UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Jean Geovane da Silva

EXTENSÕES POLINOMIAIS E ANÉIS DE JACOBSON

Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

MARINGÁ- PR
2019

Jean Geovane da Silva

EXTENSÕES POLINOMIAIS E ANÉIS DE JACOBSON

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática-PMA/UEM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Laerte Bemm

Maringá-PR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Silva, Jean Geovane da
S586e Extensões polinomiais e anéis de Jacobson / Jean Geovane da Silva. -- Maringá, 2019.
48 f. : il.

Orientador: Profº. Drº. Laerte Bemm.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Álgebra, 2019.

1. Anel de Jacobson. 2. Radical primo. 3. Radical de Jacobson. 4. Anéis. 5. Módulos. 6. Jacobson Ring. 7. Prime radical. 8. Jacobson radical. 9. Rings. 10. Modules. I. Bemm, Laerte, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Àlgebra. III. Título.

CDD 22.ed. 512.46

Edilson Damasio CRB9-1.123

JEAN GEOVANE DA SILVA

EXTENSÕES POLINOMIAIS E ANÉIS DE JACOBSON

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Laerte Bemm

Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Wagner de Oliveira Cortes

Prof. Dr. Wagner de Oliveira Cortes
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

Ednei Ap. Santulo Jr.

Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 26 de fevereiro de 2019.
Local de defesa: Sala 107, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

O presente trabalho requer o agradecimento de algumas pessoas, pois foram elas que o tornaram possível.

Agradeço primeiramente o meu orientador, Professor Doutor Laerte Bemm, pela paciência e por todo o seu conhecimento compartilhado. Muito obrigado por te me corrigido quando necessário.

Todos os meus colegas e professores que, com certeza, de alguma forma contribuíram com esse trabalho, obrigado. Em especial, agradeço meu colega e amigo do peito De Loreno, por compartilhar comigo as alegrias e frustrações desta fase.

A minha família, por sempre terem acreditado em mim, meus genuínos agradecimentos.

Agradeço também ao Programa de Pós-graduação em Matemática (PMA) da UEM, pela oportunidade e a Lúcia K. Kato, secretária do PMA, por ser sempre muito atenciosa.

Por fim, agradeço à CAPES, pelo auxílio financeiro concedido.

Resumo

Neste trabalho iremos demonstrar um resultado, devido J.F. Watters, que diz que um anel R é um anel de Jacobson se, e só se, o anel de polinômios $R[x]$ é um anel de Jacobson. Teremos como um segundo objetivo demonstrar um resultado análogo ao obtido por Watters, para os *skew* anéis de polinômios. Provaremos que um anel R é $\alpha-$Jacobson se, e somente se, o *skew* anel de polinômios $R[x, \alpha]$ é $\alpha-$Jacobson, este resultado é devido a K.R Pearson, W. Stephenson e J. F. Watters.

Palavras Chave: Módulos, Anéis Primos, Anéis Semiprimos, Semissimplicidade, Radical de Jacobson, Radical Primo, Anel de Jacobson, *skew* Anéis de Polinômios.

Abstract

In this work we will prove a result, due to J. F. Watters, which says that a ring R is a Jacobson ring if and only if the polynomial ring $R[x]$ is a Jacobson ring. We will have as a second objective to demonstrate a result analogous to that one obtained by Watters, for *skew* polynomials rings. We will prove that a ring R is $\alpha-$Jacobson if, and only if, the *skew* polynomials ring $R[x, \alpha]$ is $\alpha-$Jacobson, this result is due to K. R. Pearson, W. Stephenson and JF Watters.

Keywords: Modules, Prime Rings, Semiprime Rings, Semisimplicity, Jacobson Radical, Prime Radical, Jacobson Ring, *skew* Polynomials Ring.

Sumário

Introdução

Os anéis de Jacobson, apesar do nome, foram primeiramente definidos e estudados por W. Krull em [10] e [11], onde ele mostrou os resultados iniciais sobre estes anéis. Krull provou que se R é um anel de Jacobson comutativo, então toda extensão finita de R é também um anel de Jacobson.

Sejam K um corpo e $\overline{K}$ seu fecho algébrico. Denote por $K[x] = K[x_1, ..., x_n]$ o anel de todos os polinômios nas indeterminadas comutativas $x_1, ..., x_n$. Sejam $G \subseteq K[x]$ um conjunto de polinômios e $f(x) \in K[x]$. A forma clássica do Teorema dos Zeros de Hilbert, também conhecido como Nullstellensatz, afirma que: "Se $f(x)$ se anula em todos os zeros dos polinômios do conjunto G então alguma potência $f^m(x)$ de $f(x)$ pertence ao ideal gerado pelo conjunto G". Os anéis de Jacobson são também conhecidos como anéis de Hilbert, isto porque O. Goldman usou em [7] este nome para enfatizar sua relação com o Teorema dos Zeros de Hilbert. Goldman também provou resultados similares aos de Krull em [7].

Se um anel R é um anel de Jacobson comutativo, então $R[x]$ é também um anel de Jacobson comutativo. Este resultado foi provado por Goldman em [7] e estendido por Procesi em [8], que, em vez de assumir a condição de comutatividade, assumuiu $R[x]$ satisfazendo uma identidade polinomial. Nosso primeiro objetivo neste trabalho é o de provar no capítulo 2, conforme feito por J. F. Watters em [5] , que R é um anel de Jacobson se, e só se, o anel de polinômios $R[x]$ é um anel de Jacobson. Para fazer isso, o capítulo 1 é totalmente dedicado à apresentação de alguns requisitos básicos que acreditamos serem necessários para um bom entendimento deste trabalho.

Na primeira seção, do capítulo 1, falamos sobre módulos e semissimplicidade. Na segunda seção definimos e apresentamos alguns resultados sobre o radical de Jacobson de um anel. Finalmente, na terceira e última seção do capítulo 1, abordamos os conceitos de anel primo e semiprimo, com o intuito de relacioná-los com o radical primo de um anel.

Após provarmos os resultados de J. F. Watters no capítulo 2, uma questão natural é se o mesmo resultado vale para os *skew* anéis de poliômios $S = R[x, \alpha]$, em que α é algum automorfismo do anel R. K. R. Goodearl provou em [13] que tal resultado é ainda verdadeiro se R é um anel comutativo noetheriano. Porém, K.R. Pearson e W. Stephenson mostraram em [9] que tal resultado não é sempre verdadeiro, quando consideramos R um anel qualquer.

Nosso segundo e último objetivo neste trabalho é o de apresentar no capítulo 3, conforme feito por K. R. Pearson, W. Stephenson e J. F. Watters em [4], uma extensão natural do resultado do capítulo 2. Provaremos que $S = R[x, \alpha]$ é $\alpha-$Jacobson se, e somente se, R é $\alpha-$Jacobson. Em todo o trabalho, salvo menção em contrário, a palavra “anel” significa um anel associativo, com elemento identidade 1, não necessariamente comutativo.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Este capítulo inicial é destinado aos conceitos básicos para o desenvolvimento deste trabalho. Suporemos que o leitor esteja familiarizado com as noções básicas da Teoria de Anéis. Assim, em alguns resultados, iremos apenas indicar uma bibliografia na qual o leitor poderá encontrar uma demonstração. Na primeira seção relembraremos alguns resultados da Teoria de Módulos, para podermos definir anéis semissimples. Na segunda seção, falaremos sobre o radical de Jacobson de um anel e apresentaremos algumas caracterizações para ele. Na última seção, abordamos de forma sucinta os conceitos de anéis primos e semiprimos, a fim de relacionar o radical primo de um anel com tais conceitos.

1.1 Módulos e Semissimplicidade

O foco principal da presente seção é uma classe muito importante de anéis, chamada de anéis semissimples. Iremos apresentar a estrutura que tais anéis possuem, devido a Wedderburn e Artin. Em essência, o Teorema de Wedderburn-Artin permite determinar completamente a classe de anéis semissimples (à esquerda) a partir de uma classe mais elementar de anéis, os anéis de divisão. Para abordar a noção de anéis semissimples, iremos usar a linguagem dos módulos, o qual é uma generalização de espaços vetoriais.

Definição 1.1. *Seja R um anel. Um $R-$módulo à esquerda é um grupo abeliano aditivo $(M,+)$ juntamente com uma aplicação $R \times M \to M$ (chamada produto por escalar) que associa a cada $(r,m) \in R \times M$ um único elemento $rm \in M$ tal que para quaisquer que sejam $a, b \in R$ e*

$m, n \in M$ tem-se:

(1) $(a+b)m = am + bm$;

(2) $a(m+n) = am + an$;

(3) $(ab)m = a(bm)$;

(4) $1m = m$.

Denotamos um $R-$módulo à esquerda M por ${}_RM$. De modo análogo define-se $R-$módulo à direita e o denotamos por M_R. Os elementos do anel R são denominados escalares. Daqui em diante nos referimos, salvo menção em contrário, a um $R-$módulo à esquerda simplesmente por $R-$módulo.

Exemplo 1.2. *É rotina mostrar que os seguintes conjuntos são módulos:*

(1) Todo ideal de um anel R é um $R-$módulo, com adição e multiplicação do anel. Em particular, R é um $R-$módulo.

(2) Todo grupo abeliano aditivo pode ser considerado como um módulo sobre o anel $\mathbb{Z}$.

(3) O grupo trivial $(0) = R0R$ é um módulo sobre qualquer anel R.

(4) Se R é um corpo, os $R-$módulos são precisamente os $R-$espaços vetorias da Álgebra Linear. Assim, o conceito de módulo é uma generalização do conceito de espaço vetorial.

(5) Sejam M_1, M_2 $R-$módulos sobre um anel R e M é o produto cartesiano $M = M_1 \times M_2$. Se definirmos para quaisquer $m_1, m_1' \in M_1$ e $m_2, m_2' \in M_2$

$$(m_1, m_2) + (m_1', m_2') = (m_1 + m_1', m_2 + m_2')$$

$$a(m_1, m_2) = (am_1, am_2)$$

então M é um $R-$módulo. Em particular, o produto direto $R \times R$ é um $R-$módulo.

(6) Sejam R um anel, M um $R-$módulo e S um conjunto. Então $M^S = \{f : S \to M : f$ é função$\}$ é um $R-$módulo se definirmos a adição e multiplicação por escalar da seguinte forma: $\forall f, g \in M^S, a \in R$ e $s \in S$,

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s)$$

$$(af)(s) = af(s).$$

Em particular, R^S é um $R-$módulo.

Da mesma forma que definimos subgrupos e subanéis, podemos definir submódulos.

Definição 1.3. *Seja R um anel. Um $R-$submódulo (ou simplesmente um submódulo) de um $R-$módulo M é um subconjunto não vazio N de M tal que:*

1. *N é um subgrupo aditivo de M;*
2. *Para todos $a \in R$ e $n \in N$, $an \in N$.*

Por exemplo, se M é um $R-$módulo, então $\{0\}$ e M são submódulos de M, chamados de submódulos triviais. Se R é um corpo, então os submódulos de um $R-$módulo M são os seus subespaços no sentido da Álgebra Linear. Se um grupo abeliano aditivo é considerado como um $\mathbb{Z}-$módulo, então seus submódulos são simplesmente seus subgrupos. Os ideais de R são os submódulos de R quando este é considerado como um $R-$módulo.

Sejam R um anel, M um $R-$módulo e N um submódulo de M. Como M é um grupo abeliano e N é um subgrupo de M podemos formar o grupo quociente M/N. A aplicação

$$R \times M/N \to M/N$$

$$(a, \overline{x}) \longmapsto \overline{ax}$$

define uma estrutura de $R-$módulo no grupo abeliano M/N.

Definição 1.4. *Sejam R um anel, M um $R-$módulo e N, N' submódulos de M. Dizemos que M é soma direta interna de N e N' quando são satisfeitas as seguintes condições:*

1. *$M = N + N'$;*
2. *$N \cap N' = \{0\}$.*

Neste caso, N e N' são chamados somandos diretos de M.

Relembramos que se R é um anel e a é um elemento qualquer de R então

$$(a) := \{\sum_{i=1}^{n} r_i a r_i' : r_i, r_i' \in R\}$$

é o *ideal de R gerado* por a.

Definição 1.5. *Sejam R um anel e M um $R-$módulo. Então:*

1. *M é dito ser um $R-$módulo simples (ou irredutível) se $M \neq 0$ e os únicos $R-$submódulos de M são $\{0\}$ e o M.*

2. *M é dito ser um $R-$módulo semissimples (ou completamente redutível) se todo $R-$submódulo de M é um somando direto de M.*

3. *Um anel R é dito ser semissimples à esquerda (direita) se R, considerado como um $R-$módulo à esquerda (direita), é semissimples.*

Note que, de acordo com estas definições, o módulo zero é semissimples, mas não é simples. Mais ainda, todo módulo simples é semissimples. Um fato curioso é que se $D_1, ..., D_r$ são anéis de divisão (anéis em que todo elemento não nulo tem inverso multiplicativo) então para números naturais arbitrários $n_1, ..., n_r$,

$$M_{n_1}(D_1) \times \cdots \times M_{n_r}(D_r)$$

é um anel semissimples à esquerda. Acontece que estes são todos os exemplos de anéis semissimples à esquerda! Este resultado é conhecido como o Teorema de Wedderburn-Artin. E segue como um corolário, deste famoso teorema, que um anel semissimples à esquerda é sempre semissimples à direita (e reciprocamente). Assim, podemos de agora em diante falar de "anéis semissimples" sem os adjetivos "esquerdo" e "direito". Como a demonstração do Teorema de Wedderburn-Artin requer várias ferramentas que fogem do escopo deste trabalho, iremos omiti-la aqui. O leitor que tiver curiosidade poderá encontra-lá na página 35 de [5].

1.2 O Radical de Jacobson

Nesta seção iremos definir o Radical de Jacobson de um anel e apresentar algumas caracterizações a cerca deste radical. O *radical de Jacobson* de um anel R, denotado por $rad(R)$ ou $J(R)$, é definido pela interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R. É bem sabido que se R é um anel não nulo com unidade (que é o nosso caso) então R possui ideais à esquerda maximais. Se $R = 0$, então definimos o radical de Jacobson como sendo zero. Recordamos que um ideal próprio M de um anel R é dito ser um ideal *maximal* se M é maximal (com respeito a inclusão de conjuntos) no conjunto de todos os ideais próprios de R, ou seja, se J é qualquer ideal de R tal que $M \subseteq J$, então $M = J$ ou $J = R$. Ideal à esquerda (direita) maximal é definido de forma análoga.

É claro que, na definição dada, o adjetivo *esquerda* tem um papel preponderante. Veremos em seguida que a interseção de todos os ideais à esquerda maximais coincide com a inerseção de todos os ideais à direita maximais. Portanto, não é necessário destacar isto na definição, chamando, por exemplo, este radical de radical de Jacobson à esquerda.

O lema a seguir irá nos auxiliar na demonstração de uma caracterização acerca do Radical de Jacobson de um anel R. Por ser um resultado bem conhecido, não apresentamos sua demonstração. Porém, o leitor pode encontrá-lá na página 53 de [5].

Lema 1.6. *Sejam R um anel e $x \in R$. As seguintes condições são equivalentes:*

(1) $x \in rad(R)$;

(2) $1 - yx$ *é invertível à esquerda, para todo* $y \in R$;

(3) $xM = 0$, *para todo* $R-$*módulo à esquerda simples* M.

Definição 1.7. *Seja R um anel. Dado um $R-$módulo à esquerda M, definimos o anulador de M por*

$$Ann(M) = \{r \in R : rM = 0\}.$$

É fácil ver que $Ann(M)$ é um ideal de R.

Podemos agora apresentar nossa primeira caracterização para o radical de Jacobson de um anel R, a qual garante que o mesmo é um ideal de R.

Corolário 1.8. *Seja R um anel. Então $rad(R) = \bigcap Ann(M)$, em que M percorre a família de todos os $R-$módulos à esquerda simples. Em particular, $rad(R)$ é um ideal bilateral de R.*

Demonstração. A demonstração segue do Lema 1.6 e da definição anterior. ■

O próximo resultado é um refinamento do Lema 1.6. Ele adiciona uma quarta condição à lista do Lema 1.6, a qual é um fortalecimento da condição (2). Poderiamos ter enunciado as quatro equivalências em um único lema, porém a demonstração deste lema, que pode ser encontrada pelo leitor na página 54 de [5], mostra que é mais conveniente provar o Lema 1.6 (e o Corolário 1.8) antes de adicionar a quarta condição.

Lema 1.9. *Sejam R um anel e $x \in R$. As seguintes condições são equivalêntes:*

(1) $x \in rad(R)$;

(2') *Para todo* $y, z \in R$, $1 - yxz \in U(R)$*(grupo das unidades de R).*

Da simetria $(2')$ do lema anterior, segue que o radical de Jacobson de um anel R coincide com a interseção de todos os ideais à direita maximais de R.

A seguir relembramos algumas definições.

Definição 1.10. *Um ideal U de um anel R é dito ser nil se U possui apenas elementos nilpotentes, ou seja, para todo $a \in U$, existe $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$.*

Definição 1.11. *Um ideal U de um anel R é dito ser nilpotente se $U^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$.*

Faremos referência ao seguinte lema na próxima seção.

Lema 1.12. *Se um ideal à esquerda (respectivamente, à direita) I de um anel R é nil, então $I \subseteq rad(R)$.*

Demonstração. Sejam I um ideal à esquerda nil de R e x qualquer elemento de I. Como I é um ideal à esquerda de R, segue que $a := yx \in I$, para todo $y \in R$. Uma vez que I é um ideal à esquerda nil de R, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $a^n = 0$. É claro que

$$(1 + a + \cdots + a^{n-1})(1 - yx) = 1,$$

isto é, $1 - yx$ é invertível à esquerda. Portanto, pelo Lema 1.6, segue que $x \in rad(R)$. ∎

A seguir apresentamos uma sequência de definições e resultados que nos ajudarão em uma outra caracterização para o Radical de Jacobson de um anel R.

Definição 1.13. *Seja R um anel e M um $R-$módulo à esquerda. Então M é dito ser fiel se para todo $r \in R$, $rM = (0)$ implica $r = 0$.*

Definição 1.14. *Um anel R é dito ser primitivo à esquerda (direita) se existe um $R-$módulo à esquerda (direita) M que é fiel e simples.*

Definição 1.15. *Um ideal U de um anel R é dito ser primitivo à esquerda (direita) se o anel quociente R/U é primitivo à esquerda (direita).*

Proposição 1.16. *Um ideal U de um anel R é primitivo à esquerda se, e somente se, U é o anulador de um $R-$módulo à esquerda simples.*

Demonstração. $\Rightarrow$). Suponhamos que R/U é um anel primitivo à esquerda, e seja M um $R/U-$módulo simples fiel. Assim, visto como um $R-$módulo, ${}_RM$ continua simples, e seu anulador em R é U.

$\Leftarrow$). Suponhamos que $U = Ann(M)$, em que M é um $R-$módulo à esquerda simples. Então M pode ser visto como um $R/U-$módulo simples, e como tal, é fiel. Portanto R/U é um anel primitivo à esquerda. ■

A proposição anterior mostra que os únicos ideais primitivos à esquerda de um anel R são os anuladores dos $R-$módulos à esquerda simples. Disso e do Corolário 1.8 temos o

Corolário 1.17. *O Radical de Jacobson de um anel R é a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda (direita) de R.*

Já mostramos, no início desta seção, que a interseção de todos os ideais à esquerda maximais coincide com a interseção de todos os ideais à direita maximais. Assim, o corolário anterior nos diz que os seguintes conjuntos são equivalentes:

(i) A interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R.

(ii) A interseção de todos os ideais à direita maximais de R.

(iii) A interseção de todos os ideais primitivos à esquerda de R.

(iv) A interseção de todos os ideais primitivos à direita de R.

Portanto qualquer um desses conjuntos servem para definir o radical de Jacobson de um anel R. Uma demonstração mais compacta de tal resultado pode ser encontrada na página 36 de [6].

Definição 1.18. *Um anel R é dito ser semiprimitivo se $rad(R) = 0$.*

Definição 1.19. *Um ideal I de um anel R é dito ser semiprimitivo se $rad(R/I) = 0$.*

Observação 1.20. *Pelo Corolário 1.17, um ideal I de um anel R é semiprimitivo se, e só se, é uma interseção de ideais primitivos à esquerda (direita). A demonstração segue do fato de que A/I é um ideal primitivo à esquerda (direita) em R/I se, e somente se, A é um ideal primitivo à esquerda (direita) em R, que contém I.*

Os próximos resultados não serão provados pois envolvem conceitos que fogem do objetivo deste trabalho.

Teorema 1.21. *Seja R um anel. Se R é semissimples então R é semiprimitivo.*

Demonstração. Ver Teorema 4.14 em [5]. ■

Exemplo 1.22. *Seja R um anel e $M_n(R)$ seu anel de matrizes. Qual é o radical de Jacobson de $M_n(R)$? A surpreendente resposta é que $radM_n(R) = M_n(radR)$, ver página 61 de [5].*

Finalizamos esta seção com um resultado cuja prova pode ser encontrada no Teorema 6.1.1 de [3].

Teorema 1.23. *Seja R um anel. Se R não tem ideais nil não nulos então $R[x]$ é semissimples, e portanto semiprimitivo (Teorema 1.21).*

1.3 O Radical Primo, Anéis Primos e Semiprimos

Na teoria de anéis comutativos, as noções de ideais primos e ideais radicais desempenham papéis importantes. Nós começamos por recordar essas duas noções básicas. Sejam A um anel comutativo e U um ideal de A. Dizemos que U é um *ideal primo* se $U \neq A$, e para quaisquer $a, b \in R$,

$$ab \in U \text{ implica que } a \in U \text{ ou } b \in U.$$

Dizemos que U é um *ideal radical* se, para qualquer $a \in A$,

$$a^n \in U \text{ para algum } n \geq 1 \text{ implica que } a \in U.$$

Em álgebra comutativa, é conhecido que U é um ideal radical se, e somente se, U é uma interseção de ideais primos que o contém. (Se $U = A$ então consideramos U como sendo a interseção de uma família vazia de ideais primos.) Para qualquer ideal U, existe um menor ideal radical contendo U, nomeadamente, a interseção de todos os ideais primos que contém U. Este ideal radical é denotado por $\sqrt{U}$ e também pode ser caracterizado por

$$\{x \in R : \ x^n \in U \text{ para algum } n \geq 1\}.$$

Como um caso especial temos $\sqrt{(0)} = Nil(A)$, o ideal dos elementos nilpotentes de A.

Para começar esta seção, iremos generalizar os resultados conhecidos acima para o caso não comutativo. Enquanto que nosso trabalho é voltado para o caso não comutativo, os resultados que nós obtemos são, é claro, também válidos para o caso comutativo. Assim sendo, os fatos mencionados no último parágrafo serão provados novamente em vez de assumidos.

Primeiramente definimos a noção de ideal primo para um anel arbitrário.

Definição 1.24. *Um ideal P de um anel R é dito ser primo se $P \neq R$ e para quaisquer ideais $U, B \subseteq R$, $UB \subseteq P$ implica $U \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.*

A seguinte proposição oferece várias outras caracterizações para ideais primos.

Proposição 1.25. *Seja $P \subsetneq R$ um ideal. São equivalentes:*

(1) P é ideal primo;

(2) Para $a, b \in R$, se $(a)(b) \subseteq P$ então $a \in P$ ou $b \in P$;

(3) Para $a, b \in R$, $aRb \subseteq P$ implica $a \in P$ ou $b \in P$;

(4) Para ideais à esquerda U, B de R, $UB \subseteq P$ implica $U \subseteq P$ ou $B \subseteq P$;

(5) Para ideais à direita U, B de R, $UB \subseteq P$ implica $U \subseteq P$ ou $B \subseteq P$.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Como $(a)(b) \subseteq P$ e P é um ideal primo, segue da definição de ideal primo que $(a) \subseteq P$ ou $(b) \subseteq P$. Dado que $a \in (a)$ e $b \in (b)$, vem que $a \in (a) \subseteq P$ ou $b \in (b) \subseteq P$.

(2) $\Rightarrow$ (3) Seja $x \in (a)(b)$. Então x é uma soma uma finita de elementos da forma $r_1ar_2br_3$, com $r_1, r_2, r_3 \in R$. Como, por hipótese, $aRb \subseteq P$, segue que $ar_2b \in P$, e assim temos $r_1ar_2br_3 \in P$, pois P é ideal. Portanto, $x \in P$, isto é, $(a)(b) \subseteq P$ e por (2) segue que $a \in P$ ou $b \in P$, como desejado.

(3) $\Rightarrow$ (4) Suponhamos que $UB \subseteq P$, $U \nsubseteq P$, em que U, B são ideais à esquerda de R. Consideramos $a \in U \setminus P$ e seja $b \in B$ um elemento qualquer. Veja que

$$aRb \subseteq UB \subseteq P,$$

pois B é um ideal à esquerda. Logo, por (3), segue que $b \in P$ e portanto $B \subseteq P$.

(3) $\Rightarrow$ (5) Análogo ao caso anterior.

(4) $\Rightarrow$ (1) e (5) $\Rightarrow$ (1) Segue do fato de ideais serem, em particular, ideais à esquerda e à direita. ■

Proposição 1.26. *Todo ideal maximal é primo.*

Demonstração. De fato, sejam M um ideal maximal e U, B ideais de um anel R tais que $U \nsubseteq M$ e $B \nsubseteq M$. Como M é maximal e $M \subsetneq M + U$, $M \subsetneq M + B$, segue que $M + U = R = M + B$. Assim,

$$R = R^2 = (M + U)(M + B) = M^2 + UM + MB + UB \subseteq M + M + M + UB \subseteq M + UB,$$

e portanto $R = M + UB$. Se $UB \subseteq M$, então $M + UB \subseteq M$, isto é, $M = M + UB = R$, o que é um absurdo. Portanto $UB \nsubseteq M$, e provamos a contrapositiva da definição de ideal primo. ■

É bem conhecido que todo ideal I do anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ é da forma $I = (a)$, para algum $a \in \mathbb{Z}$. Mais ainda, um ideal (a) de $\mathbb{Z}$ é um ideal primo de $\mathbb{Z}$ se, e somente se, a é primo ou zero.

Definição 1.27. *Um conjunto não vazio S de um anel R é dito ser um $m-$sistema se, para quaisquer $a, b \in S$, existe $r \in R$ tal que $arb \in S$.*

Exemplo 1.28. *Um conjunto não vazio S de um anel R, fechado para a multiplicação, é um $m-$sistema, pois para quaisquer $a, b \in S$, $a1b \in S$.*

Observamos que a volta do exemplo anterior é falsa. Para tanto basta considerar $T = \{a, a^2, a^4, a^8, ...\}$, em que a é algum elemento de um anel R. Temos que T é um $m-$sistema, pois dados $a^{2^i}, a^{2^j} \in T$, com $i \leq j$, temos que $r = a^{2^j - 2^i} \in R$ é tal que $a^{2^i} a^{2^j - 2^i} a^{2^j} = a^{22^j} \in T$. Porém, T não é fechado para o produto, em geral.

Lema 1.29. *Seja R um anel. Um ideal P de R é um ideal primo se, e somente se, $R \setminus P$ é um $m-$sistema.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Sejam $a, b \in R \setminus P$ quaisquer. Iremos mostrar que existe $r \in R$ tal que $arb \in R \setminus P$.

Se para todo $r \in R, arb \in P$, então pela Proposição 1.25, item 3, segue que $a \in P$ ou $b \in P$, o que é um absurdo. Assim existe $r \in R$ tal que $arb \notin P$, isto é, $arb \in R \setminus P$ e portanto $R \setminus P$ é um $m-$sistema.

$\Leftarrow$) Sejam $a, b \in R$. Suponha que $a \notin P$ e $b \notin P$. Mostremos que $aRb \nsubseteq P$. De fato, como $a \notin P$ e $b \notin P$, então $a, b \in R \setminus P$. Uma vez que $R \setminus P$ é um $m-$sitema, existe $r \in R$ tal que $arb \in R \setminus P$, ou seja, $arb \notin P$. Provamos assim a contrapositiva da Proposição 1.25, item 3. ■

Lema 1.30. *Sejam R um anel, $S \subseteq R$ um $m-$sistema e P um ideal maximal de R com respeito à propriedade de que $P \cap S = \emptyset$. Então P é um ideal primo de R.*

Demonstração. Sejam $a, b \in R$ taisque $(a)(b) \subseteq P$, mas $a \notin P, b \notin P$. Pela propriedade da maximalidade de P devem existir $s, s' \in S$ taisque $s \in P + (a)$, $s' \in P + (b)$. Como S é um $m-$sistema, existe $r \in R$ tal que $srs' \in S$. Mas,

$$srs' \in (P + (a))R(P + (b)) = PRP + PR(b) + (a)RP + (a)R(b) \subseteq P + (a)(b) \subseteq P,$$

isto é, $srs' \in P \cap S = \emptyset$, absurdo. Assim $(a)(b) \subseteq P$ implica $(a) \subseteq P$ ou $(b) \subseteq P$, isto é, P é um ideal primo de R pela Proposição 1.25, item 2. ■

A seguir precisamos generalizar a noção de $\sqrt{U}$ dada no início desta seção. Nós adotamos o seguinte:

Definição 1.31. *Sejam R um anel e U um ideal de R. Definimos*

$$\sqrt{U} := \{s \in R : \textit{ todo m-sistema que contém s intersecta } U\},$$

e pelo exemplo anterior $\sqrt{U} \subseteq \{s \in R : s^n \in U$ para algum $n \geq 1\}$.

No caso especial em que R é um anel comutativo, observamos que na inclusão acima a igualdade é verdadeira (ver página 166 em [5]). Assim, facilmente vemos que, no caso comutativo, $\sqrt{U}$ é um ideal. No caso geral, pela Definição 1.31, não é claro se $\sqrt{U}$ é um ideal ou não. Iremos provar agora o próximo resultado que, em particular, resolve esta questão − afirmativamente.

Teorema 1.32. *Sejam R um anel e U um ideal de R. Então*

$$\sqrt{U} = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda,$$

em que $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ é a família de todos os ideais primos de R que contém U. Em particular $\sqrt{U}$ é um ideal de R.

Demonstração. $\subseteq$) Sejam $s \in \sqrt{U}$ e P um ideal primo de R que contém U. Como P é um ideal primo de R, segue do Lema 1.29 que $R \setminus P$ é um $m-$sistema. Assim, se supusermos, com vista em um absurdo, que $s \in R \setminus P$, então pela definição de $\sqrt{U}$, segue que $(R \setminus P) \cap U \neq \emptyset$, e portanto $(R \setminus P) \cap P \neq \emptyset$, pois $U \subseteq P$. Disto segue que $s \notin R \setminus P$, isto é, $s \in P$ e portanto $s \in \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$, $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$.

$\supseteq$) Suponha que $s \notin \sqrt{U}$. Mostremos que $s \notin \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$. De fato, como $s \notin \sqrt{U}$ então, por definição, existe um $m-$sistema S que contém s e que é disjunto de U. Pelo Lema de Zorn, existe um ideal $P \supseteq U$ que é maximal com respeito a propriedade de que $P \cap S = \emptyset$. Pelo Lema 1.30, P é um ideal primo de R, e como $s \notin P$ ($s \in S$ e $P \cap S = \emptyset$) segue que P é um ideal primo de R que contém U, com $s \notin P$, isto é,

$$s \notin \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda \subseteq P.$$

■

Nós vamos agora definir a noção de um ideal semiprimo. Será mostrado mais tarde que esta é a generalização correta da noção de um ideal radical no caso comutativo.

Definição 1.33. *Seja R um anel. Um ideal C de R é dito ser semiprimo se, para qualquer ideal U de R, tivermos que $U^2 \subseteq C$ implica $U \subseteq C$.*

Temos o seguinte resultado em paralelo com a Proposição 1.25

Proposição 1.34. *Sejam R um anel e C um ideal de R. São equivalentes:*

(1) C é semiprimo;

(2) Para todo $a \in R$, $(a)^2 \subseteq C$ implica $a \in C$;

(3) Para todo $a \in R$, $aRa \subseteq C$ implica $a \in C$;

(4) Para qualquer ideal à esquerda U de R, $U^2 \subseteq C$ implica $U \subseteq C$;

(5) Para qualquer ideal à direita U de R, $U^2 \subseteq C$ implica $U \subseteq C$.

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração da Proposição 1.25. ∎

Definição 1.35. *Sejam R um anel e $S \subseteq R$ um conjunto. Dizemos que S é um $n-$sistema se, para qualquer $a \in S$, existe $r \in R$ tal que $ara \in S$.*

Lema 1.36. *Seja R um anel. Um ideal C de R é semiprimo se, e somente se, $R \setminus C$ é um $n-$sistema.*

Demonstração. A demonstração é análoga a demonstração do Lema 1.29. ∎

A seguir, apresentamos um lema relacionando $m-$sistemas e $n-$sistemas.

Lema 1.37. *Sejam N um $n-$sistema de um anel R e $a \in N$. Então existe um $m-$sistema $M \subseteq N$ tal que $a \in M$.*

Demonstração. Como $a \in N$ e N é um $n-$sistema, podemos definir $M = \{a_1, a_2, a_3, ...\}$ indutivamente por:

$$a_1 = a$$

$$a_2 = a_1 r_1 a_1 \in N(\text{ para algum } r_1)$$

$$a_3 = a_2 r_2 a_2 \in N(\text{ para algum } r_2)$$

$$\vdots$$

Provemos que M é um $m-$sistema, isto é, que dados $a_i, a_j \in M$ existe $r \in R$ tal que $a_i r a_j \in M$.

Primeiramente suponha que $i \leq j$. Note que $a_{j+1} \in M$ e que $a_{j+1} \in a_j R a_j$ (por contrução). Mais ainda,

$$a_j R a_j \subseteq (a_{j-1} R a_{j-1}) R a_j = a_{j-1}(R a_{j-1} R) a_j \subseteq a_{j-1} R a_j \subseteq ... \subseteq a_i R a_i R a_j \subseteq a_i R a_j.$$

Portanto $a_{j+1} \in a_j R a_j \subseteq a_i R a_j$, isto é, existe $r \in R$ tal que $a_i r a_j = a_{j+1} \in M$, como queriamos demonstrar.

Analogamente, se $i > j$, mostramos que $a_i R a_i \subseteq a_i R a_j$ e portanto existe $r \in R$ tal que $a_i r a_j = a_{i+1} \in M$. ■

Teorema 1.38. *Seja R um anel. Para qualquer ideal C de R, são equivalentes:*

(1) $C = \sqrt{C}$;

(2) C é uma interseção de ideais primos de R;

(3) C é um ideal semiprimo de R.

(De (1) $\Leftrightarrow$ (3), vemos que, no caso comutativo, ideais semiprimos são precisamente os ideais radicais.)

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Segue imediatamente do Teorema 1.32.

(2) $\Rightarrow$ (3) Por hipótese $C = \bigcap\limits_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda$, em que $\{I_\lambda\}_{\lambda \in \Gamma}$ é uma família de ideais primos de R. Seja U um ideal qualquer de R, veja que

$$U^2 \subseteq C = \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda \Rightarrow U^2 \subseteq I_\lambda, \forall \lambda \in \Gamma \Rightarrow U \subseteq I_\lambda, \forall \lambda \in \Gamma$$

pois I_λ é ideal primo de R. Mas então,

$$U \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Gamma} I_\lambda = C,$$

e portanto C é ideal semiprimo de R.

3) $\Rightarrow$ 1) Como, pelo Teorema 1.32, $\sqrt{C} = \bigcap\limits_{\lambda' \in \Gamma'} I_{\lambda'}$, em que $\{I_{\lambda'}\}_{\lambda' \in \Gamma'}$ é a família de todos os ideais primos de R que contém C, segue que $C \subseteq \sqrt{C}$. Por fim, mostremos que para todo $a \in R$, $a \notin C$ implica $a \notin \sqrt{C}$. De fato, suponha que $a \notin C$. Como C é semiprimo temos que $N := R \setminus C$ é um $n-$sistema que contém a, pelo Lema 1.36. Pelo lema anterior existe um

$m-$sistema $M \subseteq N$ tal que $a \in M$. Disto segue que $M \cap C = \emptyset$, e assim, pela Definição 1.31, obtemos que $a \notin \sqrt{C}$. ■

Corolário 1.39. *Para qualquer ideal C de um anel R, $\sqrt{C}$ é o menor ideal semiprimo em R, que contém C.*

No caso especial em que $C = 0$, a inclusão observada na Definição 1.31 mostra que $\sqrt{(0)}$ é sempre um ideal nil. Isto nos leva a uma nova noção de radical:

Para qualquer anel R, definimos $Nil_*R := \sqrt{(0)}$. Ele é chamado de o *Radical de Baer-McCoy* do anel R. Pelo Corolário 1.39 temos que Nil_*R é o menor ideal semiprimo de R, e pelo Teorema 1.38 Nil_*R é igual a interseção de todos os ideais primos de R. Por causa desta última caracterização, Nil_*R é também chamado de o *radical primo* de R.

Observação 1.40. *Seja R um anel. Pela inclusão da Definição 1.31 e pelo Lema 1.12, temos que $Nil_*R \subseteq radR$.*

Definição 1.41. *Um anel R é dito ser um anel primo (respectivamente, um anel semiprimo) se* (0) *é um ideal primo (respectivamente, semiprimo).*

Fazemos as seguintes observações imediatas: sejam R um anel e U qualquer ideal de R. Então R/U é primo (respectivamente, semiprimo) se, e somente se, U é um ideal primo (respectivamente, semiprimo). E, é claro, para qualquer anel comutativo R, Nil_*R é apenas $NilR$, o ideal de todos os elementos nilpotentes em R.

A próxima proposição relaciona os anéis semiprimos com o seu radical primo.

Proposição 1.42. *Para qualquer anel R, são equivalentes:*

(1) R é um anel semiprimo;

(2) $Nil_*R = 0$;

(3) R não possui ideais nilpotentes diferentes de zero;

(4) R não possui ideais à esquerda nilpotentes diferentes de zero.

Demonstração. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Primeiramente suponha que R é um anel semiprimo. Então, por definição, (0) é um ideal semiprimo, e portanto $(0) = \sqrt{(0)} = Nil_*R$, pelo Teorema 1.38. Reciprocamente, suponha que $Nil_*R = 0$, isto é, $\sqrt{(0)} = (0)$. Pelo Teorema 1.38, obtemos que (0) é um ideal semiprimo de R, ou seja, R é um anel semiprimo, pela Definição 1.33.

É rotina mostrar que (4) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (1). Para completar a demonstração, provemos que (1) $\Rightarrow$ (4). De fato, considere R um anel semiprimo e seja U um ideal à esquerda nilpotente de R. Consideremos o menor $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, tal que $U^n = 0$. Se $n > 1$ então

$$(U^{n-1})^2 = U^{2n-2} \subseteq U^n = 0,$$

e assim, pela Proposição 1.34, item 4., obtemos que $U^{n-1} = 0$, contradizendo a minimalidade de n. Portanto $n = 1$ e $U = 0$, como queríamos demonstrar. ■

Capítulo 2

Anéis de Polinômios e Anéis de Jacobson

Um anel R é dito ser um *anel de Jacobson* se, em toda imagem homomórfica de R, o radical de Jacobson coincide com o radical primo. Se R é um anel de Jacobson comutativo, então $R[x]$ é também um anel de Jacobson comutativo. Este resultado foi provado por Goldman em [7]. O objetivo deste capítulo é o de provar que se R é um anel de Jacobson, então $R[x]$ também o é. Para tanto começaremos por apresentar outras duas caracterizações da definição acima.

Observação 2.1. *Seja R um anel. São equivalentes:*

(1) R é um anel de Jacobson.

(2) Todo ideal primo de R é uma interseção de ideias primitivos à esquerda, e portanto um ideal semiprimitivo (Observação 1.20).

(3) Todo ideal primo de R é uma interseção de ideais à direita maximais.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) Suponha que em toda imagem homomórfica de R os radicais de Jacobson e primo coincidem. Para todo ideal primo P de R, R/P é semiprimo e portanto $Nil_*(R/P) = 0$ (Proposição 1.42). Disto, da hipótese de que $Nil_*(R/P) = rad(R/P)$ e do Corolário 1.17, segue que $0 = \bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda/P$, em que $\{A_\lambda/P\}_{\lambda\in\Gamma}$ são todos os ideais primitios à esquerda de R/P. Logo $\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda \subseteq P$ e $P = \bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} A_\lambda$, em que $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Gamma}$ são todos os ideais primitivos de R que contém P.

(2) $\Rightarrow$ (1) Suponha que todo ideal primo de R é uma interseção de ideais primitivos

à esquerda e seja $\overline{P} = P/I$ um ideal primo em R/I, em que I é um ideal qualquer de R. Então P é um ideal primo de R que contém I e, por hipótese, é uma interseção de ideais primitivos à esquerda de R que contêm I e, assim, P contém a interseção de todos os ideais primitivos à esquerda de R que contêm I. Portanto, a interseção de todos os ideais primos de R que contêm I contém a interseção de todos os primitivos à esquerda que contêm I, isto é, $rad(R/I) \subseteq Nil_*(R/I)$. Uma vez que $Nil_*(R/I) \subseteq rad(R/I)$ pela Observação 1.40, o resultado segue.

Substituindo $rad(R)$ pela interseção de ideais à direita maximais, provamos de forma análoga que (1) e (3) são equivalentes. ∎

Exemplo 2.2. *Como em $\mathbb{Z}$ todo ideal primo é maximal, segue que $\mathbb{Z}$ é um anel de Jacobson.*

Proposição 2.3. *Se I é um ideal de um anel de Jacobson R, então I é um anel de Jacobson.*

Demonstração. Sejam R um anel de Jacobson e I um ideal de R. Se I não é um anel de Jacobson, então existe um ideal primo P de I tal que P não é semiprimitivo, isto é, $rad(I/P) \neq 0$. Ponha $rad(I/P) = J/P$. Como P é um ideal de R, podemos considerar o anel R/P. Visto que R é um anel de Jacobson, o radical primo de R/P coincide com o radical de Jacobson de R/P, o qual contem J/P. Assim $Nil_*(J/P) = J/P \neq 0$, e pela Proposição 1.42, J/P possui um ideal nilpotente não nulo, digamos K/P. Por definição de ideal nilpotente, $(K/P)^n = 0$, para certo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $K^n \subset P$, e como P é um ideal primo segue que $K \subset P$, ou seja, $K/P = 0$, absurdo. ∎

Proposição 2.4. *Um anel R é um anel de Jacobson se, e somente se, $M_n(R)$ é um anel de Jacobson.*

Demonstração. Suponhamos que R é um anel de Jacobson.
Afirmação: Toda imagem homomórfica de $M_n(R)$ é da forma $M_n(R_1)$, onde R_1 é uma imagem homomórfica de R. De fato, sejam S um anel e $\phi : M_n(R) \to S$ um homomorfismo sobrejetor. Então $Ker\phi \triangleleft M_n(R)$, e portanto $Ker\phi = M_n(I)$, para certo $I \triangleleft R$ (Teorema 3.1 de [5]). Note ainda que do homomorfismo sobrejetor natural $\psi : M_n(R) \to M_n(R/I)$ obtemos $(M_n(R)/M_n(I)) \cong M_n(R/I)$, e portanto $M_n(R/I) \cong (M_n(R)/M_n(I)) \cong S$, em que R/I é a imagem de R pelo homomorfismo canônico. Tomando $R_1 = R/I$, temos que a afirmação segue.
Note que

$$Nil_* M_n(R_1) = M_n(Nil_* R_1) = M_n(rad R_1) = rad(M_n(R_1)).$$

E portanto $M_n(R)$ é um anel de Jacobson.

Reciprocamente suponha que $M_n(R)$ é um anel de Jacobson e seja I um ideal primo de R. Então, $M_n(I)$ é um ideal primo de $M_n(R)$ e, portanto, semiprimitivo, pois $M_n(R)$ é um anel de Jacobson. Agora, $M_n(I)$ ser um ideal semiprimitivo implica que I é um ideal semiprimitivo de R (I é um ideal semiprimitivo se, e só se, $rad(R/I) = 0$ se, e só se, $M_n(rad(R/I)) = 0$ se, e só se, $rad(M_n(R/I)) = 0$ se, e só se, $M_n(R/I) \cong M_n(R)/M_n(I)$ é um anel semiprimitivo se, e só se, $M_n(I)$ é um ideal semiprimitivo), e portanto R é um anel de Jacobson. ■

Exemplo 2.5. *Seja R um anel de Jacobson e $R \to S$ um homomorfismo sobrejetor de anéis. Então S é um anel de Jacobson. Para uma justificativa, recomendamos a segunda seção em [5].*

A demonstração do teorema principal deste capítulo depende de alguns lemas que iremos demonstrar separadamente a seguir.

Notação: Se $f \in R[x]$, denotaremos por $^o f$ o grau de f. O conjunto de todos os polinômios de $R[x]$ de grau menor ou igual a k será denotado por D_k. O coeficiente líder de f será denotado por $cl(f)$.

Lema 2.6. *Sejam R um anel e $I \neq 0$ um ideal de $R[x]$. Se g é de menor grau ≥ 0 em I e $cl(g) = a_n$, então $a_n R[x] g = gR[x] a_n$ e $a_n rg = gra_n$, para todo $r \in R$. Se $0 \neq f \in I$ e $^o f = k$, então existe $h \in R[x]$ e um inteiro $v \leq k - n + 1$ tal que $fa_n^v = hg$.*

Demonstração. Para $r \in R$, $^o(a_n rg - gra_n) < n$, pois $a_n ra_n - a_n ra_n = 0$. Assim pela minimalidade do grau de g, temos que $a_n rg = gra_n$. Disso segue facilmente que $a_n R[x] g = gR[x] a_n$. Observe que $a_n g = ga_n$.

Provaremos a segunda parte por indução em k. Pela minimalidade de $^o g$, temos $k \geq n$. Seja $cl(f) = b_k$.

Se $k = n$ então $fa_n - b_n g \in I$ e $cl(fa_n - b_n g) = b_n a_n - b_n a_n = 0$, assim $^o(fa_n - b_n g) < n$ e $fa_n = b_n g$. Neste caso, $h = b_n$ e $v = 1$.

Suponha agora que o resultado é válido para $k = m$ e considere $f \in I$ de grau $m + 1$. Assim $p = fa_n - b_{m+1} g x^{m+1-n} \in I$ e tem grau $< m + 1$, pois seu coeficiente líder é $b_{m+1} a_n - b_{m+1} a_n = 0$. Pela hipótese de indução, existe $q \in R[x]$ e $u \leq {}^o p - n + 1 \leq m - n + 1$ tal que $pa_n^u = qg$. Portanto,

$$qg = pa_n^u = fa_n^{u+1} - b_{m+1} g x^{m+1-n} a_n^u,$$

isto é,

$$fa_n^v = qg + b_{m+1} g x^{m+1-n} a_n^u,$$

com $v = u+1 \leq (m+1)-n+1$. Como $a_n g = g a_n$, segue que $f a_n^v = hg$, onde $h = q + b_{m+1} a_n^u x^{m+1-n}$. ∎

Lema 2.7. *Sejam R um anel, P um ideal primo de $R[x]$ tal que $P \cap R = 0$ e I um ideal de $R[x]$ tal que $I \supseteq P$. Se para algum $m \geq 0$, $I \cap D_m = P \cap D_m \neq 0$, então $I \cap D_k = P \cap D_k$, para todo $k \geq m$.*

Demonstração. Sejam $f \in I, g \in P$, com $cl(f) = a_{k+1}$, $cl(g) = b_{k+1}$ e ${}^{\circ}f = {}^{\circ}g = k+1$. Então para qualquer $r \in R$ $frb_{k+1} - a_{k+1}rg \in I \cap D_k = P \cap D_k$, pois o $cl(frb_{k+1} - a_{k+1}rg) = a_{k+1}rb_{k+1} - a_{k+1}rb_{k+1} = 0$. Como $a_{k+1}rg \in P$ e $frb_{k+1} - a_{k+1}rg \in P$ temos $frb_{k+1} \in P$. Disso segue que $fR[x]b_{k+1} \subseteq P$ ($fr_jx^jb_{k+1} = fr_jb_{k+1}x^j \in P$, pois $fr_jb_{k+1} \in P$ e $P \triangleleft R[x]$) e como P é um ideal primo de R obtemos que $f \in P$ ou $b_{k+1} \in P$. Uma vez que $P \cap R = 0$, $f \in P$ e portanto $I \cap D_{k+1} \subseteq P \cap D_{k+1}$. De $P \subseteq I$ obtemos $I \cap D_{k+1} = P \cap D_{k+1}$ e o resultado segue. ∎

Lema 2.8. *Sejam R um anel de Jacobson primo, $P \neq 0$ um ideal primo de $R[x]$ tal que $P \cap R = 0$, e I um ideal de $R[x]$ tal que $I \supsetneq P$. Então $I \cap R \neq 0$.*

Demonstração. Seja f um polinômio de menor grau ≥ 0 em I. Se todos polinômios desse tipo estão em P, então $I \cap D_n = P \cap D_n$, em que $n = {}^{\circ}f$. Do lema anterior, temos então que $I \cap D_k = P \cap D_k$, para todo $k \geq n$. Deste modo $I = P$, o que é uma contradição. Escolhemos $f \notin P$.

Seja g qualquer polinômio de menor grau ≥ 0 em P. Do Lema 2.6 segue que $g a_n^v = hf$, para algum $h \in R[x]$ e algum inteiro $v \leq m-n+1$, em que $m = {}^{\circ}g, n = {}^{\circ}f$ e $cl(f) = a_n$. Se h_i é um coeficiente em h tal que $h_i a_n = 0$, então $h_i f \in I$ e ${}^{\circ}(h_i f) < {}^{\circ}f$. Assim $h_i f = 0$. Portanto ou $g a_n^v = 0$ ou podemos escolher h de tal forma que $h_i a_n \neq 0$ para todo coeficiente não nulo h_i em h. Primeiramente suponha que existe h tal que $h_i a_n \neq 0$ para todo i. Então ${}^{\circ}(hf) = {}^{\circ}h + {}^{\circ}f \geq {}^{\circ}h$.

Agora $P \supseteq g a_n^v R[x] a_n = hfR[x]a_n = ha_nR[x]f$, pelo Lema 2.6. Como P é primo, segue que $f \in P$ ou $ha_n \in P$. Disto temos $ha_n \in P$, pois $f \notin P$. Mais ainda,

$$ {}^{\circ}g \geq {}^{\circ}(g a_n^v) = {}^{\circ}(hf) \geq {}^{\circ}h. $$

Por outro lado, $h_i a_n \neq 0$ para todo i, isto é, ha_n é um elemento não nulo de P. Logo

$$ {}^{\circ}h = {}^{\circ}(ha_n) \geq {}^{\circ}g, $$

pela minimalidade de g. Portanto ${}^{\circ}h = {}^{\circ}g = {}^{\circ}(hf) = {}^{\circ}h + {}^{\circ}f$, e assim f tem grau zero, ou seja, $0 \neq f \in I \cap R$, como queríamos.

Agora a possibilidade que falta eliminar é que para todo polinômio g de menor grau ≥ 0 em P, sempre que $ga_n^v = hf$, com $v \leq m-n+1$, $ga_n^v = 0$. Para f, g dados, escolha w tal que $ga_n^w = 0$, mas $ga_n^{w-1} \neq 0$. Seja $cl(g) = b_m$. Assim $b_m a_n^{w-1} \neq 0$, pois caso contrário ${}^{\circ}(ga_n^{w-1}) < {}^{\circ}g$ e então $ga_n^{w-1} = 0$. Temos também que, para qualquer $r \in R$, $ga_n^{w-1}r = 0$ ou $ga_n^{w-1}r$ tem menor grau ≥ 0 em P. No último caso existe $u \leq m-n+1$ tal que $ga_n^{w-1}ra_n^u = 0$. Assim, para todo $r \in R$, $ga_n^{w-1}ra_n^{m-n+1} = 0$ e, em particular, $b_m a_n^{w-1}ra_n^{m-n+1} = 0$, e, como R é um anel primo, segue que $b_m a_n^{w-1} = 0$ ou $a_n^{m-n+1} = 0$. Disto segue que $a_n^{m-n+1} = 0$, pois $b_m a_n^{w-1} \neq 0$. Portanto, se $f \in I \setminus P$ é de menor grau ≥ 0 em I e $cl(f) = a_n$, então $a_n^{m-n+1} = 0$.

Considere os ideais I_n e P_n de R, em que I_n é o conjunto de todos os coeficientes líderes dos polinômios de grau $n = {}^{\circ}f$ em I juntamente com o zero e P_n é definido similarmente com respeito a P. Como $P \subsetneq I$, temos que $P_n \subsetneq I_n$. O último paragráfo nos mostra que I_n/P_n é nil. Como o anel R é um anel de Jacobson, pela Proposição 2.3, I_n é um anel de Jacobson. Disto e do Lema 1.12 obtemos

$$I_n/P_n \subseteq rad(I_n/P_n) \subseteq I_n/P_n,$$

isto é,

$$I_n/P_n = rad(I_n/P_n) = Nil_*(I_n/P_n),$$

pois os radicais de Jacobson e primo coincidem em I_n/P_n. Como $Nil_*(I_n/P_n) = I_n/P_n \neq 0$, pela Proposião 1.42, existe um ideal A de R tal que $P_n \subsetneq A \subseteq I_n$ e $A^2 \subseteq P_n$.

Escolha $\alpha \in A \setminus P_n$ e $q \in I \cap D_n$, com $cl(q) = \alpha$. Então, para qualquer $r \in R$, $\alpha r\alpha \in A^2 \subseteq P_n$, logo existe $t \in P$ com o coeficiente de x^n igual a $\alpha r \alpha$ e ${}^{\circ}t = n$ ou $t = 0$ (se $\alpha r \alpha = 0$). Portanto, $qr\alpha - t \in I$ e ${}^{\circ}(qr\alpha - t) < n$ ($cl(qr\alpha - t) = \alpha r\alpha - \alpha r \alpha = 0$). Assim, $qr\alpha = t \in P$, e daí segue que $qR[x]\alpha \subseteq P$. Mas, como P é um ideal primo de $R[x]$ e $q \notin P$, $\alpha \in P$, isto é, $\alpha \in P \cap R = 0$, o que é uma contradição, pois $\alpha \notin P_n$. A última possibilidade foi agora eliminada e o lema está provado. ∎

Lema 2.9. *Sejam R um anel de Jacobson primo, $P \neq 0$ um ideal primo de $R[x]$ tal que $P \cap R = 0$, e $J \supseteq P$ o ideal de $R[x]$ tal que J/P é o radical de Jacobson de $R[x]/P$. Então $J \cap R = 0$.*

Demonstração. Seja m o grau dos polinômios de menor grau ≥ 0 em P. Assim como antes, P_m é o ideal de R formado por de todos os coeficientes líderes dos polinômios de grau m em P juntamente com o zero. Particionamos o conjunto dos ideais à direita maximais de R nos conjuntos $\mathcal{M}_1$, formado por aqueles que não contêm P_m, e $\mathcal{M}_2$, formado por aqueles que contêm

P_m. Mostremos que se $M \in \mathcal{M}_1$, então existe um ideal à direita maximal M^* de $R[x]$ tal que $M^* \supseteq P$ e $M^* \cap R = M$.

Para $M \in \mathcal{M}_1$, $M + P_m = R$, e daí existe $0 \neq a_m \in P_m$ com $1 - a_m \in M$. Seja $f \in P$ um polinômio de grau m tal que $cf(f) = a_m$. Considere o ideal à direita $I = M[x] + P$ de $R[x]$. Se $I = R[x]$ então $1 = s + g$, para algum $s \in M[x]$ e $g \in P$. Aplicando o Lema 2.6, segue que $a_m f = f a_m$, e existem $h \in R[x]$ e um inteiro v taisque $g a_m^v = hf$ ($g \neq 0$, pois caso contrário $1 \in M$). Mais ainda, $1 - a_m^v \in M$, pois

$$a_m \in P_m \Rightarrow a_m^v \in P_m \Rightarrow 1 - a_m^v \in R - P_m = M.$$

Disto segue que $a_m^v = s a_m^v + g a_m^v = s a_m^v + hf$ e, daí $1 - s a_m^v - hf = 1 - a_m^v \in M \subseteq M[x]$. Assim, $1 - hf = 1 - s a_m^v - hf + s a_m^v \in M[x]$.
Como $1 \notin M[x]$, $h \notin M[x]$, pois se $h \in M[x]$, então $hf \in M[x]$ e portanto $1 = 1 - hf + hf \in M[x]$, absurdo. Dentre todos os polinômios h tal que $1 - hf \in M[x]$ escolha um com menor grau, digamos k, e seja $cl(h) = h_k$.

Como $P \cap R = 0$ temos que $^\circ f > 0$ e então $1 - hf \in M[x]$ implica $h_k a_m \in M$, pois $cl(1 - hf) = -h_k a_m$. Mais ainda, $a_m - hf a_m = (1 - hf) a_m \in M[x]$ e $1 - a_m \in M$ implicam $1 - h a_m f = 1 - hf a_m \in M[x]$. Logo se $e = h a_m - h_k a_m x^k$, então

$$1 - ef = 1 - h a_m f + h_k a_m x^k f \in M[x],$$

pois $h_k a_m \in M$ e $1 - h a_m f \in M[x]$. Mas $^\circ e < {}^\circ h$ ($cl(e) = h_k a_m - h_k a_m = 0$) o que contradiz a minimalidade do grau de h. Concluímos assim que $I \neq R[x]$.

Seja M^* um ideal à direita maximal de $R[x]$ contendo $I = M[x] + P$. Então $P \subseteq M^*$ e $M \subseteq M^*$. Assim $M^* \cap R = M$, pois M é um ideal maximal de R, $M \subseteq M^* \cap R$, e se $M^* \cap R = R$ então $M^* = R$, absurdo. Portanto, se $M \in \mathcal{M}_1$, então $M = M^* \cap R \supseteq J \cap R$, pois J é a interseção de todos os ideais à direita maximais de $R[x]$.

Por outro lado, se $M \in \mathcal{M}_2$, então $M \supseteq P_m$. Disto segue que, se considerarmos a interseção de todos os ideais à direita maximais de R, esta interseção contém $(J \cap R) \cap P_m \supseteq (J \cap R) P_m$, pois os ideais à direita maximais de R em $\mathcal{M}_1$ contêm $J \cap R$ e os ideais à direita maximais de R em $\mathcal{M}_2$ contêm P_m. Contudo, a interseção de todos os ideais à direita maximais de R é seu radical de Jacobson, que é zero, pois R é um anel de Jacobson primo. Portanto, $(J \cap R) P_m = 0$ e, como $P_m \neq 0$, segue que $J \cap R = 0$, pois (0) é um ideal primo de R. ■

Agora temos as ferramentas necessárias para demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 2.10. *Um anel R é um anel de Jacobson se, e somente se, $R[x]$ é um anel de Jacobson.*

Demonstração. Suponha que $R[x]$ é um anel de Jacobson. Como

$$\phi : R[x] \to R$$

$$r_n x^n + \cdots + r_0 \longmapsto r_0$$

é um homomorfismo sobrejetor de anéis, segue do Exemplo 2.5 que R é um anel de Jacobson.

Reciprocamente, suponha que R é um anel de Jacobson. Mostremos que todo ideal primo de $R[x]$ é semiprimitivo. Seja P um ideal primo de $R[x]$. Então $P \cap R$ é um ideal primo de R e

$$\psi : (R/(P \cap R))[x] \to R[x]/P$$

$$(r_n + P \cap R)x^n + \cdots + (r_0 + P \cap R) \longmapsto (r_n x^n + \cdots + r_0) + P$$

é um homomorfismo sobrejetor tal que $\ker \psi$ é primo em $(R/(P \cap R))[x]$ e $\ker \psi \cap (R/(P \cap R)) = 0$.

De fato, sejam

$$f = (r_n + P \cap R)x^n + \cdots + (r_0 + P \cap R), g = (s_m + P \cap R)x^m + \cdots + (s_0 + P \cap R) \in (R/P \cap R)[x].$$

Suponha, sem perda de generalidade, que $n \geq m$. Então

i) ψ está bem definida. De fato, se $f = g$ então $r_n - s_n \in P \cap R, ..., r_0 - s_0 \in P \cap R$. Em particular, $r_n - s_n \in P, ..., r_0 - s_0 \in P$, e como P é um ideal de $R[x]$ obtemos $(r_n - s_n)x^n \in P, ..., (r_1 - s_1)x \in P, r_0 - s_0 \in P$, isto é $((r_n - s_n)x^n + \cdots + (r_0 - s_0)) \in P$. Portanto $\psi(f) = \psi(g)$.

ii)

$$\begin{aligned}\psi(f+g) &= \psi(((r_n + s_n) + P \cap R)x^n + \cdots + ((r_0 + s_0) + P \cap R)))\\ &= ((r_n + s_n)x^n + \cdots + (r_0 + s_0)) + P\\ &= (r_n x^n + \cdots + r_0) + P + (s_n x^n + \cdots + s_0) + P\\ &= \psi(f) + \psi(g).\end{aligned}$$

Vamos escrever $f = \sum_{i=0}^{n} \overline{r}_i x^i$ e $g = \sum_{i=0}^{n} \overline{s}_j x^j$, em que $\overline{r}_i = r_i + P \cap R$ e $\overline{s}_j = s_j + P \cap R$.

iii)

$$\psi(fg) = \psi(\sum_{i+j=n} \overline{r}_i \overline{s}_j x^n + \cdots + \sum_{i+j=0} \overline{r}_i \overline{s}_j)$$

$$
\begin{aligned}
&= (\sum_{i+j=n} r_i s_j x^n + \cdots + \sum_{i+j=0} r_i s_j) + P \\
&= (r_n x^n + \cdots + r_0 x^0)(s_n x^n + ... + s_o x^0) + P \\
&= ((r_n x^n + \cdots + r_0 x^0) + P)((s_n x^n + \cdots + s_o x^0) + P) \\
&= \psi(f)\psi(g).
\end{aligned}
$$

De $ii)$ e $iii)$ concluímos que ψ é um homomorfismo.

Mostremos que ψ é sobrejetor. Seja $z \in R[x]/P$. Então $z = (z_n x^n + \cdots + z_0) + P$, para certos $z_n, ..., z_0 \in R$. Logo, tomando $f = (z_n + P \cap R)x^n + \cdots + (z_0 + P \cap R) \in (R/(P \cap R))[x]$ temos $\psi(f) = z$.

Agora, note que

$$\ker \psi = \{(r_n + P \cap R)x^n + \cdots + (r_0 + P \cap R)x^0 \in (R/(P \cap R))[x] \ / \ r_n x^n + \cdots + r_0 x^0 \in P\}.$$

Por fim mostremos as duas afirmações feitas acerca do $\ker \psi$:

a) $\ker \psi \bigcap (R/(P \cap R)) = 0$.

   De fato, seja $y \in \ker \psi \cap (R/(P \cap R))$, então $y = r + P \cap R \in (R/(P \cap R)) \subseteq (R/(P \cap R))[x]$, e, como $y \in \ker \psi$, segue que $r \in P$ e, portanto, $r \in P \cap R$, isto é, $y = 0$.

b) $\ker \psi$ é um ideal primo de $(R/(P \cap R))[x]$.

   De fato, sejam $A, B \lhd (R/(P \cap R))[x]$ tais que $AB \subseteq \ker \psi$. Sejam $f = \sum_{i=0}^{n} \overline{r}_i x^i \in A$ e $g = \sum_{i=0}^{n} \overline{s}_j x^j \in B$, em que $\overline{r}_i = r_i + P \cap R$ e $\overline{s}_j = s_j + P \cap R$. Então

$$fg = \sum_{i+j=n} \overline{r}_i \overline{s}_j x^n + \cdots + \sum_{i+j=0} \overline{r}_i \overline{s}_j \in AB \subset Ker\psi,$$

   e portanto

$$\sum_{i+j=n} r_i s_j x^n + \cdots + \sum_{i+j=0} r_i s_j \in P,$$

   isto é,

$$(r_n x^n + \cdots + r_0)(s_n x^n + \cdots + s_0) \in P,$$

   e como P é um ideal primo de $R[x]$ segue que

$$(r_n x^n + \cdots + r_0 x^0) \in P \text{ ou } (s_n x^n + \cdots + s_0 x^0) \in P,$$

   ou seja, $f \in \ker \psi$ ou $g \in \ker \psi$. Disso segue que $\ker \psi$ é um ideal primo.

Do Primeiro Teorema do Isomorfismo, temos que

$$((R/(P \cap R))[x])/\ker\psi \cong R[x]/P$$

e $\ker\psi$ satisfaz as condições $a)$ e $b)$ acima. Assim, se mostrarmos que, para todo ideal P primo de $R[x]$ tal que $P \cap R = 0$, o anel $R[x]/P$ é semiprimitivo, teremos, pelo isomorfismo acima, que, para todo ideal P primo de $R[x]$, o anel $R[x]/P$ é semiprimitivo.

Seja $P \triangleleft R[x]$ nas condições acima. Se $P = 0$, então $R[x]$ é semiprimitivo. Isto é uma consequência do Teorema 1.23, pois todo ideal nil está contido em $rad(R)$ (Lema 1.12), e $rad(R) = 0$, pois R é um anel de Jacobson primo, ou seja, R não tem ideais nil não nulos. Se $P \neq 0$ e J/P é o radical de Jacobson de $R[x]/P$, então $J \cap R = 0$, pelo Lema 2.9. Mas $J \supseteq P$ e pelo Lema 2.8 segue que $J = P$ (se $J \supsetneq P$ o Lema 2.8 implica que $J \cap R \neq 0$, o que é um absurdo). Portanto $rad(R[x]/P) = J/P = 0$, isto é, P é um ideal semiprimitivo de $R[x]$ e o teorema está provado. ■

Corolário 2.11. *Se R é um anel de Jacobson, então o anel $R[x_1, x_2, ..., x_n]$ também o é, em que $x_1, ..., x_n$ são indeterminadas comutativas.*

Capítulo 3

Skew Anéis de Polinômios e Anéis de Jacobson

Mostramos no capítulo anterior que R é um anel de Jacobson se, e somente se, $S = R[x]$ é um anel de Jacobson. Pearson e Stephenson [9] mostraram que isto é falso quando S é o *skew* anel de polinômios $S = R[x, \alpha]$, em que α é algum automorfismo de R. Nosso objetivo neste capítulo é o de estender o resultado do capítulo anterior para os *skew* anéis de polinômios. Provaremos que $S = R[x, \alpha]$ é $\alpha-$Jacobson se, e somente se, R é $\alpha-$Jacobson.

Se R é um anel e α é um automorfismo de R, então diremos que R é um $\alpha-$anel. A fim de definirmos os anéis $\alpha-$Jacobson e os conceitos relacionados, precisamos generalizar as definições dos radicais clássicos. Para fazer isto, iniciaremos este capítulo com algumas definições. Sempre que $\alpha \in Aut(R)$, escrevemos r^α em vez de $\alpha(r)$, com $r \in R$.

Definição 3.1. *Seja R um $\alpha-$anel e $I \lhd R$. Se $I^\alpha \subseteq I$, então I é dito ser um $\alpha-$ideal de R. Se $I^\alpha = I$, então I é dito ser um ideal $\alpha-$invariante de R. Os conceitos de $\alpha-$ideal à esquerda (direita) e ideal à esquerda (direita) $\alpha-$invariante são definidos de forma análoga.*

Observação 3.2. *Se I é um $\alpha-$ideal de um $\alpha-$anel R, então $\phi : R/I \to R/I$, $\phi(r+I) = r^\alpha + I$ é um homomorfismo sobrejetor. Se I é $\alpha-$invariante, este homomorfismo é um automorfismo. Chamaremos tal automorfismo ainda de α.*

Definição 3.3. *Um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de um $\alpha-$anel R é um membro maximal do conjunto dos ideais à esquerda $\alpha-$invariantes propriamente contidos em R. Ideal $\alpha-$invariante maximal, $\alpha-$ideal maximal, e $\alpha-$ideal à esquerda maximal são definidos de maneira análoga.*

Observação 3.4. *Pelo Lema de Zorn, todo $\alpha-$ideal próprio está contido em um $\alpha-$ideal maximal e observações similares podem ser feitas para os outros três casos. Segue imediatamente das definições que, se M é um $\alpha-$ideal à esquerda maximal, então M é $\alpha-$invariante.*

Definição 3.5. *Um ideal $P \neq R$ de um $\alpha-$anel R é dito ser um ideal fortemente $\alpha-$primo de R se P é $\alpha-$invariante, e sempre que A é um ideal de R e B é um $\alpha-$ideal de R tais que $AB \subseteq P$, então $A \subseteq P$ ou $B \subseteq P$. Se 0 é um ideal fortemente $\alpha-$primo de R, então R é dito ser um anel fortemente $\alpha-$primo.*

Definição 3.6. *Um ideal P de um $\alpha-$anel R é dito ser um ideal $\alpha-$primitivo (à esquerda) de R se existir um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal M de R tal que $(M : R) = P$, em que*

$$(M : R) = \{r \in R : rR \subseteq M\}.$$

Observação 3.7. *Sejam R um anel e M um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de R. Então*

(1) $(M : R) \subseteq M$;

(2) $(M : R)$ *é o maior ideal de R contido em M;*

(3) $(M : R)$ *é $\alpha-$invariante;*

(4) Se Q é ideal $\alpha-$invariante de R, então $Q \subseteq (M : R)$ ou $Q + M = R$.

Demonstração. (1) Se $x \in (M : R)$ então $xR \subseteq M$. Em particular, temos $x \in M$.

(2) É rotina mostrar que $(M : R) \triangleleft R$. Sejam $N \triangleleft R$ tal que $N \subseteq M$ e $x \in N$. Então, para todo $r \in R$, $xr \in N \subseteq M$. Logo, $xR \subseteq M$ e portanto $x \in (M : R)$.

(3) Seja $x \in (M : R)^\alpha$. Então $x = k^\alpha$ para um certo $k \in (M : R)$ e, uma vez que

$$xR = k^\alpha R = k^\alpha R^\alpha = (kR)^\alpha \subseteq M^\alpha = M,$$

segue que $x \in (M : R)$. Reciprocamente, se $x \in (M : R)$ então $xR \subseteq M$ e, em particular, $x \in M = M^\alpha$. Ponhamos $x = t^\alpha$, para um certo $t \in M$. Então $t \in (M : R)$, pois

$$xR \subseteq M \Rightarrow t^\alpha R \subseteq M = M^\alpha \Rightarrow (tR)^\alpha \subseteq M^\alpha \Rightarrow tR \subseteq M.$$

(4) Note que $Q \subseteq M$ ou $Q \nsubseteq M$. Se $Q \subseteq M$ então, pelo item (2), segue que $Q \subseteq (M : R)$. Se $Q \nsubseteq M$ então $M \subsetneq M + Q$ e pela maximalidade de M obtemos $M + Q = R$. ■

Podemos agora generalizar as definições dos radicais clássicos.

Definição 3.8. *Seja R um $\alpha-$anel.*

(1) A interseção de todos os ideais $\alpha-$primos de R é chamado de o radical $\alpha-$primo de R e é denotado por $P_\alpha(R)$;

(2) A interseção de todos os ideais $\alpha-$primitivos de R é chamado de o radical $\alpha-$Jacobson (à esquerda) de R e é denotado por $J_\alpha(R)$;

(3) A interseção de todos os ideais à esquerda $\alpha-$invariante maximais de R é chamado de o radical $\alpha-$Kleinfeld de R e é denotado por $K_\alpha(R)$;

(4) A interseção de todos os ideais $\alpha-$invariante maximais de R é chamado de o radical $\alpha-$Brown-McCoy de R e é denotado por $G_\alpha(R)$.

O próximo resultado ajuda a estabelecer uma relação entre os radicais definidos acima.

Lema 3.9. *Seja R um $\alpha-$anel. Então todo ideal $\alpha-$invariante maximal de R é $\alpha-$primitivo e todo ideal $\alpha-$primitivo de R é $\alpha-$primo.*

Demonstração. Seja M um ideal $\alpha-$invariante maximal de R. Pelo item (1) da Observação 3.7, $(M : R) \subseteq M$. Por outro lado, como M é ideal bilateral, $MR \subseteq M$ e portanto, $(M : R) = M$. Isto mostra que M é um ideal $\alpha-$primitivo.

Seja agora P um ideal $\alpha-$primitivo de R. Então existe um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal M de R tal que $(M : R) = P$. Pelo item (3) da Observação 3.7, $(M : R)$ é $\alpha-$invariante, ou seja, P é $\alpha-$invariante. Suponha que existem $A, B \lhd R$, $B^\alpha \subseteq B$, tais que $AB \subseteq P$ e $B \nsubseteq P$. Sejam $b \in B$ e $r_1 \in R$ taisque $br_1 \notin M$.

Veja que

$$R(br_1) := \Big\{\sum_{i=1}^{p} r_i(br_1)^{\alpha^{j_i}}, j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R\Big\}$$

é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante de R. De fato, se $x \in (R(br_1))^\alpha$, então $x = \sum_{i=1}^{p} r_i^\alpha (br_1)^{\alpha^{j_i+1}}$, para certos $j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R$. Mas então, $x = \sum_{i=1}^{p} r_i^\alpha (br_1)^{\alpha^{k_i}} \in R(br_1)$, em que $k_i = j_i + 1 \in \mathbb{Z}, r_i^\alpha \in R^\alpha = R$. Reciprocamente, se $x \in R(br_1)$, existem $j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R$ tais que

$$x = \sum_{i=1}^{p} r_i(br_1)^{\alpha^{j_i}} = \sum_{i=1}^{p} s_i^\alpha (br_1)^{\alpha^{j_i}} = \left(\sum_{i=1}^{p} s_i(br_1)^{\alpha^{j_i-1}}\right)^\alpha \in (R(br_1))^\alpha,$$

com $s_i^\alpha = r_i$. Portanto, $(R(br_1))^\alpha = R(br_1)$.

Como $br_1 \notin M$, $M \subsetneq R(br_1)+M$ e pela maximalidade de M segue que $R(br_1)+M = R$. Assim, $1 = \sum_{i=1}^{p} r_i(br_1)^{\alpha^{j_i}} + m$, para certos $j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R$ e $m \in M$. Sejam $a \in A, r \in R$ elementos quaisquer. Veja que

$$ar = ar\left(\sum_{i=1}^{p} r_i(br_1)^{\alpha^{j_i}} + m\right) = ar\sum_{1}^{p} r_i b^{\alpha^{j_i}}(r_1)^{\alpha^{j_i}} + arm \in ABR+M \subseteq PR+M \subseteq M+M \subseteq M,$$

pois $(b)^{\alpha^{j_i}} \in B^\alpha \subseteq B$ e $AB \subseteq P = (M : R) \subseteq M$. Portanto, $A \subseteq P$. ■

Proposição 3.10. *Seja R um $\alpha-$anel. Então $P_\alpha(R) \subseteq J_\alpha(R) \subseteq G_\alpha(R)$ e $J_\alpha(R) \subseteq K_\alpha(R)$.*

Demonstração. As primeiras duas inclusões são imediatas do lema anterior. A última segue do fato de que todo ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal M de R contém um ideal $\alpha-$primitivo, a saber $(M : R)$. ■

Já vimos que se I é um ideal $\alpha-$invariante de um anel R, então α induz em R/I um automofismo, que ainda denotaremos por α.

Assim, se $\phi : R \to R/I$ é o homomorfismo natural, então definimos $P_\alpha(I) = \phi^{-1}(P_\alpha(R/I))$ e analogamente definimos $J_\alpha(I), K_\alpha(I)$ e $G_\alpha(I)$. Alternativamente, $P_\alpha(I)$ pode ser caracterizado como a interseção de todos os ideais fortemente $\alpha-$primos de R que contém I. De fato,

$$P_\alpha(I) = \phi^{-1}(P_\alpha(R/I)) = \phi^{-1}\left(\bigcap_{\lambda\in\gamma}(P_\lambda/I)\right),$$

em que $\{P_\lambda/I\}_{\lambda\in\gamma}$ é a família dos ideais fortemente $\alpha-$primos de R/I. Assim,

$$P_\alpha(I) = \bigcap_{\lambda\in\gamma}\phi^{-1}(P_\lambda/I) = \bigcap_{\lambda\in\gamma}P_\lambda,$$

em que $\{P_\lambda\}_{\lambda\in\gamma}$ é a família dos ideais fortemente $\alpha-$primos de R que contêm I, como queríamos. Disso observamos que se I_1, I_2 são ideais $\alpha-$invariantes tais que $I_1 \subseteq I_2$ então $P_\alpha(I_1) \subseteq P_\alpha(I_2)$.

Novamente, observações similares podem ser feitas para os outros radicais.

Definição 3.11. *Um $\alpha-$anel R é dito ser $\alpha-$Jacobson, $\alpha-$Kleinfeld, $\alpha-$Brown-McCoy se, para todo ideal I $\alpha-$invariante de R, $P_\alpha(I) = J_\alpha(I)$, $P_\alpha(I) = K_\alpha(I)$ e $P_\alpha(I) = G_\alpha(I)$, respectivamente.*

Observação 3.12. *Seja R um $\alpha-$anel. Então R é dito ser um anel $\alpha-$Jacobson ($\alpha-$Kleinfeld, $\alpha-$Brown-McCoy) se, e somente se, $J_\alpha(P) = P$ ($K_\alpha(P) = P, G_\alpha(P) = P$) para todo ideal fortemente $\alpha-$primo P de R.*

Demonstração. Suponha que R é um anel $\alpha-$Jacobson e seja P um ideal fortemente $\alpha-$primo de R. Então, em particular, temos $P_\alpha(P) = J_\alpha(P)$. Mas, se $\mathcal{I} = \{P_\lambda \lhd R / P \subseteq P_\lambda \, \text{e} \, P_\lambda \, \text{é} \, \alpha - primo\}$, então

$$P \subseteq \bigcap_{P_\lambda \in \mathcal{I}} P_\lambda \subseteq P$$

e temos $P = P_\alpha(P) = J_\alpha(P)$.

Reciprocamente, suponha $J_\alpha(P) = P$, para todo ideal fortemente $\alpha-$primo P de R. Pela Proposição 3.10, temos que $P_\alpha(R/I) \subseteq J_\alpha(R/I)$, assim $\phi^{-1}(P_\alpha(R/I)) \subseteq \phi^{-1}(J_\alpha(R/I))$, isto é, $P_\alpha(I) \subseteq J_\alpha(I)$, para todo ideal I $\alpha-$invariante de R.

Mostremos que $J_\alpha(I) \subset P_\alpha(I)$. De fato, se $\{P_k\}_{k \in \Omega}$ é a família de todos os ideais fortemente $\alpha-$primos de R que contêm I, então

$$P_\alpha(I) = \bigcap_{k \in \Omega} P_k = \bigcap_{k \in \Omega} J_\alpha(P_k),$$

em que a última igualdade dá-se pela hipótese.

Para cada $k \in \Omega$, seja $\mathcal{J} = \{P_k' \lhd R : P_k \subseteq P_k' \text{ e } P_k' \text{ é } \alpha - primitivo\}$. Então

$$J_\alpha(P_k) = \bigcap_{P_k' \in \mathcal{J}} P_k^{'}$$

e assim

$$P_\alpha(I) = \bigcap_{\substack{P_\lambda \alpha-primitivo \\ P_k \subset P_\lambda, \ para \ algum \ k \in \Omega}} P_\lambda.$$

Por outro lado, se $\mathcal{U} = \{P_j \lhd R/I \subseteq P_j \text{ e } P_j \text{ é } \alpha - primitivo\}$ então

$$J_\alpha(I) = \bigcap_{P_j \in \mathcal{U}} P_j$$

e como $I \subset P_k, \forall k \in \Omega$, segue que $J_\alpha(I) \subset P_\alpha(I)$, como desejado. ∎

Definição 3.13. *Seja R um $\alpha-$anel. Denotemos por $S = R[x, \alpha]$ o skew anel de polinômios (à esquerda) em uma determinada x sobre R com respeito a α, isto é, S consiste de polinômios da forma*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i, a_i \in R,$$

munido de adição usual e com multiplicação dada por $xr = r^\alpha x$, para todo $r \in R$. Assim,

$$ax^n bx^m = ab^{\alpha^m} x^{n+m},$$

para todo $a, b \in R$. A função α se estende a S definindo $(ax)^\alpha = a^\alpha x$, para todo $a \in R$, e se $f(x) \in S$, então $xf(x) = f(x)^\alpha x$.

Observamos que se R é um $\alpha-$anel e f é um polinômio mônico de $S = R[x, \alpha]$ de grau, digamos, n, então, para um dado $h \in S$ de grau $m \geq n$, podemos fazer uma divisão como no caso clássico. Por exemplo, se $h = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_0$ e $f = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ são polinômios de S, então o primeiro passo do processo de divisão é dado por

$$q_1 = h - b_m x^{m-n} f = h - (b_m x^m + b_m a_{n-1}^{\alpha^{m-n}} x^{m-1} + \cdots + b_m a_0^{\alpha^{m-n}} x^{m-n}).$$

Lema 3.14. *Seja M um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de um $\alpha-$anel R e N um ideal à esquerda $\alpha-$invariante de $S = R[x, \alpha]$ tal que $SM \subsetneq N \subseteq S$, em que SM é definido como no caso clássico. Então existe um polinômio mônico f de grau minimal em $N \setminus SM$ tal que $N = SM + Sf$.*

Demonstração. Seja $g \in N \setminus SM$ de grau minimal e suponha $g = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, com $a_n \neq 0$. Note que, como N e M são $\alpha-$invariantes, $(N - SM)^\alpha = N^\alpha - (SM)^\alpha = N - SM$. Assim, se $a_n \in M$, então $a_n^{\alpha^n} x^n = x^n a_n \in SM \subset N$. Como $g^{\alpha^n} \in N - SM$, segue que $g^{\alpha^n} - a_n^{\alpha^n} x^n \in N - SM$, o que é um abursdo, pois ${}^\circ(g^{\alpha^n} - a_n^{\alpha^n} x^n) < n$. Portanto, $a_n \notin M$.

Já vimos que

$$Ra_n = \Big\{ \sum_{i=1}^{p} r_i a_n^{\alpha^{j_i}}, j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R \Big\}$$

é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante de R; a maximalidade de M implica que $M + Ra_n = R$ e portanto $1 = m + \sum_{i=1}^{p} r_i a_n^{\alpha^{j_i}}$, para certos $m \in M, j_i \in \mathbb{Z}, r_i \in R$. Disto segue que $f := mx^n + \sum_{i=1}^{p} r_i g^{\alpha^{j_i}}$ é o polinômio desejado. De fato:

1. f é mônico, pois $cl(f) = m + \sum_{1}^{p} r_i a_n^{\alpha^{j_i}} = 1$.

2. f é tal que $N = SM + Sf$. Com efeito, seja $0 \neq h \in N$. Se $h \in SM$ então $h = h + 0 \in SM + Sf$. Agora se $h \notin SM$, então ${}^\circ h \geq n$. Assim, como $cl(f) = 1$, existem $q, r \in S$ tais que $h = qf + r$, com ${}^\circ r < n$ ou $r = 0$. Se $r \neq 0$, então $r = h - qf \in N$, e como ${}^\circ r < n$ temos que $r \in SM$. Portanto $h = qf + r \in Sf + SM$, como queriamos. A outra inclusão é imediata, pois

$$f = mx^n + \sum_{1}^{p} r_i g^{\alpha^{j_i}} = x^n m^{\alpha^{-n}} + \sum_{1}^{p} r_i g^{\alpha^{j_i}} \in SM + N \subseteq N.$$

3. $f \in N \setminus SM$. De fato, se $f \in SM$, então $N = Sf + SM \subseteq SM$, o que é um absurdo. Portanto $f \in N \setminus SM$.

■

Lema 3.15. *Seja M um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de um $\alpha-$anel R e N a interseção de todos os ideais à esquerda $\alpha-$invariantes maximais de S que contém SM. Então $N = SM \neq S$.*

Demonstração. Se $SM = S$ então, $1 = \sum_{1}^{p} r_i m_i$, para certos $m_i \in M, r_i \in R$, isto é, $1 \in M$, o que é um absurdo. Portanto $SM \neq S$.

Suponha $SM \subsetneq N$ e tome $f \in N \setminus SM$ como no lema anterior, pondo $^{o}f = n$. Temos que $S(1-f)+SM$ é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante de S. Se $S(1-f)+SM \neq S$, então, pelo Lema de Zorn, existe um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal K de S tal que $S(1-f)+SM \subseteq K$. Mas K é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de S que contém SM e $1-f$. Como $f \in N, f \in K$ e daí, $1 = f + (1-f) \in K$, absurdo. Portanto, $S(1-f)+SM = S$ e, por f ser mônico, $n \geq 1$.

Se $h \in S$ e $h(1-f) \in 1+SM$, então um argumento de indução sobre o grau de h mostra que $1 \in SM$. Esta contradição implica que $N = SM$.

■

Corolário 3.16. *Seja M um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de um $\alpha-$anel R. Então $K_\alpha(S) \subseteq SM$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{N : N$ é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de $S\}$ e $\mathcal{B} = \{N' : N'$ é um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de S que contém $SM\}$. Então

$$K_\alpha(S) = \bigcap_{N \in \mathcal{A}} N \subseteq \bigcap_{N' \in \mathcal{B}} N' = SM,$$

em que a última igualdade segue do lema anterior. ■

Corolário 3.17. *Seja R um $\alpha-$anel. Se $K_\alpha(R) = 0$, então $K_\alpha(S) = 0$.*

Demonstração. Suponha que $K_\alpha(S) \neq 0$. Então existe $f \neq 0$ tal que $f \in K_\alpha(S) \subseteq SM$, para todo ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal M de R. Ponha $f = a_n x^n + \cdots + a_0$, em que $a_n \neq 0$. Assim temos

$$0 \neq a_n = \sum_{i=1}^{q} r_i m_i^{\alpha^{j_i}} \in M$$

para certos $r_i \in R, m_i \in M, j_i \in \mathbb{Z}$. Portanto, $0 \neq a_k \in K_\alpha(R)$ e a contrapositiva está provada. ■

Lema 3.18. *Seja P um ideal $\alpha-$primitivo de um $\alpha-$anel R. Então $J_\alpha(S) \subseteq SP$.*

Demonstração. Seja M um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de R tal que $P = (M : R)$. Pela Proposição 3.10, temos que $J_\alpha(S) \subseteq K_\alpha(S)$ e, pelo Corolário 3.16, segue que $K_\alpha(S) \subseteq SM$. Assim, como $(SM : S)$ é o maior ideal de S contido em SM, segue que $J_\alpha(S) \subseteq (SM : S)$. Como M e $(M : R)$ são ambos $\alpha-$ invariantes, então $(SM : S) = S(M : R) = SP$. ■

Corolário 3.19. *Se $J_\alpha(R) = 0$, então $J_\alpha(S) = 0$.*

Demonstração. Análoga ao Corolário 3.17. ■

O familiar algoritmo da divisão apresentado anteriormente pode ser generalizado, o que faremos na seguinte proposição.

Proposição 3.20. *Suponha que I é um ideal não nulo de S e f é um polinômio não nulo de menor grau em I, com ${}^of = n$ e $cl(f) = a$. Então $af = fa^{\alpha^{-n}}$ e, para qualquer $g \in S$, existem $t_1, t_2 \geq 0$ e $h_1, h_2, r_1, r_2 \in S$ com ${}^or_i < n$ $(i = 1, 2)$ tais que*

(1) $a^{t_1}g = fh_1 + r_1$;

(2) $g(a^{\alpha^{-n}})^{t_2} = h_2f + r_2$.

Se $g \in I$, então $r_1 = r_2 = 0$.

Demonstração. Primeiramente observe que $cl(af - fa^{\alpha^{-n}}) = a^2 - a^2 = 0$ e, como $af - fa^{\alpha^{-n}} \in I$, (pois $f \in I$ e $I \triangleleft S$) obtemos que $af - fa^{\alpha^{-n}} = 0$, pela minimalidade do grau de f em I.

Provemos (2). Seja $g = g_mx^m + \cdots + g_0 \in S$. Se $m < n$ então $t_2 = 0 = h_2$ e $r_2 = g$. Suponha $m \geq n$ e considere

$$ga^{\alpha^{-n}} - g_mx^{m-n}f = \psi_1.$$

Note que $cl(\psi_1) = g_m(a^{\alpha^{-n}})^{\alpha^m} - g_ma^{\alpha^{m-n}} = 0$, ou seja, ${}^o\psi_1 < m = {}^og$. Aplique o processo novamente a ψ_1 e obtemos

$$\psi_2 = \psi_1a^{\alpha^{-n}} - cl(\psi_1)x^{{}^o\psi_1 - n}f = (ga^{\alpha^{-n}} - g_mx^{m-n}f)a^{\alpha^{-n}} - cl(\psi^1)x^{{}^o\psi_1 - n}f.$$

Usando que $af = fa^{\alpha^{-n}}$, obtemos da última igualdade

$$g(a^{\alpha^{-n}})^2 = (g_mx^{m-n}a + cl(\psi_1)x^{{}^o\psi_1 - n})f + \psi_2.$$

Este processo pode ser repetido e para quando ${}^{o}\psi_k < n$, e assim obtemos o desejado. O item (1) prova-se de maneira análoga, bastando tomar $ag - fg_n^{\alpha^{-n}} x^{m-n} = \psi_1$. Por fim, se $g \in I$, então $r_1 = a^{t_1} g - fh_1 \in I$, $r_2 = g(a^{\alpha^{-n}}) - h_2 f \in I$ e, como ${}^{o}r_i < n$ segue da minimalidade do grau de f em I que $r_i = 0$. ■

Observe que, quando $cl(f) = 1$, então o algoritmo anterior é exatamente o algoritmo da divisão que apresentamos anteriormente.

Definição 3.21. *Para um ideal L de S, $\Lambda(L)$ é definido como sendo o ideal de R consistindo do zero e dos coeficientes líderes de elementos não nulos de L de grau minimal.*

Lema 3.22. *Seja $0 \neq L \triangleleft S$ tal que $L \cap R = 0$. Se I é um ideal próprio de R com $I + \Lambda(L) = R$, então $SI + L \neq S$.*

Demonstração. Como $I + \Lambda(L) = R$, seja $0 \neq a \in \Lambda(L)$ tal que $1 - a \in I$, e seja $0 \neq f \in L$ de menor grau, digamos n, com $cl(f) = a$. Como $L \cap R = 0$, segue que $n \geq 1$. Se $SI + L = S$ então existem $h \in SI$ e $g \in L$ tais que $1 = h + g$. Pela proposição anterior, $af = fa^{\alpha^{-n}}$ e, como $g \in L$, então existem $h_1 \in S$ e $t \geq 0$ tais que $a^t g = fh_1$. Assim

$$a^t g = fh_1 \Rightarrow a^t(1 - h) = fh_1 \Rightarrow a^t = a^t h + fh_1.$$

Como $1 - a \in I$, então $a - a^2 \in I$, e assim $1 - a^2 = 1 - a + a - a^2 \in I$. Seguindo este raciocínio obtemos $1 - a^t \in I$. Portanto $1 - fh_1 = 1 - a^t + a^t h \in SI$.

Dentre todos os polinômios $h_1 \in S$ com $1 - fh_1 \in SI$, escolhemos um de menor grau, digamos k, e seja $cl(h_1) = d$. Ponha $\theta = a^{\alpha^{-n}}(h_1 - dx^k)$. O polinômio θ é tal que $cl(\theta) = a^{\alpha^{-n}}(d - d) = 0$, isto é, ${}^{o}\theta < k$. Além disso, $1 - f\theta \in SI$, o que é um absurdo, assim $SI + L \neq S$. ■

Lema 3.23. *Seja L um ideal não nulo de S, com $L \cap R = 0$. Então $\Lambda(L)(J(L) \cap R) \subseteq J(R)$. Mais ainda, se L é $\alpha-$invariante, então*

(1) $\Lambda(L)(K_\alpha(L) \cap R) \subseteq K_\alpha(R)$

(2) $\Lambda(L)(J_\alpha(L) \cap R) \subseteq J_\alpha(R)$

Demonstração. (1) Seja I um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de R. Afirmamos que $\Lambda(L)(K_\alpha(L) \cap R) \subseteq I$. Isto é claro se $\Lambda(L) \subseteq I$. Assumimos que $\Lambda(L) \nsubseteq I$. Assim, $\Lambda(L) + I = R$ (pela maximalidade de I) e pelo Lema 3.22, $SI + L \neq S$. Deste modo, existe um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal M de S tal que $SI + L \subseteq M$. Em particular, $L \subseteq M$ e portanto, pela definição de $K_\alpha(L)$, $K_\alpha(L) \subseteq M$. Daí $SI + K_\alpha(L) \subseteq M \neq S$. Se $I + (K_\alpha(L) \cap R) = R$, então existem $i \in I, r \in K_\alpha(L)$ tal que

$$1 = i + r \in I + K_\alpha(L) \subseteq SI + K_\alpha(L) \subseteq M \neq S,$$

o que é um absurdo. Consequentemente, $I + (K_\alpha(L) \cap R) \neq R$ e, pela maximalidade de I, segue que $K_\alpha(L) \cap R \subseteq I$ e portanto $\Lambda(L)(K_\alpha(L) \cap R) \subseteq I$, como queríamos.

A inclusão $\Lambda(L)(J(L) \cap R) \subseteq J(R)$ é provada de maneira análoga, omitindo "$\alpha-$invariante"e o subscrito α da demonstração anterior, e observando que $K(R) = J(R)$.

Por fim, provemos (2). Sejam P um ideal $\alpha-$primitivo de R e I um ideal à esquerda $\alpha-$invariante maximal de R tal que $P = (I : R)$. Pelo item 1 e pela Proposição 3.10, obtemos que $\Lambda(L)(J_\alpha(L) \cap R) \subseteq \Lambda(L)(K_\alpha(L) \cap R) \subseteq K_\alpha(R) \subseteq I$. Uma vez que P é o maior ideal de R contido em I (Observação 3.7), segue que $\Lambda(L)(J_\alpha(L) \cap R) \subseteq P$. Como P é arbitrário, o resultado segue. ■

Definição 3.24. *Seja S um anel $\mathbb{Z}-$graduado, isto é, existe uma família $\{S_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ de subgrupos aditivos de R tal que $S = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i$, com $S_iS_j \subseteq S_{i+j}, \forall i, j \in \mathbb{Z}$. Se $a = a_c + a_{c+1} + ... + a_d \in S$, com $a_i \in S_i$, a_c, a_d ambos não nulos, dizemos que a tem comprimento $d - c$, e denotamos a_d, o termo lider de a, por $\overline{a}$. O conjunto de todos os elementos de S com comprimento menor ou igual a m é denotado por $S^{[m]}$. Finalmente, se α é um automorfismo de S tal que $S_i^\alpha = S_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$, denotamos $\mathcal{A} = \{\alpha^i : i \in \mathbb{Z}, i \geq 0\}$.*

Sempre que nos referirmos a um automorfismo α de um anel $\mathbb{Z}-$graduado $S = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S_i$, estaremos considerando que α é tal que $S_i^\alpha = S_i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 3.25. *Seja R um $\alpha-$anel. Os anéis $R[x]$ e $S = R[x, \alpha]$ são anéis $\mathbb{Z}-$graduados. Basta considerar $S_i = 0$, se $i < 0$ e $S_i = \{ax^i : a \in R\}$, se $i \geq 0$. Nestes casos, $S^{[0]} = \{ax^i : a \in R, i \geq 0\}$*

O próximo resultado não será provado, mas deixamos uma referência para que o leitor possa encontrar a prova.

Lema 3.26. *Sejam S um anel $\mathbb{Z}-$graduado que é fortemente $\alpha-$primo e P um ideal não nulo fortemente $\alpha-$primo de S tal que $P \cap S^{[0]} = 0$. Se I é um $\alpha-$ideal de S com $P \subseteq I$ e $I \cap S^{[0]} = 0$, então $I = P$.*

Demonstração. Ver Lema 2.12 em [4]. ■

Lema 3.27. *Se R é um anel fortemente $\alpha-$primo, então $S = R[x, \alpha]$ é um anel primo.*

Demonstração. Suponha que $CD = 0$ para ideais C, D de S, com $C \neq 0$. Note que existe

$$cx^m + c_{m+1}x^{m+1} + \cdots + c_k x^k \in C \setminus \{0\}.$$

Defina $E = \{d \in R : (dx^n + d_{n+1}x^{n+1} + \cdots + d_p x^p) \in D\} \cup \{0\}$. É fácil ver que E é um ideal de R. Além disso, como $xD \subseteq D$, E é um $\alpha-$ideal, pois se $d \in E$ então existe

$$dx^n + d_{n+1}x^{n+1} + \cdots + d_p x^p \in D$$

e portanto $D \ni x(dx^n + d_{n+1}x^{n+1} + \cdots + d_p x^p) = d^\alpha x^{n+1} + \cdots + d_p^\alpha x^{p+1}$.

Afirmação: $(RcR)E^{\alpha^m} = 0$. De fato, sejam $r \in R, d \in E$. Como

$$(crx^m + \cdots + c_k r^{\alpha^{k-m}} x^k) = (cx^m + \cdots + c_k x^k) r^{\alpha^{-m}} \in C,$$

obtemos

$$(crx^m + \cdots + c_k r^{\alpha^{k-m}} x^k)(dx^n + \cdots + d_p x^p) = 0 \,(\text{pois } CD = 0),$$

e portanto $crd^{\alpha^m} = 0$. Isto implica que $RcRE^{\alpha^m} = 0$, como queríamos. Uma simples indução sobre m mostra que E^{α^m} é um $\alpha-$ideal de R. Por fim, como R é um anel fortemente $\alpha-$primo, segue que $RcR = 0$ ou $E^{\alpha^m} = 0$. Mas $0 \neq c \in RcR$, e portanto $E^{\alpha^m} = 0$, isto é, $E = 0$. Portanto $D = 0$ e S é um anel primo. ∎

Definição 3.28. *Sejam R um $\alpha-$anel e I um ideal de $S = R[x, \alpha]$. Então a indeterminada x é dita ser regular módulo I se para todo $f \in S$, $xf \in I$ implicar $f \in I$ e $fx \in I$ implicar $f \in I$.*

Lema 3.29. *Sejam R um $\alpha-$anel e P um ideal primo de $S = [x, \alpha]$. Se a indeterminada x não pertence a P, então x é regular módulo P.*

Demonstração. Suponha que $f \in S$ e que $xf \in P$. Como $xS = Sx$, então $xSf = Sxf \subseteq P$, isto é, $xSSf = xSf \subseteq P$ e assim $(xS)(SfS) \subseteq P$. Como P é primo, $xS \subseteq P$ ou $SfS \subseteq P$. Consequentemente $SfS \subseteq P$, pois $x \notin P$. Logo, $f \in P$. Analogamente, $fx \in P$ implica que $f \in P$, para todo $f \in S$. ∎

Corolário 3.30. *Sejam R um anel fortemente $\alpha-$primo e P um ideal não nulo fortemente $\alpha-$primo de $S = R[x, \alpha]$, com $P \cap R = 0$. Se I é um ideal $\alpha-$invariante de S, com $P \subseteq I$ e $I \cap R = 0$, então $I = P$.*

Demonstração. Dividiremos esta demonstração em dois casos, a saber, $x \in P$ e $x \notin P$. Suponha que $x \in P$, então $P = Sx$. De fato, como $x \in P$, então $a_k x^k \in P$, para todo $k \in \mathbb{N}$, e $a_k \in R$. Logo, se supusermos que $a_n x^n + \cdots + a_0 \in P$, com $a_0 \neq 0$, obtemos $a_0 \in P$, que é um absurdo, pois $P \cap R = 0$. Isto mostra que todo elemento de P é da forma $a_n x^n + \cdots + a_1 x = (a_n x^{n-1} + \cdots + a_1)x \in Sx$. Com um raciocínio análago, de $Sx = P \subseteq I$ e $I \cap R = 0$, obtemos $I = Sx = P$.

Agora suponha que $x \notin P$. Pelo Lema 3.27, S é primo e, segue que é fortemente $\alpha-$primo. Pelo Lema 3.29 temos que x é regular módulo P, e isto implica que:

1. $P \nsubseteq Sx$. De fato, se $P \subseteq Sx$ então os elementos de P são da forma

   $$a_n x^n + \cdots + a_{p+1} x^{p+1} + a_p x^p, a_p \neq 0 \text{ e } n \geq p.$$

   Assim, se um elemento desta forma pertence a P então

   $$(a_n x^{n-p} + \cdots + a_p) x^{p-1} x \in P \Rightarrow (a_n x^{n-p} + \cdots + a_p) x^{p-1} \in P,$$

   pois x é regular módulo P. Repetindo este processo obtemos $a_n x^{n-p} + \cdots + a_p \in P$, o que é um absurdo pela forma dos elementos em P.

2. $P \cap S^{[0]} = 0$. De fato, se $P \cap S^{[0]} \neq 0$, então existe $ax^k \in P$, e como x é regular módulo P, segue que $ax^{k-1} \in P$, repetindo o processo obtemos $a \in P$, o que é um absurdo, pois $P \cap R = 0$.

Pelo Lema de Zorn, podemos encontrar um ideal $\alpha-$invariante maximal M de S com a propriedade de conter I e $M \cap R = 0$. Defina $A = \{g \in S : gx \in M\}$ e $B = Sx$. Se $x \in M$ então $B = Sx \subseteq M$. Se $x \notin M$, segue do Lema 3.29 (uma vez que M é fortemente $\alpha-$primo (Lema 3.9)), que x é regular módulo M e, em particular, obtemos que $A \subseteq M$. Portanto, $A \subseteq M$ ou $B \subseteq M$. Analogamente ao que foi feito no primeiro parágrafo desta demonstração, se $B = Sx \subseteq M$, então $M = Sx$, pois $M \cap R = 0$. Disto segue que $P \subseteq I \subseteq M = Sx$, o que é um absurdo, pois já vimos que $P \nsubseteq Sx$. Assim, $A \subseteq M$. Como $M \cap R = 0$, segue de forma análoga ao que fizemos no item 2 desta demonstração que $M \cap S^{[0]} = 0$. Agora, pelo Lema 3.26, $M = P$ e, assim, $P \subseteq I \subseteq M = P$, isto é, $I = P$.

■

Observação 3.31. *Seja I um ideal $\alpha-$invariante de um anel R. Então A/I é $\alpha-$primitivo em R/I se, e somente se, A é $\alpha-$primitivo em R, que contém I. Mais ainda, se R é um anel $\alpha-$Jacobson, então R/I é também $\alpha-$Jacobson, em que I é qualquer ideal $\alpha-$invariante de R.*

Demonstração. Segue imediatamente da definição de ideal $\alpha-$primitivo e da definição de anel $\alpha-$Jacobson. ■

Teorema 3.32. *Seja R um $\alpha-$anel e $S = R[x, \alpha]$. Então S é um anel $\alpha-$Jacobson se, e somente se, R é um anel $\alpha-$Jacobson.*

Demonstração. $\Rightarrow$) É fácil ver que $\phi : R \to S/Sx$, dada por $\phi(r) = r + Sx$ é um isomorfismo. Desta forma, se S é $\alpha-$Jacobson, então segue da observação anterior que S/Sx também o é, pois Sx é $\alpha-$invariante. Assim, pelo isomorfismo acima, obtemos que R $\alpha-$Jacobson.

$\Leftarrow$) Seja P um ideal fortemente $\alpha-$primo de S. Nosso objetivo é mostrar que $J_\alpha(P) = P$.

i) Suponha que $x \in P$. Como R é um anel $\alpha-$Jacobson, temos que $R/(P \cap R)$ também o é (observação anterior, uma vez que $P \cap R$ é $\alpha-$invariante). Como $S/P \cong R/(P \cap R)$ via $a_0 + P \longmapsto a_0 + P \cap R$, obtemos que S/P é também $\alpha-$Jacobson. Seja P_λ um ideal $\alpha-$primitivo de S, tal que $P \subseteq P_\lambda$. Então,

$$P/P = J_\alpha(P/P) = \bigcap_{P_\lambda/P \ \alpha-primitivo} P_\lambda/P$$

e portanto

$$\bigcap_{P \subseteq P_\lambda \ \alpha \, primitivo} P_\lambda = P$$

isto é, $J_\alpha(P) = P$.

ii) Suponha que $x \notin P$. Analogamente ao que foi feito na demonstração do Teorema 2.10 temos que

$$\phi : R/(P \cap R)[x, \alpha] \to S/P$$

$$(r_0 + P \cap R) + \cdots + (r_n + P \cap R)x^n \longmapsto (r_0 + \cdots + r_n x^n) + P$$

é um homomorfismo sobrejetor de anéis tal que $\ker\phi \bigcap (R/(P \cap R)) = 0$ e $\ker\phi$ é um ideal fortemente $\alpha-$primo em $R/(P \cap R)[x, \alpha]$. Se mostrarmos que, dado um ideal fortemente $\alpha-$primo P de S com $P \cap R = 0$, então $J_\alpha(P) = P$, obtemos que

$$J_\alpha(\ker\phi) = \ker\phi,$$

isto é,

$$\bigcap_{\ker\phi \subseteq P_\lambda \ \alpha-primitivo\ em\ R/(P\cap R)[x,\alpha]} P_\lambda = \ker\phi.$$

Aplicando o isomorfismo $\phi' : (R/(P \cap R)[x, \alpha])/\ker\phi \to S/P$ na última igualdade obtemos que

$$\bigcap_{P/P \subseteq P_\beta/P \ \alpha-\ primitivos\ em\ S/P} P_\beta/P = P/P,$$

isto é,

$$J_\alpha(P) = \bigcap_{P \subseteq P_\beta \ \alpha \, primitivos \, em \, S} P_\beta = P.$$

Sem perda de generalidade, suponha que P é um ideal fortemente $\alpha-$primo de S tal que $P \cap R = 0$. Assim, como $0 = P \cap R$ é fortemente $\alpha-$primo em R, temos que R é um anel fortemente $\alpha-$primo, por definição. Pelo Lema 3.27 temos que S é um anel primo e portanto fortemente $\alpha-$primo. Como 0 é fortemente $\alpha-$primo em R segue que $P_\alpha(R) = 0$ e, como R é $\alpha-$Jacobson, $J_\alpha(R) = P_\alpha(R) = 0$. Assim, pelo Corolário 3.19, obtemos $J_\alpha(S) = 0$. Se $P = 0$ então $J_\alpha(P) = J_\alpha(0) = J_\alpha(S) = 0 = P$. Se $P \neq 0$ então, pelo Lema 3.23, segue que $\Lambda(P)(J_\alpha(P) \cap R) \subseteq J_\alpha(R) = 0$, e como R é um anel fortemente $\alpha-$primo, segue que $\Lambda(P) = 0$ ou $J_\alpha(P) \cap R = 0$, mas $\Lambda(P) \neq 0$. Assim $J_\alpha \cap R = 0$ e, pelo Corolário 3.30, temos que $J_\alpha(P) = P$.

■

Referências

[1] GARDNER, B.J.; WIEGANDT R. **Radical Theory of Rings.** Marcel Dekker, 2003.

[2] SNIDER, R. L. **Lattices of radicals.** Pacific J. Math, n. 40 (1972), p. 207-220.

[3] HERSTEIN, I. N. **Noncommutative Rings**. Carus Monogragh 15, Math. Assoc. Amer./Wiley, New York, 1968.

[4] PEARSON, K. R.; STEPHENSON, W.; WATTERS, J. F. ***skew* polynomials and Jacobson rings**. Proc. London Math. Soc 42 (1981), 559-576

[5] LAM, T. Y. **A First Course in Noncommutative Rings**. Springer - Verlag, New York, 1991.

[5] WATTERS, J. F. **Polynomial Extensions of Jacobson Rings**. J. Algebra 36 (1975), 302 - 8.

[6] GOODEARL, K. R.; WARFIELD, R. B. **An Introduction to Noncommutative Notherian Rings**. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[7] GOLDMAN, O. **Hilbert rings and the Hilbert nullstellensatz**. Math. Z. 54 (1951), 136 - 140.

[8] PROCESI, C. **Non-commutative Jacobson rings**. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 21 (1967), 281 - 290.

[9] PEARSON, K. R.; STEPHENSON, W. **A *skew* polynomial ring over a Jacobson ring need not be a Jacobson ring**. Comm. Algebra 5 (1977), 783-794.

[10] KRULL, W.. **Jacobsonsches Radical und Hilbertscher Nullstellensats, International**. Congress of Mathematicians, Cambridge, 1950, Conference in Algebra, 56-64.

[11] KRULL, W. **Jacobsonsche Ringe, Hilbertscher Nullstellensatz, Dimensionstheorie**. Mathematische Zeitschrift, (1951), 54: 354-387

[12] SZCZEPANSKI, A. F. **Generic flatness and the Jacobson conjecture**. Comm. Algebra 33 (2005), no. 11, 4159?4169.

[13] GOODEARL, K. R.; LETZTER, E. S. ***skew* Polynomial Extensions of Commutative Noetherian Jacobson Rings**, Proc. Amer. Math. Soc. 123 (1995), 1673 - 1679.