UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

ESTELA GARCIA ORGANISTA

Variedades Riemannianas Compactas e Homogêneas com Curvatura Estritamente Positiva

Maringá-PR

2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Variedades Riemannianas Compactas e Homogêneas com Curvatura Estritamente Positiva

ESTELA GARCIA ORGANISTA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka.

Maringá-PR

2018

ESTELA GARCIA ORGANISTA

Variedades Riemannianas Compactas e Homogêneas com Curvatura Estritamente Positiva

Dissertação de mestrado apresentada ao Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para a obtenção do Título de MESTRE em Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Diego Sebastián Ledesma
Universidade Estadual de Campinas

Prof. Dr. Josiney Alves de Souza
Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Norbil Leodan Córdova Neyra
Universidade Estadual de Maringá

Maringá-PR, 27 de fevereiro de 2018

"Por vezes, sentimos que aquilo que fazemos
não é, senão, uma gota de água no mar.
Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota."

Madre Teresa de Calcutá.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus.

Agradeço à minha família que acreditou em mim e me deu forças para seguir os estudos. Ao meu marido Juniormar, pelo companherismo, compreensão e apoio, demonstrados durante todos os dias.

Aos amigos de estudos, tanto de graduação, quanto do mestrado, aos quais compartilhamos não só o conhecimento acadêmico, mas também muitos momentos especias.

Agradeço à todos os professores que contribuíram para a minha formação. Especialmente, ao Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka, que me orientou desde o meu primeiro ano de graduação e foi fundamental para o meu crescimento acadêmico e para a realização deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES pelo incentivo financeiro oferecido durante os dois anos de mestrado.

Resumo

Neste trabalho são apresentadas algumas propriedades sobre variedades Riemannianas compactas e homogêneas. Os resultados estudados e desenvolvidos foram extraídos em sua maioria do artigo de Nolan R. Wallach, Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Annals of Mathematics, Vol. 96, pp.277-295, 1972. Ao longo do estudo é utilizado diversas ferramentas das teorias de variedades Riemannianas, álgebras de Lie e grupos de Lie. O objetivo deste trabalho é apresentar a classificação das variedade Riemannianas compactas e homogêneas de dimensão par que admitem curvatura estritamente positiva.

Palavras-chave: Variedades Riemannianas, álgebras de Lie, grupos de Lie, espaços homogêneos, curvatura seccional, curvatura estritamente positiva.

ABSTRACT

In this work we present some properties of compact homogeneous Riemannian manifolds. The results presented and developed here were extracted mostly from the paper of Nolan R. Wallach, Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Annals of Mathematics, Vol. 96, pp.277-295, 1972. Throughout the study is used several tools of the theory of Riemannian manifolds, Lie algebras and Lie groups. The objective of this work is to present the classification of compact homogeneous Riemannian manifolds of even dimension that admit strictly positive curvature.

Key-words: Riemannian manifolds, Lie algebras, Lie grupos, homogeneous spaces, sectional curvature, strictly positive curvature.

SUMÁRIO

Introdução

Os resultados desenvolvidos neste estudo foram extraídos em sua maioria do artigo de Nolan R. Wallach, Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive curvature. Annals of Mathematics, Vol. 96, pp.277-295, 1972.

O resultado principal deste trabalho apresenta uma classificação das variedades Riemannianas compactas e homogêneas de dimensão par que admitem curvatura estritamente positiva.

O capítulo 1 contém as definições necessárias para os capítulos posteriores, além de alguns resultados e exemplos sobre as teorias de geometria Riemanniana, álgebras de Lie e grupos de Lie.

No capítulo 2 são demonstrados dois teoremas importantes, o primeiro garante que todo campo de Killing em uma variedade Riemanniana possui um ponto de singularidade. O segundo teorema garante que o grupo de Lie $SU(2)$ é o único conexo, simplesmente conexo, com métrica invariante à esquerda que possui curvatura estritamente positiva.

O capítulo 3 é destinado ao estudo de uma conexão afim em um espaço homogêneo M. Em seguida é associada uma forma bilinear U sobre o espaço tangente $T_{\bar{e}}M$, a qual é relacionada com a curvatura seccional em $T_{\bar{e}}M$.

No capítulo 4, o principal resultado mostra, dentro de algumas hipóteses, que se $M = G/K$ é um espaço homogêneo de dimensão par, então G é simples e o posto de G coincide com o posto de K.

Por fim, no capítulo 5 é apresentada a classificação dos 9 tipos de variedades Riemannianas compactas e homogêneas com dimensão par que admitem curvatura estritamente positiva.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

1.1 Geometria Riemanniana

1.1.1 Variedades Diferenciáveis

Nesta seção será apresentado o conceito inicial de variedade diferenciável e de variedades Riemannianas, além de algumas definições e resultados da teoria, os quais são indispensáveis para o desenvolvimento dos próximos capítulos. As demonstrações desses resultados, assim como, outros detalhes sobre Geometria Riemanniana, podem ser encontrados em [4].

Definição 1.1. *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetoras $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α em M, tais que:*

1. $\bigcup\limits_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. *Para todo par α, β, com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, os conjuntos $x_\alpha^{-1}(W)$ e $X_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ são diferenciáveis.*
3. *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal em relação às condições (1) e (2).*
4. *M é Hausdorff e tem base enumerável.*

O par (U_α, x_α) com $p \in x_\alpha(U_\alpha)$, ou simplesmente x_α, é chamado de parametrização, ou também, sistema de coordenadas de M em p.

Em algumas bibliografias, a condição (4) não é exigida. Ao longo do texto, sempre será considerado que uma variedade M é Hausdorff e tem base enumerável, por isso, assumimos a condição (4) na definição acima.

Observe que isso faz sentido, pois toda variedade diferenciável M é, em particular, um espaço topológico. Basta definir os abertos A em M, como os conjuntos $A \subset M$, tais que $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é aberto em $\mathbb{R}^n$, para todo α. Desta forma, os conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos, as aplicações X_α e x_α^{-1} são contínuas. Logo, as parametrizações, $x_\alpha : U_\alpha \to x_\alpha(U_\alpha)$ são homeomorfismos.

Definição 1.2. *Sejam M_1^n e M_2^m variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M_1 \to M_2$ é diferenciável em $p \in M_1$, se dada uma parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$. A aplicação φ é diferenciável em um aberto de M_1, se φ é diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Decorre da condição (2) da Definição 1.1 que a diferenciabilidade de φ independe das parametrizações escolhidas.

A partir da Definição 1.2, concluímos que as aplicações x_α e x_α^{-1} são diferenciáveis. Ou seja, as parametrizações são difeomorfismos.

Definição 1.3. *Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é chamada de curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções definidas em M diferenciáveis em p. O vetor tangente à curva α em $t = 0$ é a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\alpha'(0)f = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}, \text{ com } f \in \mathcal{D}.$$

Um vetor tangente em p é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a M em p será indicado por T_pM.

Para cada $p \in M$, T_pM com as operações usuais de soma e produto por escalar é um espaço vetorial de dimensão n, o qual é chamado de espaço tangente em p. A escolha de uma parametrização $x : U \to M$ determina uma base associada $\{(\frac{\partial}{\partial x_1})_0, ..., (\frac{\partial}{\partial x_n})_0\}$ para T_pM, onde $(\frac{\partial}{\partial x_i})_0$ é o vetor tangente em p à curva coordenada $x_i \to x(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$.

Com essa noção de espaço tangente, pode-se estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Proposição 1.4. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis e seja $\varphi : M_1 \to M_2$ uma aplicação diferenciável. Para cada $p \in M_1$ e cada $v \in T_pM_1$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Considere $\beta = \varphi \circ \alpha$. A aplicação*

$d\varphi_p : T_pM_1 :\to T_{\varphi(p)}M_2$ dada por $d\varphi_p(v) = \beta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha de α.

Definição 1.5. *A aplicação linear $d\varphi_p$ dada pela Proposição 1.4, é chamada diferencial de φ em p.*

Teorema 1.6. *(Teorema da função inversa) Seja $\varphi : M_1 \to M_2$ diferenciável e seja $p \in M_1$ tal que $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é um isomorfismo. Então, φ é um difeomorfismo local em p.*

Definição 1.7. *Sejam M_1 e M_2 variedades diferenciáveis. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M_1 \to M_2$ é uma imersão se $d\varphi_p : T_pM_1 \to T_{\varphi(p)}M_2$ é injetora, para todo $p \in M_1$. Se, além disto, φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M_1) \subset M_2$, onde $\varphi(M_1)$ tem a topologia induzida por M_2, diz-se que φ é um mergulho.*

Definição 1.8. *Diz-se que M_1 é uma subvariedade de M_2 se $M_1 \subset M_2$ e a inclusão $i : M_1 \to M_2$ é um mergulho.*

Proposição 1.9. *Seja $\varphi : M_1 \to M_2$ uma imersão. Para todo $p \in M_1$, existe uma vizinhança $V \subset M_1$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \to M_2$ é um mergulho.*

A Proposição 1.9, mostra que toda imersão é localmente um mergulho, assim, na maior parte das questões locais de geometria diferenciável é indiferente trabalhar com imersões ou mergulhos.

Definição 1.10. *Sejam M, N variedades diferenciáveis, e $\varphi : M \to N$ uma aplicação diferenciável. Diz-se que φ é uma submersão no ponto $p \in M$ se a diferencial $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é sobrejetora. Se φ é uma submersão em todo ponto $p \in M$, diz-se simplesmente que φ é uma submersão.*

Teorema 1.11. *(Forma Local das Submersões) Seja $f : M^m \to N^n$ uma submersão em um ponto $p \in M$. Então, dada uma parametrização $\psi : V \subset \mathbb{R}^n \to \psi(V) \subset N$, com $f(p) \in V$, existe um difeomorfismo $\xi : V \times W \to U$, onde $U \subset M$ é um aberto contendo p, com $f(U) \subset V$, e $W \subset \mathbb{R}^{m-n}$ é um aberto, tais que $(\psi^{-1} \circ f \circ \xi)(x, y) = x \in \mathbb{R}^n$, para todo $(x, y) \in V \times W \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$.*

Note que o difeomorfismo $\xi : V \times W \subset \mathbb{R}^m \to \xi(V \times W)$ é uma parametrização de p em M. Uma demonstração da Forma Local das Submersões, pode ser encontrada em [9].

Dada uma variedade diferenciável M, a coleção dos espaços vetoriais que a cada ponto $p \in M$ associa seu espaço tangente, possui uma estrutura de variedade diferenciável. Esta nova variedade é chamada de fibrado tangente de M e denotada por TM, ou seja, $TM = \{(p, T_pM); p \in M\}$.

Definição 1.12. *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, X é uma aplicação de M no fibrado tangente TM. Diz-se que o campo X é diferenciável se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável.*

Considerando uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é possível escrever

$$X(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde cada $a_i : U \to \mathbb{R}$ é uma função em U e $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ é uma base associada a parametrização x. Neste contexto, X é diferenciável se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis, com $i = 1, ..., n$.

Seja $\mathcal{F} = \{f : M \to \mathbb{R};$ é função$\}$ e $\mathcal{D} = \{f : M \to \mathbb{R}; f$ é função diferenciável$\}$. Pode-se pensar em um campo de vetores como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, definida como:

$$(Xf)(p) = \sum_{i=1}^{n} a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Neste caso, X é diferenciável se, e somente se, $X : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, isto é, se $Xf \in \mathcal{D}$, para todo $f \in \mathcal{D}$.

Denote por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M. Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único $W \in \mathfrak{X}(M)$, tal que $W(f) = (XY - YX)f$, para todo $f \in \mathcal{D}$. Este campo W é chamado de colchete entre X e Y e é denotado por $[X, Y]$.

O colchete entre campos de vetores diferenciáveis possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.13. *Se $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{D}$, então:*

(a) $[X, Y] = -[Y, X]$ *(anticomutatividade),*

(b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ *(linearidade),*

(c) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ *(identidade de Jacobi),*

(d) $[fX,gY]=fg[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X$.

Teorema 1.14. *Seja X um campo diferenciável de vetores em uma variedade diferenciável M, e seja $p\in M$. Então, existem uma vizinhança $U\subset M$ de p, um intervalo $(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, e uma aplicação diferenciável $\varphi:(-\delta,\delta)\times U\to M$, tais que a curva $t\to\varphi(t,q)$, com $q\in U$ e $t\in(-\delta,\delta)$, é a única curva que satisfaz $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=X(\varphi(t,q))$ e $\varphi(0,q)=0$.*

Uma curva $\alpha:(-\delta,\delta)\to M$ que satisfaz as condições $\alpha'(t)=X(\alpha(t))$ e $\alpha(0)=q$ é chamada de trajetória do campo X, com ponto inicial q. É comum utilizar a notação $\varphi_t(q)=\varphi(t,q)$ e chamar $\varphi_t:U\to M$ de fluxo local de X.

1.1.2 Variedades Riemannianas

Definição 1.15. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle,\rangle_p$ em T_pM, que varia diferenciavelmente em M. Isto significa que se $x:U\to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p, com $x(x_1,...,x_n)=q\in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q)=dx(0,...,1,...,0)$, então $\langle\frac{\partial}{\partial x_i}(q),\frac{\partial}{\partial x_j}(q)\rangle_q=g_{ij}(x_1,...,x_n)$ é uma função diferenciável em U.*

Uma maneira equivalente de definir a diferenciabilidade da métrica Riemanniana é exigir que para todo par X e Y de campos de vetores diferenciáveis em uma vizinhança V de M, a função $\langle X,Y\rangle$ também seja diferenciável.

Definição 1.16. *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica Riemanniana é chamada de variedade Riemanniana.*

Um resultado interessante é que toda variedade diferenciável (como na Definição 1.1) admite uma métrica Riemanniana.

Definição 1.17. *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $f:M\to N$ é chamado uma isometria se:*

$$\langle u,v\rangle_p=\langle df_p(u),df_p(v)\rangle_{f(p)},$$

para todo $p\in M$ e $u,v\in T_pM$.

Proposição 1.18. *Seja $f : M^n \to N^{n+k}$ uma imersão. Se N tem uma estrutura Riemanniana, então f induz uma estrutura Riemanniana em M, por $\langle u, v\rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v)\rangle_{f(p)}$, com $u, v \in T_pM$.*

Diz-se que $f : M \to N$ é uma imersão isométrica quando f é uma imersão e a estrutura Riemanniana de M coincide com a estrutura induzida de N, como na Proposição acima.

Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e considere o produto $M_1 \times M_2$ com a estrutura diferenciável produto. Sejam $\pi_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \to M_2$ as projeções naturais. Então, defina

$$\langle u, v\rangle_{(p,q)} = \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v)\rangle_p + \langle d\pi_2(u), d\pi_2(v)\rangle_q,$$

para todo $(p, q) \in M_1 \times M_2, u, v \in T_{(p,q)}(M_1 \times M_2)$. Isto é realmente uma métrica Riemanniana, chamada de métrica produto. Neste caso, diz-se que $M_1 \times M_2$ é um produto Riemanniano.

Definição 1.19. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ que se indica por $(X, Y) \to \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}$.

Observação 1.20. *(a) Na verdade, $\nabla_X Y(p)$ depende só do valor $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p.*

Isso se deve ao fato da conexão afim ser uma noção local. Escolha um sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ em torno de p e escreva

$$X = \sum_{i=1}^{n} f_i X_i \text{ e } Y = \sum_{j=1}^{n} g_j X_j, \text{ onde } X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Desta forma, $\nabla_X Y = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i \nabla_{X_i} (\sum\limits_{j=1}^{n} g_j X_j) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} f_i g_j \nabla_{X_i} X_j + \sum\limits_{i,j=1}^{n} f_i X_i(g_j) X_j.$

Denote $\nabla_{X_i} X_j = \sum\limits_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$*. Assim,* Γ_{ij}^k *são funções diferenciáveis e*

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^{n} (\sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j \Gamma_{ij}^k + X(g_k)) X_k.$$

Isto mostra que $\nabla_X Y(p)$ *depende de* $f_i(p), g_k(p)$ *e das derivadas* $X(g_k)(p)$ *de* g_j *segundo* X*.*

(b) *A expressão acima determina uma maneira local para se definir conexões afins, pois para que* ∇ *satisfaça os três itens da Definição 1.19, é necessário e suficiente que*

$$\nabla_X Y = \sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^{n} f_i X_i(g_j) X_j,$$

para todo $p \in M$*.*

Proposição 1.21. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Então, existe uma correspondência que associa a um campo vetorial* V *ao longo da curva diferenciável* $c : I \to M$ *um outro campo vetorial* $\frac{DV}{dt}$ *ao longo de* c*, denominado derivada covariante de* V *ao longo de* c*, tal que:*

(a) $\frac{D}{dt}(V + W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$.

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt}$*, onde* W *é um campo de vetores ao longo de* c *e* f *é uma função diferenciável em* I*.*

(c) *Se* V *é induzido por um campo de vetores* $Y \in \mathfrak{X}(M)$*, isto é,* $V(t) = Y(c(t))$*, então* $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$*.*

Definição 1.22. *Seja* M *uma variedade diferenciável com uma conexão afim* ∇*. Um campo vetorial* V *ao longo de uma curva* $c : I \to M$ *é chamado paralelo quando* $\frac{DV}{dt} = 0$*, para todo* $t \in I$*.*

Definição 1.23. *Uma curva parametrizada* $\gamma : I \to M$ *é uma geodésica em* t_0 *se* $\frac{D}{dt}\frac{d\gamma}{dt} = 0$*, para* t_0*.* γ *é uma geodésica se* γ *é geodésica em* t_0*, para todo* $t_0 \in I$*.*

Definição 1.24. *Uma variedade Riemanniana* M *é completa (geodesicamente completa) se para todo* $p \in M$*, as geodésicas* $\gamma(t)$ *que começam em* p *estão definidas para todo* $t \in \mathbb{R}$*.*

Definição 1.25. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. A conexão é dita compatível com a métrica $\langle , \rangle$, quando para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, for satisfeito que $\langle P, P' \rangle$ =constante.*

Proposição 1.26. *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica Riemanniana $\langle , \rangle$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *A conexão é compatível com a métrica.*

2. *Para todos campos de vetores V, W ao longo da curva diferenciável c, vale que:*

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle \frac{DV}{dt}, W \rangle + \langle V, \frac{DW}{dt} \rangle.$$

3. *Para todos $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, tem-se $X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$.*

Definição 1.27. *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é dita simétrica quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X =, Y$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$.*

Teorema 1.28. *(Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M, existe uma única conexão afim ∇ em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.*

Definição 1.29. *A conexão dada pelo Teorema de Levi-Civita é chamada de conexão Riemanniana (ou de Levi-Civita) em M.*

O conceito de curvatura para variedades Riemannianas será muito importante para os próximos capítulos. Nesta parte, a referência [4], escolhe uma definição para a curvatura R, com sinal oposto ao que será introduzido aqui. Sendo assim, para mais detalhes sobre a curvatura, pode-se consultar outras bibliografias, como por exemplo, [8].

Definição 1.30. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ uma aplicação*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

com $Z \in \mathfrak{X}(M)$.

Definição 1.31. *O tensor curvatura* $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}$ *é definido por*

$$R(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W\rangle,$$

com $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$*.*

Proposição 1.32. *O tensor curvatura satisfaz as seguintes igualdades:*

(a) $R(W, X, Y, Z) = -R(X, W, Y, Z)$*.*

(b) $R(W, X, Y, Z) = -R(W, X, Z, Y)$*.*

(c) $R(W, X, Y, Z) = R(Y, Z, W, X)$*.*

(d) $R(W, X, Y, Z) + R(X, Y, W, Z) + R(Y, W, X, Z) = 0$*.*

Dado um espaço vetorial V, é indicado por $|x \wedge y|$ a expressão $\sqrt{|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2}$, que representa a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelos vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.33. *Seja* $\sigma \subset T_pM$ *um subespaço bi-dimensional e sejam* $x, y \in \sigma$ *vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x, y) = \frac{R(x, y, y, x)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$*.*

Definição 1.34. *Dados* $p \in M$ *e um subespaço bi-dimensional* $\sigma \subset T_pM$*, considere o número real* $K(x, y) = K(\sigma)$*, onde* $\{x, y\}$ *é uma base de* σ*.* $K(\sigma)$ *é chamado de curvatura seccional de* σ *em* p*.*

A curvatura seccional também é conhecida como curvatura Riemanniana. Além disso, se estiver claro no contexto, também é comum se referir a $K(\sigma)$ apenas como curvatura.

Definição 1.35. *Dados* $x = z_n$ *um vetor unitário em* T_pM *e* $\{z_1, ..., z_{n-1}\}$ *uma base ortonormal do hiperplano de* T_pM *ortogonal a* x*, define-se a curvatura de Ricci por*

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(x, z_i)z_i, x\rangle.$$

Sejam M_T, M variedades Riemannianas e $i : M_T \to M$ uma imersão isométrica. Localmente, i é um mergulho, assim $i(U)$ é uma subvariedade de M. Se U é uma vizinhança suficientemente pequena em M_T, tem-se que U está identificado com $i(U)$ em M e o vetor $v \in T_qM_T$ com $di_q(v) \in Ti(q)M$, para $q \in U$. Dado um campo diferenciável X em M_T, tem-se que X está identificado com um campo diferenciável de $i(U)$, assim é possível estender X a um campo diferenciável de M.

Para cada $p \in M_T$, o produto interno em T_pM decompõe T_pM na soma direta

$$T_pM = T_pM_T \oplus (T_pM_T)^{\perp}.$$

Se $v \in T_pM$, com $p \in M_T$, então $v = v^T + v^N$, onde $v^T \in T_pM_T$ e $v^N \in (T_pM_T)^{\perp}$. Denomina-se v^T a componente tangencial e v^N a componente normal de v.

A conexão Riemanniana de M será denotada aqui por $\tilde{\nabla}$. Se X e Y são campos locais em M_T e $\tilde{X}, \tilde{Y}$ são as extensões locais a M, define-se $\nabla_X Y = (\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^T$. Na verdade, $\nabla_X Y$ é a conexão Riemanniana de M_T.

Define-se também a aplicação $B : \mathfrak{X}(U) \times \mathfrak{X}(U) \to \mathfrak{X}(U)^{\perp}$ por

$$B(X,Y) = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \nabla_X Y.$$

B é bilinear, simétrica e $B(X,Y)(p)$ depende apenas de $X(p)$ e $Y(p)$.

Definição 1.36. *Seja $p \in M_T$ e $\eta \in (T_pM)^{\perp}$. A forma quadrática II_η definida em T_pM_T por $II_\eta(x) = \langle B(x,x), \eta \rangle$ é chamada de segunda forma fundamental de i em p segundo o vetor normal η.*

Definição 1.37. *Uma imersão isométrica $i : M_T \to M$ é geodésica em $p \in M$ se para todo $\eta \in (T_pM)^{\perp}$ a segunda forma fundamental II_η é identicamente nula em p. A imersão i é dita totalmente geodésica quando i é geodésica para todo $p \in M$.*

Observação 1.38. *Suponha que $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(M_T)$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M_T)$.*

Neste caso, tem-se que $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})^N = 0$, o que implica que $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_X Y$. Logo, $B(X,Y) = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{X}(M_T)$. Consequentemente, $II_\eta(x) = 0$, para todos $x \in T_pM_T$, $p \in M_T$.

Portanto, i é totalmente geodésica.

Teorema 1.39. *(Bonnet, Myers). Seja M uma variedade Riemanniana completa. Suponha que* *a curvatura de Ricci de M satisfaz*

$$Ric_p(v) \geq \frac{1}{r^2} > 0,$$

para todo $p \in M$ e todo $v \in T_pM, |v|= 1$. Então, M é compacta e o diâmetro $diam(M) \leq \pi r$.

1.2 Álgebras de Lie

Aqui será apresentado algumas definições e resultados sobre Álgebras de Lie. Este conceito será utilizado no decorrer dos próximos capítulos.

As demonstrações desses resultados, bem como, outros detalhes sobre a teoria, podem ser encontrados em [12].

Definição 1.40. *Uma álgebra de Lie é um espaço vetorial $\mathfrak{g}$, munido de um colchete, $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$, com as seguintes propriedades:*

1. *É bilinear.*

2. *É anti-simétrico, ou seja, $[X, X] = 0$ para todo $X \in \mathfrak{g}$ (o que implica que $[X, Y] = -[Y, X]$, para todo $X, Y \in \mathfrak{g}$ e é equivalente se o corpo dos escalares não é de característica dois).*

3. *Satisfaz a identidade de Jacobi, isto é, para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$,*

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

Definição 1.41. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ que é fechado pelo colchete, isto é, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, se $X, Y \in \mathfrak{h}$.*

Evidentemente, uma subálgebra $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie com a estrutura herdada de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.42. *Uma subálgebra de Lie $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ é um ideal, se $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, para todo $X \in \mathfrak{h}$ e $Y \in \mathfrak{g}$.*

Exemplo 1.43. *Os exemplos clássicos de álgebra de Lie:*

1. *$\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$: o espaço da matrizes quadradas de ordem n, com coeficientes no corpo $\mathbb{K}$. O colchete é dado por: $[X, Y] = XY - YX$.*

   Esta álgebra de Lie também corresponde a álgebra das transformações lineares de um espaço vetorial V, com $\dim V = n$. A qual será denotada por $\mathfrak{gl}(V)$.

2. *Álgebras abelianas, ou seja, $[X, Y] = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{g}$. Neste caso, à estrutura de álgebra de Lie (o colchete) não acrescenta nada à estrutura de espaço vetorial.*

   - *Toda álgebra $\mathfrak{g}$ de dimensão um é abeliana.*
   - *Outro exemplo de álgebra abeliana é o subespaço das matrizes diagonais em $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$.*

3. *Subálgebras de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$:*

   (a) $\mathfrak{so}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); X + X^t = 0\}$.

   (b) $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K}); tr(X) = 0\}$.

   (c) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(2n, \mathbb{K}); XJ + JX^t = 0\}$, *onde* $J = \begin{bmatrix} 0_{n\times n} & -1_{n\times n} \\ 1_{n\times n} & 0_{n\times n} \end{bmatrix}$.

   (d) $\mathfrak{so}(p, q, \mathbb{K}) = \{X \in \mathfrak{gl}(p + q, \mathbb{K}); XJ + JX^t = 0\}$, *onde* $J = \begin{bmatrix} -1_{p\times p} & 0 \\ 0 & 1_{q\times q} \end{bmatrix}$.

   (e) $\mathfrak{u}(n) = \{X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}); X + \bar{X}^t = 0\}$, *onde $\bar{X}$ denota a matriz conjugada. Note que esse conjunto não é subespaço vetorial de $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$. Mas $\mathfrak{u}(n)$ é álgebra de Lie sobre o corpo dos reais, isto é, quando $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n}, \mathbb{C})$ é visto como espaço vetorial sobre o corpo dos reais.*

   (f) $\mathfrak{su}(n) = \{X \in \mathfrak{u}(n); tr(X) = 0\}$.

Definição 1.44. *Seja V um espaço vetorial e $\mathfrak{gl}(V)$ a álgebra de Lie das transformações lineares de V. Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie sobre o mesmo corpo de escalares do espaço V. Uma representação de $\mathfrak{g}$ em V é um homomorfismo, $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$.*

Exemplo 1.45. *Para $X \in \mathfrak{g}$, considere a transformação linear $ad(X) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ dada por $ad(X)(Y) = [X, Y]$. A aplicação $ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$, que a cada $X \in \mathfrak{g}$, associa a transformação linear $ad(X)$, define uma representação de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. A aplicação ad é chamada de representação adjunta.*

Definição 1.46. *O centro de $\mathfrak{g}$ é definido como sendo o núcleo da representação adjunta e é denotado por $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$, ou seja, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g}; ad(X)(Y) = [X,Y] = 0,$ para todo $Y \in \mathfrak{g}\}$.*

Definição 1.47. *O centralizador de um subconjunto $A \subset \mathfrak{g}$ é definido por*

$$\mathfrak{z}(A) = \{Y \in \mathfrak{g}; \forall X \in A, [X,Y] = 0\}.$$

Veja que o centralizador de $\mathfrak{g}$ é o próprio centro de $\mathfrak{g}$, por isso a notação é consistente. Note ainda que o centralizador de um conjunto unitário $\{X\}$ é dado pelo $Ker(ad(X))$. Consequentemente, $\mathfrak{z}(A) = \bigcap_{X \in A} Ker(ad(X))$.

Definição 1.48. *Seja V o espaço vetorial de $\mathfrak{g}$ e ρ uma representação de $\mathfrak{g}$ em V. Os subespaços $W \subset V$ que satisfazem $\rho(W) \subset W$ são chamados de subespaços invariantes por ρ.*

Definição 1.49. *Uma representação ρ de $\mathfrak{g}$ em V é dita irredutível se os únicos subespaços invariantes por ρ são os triviais $\{0\}$ e V.*

A representação é dita completamente redutível se V se decompõe como $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_n$, com cada V_i invariante e tal que a restrição de ρ em V_i é irredutível.

Proposição 1.50. *Sejam K um grupo compacto Hausdorff e $\rho : K \to Gl(V)$ uma representação contínua de K no espaço vetorial real (respectivamente complexo) V de dimensão finita. Então, existe um produto interno (respectivamente um produto Hermitiano) $\langle , \rangle$ em V, que é K-invariante, isto é, $\langle \rho(k)u, \rho(k)v \rangle = \langle u, v \rangle$, para todo $k \in K$ e $u, v \in V$.*

Proposição 1.51. *Sejam K um grupo compacto Hausdorff e $\rho : K \to Gl(V)$ uma representação contínua de K no espaço vetorial real ou complexo V. Então, V se decompõe em uma soma direta ortogonal,*

$$V = V_1 \oplus ... \oplus V_n,$$

onde cada subespaço V_i é invariante por K e irredutível.

Definição 1.52. *A série central descendente da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é definida, por indução, como*

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], ..., \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

O nome atribuído a essa série vem do fato que $\mathfrak{g}^{k+1} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^k] \subset \mathfrak{g}^k$, ou seja, é realmente uma série descendente, $\mathfrak{g}^1 \supset \mathfrak{g}^2 \supset \cdots \supset \mathfrak{g}^k \supset \cdots$

Definição 1.53. *Uma álgebra de Lie é nilpotente se sua série central descendente se anula em algum momento, isto é,* $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$*, para algum* $k_0 \geq 1$.

Se a definição acima é satisfeita, então $\mathfrak{g}^k = \{0\}$, para todo $k \geq k_0$.

Um exemplo fácil de álgebras nilpotentes são as álgebras de Lie abelianas.

Definição 1.54. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é simples se:*

- $dim(\mathfrak{g}) \neq 1$ *e*
- *os únicos ideais de* $\mathfrak{g}$ *são* $\{0\}$ *e* $\mathfrak{g}$.

Definição 1.55. *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é semi-simples se ela pode ser escrita como uma soma direta (finita) de álgebras simples, isto é,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_n$*, com* $\mathfrak{g}_i$ *álgebras simples e* $i = 1, ..., n$.

Definição 1.56. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie. Uma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$ *é uma subálgebra* $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ *que satisfaz:*

1. $\mathfrak{t}$ *é nilpotente.*
2. *O normalizador de* $\mathfrak{t}$ *em* $\mathfrak{g}$ *coincide com* $\mathfrak{t}$.

2.′ *Se* $[X, \mathfrak{t}] \subset \mathfrak{t}$*, então* $X \in \mathfrak{t}$.

As condições 2 *e* 2′ *são equivalentes.*

Lembre que o normalizador de $\mathfrak{t}$ em $\mathfrak{g}$ é dado por $\eta(\mathfrak{t}) = \{X \in \mathfrak{g}; [X, Y] \in \mathfrak{t}, \forall Y \in \mathfrak{t}\}$. A equivalência entre 2 e 2′ é imediata.

Observação 1.57. *Se* $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$*, então* $[X, Y] = 0$*, para todo* $Y \in \mathfrak{g}$*. Em particular, para uma subálgebra de Cartan* $\mathfrak{t}$*, tem-se que* $[X, Y] = 0 \in \mathfrak{t}$*, para todo* $Y \in \mathfrak{t}$*. Assim, pela condição* (2′)*,* $X \in \mathfrak{t}$*. Portanto,* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{t}$.

Definição 1.58. *Seja* $\mathfrak{g}$ *um álgebra de Lie sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\mathfrak{t}$ *uma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$*. Um peso da representação adjunta* $ad : \mathfrak{t} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *é um funcional* $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{K}$ *tal que* $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}; \forall Y \in \mathfrak{t}, ad(Y)X = \alpha(Y)X\} \neq \emptyset$.

Observe na definição acima que se α é um peso da representação adjunta, então $\alpha(Y)$ é um auto-valor da transformação linear $ad(Y)$. Assim, $\mathfrak{g}_\alpha$ é um auto-espaço.

Definição 1.59. *Seja* $\mathfrak{g}$ *um álgebra de Lie sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $\mathfrak{t}$ *uma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Um funcional* $\alpha : \mathfrak{t} \to \mathbb{K}$ *é dito uma raiz da álgebra* $\mathfrak{g}$ *se for um peso (não-nulo) da representação adjunta* $ad : \mathfrak{t} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$. *Neste caso,* $\mathfrak{g}_\alpha$ *é chamado de espaço de raízes.*

Nos próximos resultados, relacionados com raízes, suponha que $\mathfrak{g}$ é semi-simples.

Para álgebras $\mathfrak{g}$ semi-simples, existe uma decomposição em espaços de raízes, a qual será muito útil para o desenvolvimento da teoria.

Teorema 1.60. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie semi-simples sobre* $\mathbb{K}$ *e* $\mathfrak{t}$ *uma subálgebra de Cartan de* $\mathfrak{g}$. *Então,* $\mathfrak{g}$ *se decompõe como*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_{\alpha_n},$$

onde $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ *é o conjunto das raízes de* $\mathfrak{t}$ *em relação a* $\mathfrak{g}$.

Definição 1.61. *A forma de Cartan-Killing de* $\mathfrak{g}$ *é a forma bilinear e simétrica* $\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ *definida por* $\mathcal{K}_\mathfrak{g}(X, Y) = tr(ad(X) \circ ad(Y))$, *para todo* $X, Y \in \mathfrak{g}$.

Define-se também $\langle X, Y \rangle = -\mathcal{K}_\mathfrak{g}(X, Y)$. Essa notação de produto interno é utilizada pelo fato de que em determinados casos $-\mathcal{K}_\mathfrak{g}$ é um produto interno, conforme será apresentado adiante na Proposição 1.80.

Lema 1.62. *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie semi-simples e* $\mathfrak{t}$ *uma subálgebra de Cartan, então:*

1. *Se* α *e* β *são raízes de* $\mathfrak{t}$, *com* $\beta \neq \alpha$ *e* $\beta \neq -\alpha$, *então* $\langle X, Y \rangle = 0$, *para todos* $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ *e* $Y \in \mathfrak{g}_\beta$.

2. $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, *para todo raiz* α.

3. *Os únicos múltiplos inteiros de* α *que são raízes são* α *e* $-\alpha$.

O próximo teorema é de grande valor para a teoria de raízes. Posteriormente, ficará claro que este resultado permite encontrar todas as raízes de uma álgebra semi-simples.

Sejam $\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$ (espaço dual de $\mathfrak{t}$). Deseja-se saber quais elementos da forma $\beta \pm k\alpha$ são raízes, com $k \in \mathbb{N}$. Para isso, considere a sequência

$$..., \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, ...$$

que é chamada de $\alpha-$sequência iniciada em β.

Teorema 1.63. *Dadas as raízes $\alpha, \beta \in \mathfrak{t}^*$, existem $p, q \in \mathbb{N}$, tais que*

$$\beta - p\alpha, ..., \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, ..., \beta + q\alpha$$

são os únicos pesos da forma $\beta + k\alpha$, com k inteiro. Além do mais, vale a seguinte fórmula de Killing

$$p - q = \frac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}.$$

Observe que na fórmula de Killing, α e β não são simétricos, ou seja, para a β-sequência iniciada em α, são outros os valores de p e q que definem os pesos.

O número inteiro $\frac{2\langle \beta, \alpha\rangle}{\langle \alpha, \alpha\rangle}$ é denominado número de Killing associado às raízes α e β.

A partir de agora, fixa-se uma ordem lexicográfica dada por uma base de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q}}$. Em relação à essa base, diz-se que $\alpha \in \Delta$ é positiva se $\alpha > 0$ e α é negativa se $\alpha < 0$.

Definição 1.64. *Uma raiz $\alpha \in \Delta$ é simples se satisfaz*

- $\alpha > 0$.
- *Não existem $\beta, \gamma \in \Delta$ tal que $\beta, \gamma > 0$ e $\alpha = \beta + \gamma$.*

Teorema 1.65. *Se $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ é o conjunto de raízes simples, então*

- *Σ é uma base de $\mathfrak{t}^*_{\mathbb{Q}}$ e*
- *toda raiz β pode ser escrita como $\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_l\alpha_l$, com coeficientes inteiros e todos eles de mesmo sinal.*

Um conjunto $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ que satisfaz o teorema acima é chamado de sistema simples de raízes.

Definição 1.66. *Seja $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes. A matriz $l \times l$, formada pelos números de Killing associados às raízes de Σ, é chamada de Matriz de Cartan C. Ou seja, a entrada $c_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle}$.*

Proposição 1.67. *Seja C a matriz de Cartan de um sistema simples de raízes. Então,*

(a) $c_{ii} = 2$, *para todo i,*

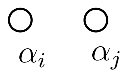
(b) $c_{ij} = 0, -1, -2$ *ou* -3,

(c) $c_{ji} = -1$ *se* $c_{ij} = -2$ *ou* -3 *e*

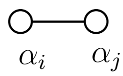
(d) $c_{ij} = 0$ *se, e só se,* $c_{ji} = 0$.

O diagrama de Dynkin é um diagrama (grafo) que contém as mesmas informações que a matriz de Cartan. Fixado um sistema de raízes simples $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, o diagrama contém l pontos (vértices), cada ponto representa uma raiz de Σ. Esse vértices são ligados ou não por um, dois ou três segmentos de acordo com as seguintes instruções:

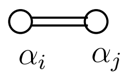
- Se $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = 0$, não existem ligações, ou seja,

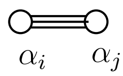


- Se $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle} = \frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = -1$, α_i e α_j são ligados por um segmento:

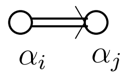


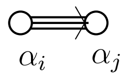
- Se $\frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_i,\alpha_i\rangle}$ ou $\frac{2\langle\alpha_j,\alpha_i\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle}$ é -2 (respectivamente -3) então os vértices são ligados por dois (respectivamente três) segmentos:



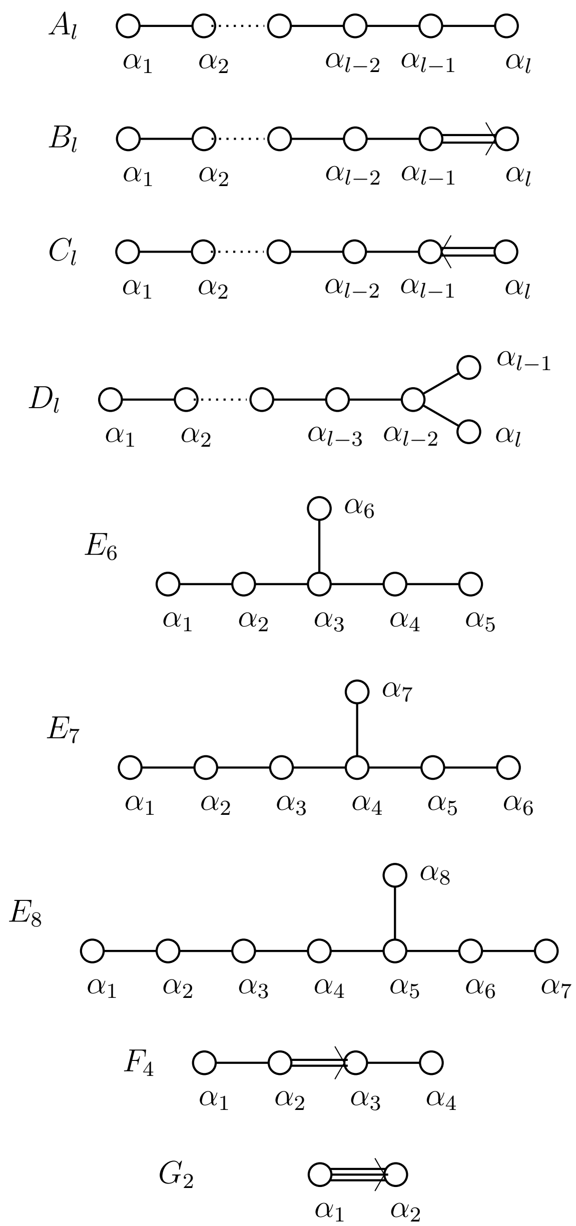


Neste caso, não fica claro qual das entradas c_{ij} ou c_{ji} da matriz de Cartan é -2 ou -3. Para distinguir isso, orienta-se a ligação da direção da raiz α_j se $c_{ji} = \frac{2\langle\alpha_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = -2$ ou -3 (e, portanto, $c_{ij} = -1$). Obtêm-se dessa forma as ligações orientadas:





Teorema 1.68. *Os diagramas de Dynkin conexos, são:*



A classificação dos diagramas de Dynkin apresentado no Teorema 1.68, classifica as álgebras de Lie simples, sobre um corpo algebricamente fechado.

As álgebras A_l, B_l, C_l e D_l são chamadas de álgebras clássicas, pois estão associadas às álgebras concretas de matrizes. E_6, E_7, E_8, F_4 e G_2 são conhecidas como álgebras excepcionais. O índice l corresponde a quantidade de raízes do sistema simples Σ e esse número corresponde a dimensão da subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

Definição 1.69. *O posto de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é a dimensão da sua subálgebra de Cartan.*

Assim, o índice l determina o posto dessas álgebras. Outro dado interessante é dimensão de cada uma delas:

Tipo	Dimensão	
A_l	$l(l+2)$	$l \geq 1$
B_l	$l(2l+1)$	$l \geq 2$
C_l	$l(2l+1)$	$l \geq 3$
D_l	$l(2l-1)$	$l \geq 4$
E_6	78	
E_7	133	
E_8	248	
F_4	52	
G_2	14	

Lema 1.70. *Seja Δ um sistema de raízes e $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ um sistema simples de raízes de $A_l, B_l, C_l, D_l, E_l, F_4$ ou G_2. Existe uma raiz $\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i \in \Delta^+$, tal que para qualquer $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i\alpha_i \in \Delta$, vale que $n_i \leq m_i$, para todo $i = 1, ..., l$.*

Esse Lema é consequência imediata da Proposição 3.23 apresentada em [5], na página 475.

Definição 1.71. *A raiz $\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i\alpha_i$ do Lema 1.70 é chamada de raiz de altura máxima.*

Teorema 1.72. *As raízes de altura máxima são dadas por:*

A_l	$\beta = \alpha_1 + \cdots + +\alpha_l$
B_l	$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_l$
C_l	$\beta = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-1} + \alpha_l$
D_l	$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + 2\alpha_{l-2} + \alpha_{l-1} + \alpha_l$
E_6	$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$
E_7	$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$
E_8	$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$
F_4	$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$
G_2	$\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$

Essa classificação das raízes de altura máxima é dada pelo Teorema 3.28 de [5], página 476. Os diagramas de Dynkin considerados por Helgason em [5] são isomorfos aos apresentados aqui, assim as raízes de altura máxima também são determinadas por esse isomorfismo. No caso das álgebras clássicas e de F_4 não houve mudanças, uma vez que os diagramas são exatamente os mesmos. No caso das demais álgebras excepcionais é preciso encontrar o isomorfismo para então determinar a raiz β.

Para as álgebras clássicas será apresentado em seguida um resumo sobre as raízes e a forma matricial dos espaços de raízes correspondentes. Para mais detalhes, ver Capítulo 8 de [12].

(1) O diagrama de A_l está associado à álgebra de $\mathfrak{sl}(l+1)$, a qual possui as seguintes características:

- Uma subálgebra de Cartan é a álgebra das matrizes diagonais de traço zero.
- As raízes são $\lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$, onde λ_i é dado por $\lambda_i : diag(a_1, ..., a_{l+1}) \mapsto a_i$.
- Um sistema simples de raízes é $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, ..., \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$.
- As raízes positivas em relação a esse sistema são $\{\lambda_i - \lambda_j; i < j\}$.
- Os espaços de raízes correspondentes à $\lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$ são gerados pelas matrizes (E_{ij}), onde E_{ij} denota a matriz com 1 na entrada ij e 0 nas demais entradas.
- Usando a notação $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ essas raízes positivas são dadas por

$$\{\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_j; 1 \leq i \leq j \leq l\}.$$

(2) O diagrama de B_l está associado à álgebra das matrizes anti-simétricas em dimensão ímpar, isto é, $\mathfrak{so}(2l+1) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l+1); A^t + A = 0\}$. Para uma álgebra de Lie isomorfa à $\mathfrak{so}(2l+1)$, obtêm-se a seguinte descrição:

- Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ é a subálgebra de dimensão l das matrizes diagonais $\mathfrak{so}(2l+1)$, ou seja, $X \in \mathfrak{t}$ se, e só se, X é da forma $X = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda & \\ & & -\Lambda \end{pmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem l.
- $A \in \mathfrak{so}(2l+1)$ se, e só se, A é da forma $A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix}$, onde β, γ são matrizes $1 \times l$, as demais são $l \times l$ e com b e c anti-simétricas.
- Um sistema simples de raízes é $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, ..., \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}$.
- As raízes positivas em relação a esse sistema são:

$$\lambda_j = (\lambda_j - \lambda_{j+1} + \cdots + (\lambda_{l-1} - \lambda_l) + \lambda_l).$$

$$\text{Se } i < j, \lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \cdots + 2\lambda_l.$$

$$\text{Se } i < j, \lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j).$$

- Para λ_j, o espaço de raízes é dado pelas matrizes A da forma acima, tais que $a = b = c = 0, \beta = 0$ e $\gamma = (0, ..., x_j, ..., 0)$. Para $-\lambda_j$, o espaço de raízes é dado por $a = b = c = 0, \gamma = 0$ e $\beta = (0, ..., x_j, ..., 0)$.

  Para $\lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $b = c = 0, \beta, \gamma = 0$ e a uma matriz cuja a única entrada não-nula é a i, j.

  Para $\lambda_i + \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $a = c = 0, \beta, \gamma = 0$ e b uma matriz anti-simétrica cujas as únicas entradas não-nulas são i, j e j, i. Para $-(\lambda_i + \lambda_j)$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado pelas matrizes transpostas das matrizes determinadas no item anterior. Ou seja, é dado por $a = b = 0, \beta, \gamma = 0$ e c uma matriz anti-simétrica cujas as únicas entradas não-nulas são i, j e j, i.

(3) O diagrama de C_l está associado à álgebra $\mathfrak{sp}(l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l); AJ + JA^t = 0\}$, onde J é a matriz anti-simétrica $2l \times 2l$ escrita em blocos $l \times l$ como $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. C_l possui as seguintes características:

- Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ é a subálgebra das matrizes diagonais de $\mathfrak{sp}(l)$, ou seja, $X \in \mathfrak{t}$ se, e só se, X é da forma $X = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{pmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem l.

- $A \in \mathfrak{sp}(l)$ se, e só se, A é da forma $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}$, onde β, γ são matrizes simétricas.

- Um sistema simples de raízes é $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, ..., \lambda_{l-1} - \lambda_l, 2\lambda_l\}$.

- As raízes positivas em relação a esse sistema são:
  Se $i \leq j, \lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{j+1}) + \cdots + 2(\lambda_{l-1} - \lambda_l) + 2\lambda_l$.
  Se $i < j, \lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j)$.

- Para $\lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado pelas matrizes A, tal que $\beta, \gamma = 0$ e α é uma matriz cuja a única entrada não-nula é a i, j.

  Para $\lambda_i + \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $\alpha, \gamma = 0$ e β com entradas não-nulas apenas em i, j e j, i. Para $-(\lambda_i + \lambda_j)$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $\alpha, \beta = 0$ e γ uma matriz cujas as únicas entradas diferentes de zero são i, j e j, i.

(4) O diagrama de D_l está associado à álgebra das matrizes anti-simétricas de dimensão par, que é $\mathfrak{so}(2l) = \{A \in \mathfrak{sl}(2l); A + A^t = 0\}$. Para uma álgebra de Lie isomorfa à $\mathfrak{so}(2l)$, obtêm-se a seguinte descrição:

- Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ é a subálgebra das matrizes diagonais de $\mathfrak{so}(2l)$, ou seja, $X \in \mathfrak{t}$ se, e só se, X é da forma $X = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{pmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem l.
- $A \in \mathfrak{so}(2l)$ se, e só se, A é da forma $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}$, onde β, γ são matrizes são anti-simétricas.
- Um sistema simples de raízes é $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, ..., \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_{l-1} + \lambda_l\}$.
- As raízes positivas em relação a esse sistema são:

$$\text{Se } i \leq j, \lambda_i + \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_j) + 2(\lambda_j - \lambda_{l-1}) + 2\lambda_{l-1}.$$

$$\text{Se } i < j, \lambda_i - \lambda_j = (\lambda_i - \lambda_{i+1}) + \cdots + (\lambda_{j-1} - \lambda_j).$$

- Para $\lambda_i - \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado pelas matrizes A, tal que $\beta, \gamma = 0$ e α é uma matriz entrada não-nula apenas em i, j e j, i.

  Para $\lambda_i + \lambda_j$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $\alpha, \gamma = 0$ e β com entradas não-nulas apenas em i, j e j, i. Para $-(\lambda_i + \lambda_j)$, com $i \neq j$, o espaço de raízes é dado por $\alpha, \beta = 0$ e γ uma matriz cujas as únicas entradas diferentes de zero são i, j e j, i.

Observação 1.73. *O sistema simples de raízes $\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, ..., \lambda_l - \lambda_{l+1}\}$ apresentado na descrição da álgebra clássica A_l é isomorfo ao sistema $\{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$, o qual foi considerado para A_l na classificação dos diagramas de Dynkin. O mesmo é válido para as demais álgebras clássicas. Tal correspondência é feita pela ordem em que as raízes aparecem, por exemplo, o isomorfismo para os sistemas de A_l se dá associando α_i à $\lambda_i - \lambda_{i+1}$, com $1 \leq i \leq l$.*

Definição 1.74. *Seja E um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$. Dado um elemento não-nulo $\alpha \in E$, uma reflexão em relação a α é uma transformação linear inversível $r : E \to E$ que satisfaz:*

- $r(\alpha) = -\alpha$
- *O conjunto* $F_r = \{\beta \in E; r(\beta) = \beta\}$ *dos pontos fixos de* r *é um hiperplano de* E.

Definição 1.75. *Um conjunto* $\Pi \subset E$ *é um sistema de raízes se satisfaz:*

(1) Π *é finito gera* E *e não contém* 0.

(2) *Para todo* $\alpha \in E$*, existe uma reflexão* r_α *em relação a* α *tal que* $r_\alpha(\Pi) = \Pi$.

(3) *Para todos* $\alpha, \beta \in \Pi, r_\alpha(\beta) - \beta$ *é um múltiplo inteiro de* α.

Os elementos de Π são chamados de raízes. Um sistema de raízes Π possui as seguintes propriedades:

- Se $\alpha \in \Pi$, então $-\alpha = r_\alpha(\alpha)$ também é raiz.
- A reflexão r_α é única.

As propriedades que definem um sistema de raízes praticamente caracterizam um conjunto de raízes de uma subálgebra de Cartan de uma álgebra de Lie semi-simples sobre um corpo algebricamente fechado. Uma diferença essencial é quanto aos possíveis múltiplos de raízes que também são raízes. Tendo isso em vista, se introduz o conceito de sistema reduzido.

Definição 1.76. *Um sistema de raízes* Π *é reduzido se* α *e* $-\alpha$ *são os únicos múltiplos de* α *que são raízes.*

Definição 1.77. *O grupo de Weyl de um sistema de raízes* Π *é o grupo gerado pelas reflexões* r_α*, com* $\alpha \in \Pi$*. Este grupo é denotado por* W_Π*, ou simplesmente* W.

Uma das características do grupo de Weyl de Π é que $W(\Pi)$ é finito.

Definição 1.78. *Uma álgebra de Lie real* $\mathfrak{g}$ *é dita compacta se existe em* $\mathfrak{g}$ *um produto interno* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *invariante, isto é,*

$$\langle ad(X)(Y), Z \rangle + \langle Y, ad(X)Z \rangle = 0,$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.

Teorema 1.79. *Seja* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie compacta. Então,* $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$*, onde* $\mathfrak{z}(\mathfrak{g})$ *é o centro de* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ *é semi-simples.*

Proposição 1.80. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie compacta. Então, a forma de Cartan Killing $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(\cdot,\cdot)$ é negativa semi-definida. Além do mais, para $X \in \mathfrak{g}$, $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X,X) = 0$ se, e somente se, $X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})$. Portanto, $\mathfrak{g}$ é semi-simples se, e somente se, $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(\cdot,\cdot)$ é negativa definida.*

Segue da Proposição 1.80, que se $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie compacta e semi-simples, então $\langle X,Y\rangle = -\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(X,Y)$ define um produto interno invariante, onde $\mathcal{K}_{\mathfrak{g}}$ é a forma de Cartan-Killing. Dentre os produtos internos invariantes, o negativo da forma de Cartan-Killing fornece uma escolha natural, uma vez que é definido intrinsecamente pela álgebra de Lie.

Definição 1.81. *Seja $\mathfrak{u}$ uma álgebra de Lie sobre um corpo $\mathbb{K}$. A complexificação de $\mathfrak{u}$ é definida por $\mathfrak{u}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$, onde*

$$[X+iY, Z+iW] = [X,Z] - [Y,W] + i[Y,Z] + i[X,W],$$

para todos $X,Y,Z,W \in \mathfrak{u}$.

Definição 1.82. *Seja $\mathfrak{g} = (V,[,])$ uma álgebra complexa. A álgebra $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}} = (V^{\mathbb{R}},[,])$ obtida por restrição dos escalares a $\mathbb{R}$, é denominada de álgebra realificada de $\mathfrak{g}$.*

Definição 1.83. *Seja V um espaço vetorial complexo. Diz-se que $\sigma : V \to V$ é uma conjugação, se σ é anti-linear, isto é, $\sigma(av) = \bar{a}\sigma(v)$ e $\sigma(v+u) = \sigma(v) + \sigma(u)$, para todos $u,v \in V$ e $a \in \mathbb{C}$ e $\sigma^2 = Id$.*

Definição 1.84. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra complexa. Uma forma real de $\mathfrak{g}$ é uma subálgebra $\mathfrak{g}_0 = \{X \in \mathfrak{g}; \sigma(X) = X\}$ de $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$, onde σ é uma conjugação que satisfaz $\sigma[X,Y] = [\sigma(X),\sigma(Y)]$, para todo $X,Y \in \mathfrak{g}$.*

Definição 1.85. *Seja $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ uma subálgebra de Cartan. Dado $\alpha \in \mathfrak{t}^*$, define-se $H_\alpha \in \mathfrak{t}$, o elemento que satisfaz $\alpha(H) = \mathcal{K}_{\mathfrak{g}}(H_\alpha, H)$, para todo $H \in \mathfrak{t}$.*

Definição 1.86. *Define-se $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}} = \{X \in \mathfrak{t}; \alpha(X) \in \mathbb{R}, \forall\alpha \in \Sigma\}$.*

O espaço $\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ é gerado sobre $\mathbb{R}$, pelos H_α, com $\alpha \in \Sigma$.

Definição 1.87. *Uma base de Weyl de $\mathfrak{g}$ é uma base formada por uma base de $\mathfrak{t}$ e por elementos $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$, $\alpha \in \Sigma$, que satisfaz:*

- $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ *e*

- $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta}$, *com* $m_{\alpha,\beta} = 0$ *se* $\alpha + \beta \notin \Sigma$ *e tal que* $m_{\alpha,\beta} = -m_{-\alpha,-\beta}$.

Teorema 1.88. *(Teorema de Weyl) Dada uma base de Weyl, o subespaço* $\mathfrak{u}$ *gerado sobre* $\mathbb{R}$ *por*

$$\{i\mathfrak{t}_\mathbb{R}, A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}, S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})\},$$

com $\alpha \in \Sigma^+$, *é uma forma real compacta de* $\mathfrak{g}$.

No Teorema de Weyl acima, os colchetes entre os elementos da base são dados por:

- $[iH_\alpha, A_\beta] = \beta(H_\alpha) S_\beta$.
- $[iH_\alpha, S_\beta] = -\beta(H_\alpha) A_\beta$.
- $[A_\alpha, A_\beta] = m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta} A_{\alpha-\beta}$.
- $[S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta} A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta} A_{\alpha-\beta}$.
- $[A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta} S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta} S_{\alpha-\beta}$.
- $[A_\alpha, S_{-\alpha}] = 2iH_\alpha$.

Teorema 1.89. *Duas formas reais compactas de* $\mathfrak{g}$ *são isomorfas por um automorfismo interno de* $\mathfrak{g}$. *Reciprocamente toda álgebra de Lie semi-simples compacta é a forma real compacta de uma álgebra de Lie complexa* $\mathfrak{g}$. *Duas álgebras semi simples compactas* $\mathfrak{u}_1$ *e* $\mathfrak{u}_2$ *são isomorfas se, e só se, suas complexificadas* $(\mathfrak{u}_1)_\mathbb{C}$ *e* $(\mathfrak{u}_2)_\mathbb{C}$ *são isomorfas.*

As formas reais compactas das álgebras clássicas, são listadas a seguir:

(A_l) A álgebra complexa de A_l é $\mathfrak{sl}(l+1, \mathbb{C}), n = l + 1$, cuja forma real compacta é $\mathfrak{u} = \mathfrak{su}(n)$.

(B_l) A álgebra complexa é a álgebra das matrizes complexas anti-simétricas em dimensão ímpar $\mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{C})$, com forma real compacta $\mathfrak{u} = \mathfrak{so}(2l+1, \mathbb{R})$. Essas realizações valem para $l \geq 2$. A álgebra de Lie $\mathfrak{so}(3)$ é isomorfa a $\mathfrak{su}(2)$, dada em A_1.

(C_l) É realizado pela álgebra simplética $\mathfrak{sp}(l, \mathbb{C}) = \{A \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{C}); AJ + JA^t = 0\}$. Onde, $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

A forma real compacta é dada pelas matrizes simpléticas anti-hermitianas, isto é, matrizes da forma $\begin{bmatrix} A & B \\ -\bar{B} & \bar{A} \end{bmatrix}$. Essa forma real é denotada por $\mathfrak{sp}(l)$ e é isomorfa à álgebra das matrizes quaterniônicas $l \times l$ que são anti-hermitianas, isto é, $Q + \bar{Q}^t = 0$. O isomorfismo é dado por $Q = A + jB \mapsto \begin{bmatrix} A & -\bar{B} \\ B & \bar{A} \end{bmatrix}$.

(D_l) Essa série cobre as álgebras anti-simétricas em dimensão par, $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C})$ com forma real compacta $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{R})$, para $l \geq 4$.

Considere $Aut(\mathfrak{g}) = \{\phi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}; \phi$ é isomorfismo$\}$ o grupo dos automorfismos de $\mathfrak{g}$. Denote por $Aut_0(\mathfrak{g})$ a componente conexa da identidade de $Aut(\mathfrak{g})$.

Teorema 1.90. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra compacta.*

1 - $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan se, e somente se, $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal.

2 - Para todo $X \in \mathfrak{g}$, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}_X$ de $\mathfrak{g}$ que contém X.

3 - $\mathfrak{g} = \bigcup_{X \in \mathfrak{g}} \mathfrak{t}_X$, onde $\mathfrak{t}_X$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$ que contém X.

4 - Se $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_1$ são subálgebras de Cartan de $\mathfrak{g}$, então existe $f \in Aut_0(\mathfrak{g})$ tal que $\mathfrak{t}_1 = f(\mathfrak{t})$.

5 - $\mathfrak{g} = \bigcup_{f \in Aut_0(\mathfrak{g})} f(\mathfrak{t})$.

Proposição 1.91. *Seja $\mathfrak{u}$ a forma real compacta dada pelo Teorema de Weyl. Então, o subespaço $\mathfrak{u} = i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{u}$.*

1.3 Grupos de Lie

Nesta seção serão apresentados algumas definições e resultados sobre grupos de Lie, os quais são de suma importância para o desenvolvimento deste trabalho. As demonstrações dos resultados, assim como, outros detalhes sobre a teoria, podem ser encontrados em [13].

Definição 1.92. *Um grupo de Lie é um grupo G com uma estrutura diferenciável tal que a aplicação $G \times G \to G$ dada por $(x, y) \mapsto xy^{-1}, x, y \in G$, é diferenciável.*

Decorre daí que as translações à esquerda L_x e à direita R_x, dadas por: $L_x : G \to G, L_x(y) = xy$ e $R_x : G \to G, R_x(y) = yx$, são difeomorfismos.

Definição 1.93. *Diz-se que uma métrica Riemanniana em G é invariante à esquerda se* $\langle u, v\rangle_y = \langle d(L_x)_y(u), d(L_x)_y(v)\rangle_{L_x(y)}$*, para todo* $x, y \in G$*,* $u, v \in T_yG$*, isto é, se* L_x *é uma isometria.*

Analogamente, define-se métrica invariante à direita. Uma métrica Riemanniana invariante à esquerda e à direita é chamada de métrica bi-invariante.

Definição 1.94. *Diz-se que um campo de vetores diferenciável* X *em um grupo de Lie* G *é invariante à esquerda se, para todo* $x \in G$*,* $d(L_x)X = X$*, isto é,* $d(L_x)_yX(y) = X(L_x(y))$*, para qualquer* $y \in G$*.*

Os campos invariantes à esquerda ficam completamente determinados pelos seus valores em algum ponto de G. Isto permite introduzir uma estrutura adicional no espaço tangente do elemento neutro $e \in G$. A cada vetor $X_e \in T_eG$, associe o campo invariante à esquerda X definido por $X_a = dL_aX_e, a \in G$. Sejam X, Y campos invariantes à esquerda, então o colchete $[X, Y]$ é invariante à esquerda. De fato, para todo $x \in G$ e toda função diferenciável f em G, tem-se que

$$dL_x[X, Y]f = [X, Y](f \circ L_x) = X(dL_xY)f - Y(dL_xX)f = (XY - YX)f = [X, Y]f.$$

Definição 1.95. *Sejam* X^l, Y^l *campos invariantes à esquerda. Definimos o colchete em* T_eG*, por* $[X^l(e), Y^l(e)] = [X^l, Y^l](e)$*. Com esta notação,* T_eG *é chamada a álgebra de Lie de* G*, dos campos invariantes à esquerda e é denotada por* $\mathfrak{g}$*.*

De agora em diante, os elementos da álgebra de Lie de G serão pensados indiferentemente como vetores de T_eG ou campos de G invariantes à esquerda.

Para introduzir em G uma métrica invariante à esquerda, tome um produto interno qualquer $\langle , \rangle_e$ em $\mathfrak{g}$ e defina

$$\langle u, v\rangle_x = \langle (dL_x^{-1})_xu, (dL_x^{-1})_xv\rangle_e.$$

Como L_x depende diferenciavelmente de x, isto fornece uma métrica Riemanniana, evidentemente invariante à esquerda.

Observe que o mesmo pode ser feito de maneira análoga, para campos invariantes à direita. Assim, a álgebra de Lie dos campos invariantes à direita, denotada por $\mathfrak{g}_R$ é definida por $[X^r(e), Y^r(e)] = [X^r, Y^r](e)$.

Proposição 1.96. *Seja $X, Y \in T_eG$. Então, $[X, Y]_r = -[X, Y]$, onde $[\cdot, \cdot]_r$ e $[\cdot, \cdot]$, são os colchetes definidos em $\mathfrak{g}_R$ e $\mathfrak{g}$, respectivamente.*

As álgebras de Lie $\mathfrak{g}_R$ e $\mathfrak{g}$ são isomorfas.

Exemplo 1.97. *Denote por $\mathbb{K}$ os corpos $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Os exemplos clássicos de grupos de Lie são:*

- $GL(n, \mathbb{K}) = \{g \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K}); g$ *é inversível*$\}$*, chamado de grupo linear geral.*
- $Sl(n, \mathbb{K}) = \{g \in Gl(n, \mathbb{K}); detg = 1\}$*, conhecido como grupo linear especial.*
- $O(n, \mathbb{R}) = \{g \in Gl(n; \mathbb{K}); gg^t = g^t g = Id\}$*, que recebe o nome de grupo ortogonal.*
- $SO(n, \mathbb{R}) = \{g \in O(n; \mathbb{R}); detg = 1\}$*, é chamado de grupo ortogonal especial.*
- $U(n) = \{g \in GL(n, \mathbb{C}); g\bar{g}^t = \bar{g}^t g = Id\}$*, chamado de grupo unitário.*
- $SU(n) = \{g \in U(n); detg = 1\}$*, conhecido por grupo unitário especial.*
- *Seja $\mathbb{H}$ à álgebra dos quatérnios. O grupo de lie $Sp(n) = \{g \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{H}); g\bar{g}^t = \bar{g}^t g = Id\}$ é chamado de grupo simplético.*

Existem alguns isomorfismos entre os grupos de lie, como por exemplo: $Sp(1)$ é isomorfo à $SU(2)$ pela aplicação $\psi : Sp(1) \to SU(2)$ dada por

$$\psi(a + ib + jc + kd) = \begin{bmatrix} a + ib & -c - id \\ c - id & a - ib \end{bmatrix}.$$

Definição 1.98. *Uma ação à esquerda de um grupo G em um conjunto X é uma aplicação $\phi : G \times X \to X$ que satisfaz:*

- $\phi(e, x) = x$ *e*
- $\phi(gh, x) = \phi(g, \phi(h, x))$*, para todo $g, h \in G$ e $x \in X$.*

Se ϕ é diferenciável, então ϕ é chamada de ação diferenciável.

De modo análogo, se define ação à direita.

Neste trabalho, as ações sempre serão diferenciáveis, por isso, de agora em diante, o termo ação será usado somente para aplicações diferenciáveis.

Denota-se por $\phi_g : X \to X$ a aplicação que satisfaz $\phi_g(x) = \phi(g, x)$ e por $\phi_x : G \to X$ a que satisfaz $\phi_x(g) = \phi(g, x)$. Além disso, na notação de ação é comum suprimir o símbolo ϕ, assim as ações à esquerda podem ser denotadas simplesmente por $g(x)$, $g \cdot x$ ou gx.

Dado $x \in X$, sua órbita por G, denotada por $G \cdot x$ ou Gx, é definida como sendo o conjunto $G \cdot x = \{gx \in X; g \in G\}$. O conjunto G_x dos elementos de G que fixam x é denominado de subgrupo de isotropia ou estabilizador de x, ou seja, $G_x = \{g \in G; gx = x\}$.

Definição 1.99. *Seja ϕ uma ação de G em X. Diz-se que:*

- *A ação é efetiva se $g = 1e$ é o único $g \in G$ tal que $gx = x$, para todo $x \in X$.*
- *A ação é livre se os subgrupos de isotropia se reduzem ao elemento neutro de G, isto é, se $gx = x$ para algum $x \in X$, então $g = e$.*
- *A ação é transitiva se X é uma órbita de G, isto é, para todo par de elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$ tal que $gx = y$.*

Proposição 1.100. *Seja G um grupo de Lie e $\phi : G \to G/K$ uma ação transitiva. Então, ϕ é efetiva se, e somente se, K não contém subgrupos normais de G, além do trivial $\{e\}$.*

Proposição 1.101. *Os campos invariantes (à esquerda ou à direita) são completos, isto é, suas trajetórias se prolongam para $(-\infty, +\infty)$.*

Proposição 1.102. *Sejam X e Y campos de vetores invariantes à direita e à esquerda, respectivamente, que coincidem no elemento neutro, isto é, $X(e) = Y(e)$. Então suas trajetórias $X_t(e)$ e $Y_t(e)$, que passam pelo elemento neutro coincidem para todo $t \in \mathbb{R}$.*

Definição 1.103. *Seja $X \in T_eG$. Então, $\exp X = (X_r)_{t=1}(e) = (X_l)_{t=1}(e)$. Como é usual $\exp X$ também se escreve com e^X. Isso define uma aplicação $\exp : \mathfrak{g} \to G$, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G.*

Proposição 1.104. *Valem as seguintes afirmações:*

(1) *A aplicação exponencial* $t \mapsto \exp(tX), X \in g$, *é um homomorfismo, isto é,*

$$\exp(t+s)X = \exp(tX)\exp(sX) = \exp(sX)\exp(tX)$$

e sua imagem $\{\exp(tX); t \in \mathbb{R}\}$ *é um subgrupo de* G.

(2) *Se* X *é campo invariante à direita então* $X_t = L_{\exp(tX)}$, *isto é,* $X_t(g) = \exp(tX)g$.

(3) *Se* X *é campo invariante à esquerda então* $X_t = R_{\exp(tX)}$, *isto é,* $X_t(g) = g\exp(tX)$.

(4) $\exp(0) = e$.

(5) *Se* $n \in \mathbb{Z}$, *então* $(\exp X)^n = \exp(nX)$. *Em particular,* $(\exp X)^{-1} = \exp(-X)$.

Proposição 1.105. $d(\exp)_0 = Id$.

Aplicando o Teorema da função inversa, obtêm-se o seguinte corolário.

Corolário 1.106. *Existem uma vizinhança* U *de* $0 \in \mathfrak{g}$ *e uma vizinhança* V *de* e *em* G *tal que* $\exp U : U \to V$ *é um difeomorfismo.*

Corolário 1.107. *Seja* G *um grupo de Lie conexo e tome* $g \in G$. *Então, existem* $X_1, \cdots, X_s \in \mathfrak{g}$ *tais que* $g = \exp(X_1)\cdots\exp(X_s)$.

Definição 1.108. *Seja* $\phi : G \to H$ *um homomorfismo diferenciável. Dois campos de vetores* X *e* Y *são ditos* ϕ*-relacionados se* $d\phi_x(X(x)) = Y(\phi(x))$.

Proposição 1.109. *Sejam* X_1 *e* X_2 *são campos diferenciáveis,* ϕ*-relacionado a* Y_1 *e* Y_2, *respectivamente. Então,* $[X_1, X_2]$ *e* $[Y_1, Y_2]$ *são* ϕ*-relacionados.*

Proposição 1.110. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie com álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$, *respectivamente. Seja* $\phi : G \to H$ *um homomorfismo diferenciável e tome* $X \in \mathfrak{g}$. *Então,* $\phi(\exp(X)) = \exp(d\phi_e(X))$.

Proposição 1.111. *Sejam* G *e* H *grupos de Lie com álgebras de Lie* $\mathfrak{g}$ *e* $\mathfrak{h}$, *respectivamente. Seja* $\phi : G \to H$ *um homomorfismo diferenciável. Então,* $d\phi_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{h}$ *é homomorfismo, isto é,* $d\phi_e[X,Y] = [d\phi_e X, d\phi_e Y]$.

Definição 1.112. *A representação adjunta* $Ad : G \to Gl(\mathfrak{g})$, *de* G *em sua álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *é definida por*

$$Ad(g) = d(L_g \circ R_g^{-1})_e = d(R_{g^{-1}} \circ L_g)_e = (dL_g)_{g^{-1}} \circ (dR_{g^{-1}})_e = (dR_{g^{-1}})_g \circ (dL_g)_e.$$

Têm-se que $Ad(g) = d(C_g)_e$, onde $C_g(x) = gxg^{-1}$. A representação Ad é um homomorfismo diferenciável. Assim, para qualquer $g \in G$, $Ad(g)$ é um homomorfismo de $\mathfrak{g}$. Na verdade um automorfismo, uma vez que $Ad(g)^{-1} = Ad(g^{-1})$.

Da Proposição 1.110 se obtém uma igualdade bastante utilizada na teoria de grupos de Lie, que é $C_g(\exp X) = \exp(dC_g)_e(X)$, ou seja, $g\exp(X)g^{-1} = \exp(Ad(g)X)$.

Proposição 1.113. *Seja G um grupo de Lie, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, com o colchete dado pelos campos invariantes à esquerda. Então, $d(Ad)_e(X) = ad(X)$, para todo $X \in \mathfrak{g}$ e vale a igualdade $Ad(\exp X) = \exp(ad(X))$.*

Proposição 1.114. *Seja G um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie. Dados $X, Y \in \mathfrak{g}$, tem-se que $[X, Y] = 0$ se, e somente se, $\exp(sX)\exp(rY) = \exp(rY)\exp(sX)$, para todos $s, r \in \mathbb{R}$. Neste caso, $\exp(X + Y) = \exp(X)\exp(Y)$.*

Proposição 1.115. *Seja G um grupo de Lie com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Então, para qualquer subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$, existe um único subgrupo conexo $H \subset G$, cuja álgebra de Lie é $\mathfrak{h}$.*

A notação utilizada para o único subgrupo H com álgebra $\mathfrak{h}$ será $H = \langle \exp \mathfrak{h} \rangle$, o que é consistente, pois $H = \{\exp(X_1) \cdots \exp(X_s); s \geq 0 \text{ e } X_i \in \mathfrak{h}\}$.

Teorema 1.116. *Sejam G um grupo de Lie e $K \subset G$ um subgrupo fechado. Então, existe uma estrutura diferenciável em G/K, compatível com a topologia quociente, que satisfaz:*

(1) $\dim G/K = \dim G - \dim K$.

(2) A projeção canônica $\pi : G \to G/K$ é uma submersão.

(3) Uma função $f : G/K \to M$ é diferenciável se, e só se, $f \circ \pi$ é diferenciável.

(4) A ação natural $\phi : G \times G/K \to G/K$ é diferenciável. (Essa ação é dada por $\phi(g, xK) = (gx)K$, isto é, $g(xK) = (gx)K$).

(5) Para cada $g \in G$ a aplicação induzida $g : G/K \to G/K, xK \mapsto gxK$ é um difeomorfismo.

Observação 1.117. *O Teorema 1.116 também é válido quando se considera as classes laterais à direita $K \backslash G$. Neste caso, a ação natural é $\phi(g, Kx) = K(xg)$, e consequentemente, a aplicação induzida é $Kx \mapsto Kxg$.*

No caso em que $H \subset G$ um subgrupo normal e fechado, a variedade G/H é um grupo de Lie com a estrutura quociente. E sua álgebra de Lie é isomorfa à álgebra quociente $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Definição 1.118. *Seja G um grupo de lie e M uma variedade diferenciável. M é chamada de espaço homogêneo quando existe uma ação transitiva ϕ de G sobre M.*

Teorema 1.119. *Seja $\phi : G \times X \to X$ uma ação. Então, a aplicação $\xi_x : G/G_x \to G \cdot x$ definida por $\xi_x(gG_x) = gx$ é um difeomorfismo.*

Se M é um espaço homogêneo, então $M \simeq G/K$, onde K é o subgrupo de isotropia G_x, para qualquer $x \in M$.

Teorema 1.120. *Seja $\mathfrak{g}$ uma álgebra de Lie real com $\dim \mathfrak{g}$ finita. Então,*

(1) Existe um único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie conexo e simplesmente conexo $\tilde{G}(\mathfrak{g})$ com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$.

(2) Se G é grupo de Lie conexo com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, então $G \simeq \frac{\tilde{G}(\mathfrak{g})}{\Gamma}$, onde $\Gamma \subset \tilde{G}(\mathfrak{g})$ é um subgrupo discreto central, isto é, $\Gamma \subset Z(\tilde{G}(\mathfrak{g}))$. Neste caso, Γ é isomorfo ao grupo fundamental de G, $\pi_e(G)$.

Um conceito relevante para o este trabalho é a noção de toros maximais e suas propriedades. Neste contexto, considere sempre que G é um grupo de Lie compacto e conexo, com álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Tem-se que $\mathfrak{g}$ é um álgebra de Lie compacta, pois a álgebra de Lie de um grupo compacto é sempre compacta.

Definição 1.121. *Um toro T em G é um subgrupo compacto, conexo e abeliano.*

T é dito toro maximal quando, $T = S$, para todo toro $S \supset T$.

A definição de toro é equivalente a dizer que T é isomorfo a $\dfrac{\mathbb{R}^n}{\mathbb{Z}^n} \simeq S^1 \times \cdots \times S^1$, para algum $n \geq 1$.

Proposição 1.122. *Se $T \subset G$ é um toro maximal, então sua álgebra de Lie $\mathfrak{t}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Reciprocamente, se $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ é uma subálgebra de Cartan, então*

$$\exp \mathfrak{t} =< \exp \mathfrak{t} >= \{\exp(X_1)\exp(X_2)\cdots\exp(X_s); X_i \in \mathfrak{t} \text{ e } s \geq 0\}$$

é um toro maximal.

Ficará claro com os próximos resultados que todos os toros maximais de G possuem a mesma dimensão. Assim, o termo posto de G é utilizado para se referir a dimensão de um toro maximal T de G. Lembre que na álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, o posto foi definido como a dimensão da subálgebra de Cartan. Desta forma, a Proposição acima implica que posto de G é igual ao posto de $\mathfrak{g}$.

Exemplo 1.123. *: Considere $G = SU(2) = \{A \in GL(2,\mathbb{C}); A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = Id \; e \; det(A) = 1\}$ e $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2) = \{A \in \mathfrak{gl}(2,\mathbb{C}); A + \overline{A}^T = 0 \; e \; tr(A) = 0\}$.*

Tem-se que $\mathfrak{t} = \{diag\{ix, -ix\}; x \in \mathbb{R}\}$ é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{su}(2,\mathbb{C})$, pois $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal. Assim, $T = \exp \mathfrak{t}$, é um toro maximal de $SU(2)$.

Em geral, para matrizes de ordem n, tem-se que $\exp A = Id + A + \dfrac{A^2}{2!} + \dfrac{A^3}{3!} \cdots$, em particular, no caso de matrizes diagonais de ordem 2, obtêm-se que

$$\exp \begin{pmatrix} ix & 0 \\ 0 & -ix \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(ix) = cos(x) + isen(x) & 0 \\ 0 & \exp(-ix) = cos(x) - isen(x) \end{pmatrix}.$$

Portanto, um toro maximal de $SU(2)$ é dada por $T = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \overline{\alpha} \end{pmatrix}; \alpha \in S^1 \right\}$.

Proposição 1.124. *Sejam $T = \exp \mathfrak{t}$ e $T_1 = \exp \mathfrak{t}_1$ toros maximais. Então, existe $g \in G$ tal que $T_1 = gTg^{-1}$.*

Teorema 1.125. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e T um toro maximal de G. Então, $G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$, isto é, todo elemento de G é conjugado por um elemento de T.*

Este teorema é equivalente a dizer que a aplicação $\exp : \mathfrak{g} \longrightarrow G$ é sobrejetora. De fato, tem-se que o conjugado gTg^{-1} também é um toro maximal de G, para todo $g \in G$, assim pela Proposição 1.122, existe uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t} \in \mathfrak{g}$ tal que $\exp(\mathfrak{t}) = gTg^{-1}$. Desta forma, se $G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$, então $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é sobrejetora. Por outro lado, como $\mathfrak{g}$ é a união se suas subálgebras de Cartan, a Proposição 1.124 implica que $\exp(\mathfrak{g}) \subset \bigcup_{g \in G} gTg^{-1} \subset G$. Assim, se $\exp : \mathfrak{g} \to G$ é sobrejetora, segue que $G = \bigcup_{g \in G} gTg^{-1}$, o que conclui a equivalência.

Corolário 1.126. *O centro $Z(G)$ de G está contido em todo toro maximal de G.*

O próximo teorema simplifica a definição de toro maximal.

Teorema 1.127. *Sejam T um toro maximal de G e S um subgrupo abeliano de G tal que $T \subset S$. Então, $T = S$.*

Isso garante que se T for maximal em relação a propriedade abeliana, então T será um toro maximal.

CAPÍTULO 2

CAMPOS DE KILLING

Seja $(M, \langle ., . \rangle)$ uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão Riemanniana de M.

Definição 2.1. *Um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é chamado de Campo de Killing, se satisfaz*

$$\langle \nabla_Y X, Z \rangle = -\langle Y, \nabla_Z X \rangle, \forall Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Proposição 2.2. *Um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ é de Killing se, e somente se, o fluxo local de X é uma isometria.*

Demonstração: Uma demonstração dessa equivalência pode ser vista em [6], página 237. □

Lema 2.3. *Se X, Y são Campos de Killing em M, então*

$$2\langle \nabla_X Y, Z \rangle = \langle [X, Y], Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle, \forall Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Demonstração: Como ∇ é a conexão Riemanniana, tem-se que ∇ é simétrica e compatível com a métrica. Disso e do fato de que X e Y são de Killing, conclui-se que

$$\begin{aligned}
\langle [X, Y], Z \rangle - Z\langle X, Y \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle - \langle \nabla_Y X, Z \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\
&= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \cancel{\langle Y, \nabla_Z X \rangle} - \cancel{\langle \nabla_Z X, Y \rangle} - \langle X, \nabla_Z Y \rangle \\
&= 2\langle \nabla_X Y, Z \rangle.
\end{aligned}$$

□

2.1 Teorema de Berger

Para o próximo resultado, considere a aplicação $A_X : T_pM \to T_pM$, definida por $A_X(v) = \nabla_v X, \forall v \in T_pM$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$.

Lema 2.4. *Suponha que X é um Campo de Killing em M e R o tensor curvatura de M. Seja $f : M \to \mathbb{R}$, a função dada por, $f(q) = \langle X, X\rangle_q$. Se $p \in M$ é um ponto crítico de f, então*

$$\langle A_X(Z_p), A_X(Z_p)\rangle = \frac{1}{2}Z_pZ\langle X, X\rangle + \langle R(X,Z)Z, X\rangle_p \text{ e } \langle (A_XZ)_p, X\rangle = 0.$$

Demonstração: Tem-se que

$$0 = df_p(Z) = Z(f)(p) = Z\langle X, X\rangle_p = \langle \nabla_Z X, X\rangle_p + \langle X, \nabla_Z X\rangle_p = 2\langle \nabla_Z X, X\rangle_p.$$

Assim,

$$\langle A_X(Z), X\rangle_p = 0. \tag{2.1}$$

Além disso, como X é de Killing, as seguintes equações são válidas:

$$\begin{aligned} -\langle \nabla_X X, Z\rangle &= \langle \nabla_Z X, X\rangle && (2.2)\\ \langle \nabla_{[X,Z]} X, Z\rangle &= -\langle \nabla_Z X, [X,Z]\rangle && (2.3)\\ \langle \nabla_Z X, Z\rangle &= -\langle \nabla_Z X, Z\rangle. && (2.4) \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}ZZ\langle X, X\rangle + \langle R(X,Z)Z, X\rangle\\ &= \frac{1}{2}Z(2\langle \nabla_Z X, X\rangle) + \langle -R(X,Z)X, Z\rangle\\ &\overset{(2.2)}{=} Z(-\langle \nabla_X X, Z\rangle) + \langle \nabla_Z\nabla_X X - \nabla_X\nabla_Z X + \nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle\\ &= -\cancel{\langle \nabla_Z\nabla_X X, Z\rangle} - \langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle + \cancel{\langle \nabla_Z\nabla_X X, Z\rangle} - \langle \nabla_X\nabla_Z X, Z\rangle + \langle \nabla_{[X,Z]}X, Z\rangle\\ &\overset{(2.3)}{=} -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle - \langle \nabla_X\nabla_Z X, Z\rangle - \langle \nabla_Z X, [X,Z]\rangle\\ &= -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle - X\langle \nabla_Z X, Z\rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z\rangle - \langle \nabla_Z X, \nabla_X Z - \nabla_Z X\rangle\\ &\overset{(2.4)}{=} -\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle + \langle \nabla_Z X, \nabla_Z X\rangle. \end{aligned}$$

Agora, pela equação (2.1), $\langle \nabla_X X, Z\rangle_p = -\langle \nabla_Z X, X\rangle_p = 0, \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$. Assim, $\nabla_X X(p) = 0$, logo $\langle \nabla_X X, \nabla_Z Z\rangle_p = 0$.

Por fim, $\langle A_X(Z_p), A_X(Z_p)\rangle = \frac{1}{2} Z_p Z\langle X, X\rangle + \langle R(X,Z)Z, X\rangle_p$.

□

Teorema 2.5. *(Teorema de Berger) Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão par, compacta, conexa e com curvatura seccional estritamente positiva. Se X é um Campo de Killing em M, então X possui (pelo menos) um ponto de singularidade.*

Demonstração: Suponha por absurdo que $X_m \neq 0$, para todo $m \in M$. Como M é compacto e a aplicação $f : M \to \mathbb{R}$, definida por $f(m) = \langle X, X\rangle_m$ é contínua, segue que f possui um ponto de mínimo p. Seja $S = X_p^{\perp}$, o subespaço ortogonal a X_p em T_pM. Veja que $\dim S$ é ímpar, uma vez que $\dim S = \dim T_pM - 1 = \dim M - 1$.

Pelo Lema 2.4, vale que $\langle A_X(Z_p), X\rangle = 0$. Assim, se $Z_p = z \in S$, então $\langle A_X(z), X\rangle_p$ é 0. Disso, segue que $A_X(z) \in S$.

Desta forma, pode-se considerar a aplicação $B = A_X|_S : S \to S$, que satisfaz:

- B é Linear, este fato segue direto das propriedades da conexão e do produto interno.

- B é injetora. De fato, tome um elemento não-nulo $z \in S$. Aplicando o Lema 2.4, segue que

$$\begin{aligned} \|B(z)\|^2 &= \langle A_X(z), A_X(z)\rangle \\ &= \frac{1}{2} ZZ\langle X, X\rangle_p + \langle R(X,Z)Z, X\rangle_p \\ &= \frac{1}{2} ZZ\langle X, X\rangle_p + K(X_p, Z_p)|X_p \wedge Z_p|^2. \end{aligned}$$

  Neste caso, $|X_p \wedge Z_p|^2 = |X_p||Z_p|$ e $K(X_p, Z_p) > 0$ por hipótese. Logo, a parcela $K(X_p, Z_p)|X_p \wedge Z_p|^2$ é positiva. Além disso, como p é ponto de mínimo de f, a segunda derivada de f em p deve ser não-negativa, logo $Z_p Z\langle X, X\rangle \geq 0, \forall Z \in \mathfrak{X}(M)$. Isto é, $\|B(z)\|^2 > 0$, e consequentemente $B(z) \neq 0$. Logo, B é injetora.

- B é isomorfismo. A sobrejetividade de B segue do Teorema do Núcleo e Imagem. Assim, pelos itens anteriores, B é um isomorfismo.

- B é antissimétrica. Como X é de Killing, vale que $\langle A_X(z), y\rangle = \langle \nabla_z X, y\rangle_p = -\langle \nabla_y X, z\rangle_p = -\langle A_X(y), z\rangle$. Isto mostra que B é antissimétrica.

Por fim, considerando a forma matricial de B, conclui-se que $\det B = \det(-B^t) = (-1)^{\dim S} \det B^t = -\det B$, pois $\dim S$ é ímpar. Donde segue que $\det B = 0$, o que é um absurdo, uma vez que B é um isomorfismo.

Portanto, existe um ponto $m \in M$ tal que $X_m = 0$.

□

2.2 Teorema de Wallach

O objetivo desta seção é mostrar o Teorema de Wallach, o qual garante que $SU(2)$ é o único (a menos de isomorfismo) grupo de Lie conexo e simplesmente conexo que possui métrica Riemanniana invariante à esquerda com curvatura seccional estritamente positiva.

Definição 2.6. *Seja $\pi : G \to M$ uma submersão. A fibra de π passando por $p \in G$ é definida por $F_p = \pi^{-1}(\pi(p))$.*

As fibras de π são subvariedades de G, assim $T_p(F_p)$ é subespaço de T_pG.

Definição 2.7. *O subespaço $V_p = T_pF_p$ é chamado subespaço vertical em p. E o complemento ortogonal de V_p, denotado por H_p, chama-se subespaço horizontal.*

Observe que $V_p = Ker(d\pi_p)$.

Definição 2.8. *Uma distribuição Δ em G é uma aplicação que a cada $x \in G$ associa um subespaço $\Delta_x \subset T_xG$.*

Definição 2.9. *Uma distribuição Δ é diferenciável, se para todo $p \in G$, existe um aberto U contendo p e l campos diferenciáveis $X_1, ..., X_l$ tais que $\Delta(q) = \langle\{X_1(q), ..., X_l(q)\}\rangle$, para todo $q \in U$.*

Exemplo 2.10. *Tem-se que $\Delta(p) = V_p$ e $\bar{\Delta}(p) = H_p$ são exemplos de distribuições diferenciáveis.*

Para ver que as distribuições são diferenciáveis, considere as parametrizações ξ de uma vizinhança $U \subset G$ de p e ψ de uma vizinhança $V \subset M$ de $\pi(p)$, tais que $(\psi^{-1} \circ \pi \circ \xi)(x, y) =$

x. Essas parametrizações existem, conforme o Teorema da Forma Local das Submersões. A aplicação acima está definida em um aberto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, da forma $V \times W$, onde $m = \dim G$ e $n = \dim M$. A base canônica $\beta = \{e_1, ..., e_n, ..., e_m\}$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$, determina a base $\gamma = \{\frac{\partial}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\partial}{\partial \xi_m}\}$ para a vizinhança U, para obter uma base ortogonalizada, basta utilizar o processo de Gram-Schmidt. Seja $\tilde{\gamma} = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_1}, ..., \frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_m}\}$ a base ortogonal obtida de γ, então $\tilde{\gamma}_1 = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_1}(q), ..., \frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_n}(q)\}$ deve ser base de $\bar{\Delta}(q) = H_q$, com $q \in U$ e $\tilde{\gamma}_2 = \{\frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_{n+1}}(q), ..., \frac{\tilde{\partial}}{\partial \xi_m}(q)\}$ deve ser base de $\Delta(q) = V_q$, com $q \in U$.

Definição 2.11. *Os conjuntos $\mathcal{V} = \{(p, V_p); p \in G\}$, $\mathcal{H} = \{(p, H_p); p \in G\}$ são chamados de distribuições verticais e horizontais, respectivamente.*

Escreva o fibrado tangente como $TG = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$. Assim, dado $X \in \mathfrak{X}(G)$, existem únicos campos $X_1 \in \Gamma(\mathcal{H})$ e $X_2 \in \Gamma(\mathcal{V})$, chamados de componentes horizontais e verticais de X, respectivamente, satisfazendo $X = X_1 + X_2$. Como $\pi : G \to M$ é submersão, a derivada $d\pi_p|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}M$ é um isomorfismo. Logo, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, existe um único $\tilde{X} \in \Gamma(\mathcal{H})$ tal que $d\pi\tilde{X} = X \circ \pi$, isto é, $\tilde{X}$ é π-relacionado a X.

Definição 2.12. *Dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, o levantamento horizontal de X é único campo $\tilde{X} \in \Gamma(\mathcal{H})$, π-relacionado a X.*

Observação 2.13. *O levantamento horizontal $\tilde{X}$ é um campo de vetores diferenciáveis de G^m. De fato, dado $\pi(p) \in M^n$ e uma parametrização (V, ψ) de $\pi(p)$, pela Forma Local das Submersões 1.11, existe um difeomorfismo $\xi : V \times W \to U$, tal que $\psi^{-1} \circ \pi \circ \xi(x, y) = x$, onde W é um aberto de $\mathbb{R}^{m-n}$ e U um aberto de G que contém p. Equivalentemente, $\pi \circ \xi(x, y) = \psi(x)$, para todo $(x, y) \in V \times W$. Tomando $Y = d\xi(d\psi^{-1}(X|_{\psi^{-1}(V)}), 0)$, tem-se que Y é um campo diferenciável e $d\pi Y = d\pi d\xi(d\psi^{-1}(X|_{\psi^{-1}(V)}), 0) = \cancel{d\psi d\psi^{-1}} X|_{\psi^{-1}(V)} \circ \pi$. Agora, $\tilde{X}$ é a componente horizontal de Y, $\tilde{X}$ é diferenciável e satisfaz a definição 2.12, acima.*

Proposição 2.14. *Sejam G é um grupo de Lie com métrica Riemanniana invariante à esquerda e K um subgrupo fechado de G. Considerando a projeção $\pi : G \to K \backslash G$, tem-se que $(dL_k)_p(V_p) = V_{kp}$ e $(dL_k)_p(H_p) = H_{kp}$, para todo $p \in G$ e $k \in K$.*

Demonstração: Considere os espaços verticais e horizontais em $p \in G$, o que é possível pois pelo Teorema 1.116 π é uma submersão.

Note que $\pi \circ L_k = \pi$, assim, para $v \in V_p = Ker(d\pi_p)$, segue que

$$\begin{aligned} d\pi_{kp}[(dL_k)_p(v)] &= d(\pi \circ L_k)_p(v) \\ &= d\pi_p(v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Isto é, $(dL_k)_p(V_p) \subset V_{hp}$.

Seja $\alpha = \{v_1, ..., v_l, v_{l+1}, ..., v_n\}$ uma base de T_pG, de modo que, $\beta = \{v_1, ..., v_l\}$ é base de V_p e $\gamma = \{v_{l+1}, ..., v_n\}$ é base de H_p. Como $(dL_k)_p : T_pG \to T_{kp}G$ é uma isometria, conclui-se que $\tilde{\alpha} = \{d(L_k)_p(v_1), ..., d(L_k)_p(v_n)\}$ é uma base de $T_{kp}G$, de forma que, $\tilde{\beta} = \{d(L_k)_p(v_1), ..., d(l_k)_p(v_l)\}$ é base de V_{kp} e $\tilde{\gamma} = \{d(L_k)_p(v_{l+1}, ..., d(L_k)_p(v_n)\}$ é base de H_{kp}.

Portanto, $(dL_k)_p(V_p) = V_{kp}$ e $(dL_k)_p(H_p) = H_{kp}$. □

Definição 2.15. *Um campo de vetores X é dito vertical, se $X(p) \in V_p$, para todo $p \in G$. X é dito horizontal se $X(p) \in H_p$, para todo $p \in G$.*

Definição 2.16. *Uma aplicação $\pi : G \to M$ é uma submersão Riemanniana se:*

(i) *π é uma submersão.*

(ii) *$d\pi_p|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}M$ é uma isometria.*

Em particular, $d\pi_p$ preserva o comprimento de vetores ortogonais as fibras, para todo $p \in G$.

Proposição 2.17. *Seja G um grupo de Lie, com métrica Riemanniana invariante à esquerda. Se K é um subgrupo fechado de G, então existe uma métrica Riemanniana em $M = K\backslash G$ de forma que $\pi : G \to M = K\backslash G$ é uma submersão Riemanniana.*

Demonstração: Pelo Teorema 1.116, existe uma estrutura diferenciável de forma que π é uma submersão. Assim, para cada $p \in G$, a aplicação $d\pi_p : T_pG \to T_{\pi(p)}K\backslash G$ é sobrejetora. Consequentemente $T_{Kp}K\backslash G \simeq \frac{T_pG}{V_p}$, ou seja, $T_{Kp}K\backslash G \simeq H_p$.

Note que se $q \in F_p = \pi^{-1}\pi(p)$, então $\pi(p) = \pi(q)$ e assim, $H_p \simeq H_q$. Dados $X, Y \in T_{\pi(p)}K\backslash G$, existem únicos $X_p, Y_p \in H_p$ e $X_q, Y_q \in H_q$ tais que $d\pi_p(X_p) = d\pi_p(X_q) = X$ e $d\pi_p(Y_p) = d\pi_p(Y_q) = Y$.

Afirmação: $\langle X_p, Y_p\rangle_p = \langle X_q, Y_q\rangle_q$, para todo $q \in F_p$.

Como $q \in F_p$, tem-se que $\pi(p) = \pi(q)$ e assim, existe $k \in K$ que satisfaz $q = kp$. Além disso, como a métrica de G é invariante à esquerda, segue que $\langle X_p, Y_p\rangle_p = \langle d(L_k)_p(X_p), d(L_k)_p(Y_p)\rangle_{kp}$. Desta forma, para provar a afirmação feita, é suficiente mostrar que $X_{kp} = d(L_k)_p(X_p)$ e $Y_{kp} = d(L_k)_p(Y_p)$. Basta mostrar que $X_{kp} = d(L_k)_p(X_p)$, pois a outra igualdade segue de modo análogo. Lembre que $X_{kp} \in H_{kp}$ é o único elemento tal que $d\pi_{kp}(X_{kp}) = X$ e pela Proposição 2.14, $d(L_k)_p(X_p) \in H_{kp}$. Logo, para concluir a igualdade, basta mostrar que $d\pi_{kp}[d(L_k)_p(X_p)] = X$. Usando o fato de que $\pi \circ L_k = \pi$, segue que

$$\begin{aligned} d\pi_{kp}[(dL_k)_p(X_p)] &= d(\pi \circ L_k)_p(X_p) \\ &= d\pi_p(X_p) \\ &= X, \end{aligned}$$

o que prova a afirmação acima.

Desta maneira, fica bem definido um produto interno em $T_{\pi(p)}K\backslash G$, da forma

$$\langle X, Y\rangle_{\pi(p)} = \langle X_q, Y_q\rangle_q, \text{ onde } q \in F_p.$$

Dados os campos de vetores $Z, W \in \mathfrak{X}(K\backslash G)$, considere $\tilde{Z}_0$ e $\tilde{W}_0$ seus respectivos levantamentos horizontais. Então,

$$\langle Z, W\rangle = \langle d\pi(\tilde{Z}_0), d\pi(\tilde{W}_0)\rangle = \langle \tilde{Z}_0, \tilde{W}_0\rangle, \text{ pois } \tilde{Z}_0, \tilde{W}_0 \in \Gamma(\mathcal{H}).$$

Isto mostra que a função $\langle Z, W\rangle$ é diferenciável. Assim, a métrica definida em $K\backslash G$ é uma métrica Riemanniana, de forma que $d\pi_p|_{H_p} : H_p \to T_{\pi(p)}K\backslash G$ é uma isometria. Então, π é uma submersão Riemanniana.

□

Proposição 2.18. *Seja G um grupo de Lie com métrica Riemanniana invariante à esquerda. Se $X \in \mathfrak{X}(G)$ é invariante à direita, então X é de Killing em G.*

Demonstração: Seja φ_t o fluxo local de t, para algum $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Denotando por R_y a translação à direita por y em G, verifica-se que

$$\begin{aligned} X(py)(f) &= [(dR_y)_p X(p)](f) \\ &= X_p(f \circ R_y) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f \circ R_y(\varphi_t(p)) - f \circ R_y(p)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f \circ R_y \circ \varphi_t \circ R_{y^{-1}}(q) - f(q)}{t}, \text{ onde } q = R_y(p). \end{aligned}$$

Então, $\psi_t = R_y \circ \varphi_t \circ R_{y^{-1}}$ é o fluxo local de dR_yX. Mas, como X é invariante à direita $dR_yX = X$, logo $\psi_t = \varphi_t$. Isso implica que $R_y \circ \varphi_t = \varphi_t \circ R_y$.

Agora, segue que $\varphi_t(y) = \varphi_t \circ R_y(1) = R_y \circ \varphi_t(1) = L_{\varphi_t(1)}(y)$, onde $L_{\varphi_t(1)}$ é a translação à esquerda por $\varphi_t(1)$.

As translações à esquerda são isometrias de G, logo da última igualdade se conclui que φ_t é isometria. Portanto, X é de Killing.

$\square$

Seja $C(K) = \{g \in G; gk = kg, \forall k \in K\}$ o centralizador de K em G. Considere $M = K/G$ o espaço das classes laterais à direita. Assim a aplicação $\phi : C(K) \times M \to M$, definida por $\phi(g, Kx) = Kgx$, é uma ação diferenciável.

Dado um elemento X na álgebra de $C(K)$, considere $X^* \in \mathfrak{X}(M)$, dado por

$$X^*(Kg) = d(\phi_{Kg})_e(X).$$

Proposição 2.19. *Sejam G um grupo de Lie com métrica invariante à esquerda e K um subgrupo fechado de G.*

(a) Todo $g \in C(K)$ age como isometria de $M = K\backslash G$.

(b) Todo $X \in \mathcal{L}(C(K))$ age como um campo de Killing em M.

Demonstração:

(a) Dados $x, y \in T_{Kp}M$, deve-se provar para todo $p \in G$ e $g \in C(K)$ que $\langle x, y\rangle_{Kp} = \langle d(\phi_g)_{Kp}(x), d(\phi_g)_{Kp}(y)\rangle_{Kgp}$.

Considere $x_1, y_1 \in H_p \subset T_pG$, os únicos vetores que satisfazem $d\pi_p(x_1) = x$ e $d\pi_p(y_1) = y$. Assim, $\langle x, y\rangle_{Kp} = \langle x_1, y_1\rangle_p$. De modo análogo, sendo $x_2, y_2 \in H_{gp}$, os vetores tais que $d\pi_{gp}(x_2) = d(\phi_g)_{Kp}(x)$ e $d\pi_{gp}(y_2) = d(\phi_g)_{Kp}(y)$. É verdade que $\langle d(\phi_g)_{Kp}(x), d(\phi_g)_{Kp}(y)\rangle_{Kgp} = \langle x_2, y_2\rangle_{gp}$.

Fixe $g \in C(K)$ e considere L_g a traslação à esquerda em G. Veja que

$$\pi \circ L_g(a) = \pi(ga) = Kga = g\pi(a) = \phi_g \circ \pi(a).$$

Assim,

$$d\pi_{gp}((dL_g)_p(x_1)) = d(\pi \circ L_g)_p(x_1) = d(\phi_g \circ \pi)_p(x_1) = d(\phi_g)_{Kp} \circ d\pi_p(x_1) = d(\phi_g)_p(x).$$

Sabe-se que $d(L_g)_p(x_1) \in H_{gp}$, assim segue da unicidade de x_2 que $d(L_g)_p(x_1) = x_2$. De modo análogo, $d(L_g)_p(y_1) = y_2$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle_{Kp} &= \langle x_1, y_1\rangle_p \\
&= \langle d(L_g)_p(x_1), d(L_g)_p(y_1)\rangle_{gp} \\
&= \langle x_2, y_2\rangle_{gp} \\
&= \langle d(\phi_g)_{Kp}(x), d(\phi_g)_{Kp}(y)\rangle_{Kgp}.
\end{aligned}$$

(b) Dado $X \in \mathcal{L}(C(K))$, deve-se mostrar que o campo $X^*(Kp) = d(\phi_{Kp})_e(X)$ é de Killing em M. Veja que $\varphi(t, Kp) = \phi(\exp(tX), Kp)$ é diferenciável e

$$\left.\frac{\partial\varphi(t, Kp)}{\partial t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial\phi(\exp(tX), Kp)}{\partial t}\right|_{t=0} = d\phi_{(1,Kp)}(X, 0) = X^*(Kp).$$

Logo, $\varphi_t(Kp) = \phi_{\exp tX}(Kp)$ é o fluxo de X^* que passa por Kp, quando $t = 0$.

Como $X \in \mathcal{L}(C(K))$, segue que $\exp(tX) \in C(K)$. Assim, pelo item (a), concluí-se que $\varphi_t : M \to M$ é uma isometria. Portanto, X^* é um campo de Killing em M.

$\square$

Proposição 2.20. *Todo grupo de Lie G que possui curvatura seccional estritamente positiva é compacto.*

Demonstração: Suponha que a métrica em G é invariante à esquerda. Sejam $x \in T_pG$, tal que $\|x\| = 1$ e $\{z_1, ..., z_{n-1}, x\}$ uma base ortonormal de T_pG. Então,

$$Ric_p(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(x, z_i)z_i, x\rangle_p = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}K(x, z_i) > 0.$$

Além disso, pela compacidade de $S_p^n = \{v \in T_pG; \|v\| = 1\}$ e pela continuidade da aplicação, $Ric_p|_{S_p^n}$ possui um ponto de mínimo. Assim, existe $\delta > 0$, tal que

$$Ric_p(v) \geq \delta > 0, \forall v \in S_p^n.$$

Considere os campos invariantes a esquerda X e Z_i, com $i = 1, ..., n-1$, de forma que $X(p) = x$ e $Z_i(p) = z_i$. Uma vez que as translações à esquerda são isometria para $q \in G$, segue que $\{Z_1(q), ..., Z_{n-1}(q), X(q)\}$ é base ortonormal de T_qG.

Pelo fato de X e Z_i serem invariantes a esquerda, tem-se que $[X, Z_i]$ e $\nabla_X Z_i$ também o são, e consequentemente, $R(X, Z_i)X$ é invariante à esquerda.

Logo,

$$\begin{aligned}
Ric_q(X(q)) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(X(q), Z_i(q))X(q), Z_i(q)\rangle_q \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle d(L_y)_q(R(X(q), Z_i(q))X(q)), d(L_y)_q(Z_i(q))\rangle_p, \text{ onde } y = pq^{-1}, \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(X(p), Z_i(p))X(p), Z_i(p)\rangle_p \\
&= Ric_p(X(p) = x) > 0.
\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Teorema de Bonnet-Myers, conclui-se que G é compacto.

□

Na demonstração da Proposição 2.20, fica evidente que a curvatura de Ricci (e igualmente a curvatura seccional) de um grupo de Lie, não depende do ponto $p \in G$. Por isso, as curvaturas de G estão bem determinadas pela sua álgebra de Lie $\mathfrak{g} \simeq T_eG$.

Teorema 2.21. *(Teorema de Wallach) Seja G um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Suponha G admite uma métrica invariante à esquerda com curvatura seccional estritamente positiva. Então, G é isomorfo ao grupo $SU(2)$.*

Demonstração: Note primeiramente que G também é compacto, conforme a Proposição 2.20. Como G é compacto e conexo, existe um toro maximal H em G, isto é, existe um isomorfismo $\psi : S^1 \times ... \times S^1 \to H$. Tomando $T = \psi(S^1 \times 1 \times ... \times 1)$, tem-se que $T \simeq S^1$, ou seja, T é um toro unidimensional.

Em particular, tem-se que T é um subgrupo fechado. Então, pela Proposição 2.17 $M = T/G$ possui uma estrutura Riemanniana, de forma que $\pi : G \to M$ é uma submersão Riemanniana. Sejam K e K_* a curvatura seccional de G e M respectivamente. Um resultado de O'Neill [Corolário 1, de [10]] diz que se π é submersão Riemanniana, então $K_*(x_*, y_*) \geq K(x, y) > 0$, onde x, y são os vetores horizontais tais que $d\pi_p(x) = x_*$ e $d\pi_p(y) = y_*$. Logo, M tem curvatura seccional estritamente positiva.

Agora, seja X um campo não-nulo e invariante à direita em G. Note $X(p) \neq 0$, para todo $p \in G$. Segue da Proposição 2.18, que X é um Campo de Killing em G. Assim, pelo Teorema de Berger, pode-se concluir que a dimensão de G é ímpar. E como $dim(M) = dim(G) - dim(T)$, segue que M tem dimensão par.

Sejam $C(T)$ o centralizador de T em G e $\phi : C(T) \times M \to M$ a ação dada por $\phi(g, Tx) = Tgx$. Se $X \in \mathcal{L}(C(T))$, então o campo $X^*(Tp) = d(\phi_{Tp})_e(X)$ é de Killing em M, conforme a Proposição 2.19. Veja que M também é compacta e conexa, uma vez que π é contínua. Além disso, como dito anteriormente, M tem curvatura estritamente positiva. Assim, aplicando o Teorema de Berger, tem-se que existe $Tp \in M$, tal que $X^*(Tp) = 0$. Logo, a curva constante $\varphi(t, Tp) = Tp$ é a curva integral que passa por Tp em $t = 0$. Mas, como visto na demonstração da Proposição 2.19, a curva integral é da forma $\varphi(t, Tp) = \phi(\exp(tX), Tp)$, por isso, φ deve ser constante.

Portanto, $Tp = \varphi(t, Tp) = T \exp(tX)p$, assim, $\exp(tX) \in T$ e isso implica que $X \in \mathfrak{t}$.

Então, $\mathfrak{t} \subset \mathcal{L}(C(T))$. Como $T \subset C(T)$, também vale a inclusão contrária, e daí $\mathfrak{t} = \mathcal{L}(C(T))$. Seja S o toro maximal que contém T, assim $T \subset S \subset C(T)$. Em relação as álgebras, tem-se $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{s} \subset \mathcal{L}(C(T)) = \mathfrak{t}$, ou seja, $\mathfrak{t} = \mathfrak{s}$. Isso implica que $T = S$, assim, T é toro maximal de G. Com isso, conclui-se que o posto de G é 1.

Pela classificação das álgebras de Lie simples e complexas, tem-se que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ é a única álgebra, a menos de isomorfismo, que possui subálgebra de Cartan de dimensão um. Então, $\mathfrak{su}(2)$ é a álgebra de G.

Como G é conexo, simplesmente conexo, segue do Teorema 1.120, que $G \simeq SU(2)$.

$\square$

CAPÍTULO 3

CONEXÃO RIEMANNIANA EM ESPAÇOS HOMOGÊNEOS

Durante este capítulo, G é um grupo de Lie conexo e K um subgrupo compacto de G. O objeto de estudo aqui será o espaço homogêneo $M = G/K$, mais especificamente, a conexão Riemanniana deste espaço. Assuma também que G age efetivamente sobre M, isto é, a ação natural de G em M é efetiva.

3.1 O colchete em espaços homogêneos

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma estrutura Riemanniana em M, G-invariante. Denote por $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie dos campos invariantes à esquerda em G e defina a aplicação $\alpha : \mathfrak{g} \to \mathfrak{X}(M)$, como sendo $\alpha(X) = X^*$, onde $X^*(gK) = \frac{\partial}{\partial t}(\exp(tX)gK)|_{t=0}$, para todo $g \in G$.

De modo análogo ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.19, tem-se que

$$X^*(gK) = d(\phi_{gK})_e(X).$$

Proposição 3.1. *O colchete em $\mathfrak{X}(M)$, satisfaz $[X^*, Y^*] = -[X, Y]^*$.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{g}_R$ a álgebra de Lie dos campos invariantes à direita e $X_r, Y_r \in \mathfrak{g}_R$. Tome $X, Y \in \mathfrak{g}$ tais que $X(e) = X_r(e)$ e $Y(e) = Y_r(e)$, assim pela Proposição 1.96 segue que $[X_r, Y_r] = -[X, Y]$.

Dado $x \in M$, considere $\phi_x : G \to M$, dada por $\phi_x(g) = gx$. Note que

$$\begin{aligned}\phi_x \circ (X_r)_t(g) &= \phi_x(\exp(tX_r)g)\\ &= (\exp(tX_r)g)x\\ &= \phi(\exp(tX_r), gx)\\ &= \phi_{\exp(tX_r)}(gx)\\ &= \phi_{\exp(tX_r)} \circ \phi_x(g).\end{aligned}$$

Como $\phi_{\exp(tX_r)}$ é o fluxo de X^*, concluímos que X_r e X^* são ϕ_x-relacionados. O mesmo vale para Y_r e Y^*, desta forma, $[X_r, Y_r]$ e $[X^*, Y^*]$ são ϕ_x- relacionados, pela Proposição 1.109. Portanto,

$$[X^*, Y^*](x) = d(\phi_x)_e([X_r, Y_r]) = d(\phi_x)_e(-[X, Y]) = (-[X, Y])^*(x) = -([X.Y]^*)(x).$$

□

3.2 Conexão em espaços homogêneos

Seja ∇ a conexão Riemanniana de M. Seja $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{k}$ é álgebra de Lie de K e $\mathfrak{p}$ é um complemento $Ad(K)-$invariante, isto é, $Ad(K)(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$. A existência do complemento $\mathfrak{p}$ é uma consequência da Proposição 1.50, a qual garante a existência de um produto interno $(,)$ que satisfaz $(Ad(k)X, Ad(k)Y) = (X, Y)$, para todo $k \in K$ e $X, Y \in \mathfrak{g}$. Assim, basta tomar $\mathfrak{p}$ como o complemento ortogonal de $\mathfrak{k}$ em relação ao produto $(,)$, pois para $X \in \mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ e $Y \in \mathfrak{k}$ vale que $0 = (X, Y) = (Ad(k)X, Ad(k)Y)$. Como $\mathfrak{k}$ é claramente $Ad(K)$-invariante, tem-se que $Ad(k)(Y) \in \mathfrak{k}$, logo $Ad(k)(X) \in \mathfrak{p} = \mathfrak{t}^\perp$, para todo $k \in K$, isto mostra que $\mathfrak{p} = \mathfrak{k}^\perp$ é $Ad(K)$-invariante.

Veja que $\mathfrak{p}$ é isomorfo a $T_{\bar{e}}M$. Considere uma vizinhança U de $e \in G$ e uma base $\{X_1, ..., X_m\}$ de $\mathfrak{p}$. Assim, $\{X_1^*(\bar{q}), ..., X_m^*(\bar{q})\}$ é base em uma vizinhança de $\bar{e}$.

Dados $W, Z \in \mathfrak{X}(M)$, escreva $W(\bar{q}) = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i(\bar{q})X_i^*(\bar{q})$ e $Z(\bar{q}) = \sum\limits_{j=1}^{m} g_j(\bar{q})X_j^*(\bar{q})$ em uma vizinhança de $\bar{e}$.

Se define inicialmente para essa base, $\bar{\nabla}_{X_i*}X_j^*(\bar{e}) = -\frac{1}{2}[X_i, X_j]^*(\bar{e})$. Em seguida, estenda essa aplicação, de forma a satisfazer as condições de conexão afim no ponto

$\bar{e}$, ou seja, $\bar{\nabla}_W Z(\bar{e}) = (\sum\limits_{i,j=1}^{m} f_i g_j \bar{\nabla}_{X_i^*} X_j^* + f_i X_i^*(g_j) X_j^*)(\bar{e})$. Por fim, defina $\bar{\nabla}_W Z(\bar{q}) = d\phi_q(\bar{\nabla}_{(d\phi_q^{-1} W)}(d\phi_q^{-1} Z)(\bar{e}))$, onde ϕ é a ação de G em M e ϕ_q determina uma isometria de M. Desta forma, $\bar{\nabla}$ é uma conexão afim em M.

Definição 3.2. *Seja* $U : \mathfrak{p} \times \mathfrak{p} \to \mathfrak{p}$, *dado por* $U(X,Y) = (\nabla_{X^*} Y^* - \bar{\nabla}_{X^*} Y^*)(\bar{e})$.

Note que

$$\begin{aligned} U(X,Y) &= (\nabla_{X^*} Y^* - \bar{\nabla}_{X^*} Y^*)(\bar{e}) \\ &= ([X^*, Y^*] + \nabla_{Y^*} X^* + \frac{1}{2}[X,Y]^*)(\bar{e}) \\ &= (-[X,Y]^* + \nabla_{Y^*} X^* + \frac{1}{2}[X,Y]^*)(\bar{e}) \\ &= (\nabla_{Y^*} X^* - \frac{1}{2}[X,Y]^*)(\bar{e}) \\ &= (\nabla_{Y^*} X^* + \frac{1}{2}[Y,X]^*)(\bar{e}) \\ &= (\nabla_{Y^*} X^* - \bar{\nabla}_{Y^*} X^*)(\bar{e}) \\ &= U(Y,X). \end{aligned}$$

Isto é, U é simétrico.

Seja $Z \in \mathfrak{g}$. Denote por $Z_\mathfrak{p}$, a projeção de Z em $\mathfrak{p}$, isto é, $Z - Z_\mathfrak{p} \in \mathfrak{k}$, com $Z_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$.

Lema 3.3. *Se* $X, Y, Z \in \mathfrak{p}$, *então*

$$\langle U(X,Y), Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [Z,X]_\mathfrak{p}, Y\rangle + \langle [Z,Y]_\mathfrak{p}, X\rangle).$$

Demonstração: Note primeiramente que se $W = W_\mathfrak{k} + W_\mathfrak{p}$, com $W_\mathfrak{k} \in \mathfrak{k}$ e $W_\mathfrak{p} \in \mathfrak{p}$, então $W^*(\bar{e}) = (W_\mathfrak{k} + W_\mathfrak{p})^*(\bar{e}) = \cancelto{0}{(W_\mathfrak{k})^*(\bar{e})} + (W_\mathfrak{p})^*(\bar{e}) = W_\mathfrak{p}$.

Assim, tem-se que

(a) $\langle U(X,Y), Z\rangle + \langle Y, U(X,Z)\rangle = \frac{1}{2}\langle [Y,X]_\mathfrak{p}, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [Z,X]_\mathfrak{p}\rangle$. De fato,

$$\begin{aligned} \langle U(X,Y), Z\rangle + \langle Y, U(X,Z)\rangle &= \langle U(Y,X), Z\rangle + \langle Y, U(Z,X)\rangle \\ &= \cancel{\langle \nabla_{Y_{\bar{e}}^*} X^*, Z\rangle} - \langle \bar{\nabla}_{Y_{\bar{e}}^*} X^*, Z\rangle + \\ &\quad \cancel{\langle Y, \nabla_{Z_{\bar{e}}^*} X^*\rangle} - \langle Y, \bar{\nabla}_{Z_{\bar{e}}^*} X^*\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle [Y,X]_{\bar{e}}^*, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [Z,X]_{\bar{e}}^*\rangle \\ &= \frac{1}{2}\langle [Y,X]_\mathfrak{p}, Z\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [Z,X]_\mathfrak{p}\rangle \end{aligned}$$

De modo análogo, valem:

(b) $\langle U(Y,Z),X\rangle + \langle Z, U(Y,X)\rangle = \frac{1}{2}(\langle [Z,Y]_{\mathfrak{p}}, X\rangle + \langle Z, [X,Y]_{\mathfrak{p}}\rangle)$.

(c) $\langle U(Z,X),Y\rangle + \langle X, U(Z,Y)\rangle = \frac{1}{2}(\langle [X,Z]_{\mathfrak{p}}, Y\rangle + \langle X, [Y,Z]_{\mathfrak{p}}\rangle)$.

Calculando $(a)+(b)-(c)$, concluímos que

$$\langle U(X,Y),Z\rangle = \frac{1}{2}(\langle [Z,X]_{\mathfrak{p}}, Y\rangle + \langle [Z,Y]_{\mathfrak{p}}, X\rangle).$$

□

Lema 3.4. *Suponha que $X, Y \in \mathfrak{p}$ e $[X,Y]_{\mathfrak{p}} = 0$, então*

$$\langle R(X^*,Y^*)Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} = \langle U(X,Y), U(X,Y)\rangle - \langle U(X,X), U(Y,Y)\rangle.$$

Demonstração: Note que $\bar{\nabla}_{X^*}Y^*(\bar{e}) = -\frac{1}{2}[X,Y]^*_{\bar{e}} = 0$ e assim, $U(X,Y) = \nabla_{X^*}Y^*(\bar{e})$. Desta forma, usando o fato de que os campos X^* e Y^* são de Killing em M, obtêm-se:

$$\begin{aligned}
\langle R(X^*,Y^*)Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} &= -\langle \cancelto{0}{\nabla_{[X^*,Y^*]}Y^*, X^*}\rangle_{\bar{e}} + \langle \nabla_{X^*}\nabla_{Y^*}Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} - \langle \nabla_{Y^*}\nabla_{X^*}Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} \\
&= X^*\langle \nabla_{Y^*}Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} - \langle \nabla_{Y^*}Y^*, \nabla_{X^*}X^*\rangle_{\bar{e}} - Y^*\langle \cancelto{0}{\nabla_{X^*}Y^*, X^*}\rangle_{\bar{e}} + \\
&\quad \langle \nabla_{X^*}Y^*, \nabla_{Y^*}X^*\rangle_{\bar{e}} \\
&= X^*\langle \nabla_{Y^*}Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} - \langle U(Y,Y), U(X,X)\rangle + \langle U(X,Y), U(Y,X)\rangle.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\langle \nabla_{Y^*}Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} = -\langle \nabla_{X^*}Y^*, Y^*\rangle_{\bar{e}} = -\langle \cancelto{0}{[X^*,Y^*]} + \nabla_{Y^*}X^*, Y^*\rangle_{\bar{e}} = -\langle \nabla_{Y^*}X^*, Y^*\rangle_{\bar{e}} = 0.$$

Portanto, $\langle R(X^*,Y^*)Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} = \langle U(X,Y), U(X,Y)\rangle - \langle U(X,X), U(Y,Y)\rangle$.

□

CAPÍTULO 4

TEOREMA DE ESTRUTURA

4.1 Lemas e Proposições

Proposição 4.1. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e K um subgrupo fechado de G. Considere $M = G/K$ e suponha que G age efetivamente em M. Se M admite estrutura Riemanniana G-invariante, $\langle \cdot, \cdot \rangle$, com curvatura seccional estritamente positiva, então:*

(a) Se M tem dimensão par, então G é semi-simples.

(b) Se M tem dimensão ímpar, então ou G é semi-simples ou o centro de G tem dimensão um.

Demonstração: A álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de G é compacta. Assim, pode-se escrever $\mathfrak{g} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{z}$ é o centro de $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{g}_1 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ é uma álgebra de Lie semi-simples.

Seja $P : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}_1$ a projeção correspondente à decomposição acima. Denote por $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de K e considere $\mathfrak{k}_1 = P(\mathfrak{k})$.

Agora, será demonstrado que $P : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}_1$ é um isomorfismo. Note que,

- P é um homomorfismo. De fato, dados $X, Y \in \mathfrak{k}$, vale que

$$\begin{aligned} P([X,Y]) &= P([X_{\mathfrak{z}} + X_{\mathfrak{g}_1}, Y_{\mathfrak{z}} + Y_{\mathfrak{g}_1}]) \\ &= P([X_{\mathfrak{g}_1}, Y_{\mathfrak{g}_1}]) \\ &= [X_{\mathfrak{g}_1}, Y_{\mathfrak{g}_1}] \\ &= [P(X_{\mathfrak{z}} + X_{\mathfrak{g}_1}), P(Y_{\mathfrak{z}} + Y_{\mathfrak{g}_1})]. \end{aligned}$$

- P é claramente sobrejetora.

- P é injetora. Para ver isso, tome $X \in Ker(P)$. Então, $X \in \mathfrak{k} \cap \mathfrak{z}$ e assim, $\exp(tX) \in K \cap Z(G)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Desta forma, sendo ϕ a ação de G em M, tem-se que

$$\phi_{\exp(tX)}(gK) = \exp(tx)(gk) = g(\exp(tx)K) = gK, \forall gK \in M.$$

Como ϕ é efetiva, segue que $\exp(tX) = 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$, logo $X = 0$.

Portanto, $P : \mathfrak{k} \to \mathfrak{k}_1$ é um isomorfismo.

A subálgebra $\mathfrak{g}_1$ é $Ad(K)-$invariante. De fato, dados $[X, Y] \in \mathfrak{g}_1$ e $k \in K$, tem-se que $Ad(k)[X, Y] = [Ad(k)X, Ad(k)Y] \in \mathfrak{g}_1$.

Além disso, dado $X_{\mathfrak{k}_1} \in \mathfrak{k}_1$, existe $X = X_{\mathfrak{k}_1} + X_{\mathfrak{z}} \in \mathfrak{k}$, tal que $P(X) = X_{\mathfrak{k}_1}$. Assim,

$$P(Ad(K)(X)) = P(Ad(K)(X_{\mathfrak{k}_1})) + \cancelto{0}{P(Ad(K)(X_{\mathfrak{z}})} = Ad(K)(X_{\mathfrak{k}_1}),$$

isto mostra que $Ad(K)(X_{\mathfrak{k}_1}) \in \mathfrak{k}_1$, ou seja, $\mathfrak{k}_1$ é $Ad(K)$-invariante. Desta forma, existe um complemento $Ad(K)-$invariante de $\mathfrak{k}_1$ em $\mathfrak{g}_1$, o qual será denotado por $\mathfrak{p}_1$.

Seja $\mathfrak{p} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{p}_1$. Se $X \in \mathfrak{p} \cap \mathfrak{k}$, então $P(X) \in \mathfrak{p}_1 \cap \mathfrak{k}_1 = \{0\}$, assim, conforme mostrado acima, $X = 0$.

Uma vez que $\mathfrak{z}$ e $\mathfrak{p}_1$ são $Ad(K)$-invariantes, tem-se que $\mathfrak{p}$ é um complemento de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$, $Ad(K)-$invariante.

Foi usado $\mathfrak{p}$ para definir $\bar{\nabla}$ e U, como feito no Capítulo 3.

Dados $X, Y \in \mathfrak{z} \subset \mathfrak{p}$ e $Z \in \mathfrak{p}$, segue do Lema 3.3 que,

$$\langle U(X, Y), Z\rangle = \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Z, X]}, Y\rangle + \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Z, Y]}, X\rangle = 0.$$

O que mostra que $U(X, Y) = 0$, para todos $X, Y \in \mathfrak{z}$. Consequentemente, pelo Lema 3.4, obtêm-se que se $X, Y \in \mathfrak{z}$, então $\langle R(X^*, Y^*)Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} = 0$. Por hipótese, a curvatura seccional de M é estritamente positiva, logo X e Y são linearmente dependentes, e assim, $dim\, \mathfrak{z} \leq 1$.

Afirmação: Se $\dim \mathfrak{z}$=1, então $\dim(M)$ é ímpar.

Neste caso, $\mathfrak{z} = \mathbb{R}X$. Defina $\rho : \mathfrak{p}_1 \to \mathfrak{p}_1$ por $\rho(Y) = U(X, Y)$. Então, utilizando o

Lema 3.3, segue que

$$\begin{aligned}
\langle \rho(Y), Z\rangle &= \langle U(X,Y), Z\rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle X, [Z,Y]\rangle + \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Z,X]}, Y\rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle X, [Y,Z]\rangle - \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Y,X]}, Z\rangle \\
&= -\langle \rho(Z), Y\rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, se $Y \neq 0$, pelo Lema 3.4,

$$\langle \rho(Y), \rho(Y)\rangle = \langle U(X,Y), U(X,Y)\rangle = \langle R(X^*,Y^*)Y^*, X^*\rangle_{\bar{e}} + \cancelto{0}{\langle U(X,X), U(Y,Y)\rangle} > 0.$$

Assim, $\rho(Y) \neq 0$. Portanto, ρ é um isomorfismo anti-simétrico, e isso implica que $\dim \mathfrak{p}_1$ é par. Logo, $\mathfrak{p} = \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{p}_1$ tem dimensão ímpar. Como $\mathfrak{p} \simeq T_{\bar{e}}M$, segue que $\dim M$ é ímpar. □

Nos próximos resultados, considere T um toro maximal de K e $C(T) = \{g \in G; gt = tg, \forall t \in T\}$, o centralizador de T em G. Denote por $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{u}$ às álgebras de Lie de T e $C(T)$, respectivamente.

Tem-se que $\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp(sX) \in C(T), \forall s \in \mathbb{R}\}$. Veja que se $X \in \mathfrak{u}$, então para todos $Y \in \mathfrak{t}$ e $s, r \in \mathbb{R}$, vale que $\exp(sX)$ comuta com $\exp(rY)$. O que implica, pela Proposição 1.114, que $[X,Y] = 0$. Por outro lado, dado $X \in \mathfrak{g}$, tal que $[X,Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{t}$. Concluímos, novamente pela Proposição 1.114, que $\exp(sX)$ comuta com $\exp(rY)$. Como T é conexo, $\exp(sX)$ comuta com todos os elementos de T, logo $X \in \mathfrak{u}$.

Portanto, como justificado acima, $\mathfrak{u} = \{X \in \mathfrak{g}; [X,Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{t}\}$.

Lema 4.2. *Sejam G, K, M e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como na Proposição 4.1. Seja T um toro maximal de K. Então, dimensão de M é par se, e somente se, $C(T) = T$.*

Demonstração: Suponha que M tem dimensão par. Assim, pelo Teorema de Berger, todo campo de Killing possui um zero.

Lembre que para todo $\bar{p} \in M$, $X^*(\bar{p}) = d(\phi_{\bar{p}})_e(X)$ e $\varphi(t, \bar{p}) = \phi(\exp(tX), \bar{p})$ é a curva integral que passa por $\bar{p}$ em $t = 0$, do campo X^*. E como X^* é de Killing em M existe $\bar{g} \in M$, tal que $X^*(\bar{g}) = 0$.

Note que a curva constante em $\bar{g}$, satisfaz as condições de curva integral, daí, pela unicidade, segue que $\varphi(t,\bar{g})$ é constante, ou seja, $gK = \varphi(t, gK) = \exp(tX)gK$. Disso, segue que $gg^{-1}(\exp(tX)^{-1} = \exp(-tX) \in K$, para todo $t \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathfrak{u}$. Desta forma, dado $X \in \mathfrak{u}$, tem-se que $\exp(-tX) \in K \cap C(T) = T$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto, $X \in \mathfrak{t}$, isto mostra que $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{t}$. Logo, $\mathfrak{u} = \mathfrak{t}$, e consequentemente, $C(T) = T$.

Agora, suponha que $C(T) = T$. Então, a subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{k}$ é também subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Conforme o Teorema 1.79, $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}_1$, onde $\mathfrak{g}_1$ é semi-simples. Como feito na demonstração da Proposição 4.1, existe uma álgebra $\mathfrak{k}_1 \subset \mathfrak{g}_1$, que é isomorfa à $\mathfrak{k}$.

Seja $\mathfrak{t}_1$ uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{k}_1$, então $\mathfrak{t}_1 \simeq \mathfrak{t}$ também é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$. Desta forma, $\mathfrak{t}_1 \cap \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$ e pela Observação (1.57), $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{t}_1$. Assim, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 0$.

Isso mostra que $\mathfrak{g}$ é semi-simples. Então, $\mathfrak{g} = \mathfrak{t} \oplus \sum\limits_{\alpha \in R} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{k} = \mathfrak{t} \oplus \sum\limits_{\beta \in S} \mathfrak{k}_\beta$.

Assim, pelo item (2) do Lema 1.62, segue que

$$\dim(M) = \dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{k}) = \cancel{\dim \mathfrak{t}} + \sum_{\alpha \in R} \dim \mathfrak{g}_\alpha - \cancel{\dim \mathfrak{t}} - \sum_{\beta \in S} \dim \mathfrak{k}_\beta = |R| - |S|.$$

Tem-se que $|R| - |S|$ é par, pois se α é raiz, então $-\alpha$ também é.

Portanto, $\dim(M)$ é par. □

Proposição 4.3. *Sejam G um grupo de Lie compacto e conexo e K um subgrupo fechado de G. Seja $\tilde{G}$ o grupo de recobrimento universal de G e $\tilde{K}$ o subgrupo conexo de $\tilde{G}$, correspondente a K. Então, $\tilde{G}/\tilde{K}$ é um espaço de recobrimento de G/K. E mais, a aplicação de recobrimento é diferenciável.*

Demonstração: Seja $\rho : \tilde{G} \to G$ o recobrimento universal de G. Como $\tilde{K}$ é um subgrupo conexo e satisfaz $\rho(\tilde{K}) = K$, então $\tilde{K}$ é a componente conexa de $e \in \tilde{G}$ em $\rho^{-1}(K)$. Pelo Teorema 1.120, tem-se que $Ker\rho$ é um subgrupo discreto central. Note que $Ker\rho$ é fechado em $\tilde{G}$ que é compacto, assim, $Ker\rho$ também é compacto. Todo espaço discreto e compacto é finito, logo $Ker\rho = \{z_1, ..., z_n\}$. Como $Ker\rho \subset Z(\tilde{G})$, vale que $z_i\tilde{g}\tilde{K} = \tilde{g}z_i\tilde{K}$, para $\tilde{g} \in \tilde{G}$ e $i = 1, ..., n$.

Deve-se mostrar que existe um difeomorfismo, $\xi_{\tilde{e}} : \tilde{G}/\rho^{-1}(K) \to G/K$ e uma aplicação de recobrimento diferenciável $\varphi : \tilde{G}/\tilde{K} \to \tilde{G}/\rho^{-1}(K)$.

Considere ϕ a ação de G em M e defina, $\tilde{\phi} : \tilde{G} \times G/K \to G/K$, por $\tilde{\phi}(\tilde{g}, hK) = \phi(\rho(\tilde{g}), hK)$. Note que $\tilde{\phi}$ também é uma ação diferenciável, assim, pelo Teorema 1.119, existe um difeomorfismo $\xi_{\bar{e}} : \tilde{G}/\tilde{G}_{\bar{e}} \to \tilde{G} \cdot \bar{e}$, onde o subgrupo de isotropia $\tilde{G}_{\bar{e}}$ é dado por,

$$\tilde{G}_{\bar{e}} = \{\tilde{g} \in \tilde{G}; \tilde{\phi}(\tilde{g}, \bar{e}) = \bar{e}\} = \{\tilde{g} \in \tilde{G}; \rho(\tilde{g})\bar{e} = \bar{e}\} = \{\tilde{g} \in \tilde{G}; \rho(\tilde{g}) \in K\} = \rho^{-1}(K).$$

A órbita em $\bar{e}$ é $\tilde{G} \cdot \bar{e} = \{\tilde{\phi}(\tilde{g}, \bar{e}); \tilde{g} \in \tilde{G}\} = \{\rho(\tilde{g})K; \tilde{g} \in \tilde{G}\} = G/K$, uma vez que ρ é sobrejetora. Portanto, $\xi_{\bar{e}} : \tilde{G}/\rho^{-1}(K) \to G/K$ é um difeomorfismo.

Sejam $\pi_1 : \tilde{G} \to \tilde{G}/\tilde{K}$ e $\pi_2 : \tilde{G} \to \tilde{G}/\rho^{-1}(K)$ as projeções naturais. Defina $\varphi : \tilde{G}/\tilde{K} \to \tilde{G}/\rho^{-1}(K)$ por $\varphi(\tilde{g}\tilde{K}) = \tilde{g}\rho^{-1}(K)$. Pelo Teorema 1.116, φ é diferenciável se, e só se, $\varphi \circ \pi_1$ é diferenciável. Mas, $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$, logo é diferenciável.

Afirmação: A aplicação φ é aberta.

Dado um aberto $U \subset \tilde{G}/\tilde{K}$, tem-se que $\varphi(U) \subset \tilde{G}/\rho^{-1}(K)$ é aberto se, e só se, $\pi_2^{-1}(\varphi(U)) \subset \tilde{G}$ é aberto. Onde, $\pi_2^{-1}(\varphi(U)) = (\varphi \circ \pi_1)^{-1}(\varphi(U)) = \pi_1^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(U)))$. E $\pi_1^{-1}(\varphi^{-1}(\varphi(U)))$ é aberto em $\tilde{G}$ se, e só se, $\varphi^{-1}(\varphi(U))$ é aberto em $\tilde{G}/\tilde{K}$.

Agora, veja que $\varphi^{-1}(\varphi(U)) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} z_i U$, com $z_i \in Ker(\rho)$.

De fato, se $\tilde{h}\tilde{K} \in \varphi^{-1}(\varphi(U))$, então $\varphi(\tilde{h}\tilde{K}) \in \varphi(U)$. Assim, existe $\tilde{x}\tilde{K} \in U$, tal que $\tilde{h}\rho^{-1}(K) = \tilde{x}\rho^{-1}(K)$. Equivalentemente, $\tilde{h}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} z_i\tilde{K}) = \tilde{x}(\bigcup\limits_{i=1}^{n} z_i\tilde{K})$, ou ainda, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} z_i\tilde{h}\tilde{K} = \bigcup\limits_{i=1}^{n} z_i\tilde{x}\tilde{K}$. Em particular, vale que para todo $i \in \{1, ..., n\}$, existe $j \in \{1, ..., n\}$, o qual satisfaz $z_i\tilde{h}\tilde{K} = z_j\tilde{x}\tilde{K}$. Para $z_i = e$, tem-se que $\tilde{h}\tilde{K} = z_j\tilde{x}\tilde{K} \in z_jU$. Logo, $\varphi^{-1}\varphi(U) \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} z_iU$. Por outro lado, dado $\tilde{h}\tilde{K} \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} z_iU$, existem $j \in \{1, ..., n\}$ e $\tilde{x}\tilde{K} \in U$, de forma que $\tilde{h}\tilde{K} = z_j\tilde{x}\tilde{K}$. Assim,

$$\varphi(\tilde{h}\tilde{K}) = \varphi(z_j\tilde{x}\tilde{K}) = z_i\tilde{x}(\rho^{-1}(K)) = \tilde{x}z_j(\rho^{-1}(K)) = \tilde{x}(\rho^{-1}(K)) = \varphi(\tilde{x}\tilde{K}).$$

Ou seja, $\bigcup\limits_{i=1}^{n} z_iU \subset \varphi^{-1}\varphi(U)$. Isso prova a afirmação feita.

Considere o conjunto finito $C = Ker\rho/(Ker\rho \cap \tilde{K})$ e denote por $\bar{z}_i$ a classe correspondente a z_i. Como $\tilde{G}/\tilde{K}$ é Hausdorff, para todo $\tilde{g}\tilde{K} \in \tilde{G}/\tilde{K}$, existe uma vizinhança U_0 tal que $\bar{z}_iU_0 \cap \bar{z}_jU_0 = \emptyset$, sempre que $\bar{z}_i \neq \bar{z}_j$. Desta forma, para $\tilde{g}\rho^{-1}(K) \in \tilde{G}/\rho^{-1}(K)$, existe a vizinhança $V = \varphi(U_0)$, a qual satisfaz $\varphi^{-1}(V) = \varphi^{-1}\varphi(U_0) = \bigcup\limits_{i=1}^{n} z_iU_0$. Sem perda de generalidade, admitimos que U_0 é conexo. Veja que, se $\bar{z}_i = \bar{z}_j$, então $z_i\tilde{K} = z_j\tilde{K}$.

Isso implica que

$$z_iU_0 = \{z_i\tilde{h}\tilde{K}; \tilde{h}\tilde{K} \in U_0\} = \{\tilde{h}z_i\tilde{K}; \tilde{h}\tilde{K} \in U_0\} = \{\tilde{h}z_j\tilde{K}; \tilde{h}\tilde{K} \in U_0\} = z_jU_0.$$

Logo, $\varphi^{-1}(V) = \bigcup\limits_{\bar{z}_i \in C} \bar{z}_iU_0$ é a união disjunta de conexos abertos. Pela construção das vizinhanças, $\varphi|_{\bar{z}_iU_0} : \bar{z}_iU_0 \to \varphi(U_0) = V$ é bijeção. Como φ é contínua e aberta, segue $\varphi|_{\bar{z}_iU_0}$ é um homeomorfismo. Portanto, φ é uma aplicação de recobrimento e é diferenciável.

Assim, a composição $\xi_{\bar{e}} \circ \varphi$ é uma aplicação de recobrimento diferenciável do espaço simplesmente conexo $\tilde{G}/\tilde{K}$ em G/K. □

4.2 Resultados principais

Mantendo a notação anterior, continue considerando T um toro maximal de K, $C(T) = \{g \in G; gt = tg, \forall t \in T\}$ o centralizador de T em G, $\mathfrak{t}$ e $\mathfrak{u}$ às álgebras de Lie de T e $C(T)$, respectivamente. Além disso, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p}$ é um complemento $Ad(K)$-invariante de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$.

Para o próximo Teorema, considere a variedade $C(T)/(K \cap C(T)) = C(T)/T$. Conforme mostrado por Helgason em [5], [ver Proposição 4.4, pág 125], $C(T)/T$ é uma subvariedade de M. Ou seja, a aplicação $i : C(T)/T \to M$, dada por $i(gT) = gK$, é um mergulho. Seja $M_T = i(C(T)/T) = C(T)\bar{e}$, onde $\bar{e} \in M$. Então, i é um difeomorfismo de $C(T)/T$ em M_T.

Observação 4.4. *Dado $X \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, tem-se que $\exp(sX) \in C(T)$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Logo, para qualquer $gK \in M_T$, $\exp(sX)g \in C(T)$ e assim, $X^*(gK) = \frac{\partial}{\partial s}(\exp(sX)gK)|_{s=0} \in T_{gk}M_T$. Assim, X^* é um campo tangente a M_T.*

Seja $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$. Conforme a notação do capítulo 3, $\bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^*(\bar{e}) = \frac{1}{2}[X_i^*, X_j^*](\bar{e}) \in T_{\bar{e}}M_T$. Além disso, $\bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^*(\bar{g}) = d\phi_g(\bar{\nabla}_{(d\phi_g^{-1}X_i^*)}(d\phi_g^{-1}X_j^*)(\bar{e})) \in T_{\bar{g}}M_T$.

Logo, $\bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^*$ é um campo tangente a M_T.

Teorema 4.5. *Sejam G, K, M e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como na Proposição 4.1. Sejam T um toro maximal de K e $M_T = C(T)\bar{e}$. Então:*

1. *M_T é totalmente geodésica em M.*

2. *Se M tem dimensão par, então T é um toro maximal de G.*

3. *Se M tem dimensão ímpar, então ou $C(T)/T$ tem dimensão 1 ou $C(T)/T$ é isomorfo à $SU(2)$ ou à $SO(3)$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{g}$ a álgebra de Lie de G e considere $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$, como na demonstração da Proposição 4.1. Sejam $\mathfrak{u}$ e $\mathfrak{t}$ às álgebras de Lie de $C(T)$ e T, respectivamente. Se $X \in \mathfrak{g}$, então $X = X_1 + X_2$, com $X_1 \in \mathfrak{k}$ e $X_2 \in \mathfrak{p}$.

Note que se $X \in \mathfrak{u}$ e $Y \in \mathfrak{t}$, então $[Y, X] = 0$, em particular, $[Y, X]_1 = 0$. Além disso, $[Y, X] = [Y, X_1 + X_2] = [Y, X_1] + [Y, X_2]$, onde $[Y, X_1] \in \mathfrak{k}$ e $[Y, X_2] \in \mathfrak{p}$. Assim, $[Y, X]_1 = [Y, X_1]$, ou seja, $[Y, X_1] = 0$ e consequentemente, $[Y, X_2] = 0$. E isso implica que $X_1, X_2 \in \mathfrak{u}$.

Portanto, $\mathfrak{u} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{u}) \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{u}) = \mathfrak{t} \oplus (\mathfrak{p} \cap \mathfrak{u})$.

Agora, sejam $X, Y \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, $Z \in \mathfrak{t}$ e $W \in \mathfrak{p}$. Usando o fato de que $\mathfrak{g}$ é compacta, o Lema 3.3 e a identidade de Jacobi, obtêm-se que

$$\begin{aligned}
\langle [Z, U(X,Y)], W \rangle &= -\langle U(X,Y), [Z, W] \rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle X, [[Z, W], Y] \rangle - \frac{1}{2}\langle Y, [[Z, W], X] \rangle \\
&= -\frac{1}{2}\langle X, [Z, [W, Y]] \rangle - \frac{1}{2}\langle Y, [Z, [W, X]] \rangle \\
&= \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Z, X]}, [W, Y] \rangle + \frac{1}{2}\langle \cancelto{0}{[Z, Y]}, [W, X] \rangle = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $[Z, U(X,Y)] = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{t}$. Então, $U(X,Y) \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$. Como os elementos de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ estão identificados com os vetores de $T_{\bar{e}}M_T$ e estes campos em $\mathfrak{X}(M_T)$, conclui-se que $X^*, Y^* \in \mathfrak{X}(M_T)$ e $U(X,Y)^* \in \mathfrak{X}(M_T)$.

Considere $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base de $\mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$ e complete a uma base de $\mathfrak{p}$ e denote por $\{X_1, ..., X_m\}$. Dados $X, Y \in \mathfrak{u} \cap \mathfrak{p}$, pode-se escrever, $X^*(\bar{e}) = \sum\limits_{i=1}^{n} f_i(\bar{e}) X_i^*(\bar{e})$ e $Y^*(\bar{e}) = \sum\limits_{j=1}^{n} g_j(\bar{e}) X_j^*(\bar{e})$.

Assim,

$$
\begin{aligned}
U(X,Y)^*(\bar{e}) &= \nabla_{X^*}Y^*(\bar{e}) - \bar{\nabla}_{X^*}Y^*(\bar{e}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(f_i g_j \nabla_{X_i^*}X_j^* + f_i X_i^*(g_j)X_j^*)(\bar{e}) - \sum_{i,j=1}^{n}(f_i g_j \bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^* + f_i X_i^*(g_j)X_j^*)(\bar{e}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}(f_i g_j \nabla_{X_i^*}X_j^*)(\bar{e}) - \sum_{i,j=1}^{n}(f_i g_j \bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^*)(\bar{e}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} f_i g_j(\nabla_{X_i^*}X_j^* - \bar{\nabla}_{X_i^*}X_j^*)(\bar{e}).
\end{aligned}
$$

Usando o fato de que $U(X,Y)^*(\bar{e}) \in T_{\bar{e}}M_T$, a Observação (4.4) e a última igualdade, concluímos que $\nabla_{X^*}Y^*$ é tangente a M_T.

Portanto, M_T é totalmente geodésica em M.

Se a dimensão de M é par, então o Lema 4.2, prova que $C(T) = T$. Assim, T é um toro maximal em G.

Agora, suponha que a dimensão de M é ímpar. Novamente pelo Lema 4.2, concluímos que $C(T) \neq T$. Se a dimensão de $C(T)/T$ é maior que 1, então $C(T)/T$ possui estrutura Riemanniana com curvatura estritamente positiva, uma vez que é uma subvariedade de M. Seja $(\widetilde{C(T)/T})$ o grupo de recobrimento universal de $C(T)/T$. Aplicando o Teorema de Wallach, concluímos que $\widetilde{C(T)/T}$ é isomorfo a $SU(2)$. Portanto, pelo Teorema 1.120, $C(T)/T$ é isomorfo a $SU(2)/\Gamma$, onde Γ é um subgrupo central de $SU(2)$. Mas $Z(SU(2)) = \{1, -1\}$, assim, $C(T)/T \simeq SU(2)$ ou $C(T)/T \simeq SO(3)$.

□

Corolário 4.6. *Sejam G, K, M e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ como na Proposição 4.1. Se a dimensão de M é par, então G é simples.*

Demonstração: Seja $\tilde{G}$ um grupo de recobrimento universal de G. Seja $\tilde{K}$ o subgrupo conexo de $\tilde{G}$ correspondente a K. Conforme mostrado na Proposição 4.3, existe uma aplicação diferenciável de recobrimento, $\rho : \tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{K} \to M = G/K$. Isso implica que a curvatura de $\tilde{M}$ é estritamente positiva, uma vez que M tem curvatura estritamente positiva, por hipótese. Pelo Teorema 4.5, G é semi-simples. Suponha por absurdo que G não é simples. Escreva $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2$, onde $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ são semi-simples. Então, $\tilde{G} = \tilde{G}_1 \times \tilde{G}_2$, onde $\tilde{G}_i$ possui álgebra $\mathfrak{g}_i$, para $i = 1, 2$. Assim, $\tilde{G}_i$ é semi-simples e como $\tilde{G}$ é compacto, tem-se que $\tilde{G}_i$ também será compacto, com $i = 1, 2$.

Afirmação: A igualdade $\tilde{K} = (\tilde{K} \cap \tilde{G}_1) \times (\tilde{K} \cap \tilde{G}_2)$ é satisfeita.

Para provar a igualdade acima, é equivalente mostrar que $\mathfrak{k} = (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1) \oplus (\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_2)$. A inclusão $\mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_2 \subset \mathfrak{k}$ é imediata.

Denote por π_1, π_2 as projeções de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}_1$ e $\mathfrak{g}_2$, respectivamente. Seja $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{k}$ uma subálgebra de Cartan. Pelo Teorema 4.5, $\mathfrak{t}$ também é subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$, ou seja, $\mathfrak{t}$ é abeliana maximal em $\mathfrak{g}$. Note que $\mathfrak{t} \subset \pi_1(\mathfrak{t}) \oplus \pi_2(\mathfrak{t})$, assim, para obter a igualdade, basta mostrar que $\pi_1(\mathfrak{t}) \oplus \pi_2(\mathfrak{t})$ é abeliana em $\mathfrak{g}$. Dados $X_1, Y_1 \in \pi_1(\mathfrak{t}) \subset \mathfrak{g}_1$, existem $X_2, Y_2 \in \mathfrak{g}_2$ tais que $X_1 + X_2, Y_1 + Y_2 \in \mathfrak{t}$. Assim, o colchete $[X_1 + X_2, Y_1 + Y_2] = 0$, ou melhor, $[X_1, Y_1] = -[X_2, Y_2]$. Como $[X_1, Y_1] \in \mathfrak{g}_1$, $-[X_2, Y_2] \in \mathfrak{g}_2$ e $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \{0\}$, segue que $[X_1, Y_1] = 0$. Isto mostra que $\pi_1(\mathfrak{t})$ é abeliana em $\mathfrak{g}_1$. De modo análogo, $\pi_2(\mathfrak{t})$ é abeliana em $\mathfrak{g}_2$. Logo, $\pi_1(\mathfrak{t}) \oplus \pi_2(\mathfrak{t})$ é abeliana em $\mathfrak{g}$, assim, $\mathfrak{t} = \pi_1(\mathfrak{t}) \oplus \pi_2(\mathfrak{t})$. Em particular, concluí-se que $\pi_1(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_1$ e $\pi_2(\mathfrak{t}) = \mathfrak{t} \cap \mathfrak{g}_2$.

Então, pelo item (2) do Teorema 1.90, pode-se escrever $\mathfrak{k} = \bigcup\limits_{X \in \mathfrak{k}} (\mathfrak{t}_X)$, onde $\mathfrak{t}_X$ é uma subálgebra de Cartan que contém X. Dessa forma,

$$\mathfrak{k} = \bigcup_{X \in \mathfrak{k}} (\pi_1(\mathfrak{t}_X) \oplus \pi_2(\mathfrak{t}_X)) \subset \bigcup_{X \in \mathfrak{k}} \pi_1(\mathfrak{t}_X) \oplus \bigcup_{X \in \mathfrak{k}} \pi_2(\mathfrak{t}_X) = \bigcup_{X \in \mathfrak{k}} \mathfrak{t}_X \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \bigcup_{X \in \mathfrak{k}} \mathfrak{t}_X \cap \mathfrak{g}_2 = \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{k} \cap \mathfrak{g}_2.$$

O que prova a afirmação feita.

Agora, pode-se escrever $\tilde{M} = \tilde{G}/\tilde{K} = \tilde{G}_1/\tilde{K}_1 \times \tilde{G}_2/\tilde{K}_2 = \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_1$, onde $\tilde{K}_1 = \tilde{K} \cap \tilde{G}_1$ e $\tilde{K}_2 = \tilde{K} \cap \tilde{G}_2$. Para $i = 1, 2$, considere a decomposição $\mathfrak{g}_i = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{p}_i$, onde $\mathfrak{k}_i$ denota a álgebra de Lie de $\tilde{K}_i$ e $\mathfrak{p}_i$ é um complemento $Ad(\tilde{K}_i)$-invariante de $\mathfrak{k}_i$ em $\mathfrak{g}_i$. Observe que os complementos $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$, são também $Ad(\tilde{K})-$invariantes. Denote por V o espaço vetorial de $\mathfrak{g}$. Aplicando a Proposição 1.51 na representação $Ad(\tilde{K}) \to Gl(V)$, obtêm-se que $V = V_1 \oplus ... \oplus V_n$ é uma soma direta, de forma que os subespaços $V_i's$ são dois a dois ortogonais. Considere os subespaços W_1 e W_2 correspondentes a $\mathfrak{p}_1$ e $\mathfrak{p}_2$, respectivamente. Como W_1 e W_2 são subespaços invariantes pela $Ad(\tilde{K})$, segue que $W_1 = \sum\limits_{i \in I} V_i$ e $W_2 = \sum\limits_{j \in J} V_j$, com $I, J \subset \{1, ..., n\}$. Além disso, como $W_1 \cap W_2 = 0$, segue que $I \cap J = \emptyset$. Assim, $\mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ é uma soma direta ortogonal. Isto mostra que $T_e\tilde{M} = T_e\tilde{M}_1 \oplus T_e\tilde{M}_2$.

Sejam $p\tilde{K} = (p_1\tilde{K}_1, p_2\tilde{K}_2) \in \tilde{M}$, $u, v \in T_{p\tilde{K}}\tilde{M}$ e π_1, π_2 as projeções de $\tilde{M}$ em $\tilde{M}_1$ e $\tilde{M}_2$, respectivamente. Como a estrutura de $\tilde{M}$ é $\tilde{G}$-invariante, em particular, a aplicação

$f = \phi_{p^{-1}} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ é uma isometria. Assim,

$$\begin{aligned}
\langle u, v \rangle_{p\tilde{K}} &= \langle df_{p\tilde{K}}(u), df_{p\tilde{K}}(v) \rangle_e \\
&= \langle df_{p\tilde{K}}(d\pi_1(u) + d\pi_2(u)), df_{p\tilde{K}}(d\pi_1(v) + d\pi_2(v)) \rangle_e \\
&= \langle df_{p\tilde{K}}(d\pi_1(u)), df_{p\tilde{K}}(d\pi_1(v)) \rangle_e + \langle df_{p\tilde{K}}(d\pi_2(u)), df_{p\tilde{K}}(d\pi_2(v)) \rangle_e \\
&= \langle d\pi_1(u), d\pi_1(v) \rangle_{p_1\tilde{K}} + \langle \pi_2(u), \pi_2(v) \rangle_{p_2\tilde{K}}.
\end{aligned}$$

Logo, $T_{p\tilde{K}}\tilde{M} = T_{p_1\tilde{K}_1}\tilde{M}_1 \oplus T_{p_2\tilde{K}_2}\tilde{M}_2$, para todo $p\tilde{K} \in \tilde{M}$. Assim, $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ possui a estrutura do produto Riemanniano. Então, a conexão Riemanniana ∇ de $\tilde{M}$ é dada por

$$\nabla_{Y_1+Y_2}(X_1 + X_2) = \nabla^1_{Y_1} X_1 + \nabla^2_{Y_2} X_2,$$

onde $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(\tilde{M}_1)$, $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(\tilde{M}_2)$ e ∇^1, ∇^2 são as conexões Riemannianas de M_1 e M_2, respectivamente.

Seja $\sigma(x, y) \subset T_{(p_1,p_2)}\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2$ um plano, tal que $x \in T_{p_1}\tilde{M}_1$ e $y \in T_{p_2}M_2$. Então,

$$\langle x, y \rangle = \langle d\pi_1(x), d\pi_1(y) \rangle + \langle d\pi_2(x), d\pi_2(y) \rangle = \langle x, 0 \rangle + \langle 0, x \rangle,$$

ou seja, x e y são ortogonais. Sem perda de generalidade, tome x e y vetores unitários, $X = \frac{x}{|x|}$ e $Y = \frac{y}{|y|}$. Assim,

$$K(\sigma) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{1} = \langle R(X, Y)Y, X \rangle.$$

Usando a conexão Riemanniana apresentada acima, é fácil ver que $R(X, Y)Y = 0$. Logo, $K(\sigma) = 0$. O que contraria o fato de $\tilde{M}$ ter curvatura estritamente positiva. Portanto, G é simples. □

Corolário 4.7. *Sejam G, K, M e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ como na Proposição 4.1.*

1. *Se a dimensão de M é par, então G é simples e posto(K) = posto(G).*

2. *Se a dimensão de M é ímpar, então ou G é semi-simples ou G tem centro unidimensional e posto(G) = posto$(K) + 1$.*

Demonstração:

1. Segue imediatamente do Teorema 4.5 e do Corolário 4.6.

2. Pela Proposição 4.1, ou G é semi-simples ou $\dim Z(G) = 1$. No caso em que $\dim Z(G) = 1$, tem-se que $\mathfrak{g} = \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{g}'$, onde $\dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) = 1$ e $\mathfrak{g}'$ é semi-simples.

   Como feito anteriormente, existe uma cópia isomorfa de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}'$. Em termos de grupos, existe uma cópia isomorfa de K em G', onde $K = \langle \exp(\mathfrak{k}) \rangle$ e $G' = \langle \exp(\mathfrak{g}') \rangle$. Assim, como $\dim M = G/K$ é ímpar, segue que $M' = G'/K$ tem dimensão par, pois $\dim G' = \dim G - 1$. Pelo item anterior, posto(G') = posto(K), onde posto(G') é a dimensão da subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ de $\mathfrak{g}'$. Mas então, $\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}$ satisfaz a Definição 1.56, ou seja, é uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{g}$.

   Portanto, posto$(G) = \dim(\mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \oplus \mathfrak{t}) = \dim \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) + \dim \mathfrak{t} = 1+$posto$(K)$.

$\square$

CAPÍTULO 5

CLASSIFICAÇÃO DOS ESPAÇOS HOMOGÊNEOS COM DIMENSÃO PAR

5.1 Lema principal para dimensão par

Definição 5.1. *Seja Δ um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$. Diz-se que Δ_1 é um subsistema de Δ, quando $\Delta_1 \subset \Delta$ satisfaz:*

(1) Se $\alpha \in \Delta_1$, então $-\alpha \in \Delta_1$.

(2) Se $\alpha, \beta \in \Delta_1$ e $\alpha + \beta \in \Delta$, então $\alpha + \beta \in \Delta_1$.

Seja G um grupo de Lie compacto, conexo e K um subgrupo fechado e conexo de G. Suponha que K não contém subgrupos normais de G, além do subgrupo trivial e. Esta hipótese, é equivalente, pela Proposição 1.100, a supor que a ação natural de G em G/K é efetiva.

Seja $M = G/K$ e seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ uma estrutura Riemanniana $G-$invariante em M. Assumimos que M tem curvatura estritamente positiva e que dimensão de M é par. Então, pelo Corolário 4.7, tem-se que G é simples e os toros maximais de K, também são toros maximais em G. Escolha um toro maximal de K e denote por T.

Considere $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}$ e $\mathfrak{t}$ as álgebras de Lie de G, K e T, respectivamente. Denote por $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}, \mathfrak{k}_{\mathbb{C}}$ e $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$ as suas complexificações, ou seja, $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g} + i\mathfrak{g}$ e o mesmo vale para as demais álgebras.

Seja $\mathfrak{p}$ o complemento $Ad(K)-$invariante de $\mathfrak{k}$ em $\mathfrak{g}$.

Considere também Δ o sistema de raízes de $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ em relação a $\mathfrak{t}_{\mathbb{C}}$. Por um abuso de notação, o espaço de raízes $(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})_\alpha = \{X \in \mathfrak{g}_{\mathbb{C}}; [H, X] = \alpha(H)X, \forall H \in \mathfrak{t}_{\mathbb{C}}\}$ será denotado apenas por $\mathfrak{g}_\alpha$, com $\alpha \in \Delta$.

Seja Δ^+ um conjunto de raízes positivas de Δ e Δ_1 o subsistema dado por $\Delta_1 = \{\alpha \in \Delta; \mathfrak{g}_\alpha \subset \mathfrak{k}_\alpha\}$. Defina $\mathfrak{k}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$, para $\alpha \in \Delta_1 \cap \Delta^+$ e $\mathfrak{p}_\alpha = (\mathfrak{g}_\alpha + \mathfrak{g}_{-\alpha}) \cap \mathfrak{g}$, para $\alpha \in \Phi = (\Delta^+ - \Delta_1)$.

Lema 5.2. *No contexto acima, se $\alpha, \beta \in \Delta - \Delta_1$ e $\alpha \neq \pm\beta$, então $\alpha + \beta$ ou $\alpha - \beta$ é um elemento de Δ.*

Demonstração: Tem-se que $[\mathfrak{p}_\alpha, \mathfrak{p}_\beta] \subset \mathfrak{p}_{\alpha+\beta} + \mathfrak{p}_{|\alpha-\beta|}$, com a compreensão que $\mathfrak{p}_\alpha = 0$, se $\alpha \notin \Phi$. De fato, conforme o Teorema de Weyl 1.88, $\mathfrak{p}_\alpha = span\{A_\alpha, S_\alpha\}$, onde $A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}$ e $S_\alpha = i(X_\alpha + X_{-\alpha})$. Da mesma forma, $\mathfrak{p}_\beta$ é gerada por $\{A_\beta, S_\beta\}$.

Sejam $X \in \mathfrak{p}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{p}_\beta$. Para mostrar que $[X, Y] \in \mathfrak{p}_{\alpha+\beta} + \mathfrak{p}_{|\alpha-\beta|}$, é suficiente mostrar isso considerando apenas os elementos das bases de $\mathfrak{p}_\alpha$ e $\mathfrak{p}_\beta$.

Ainda pelo Teorema de Weyl, os colchetes são dados por

- $[A_\alpha, A_\beta] = m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} + m_{-\alpha,\beta}A_{\alpha-\beta}$.
- $[S_\alpha, S_\beta] = -m_{\alpha,\beta}A_{\alpha+\beta} - m_{\alpha,-\beta}A_{\alpha-\beta}$.
- $[A_\alpha, S_\beta] = m_{\alpha,\beta}S_{\alpha+\beta} + m_{\alpha,-\beta}S_{\alpha-\beta}$.
- $[A_\beta, S_\alpha] = m_{\beta,\alpha}S_{\beta+\alpha} + m_{\beta,-\alpha}S_{\beta-\alpha}$.

Suponha que $|\alpha - \beta| = \alpha - \beta$. Neste caso, é fácil ver que $[A_\alpha, A_\beta], [S_\alpha, S_\beta]$ e $[A_\alpha, S_{-\alpha}]$ pertencem a $\mathfrak{p}_{\alpha+\beta} + \mathfrak{p}_{|\alpha-\beta|}$. Além disso, $S_{\beta-\alpha} = i(X_{\beta-\alpha} + X_{-(\beta-\alpha)}) = i(X_{\alpha-\beta} + X_{-(\alpha-\beta)}) = S_{\alpha-\beta}$, logo $[A_\beta, S_\alpha]$ também satisfaz o desejado. No caso em que $|\alpha - \beta| = \beta - \alpha$, basta notar que $A_{\alpha-\beta} = -A_{\beta-\alpha}$, daí segue análogo ao mostrado acima.

Portanto, $[X, Y] \in \mathfrak{p}_{\alpha+\beta} + \mathfrak{p}_{|\alpha-\beta|}$.

Agora, suponha que $\alpha, \beta \in \Phi$ e $\alpha + \beta, \alpha - \beta$ não são raízes de $\mathfrak{g}$. Se $X \in \mathfrak{p}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{p}_\beta$, então $[X, Y] = 0$, pois neste caso, $\mathfrak{p}_{\alpha+\beta} = 0$ e $\mathfrak{p}_{|\alpha-\beta|} = 0$.

Escrevendo U e R como no Capítulo 3, segue do Lema 3.4, que

$$\langle R(X, Y), Y, X\rangle = \langle U(X, Y), U(X, Y)\rangle - \langle U(X, X), U(Y, Y)\rangle.$$

O item (1) do Lema 1.62, implica que $\langle \mathfrak{p}_\gamma, \mathfrak{p}_\delta\rangle = 0$, se $\gamma, \delta \in \Phi$ e $\gamma \neq \delta$. Usando isto será demonstrado que:

(i) $U(X, X) = 0$, para todo $X \in \mathfrak{p}_\alpha$.

De fato, tome $Z \in \mathfrak{p}_\gamma$. Pelo Lema 3.3, vale que

$$\langle U(X, X), Z\rangle = \frac{1}{2}\langle [Z, X], X\rangle + \frac{1}{2}\langle [Z, X], X\rangle = \langle [Z, X], X\rangle.$$

Conforme mostrado acima, $[Z, X] \in \mathfrak{p}_{\gamma+\alpha} + \mathfrak{p}_{|\gamma-\alpha|}$. No caso em que $\gamma = \alpha$, o colchete $[Z, X] = 0$. Além disso, note $\gamma + \alpha \neq \alpha$, pois 0 não é raiz. E $|\gamma - \alpha| \neq \alpha$, pois caso contrário, $\gamma - \alpha = \alpha$ ou $\alpha - \gamma = \alpha$, ou seja, $\gamma = 2\alpha$ ou $\gamma = 0$. Isso também não ocorre, em virtude do item (3) do Lema 1.62.

Portanto, $\langle [Z, X], X\rangle = 0$ e consequentemente, $U(X, X) = 0$.

(ii) Para $X \in \mathfrak{p}_\alpha$ e $Y \in \mathfrak{p}_\beta$, tem-se que $U(X, Y) = 0$.

Novamente, seja $Z \in \mathfrak{p}_\gamma$. Então, pelo Lema 3.3,

$$\langle U(X, Y), Z\rangle = \frac{1}{2}\langle X, [Z, Y]\rangle + \frac{1}{2}\langle Y, [Z, X]\rangle.$$

No caso em que $\gamma = \alpha$, o colchete $[Z, X] = 0$ e se $\gamma = \beta$, então $[Z, Y] = 0$.

Assim, se $\langle U(X, Y), Z\rangle \neq 0$, então pelo menos uma das igualdades, $\alpha = \beta + \gamma, \alpha = |\beta - \gamma|, \beta = \alpha + \gamma, \beta = |\alpha - \gamma|$, deve ser verdadeira.

Veja que se $\alpha = \beta + \gamma$, então $\alpha - \beta = \gamma \in \Delta$. Se $\alpha = |\beta - \gamma|$, então $\alpha - \beta = -\gamma \in \Delta$ ou $\alpha + \beta = \gamma \in \Delta$. Se $\beta = \alpha + \gamma$, obtêm-se que $\alpha - \beta = -\gamma \in \Delta$. Se $\beta = |\alpha - \gamma|$, obtêm-se $\alpha - \beta = \gamma \in \Delta$ ou $\alpha + \beta = \gamma \in \Delta$.

Assim, as hipóteses de que $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ não são raízes de $\mathfrak{g}$, implicam que nenhuma das igualdades é verdadeira.

Logo, $\langle U(X, Y), Z\rangle = 0$, para todo $Z \in \mathfrak{p}_\gamma$. Então, concluímos que $U(X, Y) = 0$.

Desta forma, supondo que $\alpha + \beta$ e $\alpha - \beta$ não são raízes de $\mathfrak{g}$, obtêm-se que $\langle R(X, Y)Y, X\rangle = 0$, o que é uma contradição, pois M possui curvatura estritamente positiva.

Portanto, $\alpha + \beta \in \Delta$ ou $\alpha - \beta \in \Delta$. $\square$

5.2 Espaços homogêneos que satisfazem a condição A

Definição 5.3. *Uma variedade Riemanniana conexa M é chamada de espaço simétrico se para todo $p \in M$, existe uma (única) isometria $j_p : M \to M$, tal que $j_p(p) = p$ e $(dj_p)_p = -Id$.*

Note que se M é um espaço simétrico, então o grupo de isometrias de M, $G = \{f : M \to M; f$ é isometria$\}$ é um grupo de Lie que age transitivamente sobre M. A ação natural é $\phi : G \times M \to M$, dada por $\phi((f, x)) = f(x)$. Portanto, fixando um $p \in M$ e considerando K o subgrupo de isotropia da ação ϕ em p, obtêm-se um difeomorfismo de M com o quociente G/K.

Definição 5.4. *Diz-se que um espaço simétrico $M = G/K$ é do tipo compacto, se a forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ é negativa definida, onde $\mathfrak{g}$ é a álgebra de Lie de G.*

Para uma classificação dos espaços simétricos compactos, ver [5], página 518. A descrição geométrica de alguns espaços simétricos, pode ser encontrada em [11], página 237. Para o próximo resultado, será preciso conhecer a classificação dos espaços simétricos compactos de posto 1. Em resumo, considere a seguinte classificação, para os espaços compactos de posto 1:

G	K	dim	descrição geométrica
$SO(l+1)$	$SO(l)$	l	Esfera
$O(l+1)$	$O(l) \times \{1, -1\}$	l	$\mathbb{R}P^l$
$U(l+1)$	$U(l) \times U(1)$	$2l$	$\mathbb{C}P^l$
$Sp(l+1)$	$Sp(l) \times Sp(1)$	$4l$	$\mathbb{H}P^l$
F_4	$Spin(9)$	16	$\mathbb{O}P^2$
$SU(l+1)$	$S(U(l) \times U(1))$	$2l$	Grassmaniana complexa

Seja G um grupo de Lie compacto, conexo e simplesmente conexo e K um subgrupo de G tal que posto K = posto G. Seguindo a notação da Seção 5.1, diz-se que um par (G, K) ou o par (Δ, Δ_1) satisfaz a condição A, se para todos $\alpha, \beta \in \Delta - \Delta_1$, com $\alpha \neq \pm\beta$, for verdade que $\alpha + \beta \in \Delta$ ou $\alpha - \beta \in \Delta$.

Proposição 5.5. *Os únicos pares (G, K) como no parágrafo acima, que satisfazem a condição A, são:*

(1) $(SU(l+1), U(l))$ e $G/K = \mathbb{C}P^l$ é o espaço projetivo complexo de dimensão l.

(2) $(SU(3), T)$, onde T é um toro maximal de $SU(3)$ e G/K é uma variedade flag em C^3.

(3) $(Spin(2l+1), Spin(2l))$ *e* $G/K = S^{2l}$ *é a esfera de dimensão* $2l$.

(4) $(Sp(l), Sp(l-1) \times SU(2))$ *e* G/K *é o espaço projetivo dos quatérnios.*

(5) $(Sp(l), Sp(l-1) \times T^1)$*, onde* T^1 *é um toro de dimensão um e* G/K *é difeomorfo à* $\mathbb{C}P^l$.

(6) $(Sp(3), SU(2) \times SU(2) \times SU(2))$ *e* G/K *é uma variedade flag no espaço dos quatérnios.*

(7) $(F_4, Spin(9))$ *e* G/K *é o plano de Cayley.*

(8) $(F_4, Spin(8))$ *e* G/K *é uma variedade flag no plano de Cayley.*

(9) $(G_2, SU(3))$ *e* G/K *é difeomorfo à* S^6.

Demonstração: Seja Δ um sistema de raízes de $\mathfrak{g}$ com relação a subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ e Δ_1 um subsistema de Δ. Se (Δ, Δ_1) satisfaz a condição A e existe um subsistema Δ_2, com $\Delta \supset \Delta_2 \supset \Delta_1$, então (Δ, Δ_2) e (Δ_2, Δ_1) também satisfazem A. Desta forma, é interessante determinar o subsistema maximal e em seguida repetir o processo para este novo sistema.

Seja Δ^+ uma escolha de raízes positivas para Δ e $\Sigma = \{\alpha_1, ..., \alpha_l\}$ o conjunto das raízes simples correspondentes à Δ^+. Assim, se $\alpha \in \Delta$, então $\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i$, com $n_i \in \mathbb{Z}$, essa expressão é única e se $\alpha \in \Delta^+$, então $n_i \geq 0$, para todo $i = 1, ..., l$. Conforme o Lema 1.70, existe uma raiz $\beta = \sum_{i=1}^{l} m_i \alpha_i \in \Delta^+$, tal que $m_i \geq n_i$, para todo $i = 1, ..., l.$, ou seja, β é a raiz de altura máxima. Se m_i é primo, considere o subsistema $\Delta^i = \{\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \in \Delta; n_i \equiv 0 \mod m_i\}$. Se $m_i = 1$, defina $\Delta^i = \{\alpha = \sum_{i=1}^{l} n_i \alpha_i \in \Delta; n_i = 0\}$.

Seja W o grupo de Weyl de G em relação a T.

Em Borel e Siebenthal [3], é provado que se Δ_1 é um subsistema maximal de Δ, então existe um i e um elemento $s \in W$, tal que m_i é primo e $s(\Delta_1) = \Delta^i$. Conforme Wallach em [16], se $m_i = 2$ ou 1, então o subgrupo maximal K de G, correspondente a Δ^i é tal que G/K é um espaço simétrico do tipo compacto. Neste caso, Sugiura [14], Teorema 7, página 415, implica que o par (Δ, Δ_1) satisfaz A se, e somente se, G/K é um espaço simétrico de posto 1.

A análise será caso a caso, seguindo a mesma notação apresentada na classificação dos diagramas de Dynkin, no Teorema 1.68.

- $\mathbf{A}_l$**, com** $\mathbf{l \geq 1}$. Nesse caso, a raiz de altura máxima é $\beta = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i$, conforme o

Teorema 1.72. E o único espaço simétrico de posto 1 correspondente à A_l é determinado pelo par

$$(SU(l+1), S(U(l) \times U(1))).$$

Além disso, pelo Teorema de Weyl 1.88, uma base ortogonal para a forma real compacta $\mathfrak{su}(l+1)$ determinada por A_l é $\{i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}, E_{jk} - E_{kj}, i(E_{jk} + E_{kj})\}$, onde $j, k \in \{1, ..., l+1\}$, com $j < k$, e $\mathfrak{t}$ é a subálgebra das matrizes diagonais de traço zero, que é uma subálgebra de Cartan. Assim, toda matriz de $\mathfrak{su}(l+1)$ é escrita como:

$$M = H + \sum_{j<k} b_{jk}(E_{jk} - E_{kj}) + c_{jk}i(E_{jk} + E_{kj}),$$

onde $H \in i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ e $b_{jk}, c_{jk} \in \mathbb{R}$. Uma matriz de $i\mathfrak{t}_R$ é da forma $H = \text{diag}\{ia_1, ..., ia_{l+1}\}$, com $a_j \in \mathbb{R}$, tal que $tr(H) = 0$. Assim, $M \in \mathfrak{su}(l+1)$ se, e só se,

$$M = \begin{bmatrix} ia_1 & b_{12} + ic_{12} & \cdots & b_{1(l+1)} + ic_{1(l+1)} \\ -b_{12} + ic_{12} & ia_2 & \cdots & b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{1(l+1)} + ic_{1(l+1)} & -b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} & \cdots & ia_{l+1} \end{bmatrix},$$

com $tr(M) = 0$.

Por Wallach [16], tem-se que o par (Δ, Δ^1) corresponde ao par $(SU(l+1), U(l)$. Mas, devido à importância e ao uso dessa teoria, será feito os cálculos aqui utilizando Borel-Siebenthal [3]. Isso se repetirá nos demais casos.

Afirmação: O subsistema Δ^1 corresponde ao subgrupo $S(U(l) \times U(1))$.

De fato, $\Delta^1 = \{\alpha = \sum n_i\alpha_i \in \Delta; n_1 = 0\}$ e a raiz α_1 determina o espaço gerado por $\{(E_{12} - E_{21}), i(E_{12} + E_{21})\}$. Assim, as matrizes determinadas pelo subsistema Δ^1 são da forma

$$M = \begin{bmatrix} ia_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & ia_2 & \cdots & b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & -b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} & \cdots & ia_{l+1} \end{bmatrix},$$

com $tr(M) = 0$.

Denote $B = \begin{bmatrix} ia_2 & \cdots & b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -b_{2(l+1)} + ic_{2(l+1)} & \cdots & ia_{l+1} \end{bmatrix}$ e escreva

$$M = \begin{bmatrix} ia_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ia_1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l}(tr(B)Id_{l\times l}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B - \frac{1}{l}tr(B)Id_{l\times l} \end{bmatrix}.$$

Como $tr(M) = 0$, o valor de a_1 já determina o valor de $tr(B)$, assim a primeira matriz da soma acima é identificada com $\mathbb{R}$. A segunda matriz dessa soma, pertence à $\mathfrak{u}(l)$ e têm traço zero, ou seja, determina $\mathfrak{su}(l)$. Além disso, as parcelas dessa soma comutam em relação produto, assim o seu colchete é nulo, o que mostra que a soma é direta, ou seja, a álgebra de Lie de $S(U(l) \times U(1))$ é isomorfa à $\mathfrak{su}(l) \oplus \mathbb{R}$. Além disso, $U(l)$ é um grupo de Lie conexo com álgebra $\mathfrak{su}(l) \oplus \mathbb{R}$. Logo, $U(l) \simeq S(U(l) \times U(1))$.

Portanto, o par (Δ, Δ^1) determina o item (1) dessa proposição.

Se $\Delta_1 \subset \Delta^1$ é um subsistema que satisfaz a condição A, então pelo fato de que Δ^1 determina um diagrama do tipo A_{l-1}, pode-se repetir o processo acima, assim, a menos de isomorfismos, tem-se que $\Delta_1 \subset \{\alpha = \sum_{i=3}^{l} n_i\alpha_i; \alpha \in \Delta\}$. Mas, neste caso, $\beta, \alpha_2 \in \Delta - \Delta_1$ e $\beta \pm \alpha_2 \notin \Delta$, se $l > 2$. Logo, se $l > 2$, o único par possível é (1).

Observe ainda que Δ^1 e Δ^l são isomorfos, sendo assim, obtêm-se os mesmos resultados para o subsistema Δ^l.

Se $l = 2$, além do par (1), tem-se que $(\Delta, \emptyset)$ satisfaz a condição A.

De modo particular ao que foi calculado anteriormente, uma matriz $A \in \mathfrak{su}(3)$ é da forma $M = \begin{bmatrix} ia_1 & b_{12} + ic_{12} & b_{13} + ic_{13} \\ -b_{12} + ic_{12} & ia_2 & b_{23} + ic_{23} \\ -b_{13} + ic_{13} & -b_{23} + ic_{23} & ia_3 \end{bmatrix}$, com $tr(M) = 0$.

Retirando os espaços correspondentes às raízes α_1 e α_2, obtêm-se, a forma matricial $H = \text{diag}\{ia_1, ia_2, ia_3\}$, com $tr(H) = 0$, a qual representa a subálgebra de Cartan $i\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$. Como toda subálgebra de Cartan é álgebra de um toro maximal, segue que o par $(\Delta, \emptyset)$, determina o item (2) da lista, isto é, o par $(SU(3), T)$, onde T é um toro maximal de $SU(3)$. Isso completa a classificação para o caso A_l.

- **$\mathbf{D_l}$, com l $\geq$ 4.** O único espaço simétrico de posto 1 correspondente a D_l é a esfera de dimensão ímpar $2l-1$. Uma das hipóteses inicias exige que dimensão de G/K seja par, assim D_l não contribui para esta classificação.

- **$\mathbf{B_l}$, com l $\geq$ 2.** Pelo Teorema 1.72, a raiz de altura máxima é $\beta = \alpha_1 + 2\sum_{i=2}^{l}\alpha_i$. O único espaço simétrico de posto 1 correspondente a B_l é a esfera de dimensão $2l$, ou seja, o par $(SO(2l+1), SO(2l))$ que determina o par (3) da lista, uma vez que $Spin(l)$ é o grupo de recobrimento universal de $SO(l)$.

  Afirmação: O subgrupo $SO(2l)$ é determinado pelo subsistema Δ^l.

  De fato, conforme descrito na Seção 1.2, uma subálgebra de Cartan de $\mathfrak{so}(2l+1)$ é representada como $H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda & \\ & & -\Lambda \end{pmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem l. Utilizando uma álgebra isomorfa à $\mathfrak{so}(2l+1)$, representa-se $M \in \mathfrak{so}(2l+1)$ da forma $M = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & -a^t \end{pmatrix}$, onde β, γ são matrizes $1 \times l$, as demais são $l \times l$ e com b e c são anti-simétricas. Considere ainda, a notação utilizada na Seção 1.2, as raízes e os espaços de raízes correspondentes. Desta forma, usando a Observação (1.73) é fácil verificar que $\Delta^l = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j)\}$ e uma matriz M determinada por Δ^l deve ser da forma $M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & -a^t \end{bmatrix}$, onde b e c são anti-simétricas. Portanto, Δ^l é do tipo D_l e, portanto, corresponde ao subgrupo $SO(2l)$, o que mostra a afirmação feita.

  Desta forma, se $l \geq 4$, então B_l contribui apenas com (3) para a lista, devido a análise feita no caso D_l.

  Se $l = 3$, então Δ^3 é o tipo A_3. Conforme Wallach [16], tem-se que $\beta_1 = \alpha_2 + 2\alpha_3, \beta_2 = \alpha_1$ e $\beta_3 = \alpha_2$ é um sistema simples de Δ^3. Assim, se $\Delta_1 \subset \Delta^3$ e (Δ, Δ^3) satisfaz a condição A, pode-se supor que $\Delta_1 \subset \{\alpha \in \Delta; \alpha = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2\}$. Mas, $\beta, \alpha_3 \in \Delta - \Delta_1$ e $\beta \pm \alpha_3 \notin \Delta$. Desta forma, no caso $l = 3$ não existem outros pares além de (Δ, Δ^l).

  Se $l = 2$, então $\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$ e $\Delta^2 = \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 +$

$2\alpha_2)\}$ é do tipo D_2. Os subsistemas $\Delta_1 = \{\pm\alpha_1\}$ e $\Delta_2 = \{\alpha_1 + 2\alpha_2\}$ satisfazem a condição A e são maximais em Δ^2. Como Δ^2 é do tipo D_2, as matrizes determinadas por Δ^2 são da forma $M = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{bmatrix}$, onde α, β e γ são 2×2, β e γ anti-simétricas. As matrizes associadas a subálgebra de Cartan são $H = \begin{bmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & -\Lambda \end{bmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem 2. Como o espaço de raízes associado à raiz α_1, corresponde as matrizes M tais que α_{12} e α_{21} são os únicos valores não-nulos, concluímos as matrizes determinadas por Δ_1 são da forma

$$M = H + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha_{21} \\ 0 & 0 & -\alpha_{12} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \Lambda_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Lambda_{11} & -\alpha_{21} \\ 0 & 0 & -\alpha_{12} & -\Lambda_{22} \end{bmatrix}.$$

Considere $B = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} - \frac{1}{2}tr(B) & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \Lambda_{22} - \frac{1}{2}tr(B) \end{bmatrix}$. Em seguida, reescreva M como

$$M = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -C^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2}tr(B)Id_{2\times 2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}tr(B)Id_{2\times 2} \end{bmatrix}.$$

Observe que a matriz C corresponde as matrizes de $\mathfrak{su}(2)$, o que determina um isomorfismo entre $\mathfrak{su}(2)$ e a álgebra determinada por $\begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & -C^t \end{bmatrix}$. A outra parcela desta soma é determinada pelo $tr(B)$, ou seja, está associada à $\mathbb{R}$. Essa soma é direta, uma vez que as matrizes da soma, comutam entre si.

Portanto, Δ_1 determina a álgebra de lie $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathbb{R}$, a qual corresponde ao subgrupo $SU(2) \times T^1 \simeq Sp(1) \times T^1$, onde T^1 é um toro de dimensão 1. Esse é o item (5) da lista.

Para o subsistema Δ_2 considerado acima, a análise é análoga ao que foi feita para Δ_1 e obtêm-se novamente o subgrupo $Sp(1) \times T^1$.

Isso conclui o caso B_l.

- $\mathbf{C_l}$, **com** $\mathbf{l \geq 3}$. A raiz de altura máxima é $\beta = 2\sum_{i=1}^{l-1} \alpha_i + \alpha_l$, conforme o Teorema 1.72.

O único espaço simétrico correspondente a C_l é o espaço projetivo dos quatérnios, que está associado ao par $(Sp(l+1), Sp(l) \times Sp(1))$.

Afirmação: O subgrupo $Sp(l)\times Sp(1)$ é determinado pelo subsistema Δ^1. Novamente, descrito na Seção 1.2, sabe-se que $M \in \mathfrak{sp}(l)$ se, e só se, $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha^t \end{pmatrix}$, onde β, γ são matrizes simétricas. Uma subálgebra de Cartan $\mathfrak{t}$ é a subálgebra das matrizes diagonais de $\mathfrak{sp}(l)$, ou seja, $H \in \mathfrak{t}$ se, e só se, H é da forma $H = \begin{pmatrix} \Lambda & \\ & -\Lambda \end{pmatrix}$, com Λ uma matriz diagonal de ordem l. Neste caso, $\Delta - \Delta^1 = \{\pm(\lambda_i - \lambda_j), \pm(\lambda_i + \lambda_j); j > 1\}$. Retirando de M os subespaços correspondentes às raízes de $\Delta - \Delta^1$, obtêm-se matrizes da forma $M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ \gamma_{11} & 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ 0 & C & 0 & -A^t \end{bmatrix}$, onde A, B e C são obtidas retirando a primeira linha e a primeira coluna das matrizes α, β e γ, respectivamente. Agora, reescreva

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & 0 & \beta_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_{11} & 0 & -\alpha_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & B \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & -A^t \end{bmatrix}$$

e note que a primeira parcela desta soma determina $\mathfrak{su}(2)$ e a segunda parcela determina $Sp(l-1)$. Como as matrizes comutam, tem-se uma soma direta. Assim, Δ^1 determina a álgebra $\mathfrak{sp}(l+1) \oplus \mathfrak{su}(2)$ e corresponde ao subgrupo $Sp(l-1) \times SU(2) \simeq Sp(l) \times Sp(1)$, o que conclui a afirmação feita.

Desta forma, (Δ, Δ^1) determina o item (4) da lista.

Um sistema simples para Δ^1 é $\{\beta, \alpha_2, ..., \alpha_l\}$. Note que $\{\alpha_2, ..., \alpha_l\}$ gera um subsistema $\tilde{\Delta}$ do tipo C_{l-1} e se $\alpha \in \tilde{\Delta}$, então $\alpha \pm \beta \notin \Delta$, pois a raiz de altura máxima é o único elemento de Δ tal que o escalar de α_1 é 2. Assim, se $\alpha \pm \beta \in \Delta$, então $\alpha \notin \tilde{\Delta}$. Além disso, o fato de $\alpha + \beta \notin \Delta$, mostra que β é ortogonal à α

(o número de Killing é zero) e consequentemente, $\Delta^1 = \{\beta\} \cup \tilde{\Delta}$. Logo, $(\Delta, \tilde{\Delta})$ satisfaz a condição A. De modo análogo ao que foi feito para Δ^1, verifica-se que $\tilde{\Delta}$ corresponde ao subgrupo $Sp(l-1) \times T^1$, onde T^1 é um toro de dimensão um, mostrando que $(\Delta, \tilde{\Delta})$ determina (5) na lista.

A relação encontrada acima, que $\alpha \pm \beta \in \Delta$ implica que $\alpha \notin \tilde{\Delta}$, mostra que se $\Delta_1 \subset \tilde{\Delta}$, então (Δ, Δ_1) não satisfaz A.

Se $l \geq 4$ e $\Delta_1 \subset \Delta^1$ é um subsistema maximal contendo β, então

$$\Delta_1 \subset \{\beta\} \cup \{\alpha = \sum_{i=2}^{l} n_i \alpha_i \in \tilde{\Delta}; n_2 \equiv 0 \mod 2\}.$$

Neste caso, $\alpha_1 + \cdots + \alpha_l, \alpha_2 \in \Delta - \Delta_1$ e $(\alpha_1 + \cdots + \alpha_l) \pm \alpha_2 \notin \Delta$, ou seja, Δ_1 não satisfaz A.

Se $l = 3$, então $\Delta_1 = \{\pm\beta, \pm(2\alpha_2 + \alpha_3), \pm(\alpha_3)\}$ é um subsistema maximal tal que (Δ, Δ_1) satisfaz A. Analisando cada caso, verifica-se que este é o único subsistema possível. Utilizando novamente a descrição de C_l feita na Seção 1.2, obtêm-se que Δ_1 corresponde à álgebra $\mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2)$, a qual determina o subgrupo $SU(2) \times SU(2) \times SU(2)$.

Portanto, (Δ, Δ_1) determina o item (6) da lista.

- $\mathbf{E_l}$, **com** $\mathbf{l = 6, 7, 8}$. Para $l = 6$, $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 2\alpha_4 + \alpha_5 + 2\alpha_6$ é a raiz de altura máxima. Para $l = 7$, tem-se que $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 3\alpha_5 + 2\alpha_6 + 2\alpha_7$ e para $l = 8$, $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 5\alpha_4 + 6\alpha_5 + 4\alpha_6 + 2\alpha_7 + 3\alpha_8$, conforme Teorema 1.72.

Não existem espaço simétricos de posto 1 correspondente a E_l. Assim, quando $m_i = 1$ ou $m_i = 2$, tem-se que (Δ, Δ_i) não satisfaz A. Por isso, basta analisar Δ^i, para os índices i, tais que m_i é um primo, maior que 2.

Para $l = 6$, é suficiente analisar apenas o subsistema Δ^3. As raízes $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$ e α_3 pertencem a $\Delta - \Delta^3$. Mas, $(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3$ e $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_3$ não são raízes. Ou seja, (Δ, Δ^3) não satisfaz A.

Para $l = 7$, é preciso analisar Δ^3 e Δ^5.

Note que $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4, \alpha_3 \in \Delta - \Delta^3$, mas $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \pm \alpha_3 \notin \Delta$. E $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6, \alpha_5 \in \Delta - \Delta^5$, mas $\alpha_4 + \alpha_5 + \alpha_6 \pm \alpha_5 \notin \Delta$. Assim, (Δ, Δ^3) e (Δ, Δ^5) não satisfazem A.

Para $l = 8$, deve-se verificar os subsistemas Δ^2, Δ^4 e Δ^8. Os casos Δ^2 e Δ^4 são análogos aos considerados anteriormente. O par (Δ, Δ^8) também não satisfaz A, pois $\gamma = \alpha_4 + 2\alpha_5 + \alpha_6 + \alpha_8$ e α_8 pertencem a $\Delta - \Delta_8$, mas $\gamma \pm \alpha_8$ não é raiz de Δ.

Portanto, não há nenhum par correspondente a E_l.

- $\mathbf{F_4}$. Pelo Teorema 1.72, a raiz de altura máxima é $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + 2\alpha_4$.

O único espaço simétrico de posto 1, é o plano de Cayley, dado por $F_4/Spin(9)$. A álgebra do grupo $Spin(9)$ corresponde a forma real compacta de B_4. Desta forma, deve-se determinar qual subsistema de Δ é isomorfo a B_4.

Pela Fórmula de Killing dada no Teorema 1.63 é possível calcular todas as raízes positivas de F_4 e obtêm-se:

$\Delta^+ : \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_1+\alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_3, \alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3, \alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+2\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+2\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4, \alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4, 2\alpha_1+3\alpha_2+4\alpha_3+2\alpha_4\}$.

Agora, considere o subsistema Δ^4 e denote a raiz $\gamma_4 = \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4$. Então, $\pi_4 = \{\gamma_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ é um sistema de raízes simples para Δ_4. Além disso, é fácil ver que o diagrama de Dynkin formado pelas raízes α_1, α_2 e α_3, é do tipo B_3. Para incluir a raiz γ_4, neste diagrama, é preciso determinar o número de Killing entre γ_4 e α_i, com $i = 1, 2, 3$. Tem-se que

$$\frac{2\langle \gamma_4, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = \frac{2\langle \alpha_2 + 2\alpha_3 + 2\alpha_4, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = \frac{2\langle \alpha_2, \alpha_1 \rangle}{\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle} = -1.$$

Assim, $\frac{2\langle \alpha_1, \gamma_4 \rangle}{\langle \gamma_4, \gamma_4 \rangle} \in \{-1, -2, -3\}$. Mas, se $\frac{2\langle \alpha_1, \gamma_4 \rangle}{\langle \gamma_4, \gamma_4 \rangle} < -1$, então $(\alpha_1) + 2\gamma_4$ deveria pertencer a Δ, o que não ocorre. Logo, $\frac{2\langle \alpha_1, \gamma_4 \rangle}{\langle \gamma_4, \gamma_4 \rangle} = -1$.

Além disso,

$$\frac{2\langle \gamma_4, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = 0 = \frac{2\langle \alpha_2, \gamma_4 \rangle}{\langle \gamma_4, \gamma_4 \rangle} \text{ e}$$

$$\frac{2\langle \gamma_4, \alpha_3 \rangle}{\langle \alpha_3, \alpha_3 \rangle} = 0 = \frac{2\langle \alpha_3, \gamma_4 \rangle}{\langle \gamma_4, \gamma_4 \rangle}.$$

Desta forma, o diagrama de Dynkin correspondente a Δ^4 é do tipo B_4, ou seja, Δ^4 é isomorfo a B_4. Para B_4, o único subsistema que satisfaz A, corresponde a álgebra de $Spin(8)$. Portanto, o par $(F_4, Spin(8))$ satisfaz A e não existem mais possibilidades para F_4.

- $\mathbf{G_2}$. Pelo Teorema 1.72, neste caso a raiz de altura máxima é $\beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$.

  Como não existe espaço simétrico de posto 1, correspondente a G_2, é suficiente verificar o subsistema Δ^2.

  Calculando as raízes de G_2, obtêm-se que

$$\Delta = \{\pm\alpha_1, \pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2), \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}.$$

  Assim,

$$\Delta^2 = \{n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 \in \Delta; n_2 \equiv 0 \mod 3\} = \{\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2), \pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)\}.$$

  Consequentemente, $\Delta - \Delta^2 = \{\pm\alpha_2, \pm(\alpha_1 + \alpha_2), \pm(\alpha_1 + 2\alpha_2)\}$. Dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \Delta - \Delta^2$, verifica-se facilmente que $\gamma_1 + \gamma_2 \in \Delta$ ou $\gamma_1 - \gamma_2 \in \Delta$. Logo, (Δ, Δ^2) satisfaz A.

  Note que se uma das raízes $\pm\alpha_1, \pm(\alpha_1 + 3\alpha_2)$ ou $\pm(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$ for incluída no conjunto $\Delta - \Delta^2$, então a condição A não é preservada. Ou seja, esse é o único par que satisfaz a condição desejada.

  Por fim, veja que Δ^2 é isomorfo à um sistema de raízes de A_3. A forma real compacta dessa álgebra é $\mathfrak{su}(3)$, portanto, o par (Δ, Δ^2) corresponde à $(G_2, SU(3))$.

□

Teorema 5.6. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta, conexa, simplesmente conexa, com curvatura estritamente positiva e dimensão par. Seja G um subgrupo transitivo do grupo de isometrias de M, conexo e fechado. Seja $\tilde{G}$ o recobrimento universal de G e K o subgrupo de isotropia de um ponto de M, em relação a ação induzida de $\tilde{G}$ em M. Então, $(\tilde{G}, K)$ é dos pares da Proposição 5.5.*

Corolário 5.7. *Seja M um espaço homogêneo compacto, simplesmente conexo, com curvatura estritamente positiva e dimensão par. Então, M é difeomorfo à um espaço simétrico de posto 1 ou à uma variedade flag no espaço dos complexos, quatérnios ou no plano projetivo de Cayley.*

No artigo [15] de 1972, Wallach mostrou pela primeira vez a existência de métrica Riemanniana com curvatura estritamente positiva para os espaços

$$\frac{SU(3)}{T}, \frac{SU(3)}{SU(2)\times SU(2)\times SU(2)} \text{ e } \frac{F_4}{Spin(8)}.$$

Para os demais espaços classificados na Proposição 5.5 já se era conhecido a existência de tais métricas, ver [1] de 1961.

Referências Bibliográficas

[1] M. BERGER. **Les variétés riemanniennes homogénes normales simplement connexes à courbure strictement positive.** Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Vol. 14, pp.179-246, 1961.

[2] M. BERGER. **Trois remarques sur les variétés riemanniennes à courbure positive.** C. R. Acad. Sci. Paris, Vol. 233, pp.76-78, 1966.

[3] A. BOREL e T. DE SIEBENTHAL. **Les sous-groupes fermés de rang maximum des groupes de Lie clos.** Commentarii mathematici Helvetici. Vol 23, pp. 200-221, 1949.

[4] M. P. DO CARMO. **Geometria Riemanniana.** Impa, Rio de Janeiro, 2015.

[5] S. HELGASON. **Differential Geometry and Symmetric Spaces.** Academic Press, New York, 1962.

[6] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU. **Fundations of Differential Geometry.** Vol. I, Interscience, New York, 1963.

[7] S. KOBAYASHI e K. NOMIZU. **Fundations of Differential Geometry.** Vol. II, Interscience, New York, 1969.

[8] J. M. LEE. **Riemannian manifolds: an introduction to curvature.** Springer Science e Business Media, 2006.

[9] E. L. LIMA. **Variedades diferenciáveis.** Impa, Rio de Janeiro, 1973.

[10] B. O'NEILL. **The fundamental equations of a submersion.** Michigan Math. J., Vol 13, pp.459-469, 1966.

[11] P. PETERSEN. **Riemannian Geometry.** Springer, New York, 2006.

[12] L. A. B. SAN MARTIN. **Álgebras de Lie.** Unicamp, Campinas, 1999.

[13] L. A. B. SAN MARTIN. **Grupos de Lie.** Unicamp, Campinas, 2017.

[14] M. SUGIURA. **Conjugacy classes and Cartan subalgebras in real semi-simple Lie algebras.** Jour. Math. Soc. Japan, Vol. 11, pp.374-434, 1959.

[15] N. R. WALLACH. **Compact homogeneous Riemannian manifolds with strictly positive.** Annals of Mathematics, Vol. 96, pp.277-295, 1972.

[16] N. R. WALLACH. **On maximal subsystems of root systems.** Canad. J. Math, Vol. 20, pp.555-574, 1968.

Índice Remissivo