Então $(u_1)_{ij} = (u_2)_{ij}$ se $j \geq i \geq k+1$. Consideremos $u \in \mathcal{T}_\infty(F)$ tal que $u_{ij} = 0$ para $i \leq k$ e $u_{ij} = (u_1)_{ij} = (u_2)_{ij}$ para todo $i \geq k+1$. Podemos escrever $u_1 = u + \sum_{1 \leq p \leq k} h_p$ com $h_p \in \mathcal{H}^p_\infty(F)$ e $(h_p)_{pj} = (u_1)_{pj}$ para todo $j \geq p$. Note que $h_p \in \mathcal{R}^{pp}_\infty(F)$. Como $\mu(i) = \emptyset$ para todo $i \leq k$, então pelo que mostramos no passo (7), $\phi(e_{ii}) = 0$ para todo $i \leq k$. Pelo Lema 3.2.1, $\phi(\mathcal{R}^{ii}_\infty(F)) = \{0\}$ para todo $i \leq k$. Portanto, $\phi(u_1) = \phi(u) + \sum_{1 \leq p \leq k} \phi(h_p) = \phi(u)$. Analogamente, temos que $\phi(u_2) = \phi(u)$. Logo, $\phi(u_1) = \phi(u_2)$.

Sejam $v_1, v_2 \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Uma vez que $\mathcal{U}p_k$ é sobrejetora, existem $u_1, u_2 \in \mathcal{T}_\infty(F)$ tais que $\mathcal{U}p_k(u_1) = v_1$ e $\mathcal{U}p_k(u_2) = v_2$. Como $\mathcal{U}p_k(u_1u_2) = \mathcal{U}p_k(u_1)\mathcal{U}p_k(u_2) = v_1v_2$, então $\psi(v_1v_2) = \phi(u_1u_2) = \phi(u_1)\phi(u_2) = \psi(v_1)\psi(v_2)$ e, portanto, ψ é homomorfismo. Seja $w \in \mathcal{T}_\infty(F)$. Consideremos $u \in \mathcal{T}_\infty(F)$ tal que $\phi(u) = w$. Se $\mathcal{U}p_k(u) = v$, então $\psi(v) = \phi(u) = w$. Portanto, ψ é sobrejetora. Assim, temos que ψ é um homomorfismo sobrejetor.

Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ uma matriz não inversível. Mostremos que $\psi(x)$ é não inversível. Consideremos $d \in \mathcal{D}_\infty(F)$ e $a \in \mathcal{N}_\infty(F)$ tais que $x = d + a$. Pela Proposição 1.1.1, existe $p \in \mathbb{N}^*$ tal que $x_{pp} = 0$. Como $x = d + a$, então $d_{pp} = 0$. Note que $d = \mathcal{U}p_k(u)$ para alguma matriz $u \in \mathcal{D}_\infty(F)$ e, portanto, $u_{p+k,p+k} = d_{pp} = 0$. Como $p + k > k$, então $\mu(p+k) \neq \emptyset$. Portanto, pelo passo (3), $\phi(u)_{ll} = \phi(u_{p+k,p+k}e_{p+k,p+k})_{ll}$ se $l \in \mu(p+k)$. Como $u_{p+k,p+k} = 0$, então $\phi(u)_{ll} = 0$. Assim, $\psi(x)_{ll} = \psi(d)_{ll} + \psi(a)_{ll} = \phi(u)_{ll} + 0 = 0$ e, consequentemente, $\psi(x)$ é uma matriz não inversível. Logo, ψ é um endomorfismo sobrejetor que leva matrizes não inversíveis em matrizes não inversíveis. □

A proposição acima nos garante que todo endomorfismo sobrejetor ϕ do anel $\mathcal{T}_\infty(F)$ é uma composição de dois homomorfismos sobrejetores ψ e $\mathcal{U}p_k$ com $\psi(T_\infty(F)) = T_\infty(F)$. Isso nos possibilita aplicar os resultados do Capítulo 2 para descrever os endomorfismos sobrejetores de $\mathcal{T}_\infty(F)$.

Teorema 3.2.3. *Se $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ é um endomorfismos sobrejetor, então existe $t \in T_\infty(F)$, $\sigma \in Aut(F), k, n \in \mathbb{N}$, um homomorfismo de grupos $f : (F^*)^n \to F^*$ tais que, para todo $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$,*

$$\begin{aligned}\phi(x) =& f((x_1)_{k+1,k+1}, \ldots, (x_1)_{k+n,k+n}) Inn_t \overline{\sigma} \mathcal{U}p_{k+n}(x_1) + \\ & f((x_2)_{k+1,k+1}, \ldots, (x_2)_{k+n,k+n}) Inn_t \overline{\sigma} \mathcal{U}p_{k+n}(x_2),\end{aligned}$$

onde $x_1 \in D_\infty(F)$ e $x_2 \in T_\infty(F)$ são tais que $(x_2)_{ij} = x_{ij}$ se $i < j$,

$$(x_1)_{ii} = \begin{cases} 1, & se\ x_{ii} = 0 \\ x_{ii} + \alpha_i, & se\ x_{ii} \neq 0 \end{cases} \quad e \quad (x_2)_{ii} = \begin{cases} -1, & se\ x_{ii} = 0 \\ -\alpha_i, & se\ x_{ii} \neq 0 \end{cases},$$

com $\alpha_i \in F^*$ tal que $\alpha_i \neq -x_{ii}$.

Demonstração. Pela proposição anterior existe $k \in \mathbb{N}$ e um endomorfismo sobrejetor $\psi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ tal que $\phi = \psi\mathcal{U}p_k$ e $\psi(T_\infty(F)) = T_\infty(F)$. Pelo Teorema 2.3.2, existem $t \in T_\infty(F)$, $\sigma \in Aut(F)$, $n \in \mathbb{N}$ e uma aplicação multiplicativa $f : (F^*)^n \to F^*$ tais que

$$\psi(y) = f(y_{11}, \ldots, y_{nn}) Inn_t \overline{\sigma} \mathcal{U}p_n(y),$$

para todo $y \in T_\infty(F)$. Dado $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$, podemos escrever $x = x_1 + x_2$ onde $x_1 \in D_\infty(F)$ e $x_2 \in T_\infty(F)$ são dados no enunciado. Portanto, $\phi(x) = \psi\mathcal{U}p_k(x_1 + x_2)$ $= \psi\mathcal{U}p_k(x_1) + \psi\mathcal{U}p_k(x_2)$. Logo,

$$\begin{aligned}\phi(x) =& f((x_1)_{k+1,k+1}, \ldots, (x_1)_{k+n,k+n}) Inn_t \overline{\sigma} \mathcal{U}p_{k+n}(x_1) + \\ & f((x_2)_{k+1,k+1}, \ldots, (x_2)_{k+n,k+n}) Inn_t \overline{\sigma} \mathcal{U}p_{k+n}(x_2).\end{aligned}$$

□

Corolário 3.2.4. *Se $\phi : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ é um automorfismo, então existem $t \in T_\infty(F)$ e $\sigma \in Aut(F)$ tais que*

$$\phi = Inn_t \overline{\sigma}.$$

Demonstração. Sabemos que $\phi(T_\infty(F)) = T_\infty(F)$. Seja $x \in \mathcal{T}_\infty(F)$ e sejam $x_1, x_2 \in T_\infty(F)$ como no Teorema 3.2.3. Como $x = x_1 + x_2$, então $\phi(x) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$. Pelo Corolário 2.4.3, existem $t \in T_\infty(F)$ e $\sigma \in Aut(F)$ tais que $\phi(x) = Inn_t\overline{\sigma}(x_1) + Inn_t\overline{\sigma}(x_2)$. Considere as extensões $Inn_t : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ e $\overline{\sigma} : \mathcal{T}_\infty(F) \to \mathcal{T}_\infty(F)$ ao anel $\mathcal{T}_\infty(F)$. Então $\phi(x) = Inn_t\overline{\sigma}(x_1 + x_2) = Inn_t\overline{\sigma}(x)$. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BERNKOPF, M. A history of infinite matrices. *Arch. Hist. Exact Sci*, 4 (1968), 308–358.

[2] GARCIA, A., AND LEQUAIN, Y. *Elementos de Álgebra*. IMPA, Rio de Janeiro, 2006.

[3] HOLUBOWSKI, W. Subgroups of unitriangular groups of infinite matrices. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 338 (2006), 137–154.

[4] SŁOWIK, R. The lower central series of subgroups of the Vershik-Kerov group. *Linear Algebra Appl.*, 436 (2012), 2299–2310.

[5] SŁOWIK, R. On one property of normal subgroups of $\mathrm{UT}_\infty(\mathrm{R})$. *Linear Algebra Appl.*, 437 (2012), 2300–2307.

[6] SŁOWIK, R. Bijective maps of infinite triangular and unitriangular matrices preserving commutators. *Linear Multilinear Algebra*, 61 (2013), 1028–1040.

[7] SŁOWIK, R. Epimorphisms of infinite triangular and unitriangular matrices. *Linear Algebra Appl.*, 462 (2014), 186–203.

[8] SŁOWIK, R. Maps on infinite triangular matrices preserving idempotents. *Linear Multilinear Algebra*, 62 (2014), 938–964.

[9] SŁOWIK, R. Epimorphisms of the ring of infinite triangular matrices. *Linear Multilinear Algebra*, 63 (2015), 1372–1378.