UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

# Álgebras com Identidades Polinomiais e seus Expoentes

JONATHAN PRASS SOUZA
Orientador: Ednei Aparecido Santulo Junior

Maringá - PR
2014

# Álgebras com Identidades Polinomiais e seus Expoentes

JONATHAN PRASS SOUZA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra
Orientador: Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior

Maringá - PR
2014

# Resumo

No presente trabalho apresentamos a demonstração para o Teorema de Giambruno-Zaicev sobre a existência do PI-expoente de uma álgebra com identidades polinomiais e que o mesmo é inteiro. Além disso, é mostrado que o PI-expoente do polinômio *standard* é máximo. A fim de atingir tal objetivo, primeiramente apresentamos definições e resultados gerais da teoria de álgebras com identidades polinomiais e de tópicos sobre as representações irredutíveis do grupo simétrico e de suas aplicações ao estudo de álgebras com identidades polinomiais.

# Abstract

In this work we present the proof of Giambruno-Zaicev's Theorem on the existence of the PI-exponent of an algebra that satisfies a polynomial identity. It is also shown that such exponent is an integer. Moreover, it is also shown that the exponent of the standard polynomial is maximum. In order to do so, firstly we present general definitions and results from the theory of the algebras that satisfy polynomial identities and from topics of the irreducible representations of the symmetric group and from their applications to the study of algebras satisfying polynomial identities.

# Sumário

# Introdução

O estudo de polinômios em variáveis não comutativas que se anulam em uma álgebra apareceu pela primeira vez em artigos de Dehn [7] e Wagner [27] nas décadas de 1920 e 1930, mas foi somente a partir de um artigo de Kaplansky [14] em 1948, que as álgebras que satisfazem identidades polinomiais despertaram realmente interesse. Nesse artigo, Kaplansky mostrou que qualquer PI-álgebra primitiva é uma álgebra simples de dimensão finita, sugerindo que tais álgebras deveriam preservar boas propriedades satisfeitas por álgebras comutativas ou de dimensão finita. Diversos resultados importantes foram obtidos desde então, merecendo destaque o Teorema de Amitsur-Levitzki [1] de 1950, no qual é demonstrado que a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre um corpo $F$ satisfazem o polinômio *standard* $s_{2n}$ e não satisfaz identidades de grau menor.

Um problema proposto por Specht em 1950 [25] foi o de se determinar se todas as identidades satisfeitas por uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero seriam sempre consequências de um conjunto finito de polinômios. Esse problema permaneceu sem solução por 37 anos e a demonstração só veio após uma série de artigos de Kemer sobre o assunto [16]. As técnicas desenvolvidas e utilizadas por Kemer se basearam na estrutura dos T-ideais e nos envolventes de Grassmann de superálgebras. Embora o estudo sistemático de PI-álgebras já tenha pelo menos 60 anos, são poucas as álgebras para as quais um conjunto de polinômios geradores para seus T-ideais é conhecido. Um exemplo que ilustra bem esse fato é que mesmo para álgebras de matrizes $n \times n$ sobre corpo de característica zero não são conhecidas bases de identidades para $n \geq 3$. Mesmo nos casos em que uma lista de polinômios geradores das identidades da álgebra é conhecida, não é possível determinar se um polinômio de grau dado é ou não identidade daquela álgebra. Para tentar superar essa dificuldade, introduziram-se maneiras de medir o crescimento do número de identidades conforme o grau aumenta.

No caso de característica zero, parte desse tratamento envolve o estudo do espaço quociente dos polinômios multilineares em $n$ variáveis pela interseção do mesmo com as identidades satisfeitas por uma álgebra $A$. Como permutações entre as variáveis de uma identidade polinomial de uma álgebra fornecem nova identidade polinomial esse espaço quociente possui uma estrutura natural de $S_n$-módulo e a teoria de representações do grupo simétrico, que é bem conhecida, pode ser aplicada para entender o crescimento das identidades. A sequência de dimensões desses espaços quocientes (chamadas codimensões) também desempenham um papel importante nesse entendimento.

Em [22], Regev provou o teorema da codimensão, segundo o qual a sequência de codimensões é exponencialmente limitada. Investigações acerca do limitante exponencial da sequência de codimensões de uma álgebra levaram à seguinte conjectura: dada uma PI-álgebra $A$ sobre um corpo de característica zero e sendo $c_n(A)$ sua $n$-ésima codimensão,

$$\liminf \sqrt[n]{c_n(A)} = \limsup \sqrt[n]{c_n(A)}$$

e o mesmo é sempre um número inteiro. Essa conjectura foi demonstrada por Giambruno e Zaicev em [9] e [10] e tal limite é chamado PI-expoente ou simplesmente expoente da PI-álgebra $A$. Mais recentemente Giambruno e Regev demonstraram que o polinômio *standard* $s_n$ geram um T-ideal de PI-expoente máximo e, portanto, tais T-ideais são minimais em um certo sentido.

Essa dissertação tem como principais objetivos apresentar a demonstração de que o PI-expoente de uma álgebra sobre um corpo de característica zero existe e é um inteiro e demonstrar a maximalidade do expoente associado ao polinômio $s_n$. Assim a dissertação encontra-se organizada da seguinte maneira.

No Capítulo 1 são tratados conceitos e resultados gerais que serão recorrentemente utilizados ao longo de toda a dissertação. Está inclusa nesse capítulo uma seção inteiramente devotada à demonstração do Teorema de Regev sobre a Codimensão, que serve de motivação para o restante.

O Capítulo 2 é inteiramente devotado ao estudo das representações do grupo simétrico e de algumas aplicações suas ao estudo de PI-álgebras. As ferramentas apresentadas aqui são fortemente utilizadas ao longo do restante da dissertação, especialmente no Capítulo 3, onde a colagem de diagramas de Young desempenha um papel importante.

O Capítulo 3 é devotado a apresentar a demonstração da existência e do fato de o expoente de uma álgebra ser um inteiro.

O Capítulo 4 apresenta a condição de maximalidade do PI-expoente de $s_n$.

As demonstrações de alguns resultados foram omitidas, sendo indicado onde encontrar as respectivas demonstrações por questões de espaço e por algumas dessas demonstrações necessitarem de resultados auxiliares que acabariam por desviar dos objetivos principais.

# Capítulo 1

# Álgebras com identidades polinomiais

Neste capítulo, introduzimos as definições e resultados gerais que serão utilizados ao longo de toda a dissertação.

## 1.1 Anéis

Anéis comutativos com unidade são alvo de estudo comum ao longo de um curso de graduação em Matemática. As álgebras apresentadas nesta dissertação são anéis não comutativos, que são estudados mais a fundo ao longo de cursos de pós-graduação, constituindo [18], [19] livros comumente adotados para seu estudo. Por questões de espaço e também de coesão, ao longo desta seção apresentaremos sucintamente as definições e resultados necessários da Teoria de Anéis que são usados ao longo do texto, especialmente no Capítulo 3.

Um **anel** $A$ é um conjunto munido de uma adição e uma multiplicação, denotadas por $+$ e $\cdot$ respectivamente, sendo que $(A, +)$ é um grupo abeliano, a multiplicação é associativa e distribui à esquerda e à direita com respeito à adição. No caso em que existe um elemento neutro para multiplicação no anel $A$, chamamos o mesmo de sua **unidade** e o anel é dito com unidade ou anel unitário. Um **ideal à esquerda** $I$ de $A$ é um subgrupo aditivo de $A$ que é fechado por multiplicação à esquerda por elementos de $A$, isto é, $ai \in I$, para quaisquer $a \in A$ e $i \in I$. Analogamente definem-se **ideal à direita** e **ideal bilateral** de um anel $A$. Um ideal à esquerda $I$ de $A$ é **maximal** se os únicos ideais à esquerda de $A$ que o contêm são $I$ e $A$. Analogamente temos que $I$ é **minimal** se os únicos ideais à esquerda contidos nele são $0$ e $I$. Essas definições de maximalidade e minimalidade se estendem naturalmente a ideais à direita e bilaterais.

Um elemento $a$ de um anel com unidade $A$ é chamado **invertível à esquerda** se existe $b \in A$ tal que $ba = 1$. Analogamente define-se elemento **invertível à direita**. Quando $a \in A$ é invertível à esquerda e à direita, é chamado simplesmente de **invertível** (nesse caso é fácil verificar que os inversos à esquerda e à direita coincidem). Um anel com unidade $A$ é um **anel com divisão** se todo elemento não nulo de $A$ é invertível.

**Definição 1.1.** *O* ***radical de Jacobson*** *de um anel com unidade $A$, denotado por $J(A)$ ou simplesmente por $J$, é a interseção de todos os ideais à esquerda maximais de $A$.*

As demonstrações dos fatos seguintes são encontradas nas páginas 57 e 58 de [19].

**Proposição 1.2.** *(i) O radical de Jacobson de um anel $A$ é um ideal bilateral de $A$.*

*(ii) O radical de Jacobson é o conjunto formado por todos os elementos $a \in A$ tais que $1 - ba$ é invertível à esquerda para qualquer $b \in A$.*

*(iii) O radical de Jacobson do anel $A$ é a interseção de todos os ideais à direita maximais de $A$.*

Daqui em diante, quando utilizarmos somente a palavra "ideal", estaremos nos referindo a um ideal bilateral. O ideal $I$ do anel $A$ é **nilpotente** se $I^k = 0$ para algum $k \in \mathbb{N}$.

**Proposição 1.3** (p. 63 de [19])**.** *Se o único ideal nilpotente do anel $A$ é $0$ e $e \in A$ é **idempotente**, isto é, $e^2 = e$, então $Re$ é ideal à esquerda minimal se e somente se $eRe$ é um anel com divisão.*

**Definição 1.4.** *Um anel com unidade $A$ é **semissimples** se ele se decompõe na soma direta de ideais* à esquerda *minimais. Se o anel não possui ideais* bilaterais *próprios, ou seja, ele próprio é um ideal bilateral minimal, é chamado **anel simples**.*

**Teorema 1.5** (Wedderburn-Artin (p. 65 de [19]))**.** *Um anel com unidade $A$ é semissimples se e somente se ele é isomorfo a uma soma direta de anéis semissimples que são simples. Um anel semissimples é simples se e somente se é isomorfo a um anel de matrizes sobre um anel com divisão $D$.*

## 1.2 Álgebras

Nesta seção definiremos e forneceremos as propriedades básicas de álgebra. Entenderemos por álgebra a estrutura que satisfará a definição a seguir:

**Definição 1.6.** *Seja $F$ um corpo. Uma $F$-**álgebra** é um conjunto $A$ que é, simultaneamente, um anel e um $F$-espaço vetorial, ou seja, possui três operações: uma adição, uma multiplicação "interna" e uma multiplicação por elementos de $F$. Além disso, as estruturas do anel e do espaço vetorial devem ser compatíveis, isto é, dado $a, b \in A$ e $\lambda \in F$, $\lambda(a * b) = (\lambda a)b = a(\lambda b)$.*

Na definição anterior, usamos o símbolo $*$ para a multiplicação de dois elementos de $A$ a fim de distigui-la da multiplicação por escalar, mas a partir de agora denotaremos ambas as operações do mesmo modo.

Tal como no caso de anéis, se a álgebra $A$, como anel, é comutativa dizemos que $A$ é uma **álgebra comutativa** e, se $A$ é um anel unitário, dizemos que $A$ é uma **álgebra unitária**. Se a álgebra $A$ é unitária ela contém uma cópia do corpo $F$, o conjunto $\{\lambda.1 \mid \lambda \in F\}$, que, por abuso de notação, é denotado por $F$.

Uma **subálgebra** $B$ de uma álgebra $A$ é um subconjunto da mesma que, com relação as operações de $A$, também é uma álgebra, ou seja, $B$ deve ser fechado com respeito a adição, multiplicação e multiplicação por escalar de $F$. Tal como ocorre para ideais em um anel, interseção de qualquer família de subálgebras de uma álgebra também é uma subálgebra da mesma. Assim, a **subálgebra gerada por um subconjunto** $X$ de uma álgebra $A$, denotada por $[X]$, é a menor subálgebra que contém esse conjunto, isto é, $[X]$ é a interseção de todas as subálgebras de $A$ que contêm $X$.

Um subconjunto $I$ de $A$ é dito **ideal da álgebra** $A$ se o mesmo é, simultaneamente, um ideal de $A$, visto $A$ como anel, e um subespaço vetorial de $A$, vendo $A$ como espaço vetorial. Se a álgebra $A$ é unitária, e $I$ é um ideal de $A$ como anel, temos que $I$ é um subespaço vetorial de $A$. Da mesma forma que se define o quociente de anéis e de espaços vetorias, podemos definir o quociente de uma álgebra $A$ por um ideal $I$, estendendo as operações de $A$ às classes de equivalência de $A/I$. As operações são bem definidas uma vez que $I$ é, ao mesmo tempo, ideal de um anel e subespaço vetorial, lembrando que a álgebra deve ser unitária.

O **centro** $Z(A)$ de uma álgebra $A$ é a subálgebra definida por

$$Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \forall b \in A\}.$$

De fato,

**(i)** Sejam $a$, $a' \in Z(A)$. Então, $(a + a').b = ab + a'b = ba + ba' = b.(a + a')$. Logo, $(a + a') \in Z(A)$.

**(ii)** Sejam $a$, $a' \in Z(A)$. Então, $(a.a').b = a.(a'.b) = a.(b.a') = (a.b).a' = (b.a).a' = b.(a.a')$, para todo $b \in A$. Logo, $(a.a') \in Z(A)$.

**(iii)** Sejam $a \in Z(A)$ e $\lambda \in F$. Então, $(\lambda.a).b = \lambda.(a.b) = \lambda.(b.a) = b.(\lambda.a)$, para todo $b \in A$. Logo, $\lambda.a \in A$.

Portanto, o centro de $A$ é uma subálgebra de $A$.

Se a álgebra $A$ é unitária, então $F \subset Z(A)$. De fato, se $\lambda \in F$ então

$$\lambda.b = (\lambda.b).1 = b.(\lambda.1) = b.\lambda,$$

para todo $b \in A$. Logo, $\lambda \in Z(A)$. Diremos que uma álgebra $A$ é uma **álgebra central** se $Z(A) = F$.

**Definição 1.7.** *Se uma álgebra $A$ pode ser escrita como soma direta de subespaços indexados por elementos de um grupo abeliano $(G, +)$, isto é, $A = \bigoplus_{g \in G} A^{(g)}$; e, além disso, se, dados $a \in A^{(g)}$ e $b \in A^{(h)}$, temos que $ab \in A^{(g+h)}$, dizemos que a álgebra $A$ é **$G$-graduada** e um elemento $a \in A^{(g)}$ é chamado de **elemento homogêneo de grau** $g$. O grau de um elemento homogêneo $a \in A$ é denotado por $\partial(a)$.*

**Exemplo 1.8.** *Seja $F$ um corpo e seja $V$ um espaço vetorial tendo por base um conjunto enumerável infinito $X$ cujos elementos são denotados por $e_i$, sendo $i$ um inteiro positivo. A **álgebra de Grassmann** sobre $V$ (denotada por $E(V)$, ou simplesmente por $E$) é a $F$-álgebra unitária tendo como base $\beta = \{e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k} \mid k \geq 1 \text{ e } i_1 < i_2 < \cdots < i_k\} \cup \{1\}$, sendo a adição e multiplicação formais levando-se em conta as relações $e_i e_j = -e_j e_i$ e $e_i^2 = 0$.*

Se char $F \neq 2$ essa última condição segue da primeira.

Para um elemento de $\beta$ definimos seu **comprimento** como sendo o número de fatores $e_j$ que o formam (tendo 1 comprimento 0). Denotando por $E^{(0)}$ o subespaço da álgebra de Grassmann gerado por todos os elementos de $\beta$ que possuem comprimento par, e por $E^{(1)}$ o subespaço gerado pelos elementos de $\beta$ que possuem comprimento ímpar, temos que $E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$ é uma $\mathbb{Z}_2$-graduação de $E$, e que $Z(E) = E^{(0)}$ se char $F \neq 2$.

O fato de $Z(E)$ ser $E^{(0)}$ segue de que se $a, b \in E$ são homogêneos segundo a $\mathbb{Z}_2$-graduação apresentada, então $ab = (-1)^{\partial(a)\partial(b)} ba$, que, por sua vez, segue da anticomutatividade dos $e_j$.

**Definição 1.9.** *Sejam $F$ um corpo e $A, B$ duas $F$-álgebras. A aplicação $\varphi : A \to B$ é um* ***homomorfismo de álgebras*** *se é, simultaneamente, uma transformação linear de $F$-espaços vetorias e um homomorfismo de anéis.*

Um homomorfismo é chamado de **isomorfismo** se é bijetor. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A$ é chamado de **endomorfismo da álgebra** $A$.

Propriedades análogas às do núcleo e imagem de um homomorfismo de anéis valem para homomorfismo de álgebras. Da mesma forma como temos um Teorema do Isomorfismo para anéis, existe um teorema análogo para álgebras enunciado a seguir e cuja demonstração é bastante similar.

**Teorema 1.10.** *(Teorema do Isomorfismo para Álgebras) Sejam $A$ e $B$ $F$-álgebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Então, $A/Ker\ \varphi$ é isomorfo a $Im\ \varphi$.*

Uma classe mais restrita de ideais de uma álgebra, mas que desempenha papel importante no estudo de PI-álgebras, são os T-ideais que definimos a seguir.

**Definição 1.11.** *Um ideal $I$ de uma álgebra $A$ é um* ***T-ideal*** *de $A$ se, para qualquer endomorfismo $\varphi : A \to A$, tivermos que $\varphi(I) \subset I$.*

**Definição 1.12.** *Seja $U = [u_{ij}]$ uma matriz de ordem $n \times n$. Dizemos que $U$ é uma matriz triangular superior se os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos, isto é, $u_{ij} = 0$ para $j < i$. E a álgebra de todas as matrizes triangulares superiores com entradas em $F$ será denotada por $UT_n(F)$.*

**Exemplo 1.13.** *Seja $F$ um corpo. Então, o conjunto $I$ das matrizes triangulares superiores com entradas em $F$ de diagonal nula é um T-ideal de $UT_n(F)$. A verificação de que $I$ é um ideal é canônica. Para verificar que é fechado por endomorfismo, basta reparar que $I$ representa o conjunto de todas as matrizes nilpotentes de $UT_n(F)$ e um endomorfismo deve mandar elementos nilpotentes em elementos nilpotentes.*

Tal como ocorre com os ideais, a interseção de qualquer família de T-ideais de uma álgebra $A$ é também um T-ideal e, portanto, podemos falar no T-**ideal gerado por um subconjunto** $X$ **de** $A$, que denotamos por $\langle X \rangle^T$.

Assim, o T-ideal gerado por um subconjunto $X$ de $A$ é a interseção de todos os T-ideais de $A$ que contém o subconjunto $X$.

**Definição 1.14.** *Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras à qual pertence a álgebra $A$ gerada, como álgebra, por um subconjunto $X$. Dizemos que $A$ é* ***livre livremente gerada por $X$ na classe $\mathcal{B}$*** *se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{B}$ e qualquer aplicação $f : X \to B$, existir um homomorfismo $\varphi : A \to B$ que estende $f$, isto é, o diagrama abaixo, no qual $i$ denota a inclusão de $X$ em $A$, comuta.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i"'] & B \\ A \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

*A cardinalidade do conjunto $X$ é chamado de* ***posto*** *da álgebra $A$.*

**Proposição 1.15.** *Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto enumerável, possivelmente finito. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a $F$-álgebra que possui por base a união de $\{1\}$ com o conjunto formado por todos os monômios da forma $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$, com $k \in \mathbb{N}$ e cada $i_j$ um inteiro positivo menor ou igual a $|X|$ (podendo ocorrer repetição de índices). O resultado da multiplicação entre dois monômios $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$ e $x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_l}$ é o monômio $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\ldots x_{j_l}$ e se estende por linearidade para todos os elementos de $F\langle X\rangle$.*
*A álgebra $F\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por $X$ na classe de todas as $F$-álgebras associativas e unitárias. A álgebra $F\langle X\rangle\setminus F$ é livre, livremente gerada por $X$ na classe de todas as $F$-álgebras associativas.*

*Demonstração.* Mostraremos a primeira afirmação, já que a prova da segunda é similar. Seja $A$ uma álgebra associativa unitária e $f : X \to A$ uma aplicação qualquer. Para cada inteiro positivo $i$ (menor ou igual a $|X|$ no caso em que $X$ é finito), denotemos por $a_i$ a imagem de $x_i$ pela $f$. Seja $\varphi : F\langle X\rangle \to A$ definida para cada monômio de $F\langle X\rangle$ por $\varphi(x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}) = a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$ e estendida por linearidade.

A apliacação $\varphi$ assim definida é um homomorfismo de álgebras unitárias. De fato, pela definiçao de $\varphi$, segue que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 1$. Sejam $c, d \in F\langle X\rangle$, então $c = \lambda_1 x_{c_{11}}\cdots x_{c_{1k}} + \cdots + \lambda_n x_{c_{n1}}\cdots x_{c_{nl}} + m.1$ e $d = \mu_1 x_{d_{11}}\cdots x_{d_{1p}} + \cdots + \mu_r x_{d_{r1}}\cdots x_{d_{rq}} + s.1$. Então,

$$\varphi(c+d) = \varphi((\lambda_1 x_{c_{11}}\cdots x_{c_{1k}} + \cdots + \lambda_n x_{c_{n1}}\cdots x_{c_{nl}} + m.1) + (\mu_1 x_{d_{11}}\cdots x_{d_{1p}} + \cdots + \mu_r x_{d_{r1}}\cdots x_{d_{rq}} + s.1)).$$

Como na definiçãode $\varphi$ a estendemos por linearidade, temos

$$\begin{aligned}\varphi(c+d) &= (\lambda_1 a_{c_{11}}\cdots a_{c_{1k}} + \cdots + \lambda_n a_{c_{n1}}\cdots a_{c_{nl}} + m.1) + (\mu_1 a_{d_{11}}\cdots a_{d_{1p}} + \cdots + \mu_r a_{d_{r1}}\cdots a_{d_{rq}} + s.1) \\ &= \varphi(c) + \varphi(d).\end{aligned}$$

e analogamente demonstra-se que $\varphi(cd) = \varphi(c)\varphi(d)$ e $\varphi(\lambda b) = \lambda\varphi(b)$, para quaisquer $c, d \in F\langle X\rangle$ e qualquer $\lambda \in F$.

Logo, $\varphi$ é um homomorfismo de álgebras e, portanto $F\langle X\rangle$ é livre na classe em questão.

□

Agora passaremos à definição do produto tensorial, que será amplamente utilizado ao longo do texto. Sejam $U$ e $V$ $F$-espaços vetoriais. Um **produto tensorial de $U$ por $V$ sobre $F$** é um par formado por um $F$-espaço vetorial $W$ e uma aplicação bilinear $T : U \times V \to W$ satisfazendo a seguinte propriedade universal: dados $W'$ um $F$-espaço vetorial e $T' : U \times V \to W'$ bilinear, existe uma única $S : W \to W'$ linear satisfazendo $ST = T'$. Claramente, o par $(W, T)$ é único a menos de isomorfismo, isto é, se $(W', T')$ é outro produto tensorial de $U$ por $V$, existem $S : W \to W'$ e $S' : W' \to W$ tais que $ST = T'$ e $S'T' = T$. Mas então $S'ST = T$ e $SS'T' = T'$. Assim $SS'$ é a identidade em $W'$ e $S'S$ é a identidade em $W$ e $W \cong W'$. Logo, passamos a dizer **o** produto tensorial de $U$ por $V$ em vez de um produto tensorial e passamos a denotar o mesmo por $U \otimes V$.

Vamos agora construir o produto tensorial dos espaços vetoriais $U$ e $V$. Fixe $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases, respectivamente, para $U$ e $V$ e seja $H$ um conjunto em bijeção com o produto cartesiano $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ e tome $\langle H\rangle$ o $F$-espaço vetorial que tem $H$ como uma base, isto é, $\langle H\rangle$ é formado por combinações lineares formais finitas de elementos de $H$. Defina $T : U \times V \to \langle H\rangle$ dada por $T(b, c) = h_{b,c}$, para quaisquer $b \in \mathcal{B}$ e $c \in \mathcal{C}$, onde $h_{b,c}$ denota a imagem do par $(b, c)$ em $H$ por uma bijeção fixa $f : \mathcal{B}\times\mathcal{C} \to H$; e estendida por bilinearidade para todo $U \times V$. Considere agora $W$ um $F$-espaço vetorial qualquer e $T' : U \times V \to W$ uma aplicação bilinear. Defina $\widetilde{T}' : \langle H \rangle \to W$ por $\widetilde{T}'(h_{b,c}) = T'(b,c)$ e estendida por linearidade a todo $\langle H \rangle$. Como $T$ é bilinear e $\widetilde{T}'$ é linear, claramente $\widetilde{T}'T$ é bilinear. Além disso, como dados $b \in \mathcal{B}$ e $c \in \mathcal{C}$, temos $\widetilde{T}'T(b,c) = \widetilde{T}'(h_{b,c}) = T'(b,c)$, temos que $\widetilde{T}'T = T'$, faltando portanto checar a unicidade de $\widetilde{T}'$, mas de fato, para que uma aplicação linear $S : \langle H \rangle \to W$ satisfaça $ST = T'$ devemos ter $ST(b,c) = T'(b,c)$ para quaisquer $b \in \mathcal{B}$ e $c \in \mathcal{C}$, o que implica $S(h_{b,c}) = T'(b,c)$ e portanto $S$ coincide com $\widetilde{T}'$ em todo o conjunto $H$, que é uma base de $\langle H \rangle$ e, portanto $S = \widetilde{T}'$.

Passamos a denotar o produto tensorial de $U$ por $V$ simplesmente por $U \otimes V$. Da mesma forma a imagem do par $(u,v)$ em $U \otimes V$ pela aplicação bilinear $T'$ por $u \otimes v$. Devido à bilinearidade da $T$, temos as seguintes propriedades dessa notação:

(i) $u \otimes v + u' \otimes v = (u + u') \otimes v$ para quaisquer $u, u' \in U$ e $v \in V$.

(ii) $u \otimes v + u \otimes v' = u \otimes (v + v')$ para quaisquer $u \in U$ e $v, v' \in V$.

(iii) $\lambda(u \otimes v) = (\lambda u) \otimes v = u \otimes (\lambda v)$, para quaisquer $u \in U$, $v \in V$ e $\lambda \in F$.

Além disso, segue da construção feita do produto tensorial, no caso em que $U$ e $V$ possuem dimensão finita temos que

$$\dim_F(U \otimes V) = (\dim_F U)(\dim_F V).$$

No caso em que $U$ e $V$ são $F$-álgebras, podemos definir uma multiplicação em $U \otimes V$ oriunda das multiplicações de $U$ e de $V$ dada por

$$(b \otimes c)(b' \otimes c') = (bb') \otimes (cc'),$$

onde $b, b'$ pertencem a uma base fixa de $U$ e $c, c'$ pertencem a uma base fixa de $V$ e a multiplicação é estendida por linearidade para todo $U \otimes V$.

**Proposição 1.16.** *Sejam $A$, $B$ duas $F$-álgebras ($F$-espaços vetoriais), então $A \otimes B$ é isomorfo a $B \otimes A$ como álgebra (espaço vetorial).*

*Demonstração.* Sendo $\alpha = \{a_1, \dots, a_m \dots\}$ uma base de $A$ e $\beta = \{b_1, \dots, b_n \dots\}$ uma base de $B$, basta considerar $\varphi : A \otimes B \to B \otimes A$ dada por $\varphi(a_i \otimes b_j) = b_j \otimes a_i$, para quaisquer $i, j$ e estendida unicamente por linearidade a todo $A \otimes B$. Então $\varphi$ é claramente um isomorfismo de espaços vetoriais. Para verificar que, no caso de $A$ e $B$ serem álgebras, a multiplicação também é preservada, como a multiplicação distribui sobre a adição, basta verificar que, para quaisquer $a_i, a_k \in \alpha$ e quaisquer $b_j, b_l \in \beta$, $\varphi((a_i \otimes b_j)(a_k \otimes b_l)) = \varphi(a_i \otimes b_j)\varphi(a_k \otimes b_l)$. Temos que

$$a_i a_k = \sum_{t=1}^{m} \lambda_t a_t \text{ e } b_j b_l = \sum_{s=1}^{n} \mu_s b_s.$$

Então

$$\varphi((a_i \otimes b_j)(a_k \otimes b_l)) = \varphi(a_i a_k \otimes b_j b_l) = \varphi\left(\sum_{t,s} \lambda_t \mu_s (a_t \otimes b_s)\right) = \sum_{t,s} \lambda_t \mu_s \varphi(a_t \otimes b_s) = \sum_{t,s} \lambda_t \mu_s (b_s \otimes a_t)$$

$$= \left(\sum_{s=1}^{n} \mu_s b_s\right) \otimes \left(\sum_{t=1}^{m} \lambda_t a_t\right) = b_j b_l \otimes a_i a_k = (b_j \otimes a_i)(b_l \otimes a_k) = \varphi(a_i \otimes b_j)\varphi(a_k \otimes b_l).$$

□

Outra propriedade importante do produto tensorial é que ele permite ampliar o corpo de escalares com o qual trabalhamos da seguinte maneira: seja $A$ uma $F$-álgebra e seja $K$ um corpo que estende $F$. Definimos a multiplicação de elementos de $A \otimes K$ por elementos de $K$ da seguinte maneira:

$$\lambda_1(a \otimes \lambda_2) = a \otimes (\lambda_1 \lambda_2),$$

para quaisquer $\lambda_1, \lambda_2 \in K$, $a \in A$ e estendida por linearidade para todo $A \otimes K$.

O seguinte resultado é amplamente usado ao longo do texto.

**Proposição 1.17.** *Sejam $F$ um corpo e $A$ uma $F$-álgebra. Então as $F$-álgebras $M_n(F) \otimes A$ e $M_n(A)$ são isomorfas.*

*Demonstração.* Considere a base canônica de $M_n(F)$ formada pelas matrizes unitárias $e_{ij}$ cuja entrada $(i, j)$ é 1 e as demais entradas são nulas e seja $\mathcal{C}$ uma base de $A$ como $F$-espaço vetorial. Defina $\varphi : M_n(F) \otimes A \to M_n(A)$ por $e_{ij} \otimes c \mapsto ce_{ij}$, para todo $c \in \mathcal{C}$ e estendida por linearidade a todo o produto tensorial. Cálculos simples mostram que trata-se de um homomorfismo de álgebras. Note que o mesmo é sobrejetor, pois qualquer que seja a matriz $(a_{ij}) \in M_n(A)$, ela é imagem de

$$\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}.$$

E ela também é injetora, pois $\varphi\left(\sum_{i,j} e_{ij} \otimes a_{ij}\right) = 0$ implica $a_{ij} = 0$, para todo par $(i, j)$ e, como todo elemento de $M_n(F) \otimes A$ pode ser escrito como uma soma desse tipo, a injetividade segue. $\square$

## 1.3 Álgebras com identidades polinomiais

A fim de evitar repetições desnecessárias, ao longo do restante do texto, exceto quando explicitado o contrário, $F$ denotará um corpo, $A$ uma $F$-álgebra associativa e $G$ um grupo abeliano com notação aditiva. Além disso, todas as álgebras consideradas por nós serão unitárias e grande parte do que fazemos aqui pode ser generalizado para uma álgebra qualquer tomando-se os devidos cuidados. Assim, trataremos a álgebra $F\langle X\rangle$ simplesmente por álgebra livre, ficando subentendido que é livre na classe de todas as álgebras unitárias.

**Definição 1.18.** *Seja $A$ uma $F$-álgebra. Dizemos que $A$ é uma* ***álgebra*** *com identidade polinomial ou simplesmente uma* ***PI-álgebra****, se existir um polinômio não-nulo $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ de modo que, para qualquer homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$, temos que $p(x_1, \ldots, x_n) \in Ker\varphi$. Nesse caso, dizemos que a álgebra $A$ satisfaz o polinômio $p$.*

Uma maneira menos formal, porém muito mais prática, é dizer que, qualquer substituição das variáveis do polinômio $p$ por quaisquer elementos da álgebra $A$ anula o polinômio em $A$, uma vez que cada tal substituição gera uma aplicação $f : X \to A$ que se estende a um homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$.

**Exemplo 1.19.** *Toda $F$-álgebra comutativa é uma PI-álgebra, já que satisfaz $x_1x_2 - x_2x_1$.*

*De fato, seja $\varphi : F\langle X\rangle \to A$ um homomorfismo e sejam $a_1$ e $a_2$, imagens de $x_1$ e $x_2$, respectivamente, daí*

$$\varphi(x_1x_2 - x_2x_1) = a_1a_2 - a_2a_1 = a_1a_2 - a_1a_2 = 0.$$

**Definição 1.20.** *Um polinômio* $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ *é chamado de* ***homogêneo*** *se o grau total de cada um de seus monômios é constante. O polinômio* $p$ *é chamado de* ***multi-homogêneo de multigrau*** $(k_1, \ldots, k_n)$ *se, em todos os monômios que constituem* $p$*, e para todo* $j$ *entre 1 e* $n$*, a variável* $x_j$ *tem grau* $k_j$*. Um polinômio multi-homogêneo de multi-grau* $(1, 1, \ldots, 1)$ *é chamado de* ***multilinear****.*

Quando o polinômio é multilinear e se anula quando suas variáveis são substituídas por quaisquer elementos de uma base da álgebra $A$, então $A$ satisfaz $p$, justamente porque ele é multilinear no sentido em que é linear com respeito a cada uma de suas entradas. Em outras palavras, se $p(x_1, \ldots, x_n)$ é multilinear e fazemos uma substituição $x_1 \mapsto a_1 + \lambda b$, $x_i \mapsto a_i$ se $2 \leq i \leq n$, onde $b$ e os $a_i$ pertencem a uma álgebra $A$ dada e $\lambda \in F$, temos $p(a_1 + \lambda b, a_2, \ldots, a_n) = p(a_1, \ldots, a_n) + \lambda p(b, a_2, \ldots, a_n)$ e o mesmo ocorre nas outras variáveis. Seja $m(x_1, \ldots, x_n) = \alpha x_{j_1} \ldots x_{j_{k-1}} x_1 x_{j_{k+1}} \ldots x_{j_n}$ uma parcela monomial do polinômio multilinear $p$ onde $\{j_1, \ldots, j_{k-1}, j_{k+1}, \ldots j_n\} = \{2, 3, \ldots, n\}$. Repare que

$$m(a_1 + \lambda b, a_2, \ldots, a_n) = \alpha a_{j_1} \ldots a_{j_{k-1}} (a_1 + \lambda b) a_{j_{k+1}} \ldots a_{j_n} =$$

$$\alpha a_{j_1} \ldots a_{j_{k-1}} a_1 a_{j_{k+1}} \ldots a_{j_n} + \alpha\lambda a_{j_1} \ldots a_{j_{k-1}} b a_{j_{k+1}} \ldots a_{j_n} = m(a_1, \ldots, a_n) + \lambda m(b, a_2, \ldots, a_n)$$

e, como cada parcela monomial se comporta dessa maneira,

$$p(a_1 + \lambda b, a_2, \ldots, a_n) = p(a_1, \ldots, a_n) + \lambda p(b, a_2, \ldots, a_n)$$

e o mesmo argumento pode ser aplicado às outras entradas de $p$. Mas, dada qualquer substituição $x_i \mapsto a_i$ das variáveis por elementos de uma álgebra $A$, e dada uma base $\mathcal{B}$ de $A$ como espaço vetorial, existem $c_1, \ldots, c_k \in \mathcal{B}$ tais que

$$a_i = \sum_{j=1}^{k} \beta_{ij} c_j.$$

Assim, temos que

$$p(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{(t_1, \ldots, t_n) \in I_k \times \ldots \times I_k} \beta_{1,t_1} \ldots \beta_{n,t_n} p(c_{t_1}, \ldots, c_{t_n}),$$

onde $I_k = \{1, 2, \ldots, k\}$. Agora, se assumimos que o polinômio $p$ se anula mediante quaisquer substituições das variáveis por elementos de $\mathcal{B}$, então cada parcela no segundo membro da equação acima se anula e $p(a_1, \ldots, a_n) = 0$.

**Proposição 1.21.** *Toda* $F$*-álgebra* $A$ *de dimensão finita* $n$ *satisfaz o polinômio standard*

$$s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma \in S_{n+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n+1)},$$

*onde* $\mathrm{sgn}(\sigma)$ *denota o sinal da permutação* $\sigma \in S_n$*, isto é* $\mathrm{sgn}(\sigma) = 1$ *se a permutação* $\sigma$ *é par e* $\mathrm{sgn}(\sigma) = -1$ *se a permutação* $\sigma$ *é ímpar.*

*Demonstração.* Como o polinômio em questão é multilinear, basta verificar que o mesmo se anula para elementos numa base $\beta$ de $A$. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma tal base, então ao substituirmos cada $x_i$ por um elemento de $\beta$, algum $v_j$ aparecerá pelo menos duas vezes em cada monômio. Denotemos por $x_{i_1}$ e $x_{i_2}$ duas variáveis substituídas pelo mesmo $v_j$. Então, para cada $\sigma \in S_{n+1}$ par, os monômios associados às permutações $\sigma$ e $(i_1 i_2)\sigma$ fornecem o mesmo elemento de $A$ com o sinal trocado, logo a soma de tais parcelas se anula, e $s_{n+1}(v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n+1}}) = 0$ se $v_{j_1}, \ldots, v_{j_{n+1}} \in \beta$ e, portanto, $A$ satisfaz $s_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$.

□

Para quaisquer polinômios $p, q \in F\langle X\rangle$ denotamos por $[p, q]$ o polinômio $pq - qp$.

**Proposição 1.22.** *A álgebra de Grassmann $E$ satisfaz $[[x_1, x_2], x_3]$.*

*Demonstração.* Como o polinômio em questão é multilinear, basta verificar que o mesmo se anula para os elementos $v_j$ da base $\beta = \{e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} | k \geq 1;\ i_1 < i_2 < \ldots < i_k\} \cup \{1\}$, onde $e_i$ é o $i$-ésimo elemento da base enumerável do espaço vetorial $V$. Se $x_1$ ou $x_2$ é substituído por um elemento de comprimento par, como o mesmo está em $E^{(0)} \subseteq Z(E)$, temos que $[v_1, v_2]$(e consequentemente $[[v_1, v_2], v_3]$) é igual a zero. Por outro lado, se ambos, $v_1$ e $v_2$, possuem comprimento ímpar, $v_1 v_2$ e $v_2 v_1$ possuem, ambos, comprimento par, estando $[v_1, v_2]$ em $E^{(0)}$. Como $E^{(0)}$ está contido no centro de $E$, $[[v_1, v_2], v_3] = 0$.

□

Seja $A$ uma PI-álgebra. Denotamos por $T(A) \subset F\langle X\rangle$ o conjunto de todos os polinômios satisfeitos por $A$.

**Proposição 1.23.** *Seja $A$ uma PI-álgebra. Então $T(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$.*

*Demonstração.* A verificação de que $T(A)$ é um ideal é simples, de fato, $0 \in T(A)$, pois $\varphi(0) = 0$, para todo $\varphi$ homomorfismo; se $p, q \in T(A)$, temos $\varphi(p - q) = \varphi(p) - \varphi(q) = 0 - 0 = 0$, para todo $\varphi$ homomorfismo; e seja $p \in T(A)$ e $q \in F\langle X\rangle$, temos $\varphi(p.q) = \varphi(p).\varphi(q) = 0$ e $\varphi(q.p) = \varphi(q)\varphi(p) = 0$, para todo $\varphi$ homomorfismo; portanto $T(A)$ é um ideal de $F\langle X\rangle$. Verifiquemos pois que $T(A)$ é fechado por endomorfismos. Ora, $p \in T(A)$ se, e somente se, $p \in Ker\psi$, para qualquer homomorfismo $\psi : F\langle X\rangle \to A$. Em particular, sendo $\varphi$ um endomorfismo de $F\langle X\rangle$, $p$ pertence a $Ker(\psi \circ \varphi)$, para qualquer homomorfismo $\psi : F\langle X\rangle \to A$. Logo $\varphi(p) \in Ker\psi$ para qualquer $\psi$ e $\varphi(p) \in T(A)$.

□

Dizemos que duas álgebras $A$ e $B$ são **PI-equivalentes** se $T(A) = T(B)$.

Seja $I$ um conjunto de índices indexando elementos $p_i \in F\langle X\rangle$. Denotemos por $J$ o T-ideal $\langle p_i : i \in I\rangle^T$ de $F\langle X\rangle$ e seja $\beta$ a classe de todas as álgebras que satisfazem todos os polinômios de $J$ (podendo satisfazer mais polinômios), em outras palavras, $A \in \beta$ se $J \subset T(A)$. A classe de álgebras $\beta$ é chamada de **variedade de álgebras determinada pelas identidades** $\{p_i : i \in I\}$.

**Definição 1.24.** *Seja $\beta$ uma variedade de álgebras. Uma álgebra é chamada relativamente livre na variedade $\beta$ (livremente gerada por um conjunto $X$), denotada por $L_X(\beta)$, se é livre na classe $\beta$ e livremente gerada por $X$. Lembrando que dizemos que $A$ é livre livremente gerada por $X$ na classe $\beta$ se, para qualquer $B \in \beta$ e qualquer aplicação $f : X \to B$, existir um homomorfismo $\varphi : A \to B$ que estende $f$, isto é, o diagrama comuta*

$$\begin{array}{ccc} X & \to^f & B \\ \downarrow^i & \nearrow^{\varphi} & \\ A & & \end{array}$$

*onde $i$ denota a inclusão de $X$ em $A$. Ou seja $f = \varphi \circ i$.*

**Exemplo 1.25.** *Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ um conjunto enumerável (possivelmente finito). A álgebra $F[X]$, que tem por base $\{1\}$ unido com o conjunto formado por todos os monômios $x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}, k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_k \leq |X|$ com a multiplicação entre os monômios $x_{j_1}\ldots x_{j_k}$ e $x_{i_1}\ldots x_{i_l}$ dado por $x_{n_1}x_{n_2}\ldots x_{n_{k+l}}$, no qual os índices $n_1, \ldots, n_{k+l}$ são a reordenação dos índices $i_1, \ldots, i_l, j_1, \ldots, j_k$ de modo que $n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_{k+l}$ (ou seja, as variáveis comutam) é relativamente livre na variedade determinada pelo polinômio $[x_1, x_2]$.*

*O fato de que tal álgebra é relativamente livre na variedade determinada por $[x_1, x_2]$ segue do teorema seguinte com o fato de que $F[X] = F\langle X\rangle/\langle[x_1, x_2]\rangle^T$.*

**Teorema 1.26.** *Seja $\beta$ uma variedade definida por um conjunto de polinômios $\{p_i : i \in I\} \subset F\langle X\rangle$. Seja $J$ o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por tal família de polinômios. Então a álgebra $F\langle X\rangle/J$ é relativamente livre na variedade $\beta$. Além disso, álgebras relativamente livres numa mesma variedade e com mesmo posto são isomorfas.*

*Demonstração.* Claramente $F\langle X\rangle/J \in \beta$. Denotemos por $\bar{X}$ a imagem do conjunto $X$ pela projeção canônica $\pi : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle/J$, sendo $\bar{x}_i \in \bar{X}$ a imagem de $x_i$ pela $\pi$. Sejam $A \in \beta$, $\bar{f} : \bar{X} \to A$ uma aplicação e $f : X \to A$ dada por $f = \bar{f} \circ \pi$. Como $F\langle X\rangle$ é a álgebra livre, existe um homomorfismo $\psi : F\langle X\rangle \to A$ de modo que $\psi|_X = f$, em outras palavras, o diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} F\langle X\rangle & \to^{\psi} & A \\ \downarrow^{\pi} & \nearrow^{\bar{f}} & \\ F\langle X\rangle/J & & \end{array}$$

O homomorfismo $\bar{\psi} : F\langle X\rangle/J \to A$ que naturalmente estenderia $\bar{f}$ seria dado por $\bar{\psi}(\pi(p)) = \psi(p)$, mas note que tal aplicação só está bem definida se $\pi(p) = \pi(q)$ (e isto é $p - q \in Ker\pi$) implicar $\psi(p) = \psi(q)$, o que ocorre se, e somente se, $p - q \in Ker\psi$. Ou seja, $Ker\pi$ deve estar contido em $Ker\psi$, mas $Ker\pi = J$ e como $A \subset \beta$, $J \subset T(A) \subset Ker\psi$. Portanto tal aplicação $\bar{\psi}$ está bem definida e como $\psi$ é homomorfismo, $\bar{\psi}$ também será.

Por fim, vamos mostrar que se $|X| = |Y|$ então $L_X(\beta) \simeq L_Y(\beta)$. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então existem homomorfismos $\varphi : L_X(\beta) \to L_Y(\beta)$ e $\psi : L_Y(\beta) \to L_X(\beta)$ que estendem, respectivamente, $f$ e $f^{-1}$. Mas então todo elemento de $X$ é deixado fixo por $\psi\circ\varphi$, o mesmo ocorrendo com os elementos de $Y$ para $\varphi \circ \psi$; e, como $X$ gera $L_X(\beta)$ e $Y$ gera $L_Y(\beta)$, temos $\psi \circ \varphi = Id_{L_X(\beta)}$ e $\varphi \circ \psi = Id_{L_Y(\beta)}$, de onde segue que $\psi$ e $\varphi$ são isomorfismos, sendo um o inverso do outro. Portanto $L_X(\beta) \cong L_Y(\beta)$.

□

Muitas vezes é difícil trabalhar com as identidades polinomiais de uma álgebra, convindo utilizar tipos mais fracos de identidades polinomiais, mas que sejam mais fáceis de serem manipuladas. É o caso das identidades com traço, polinômios centrais, das identidades com involução e das identidades graduadas por exemplo. Aqui falaremos somente das identidades graduadas.

Para tanto, primeiro definimos a álgebra $G$-graduada livre $F\langle X\rangle_G$. Para cada $g \in G$ tomamos um conjunto $X^{(g)} = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \ldots, x_n^{(g)}, \ldots\}$ enumerável e definimos $X := \cup_{g\in G}X^{(g)}$. Note que $F\langle X\rangle$ é $G$-graduada se considerarmos $F\langle X\rangle^{(g)}$ o subespaço gerado por todos os monômios $x_{i_1}^{(g_1)}x_{i2}^{(g_2)}\ldots x_{i_k}^{(g_k)}$, $k \in \mathbb{N}$ de modo que $g_1 + g_2 + \ldots + g_k = g$. No caso particular de $X^{(0)}$ acrescentamos o 1 à sua base. Usando um argumento similar ao utilizado na demonstração de que $F\langle X\rangle$

é livre, livremente gerada por $X$ na classe de todas as $F$-álgebras associativas e unitárias, mostra-se que $F\langle X\rangle$, com tal graduação, é $G$-livre na variedade de todas as álgebras $G$-graduadas, isto é, dada uma álgebra $G$-graduada $A$, e uma aplicação $f : X \to A$ que, para todo $g \in G$, manda $x_i^{(g)}$ para algum elemento de $A^{(g)}$, existe um homomorfismo $\varphi : F\langle X\rangle \to A$, $G$-graduado (isto é, tal que $\varphi(F\langle X\rangle^{(g)}) \subset A^{(g)}$, para todo $g \in G$), que estende $f$. A fim de diferenciar a álgebra livre da álgebra $G$-graduada livre, denotamos esta última por $F\langle X\rangle_G$.

**Definição 1.27.** *Seja $A$ uma PI-álgebra $G$-graduada. Dizemos que o polinômio graduado não-nulo $p \in F\langle X\rangle_G$ é uma identidade polinomial $G$-graduada de $A$ se $p$ pertence a $Ker\varphi$ para qualquer homomorfismo graduado $\varphi : F\langle X\rangle_G \to A$.*

Outra maneira mais prática é dizer que $p(x_1^{(g_1)}, \ldots, x_m^{(g_m)})$ é identidade graduada de $A$ se o mesmo sempre se anula ao substituirmos cada variável $x_i^{(g_i)}$ de $p$ por qualquer elemento de $A^{(g_i)}$. O conjunto de todas as identidades polinomiais $G$-graduadas satisfeitas por uma álgebra $A$ é denotado por $T_G(A)$ que, analogamente ao que ocorre no caso das identidades ordinárias, é um T-ideal $G$-graduado de $F\langle X\rangle_G$, isto é, $T_G(A)$ é invariante por endomorfismos $G$-graduados de $F\langle X\rangle_G$. O conceito de álgebra relativamente livre também se estende para o caso graduado de maneira natural.

Em geral, é mais fácil determinar um conjunto de identidades geradoras do T-ideal graduado de uma álgebra do que um conjunto de geradores do T-ideal de identidades ordinárias.

**Exemplo 1.28.** *A álgebra de Grassmann $E$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada ($E = E^{(0)} \oplus E^{(1)}$). Considerando tal $\mathbb{Z}_2$-graduação, $E$ satisfaz as seguintes identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$.*

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}];\ [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}];\ x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$$

*Acima, $x \circ y$ é usado para denotar $xy + yx$.*

A afirmação acima segue da relação de comutatividade e anticomutatividade dos elementos de $E^{(0)}$ e $E^{(1)}$.

Mais adiante veremos que, quando $E$ é considerado sobre um corpo infinito, essas três identidades geram o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $E$.

Uma das vantagens de se trabalhar com as identidades graduadas é que elas podem fornecer alguma informação sobre o T-ideal de identidades ordinárias de uma álgebra. O teorema seguinte serve para ilustrar como isso acontece.

**Teorema 1.29.** *Sejam $A$ e $B$ duas PI-álgebras $G$-graduadas. Se $T_G(A) \subset T_G(B)$, então $T(A) \subset T(B)$. Em particular, se $T_G(A) = T_G(B)$,então $A$ e $B$ são PI-equivalentes.*

*Demonstração.* Considere $F\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, com $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ e $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in T(A)$. Sejam $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$, tome $b_{i_g} \in B^{(g)}$, para $i = 1, \cdots, n$ e $g \in G$, de maneira que $b_i = \sum_{g\in G} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g} \neq 0$, tome $x_i^{(g)} \in X^{(g)}$ e considere o polinômio $f_1 = f\Big(\sum_{g\in G} x_1^{(g)}, \cdots, \sum_{g\in G} x_n^{(g)}\Big) \in F\langle X\rangle_G$. Visto que $f \in T(A)$, segue que $f_1 \in T_G(A)$ e, por hipótese, temos $f_1 \in T_G(B)$. Substituindo $x_i^{(g)} = b_{i_g}$, para $i = 1, \cdots, n$ e $g \in G$, obtemos

$$f(b_1, b_2, \cdots, b_n) = f\Big(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \sum_{g\in G} b_{2_g}, \cdots, \sum_{g\in G} b_{n_g}\Big) = 0,$$

ou seja, $f \in T(B)$.

□

## 1.4 Geradores dos T-ideais

Um tipo de problema comum, e geralmente bastante difícil, no estudo de PI-álgebras é determinar um conjunto de identidades polinomiais que geram o T-ideal de uma determinada álgebra. Nosso intuito nessa seção é apresentar algumas propriedades dos T-ideais de identidades polinomiais a fim de encontrar um conjunto gerador "bem comportado" para o mesmo.

**Lema 1.30.** *Seja $F$ infinito e seja $p(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ um polinômio escrito como $p = p_0 + \ldots + p_k$, onde cada parcela $p_j$ é homogênea com respeito à variável $x_1$ com grau $j$ (consideramos que o polinômio nulo é homogêneo em $x_1$ de qualquer grau). Se $p \in J$, sendo $J$ um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então cada $p_j \in J$.*

*Demonstração.* Como $F$ é infinito, existem $\lambda_0, \ldots, \lambda_k \in F$ dois a dois distintos e não-nulos. Para cada inteiro $j$ entre 0 e $k$ denotamos por $\varphi_j$ o endomorfismo de $F\langle X\rangle$ obtido a partir da aplicação $f_j : X \to F\langle X\rangle$ tal que $x_1 \mapsto \lambda_j x_1$ e $x_m \mapsto x_m$ se $m > 1$. Como $J$ é um T-ideal, $\varphi_j(p) \in J$, para cada $j$, ou seja, $\overline{\varphi_j(p)} = \bar{0}$ em $F\langle X\rangle/J$. Por outro lado, note que $\overline{\varphi_j(p)} = \bar{p_0} + \lambda_j \bar{p_1} + \ldots + \lambda_j^k \bar{p_k}$. Isso nos fornece que $(\bar{p_0}, \ldots, \bar{p_k})$ é solução do seguinte sistema linear homogêneo seguinte nas variáveis $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_k$ assumindo valores em $F\langle X\rangle/J$.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} \xi_0 & + & \lambda_0\xi_1 & + & \cdots & + & \lambda_0^k\xi_k & = & \bar{0} \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ \xi_0 & + & \lambda_k\xi_1 & + & \cdots & + & \lambda_k^k\xi_k & = & \bar{0} \end{array}\right.$$

Mas a matriz do sistema é a matriz de Vandermonde nos escalares $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ cujo determinante é $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$. Uma vez que tomamos os $\lambda_j$ dois a dois distintos, tal determinante é não-nulo, portanto tal sistema só deve admitir a solução trivial, de onde segue que $\bar{p_j} = \bar{0}$ para todo $j$ entre 0 e $k$, ou seja, cada $p_j \in J$.

□

Embora tenhamos suposto $F$ infinito, repare que utilizamos apenas o fato de $F$ possuir $k+1$ escalares dois a dois distintos, sendo $k$ o grau com que $x_1$ aparece em $p$, logo o mesmo se aplica se $|F|$ maior que o grau de $x_1$ em $p$.

Aplicando indução e o argumento utilizado anteriormente, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.31.** *Seja $F$ infinito e $J$ um T-ideal de $F\langle X\rangle$. O polinômio $p(x_1, \ldots, x_n) \in J$ se, e somente se, cada uma de suas componentes multi-homogêneas pertence a $J$.*

**Exemplo 1.32.** *Tomemos por exemplo o caso do polinômio $p(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_1x_3 - x_2^2x_1 + x_2x_3x_1^2 + 2x_1x_2x_3^2 \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$. Aplicando o lema anterior, temos que $p$ pertence a um T-ideal se, e somente se,* *ambos os polinômios $q_1 = x_1x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1^2$ e $q = -x_2^2x_1 + 2x_1x_2x_3^2$ pertencem a $J$, sendo que o primeiro é multi-homogêneo. Agora, aplicando o mesmo raciocínio utilizado para a variável $x_1$, para a variável $x_2$ no segundo polinômio, temos que ambos $q_2 = -x_2^2x_1$ e $q_3 = 2x_1x_2x_3^2$ devem pertencer a $J$. Em particular, o T-ideal gerado por $p$ é tambem $\langle q_1, q_2, q_3\rangle^T$.*

Outra consequência do Lema 1.30 é o seguinte teorema.

**Teorema 1.33.** *Todo T-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por uma PI-álgebra $A$ sobre um corpo infinito é gerado pelas identidades multi-homogêneas satisfeitas por essa álgebra.*

*Demonstração.* Segue direto do corolário anterior, pois seja $p \in J$ um gerador de $J$ como T-ideal, então cada uma de suas componentes multi-homogêneas pertence a $J$ então podemos substituir $p$ por suas componentes no conjunto gerador de $J$. □

Quando investigamos o T-ideal de identidades satisfeitas por uma álgebra $A$, é importante procurar pelas identidades de menor grau total satisfeitas por tal álgebra, já que dentre elas se encontrarão certamente alguns geradores de $T(A)$. A proposição seguinte nos garante que basta procurar entre as identidades multilineares.

**Proposição 1.34.** *Seja $A$ uma $F$-álgebra que satisfaz um polinômio $p \in F\langle X\rangle$ de grau total $d$. Então existe $q \in T(A)$ multilinear e de grau $d$.*

*Demonstração.* Suponha que o grau de $x_1$ em $p$ é maior do que 1. É claro que se $p(x_1, \dots, x_m) \in T(A)$, então $q(x_1, x_2, \dots, x_{m+1})$ dado por

$$q(x_1, x_2, \dots, x_{m+1}) = p(x_1 + x_2, x_3, x_4, \dots, x_{m+1}) - p(x_1, x_3, \dots, x_{m+1}) - p(x_2, x_3, \dots, x_{m+1}) \neq 0$$

pertence a $T(A)$, possui mesmo grau total $d$ e o grau de $x_1$ diminui em 1 com relação ao seu grau em $p$. O polinômio $q$ assim obtido é não nulo, pois o grau de $p$ na primeira variável e maior que 1. Repete-se o procedimento até obter o grau de $x_1$ sendo 1. Uma vez conseguido isso, repete-se o processo para as outras variáveis até obter um polinômio multilinear.

□

O processo descrito na demonstração anterior é chamado processo de linearização de um polinômio $p$. O exemplo a seguir ilustra a aplicação de tal processo.

**Exemplo 1.35.** *Suponhamos que $x_1^3$, pertence a $T(A)$, então substituindo-se a variável $x_1$ por $x_1+x_2$ devemos obter ainda uma identidade de $T(A)$. Assim*

$$x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2x_1 + x_2x_1^2 + x_2^2x_1 + x_2x_1x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 \in T(A),$$

*porém, como $x_1^3$ e $x_2^3$ pertencem ambos a $T(A)$, temos que $p(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2x_1 + x_2x_1^2 + x_2^2x_1 + x_2x_1x_2 + x_1x_2^2$ deve igualmente pertencer a $T(A)$. Aplicando novamente o processo de linearização, concluímos que o polinômio multilinear*

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1 \in T(A).$$

**Observação 1.36.** *Uma consequência importante dessa proposição é que $M_n(F)$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau $k \leq 2n-1$. Vamos verificar para $k = 2n-1$ primeiramente. Seja $e_{ij}$ a matriz de $M_n(F)$ tal como definida na demonstração da Proposição 1.17. Seja $p(x_1, \ldots, x_{2n-1})$ um polinômio multilinear não nulo, podemos supor, sem perda de generalidade, que o monômio $x_1x_2 \ldots x_{2n-1}$ possui coeficiente não nulo $\lambda$ em $p$. Substituindo-se a variável $x_i$ por $e_{\frac{i+1}{2}, \frac{i+1}{2}}$, se $i$ é ímpar; e por $e_{\frac{i}{2}, \frac{i}{2}+1}$ se $i$ é par; temos que o único monômio que não se anula mediante tal substituição é aquele correspondente a $x_1x_2 \ldots x_{2n-1}$ e, portanto, se $p$ é avaliado mediante tal substituição, resulta em $\lambda \neq 0$. Para $k < 2n-1$, aplica-se a mesma substituição, limitada claramente por $k$.*

O mesmo argumento utilizado na observação anterior pode ser aplicado para se mostrar que para um $F$-espaço vetorial $V$ de dimensão infinita, tanto a álgebra $L_V := \{T : V \to V : T \text{ é linear}\}$ bem como sua subálgebra $B := \{T \in L_V | \text{ com } dim\ Im(T) < \infty\}$ (a multiplicação sendo dada pela composição) não são PI-álgebras. Fixada uma base $\beta$ de $V$ e tomado um subconjunto infinito enumerável $\{v_1, \ldots, v_n, \ldots\} \subset \beta$, para cada par de inteiros $i, j$ denotamos por $S_{ij}$ o operador linear de $V$ que envia $v_j$ para $v_i$ e envia para o vetor nulo todos os demais elementos de $\beta$. Tal como ocorre com as matrizes $e_{ij}$, $S_{ij}S_{kl} = 0$ se $j \neq k$ e $S_{ij}S_{jl} = S_{il}$. Repare que podemos proceder tal como na observação anterior, sem nos preocuparmos com um limite para o grau do polinômio, e portanto, $L_V$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial, o mesmo valendo para subálgebra $B$, já que todos os $S_{ij}$ pertencem a $B$.

A próxima questão a ser investigada é: sob que condições podemos garantir que uma identidade polinomial $p$ pertence ao T-ideal gerado pelos polinômios multilineares obtido no processo de linearização de $p$?

**Teorema 1.37.** *Sejam $F$ um corpo de característica zero e $p(x_1, \ldots, x_m) \in F\langle X\rangle$. O T-ideal $\langle p\rangle^T$ de $F\langle X\rangle$ é gerado pelos polinômios multilineares de $F\langle X\rangle$ obtidos no processo de linearização de cada uma das componentes multi-homogêmeas de $p$.*

*Demonstração.* Seja $p(x_1, \ldots, x_m) \in T(A)$ . Como $F$ possui característica zero, é infinito e, portanto, pelo Teroema 1.33, $\langle p\rangle^T = \langle p_1, \ldots, p_k\rangle^T$, onde os $p_j$'s são as componentes multi-homogêneas de $p$. Então podemos nos ater ao caso em que $p(x_1, \ldots, x_m)$ é multi-homogêneo. Após o primeiro passo do processo de linearização do polinômio $p$, obtemos um polinômio $q(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{m+1})$ de mesmo grau total, cujas componentes multi-homogêneas possuem grau menor com relação a primeira variável de grau maior do que 1. Logicamente o polinômio assim obtido pertence a $< p >^T$, mas se fizermos no polinômio $q$ a substituição dada por $x_1 \mapsto x_1$, e $x_i \mapsto x_{i-1}$, para $2 \leq i \leq m+1$, obtemos $n.p(x_1, \ldots, x_m)$, onde $n$ é o número de parcelas de $q$, ou seja $np \in \langle q\rangle^T$. Como $charF = 0$, $p \in \langle q\rangle^T$. Como $F$ é infinito, $q$ é consequência de suas componentes multi-homogêneas (possível algumas multilineares). Para aquelas que não são multilineares, repete-se o processo de linearização e o raciocínio anterior até obtermos um sistema de identidades multilineares geradoras do T-ideal gerado por $p$. □

Os resultados demonstrados nessa seção se estendem para as identidades graduadas. Isto é, se o corpo-base da álgebra é infinito, o T-ideal graduado da álgebra é gerado pelas identidades graduadas multi-homogêneas, e se $charF = 0$, o T-ideal graduado é gerado pelas identidades graduadas multilineares.

Como aplicação dos resultados aqui apresentados, demonstramos que as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra de Grassmann $E$ listadas anteriormente geram o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de identidades de $F$ quando a álgebra é tomada sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Comecemos por um lema.

**Lema 1.38.** *Seja $J$ o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ gerado pelos polinômios $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}]$ e $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$, e considere um monômio graduado $m(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_l^{(1)}) \in F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$, no qual, para cada $1 \leq i \leq k$; a variável $x_i^{(0)}$ possui grau $a_i$ e, para cada $j$; $1 \leq j \leq l$, a variável $x_j^{(1)}$ possui grau $b_j$. Então se algum $b_j > 1$, $\bar{m} = \bar{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$; caso contrário (isto é, $b_j = 1$ para todo $j$) temos*

$$\bar{m} = \pm\overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \ldots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \ldots x_l^{(1)}} \text{ em } F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J.$$

*Demonstração.* Pelos dois primeiros polinômios geradores de $J$, temos que, em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$, $\overline{x_2 x_1^{(0)}} = \overline{x_1^{(0)} x_2}$, independente do $\mathbb{Z}_2$-grau de $x_2$. Disso segue que

$$\bar{m} = \overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \ldots (x_k^{(0)})^{a_k} m'},$$

onde $m'$ é um monômio envolvendo somente as variáveis ímpares. Utilizando agora o terceiro polinômio gerador de $J$, temos que $\overline{x_2^{(1)} x_1^{(1)}} = -\overline{x_1^{(1)} x_2^{(1)}}$. Assim , a menos de sinal, podemos colocar as variáveis ímpares também em ordem crescente de índices em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$. No entanto, se uma variável ímpar, por exemplo $x_1^{(1)}$, aparece mais de uma vez, temos um fator $(x_1^{(1)})^2$ dentro de $\bar{m}$. Mas $char F \neq 2$ e, pelo terceiro polinômio gerador de $J$, temos $\overline{2(x_1^{(1)})^2} = \bar{0}$ e portanto $\overline{(x_1^{(1)})^2} = \bar{0}$. Caso contrário, tal como queríamos, obtemos

$$\bar{m} = \pm\overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \ldots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \ldots x_l^{(1)}}.$$

□

**Proposição 1.39.** *Os polinômios $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}]$ e $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)} \in F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ geram o T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas satisfeitas por $E$ com a graduação natural definida anteriormente (a partir da paridade do monômio), se $F$ é infinito de característica diferente de 2.*

*Demonstração.* Denotemos por $J$ o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ gerado pelas três identidades listadas no enunciado da proposição, e por $I$ o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de polinômios graduados satisfeitos por $E$. Como $E$ satisfaz tais polinômios, temos que $J \subset I$ e, portanto, precisamos mostrar que $I \subset J$; ou equivalentemente, que se $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$ então $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$.

Como $F$ é infinito, $I$ é gerado pelas identidades graduadas multi-homogêneas satisfeitas por $I$, bastando analisar o caso em que $p$ é multi-homogêneo. Suponhamos então que o polinômio $p(x_1^{(0)}, \ldots, x_k^{(0)}, x_1^{(1)}, \ldots, x_l^{(1)})$ é multi-homogêneo de multi-grau $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$. Então $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j$, sendo $n$ o número de parcelas de $p$ e tendo cada $m_j$ multi-grau $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_l)$. Pelo lema anterior, se algum $b_j > 1$, então $\overline{p} = \overline{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$. Suponhamos então que todos os $b_j$'s sejam iguais a 1. Então cada $m_j$ é igual a $\pm(x_1^{(0)})^{a_1} \ldots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \ldots x_l^{(1)}$ módulo $J$ e, portanto,

$$\overline{p} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j (x_1^{(0)})^{a_1} \ldots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \ldots x_l^{(1)}} \text{ em } F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J,$$

onde cada $\beta_j = \pm\alpha_j$, dependendo da paridade do número de transposições necessárias entre as variáveis ímpares para colocar as variáveis na ordem desejada. Se o coeficiente obtido é nulo, temos que $\overline{p} = \overline{0}$. Suponhamos então que $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = \gamma \neq 0$ (e portanto $p \neq \overline{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$), vamos mostrar que $\overline{p} \neq \overline{0}$ tambem em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$. Note que ao substituirmos todas as variáveis pares por 1 e cada variável $x_j^{(1)}$ por $e_j$, temos que $p(1,\ldots,1,e_1,\ldots,e_l) = \gamma e_1 \ldots e_l \neq 0$ em $E$ e portanto $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $F\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$.

□

Seja $F$ um corpo de característica zero. O fato de as identidades polinomiais satisfeitas por uma $F$-álgebra $A$ serem determinadas a partir das identidades multilineares satisfeitas por essa álgebra motiva o estudo dos espaços vetoriais $P_n \cap T(A)$ e $P_n(A) = P_n/(P_n \cap T(A))$, onde

$$P_n = \{p \in F\langle X\rangle : p \text{ é multilinear nas variáveis } x_1,\ldots,x_n\}. \tag{1.1}$$

Em outras palavras, sendo $S_n$ o $n$-ésimo grupo simétrico, isto é, o conjunto das bijeções do conjunto $\{1,2,\ldots,n\}$ em si mesmo munido da operação composição, podemos escrever

$$P_n = \left\{ \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)} | \alpha_\sigma \in F \right\}.$$

O próximo resultado permite determinar um conjunto gerador de identidades para as identidades do produto tensorial de uma álgebra por uma álgebra comutativa.

**Teorema 1.40.** *Sejam $A$ uma PI-álgebra, $C$ uma $F$-álgebra comutativa e $P$ um conjunto de identidades que geram $T(A)$ como T-ideal, sendo $F$ de característica zero. Então $P$ também gera as identidades de $A \otimes C$.*

*Demonstração.* Seja $f$ uma identidade multilinear de $A$, vamos mostrar que a mesma também é uma identidade multilinear de $A\otimes C$. Por $f$ ser multilinear, basta verificar que a mesma se anula mediante qualquer substituição das variáveis por elementos da forma $a_k \otimes c_k$, onde os $a_i$ pertencem a uma base fixa de $A$ e os $c_j$ a uma base fixa de $C$. Sendo $f(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$, $\alpha_\sigma \in F$, temos

$$f(a_1 \otimes c_1,\ldots,a_n \otimes c_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \otimes c_{\sigma(1)} \ldots c_{\sigma(n)}) = \sum_{\sigma\in S_n} \alpha_\sigma (a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(n)} \otimes c_1 \ldots c_n) =$$

$$= f(a_1,\ldots,a_n) \otimes c_1 \ldots c_n = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 1.37, $T(A) \subseteq T(A \otimes C)$. A inclusão reversa é trivial, já que $A \subseteq A \otimes C$. Logo, $T(A) = T(A \otimes C)$ e, como $P$ gera $T(A)$, o mesmo gera $T(A \otimes C)$.

□

Em particular, se estendemos o corpo de escalares, as identidades **geradoras** se mantêm as mesmas. Assim, se queremos determinar um conjunto gerador de identidades para uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, podemos assumir sem perda de generalidade que o mesmo é algebricamente fechado.

As álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas são de grande relevância para a teoria de álgebras com identidades polinomiais. Elas desempenharam papel importante na resposta positiva de Kemer para o problema de Specht (se o T-ideal de qualquer PI-álgebra é finitamente gerado). Para enunciar alguns desses resultados, precisamos definir o envolvente de Grassmann de uma álgebra. Daqui em diante designaremos as álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas simplesmente por **superálgebras**.

**Definição 1.41.** *Sejam $E$ a álgebra de Grassmann com a $\mathbb{Z}_2$-graduação natural definida no Exemplo 1.28 e $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra. O **envolvente de Grassmann de** $A$, denotado por $G(A)$, é a superálgebra $G(A) = (A^{(0)} \otimes E^{(0)}) \oplus (A^{(1)} \otimes E^{(1)})$.*

A seguir enunciaremos resultados fortes de Kemer relacionando identidades de uma álgebra qualquer com as identidades do envelope de Grassmann de uma superálgebra bem comportada.

**Teorema 1.42.** *Dada uma PI-álgebra $A$ existe uma superálgebra finitamente gerada $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ tal que $A$ satisfaz exatamente as mesmas identidades polinomiais satisfeitas por $G(B)$. Além disso, $B$ é uma PI-álgebra.*

*Demonstração.* A demonstração pode ser encontrada em [15]. □

**Teorema 1.43** (Teorema 2.2 de [17]). *Para qualquer superálgebra finitamente gerada $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ existe uma superálgebra de dimensão finita $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ tal que $T_{\mathbb{Z}_2}(A) = T_{\mathbb{Z}_2}(B)$.*

Como, ao longo do restante da seção, trabalharemos somente com álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas, escolhemos denotar a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada livre por $F\langle Y, Z\rangle$, onde $Y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ representa o conjunto das variáveis homogêneas pares, isto é, de $\mathbb{Z}_2$-grau zero, e $Z = \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ representa o conjunto das variáveis homogêneas ímpares, isto é, de $\mathbb{Z}_2$-grau 1.

Denotamos por $P_{k,m}$ o espaço vetorial formado pelos polinômios multilineares nas variáveis $y_1, y_2, \ldots, y_k$ e $z_1, z_2, \ldots, z_m$. Qualquer polinômio $f$ de $P_{k,m}$ pode ser escrito como

$$f = \sum_{\sigma \in S_m; W=(w_0,\ldots,w_m)} \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m,$$

onde os $w_j$ são monômios (possivelmente de comprimento nulo) nas variáveis $y_1, \ldots, y_k$ e $\alpha_{\sigma,W} \in F$. Para $f \in P_{k,m}$ como acima, definimos

$$\widetilde{f} = \sum_{\sigma \in S_m; W=(w_0,\ldots,w_m)} \mathrm{sgn}(\sigma) \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m,$$

onde $\mathrm{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma$, tal como no Exemplo 1.21.

Claramente a aplicação $\widetilde{\ }: P_{k,m} \to P_{k,m}$ é um automorfismo de espaço vetorial. Além disso, também satisfaz as propriedades seguintes.

**Lema 1.44.** *Sejam $A$ uma superálgebra e $f \in P_{k,m}$. Então:*

*(i) $f$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $G(A)$ se e somente se $\widetilde{f}$ é uma identidade $\mathbb{Z}_2$-graduada de $A$;*

*(ii) $\widetilde{\widetilde{f}} = f$.*

*Demonstração.* A segunda afirmação segue diretamente do fato $\text{sgn}(\sigma)^2 = 1$. Para mostrar a primeira, sejam $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k \in A^{(0)}$ e $\overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m \in A^{(1)}$ elementos homogêneos arbitrários de $A$ e $g_1, \ldots, g_k \in E^{(0)}$, $h_1, \ldots, h_m \in E^{(1)}$ elementos homogêneos arbitrários de $E$. Fixado um monômio

$$w = a_0(y_1, \ldots, y_k) z_{\sigma(1)} \ldots z_{\sigma(m)} a_m(y_1, \ldots, y_k)$$

substituímos a variável $y_i$ por $\overline{y}_i \otimes g_i$ e a variável $z_j$ por $\overline{z}_j \otimes h_j$, para todos $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, m$. Como $g_1, \ldots, g_k \in Z(E)$ e $h_1, \ldots, h_m$ anticomutam entre si, obtemos.

$$\overline{w} = a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \overline{z}_{\sigma(1)} \ldots \overline{z}_{\sigma(m)} a_m(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \ldots g_k h_{\sigma(1)} \ldots h_{\sigma(m)} =$$

$$= \text{sgn}(\sigma) a_0(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \overline{z}_{\sigma(1)} \ldots \overline{z}_{\sigma(m)} a_m(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k) \otimes g_1 \ldots g_k h_1 \ldots h_m.$$

Pela linearidade de$\widetilde{\ }$, segue que

$$f(\overline{y}_1 \otimes g_1, \ldots, \overline{y}_k \otimes g_k, \overline{z}_1 \otimes h_1, \ldots, \overline{z}_m \otimes h_m) = \widetilde{f}(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m) \otimes g_1 \ldots g_k h_1 \ldots h_m.$$

Como os $g_i$ e $h_j$ são arbitrários, $f$ somente será identidade graduada de $G(A)$ se $\widetilde{f}$ for identidade graduada de $A$, já que tomando $g_i = 1$, para todo $i$ e $h_j = e_j$ ($j$-ésimo elemento da base do espaço vetorial sobre o qual a álgebra de Grassmann foi construída)

$$\widetilde{f}(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m) \otimes g_1 \ldots g_k h_1 \ldots h_m = 0$$

se e somente se $\widetilde{f}(\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_k, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_m) = 0$.

□

Deste resultado e do Teorema 1.29, segue imediatamente a proposição seguinte.

**Proposição 1.45.** *Se as superálgebras $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ e $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ satisfazem as mesmas identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas, então $G(A)$ e $G(B)$ satisfazem as mesmas identidades ordinárias.*

Como consequência desta proposição e dos Teoremas 1.42 e 1.43, temos o seguinte corolário.

**Corolário 1.46.** *Dada uma PI-álgebra $A$, existe uma superálgebra de dimensão finita $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ tal que $T(A) = T(G(B))$.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.42, dada $A$, existe uma superálgebra $A'$, finitamente gerada, tal que $T(A) = T(G(A'))$. Pelo Teorema 1.43, existe uma superálgebra $B$ de dimensão finita tal que $T_{\mathbb{Z}_2}(A') = T_{\mathbb{Z}_2}(B)$. Pela Proposição 1.45, $T(G(A')) = T(G(B))$, o que conclui a demonstração. □

## 1.5 O Teorema de Regev sobre a codimensão

Nesta seção assumiremos que o corpo base $F$ é arbitrário. Embora ainda mantenhamos nossa convenção de considerar álgebras unitárias, os principais resultados se mantém sem nenhuma alteração também no caso não unitário.

**Definição 1.47.** *Seja $A$ uma álgebra. Para $n \in \mathbb{N}$, definimos a $n$**-ésima codimensão de** $A$ como sendo*

$$c_n(A) = dim\ P_n(A) = dim\ \frac{P_n}{P_n \cap T(A)}.$$

A sequência de codimensões é uma característica importante de uma PI-álgebra, pois mesmo quando são conhecidos os geradores do T-ideal de identidades de uma álgebra $A$, não é possível dizer se um polinômio de grau dado é ou não identidade de $A$, assim a análise de seu crescimento, dentre outras ferramentas que serão introduzidas mais tarde, auxilia a superar essa dificuldade.

Primeiro provaremos o Teorema de Regev para o crescimento exponencial da sequência de codimensões de uma PI-álgebra, isto é, para cada PI-álgebra $R$ existe um $a > 0$ tal que $c_n(R) = O(a^n)$.

**Definição 1.48.** *Um conjunto $P$ com uma relação $\prec$ (notação $(P, \prec)$) é **parcialmente ordenado** se a relação é transitiva, isto é, $a \prec b$ e $b \prec c$ para $a, b, c \in P$ implicar $a \prec c$, e se a relação $a \prec b$ e $b \prec a$ não pode ser satisfeita simultaneamente para qualquer $a, b \in P$. Os elementos $a_1, \ldots, a_k$ formam uma **cadeia** em $P$ se $a_1 \prec \ldots \prec a_k$; eles formam uma **anticadeia** se a relação $a_i \prec a_j$ não é satisfeita para qualquer par $(a_i, a_j)$ com diferentes $i$ e $j$.*

Abaixo daremos sem provar a versão original do teorema de Dilworth.

**Teorema 1.49.** *Seja $(P, \prec)$ um conjunto parcialmente ordenado. Então o número de cadeias de $P$ em que $P$ pode ser particionado (isto é, apresentado como uma união disjunta) é igual ao número máximo de elementos em uma anticadeia de $P$.*

**Definição 1.50.** *Para uma permutação $\pi$ em $S_n$ denotamos por $d(\pi)$ o maior número $d$ para o qual existem inteiros $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_d \leq n$ tais que $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \ldots > \pi(i_d)$. Para um inteiro fixado $d > 1$, a permutação $\pi$ em $S_n$ é chamada $d$**-boa** se $d(\pi) < d$. Para um $\pi \in S_n$ fixado, introduzimos uma ordem parcial no conjunto $P = \{1, 2, \ldots, n\}$ da seguinte maneira: $i \prec j$ se, e somente se, $i < j$ e $\pi(i) < \pi(j)$. Então $d(\pi)$ é o comprimento da anticadeia mais longa em $\{1, 2, \ldots, n\}$ e $\pi$ é $d$-boa se não há anticadeias de comprimento $d$.*

Por exemplo, seja $n = 6$ e

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

Então $d(\pi) = 4$, já que $1 < 2 < 3 < 5$ e $\pi(1) > \pi(2) > \pi(3) > \pi(5)$ (e não há anticadeia de comprimento 5). Assim $\pi$ é 5-boa (e também 6-boa).

**Definição 1.51.** *Para uma permutação $\pi \in S_n$ construiremos um par de tabelas $T_1(\pi) = (t_{ij})$ e $T_2(\pi) = (u_{ij})$ na seguinte maneira. Montamos $t_{11} = 1$, $u_{11} = \pi(1)$. Por indução, se $t_{ij}$ existe, ele é o menor $k$ tal que $t_{i,j-1} < k \leq n$, $\pi(k) > u_{i,j-1}$ e $u_{ij} = \pi(t_{ij})$. Quando não podemos encontrar o próximo $t_{ij}$ começamos a $i+1$-ésima linha de $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$: $t_{(i+1)1}$ é o menor $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ que não pertence as primeiras $i$ linhas de $T_1(\pi)$, e assim por diante.*

Por exemplo, seja $n = 6$ e

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & & \\ 4 & 5 & \end{pmatrix}, \ T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & & \\ 1 & 2 & \end{pmatrix}.$$

**Lema 1.52.** *Para uma permutação $\pi \in S_n$, o inteiro $d(\pi)$ é igual ao número de linhas da tabela $T_1(\pi)$.*

*Demonstração.* Seja $d$ o número de linhas de $T_1(\pi)$. Pela construção das tabelas $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$, se $i_1 < \ldots < i_{d(\pi)}$ e $\pi(i_1) > \ldots > \pi(i_{d(\pi)})$, então $i_1, \ldots, i_{d(\pi)}$ estão em diferentes linhas de $T_1(\pi)$. Por isso $d(\pi) \leq d$. Agora devemos construir uma sequência $i_1 < \ldots < i_d$ com $\pi(i_1) > \ldots > \pi(i_d)$. Começaremos com $i_d = t_{d1}$, por indução, se $i_{k+1}$ está na $k+1$-ésima linha de $T_1(\pi)$, definimos $i_k = t_{kj}$ para o maior $j$ tal que $t_{kj} < i_{k+1}$. Se $u_{kj} < \pi(i_{k+1})$, então $i_{k+1}$ deveria estar na $k$-ésima linha de $T_1(\pi)$, que não é verdade. Portanto

$$\pi(i_k) = \pi(t_{kj}) = u_{kj} > \pi(i_{k+1})$$

e continuamos o processo. Isto dá que $d(\pi) = d$.

□

**Teorema 1.53** (Latyshev)**.** *Se $R$ é uma PI-álgebra e o T-ideal $T(R)$ contém uma identidade polinomial de grau $d$, então o espaço vetorial $P_n$ de polinômios multilineares de grau $n$ em $F\langle X\rangle$ é gerado, módulo $T(R)$, pelos monômios $x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)}$ onde $\pi \in S_n$ é $d$-boa (isto é $d(\pi) < d$).*

*Demonstração.* Como $T(R)$ contém uma identidade polinomial de grau $d$, ele contém também um polinômio multilinear de grau $d$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $R$ satisfaz uma identidade da forma

$$x_d x_{d-1} \ldots x_1 = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(d)}, \ \alpha_\sigma \in F,$$

e o somatório é sobre todas permutações $\sigma$ diferentes de $\delta \in S_d$, onde

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d-1 & d \\ d & d-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Devemos trabalhar em $P_n(R) = P_n/(P_n \cap T(R))$, isto é, no espaço vetorial de polinômios multilineares de grau $n$ módulo as identidades polinomiais de $R$. Seja $G_d$ o conjunto de todos monômios $x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)} \in P_n(R)$ tal que a permutação $\pi \in S_n$ é $d$-boa. Devemos mostrar que $P_n(R)$ é gerado como espaço vetorial por $G_d$, denotado *span*$(G_d)$. Ordenamos lexicograficamente os monômios em $P_n(R)$ assumindo que

$$x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} < x_{\tau(1)} \ldots x_{\tau(n)}$$

se, e somente se, para algum $k$

$$\sigma(1) = \tau(1), \ldots, \sigma(k) = \tau(k), \sigma(k+1) < \tau(k+1).$$

Seja $h = x_{\pi(1)} \ldots x_{\pi(n)}$ o monômio minimal que não está em *span*$(G_d)$. Por isso $d(\pi) \geq d$ e existe $i_1 < \ldots < i_d$ com $\pi(i_1) > \ldots > \pi(i_d)$. Escrevemos $h$ na forma

$$h = h_0 x_{\pi(i_1)} h_1 x_{\pi(i_2)} h_2 \ldots h_{d-1} x_{\pi(i_d)} h_d,$$

aplicamos a identidade polinomial de grau $d$ para

$$\overline{x_d} = x_{\pi(i_1)} h_1, \overline{x_{d-1}} = x_{\pi(i_2)} h_2, \ldots, \overline{x_2} = x_{\pi(i_{d-1})} h_{d-1}, \overline{x_1} = x_{\pi(i_d)} h_d$$

e obtemos

$$h = h_0.(\overline{x_d x_{d-1}} \ldots \overline{x_1}) = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma h_0 \overline{x}_{\sigma(1)} \overline{x}_{\sigma(2)} \ldots \overline{x}_{\sigma(d)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma h_0 x_{\pi(i_{\sigma(d)})} h_{\sigma(d)} x_{\pi(i_{\sigma(d-1)})} h_{\sigma(d-1)} \ldots x_{\pi(i_{\sigma(1)})} h_{\sigma(1)}.$$

Como $\pi(i_1) > \ldots > \pi(i_d)$ e o somatório é em $\sigma \neq \delta$, obtemos que todos monômios neste último somatório estão abaixo de $h$ na ordem lexicográfica e, por argumento indutivo, pertence ao subespaço vetorial $span(G_d)$ correspondendo à permutações $d$-boas. Por isso $h$ também pertence a $span(G_d)$. Isto completa a prova do teorema.

□

**Teorema 1.54** (Regev)**.** *Seja $R$ uma PI-álgebra com uma identidade polinomial de grau $d$. Então a sequência das codimensões (multilinear) das identidades polinomiais de $R$ satisfazem*

$$c_n(R) \leq (d-1)^{2n}, \ n = 0, 1, 2, \ldots$$

*Demonstração.* Pelo teorema anterior, é suficiente mostrar que o número de permutações $d$-boas em $S_n$ é limitado por $(d-1)^{2n}$. Pelo Lema 1.52, para qualquer permutação $d$-boa $\pi$, as tabelas $T_1(\pi) = (t_{ij})$ e $T_2(\pi) = (u_{ij})$ construídas na última definição, têm menos que $d$ linhas. Como $\pi(t_{ij}) = u_{ij}$, toda permutação $\pi$ é unicamente determinada pelo par $(T_1(\pi), T_2(\pi))$. Em cada linha de $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$ os inteiros $t_{i1}, t_{i2}, \ldots$ e $u_{i1}, u\pi_{i2}, \ldots$ aumentam. Cada inteiro $1, 2, \ldots, n$ pode ser escrito em uma das $d-1$ linhas de $T_1(\pi)$ e em uma das $d-1$ linhas de $T_2(\pi)$ (talvez nem todo par de tabelas corresponde a substituições). Por isso o número de pares de tabelas com menos que $d$ linhas é limitado por $(d-1)^{2n}$, já que, uma vez determinadas as linhas em que cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ aparece, como os elementos ficam em ordem crescente em cada linha, as tabelas ficam automaticamente determinadas. Isto completa a prova do teorema.

□

Um feito notável é que, usando uma abordagem puramente quantitativa, Regev conseguiu provar um resultado puramente qualitativo e responder de forma afirmativa o problema de Kaplansky se o produto tensorial de duas PI-álgebras é ainda uma PI-álgebra.

**Teorema 1.55.** *(Regev) O produto tensorial $R = R_1 \otimes_F R_2$ de duas PI-álgebras $R_1$ e $R_2$ é também uma PI-álgebra.*

*Demonstração.* Sejam $R_1$ e $R_2$ satisfazendo, respectivamente, identidades polinomiais de grau $d_1$ e $d_2$. Portanto, pelo Teorema de Regev mostrado anteriormente

$$c_n(R_1) \leq (d_1 - 1)^{2n}, \ c_n(R_2) \leq (d_2 - 1)^{2n}.$$

Escolhemos $n$ tal que $c_n(R_1)c_n(R_2) < n!$. Isto é sempre possível, pois $a^n$ é menor que $n!$ para $n$ suficientemente grande. Seja

$$\{g_i(x_1, \ldots, x_n) | i = 1, 2, \ldots, c' = c_n(R_1)\}$$

$$\{h_j(x_1, \ldots, x_n) | j = 1, 2, \ldots, c'' = c_n(R_2)\}$$

bases respectivamente de $P_n(R_1)$ e $P_n(R_2)$. Para cada permutação $\pi \in S_n$, consideremos $x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}$ como um elemento de $P_n(R_1)$ e escrevemos como uma combinação linear

$$x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} = \sum_{i=1}^{c'} \beta_{\pi_i} g_i(x_1, \dots, x_n), \ \beta_{\pi_i} \in F.$$

Similarmente, em $P_n(R_2)$,

$$x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)} = \sum_{i=1}^{c''} \gamma_{\pi_j} h_j(x_1, \dots, x_n), \ \gamma_{\pi_j} \in F.$$

Preste atenção que as duas equações acima são identidades polinomiais respectivamente para $R_1$ e $R_2$, isto é, são automaticamente satisfeitas para qualquer $u_1, \dots, u_n \in R_1$ e $v_1, \dots, v_n \in R_2$, respectivamente. Procuramos uma identidade polinomial multilinear de grau $n$ e para o produto tensorial $R = R_1 \otimes R_2$ das $F$-álgebras $R_1$ e $R_2$. Seja

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi x_{\pi(1)} \dots x_{\pi(n)}$$

um polinômio multilinear cujos coeficientes são tratados como incógnitas. Para que $f$ seja identidade de $R_1 \otimes R_2$, ele deve se anular mediante qualquer substituição de $x_i$ por $u_i \otimes v_i$, onde $u_i$ pertence a uma base de $R_1$ e $v_i$ pertence a uma base de $R_2$ fixas. Calculando $f(u_1 \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_n)$, obtemos

$$f(u_1 \otimes v_1, \dots, u_n \otimes v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(1)}) \dots (u_{\pi(n)} \otimes v_{\pi(n)}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \dots u_{\pi(n)}) \otimes (v_{\pi(1)} \dots v_{\pi(n)}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} \xi_\pi \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} g_i(u_1, \dots, u_n) \otimes h_j(v_1, \dots, v_n)$$

Reescrevendo esta equação da seguinte forma

$$\sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} (\sum_{\pi \in S_n} \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} \xi_\pi) g_i(u_1, \dots, u_n) h_j(v_1, \dots, v_n).$$

Note que se encontrarmos coeficientes $\xi_\pi$, $\pi \in S_n$, não todos nulos, de modo que

$$\sum_{\pi \in S_n} \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} \xi_\pi = 0, \ i = 1, \dots, c', \ j = 1, \dots, c'',$$

automaticamente obtemos uma identidade polinomial para $R_1 \otimes R_2$. Mas temos um sistema linear homogêneo com $n!$ incógnitas e sendo o número de equações $c'c'' = c_n(R_1)c_n(R_2) < n!$.

Por isso o sistema tem uma solução não nula $\xi_\pi, \ \pi \in S_n$ e o teorema está provado. $\square$

Considerando uma $F$-álgebra $A$ e $K$ um corpo que estende o corpo $F$, a álgebra $\overline{A} = A \otimes_F K$ pode ser vista como uma $K$-álgebra (definindo-se $\lambda(a \otimes \alpha) = a \otimes \lambda\alpha = \lambda\alpha(a \otimes 1)$, para quaisquer $a \in A$, $\lambda, \alpha \in K$ e estendendo por linearidade) que contém uma cópia natural de $A$, a saber $A \otimes 1$ e, portanto, pode ser vista como a $K$-álgebra obtida de $A$ pela extensão do corpo de escalares de $F$ para $K$. O resultado seguinte relaciona as codimensões de $A$ sobre $F$ e $\overline{A}$ sobre $K$.

**Teorema 1.56.** *Se $A$ é uma álgebra sobre um corpo $F$ de característica zero e $K$ estende $F$, então*

$$c_n^K(\overline{A}) = c_n(A),$$

*para todo natural $n$, onde $c_n(\overline{A})$ denota a $n$-ésima codimensão de $\overline{A}$ como $K$-álgebra.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.40, toda identidade de $A$ é identidade de $\overline{A}$, então $c_n^K(\overline{A}) \leq c_n(A)$. Agora considere $f_1, \ldots, f_m$ uma base de $P_n(A)$ e suponha que $\beta_1, \ldots, \beta_m \in K$ são tais que

$$f = \beta_1 f_1 + \ldots + \beta_m f_m = 0$$

em $P_n^K(\overline{A})$. Sendo $B$ uma base de $K$ como $F$-espaço vetorial, então cada $\beta_j$ se escreve como combinação linear de elementos de $B$, isto é,

$$\beta_i = \sum_j \gamma_{ij} t_j,\ i = 1, \ldots, m,\ t_1, t_2, \ldots \in B,\ \gamma_{ij} \in F.$$

Para qualquer substituição $x_i \mapsto a_i \otimes 1$, onde $a_i \in A$; $i = 1, \ldots, n$, obtemos

$$0 = f(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_{i,j} \gamma_{i,j} t_j f_i(a_1 \otimes 1, \ldots, a_n \otimes 1) = \sum_j \left( \sum_i \gamma_{ij} f_i(a_1, \ldots, a_n) \right) \otimes t_j.$$

Segue então que $\sum_i \gamma_{ij} f_i = 0$ em $P_n(A)$, implicando que cada $\gamma_{ij}$ é nulo pela independência linear dos $f_i$, e os $\beta_j$ são todos nulos também, de onde segue a desigualdade reversa e o resultado. □

Este resultado, tal como o Teorema 1.40, nos permite a conveniência de assumir, sem perda de generalidade, o corpo base algebricamente fechado quando queremos calcular as dimensões de uma álgebra.

## 1.6 Resultados auxiliares

Nesta seção encontram-se definições e resultados que são utilizados ao longo do texto, mas que ficam melhor situados nesse capítulo.

Dizemos que uma álgebra é **simples (semissimples)** se ela é simples (semissimples) como anel.

Segue o Teorema 3.4.3 de [11].

**Teorema 1.57** (Wedderburn-Malcev)**.** *Seja $A$ uma $F$-álgebra de dimensão finita, sendo $F$ corpo de característica zero. Existe uma subálgebra semissimples maximal $B$ de $A$ tal que $A = B + J(A)$, onde $J(A)$ denota o radical de Jacobson de $A$. Além disso, se $B$ e $B'$ são subálgebras semissimples tais que $A = B + J(A) = B' + J(A)$, então*

$$B' = (1 + x)B'(1 + x)^{-1}$$

*para algum $x \in J(A)$.*

**Definição 1.58.** *Um $\mathbb{Z}_2$-**ideal** $I$ de uma superálgebra $A$ é um ideal homogêneo com respeito à $\mathbb{Z}_2$-graduação de $A$, isto é, $I = (I \cap A^{(0)}) \oplus (I \cap A^{(1)})$.*

*Uma superálgebra $A$ é $\mathbb{Z}_2$-**simples** se $A^2 \neq 0$ e $A$ não possui $\mathbb{Z}_2$-ideais não nulos.*

Segue o Teorema 3.4.4 de [11].

**Teorema 1.59** (Teorema 3.4.4 de [11])**.** *Seja $A$ uma superálgebra sobre um corpo $F$ de característica zero. Então:*

*(i) $J(A)$ é $\mathbb{Z}_2$-graduado;*

*(ii) se $A$ é $\mathbb{Z}_2$-simples, então $A$ é simples ou $A = B \oplus \varphi(B)$, onde $B$ é simples e $\varphi : A \to A$ é dada por $\varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, sendo $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$;*

*(iii) se $A$ é semissimples, então $A$ se decompõe como uma soma direta finita de álgebras $\mathbb{Z}_2$-simples;*

*(iv) Existe uma subálgebra maximal semissimples $B$ de $A$ tal que $\varphi(B) = B$, $\varphi : A \to A$ é dada por $\varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, sendo $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$.*

Nosso próximo passo é classificar as álgebras $\mathbb{Z}_2$-simples. Começamos exibindo duas famílias de álgebra $\mathbb{Z}_2$-simples que não são $\mathbb{Z}_2$-isomorfas, isto é, não existe isomorfismo graduado entre quaisquer duas delas.

A primeira é a álgebra das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo $F$, denotada por $M_{k,l}(F)$, onde $k \geq l$ e $k + l = n$. As componentes da $\mathbb{Z}_2$-graduação desta álgebra são:

$$M_{k,l}^{(0)} = \left\{ \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix} : C_1, C_2 \text{ são, respectivamente, blocos } k \times k \text{ e } l \times l \right\};$$

$$M_{k,l}^{(1)} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & D_1 \\ D_2 & 0 \end{bmatrix} : D_1, D_2 \text{ são, respectivamente, blocos } k \times l \text{ e } l \times k \right\}.$$

A álgebra $M_{n,0}(F)$ é denotada simplesmente por $M_n(F)$. Para a segunda família de álgebras, denotamos por $F \oplus cF$ a soma direta de duas cópias do corpo $F$, sendo que a multiplicação de dois elementos da cópia $cF$ resultam no respectivo elemento em $F$, ou seja, $c$ satisfaz $c^2 = 1$. Esta $F$-álgebra é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada, sendo $F$ a componente par e $cF$ a componente ímpar. Então a álgebra $M_n(F \oplus cF)$ das matrizes com entradas em $F \oplus cF$ é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada, sendo a componente par $M_n(F)$ e a componente ímpar $M_n(cF)$.

Qualquer álgebra das famílias descritas acimas são $\mathbb{Z}_2$-simples. Da primeira família, por se tratarem de álgebras de matrizes sobre um corpo e, portanto, serem álgebras simples. As álgebras da segunda família não são simples como álgebras, mas não possuem ideais graduados. Claramente quaisquer superálgebras distintas dessas famílias não são isomorfas por um isomorfismo graduado, basta calcular as dimensões das componentes graduadas em cada caso.

O próximo teorema classifica as superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples de dimensão finita.

**Teorema 1.60** (Teorema 3.5.3 de [11])**.** *Seja $A$ uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $F$ de característica zero. Então $A$ é isomorfa, como superálgebra, a uma álgebra do tipo $M_{k,l}(F)$, com $0 \leq l \leq k$ e $k + l > 0$, ou a $M_n(F \oplus cF)$, com $c^2 = 1$.*

Dos dois resultados anteriores, decorre o seguinte teorema.

**Teorema 1.61.** *Seja $A$ uma superálgebra sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então existe uma superálgebra maximal semissimples $B \subseteq A$ tal que*

$$A = B + J(A).$$

*Além disso, $B$ é uma soma direta finita de superálgebras simples sendo cada uma delas isomorfa ou a $M_{k,l}(F)$ com $0 \leq l \leq k$ e $k + l > 0$ ou a $M_k(F \oplus cF)$, $c^2 = 1$.*

# Capítulo 2

# Representações do grupo simétrico

Como veremos ao longo do restante do texto, especialmente neste capítulo e no capítulo seguinte, as representações do grupo simétrico desempenham papel importante na compreensão do comportamento apresentado pelos T-ideais de identidades de uma álgebra sobre um corpo de característica zero. Neste capítulo apresentamos as definições básicas da teoria de representações de grupos e a classificação dos $S_n$-módulos irredutíveis seguindo [6], [12] e [13]. Além disso, apresentamos aplicações imediatas desta teoria às álgebras com identidades polinomiais seguindo [11].

## 2.1 Definições e resultados básicos de representações de grupos

Como visto no Teorema 1.37, as identidades polinomiais de uma $F$-álgebra seguem das identidades multilineares quando consideramos $F$ um corpo de característica zero, **que será nosso caso até o fim do texto**. Assim, fixada uma PI-álgebra $A$, torna-se relevante estudar os espaços vetoriais $P_n/(P_n \cap T(A))$, lembrando que $P_n$ denota o subespaço vetorial de $F\langle X\rangle$ dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e $T(A)$ denota o T-ideal das identidades satisfeitas por $A$. Note que podemos definir uma ação do grupo simétrico $S_n$ sobre $P_n$ da seguinte maneira:

$$\sigma\left(\sum_{\rho \in S_n} \alpha_\rho x_{\rho(1)} x_{\rho(2)} \ldots x_{\rho(n)}\right) = \sum_{\rho \in S_n} \alpha_\rho x_{\sigma\rho(1)} x_{\sigma\rho(2)} \ldots x_{\sigma\rho(n)};\text{ onde } \sigma \in S_n,\ \alpha_\rho \in F.$$

Claramente essa ação é compatível com a estrutura de $P_n$ como espaço vetorial, isto é, $\sigma(f + \lambda g) = \sigma f + \lambda \sigma g$, para quaisquer $\sigma \in S_n$, $\lambda \in F$ e $f, g \in P_n$. Isso é o mesmo que dizer que $P_n$ é um $S_n$**-módulo**. Assim, podemos associar naturalmente a essa ação um homomorfismo de grupos $\phi : S_n \to GL(P_n)$, onde $GL(P_n)$ denota o grupo dos automorfismos do espaço vetorial $P_n$, dado por $\phi(\sigma) = T_\sigma$, onde $T_\sigma(f) = \sigma f$, para todo $f \in P_n$ (a condição de compatibilidade assegura a linearidade de $T_\sigma$ e $1_{S_n} f = f$, garante que toda $T_\sigma$ possui inversa). Um tal homomorfismo é uma **representação de** $S_n$ **em** $P_n$. Note que cada $T_\sigma$ pode ser estendida a um endomorfismo de $F\langle X\rangle$ e que, portanto, $P_n \cap T(A)$ é fechado pela ação de $S_n$ e o espaço quociente $P_n/(P_n \cap T(A))$ é um $S_n$-submódulo de $P_n$.

Como veremos adiante, o estudo de tal $S_n$-módulo permite obter valiosas informações acerca das identidades polinomiais satisfeitas pela álgebra $A$. Assim, a partir de agora, definiremos e enunciaremos os principais resultados da teoria de representação de grupos que serão utilizados ao longo do texto.

**Definição 2.1.** *Seja $G$ um grupo finito e $V$ um $F$-espaço vetorial (estamos assumindo $F$ corpo de característica zero) de dimensão finita. Uma **representação de $G$ em** $V$ é um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$ e $V$ é dito um $G$**-módulo**.*

A representação $\rho$ induz naturalmente uma ação de $G$ sobre $V$ dada por $gv = \rho(g)(v)$, que é compatível com a estrutura de espaço vetorial de $V$. Analogamente, qualquer ação de um grupo $G$ sobre um $F$-espaço vetorial $V$ que é compatível com a estrutura de espaço vetorial de $V$ induz uma representação de $G$ em $V$. Um subespaço $W$ de $V$ que é fechado pela ação de $G$ é chamado um $G$**-submódulo de** $V$. Um $G$-módulo $V$ é **irredutível** se seus únicos submódulos são o próprio $V$ e 0.

A seguir damos a definição bastante natural de isomorfismo de $G$-módulos.

**Definição 2.2.** *Sejam $G$ um grupo e $V$, $W$ dois $G$-módulos. A aplicação $\varphi : V \to W$ é um **homomorfismo de $G$-módulos** se é uma transformação linear que satisfaz*

$$\varphi(gv) = g\varphi(v),$$

*para todo $g \in G$ e todo $v \in V$. Se $\varphi$ é bijetora, dizemos ainda que $\varphi$ é um **isomorfismo de $G$-módulos** e que $V$ **e** $W$ **são isomorfos** e as representações associadas a eles são chamadas **representações isomorfas**.*

O teorema que enunciamos a seguir mostra que, a partir das representações irredutíveis de $G$, somos capazes de estudar qualquer representação de $G$. Tal como enunciado, este teorema segue imediatamente dos Teoremas 10.8 (Teorema de Maschke) e 14.5 (Teorema de Krull-Schmidt) de [6].

**Teorema 2.3.** *Sejam $G$ um grupo e $F$ um corpo (de característica zero). Todo $G$-módulo $V$ de dimensão finita sobre $F$ pode ser decomposto em uma soma direta de $G$-módulos irredutíveis e quaisquer duas decomposições distintas são isomorfas. Em outras palavras, existem submódulos irredutíveis $M_1, \dots, M_k$ tais que $V = M_1 \oplus \dots \oplus M_k$ e se $V = N_1 \oplus \dots \oplus N_t$ é outra decomposição em irredutíveis, então $k = t$ e é possível rearranjar os índices dos $N_j$ de modo que $M_j \cong N_j$, para todo $j$ entre 1 e $k$.*

Se $V$ é um $G$-módulo irredutível sobre um corpo $F$ e $F'$ é subcorpo de $F$, é claro que $V$ também permanece irredutível como $G$-módulo sobre $F'$. No entanto, se consideramos $K$ uma extensão do corpo $F$, pode ocorrer de $V$ não ser um $G$-módulo irredutível sobre $K$, o que nos leva à definição seguinte.

**Definição 2.4.** *Seja $V$ um $G$-módulo sobre um corpo $F$. Dizemos que $V$ é **absolutamente irredutível** se $V$ permanece irredutível sobre qualquer extensão $K$ de $F$.*

Como estamos trabalhando somente com corpos de característica zero, os Lemas 3.6 e 3.10 de [12] implicam o resultado seguinte.

**Proposição 2.5.** *Todo $G$-módulo irredutível sobre um corpo algebricamente fechado é absolutamente irredutível.*

O Teorema 27.22 de [6], que enunciamos a seguir segundo a terminologia adotada, garante a finitude de $G$-módulos irredutíveis a menos de isomorfismo.

**Teorema 2.6.** *Sejam $F$ um corpo algebricamente fechado e $G$ um grupo finito. O número de $G$-módulos irredutíveis dois a dois não isomorfos sobre $F$ é igual ao número de classes de conjugação de $G$.*

**Observação 2.7.** *No caso particular em que $G = S_n$, a classe de conjugação de uma permutação é determinada pelo tipo cíclico da mesma, isto é, pela $k$-upla de comprimentos, em ordem decrescente, dos ciclos utilizados ao decompor a permutação em produto de ciclos disjuntos. Se considerarmos $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$ temos que $\sigma$ se decompõe em ciclos disjuntos como $\sigma = (12)(3)$ e seu tipo cíclico é $(2,1)$. O tipo cíclico é sempre uma partição de $n$, como mostra a definição a seguir.*

**Definição 2.8.** *Uma partição $\lambda$ de um natural $n$ é uma $k$-upla $\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ satisfazendo $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ e os $n_j$ são todos inteiros positivos. Denota-se $\lambda \vdash n$.*

## 2.2 Representações irredutíveis do grupo simétrico

A partir de agora passaremos a estudar os $S_n$-módulos irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$ seguindo o tratamento dado ao longo do §28 de [6]. A descrição feita utiliza vários resultados e definições da teoria de anéis e que considera módulos sobre anéis também. Por questões de espaço, optamos por somente enunciar os principais resultados utilizados dessa teoria, nos atendo à classificação dos $S_n$-módulos irredutíveis sobre $\mathbb{Q}$, aplicando-os. Desempenha um papel importante em tal estudo a álgebra de grupo de $S_n$ sobre $\mathbb{Q}$, que é um caso particular da definição seguinte.

**Definição 2.9.** *Sejam $G$ um grupo finito e $F$ um corpo. A* ***álgebra de grupo do grupo*** *$G$* ***sobre*** *$F$ (denotada por $FG$) é o $F$-espaço vetorial que tem como base os elementos de $G$, sendo o produto entre elementos da álgebra estendido por linearidade a partir do produto de $G$.*

A representação mais natural associada a $FG$ (vendo-a somente como espaço vetorial) é a **representação regular à esquerda** que é induzida da ação

$$h \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \alpha_g hg;$$

para qualquer $h \in G$.

Além da importância da álgebra de grupo de $S_n$ para a classificação dos $S_n$-módulos irredutíveis, o resultado a seguir mostra que a mesma também desempenha papel importante no estudo das identidades polinomiais de uma álgebra.

**Proposição 2.10.** *O $S_n$-módulo $P_n$, com a ação natural, é isomorfo a $FS_n$ com a representação regular à esquerda.*

*Demonstração.* Basta considerar a aplicação $\varphi : P_n \to FS_n$ que satisfaz

$$\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mapsto_\varphi \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma \sigma.$$

Claramente trata-se de uma transformação linear. Para ver que as ações são preservadas, basta notar que, para quaisquer $\sigma, \tau \in S_n$,

$$\varphi(\sigma x_{\tau(1)} \dots x_{\tau(n)}) = \varphi(x_{\sigma\tau(1)} \dots x_{\sigma\tau(n)}) = \sigma\tau.$$

$\square$

Agora passamos a enunciar os principais resultados a serem utilizados na classificação dos $S_n$-módulos irredutíveis. O primeiro deles é o Teorema de Maschke re-escrito na linguagem de módulos sobre anéis e o Lema 2.13 é consequência da Proposição 1.3.

Todo $G$-módulo pode ser visto como um $FG$-módulo, abrindo as operações por linearidade.

**Lema 2.11.** *Sejam $G$ um grupo finito e $F$ um corpo de característica zero. Então todo $FG$-módulo se decompõe em uma soma direta de $FG$-módulos irredutíveis.*

**Lema 2.12** (Teorema 25.10 de [6])**.** *Todo $G$-módulo irredutível é isomorfo a algum ideal à esquerda minimal de $FG$.*

**Lema 2.13** (Teorema 25.11 de [6])**.** *Seja $e$ um idempotente de $FG$. O ideal à esquerda $FGe$ é minimal se e somente se $eFGe$ é um anel com divisão.*

**Lema 2.14** (Proposição 25.12 de [6])**.** *Os ideais minimais à esquerda $I$ e $J$ de $FG$ são isomorfos se e somente se $J = Ia$, para algum $a \in J$.*

Assim, a estratégia a ser seguida é encontrar todos os ideais minimais à esquerda de $\mathbb{Q}S_n$ usando os Lemas 2.12 e 2.13 e classificá-los a menos de isomorfismo usando o Lema 2.14.

Segundo a Observação 2.7, devemos determinar um ideal à esquerda minimal em $\mathbb{Q}S_n$ correspondente a cada partição de tal maneira que os ideais que correspondem a diferentes partições não sejam isomorfos (como $\mathbb{Q}S_n$-módulos).

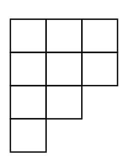
Ordenamos as partições lexicograficamente, isto é, se temos duas partições $(n_1, \dots, n_k)$ e $(n'_1, \dots, n'_h)$, de $n$, escrevemos

$$(n_1, \dots, n_k) > (n'_1, \dots, n'_h)$$

se, na primeira posição onde os $n'_j s$ diferem, tivermos $n_i > n'_i$.

Lembramos que $\mathrm{sgn}(\sigma)$ denota o sinal da permutação $\sigma \in S_n$. Em particular $\mathrm{sgn}(\sigma\tau) = \mathrm{sgn}(\sigma)\mathrm{sgn}(\tau)$, para quaisquer $\sigma, \tau \in S_n$.

A uma partição $\lambda = (n_1, \dots, n_k)$ de $n$ associamos um **diagrama de Young** consistindo de $n_1$ boxes na primeira linha, $n_2$ boxes na segunda linha, e assim por diante. Uma **tabela de Young** associada a $\lambda$ é obtida preenchendo-se os boxes de um diagrama com todos os elementos de $\{1, \dots, n\}$ em qualquer ordem. Por exemplo, associado a $\lambda = (3, 3, 2, 1) \vdash 9$, temos o diagrama



e exemplos de tabelas distintas

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & 5 & 6 \\ \hline 7 & 8 \\ \cline{1-2} 9 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|}\hline 5 & 3 & 9 \\ \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 7 & 8 \\ \cline{1-2} 6 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Cada quadrado vazio de um diagrama de Young é chamado **célula** do diagrama.

Partindo de uma tabela $T$, denotamos por $R(T)$ o conjunto de suas permutações-linha, isto é, o conjunto de permutações $\sigma \in S_n$ que permuta os elementos em cada linha de $T$, mas não move um elemento qualquer de uma linha para outra. Por exemplo, tomando $T$ como sendo a tabela a seguir

$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

temos $R(T) = \{(1), (13), (25), (13)(25)\}$. Claramente, $R(T)$ é sempre um subgrupo de $S_n$. Do mesmo modo define-se uma permutação-coluna $\sigma$ como sendo qualquer elemento de $S_n$ que permuta os elementos de cada coluna de $T$ sem mover qualquer elemento de uma coluna para outra. Denotamos por $C(T)$ o grupo de todas permutações-coluna. No exemplo anterior, $C(T) = \{(1), (124), (142), (12), (14), (24), (35), (124)(35), (142)(35), (12)(35), (14)(35), (24)(35)\}$. Obviamente, para qualquer tabela $T$, $C(T) \cap R(T) = \{(1)\}$, pois se $\sigma \in S_n$ é tal que não move elementos entre linhas e colunas distintas, então deve deixar cada elemento inalterado, e, portanto, $\sigma = (1)$, a permutação identidade.

Agora definimos, para uma tabela de Young $T$, o elemento $e(T) \in \mathbb{Q}S_n$ da seguinte forma

$$e(T) := \sum_{\sigma \in R(T),\ \tau \in C(T)} \operatorname{sgn}(\tau)\sigma\tau.$$

Podemos observar que, uma vez que $\sigma$ varia ao longo de todos os elementos de $R(T)$, e que $\tau$ varia sobre $C(T)$, e $R(T) \cap C(T) = \{(1)\}$, os produtos $\sigma\tau$ assim obtidos são todos distintos. Isso mostra que $e(T)$ é uma soma de determinados elementos de $S_n$ com coeficiente 1 ou $-1$, e então $e(T) \neq 0$ em $\mathbb{Q}S_n$.

Para $\sigma_1 \in R(T)$ e $\tau_1 \in C(T)$, temos

$$\sigma_1.e(T) = \sum \operatorname{sgn}(\tau)\sigma_1\sigma\tau = e(T) \tag{2.1}$$

$$e(T).\tau_1 = \sum \operatorname{sgn}(\tau)\sigma\tau\tau_1 = \operatorname{sgn}(\tau_1)e(T). \tag{2.2}$$

A uma partição $\lambda \vdash n$, associamos o ideal à esquerda $\mathbb{Q}S_n e(T)$, onde $T$ é qualquer tabela de Young obtida de um diagrama correspondente a $\lambda$. Embora $e(T)$ não seja idempotente, ele é um múltiplo escalar de um elemento idempotente de $\mathbb{Q}S_n$. Mostraremos que todo ideal à esquerda dessa forma é mininal, que ideais associados a tabelas provenientes de um mesmo diagrama são isomorfos e que ideais associados a tabelas de partições distintas não são isomorfos. Esses ideais, um para cada tabela, formarão o pretendido conjunto completo de $\mathbb{Q}S_n$-módulos irredutíveis não isomorfos.

Para cada tabela de Young $T$ e cada $\sigma \in S_n$, define-se $\sigma T$ como sendo a tabela obtida de $T$ pela aplicação de $\sigma$ nas entradas de $T$. Exemplo, tomando $\sigma = (132)(45)$, temos

$$\underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}_{T} \qquad \underbrace{\begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}}_{\sigma T}$$

Assim, se $l$ esta na posição $(i, j)$ de $T$, então $\sigma(l)$ está na posição $(i, j)$ de $\sigma T$.

**Lema 2.15.** *Seja $T' = \sigma T$, e seja $\tau \in S_n$. Se considerarmos $\tau T$ como obtido de $T$ movendo as entradas de uma posição para outra, este mesmo conjunto de movimentos transformará $T'$ para $\sigma\tau\sigma^{-1}T'$. Em outras palavras, se a entrada $(i, j)$ de $T$ é a $(i', j')$ de $\tau T$, então a entrada $(i, j)$ de $T'$ é a entrada $(i', j')$ de $\sigma\tau\sigma^{-1}T'$.*

*Demonstração.* Como as permutações são aplicadas da direita para a esquerda, aplicando $\sigma^{-1}$ a $T'$, obtemos $T$. Aplicando em seguida $\tau$ fazemos os movimentos aplicados a $T$. Quando aplicamos $\sigma$, voltamos as entradas de $T'$ nas respectivas posições. $\square$

**Corolário 2.16.** *Para $\sigma \in S_n$, temos $R(\sigma T) = \sigma R(T)\sigma^{-1}$, $C(\sigma T) = \sigma C(T)\sigma^{-1}$, $e(\sigma T) = \sigma e(T)\sigma^{-1}$.*

*Demonstração.* Se $\tau \in R(T)$, então $\tau$ deixa cada entrada de $T$ em sua linha. Pelo lema anterior, segue que $\sigma\tau\sigma^{-1}$ deixa cada entrada de $\sigma T$ em sua linha e a primeira afirmação segue. Um argumento análogo mostra a segunda afirmação. Para a terceira afirmação, note que

$$e(\sigma T) = \sum_{\tau \in R(\sigma T), \rho \in C(\sigma T)} \operatorname{sgn}(\rho)\tau\rho.$$

Daí, pelas afirmações anteriores,

$$e(\sigma T) = \sum_{\tau_1 \in R(T), \rho_1 \in C(T)} \operatorname{sgn}(\rho_1)(\sigma\tau_1\sigma^{-1})(\sigma\rho_1\sigma^{-1}) = \sigma\left(\sum \operatorname{sgn}(\rho_1)\tau_1\rho_1\right)\sigma^{-1} = \sigma e(T)\sigma^{-1}.$$

$\square$

Usaremos o corolário acima para mostrar que se $T$ e $T'$ são tabelas com o mesmo diagrama, então $\mathbb{Q}S_n e(T) \cong \mathbb{Q}S_n e(T')$. Para isto, seja um elemento $\sigma \in S_n$ tal que $T' = \sigma T$, de onde

$$\mathbb{Q}S_n e(T') = \mathbb{Q}S_n \sigma e(T)\sigma^{-1} = \mathbb{Q}S_n e(T)\sigma^{-1},$$

já que $\mathbb{Q}S_n\sigma = \mathbb{Q}S_n$. Mas então $\theta : \mathbb{Q}S_n e(T) \to \mathbb{Q}S_n e(T')$ definida por $\theta(x) = x\sigma^{-1}$ é um isomorfismo entre os $\mathbb{Q}S_n$-módulos $\mathbb{Q}S_n e(T)$ e $\mathbb{Q}S_n e(T')$.

**Lema 2.17.** *Um elemento $\sigma \in S_n$ é expresso na forma $\sigma = \tau\rho$, $\tau \in R(T)$ e $\rho \in C(T)$ se, e somente se, nenhum par de entradas colinear em $T$ for co-colunar em $\sigma T$.*

*Demonstração.* Assuma $\sigma = \tau\rho$, e sejam $i, j$ entradas colineares de $T$. Então $i, j$ são também colineares em $\tau T$. Porém, $\sigma T = (\tau\rho\tau^{-1})\tau T$, e $\tau\rho\tau^{-1}$ é uma permutação-coluna em $\tau T$, de modo que $i$ e $j$ devem aparecer em colunas distintas de $(\tau\rho\tau^{-1})\tau T$.

Reciprocamente, suponha que não haja duas entradas colineares em $T$ que são co-colunares em $\sigma T$. Então quaisquer duas entradas que são co-colunares em $\sigma T$, não podem ser colineares em $T$. Em particular, todas as entradas na primeira coluna de $\sigma T$ estão em diferentes linhas de $T$, e assim existe uma permutação-linha $\tau_1 \in R(T)$ que enfileira todas essas entradas na primeira coluna de $\tau_1 T$. Repita esse procedimento sucessivamente com as colunas remanescentes de $\sigma T$, assim eventualmente obteremos uma permutação-linha $\tau \in R(T)$ tal que, para cada $k$, a $k$-ésima coluna de $\sigma T$ e $\tau T$ consiste das mesmas entradas (arranjadas em linhas diferentes). Mas então

$$\sigma T = \rho' \tau T$$

para algum $\rho' \in C(\tau T)$, e então $\rho' = \tau\rho\tau^{-1}$ para algum $\rho \in C(T)$. Por isso $\sigma T = (\tau\rho\tau^{-1})\tau T = \tau\rho T$, de onde $\sigma = \tau\rho$ com $\tau \in R(T)$ e $\rho \in C(T)$.

□

**Lema 2.18.** *Seja $T$ uma tabela qualquer associada à partição $(n_1, \dots, n_k)$, e $T'$ associada a $(n'_1, \dots, n'_h)$, e suponha que $(n_1, \dots, n_k) > (n'_1, \dots, n'_h)$. Então $e(T')e(T) = 0$.*

*Demonstração.* Mostraremos primeiro que existem duas entradas colineares em $T$ e co-colunares em $T'$. Caso contrário, as $n_1$ entradas na primeira linha de $T$ devem ocorrer em diferentes colunas de $T'$; como $T'$ tem $n'_1$ colunas , isto mostra que $n_1 \leq n'_1$ e assim $n_1 = n'_1$. Agora aplicamos uma permutação-coluna em $T'$ para obter uma nova tabela $T''$, também associada à partição $(n'_1, \dots, n'_h)$, mas que tem a mesma primeira linha de $T$. Então repetimos o argumento com os elementos de $T$ e $T$" que não estão na primeira linha, chegando em $n_2 = n'_2$ e assim por diante, o que é impossível.

Mostramos assim a existência de entradas $i, j$ colineares em $T$ e co-colunares em $T'$. Seja $\tau = (ij) \in S_n$. Então $\tau \in R(T) \cap C(T')$, e

$$e(T')e(T) = e(T')\tau\tau e(T) = -e(T')e(T)$$

pelas Equações (2.1) e (2.2) e, portanto, $e(T')e(T) = 0$ e o lema está provado.

□

Notemos que, para $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$, $\gamma \in \mathbb{Q}$, temos

$$\tau.\gamma e(T).\rho = \operatorname{sgn}(\rho)\gamma e(T).$$

Provemos agora, reciprocamente, que a propriedade acima caracteriza os múltiplos escalares de $e(T)$.

**Lema 2.19.** *Seja $x \in \mathbb{Q}S_n$ tal que $\tau x \rho = \operatorname{sgn}(\rho)x$ para quaisquer $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$. Então existe $\gamma \in \mathbb{Q}$ tal que $x = \gamma e(T)$.*

*Demonstração.* Seja $x = \sum \alpha_\sigma \sigma$, o somatório percorrendo todo $\sigma \in S_n$, onde cada $\alpha_g \in \mathbb{Q}$. Então

$$x = \operatorname{sgn}(\rho)\tau^{-1}x\rho^{-1} = \operatorname{sgn}(\rho)\sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma(\tau^{-1}\sigma\rho^{-1}) = \operatorname{sgn}(\rho)\sum_{\sigma' \in S_n} \alpha_{\tau\sigma'\rho}\sigma',$$

para cada $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$. Assim

$$\alpha_\sigma = \mathrm{sgn}(\rho)\alpha_{\tau\sigma\rho}, \quad \tau \in R(T), \rho \in C(T).$$

Fixando $\sigma = (1)$, obtemos

$$\alpha_{\tau\rho} = \mathrm{sgn}(\rho)\alpha_{(1)}, \quad \tau \in R(T), \rho \in C(T).$$

Para completar a prova do lema, precisamos somente mostrar que $\alpha_\sigma = 0$ sempre que $\sigma$ não é da forma $\tau\rho$ para $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$. Suponha que $\sigma$ não é dessa forma; pelo Lema 2.17, deverão então existir entradas $i, j$ colineares em $T$ e co-colunares em $\sigma T$. Seja $\tau = (ij) \in S_n$, então $\tau \in R(T) \cap C(\sigma T)$, e assim $\tau = \sigma\rho\sigma^{-1}$ para algum $\rho \in C(T)$. Como $\rho$ e $\tau$ são conjugados, também é uma transposição, e temos

$$\alpha_\sigma = \mathrm{sgn}(\rho^{-1})\alpha_{\tau\sigma\rho^{-1}} = -\alpha_\sigma$$

pois $\tau\sigma\rho^{-1} = \sigma$. Portanto $\alpha_\sigma = 0$, que prova o lema. □

Sejam $\tau \in R(T)$ e $\rho \in C(T)$, usando novamente as Equações (2.1) e (2.2), temos

$$\tau e(T)^2\rho = \tau e(T)e(T)\rho = \mathrm{sgn}(\rho)e(T)^2.$$

Pelo lema anterior, então temos

$$e(T)^2 = \gamma e(T),$$

onde $\gamma$ é o coeficiente de 1 em $e(T)^2$ e, por isso, é um inteiro. Mostraremos que $\gamma \neq 0$. Seja $M$ o operador $\mathbb{Q}$-linear de $\mathbb{Q}S_n$ definido por $M(x) = xe(T)$, para todo $x \in \mathbb{Q}S_n$, e vamos considerar a matriz de $M$ com respeito à $\mathbb{Q}$-base canônica de $\mathbb{Q}S_n$ consistindo dos elementos $\sigma_1 = (1), \sigma_2, \ldots, \sigma_{n!}$ de $S_n$. Então se

$$e(T) = \alpha_1\sigma_1 + \ldots, \quad \alpha_i \in \mathbb{Q},$$

temos

$$\begin{aligned} \sigma_1.e(T) &= \alpha_1\sigma_1 + \ldots \\ \sigma_2.e(T) &= * + \alpha_1\sigma_2 + \ldots \end{aligned}$$

de modo que o traço da matriz de $M$ com respeito a essa base é $\alpha_1 n!$. Além disso $\alpha_1 = 1$, pois (1) aparece com o coeficiente 1 em $e(T)$. Por outro lado, iremos calcular o traço usando uma $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}S_n$ diferente. Devemos chegar ao mesmo resultado, pois o traço é independente da base usada. Seja $\{v_1, \ldots, v_{n!}\}$ uma $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}S_n$ tal que $\{v_1, \ldots, v_f\}$ é uma $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{Q}S_n e(T)$. Aqui $f = \dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}S_n e(T) \geq 1$, pois $e(T)$ é um elemento não nulo de $\mathbb{Q}S_n e(T)$. Mais, $xe(T) = \gamma x$ para $x \in \mathbb{Q}S_n e(T)$, e assim

$$\begin{aligned} v_1.e(T) &= \gamma v_1 \\ v_2.e(T) &= \quad \gamma v_2 \\ &\vdots \\ v_f.e(T) &= \qquad\quad \gamma v_f \\ v_{f+1}.e(T) &= * + * + \ldots + * + 0 \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$v_{n!}.e(T) = * + * + \ldots + * + 0,$$

pois $y.e(T) \in \mathbb{Q}S_n e(T)$ para $y = v_{f+1}, \ldots, v_{n!}$. O traço é assim $\gamma.f$. Assim temos

$$\gamma.f = n!,$$

de onde $\gamma \neq 0$.

Podemos agora mostrar que cada ideal $\mathbb{Q}S_n e(T)$ é minimal. Seja $u = \gamma^{-1}e(T)$, de modo que $u^2 = u \neq 0$. Então $u$ é idempotente, e

$$\mathbb{Q}S_n u = \mathbb{Q}S_n e(T), \quad u\mathbb{Q}S_n u = e(T)\mathbb{Q}S_n e(T).$$

A fim de mostrar que $\mathbb{Q}S_n u$ é um ideal à esquerda minimal, pelo Lema 2.13, é suficiente provar que $u\mathbb{Q}S_n u$ é um anel com divisão. Seja $x \in u\mathbb{Q}S_n u$, então $x = e(T)ye(T)$ para algum $y \in \mathbb{Q}S_n$, e assim

$$\tau x \rho = \tau e(T)ye(T)\rho = e(T)ye(T)\mathrm{sgn}(\rho) = \mathrm{sgn}(\rho)x$$

para quaisquer $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$. Pelo lema anterior, $x$ deve portanto ser um múltiplo escalar de $e(T)$. Assim

$$u\mathbb{Q}S_n u = \mathbb{Q}u \cong \mathbb{Q},$$

que mostra de fato que $u\mathbb{Q}S_n u$ é um corpo.

Finalmente, sejam $T, T'$ tabelas com diferentes diagramas e sejam $\mathbb{Q}S_n u, \mathbb{Q}S_n u'$ os ideais à esquerda minimais associados a eles. Devemos mostrar que $\mathbb{Q}S_n u$ e $\mathbb{Q}S_n u'$ não são isomorfos. Se eles fossem, então pelo Lema 2.14, existiria um elemento $a \in \mathbb{Q}S_n$, tal que

$$\mathbb{Q}S_n u = \mathbb{Q}S_n u' a u,$$

Por isso $u = bu'au$ para algum $b \in \mathbb{Q}S_n$.

Vamos mostrar que $u'au = 0$, o que nos dá a contradição desejada. Basta de fato, provar que $u'\sigma u = 0$ para todo $\sigma \in S_n$. Porém, $u'\sigma u = u'\sigma u \sigma^{-1}\sigma$, e $u'\sigma u\sigma^{-1} = 0$ pelo Lema 2.18, pois $u'$ e $\sigma u \sigma^{-1}$ vêm de $T'$ e $\sigma T$, respectivamente.

Para resumir, provamos o seguinte:

**Teorema 2.20.** *A cada partição $(n_1, \ldots, n_k)$ de $n$, temos associado um diagrama de Young. Cada diagrama de Young dá origem a uma coleção de tabelas. De cada tabela $T$, obtemos o grupo $R(T)$ de permutações-linha e o grupo $C(T)$ de permutações-coluna. Tomamos*

$$e(T) = \sum \mathrm{sgn}(\rho)\tau\rho,$$

*percorrendo todos $\tau \in R(T)$, $\rho \in C(T)$; então $\mathbb{Q}S_n e(T)$ é um ideal à esquerda minimal na álgebra de grupo $\mathbb{Q}S_n$, e assim $\mathbb{Q}S_n e(T)$ é um $\mathbb{Q}S_n$-módulo irredutível. Mais, ideais vindos de tabelas diferentes com o mesmo diagrama são isomorfos, mas ideais de tabelas com diagramas diferentes não são. Por isso os ideais $\mathbb{Q}S_n e(T)$, onde $T$ varia ao longo de um conjunto com todas as tabelas com diagramas distintos, fornecem um conjunto de todos os $\mathbb{Q}S_n$-módulos irredutíveis não isomorfos.*

Note que o resultado crucial para a irredutibilidade dos módulos é o Lema 2.19 e que ele permanece verdadeiro se estendemos o corpo em questão para o corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos que é algebricamente fechado. Portanto, pela Proposição 2.5, esses módulos são, de fato, absolutamente irredutíveis.

Uma pergunta bastante natural é: dada $\lambda \vdash n$, qual a dimensão do $S_n$-módulo irredutível associado a $\lambda$? Essa pergunta é respondida através da Fórmula do Gancho. Antes de apresentá-la precisaremos definir o que é o número do gancho da célula $(i,j)$ de um diagrama de Young.

**Definição 2.21.** *Seja $\lambda \vdash n$ e seja $D$ um $\lambda$-diagrama de Young. O **número do gancho associado à entrada** $(i,j)$ **de** $D$, denotado por $h_{ij}$, é o número de células à direita da entrada $(i,j)$ que estão na linha $i$ mais o número de entradas abaixo da entrada $(i,j)$ e que estão na coluna $j$ mais* 1 *(correspondente à própria entrada $(i,j)$).*

A fim de obtermos uma fórmula explícita para $h_{ij}$, precisaremos de algumas definições e notações. Sejam $a_1 > a_2 > \ldots > a_t$ e $m_1, m_2, \ldots, m_t$ inteiros positivos. Denotamos por

$$([a_1]^{m_1}, [a_2]^{m_2}, \ldots, [a_t]^{m_t})$$

a partição de $\sum a_i m_i$ dada por

$$([a_1]^{m_1}, [a_2]^{m_2}, \ldots, [a_t]^{m_t}) = (\underbrace{a_1, \ldots, a_1}_{m_1}, \underbrace{a_2, \ldots, a_2}_{m_2}, \ldots, \underbrace{a_t, \ldots, a_t}_{m_t}).$$

Em alguns momentos utilizaremos uma notação mista, por exemplo, denotaremos a partição $(4,4,3,1,1,1)$ de 15 por $([4]^2, 3, [1]^3)$ em vez de $([4]^2, [3]^1, [1]^3)$.

**Definição 2.22.** *Seja $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k) \vdash n \in \mathbb{N}$. Definimos a **partição conjugada a** $\lambda$ por*

$$\lambda' = ([k]^{\lambda_k}, [k-1]^{\lambda_{k-1}-\lambda_k}, [k-2]^{\lambda_{k-2}-\lambda_{k-1}}), \ldots, [1]^{\lambda_1-\lambda_2}).$$

*Se $\lambda_j = \lambda_{j+1}$ a entrada $j$ é desconsiderada da partição $\lambda'$.*

Os exemplos abaixo servem para facilitar a compreensão. Para $\lambda = (7,5,4,1) \vdash 17$, temos $\lambda' = ([4]^1, [3]^3, [2]^1, [1]^2)$. Para $\mu = (3,2,2) \vdash 7$, teríamos $\mu' = ([3]^2, [2]^0, [1]^1) = ([3]^2, [1]^1)$. Repare que a definição acima nos diz que a conjugada de uma partição $\lambda$ é a partição $\mu$ cujo diagrama de Young é o "transposto" do diagrama associado a $\lambda$.

Assim, podemos fornecer uma definição mais precisa para $h_{ij}$.

**Definição 2.23.** *O número do gancho $h_{ij}$ associado à célula $(i,j)$ de um diagrama de Young proveniente de uma partição $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ de um natural $n$ é dado por*

$$h_{ij} = \lambda_i + \lambda'_j + 1 - (i+j),$$

*onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)$.*

**Teorema 2.24** (Fórmula do gancho)**.** *Denote por $d_\lambda$ a dimensão do $S_n$-módulo irredutível associado à partição $\lambda$ de $n$. Temos que*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{i,j}},$$

*onde o produto no denominador percorre todas as células do diagrama de Young associado a $\lambda$.*

A demonstração desse fato pode ser encontrada em [13, p.57].

## 2.3 Aplicações de representações de $S_n$ às álgebras com identidades polinomiais

Ao longo desta seção apresentaremos definições e resultados que conectam as representações do grupo simétrico com o estudo de PI-álgebras e que serão utilizados durante os próximos capítulos. Por questões de espaço e coesão, decidimos omitir algumas demonstrações, indicando referências onde as mesmas podem ser encontradas.

Começamos com alguns resultados que descrevem a estrutura da álgebra de grupo $FS_n$ e sua conexão com o $S_n$-módulo dos polinômios multilineares na variáveis $x_1, \ldots, x_n$.

O próximo resultado deriva diretamente do Teorema 25.15, das Observações 27.20 e 27.21 de [6] e da classificação dos $S_n$-módulos irredutíveis feita na seção anterior.

**Teorema 2.25.** *A álgebra de grupo $FS_n$ se decompõe como*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda,$$

*onde $I_\lambda = FS_n e(T) FS_n$ é um ideal minimal de $FS_n$; a decomposição em $S_n$-módulos irredutíveis de $I_\lambda$ é $I_\lambda \cong d_\lambda FS_n e(T)$, sendo $d_\lambda$ a dimensão de $FS_n e(T)$.*

Lembre que $P_n$ é o $S_n$-módulo dos polinômios multiliares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$, cuja ação foi definida no início deste capítulo. É importante ressaltar que os ideais $I_\lambda$ tal como no teorema anterior são dois a dois ortogonais, isto é, se $n \dashv \lambda \neq \mu \vdash n$, então $I_\lambda I_\mu = 0$.

Como comentado também no início do capítulo, $P_n \cap T(A)$ é um $S_n$-submódulo de $P_n$ e, portanto, pelo Teorema de Maschke, sua decomposição em módulos irredutíveis deve ser uma subdecomposição de $P_n$, sendo a decomposição "restante" isomorfa a $\dfrac{P_n}{P_n \cap T(A)}$, que, a partir de agora, passaremos a denotar simplesmente por $P_n(A)$. Então, se determinamos a decomposição de $P_n \cap T(A)$ em módulos irredutíveis, automaticamente temos determinada a decomposição de $P_n(A)$ e vice-versa. Em outras palavras, segue o próximo resultado.

**Proposição 2.26.** *Seja $d_\lambda$ a dimensão do $S_n$-módulo irredutível associado à partição $\lambda$ de $n$. Se $m_\lambda \leq d_\lambda$ são tais que*

$$P_n(A) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda W_\lambda,$$

*onde $W_\lambda$ denota o $S_n$-módulo irredutível associado a $\lambda$, então*

$$P_n \cap T(A) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (d_\lambda - m_\lambda) W_\lambda.$$

Tal como na proposição anterior, a partir de agora, ao longo de toda a dissertação, $W_\lambda$ denotará o $S_n$-módulo irredutível $FS_n e(T_\lambda)$, onde $T_\lambda$ é uma $\lambda$-tabela de Young e $d_\lambda$ denotará a dimensão de $W_\lambda$.

Se $M$ é um $S_n$-módulo, podemos estender naturalmente por linearidade a ação de $S_n$ para todo $FS_n$ sobre $M$ (porque na verdade todo $G$-módulo pode ser visto como um $FG$-módulo).

Assim, temos o seguinte resultado.

**Lema 2.27.** *Sejam $T$ uma $\lambda$-tabela de Young, $H$ subgrupo de $C(T)$, $H'$ subgrupo de $R(T)$, $M$ um $S_n$-módulo e suponha que $e(T)u \neq 0$ para algum $u \in M$. Então*

$$\left(\sum_{\sigma\in H} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right) e(T)u \neq 0;$$

$$\left(\sum_{\sigma\in H'} \sigma\right)\left(\sum_{\tau\in C(T)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau\right) e(T)u \neq 0.$$

*Demonstração.* Sejam $\rho_1 H, \ldots, \rho_k H$, todas as classes laterais à esquerda de $H$ em $C(T)$ (sendo $\rho_1 = (1)$) e considere $\rho' = \sum_{\sigma\in H} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma$. Se $\rho' e(T)u = 0$, então $\rho_i\rho' e(T)u = 0$ em $M$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Portanto,

$$e(T)^2 u = \left(\sum_{\tau\in R(T)} \tau\right)\left(\sum_{\sigma\in C(T)} \operatorname{sgn}(\sigma)\sigma\right) e(T)u = \left(\sum_{\tau\in R(T)} \tau\right)(\rho_1\rho' e(T)u \pm \ldots \pm \rho_k\rho' e(T)u) = 0, \tag{2.3}$$

o que gera uma contradição, uma vez que mostramos, imediatamente após o Lema 2.19, que $e(T)^2 = \gamma e(T)$, para algum $\gamma \in \mathbb{Z}$ não nulo.

Para mostrar a segunda afirmação, acabamos de provar que

$$\left(\sum_{\tau\in C(T)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau\right) e(T)u \neq 0.$$

Reescrevemos o segundo membro da Equação 2.3, aplicando a ideia utilizada lá no somatório de $C(T)$ ao somatório em $R(T)$ e obtemos o resultado. □

A ação de $S_n$ sobre $P_n$ nos leva naturalmente às definições de polinômios simétricos e alternados (que podem ser estendidas para qualquer polinômio de $F\langle X\rangle$ naturalmente).

**Definição 2.28.** *Sejam $f \in P_n$ e $\varnothing \neq V \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$. Dizemos que $f$ **é simétrico em** $V$ se $\sigma f = f$, para toda $\sigma$ pertencente ao subgrupo $H_V = \{\tau \in S_n | \tau(i) = i \text{ se } x_i \notin V\}$ de $S_n$. Analogamente, $f$ é **alternado em** $V$ se $\sigma f = \operatorname{sgn}(\sigma) f$, para toda $\sigma \in H_V$.*

Para os próximos lemas precisamos fixar algumas notações e definições. Definimos a relação de ordem $\geq$ no conjunto de todas as partições de quaisquer naturais da seguinte maneira. Dados$\lambda = (n_1, n_2, \ldots, n_k)$ e $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_l)$, temos que $\lambda \geq \mu$ se $k \geq l$ e $n_i \geq m_i$ para todo inteiro $i$ satisfazendo $1 \leq i \leq k$ (considera-se $m_i = 0$ se $l < i \leq k$).

Para inteiros inteiros positivos $d, l, t$ denotamos por $h(d, l, t)$ a partição $([l+t]^d, [l]^t)$, que possui formato de gancho (segundo a ideia usada para definir número do gancho).

Dizemos que $f \in P_n$ **corresponde à tabela** $T$ associada a $\lambda$ (que abreviamos por $T_\lambda$), se existe $f_0 \in P_n$ tal que $f = e(T_\lambda) f_0$.

**Lema 2.29.** *Seja $\lambda \vdash n$ tal que $\lambda \geq h(d, l, t)$ para alguns $d, l, t$ e seja $0 \neq f(x_1, \ldots, x_n)$ um polinômio multilinear correspondendo à tabela $T_\lambda$. Então existe $r \in FS_n$ tal que $rf \neq 0$, e um subconjunto $Y$ de $\{x_1, \ldots, x_n\}$ tal que* *(i)* $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_d$*,* $rf$ *é simétrico em cada conjunto de variáveis* $Y_i$*,* $i = 1, \ldots, d$ *e* $|Y_i| = t + l$*;*

*(ii)* $rf$ *pode ser decomposto em uma soma de polinômios multilineares* $rf = f_1 + f_2 + \ldots + f_k$ *tal que para cada* $f_i$ *existe uma partição* $Y = Y_1' \cup \ldots \cup Y_{t+l}'$ *com* $|Y_j'| = d$ *e* $f_i$ *é alternado em cada conjunto de variáveis* $Y_j'$*,* $j = 1, \ldots, t + l$*.*

*Demonstração.* Por hipótese, a tabela $T_\lambda$ contém uma tabela retangular $T_0$ com $d$ linhas e $t + l$ colunas. Sejam $N_j$, $j = 1, \ldots, d$, o conjunto dos inteiros na $j$-ésima linha de $T_0$, $N_i'$, $i = 1, \ldots, t + l$, o conjunto dos inteiros na $i$-ésima coluna de $T_0$ e $N = N_1 \cup \ldots \cup N_d$. Defina o subgrupo de $R(T_\lambda)$ $H = \{\sigma \in R(T_\lambda) | \sigma(i) = i$ se $i$ não pertencente a $N\}$ e

$$r_0 = \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau,$$

$$r = \left( \sum_{\sigma \in H} \sigma \right) r_0.$$

Seja $Y_j = \{x_i | i \in N_j\}$, $Z_i = \{x_s | s \in N_i'\}$. Então $|Y_j| = t + l$.

Claramente o elemento $g = rf$ é simétrico nas variáveis de $Y_j$ para cada $j$. Com efeito, seja $\sigma \in S_n$ que troca somente de lugar variáveis pertencentes a um $Y_j$, então $\sigma \in H$ e

$$\sigma rf = \sigma \left( \sum_{\tau \in H} \tau \right) r_0 f = \left( \sum_{\tau \in H} \sigma\tau \right) r_0 f = \left( \sum_{\rho \in H} \rho \right) r_0 f = rf.$$

Analogamente, tomando-se os devidos cuidados, mostra-se que o polinômio $r_0 f$ é alternado em cada $Z_i$, pois cada permutação que altera somente as variáveis de $Z_i$ pertence a $C(T_\lambda)$. A diferença é que ao aplicar uma $\sigma$ com essa condição a $r_0 f$, fazendo $\operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma\tau)$, temos que o sinal da permutação $\sigma$ multiplicará $r_0 f$. Assim, para qualquer $\rho \in H$, $\rho r_0 f$ é alternado nas variáveis de $Y_i' = \rho(Z_i)$, para todo $i = 1, \ldots, t + l$. E, pelo Lema 2.27, $rf$ é não-nulo e a prova está completa.

□

Usando um argumento similar, temos o resultado seguinte.

**Lema 2.30.** *Seja* $0 \neq f \in P_n$ *correspondente a uma tabela* $T_\lambda$ *e suponha* $\lambda \geq h(d, l, t)$*. Então, para algum* $r \in FS_n$*,* $rf \neq 0$ *e existe um subconjunto* $Y$ *de* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *tal que*

*(i)* $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l$*,* $rf$ *é alternado em cada conjunto de variáveis* $Y_i$*,* $i = 1, \ldots, l$*, e* $|Y_i| = t + d$*.*

*(ii)* $rf$ *pode ser decomposto na soma de polinômios multilineares* $rf = f_1 + \ldots + f_k$ *tais que, para qualquer* $f_i$*, existe uma partição* $Y = Y_1' \cup \ldots \cup Y_{t+d}'$ *com* $|Y_j'| = l$ *e* $f_i$ *é simétrico em cada conjunto de variáveis* $Y_j'$*,* $j = 1, \ldots, t + d$*.*

## 2.4 Representações induzidas, restritas e produtos tensoriais de representações

Sejam $G$ um grupo, $H$ subgrupo de $G$ e $M$ um $G$-módulo associado a uma representação $\rho$ de $G$ em $M$. A **restrição de** $\rho$ **a** $H$, denotada por $\rho\downarrow_H$, é simplesmente a restrição de $\rho$ a $H$, isto é,

$$\rho\downarrow_H: H \to GL(M) \text{ satisfazendo } \rho\downarrow_H(h) = \rho(h),$$

para todo $h \in H$. A restrição de $M$ a um $H$-módulo é denotada por $M\downarrow_H$.

Para fazer o caminho inverso, isto é, a partindo-se de uma representação de $H$ obter uma representação de $G$, precisamos aumentar o $H$-módulo de forma conveniente. Seja $\rho$ representação de $H$ em $M$ e considere $g_1, \ldots, g_k$ uma transversal à esquerda de $H$ em $G$, isto é, $g_1H, \ldots, g_kH$ é uma lista completa e sem repetições das classes laterais à esquerda de $H$ com relação à $G$. Sejam $g_1M, \ldots, g_kM$ cópias distintas do $H$-módulo $M$ e tomamos

$$M\uparrow^G := \bigoplus_{i=1}^{k} g_iM.$$

Por conveniência, denotaremos a cópia de $m \in M$ em $g_iM$ por $g_im$. Define-se a ação de $G$ sobre $M\uparrow^G$ da seguinte forma:

$$g(g_im) = g_j(hm),$$

onde $h \in H$ e $gg_i = g_jh$. No primeiro membro temos a ação de $g \in G$ arbitrário sobre um elemento genérico de $g_iM$ e no segundo membro temos a cópia de $hm \in M$ em $g_jM$. Tal ação é estendida por linearidade sobre todo $M\uparrow^G$. Sendo $\rho$ a representação original de $H$ em $M$, a representação assim obtida é chamada **representação induzida de** $\rho$ **em** $G$ e é denotada por $\rho\uparrow G$.

Repare que, tal como definida, a representação induzida depende *a priori* da escolha da transversal à esquerda. O próximo resultado (v. [12, Lema 11.3]) nos garante que qualquer escolha resulta em representações equivalentes.

**Proposição 2.31.** *Sejam $H$ subgrupo de um grupo $G$ e $\rho : H \to GL(M)$ uma representação de $H$ no espaço vetorial $M$. Sejam $g_1, \ldots, g_k$ e $g'_1, \ldots, g'_k$ duas transversais à esquerda distintas de $H$ em $G$ e, respectivamente, $\varphi$ e $\psi$ as representações induzidas em $G$ provenientes de cada uma dessas transversais. Então $\varphi$ e $\psi$ são representações isomorfas.*

O Teorema da Ramificação, enunciado a seguir ([13, Teorema 2.4.3]), nos diz como se comportam as decomposições em módulos irredutíveis das restrições e induções de $S_n$-módulos irredutíveis.

**Teorema 2.32** (Teorema da Ramificação)**.** *Denote, respectivamente, por $D_\lambda$ e $T_\lambda$ um diagrama de Young e uma tabela de Young associados à mesma partição $\lambda$ e considere $S_n$ mergulhado em $S_{n+1}$ fixando $n+1$. Então*

*(i) se $\lambda \vdash n$, então*

$$FS_ne(T_\lambda)\uparrow^{S_{n+1}} \cong \sum_{\mu\in\lambda^+} FS_{n+1}e(T_\mu),$$

*onde $\lambda^+$ é o conjunto formado por todas as partições de $n+1$ cujo diagrama de Young é obtido de $D_\lambda$ adicionando-se uma célula;*

*(ii) se $\mu \vdash n+1$, então*

$$FS_{n+1}e(T_\mu)\downarrow_{S_n} \cong \sum_{\lambda \in \mu^-} FS_n e(T_\mu),$$

*onde $\mu^-$ é o conjunto formado por todas as partições de $n$ cujo diagrama de Young é obtido a partir de $D_\mu$ apagando-se uma célula.*

Definimos a seguir o produto tensorial de módulos.

**Definição 2.33.** *Sejam $G_1$ e $G_2$ grupos, $M_1$ um $G_1$-módulo e $M_2$ um $G_2$-módulo, ambos considerados sobre o mesmo corpo $F$. Então podemos definir uma ação natural de $G_1 \times G_2$ no produto tensorial $M_1 \otimes M_2$ como $F$-espaços vetoriais da seguinte forma:*

$$(g_1, g_2)(m \otimes n) = (g_1 m) \otimes (g_2 n),$$

*para quaisquer $g_1 \in G_1$, $g_2 \in G_2$, $m \in M_1$ e $n \in M_2$, e estendido por linearidade sobre todos os elementos do produto tensorial. Se $\rho_1$ e $\rho_2$ são as representações associadas, respectivamente, às ações de $G_1$ sobre $M_1$ e de $G_2$ sobre $M_2$, a representação associada à ação de $G_1 \times G_2$ sobre $M_1 \otimes M_2$ é chamada* ***representação do produto tensorial de** $\rho_1$ **por** $\rho_2$ e é denotada por $\rho_1 \otimes \rho_2$.*

Dados um $S_m$-módulo $M$ e um $S_n$-módulo $N$, temos então que $M \otimes N$ é um $S_m \times S_n$-módulo, tal como descrito acima. Realizamos $S_m \times S_n$ como subgrupo de $S_{m+n}$ considerando que $S_m$ age no conjunto $\{1, 2, \ldots, m\}$ e $S_n$ age em $\{m+1, \ldots, m+n\}$. Assim podemos tomar a representação induzida em $S_{m+n}$ e denotamos o $S_{m+n}$-módulo dessa representação por $M \widehat{\otimes} N$.

A seguir apresentamos uma maneira de descrever a decomposição em irredutíveis dessa representação a partir da decomposição em irredutíveis das representações de $S_m$ em $M$ e de $S_n$ em $N$. Para tanto precisaremos de algumas definições.

**Definição 2.34.** *Uma* ***partição não ordenada*** *de um natural $n$ é uma sequência finita de inteiros positivos $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ cuja soma dos termos é $n$. Em outras palavra, remove-se a condição dos termos decrescerem da definição de partição. Denota-se $\alpha \models n$.*

**Definição 2.35.** *Sejam $n$ um inteiro positivo, $\lambda \vdash n$ e $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \models n$. Uma tabela de Young de formato $\lambda$ e conteúdo $\alpha$ é uma maneira de preencher o diagrama $D_\lambda$ com os inteiros positivos $1, \ldots, t$ de modo que o inteiro $i$ aparece repetido exatamente $\alpha_i$ vezes na tabela.*

**Exemplo 2.36.** *São exemplos de tabelas de formato $(4, 2, 1)$ e conteúdo $(1, 3, 2, 1)$*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 2 & 2 \\ \hline 4 & 2 \\ \cline{1-2} 3 \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 3 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 \\ \cline{1-2} 2 \\ \cline{1-1}\end{array}$$

Uma tabela é chamada ***semistandard*** se suas entradas são não decrescentes ao longo de cada linha (da esquerda para a direita) e estritamente crescentes ao longo de cada coluna (de cima para baixo). Considerando ainda nas partições a ordem parcial introduzida na seção anterior, se $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$ são tais que $\lambda \geq \mu$, define-se a **anti-partição** $\lambda \setminus \mu = (\lambda_1 - \mu_1, \ldots, \lambda_k - \mu_k)$. O respectivo diagrama $D_{\lambda \setminus \mu}$ é formado pelas células de $D_\lambda$ que não pertencem a $D_\mu$. No caso em que

$\lambda = (4,3,3,1)$ e $\mu = (3,3,1)$, então $\lambda \setminus \mu = (1,0,2,1)$ e o diagrama $D_{\lambda \setminus \mu}$ corresponde àquele formado pelas células marcadas com asterisco no diagrama abaixo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | * |
| | | | |
| | * | * | |
| * | | | |

**Definição 2.37.** *Uma **anti-tabela** $T_{\lambda\setminus\mu}$ é um preenchimento das células do diagrama $D_{\lambda\setminus\mu}$ com naturais distintos dois a dois. Se ocorrem repetições, temos uma **anti-tabela generalizada**. Define-se analogamente a noção de **anti-tabela semistandard**.*

**Definição 2.38.** *Seja $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_t) \models n$. Dizemos que $\alpha$ é uma **permutação de cadeia** se, para cada $j$, o número de $i$'s que ocorrem em $\alpha_1, \ldots, \alpha_j$ é maior ou igual ao número de $i+1$'s, para cada $i$.*

**Exemplo 2.39.** $(0,1,2,0,1,0,2,1) \models 7$ *é uma permutação de cadeia, já que, a esquerda de cada termo, a quantidade de $0$'s nunca é inferior à quantidade de $1$'s, que nunca é inferior à quantidade de $2$'s.*

Finalmente podemos enunciar a Regra de Littlewood-Richardson ([13, Teorema 2.8.13]).

**Teorema 2.40** (Regra de Littlewood-Richardson)**.** *Sejam $\lambda \vdash m$ e $\mu \vdash n$ e $W_\lambda$, $W_\mu$, respectivamente, o $S_m$-módulo irredutível associado a $\lambda$ e o $S_n$-módulo irredutível associado a $\mu$. Então*

$$W_\lambda \widehat{\otimes} W_\mu \cong \sum_{\nu \vdash m+n} k^{\mu}_{\nu\setminus\lambda} W_\nu,$$

*onde $k^{\mu}_{\nu\setminus\lambda}$ denota o número de tabelas* semistandard *de formato $\nu \setminus \lambda$ e conteúdo $\mu$ que induzem permutações de cadeia quando lemos suas entradas da direita para a esquerda e de cima para baixo.*

Um algoritmo para determinar a decomposição seguindo a Regra de Littlewood-Richardson é o seguinte ([13, Corolário 2.8.14]).

Considerando $T_\mu$ como sendo o diagrama $D_\mu$ preenchido por símbolos genéricos $a_{ij}$ no lugar de números.

(i) Adicione a $D_\lambda$ células preenchidas com os símbolos $a_{1j}$ de modo que o número de células em cada linha da nova tabela seja não decrescente de cima para baixo e a célula preenchida com $a_{1,j+1}$ deve aparecer em uma coluna à esquerda daquela que contém a célula adicionada com o símbolo $a_{1,j}$ (não necessariamente imediatamente à esquerda).

(ii) Em cada uma das novas tabelas obtidas no item(i), adicione de todas as maneiras possíveis as células preenchidas com os símbolos $a_{2,j}$, seguindo as mesmas regras com mais um cuidado extra: se $l < i$, a célula preenchida por $a_{lj}$ deve aparecer em uma linha superior àquela contendo $a_{ij}$.

(iii) Procede-se assim até se esgotarem os elementos da tabela $T_\mu$.

Encerramos com um exemplo. Considere $\lambda = (2, 2, 1)$ e $\mu = (2, 1)$. Então

$$T_\mu = \begin{ytableau} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau}.$$

As maneiras de adicionar as células da primeira linha preenchidas ao diagrama associado a $\lambda$ seguindo as regras enumeradas anteriormente são as seguintes.

$$\begin{ytableau} {} & {} & a_{12} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} & a_{12} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} \\ a_{12} \end{ytableau} \tag{2.4}$$

Passando então às possibilidades para adicionar $a_{21}$, temos

$$\begin{ytableau} {} & {} & a_{12} & a_{11} \\ {} & {} & a_{21} \\ {} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{12} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} & a_{21} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{12} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} \\ a_{21} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} & a_{21} \\ {} & a_{12} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} & a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} & a_{21} \\ {} \\ a_{12} \end{ytableau}, \quad \begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} & a_{21} \\ a_{12} \end{ytableau},$$

$$\begin{ytableau} {} & {} & a_{11} \\ {} & {} \\ {} \\ a_{12} \\ a_{21} \end{ytableau}.$$

Repare que as três primeiras tabelas acima obtidas após a inserção de $a_{21}$ provêm da primeira tabela de (2.4); as duas seguintes provêm da segunda tabela de (2.4) e as três últimas provêm da última tabela de (2.4).

Assim, pela Regra de Littlewood-Richardson, temos

$$W_{(2,2,1)} \widehat{\otimes} W_{(2,1)} \cong W_{(4,3,1)} + W_{(4,2,2)} + W_{(4,2,1,1)} + W_{(3,3,2)} + 2W_{(3,2,2,1)} + W_{(3,3,1,1)} + W_{(3,2,1,1,1)}.$$

# Capítulo 3

# O PI-expoente de uma álgebra

Neste capítulo apresentamos a demonstração do Teorema de Giambruno-Zaicev sobre a existência do PI-expoente e do fato de o mesmo ser inteiro. Além disso, são calculados os PI-expoentes de álgebras importantes. Esse capítulo segue de perto o Cap. 6 de [11].

## 3.1 Motivação

Como mostrado no Teorema de Regev (Teorema 1.55), a sequência de codimensões de uma PI-álgebra é limitada exponencialmente e, portanto, a sequência $\sqrt[n]{c_n(A)}$ é limitada e existem $\underline{\exp}(A) := \liminf \sqrt[n]{c_n(A)}$ e $\overline{\exp}(A) = \limsup \sqrt[n]{c_n(A)}$. No caso de ambos coincidirem, temos a existência de $\exp(A) = \overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A)$, chamado **expoente da PI-álgebra** $A$. Na década de 1980, duas conjecturas acerca do expoente de uma PI-álgebra apareceram.

**Conjectura 3.1** (Amitsur)**.** *Para qualquer PI-álgebra $A$, $\exp(A)$ existe e é um inteiro não negativo.*

Se $f(x)$ e $g(x)$ são duas funções de variável real, então $f(x)$ e $g(x)$ são iguais assintoticamente e escrevemos $f(n) \simeq g(n)$ se $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$.

**Conjectura 3.2** (Regev)**.** *Para qualquer PI-álgebra $A$, existe uma constante $C$, um semi-inteiro $q$ e um inteiro $d \geq 0$ tais que*

$$c_n(A) \simeq Cn^q d^n.$$

Nesse capítulo provaremos a conjectura de Amitsur sobre um corpo de característica zero seguindo o tratamento de [11]. Mais precisamente, será mostrado que existem constantes $C_1, C_2, q_1, q_2$ e um inteiro $d \geq 0$ tais que

$$C_1 n^{q_1} d^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{q_2} d^n,$$

para todo natural $n$.

Para o caso de uma álgebra de dimensão finita, mostramos a seguir que, caso exista, o expoente da mesma não supera sua dimensão $d$. Isso melhora e estimativa dada pelo Teorema de Regev sobre a Codimensão, que fornece o limitante $d^2$, usando a identidade mostrada na Proposição 1.21.

**Teorema 3.3.** *Seja $A$ uma álgebra de dimensão finita $d$. Então $c_n(A) \leq d^n$.*

*Demonstração.* Repare que um polinômio multilinear $f$ nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ é uma identidade de $A$ se, e somente se, o mesmo se anula quando suas variáveis são substituídas por quaisquer elementos $a_1, a_2, \ldots, a_d$, que constituem uma base para $A$ como $F$-espaço vetorial. O número de tais substituições é $d^n$, pois há $d$ possibilidades para a substituição de cada variável. Ou seja,

$$f(a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma a_{i_{\sigma(1)}} \ldots a_{i_{\sigma(n)}} = 0,$$

para qualquer dessas $d^n$ substituições. Repare que os polinômios multilineares que procuramos devem satisfazer essas $d^n$ equações nas incógnitas $\alpha_\sigma$, que são $n!$. Assim, a dimensão da solução desse sistema linear homogêneo é $n! - r$, onde $r$ é o posto da matriz reduzida do sistema e, portanto, $r \leq d^n$. Assim,

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap T(A)} = \dim P_n - \dim(P_n \cap T(A)) = n! - (n! - r) = r \leq d^n.$$

□

Assim, obtemos trivialmente o corolário seguinte.

**Corolário 3.4.** *Se* $\dim A = d \in \mathbb{N}$, *então* $\overline{\exp}(A) \leq d$.

## 3.2 Um candidato para o expoente

Ao longo dessa seção $F$ sempre será algebricamente fechado (de característica zero como assumido desde o início) e $A$ será uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de dimensão finita sobre $F$. Denotaremos por $A_{ss} + J$ a decomposição de Wedderburn da álgebra $A$ (v. Teorema 1.57), onde $A_{ss}$ é a componente semissimples e $J$ o radical de Jacobson de $A$. Como visto no Teorema 1.59, $J$ é um ideal graduado e podemos assumir $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$, onde os $A_j$ são superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples. Denotaremos ainda por $m$ a dimensão da álgebra $A$ e por $p$ o menor inteiro positivo tal que $J^p = 0$.

Considere todos os possíveis produtos do tipo

$$B_1 J B_2 J \ldots J B_r \neq 0,$$

onde os $B_j$ são elementos distintos do conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ e $r \geq 1$. Definimos

$$q = \max \dim_F (B_1 \oplus \ldots \oplus B_r)$$

tais que $B_1, B_2, \ldots, B_r$ satisfazem a condição de produto não nulo dada acima.

Perceba que, se considerarmos todos os produtos da forma

$$B_1 J \ldots J B_r \neq 0$$

sem a condição dos $B_j$ serem distintos dois a dois, continuamos tendo $\dim_F(B_1 + \ldots + B_r) \leq q$, já que se algum $B_i$ ocorre anteriormente no produto, podemos substituir $J B_i J$ por $J$, já que tal $B_i$ não contribui para aumentar a dimensão da soma em questão, obtendo, através da repetição de tal procedimento, um produto não nulo com todos os $B_j$ distintos.

Retomemos algumas definições do Capítulo 2. Sejam $\lambda$ uma partição do natural $n$, $T_\lambda$ uma tabela de Young associada a $\lambda$. Lembramos que $f \in P_n$ corresponde a $T_\lambda$ se existe $f_0 \in P_n$ tal que $f = e(T_\lambda)f_0$.

A seguir consideramos a ordem do produto quando vemos as partições como sequências eventualmente nulas em $\prod_{\mathbb{N}} \mathbb{N}$, isto é, se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ e $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l)$, temos que $\lambda \geq \mu$ se $k \geq l$ e $\lambda_i \geq \mu_i$ para todo inteiro $i$ satisfazendo $1 \leq i \leq k$ (considera-se $m_i = 0$ se $l < i \leq k$).

Relembramos que, para inteiros inteiros positivos $d, l, t$ denotamos por $h(d, l, t)$ a partição $([l+t]^d, [l]^t)$ de $n = (l+t)d + lt$ e que o envelope de Grassmann $G(A)$ de uma superálgebra $A$ é dado por

$$G(A) = (E^{(0)} \otimes A^{(0)}) \oplus (E^{(1)} \otimes A^{(1)}).$$

**Lema 3.5.** *Seja $\lambda \geq h(d, l, t)$ onde $d + l > q$, $t > (d + l)m + p$ e $m, p, q$ são definidos acima. Se $f$ é um polinômio multilinear correspondente à tabela $T_\lambda$, então $f \in T(G(A))$.*

*Demonstração.* Primeiro observemos que, a fim de provar o lema, é suficiente mostrar que se $f \neq 0$ existe um elemento $r \in FS_n$ tal que $0 \neq rf \in T(G(A))$. De fato, como $f$ gera um $S_n$-submódulo à esquerda irredutível de $P_n$, teremos $FS_nf = FS_nrf \subseteq T(G(A)) \cap P_n$ e $f \in T(G(A))$ seguirá.

Um elemento $r \in FS_n$ com a propriedade que $rf \neq 0$ será escolhido durante a demonstração.

Fixe primeiro uma base homogênea $C = C^{(0)} \cup C^{(1)}$ de $A$, que é a união disjunta de bases homogêneas de $A_1, \ldots, A_k$ e $J$, respectivamente. Agora, a fim de provar que um polinômio do tipo $rf$ é uma identidade de $G(A)$, é suficiente mostrar que $rf$ se anula em todos elementos do tipo $c \otimes g$ e $c' \otimes g'$, onde $c \in C^{(0)}$, $c' \in C^{(1)}$, $g \in E^{(0)}$, $g' \in E^{(1)}$.

Sejam $c_1, \ldots, c_s$ elementos homogêneos distintos em $C \cap A_{ss}$ e suponha $s > q$. Então qualquer produto de elementos de $A$ que contenha os elementos $c_1, \ldots, c_s$ deve ser igual a zero, tal como resulta da definição de $q$, por $A_iA_j = 0$ se $i \neq j$ e por $dim\ A_i \leq q < s$. Por isso, se substituirmos $c_1 \otimes g_1, \ldots, c_s \otimes g_s$ no lugar de algumas variáveis de $rf$, o resultado da substituição em $G(A)$ será zero. Portanto, dada qualquer subálgebra semissimples $\mathbb{Z}_2$-graduada $B = B^{(0)} \oplus B^{(1)}$ de $A$ com $\dim B \leq q$, é suficiente provar que $rf$ assume valor zero em elementos do tipo

$$c_1 \otimes g_1, \ldots, c_s \otimes g_s, e_1 \otimes h_1, e_2 \otimes h_2, \ldots$$

onde $c_1, \ldots, c_s \in C \cap B$, $e_1, e_2, \ldots \in J$, $g_i, h_j \in E$ são todos elementos homogêneos.

Note que, como por hipótese $q < d + l$, ou $\dim B^{(0)} \leq d - 1$ ou $\dim B^{(1)} \leq l - 1$. Vamos examinar os dois casos. Suponha primeiro que $\dim B^{(0)} \leq d - 1$. Pelo Lema 2.29, existe $r \in FS_n$ e um subconjunto de variáveis $Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_d$ tal que $rf \neq 0$ é simétrico em cada conjunto de variáveis $Y_i$ para qualquer $i$; e existe também uma decomposição

$$rf = f_1 + f_2 + \ldots$$

onde $f_1, f_2, \ldots$ são polinômios alternados em subconjuntos disjuntos adequados de $Y$. Afirmamos que, para tal $r$, temos $rf \in T(G(A))$. Isto completará a prova neste caso.

Suponha que há alguma substituição em $rf$ resultando em um valor não nulo em $G(A)$. Então, pelo menos uma das parcelas $f_i$ deveria ter uma substituição não-nula. Sem perda de generalidade suponha que $f_1$ é uma dessas parcelas. Novamente, pelo Lema 2.29, $Y$ pode ser particionado como

$$Y = Y'_1 \cup \ldots \cup Y'_{t+l}$$

com $|Y'_j| = d$ e $f_1$ é alternado nas variáveis de cada subconjunto $Y'_j$, $j = 1, \ldots, t+l$. Segue que, se para duas variáveis $y_1, y_2$ em $Y'_i$ substituirmos $y_1$ por $c \otimes g_1$ e $y_2$ por $c \otimes g_2$, onde $c \in B^{(0)}$, $g_1, g_2 \in E^{(0)}$, então $f_1$ será zero.

Por outro lado, como $\dim B^{(0)} \leq d-1$, para obter um valor não-nulo pra $rf$, precisamos substituir no máximo $d-1$ elementos do tipo $c \otimes g$, $c \in B^{(0)}$, $g \in E^{(0)}$, em cada conjunto de variáveis $Y'_i$. Isto significa que precisamos substituir em $rf$ pelo menos $t+l$ elementos do tipo $c \otimes g$, $c \in B^{(1)}$, $g \in E^{(1)}$, ou $c \in J$, $g \in E$ no lugar das variáveis de $Y$. Mas $J^p = 0$, por isso, devemos substituir pelo menos $l+t-p+1 > dm$ elementos do tipo $c \otimes g$ com $c \in B^{(1)}$. Segue que para algum $1 \leq i \leq d$ substituiremos mais que $m$ variáveis em $Y_i$ por elementos $c \otimes g$ onde $c$ é um elemento base de $B^{(1)}$. Como $m \geq \dim A^{(1)}_{ss} \geq \dim B^{(1)}$, segue que existem duas variáveis $y_1, y_2 \in Y_i$ assumindo valor $c \otimes g_1$ e $c \otimes g_2$ respectivamente, onde $c \in B^{(1)}$, $g_1, g_2 \in E^{(1)}$. Mas $rf$ é simétrico em $y_1, y_2$. Por isso, o valor correspondente será zero. Isto completa a prova do lema neste caso.

Agora assuma que $\dim B^{(1)} \leq l-1$. Como antes, pelo Lema 2.30, existe $r \in FS_n$ e um conjunto de variáveis $Y$ para $rf$ tal que

$$Y = Y_1 \cup \ldots \cup Y_l,$$

$rf$ é alternado em cada $Y_i$, $i = 1, \ldots, l$ e $rf = f_1 + f_2 + \ldots$ onde para cada $f_i$ existe uma partição $Y = Y'_1 \cup \ldots \cup Y'_{t+d}$ nos subconjuntos simétricos de ordem $l$. Se, por exemplo, $f_1 \neq 0$ para alguma substituição, então devemos substituir pelo menos $t+d-p+1 > lm$ variáveis de $Y$ por algum $c \otimes g$, $c \in B^{(0)}$, $g \in E^{(0)}$, porque $f_1$ é simétrico em $y_1, y_2 \in Y'_i$ e $f_1$ será 0 se $y_1 = c \otimes g_1$, $y_2 = c \otimes g_2$, com $c \in B^{(1)}$, $g_1, g_2 \in E^{(1)}$.

Como $\dim B^{(0)} \leq m$, devemos substituir algum $y_1, y_2$ no mesmo conjunto alternado $Y_i$ por $c \otimes g_1$, $c \otimes g_2$ respectivamente, onde $g_1, g_2 \in E^{(0)}$ e $c$ é um dos elementos da base de $B^{(0)}$. Por isso $rf$ terá valor zero e a prova está completa também neste caso.

□

Lembre que o Teorema 2.25 nos diz que $P_n \cong FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda$ sendo os $I_\lambda$ ideais minimais. Do lema anterior, temos o seguinte:

**Corolário 3.6.** *Seja $d+l = q+1$ e $t = (m+1)^2$ onde $m = \dim A$. Então $\bigoplus_{\lambda \geq h(d,l,t)} I_\lambda \subseteq T(G(A))$. Em outras palavras, se $\lambda \geq h(d,l,t)$, então $W_\lambda$ aparece com multiplicidade $d_\lambda$ na decomposição por irredutíveis de $P_n \cap T(G(A))$ e com multiplicidade zero na decomposição de $P_n(G(A))$.*

*Demonstração.* Seja $\lambda \geq h(d,l,t)$. Como $q \leq m$ e $p \leq m$ onde $J^p = 0$, então

$$t = (m+1)m + m + 1 > (q+1)m + p = (d+l)m + p.$$

Por isso, pelo lema anterior, para qualquer tabela $T_\lambda$, $e(T_\lambda)FS_n \subseteq T(G(A))$. Segue que

$$I_\lambda = FS_n e(T_\lambda) FS_n \subseteq T(G(A)).$$

□

A seguir provamos dois resultados necessários para a próxima proposição.

**Lema 3.7.** *Sejam $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n'$ tais que $\mu \leq \lambda$. Se $n - n' \leq c$, então $d_\mu \leq d_\lambda \leq n^c d_\mu$.*

*Demonstração.* Pela fórmula do gancho (v. Teorema 2.24)

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde os $h_{ij}$'s são os números do gancho do $\lambda$-diagrama de Young $D_\lambda$ (v. Definição 2.21). Claramente, provando o caso $c = 1$, os demais seguirão por indução. Por isso, vamos assumir que $n' = n - 1$ e

$$d_\mu = \frac{(n-1)!}{\prod_{i,j} h'_{ij}},$$

onde os $h'_{ij}$ são os números de gancho de $D_\mu$. Como $\mu \leq \lambda$, é facilmente visto que $\prod h'_{ij} < \prod h_{ij}$. Por isso

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}} < \frac{n!}{\prod h'_{ij}} = n d_\mu$$

e a segunda desigualdade está provada.

A desigualdade $d_\mu \leq d_\lambda$ segue claramente da segunda parte do Teorema da Ramificação (Teorema 2.32). □

O teorema que enunciamos a seguir sem demonstração é o principal resultado de [4].

**Teorema 3.8** (Teorema 16 de [4]). *Seja $A$ qualquer PI-álgebra sendo $P_n(A)$ decomposto em $S_n$-módulos irredutíveis da seguinte forma*

$$P_n(A) \cong \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda W_\lambda,$$

*onde $m_\lambda$ denota a multiplicidade do $S_n$-módulo irredutível $W_\lambda$ na decomposição de $P_n(A)$. Então existe um polinômio $g_A(x)$ tal que, para todo $n$,*

$$\sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \leq g_A(n).$$

*Em particular, os $m_\lambda$ são uniformemente polinomialmente limitados.*

Para os próximos resultados, precisaremos generalizar um pouco o conceito de partição. Consideraremos o **gancho infinito** $H(d,l)$ como sendo a partição $([\infty]^d, [l]^\infty)$, ou seja, um diagrama associado a esta partição teria infinitas células nas primeiras $d$ linhas e todas as infinitas colunas restantes teriam $l$ células. Diremos que a partição $\lambda$ de um inteiro positivo $n$ pertence a $H(d,l)$ se o diagrama de Young associado a $\lambda$ estiver inteiramente contido no diagrama associado a $H(d,l)$, isto é, sendo $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, temos que $\lambda \in H(d,l)$ se $\lambda_{d+1} \leq l$.

**Lema 3.9.** *Para algumas constantes $C, r > 0$ a seguinte inequação acontece*

$$\sum_{\lambda \vdash n; \lambda \in H(d,l)} d_\lambda \leq C n^r (d+l)^n.$$

*Além disso, para algumas constantes $a, b$ temos a seguinte equação assintótica*

$$d_{h(d,l,k)} \simeq_{n \to \infty} a n^b (d+l)^n,$$

*onde $h(d,l,k) \vdash n$.*

*Demonstração.* É facilmente visto que o número de partições $\lambda \vdash n$ situadas no gancho $H(d,l)$ é limitada por $(n+1)^{d+l}$, isto é o número de parcelas em

$$\sum_{\lambda \vdash n, \lambda \in H(d,l)} d_\lambda$$

é polinomialmente limitada. Por isso, para obter um limitante superior, precisamos somente provar que $d_\lambda \leq (d+l)^n$. Como na prova do Lema 3.7, usaremos a fórmula de gancho. Sejam $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_l)$ partições conjugadas. Então, para todo $i = 1, \ldots, d$, temos

$$\prod_j h_{ij} \geq \lambda_i!. \tag{3.1}$$

Agora tomemos

$$\lambda''_j = \begin{cases} \lambda'_j - d, & \text{se } \lambda'_j \geq d; \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

para todo $j = 1, \ldots, l$. Então $\lambda_1 + \ldots + \lambda_d + \lambda''_1 + \ldots + \lambda''_l = n$ e, analogamente à Equação 3.1,

$$\prod_{i>d,\ j} h_{ij} \geq \lambda''_1! \ldots \lambda''_l!.$$

Como $\lambda \in H(d,l)$, obtemos

$$\prod_{i,j} h_{ij} = (\prod_{j_1} h_{1j_1})(\prod_{j_2} h_{2j_2})\ldots(\prod_{j_d} h_{dj_d})(\prod_{i>d,\ j} h_{ij}) \geq \lambda_1! \ldots \lambda_d! \lambda''_1! \ldots \lambda''_l!$$

e

$$d_\lambda = \frac{n!}{\prod h_{ij}} \leq \frac{n!}{\lambda_1! \ldots \lambda_d! \lambda''_1! \ldots \lambda''_l!} \leq (d+l)^n,$$

pois, pelo teorema multinomial, qualquer coeficiente binomial generalizado

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_m} = \frac{n!}{k_1! \ldots k_m!},$$

onde $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$, é limitado por $m^n$. Por isso

$$\sum_{\lambda \vdash n; \lambda \in H(d,l)} d_\lambda \leq C n^r (d+l)^n,$$

para algumas constantes $C, r$.

A fim de calcular o comportamento assintótico preciso de $d_{h(d,l,k)}$, dividimos o produto $\Pi = \prod h_{ij}$ dos números do gancho em três partes: $\Pi = \Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$, onde

$$\Pi_1 = \prod_{i=1}^{d} \prod_{j=l+1}^{l+k} h_{ij},\ \Pi_2 = \prod_{i=d+1}^{d+k} \prod_{j=1}^{l} h_{ij},\ \Pi_3 = \prod_{1 \leq i \leq d; 1 \leq j \leq l} h_{ij}.$$

Então

$$\Pi_1 = k!\frac{(k+1)!}{1!}\frac{(k+2)!}{2!}\dots\frac{(k+d-1)!}{(d-1)!} = (k!)^d\frac{(k+1)}{1!}\frac{(k+2)(k+1)}{2!}\dots\frac{(k+d-1)\dots(k+1)}{(d-1)!}$$

$$\Pi_2 = k!\frac{(k+1)!}{1!}\frac{(k+2)!}{2!}\dots\frac{(k+l-1)!}{(l-1)!} = (k!)^l\frac{(k+1)}{1!}\frac{(k+2)(k+1)}{2!}\dots\frac{(k+l-1)\dots(k+1)}{(l-1)!}$$

e

$$\Pi_3 = (2k+1)(2k+2)\dots(2k+d)(2k+2)(2k+3)\dots(2k+d+1)\dots(2k+l)(2k+l+1)\dots(2k+l+d-1).$$

A seguir, aplicaremos a fórmula de Stirling

$$n! \simeq \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

Então, como $n = k(d+l)+dl$, fazendo $k \to \infty$, obtemos

$$n! \simeq k^{ld}(d+l)^{ld}(kl+kd)! \simeq C_1\sqrt{k}k^{ld}\frac{(kl+kd)^{kl+kd}}{e^{kl+kd}},$$

$$\prod h_{ij} = \Pi_1\Pi_2\Pi_3 \simeq C_2k^{1+2+\dots+d-1}k^{1+2+\dots+l-1}(k!)^{d+l}(2k)^{dl} = 2^{dl}C_2k^{\frac{d^2-d}{2}+\frac{l^2+l}{2}}(k!)^{d+l}k^{dl} \simeq C_3\sqrt{k^{d^2+l^2}}k^{dl}\frac{k^{kl+kd}}{e^{kl+kd}}.$$

Por isso

$$d_{h(d,l,k)} = \frac{n!}{\prod h_{ij}} \simeq C_4k^a(d+l)^{k(d+l)} = C_4k^a(d+l)^a(d+l)^{k(d+l)-a} = C_4(k(d+l))^a(d+l)^{k(d+l)-a}.$$

Finalmente, fazendo $k \to \infty$ com $n = k(d+l)+dl \to \infty$, obtemos

$$d_{h(d,l,k)} \simeq an^b(d+l)^n, \text{ pois } n \simeq k(d+l)$$

para algumas constantes $a, b$ como requisitado.

$\square$

**Proposição 3.10.** *Seja $A$ uma superálgebra de dimensão finita e seja $q$ como definido no início desta seção. Então existem constantes $C_1, r_1 > 0$ dependendo somente de $\dim A$, tal que $c_n(G(A)) \leq C_1n^{r_1}q^n$.*

*Demonstração.* Considere a decomposição de $P_n(G(A))$ em $S_n$-módulos irredutíveis

$$P_n(G(A)) \cong \sum_{\lambda\vdash n} m_\lambda W_\lambda, \tag{3.2}$$

onde $m_\lambda$ denota a multiplicidade do $S_n$-módulo irredutível $W_\lambda$ na decomposição de $P_n(G(A))$. Suponha que $\lambda \vdash n$ é tal que $\lambda \geq h(d,l,t)$ com $d+l = q+1$ e $t = (m+1)^2$ onde $m = \dim A$. Então pelo Corolário 3.6, $m_\lambda = 0$ para este $\lambda$.

Afirmamos que, dada qualquer partição $\lambda \vdash n$ tal que $m_\lambda \neq 0$, $\lambda \leq H(d, q-d) \cup ([s]^u) := ([\infty]^d, [q-d+s]^u, [q-d]^\infty)$, onde $s = (m+1)^2 + m - q + d$ e $u = (m+1)^2 + m - d$. Note que, grosseiramente falando, um diagrama associado a $H(d, q-d) \cup ([s]^u)$ corresponde à união do gancho infinito $H(d, q-d)$, com um diagrama retangular $(s^u)$ encaixado no "vértice côncavo" do gancho infinito.

De fato, seja $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ e suponha primeiro que $\lambda_i > (m+1)^2 + m$ para algum $i$. Seja $k$ o maior inteiro tal que $\lambda_k > (m+1)^2 + m$. Se $k > q$, então $\lambda \geq ([(m+1)^2]^{q+1})$, e temos uma contradição do Corolário 3.6. Assim, $k \leq q$. Se $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \geq q - k + 1$, então o $\lambda$-diagrama $D_\lambda$ contém um subdiagrama $D_\mu$ onde

$$\mu = ([(m+1)^2 + m + 1]^k, [q-k+1]^{(m+1)^2+m+1-k}).$$

Como $(m+1)^2 + m + 1 - (q-k+1) \geq (m+1)^2$ e $(m+1)^2 + m + 1 - k \geq (m+1)^2$, segue que $\mu \geq h(k, q-k+1, (m+1)^2)$. Por isso, $\lambda \geq h(k, q-k+1, (m+1)^2)$ e novamente temos uma contradição do Corolário 3.6. Por isso $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \leq q-k$ e $\lambda$ está contido em $H(k, q-k) \cup (s^u)$ como desejado.

Agora podemos assumir que $\lambda_1 \leq (m+1)^2 + m$. Claramente $\lambda_{(m+1)^2+m+1} \leq q$ pois, caso contrário, $\lambda \geq ([q+1]^{(m+1)^2})$, contrariando novamente o Corolário 3.6. Isto significa que $\lambda$-diagrama está contido em $H(0, q) \cup (s^u)$ e a afirmação está provada.

Foi provado que se $m_\lambda \neq 0$, então $D_\lambda$, o diagrama de $\lambda$, contém um subdiagrama $D_\mu$ tal que $D_\mu \subset H(d, q-d)$ e, se $\lambda \vdash n$, $\mu \vdash n'$ temos que $n - n' \leq T = su$. Pelo Lema 3.7, $d_\lambda \leq n^T d_\mu$. Denote por $S$ o conjunto de todas as partições $\lambda \vdash n$ tais que $m_\lambda \neq 0$ na Equação 3.2. Pelo Teorema 3.8, existe uma constante $k > 0$ tal que $m_\lambda \leq n^k$, para todo $\lambda \in S$. Portanto, usando os Lemas 3.7 e 3.9, obtemos

$$c_n(G(A)) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \leq n^k \sum_{\lambda \in S} d_\lambda \leq n^k T_0 \sum_{i=0}^{q} n^T \sum_{n'=1}^{n} \sum_{\mu \vdash n'; \mu \in H(i, q-i)} d_\mu \leq$$

$$\leq n^k T_0 n^{T_0} \sum_{i=0}^{q} \sum_{n'=1}^{n} C'(n')^r q^{n'} \leq T_0 n^{k+T_0} C' n^r q^n n(q+1).$$

Então, $c_n(G(A)) \leq C_1 n^{r_1} q^n$, onde $r_1 = k + T_0 + r + 1$, $C_1 = T_0 C'(m+1) \geq T_0 C'(q+1)$ e $T_0 = ((m+1)^2 + m)^2$.

□

## 3.3 Identidades graduadas e envelope de Grassmann

Nesta seção, de maneira parecida com o que foi feito ao longo dos Teoremas 1.42, 1.43, da Proposição 1.45 e do corolário destes resultados, as identidades ordinárias de uma álgebra serão relacionadas às identidades graduadas de um envelope de Grassmann de uma álgebra bem comportada.

Usaremos, tal como anteriormente ao longo dos resultados descritos, $F\langle Y, Z \rangle$ para denotar a álgebra associativa livre $\mathbb{Z}_2$-graduada, sendo $Y = \{y_1, \ldots, y_n, \ldots\}$ o conjunto formado pelas variáveis homogêneas pares, isto é, de $\mathbb{Z}_2$-grau nulo, e $Z = \{z_1, \ldots, z_n, \ldots\}$ o conjunto das variáveis homogêneas ímpares, isto é, de $\mathbb{Z}_2$-grau 1. O T-ideal graduado de identidades graduadas de uma superálgebra $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ será denotado por $T_{\mathbb{Z}_2}(A)$. Novamente denotaremos por $P_{k,m}$ o espaço vetorial formado pelos polinômios multilineares nas variáveis $y_1, \ldots, y_k$ e nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$. Também denotaremos por$\,\tilde{}\,$, o automorfismo de espaço vetorial de $P_{k,m}$ em si mesmo, como definido após o Teorema 1.43. Lembramos ainda que o Lema 1.44 nos garante que um polinômio $f$ é identidade graduada de uma álgebra $A$ se e somente se $\widetilde{f}$ é identidade graduada de $G(A)$, o envelope de Grassmann da superálgebra $A$ tal como na Definição 1.41.

Agora consideremos a ação do grupo $S_k \times S_m$ no espaço $P_{k,m}$ fazendo $S_k$ agir em $y_1, \ldots, y_k$ e $S_m$ em $z_1, \ldots, z_m$. Seja $R_1 = FS_k$ e $R_2 = FS_m$ as duas álgebras de grupos respectivas. A seguir comparamos a estrutura de $P_{k,m}$ como um módulo à esquerda sobre $R_1$, sobre $R_2$ e sobre $R_1 \otimes R_2$. Pela extensão natural desta ação, para qualquer $b = \sum_{\sigma \in S_m} \beta_\sigma \sigma \in FS_m$, escrevemos

$$\widetilde{b} = \sum_{\sigma \in S_m} \operatorname{sgn}(\sigma)\beta_\sigma \sigma.$$

**Lema 3.11.** *Sejam $a \in R_1$, $b \in R_2$, $f \in P_{k,m}$. Então*

*(i)* $\widetilde{bf} = \widetilde{b}\widetilde{f}$, $\widetilde{af} = a\widetilde{f}$, $\widetilde{\widetilde{b}} = b$;

*(ii) $f$ é alternado nas variáveis $z_1, \ldots, z_m$ se, e somente se, $\widetilde{f}$ é simétrico em $z_1, \ldots, z_m$.*

*Demonstração.* Seja

$$f = \sum_{\sigma \in S_m, W=(w_0,\ldots,w_m)} \alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m$$

e $b = \sum_{\tau \in S_m} \beta_\tau \tau$. Então

$$bf = \sum_{\sigma,\tau \in S_m; W=(w_0,\ldots,w_m)} \alpha_{\sigma,W} \beta_\tau w_0 z_{\tau\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\tau\sigma(m)} w_m$$

e

$$\widetilde{bf} = \sum_{\sigma,\tau \in S_m; W=(w_0,\ldots,w_m)} \operatorname{sgn}(\tau\sigma)\alpha_{\sigma,W} \beta_\tau w_0 z_{\tau\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\tau\sigma(m)} w_m =$$

$$= \left(\sum_{\tau \in S_m} \operatorname{sgn}(\tau)\beta_\tau \tau\right)\left(\sum_{\sigma \in S_m; W=(w_0,\ldots,w_m)} \operatorname{sgn}(\sigma)\alpha_{\sigma,W} w_0 z_{\sigma(1)} w_1 \ldots w_{m-1} z_{\sigma(m)} w_m\right) = \widetilde{b}\widetilde{f}.$$

As outras afirmações de $(i)$ seguem de maneira análoga.

A afirmação (ii) segue de (i), pois se $f$ é alternado em $z_1, \ldots, z_m$ então $\sigma f = \operatorname{sgn}(\sigma) f$, para toda $\sigma \in S_m$. Usando a primeira e a terceira igualdades de (i), temos

$$\sigma\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{\sigma}}\widetilde{f} = \widetilde{\widetilde{\sigma} f} = \widetilde{\operatorname{sgn}(\sigma)\sigma f} = \operatorname{sgn}(\sigma)\widetilde{\sigma f} = \operatorname{sgn}(\sigma)\widetilde{\operatorname{sgn}(\sigma) f} = \widetilde{f},$$

para qualquer $\sigma \in S_m$ e, portanto, $\widetilde{f}$ é simétrico em $z_1, \ldots, z_m$. A volta é provada de modo análogo assumindo-se $\widetilde{f}$ simétrico e usando que $\sigma f = \widetilde{\widetilde{\sigma f}}$ e as igualdades de (i). $\square$

**Lema 3.12.** *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra sobre $F$, $d = \dim A^{(0)}$, $l = \dim A^{(1)}$. Seja*

$$f(y_1, \ldots, y_{dr}, z_1, \ldots, z_{ls}) \in P_{dr,ls}$$

*um polinômio que é alternado em $r$ subconjuntos disjuntos de variáveis*

$$\{y_1^i, \dots, y_d^i\} \subseteq \{y_1, \dots, y_{dr}\},\ 1 \le i \le r,$$

*e simétrico nos $s$ subconjuntos disjuntos de variáveis*

$$\{z_1^i, \dots, z_l^i\} \subseteq \{z_1, \dots, z_{ls}\},\ 1 \le i \le s.$$

*Se $f$ não pertence a $T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$, então existem partições $\lambda = ([r]^d)$, $\mu = ([l]^s)$ e geradores de ideais minimais à esquerda $e(T_\lambda) \in FS_{dr}$, $e(T_\mu) \in FS_{ls}$ tais que $e(T_\lambda)e(T_\mu)f$ não pertence a $T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$.*

*Demonstração.* Escolha $k = dr$ e $m = ls$ de maneira que $f \in P_{k,m}$. Considere o $S_k$-submódulo à esquerda de $P_{k,m}$ gerado por $f$ e considere também sua decomposição em $S_k$-submódulos irredutíveis. Como $f$ não pertence a $T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$, existe uma $\lambda$-tabela $T_\lambda$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \vdash k$, tal que $e(T_\lambda)f$ não é identidade graduada de $G(A)$.

Se $\lambda_1 \ge r+1$, então $e(T_\lambda)f$ é simétrico em pelo menos $r+1$ variáveis dentre $y_1, \dots, y_{dr}$. Mas os $y_i$'s são divididos em $r$ subconjuntos alternados disjuntos. Portanto, $e(T_\lambda)f = 0$ em $F\langle Y, Z\rangle$ já que é simétrico e alternado em duas variáveis ao mesmo tempo.

Assuma agora que $h(T_\lambda) \ge d+1$, onde $h(T_\lambda)$ é a altura do $\lambda$-diagrama de Young. Neste caso escrevemos $e(T_\lambda) = e_1e_2$, onde $e_1 = \sum_{\sigma \in R(T_\lambda)} \sigma$ e $e_2 = \sum_{\tau \in C(T_\lambda)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau$. Como o polinômio $e_2 f$ é alternado em algumas $d+1$ variáveis $y_i$'s, então também o polinômio $\widetilde{e_2 f}$ é alternado nas mesmas variáveis. Como $\dim A^{(0)} = d$, segue que $\widetilde{e_2 f} \in T_{\mathbb{Z}_2}(A)$. Por isso $e(T_\lambda)\widetilde{f}$ é também uma identidade graduada de $A$. Pelo Lema 1.44, $\widetilde{e(T_\lambda)\widetilde{f}} = e(T_\lambda)f$ é uma identidade graduada de $G(A)$.

Como $k = dr$, concluímos que $e(T_\lambda)f$ não pertence a $T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$ somente se $D_\lambda$, o diagrama de $\lambda$, é um retângulo com $d$ linhas e $r$ colunas, isto é, $\lambda = ([r]^d)$.

Consideremos agora o $S_m$-submódulo de $P_{k,m}$ gerado por $f$. Novamente existe uma $\mu$-tabela $T_\mu$ com $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots) \vdash m$ tal que $e(T_\mu)f$ não é identidade graduada de $G(A)$.

Suponha primeiro que $h(T_\mu) \ge s+1$ e escreva, como antes, $e(T_\mu) = e_1e_2$ onde $e_1 = \sum_{\sigma \in R(T_\mu)} \sigma$ e $e_2 = \sum_{\tau \in C(T_\mu)} \operatorname{sgn}(\tau)\tau$. Neste caso, a ação de $e_2$ em $P_{k,m}$ é alternada em pelo menos $s+1$ variáveis $z_i$'s. Mas todas as variáveis $\{z_1, \dots, z_{ls}\}$ em $f$ são divididas em $s$ subconjuntos disjuntos sobre os quais $f$ é simétrico. Por isso, $e_2 f = 0$ em $F\langle Y, Z\rangle$ e $e(T_\mu)f$ é também zero.

Se, por outro lado, $\mu_1 \ge l+1$, então $g = e(T_\mu)f$ é simétrico em $l+1$ variáveis $z_i$'s. Pelo lema anterior, $\widetilde{g}$ é alternado nas mesmas $l+1$ variáveis ímpares, como $\dim A^{(1)} = l$, segue que $\widetilde{g} \in T_{\mathbb{Z}_2}(A)$. Usando o lema anterior novamente, obtemos que $e(T_\mu)f = g = \widetilde{\widetilde{g}} \in T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$.

Segue que $e(T_\mu)f$ não pertence à $T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$ somente se o diagrama correspondente $D_\mu$ é um retângulo com $s$ linhas e $l$ colunas,isto é, $\mu = ([l]^s)$.

Provamos que $f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$ implica $e(T_\lambda)e(T_\mu)f \notin T_{\mathbb{Z}_2}(G(A))$, onde $D_\lambda$ é um retângulo de dimensões $r \times d$ e $D_\mu$ um retângulo de dimensões $l \times s$. Isto completa a prova do lema.

□

**Lema 3.13.** *Seja $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ uma superálgebra $\mathbb{Z}_2$-simples sobre um corpo algebricamente fechado $F$, $d = \dim A^{(0)}$, $l = \dim A^{(1)}$. Então, para qualquer inteiro positivo $t$, existe uma partição $\nu$ com*

$$h(d, l, 2t - d - l) \le \nu \le h(d, l, 2t)$$

*e uma tabela $T_\lambda$ tal que $G(A)$ não satisfaz qualquer identidade $f$ correspondente a $T_\lambda$ (isto é, $I_\lambda \nsubseteq T(G(A))$).*

*Demonstração.* Pelo Teorema 1.60, $A$ é isomorfa ou a $M_{a,b}(F)$ com $a \geq b \geq 0$ ou à $M_n(F \oplus cF)$ com $c^2 = 1$.

Suponha primeiro que $A = M_{a,b}(F)$. Para cada $1 \leq i \leq t$, seja

$$f_i = \sum_{\sigma,\tau \in S_{d+l}} \operatorname{sgn}(\sigma\tau) x^{2i-1}_{\sigma(1)} x^{2i}_{\tau(1)} \dots x^{2i-1}_{\sigma(d+l)} x^{2i}_{\tau(d+l)}.$$

Repare que $f_i$ é alternado nos conjuntos de variáveis $\{x_1^{2i-1}, \dots, x_{d+l}^{2i-1}\}$ e $\{x_1^{2i}, \dots, x_{d+l}^{2i}\}$. Como $d + l = (a + b)^2$, segue de [23] que, ao substituirmos as variáveis de $f_i$ por quaisquer elementos de $M_{a,b}(F)$, o resultado é um elemento do centro de $M_{a,b}(F)$ e $f_i$ não é identidade ordinária de $M_{a,b}(F)$. Fixe $t > 0$ e defina

$$f(x_1^1, \dots, x_{d+l}^1, \dots, x_1^{2t}, \dots, x_{d+l}^{2t}) = f_1 \dots f_t.$$

Assim $f$ é alternado em cada conjunto de variáveis $\{x_1^i, \dots, x_{d+l}^i\}$, $i = 1, \dots, 2t$, e $f$ não pertence a $T(A)$.

Seja $\mathcal{E}$ uma base de $A$ que é homogênea na $\mathbb{Z}_2$-graduação. Note que, como $|\mathcal{E}| = d + l$, precisamos substituir para cada $i$ as variáveis $x_1^i, \dots, x_{d+l}^i$ por todos os elementos de $\mathcal{E}$, para obter uma substituição não nula de $f$ (tal substituição existe pois $f$ é um produto de polinômios que não são identidades). Isto significa que, depois de renomear, para cada $i$, as variáveis que foram substituídas pelos $d$ elementos de grau zero da base $\mathcal{E}$ por $y_1^i, \dots, y_d^i$ e as demais variáveis por $z_1^i, \dots, z_l^i$, temos que

$$f = (y_1^1, \dots, y_d^1, \dots, y_1^{2t}, \dots, y_d^{2t}, z_1^1, \dots, z_l^1, \dots, z_1^{2t}, \dots, z_l^{2t})$$

não é uma identidade graduada de $A$, onde os $y_i$'s são variáveis pares e os $z_j$'s são variáveis ímpares. Mas então $\widetilde{f}$ não é uma identidade graduada de $G(A)$. Como, para cada $i = 1, \dots, 2t$, o polinômio $f$ é alternado em $y_1^i, \dots, y_d^i$ e em $z_1^i, \dots, z_l^i$, segue que o polinômio $\widetilde{f}$ é alternado nas variáveis $y_1^i, \dots, y_d^i$ e simétrico nas variáveis $z_1^i, \dots, z_l^i$.

Seja $k = 2td$, $m = 2tl$. Então $\widetilde{f} \in P_{k,m}$ e, pelo lema anterior, segue que existe $e(T_\lambda) \in R_1 = FS_k$, $e(T_\mu) \in R_2 = FS_m$, $\lambda = ([2t]^d)$, $\mu = ([l]^{2t})$ tal que $g = e(T_\lambda)e(T_\mu)\widetilde{f}$ não é identidade de $G(A)$.

Se $l = 0$ então $g = e(T_\lambda)\widetilde{f} = e(T_\lambda)f$ é a requerida não identidade, pois $\lambda = ([2t]^d) = h(d, 0, 2t)$. Portanto, devemos assumir que $l > 0$.

Seja $M$ o $R_1 \otimes R_2$-submódulo de $P_{k,m}$ gerado por $g$, então $M$ é isomorfo ao produto tensorial $M_1 \otimes M_2$ onde $M_1 = R_1 e(T_\lambda)$, $M_2 = R_2 e(T_\mu)$.

Se escrevemos $n = k + m$, então $P_{k,m} \subseteq P_n$ e definimos $\overline{M}$ como sendo o $S_n$-submódulo de $P_n$ gerado por $M$. Seja

$$\overline{M} = \overline{M}_1 \oplus \dots \oplus \overline{M}_k$$

sua decomposição em $S_n$-submódulos irredutíveis. Pela regra de Littlewood-Richardson, cada $\overline{M}_i$ é associado a um $\nu$-diagrama $D_\nu$ tal que

$$h(d, l, 2t - s) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t)$$

onde $s = \max\{d, l\}$. Portanto $\nu \geq h(d, l, 2t - d - l)$. Como $\overline{M}$ não está contido no T-ideal de identidade ordinárias (não-graduadas) de $G(A)$, segue que para algum multilinear $u \in \overline{M}$ devemos ter $e(T_\nu)u$ não-nulo em $G(A)$ e a prova do lema está completa no caso $A = M_{a,b}(F)$.

Agora assuma $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)} = M_N(F) \oplus M_N(cF)$. Então $d = l = N^2 = \dim A^{(0)} = \dim A^{(1)}$. Como no caso anterior tomamos

$$f_0 = f_0(x_1^1, \ldots, x_d^1, \ldots, x_1^{2t}, \ldots, x_d^{2t})$$

como sendo um polinômio multilinear que é alternado nas variáveis $x_1^i, \ldots, x_d^i$, $i = 1, \ldots, 2t$ e $f_0$ não pertence a $T(A^{(0)})$. Se definirmos

$$f = f_0(y_1^1, \ldots, y_d^1, \ldots, y_1^{2t}, \ldots, y_d^{2t}) f_0(z_1^1, \ldots, z_d^1, \ldots, z_1^{2t}, \ldots, z_d^{2t})$$

então é claro que $f$ não é uma identidade graduada de $A$. O mesmo argumento do caso anterior completa a prova.

□

## 3.4 Colagem de tabelas de Young

Nesta seção iremos construir não-identidades correspondentes a tabelas de Young para qualquer PI-álgebra. A técnica empregada envolverá os polinômios construídos anteriormente para o envelope de Grassmann de uma superálgebra $\mathbb{Z}_2$-simples de dimensão finita junto com uma técnica de colagem de tabelas que será apresentada.

Considere $A$ uma superálgebra de dimensão finita sobre $F$ com decomposição de Wedderburn $A = A_{ss} + J$, onde $A_{ss}$ é uma superálgebra semissimples maximal e $J$ é o radical de Jacobson de $A$. Também, $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ onde $A_1, \ldots, A_k$ são superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples. Como antes, consideremos um produto não nulo do tipo $B_1 J B_2 J \ldots J B_r \neq 0$ onde $B_1, \ldots, B_r$ são superálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$.

Começaremos com a seguinte observação.

**Lema 3.14.** *Seja $A$ uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $F$. Se $A = M_{k,l}(F)$, então para qualquer elemento homogêneo não-nulo $b \in A$ e, para qualquer matriz unitária $e_{ij}$ (tal como definida na demonstração da Proposição 1.17), existem elementos homogêneos $a, c_1 \in A$ tais que $abc_1 = e_{ij}$. Se $A = M_k(F \oplus cF)$, $c^2 = 1$, podemos encontrar elementos homogêneos $a_1, a_2, c_1, c_2 \in A$ tais que $a_1 b c_1 = e_{ij} \in A^{(0)}$ e $a_2 b c_2 = c e_{ij} \in A^{(1)}$.*

*Demonstração.* Claramente pode-se tomar, a menos de escalares, $a = e_{ii'}$, $c_1 = e_{j'j}$, sendo que em $b \in A$ a entrada $(i', j')$ é não nula, quando $A = M_{k,l}(F)$. Se $A = M_k(F \oplus cF)$, então podemos tomar, novamente a menos de multiplicação por escalar, $a_1 = a_2 = e_{i\alpha}$, $c_1 = e_{\beta j}$ e $c_2 = ce_{\beta j}$, para $\alpha, \beta$ adequados. □

**Lema 3.15.** *Seja $A$ uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $F$ e suponha que*

$$B_1 J B_2 J \ldots J B_r \neq 0$$

*para algumas superálgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas simples distintas $B_1, \ldots, B_r$. Sejam $f_1, \ldots, f_r$ polinômios multilineares em conjuntos disjuntos de variáveis tais que, para cada $i = 1, \ldots, r$, $f_i$ não pertence a $T(G(B_i))$. Então, se $u_1, v_1, w_1, \ldots, w_{r-1}, u_r, v_r$ são variáveis novas, o polinômio multilinear*

$$u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 f_2 v_2 w_2 \ldots w_{r-1} u_r f_r v_r$$

*não é uma identidade de $G(A)$.*

*Demonstração.* Como $B_1JB_2J\dots JB_r \neq 0$, existem elementos homogêneos $b_1 \in B_1,\dots,\ b_r \in B_r$, $e_1,\dots,e_{r-1} \in J$ tais que

$$b_1e_1b_2e_2\dots e_{r-1}b_r \neq 0. \tag{3.3}$$

Claramente $b_1,\dots,b_r$ podem ser escolhidos como $e_{ij}$ ou $ce_{ij}$ quando $B_k = M_l(F \oplus cF)$. Para cada $i = 1,\dots,r$, escreva $f_i = f_i(x_1^i,\dots,x_{n_i}^i)$. Como $f_i$ não é uma identidade de $G(B_i)$, existem elementos homogêneos $\overline{x}_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i \in B_i$, $g_j^i \in E$ tais que

$$f_i(\overline{x}_1^i \otimes g_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i) \neq 0.$$

Consideremos cada polinômio $f_i$ como um polinômio graduado impondo que $x_j^i$ é uma variável par no caso $\overline{x}_j^i \in B_i^{(0)}$ e $x_j^i$ é uma variável ímpar quando $\overline{x}_j^i \in B_i^{(1)}$. Então, relembrando a definição de $\widetilde{f}_i$, temos

$$f_i(\overline{x}_1^i \otimes g_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i) = \widetilde{f}_i(\overline{x}_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i) \otimes g_1^i\dots g_{n_i}^i.$$

Como $f_i$ não pertence a $T(G(B_i))$, do Lema 1.44 segue que $\widetilde{f}_i(\overline{x}_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i) = \overline{b}_i \neq 0$, para algum $\overline{b}_i \in B_i$. Pelo lema anterior, podemos escolher elementos homogêneos $a_i, c_i \in B_i$ tais que $a_i\overline{b}_ic_i = b_i \neq 0$. Portanto o polinômio $u_i\widetilde{f}_iv_i$ assume valor $b_i$ quando substituímos as variáveis $u_i, x_1^i,\dots,x_{n_1}^i, v_i$ pelos elementos $a_i, \overline{x}_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i, c_i$, respectivamente. Seja $h_i, h_i', t_i \in E$ elementos na mesma componente $\mathbb{Z}_2$-homogênea de $a_i, e_i, c_i$, respectivamente. Então, para $i = 1,\dots,r-1$, obtemos

$$(a_i \otimes h_i)f_i(\overline{x}_1^i \otimes g_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i \otimes g_{n_i}^i)(c_i \otimes h_i')(e_i \otimes t_i) =$$

$$= a_i\widetilde{f}_i(\overline{x}_1^i,\dots,\overline{x}_{n_i}^i)c_ie_i \otimes h_ig_1^i\dots g_{n_i}^ih_i't_i = b_ie_i \otimes h_ig_1^i\dots g_{n_i}^ih_i't_i.$$

Também, se $i = r$, obtemos

$$(a_r \otimes h_r)f_r(\overline{x}_1^r \otimes g_1^r,\dots,\overline{x}_{n_r}^r \otimes g_{n_r}^r)(c_r \otimes h_r') = b_r \otimes h_rg_1^r\dots g_{n_r}^rh_r'.$$

Como $E$ é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita, podemos escolher elementos homogêneos $h_i, h_i', t_i, g_i^j$ em $E$ tais que

$$h_1g_1^1\dots g_{n_1}^1h_1't_1h_2g_1^2\dots g_{n_2}^2h_2't_2\dots t_{r-1}h_rg_1^r\dots g_{n_r}^rh_r' \neq 0. \tag{3.4}$$

Fazendo as substituições $u_i = a_i \otimes h_i$, $v_i = c_i \otimes h_i'$, $w_i = e_i \otimes t_i$, $x_i^j = \overline{x}_i^j \otimes g_i^j$ em $u_1f_1v_1w_1u_2f_2v_2w_2\dots w_{r-1}u_rf_rv_r$, obtemos

$$b_1e_1b_2e_2\dots e_{r-1}b_r \otimes h_1g_1^1\dots g_{n_1}^1h_1't_1h_2g_1^2\dots g_{n_2}^2h_2't_2\dots t_{r-1}h_rg_1^r\dots g_{n_r}^rh_r',$$

que é não nulo por (3.3) e (3.4). Isto completa a prova do lema. □

Uma vez que obtivemos um novo polinômio a partir dos polinômios $f_i$, precisamos agir nele com o produto direto dos grupos simétricos. A representação irredutível correspondente pode ser visualizada pelo processo de colagem de tabela de Young como a seguir.

Sejam $\lambda_1 \vdash n_1$, $\lambda_2 \vdash n_2,\dots,\ \lambda_r \vdash n_r$ partições dadas e suponha que elas satisfazem as seguintes condições:

$$h(d_i, l_i, t_i - s_i) \leq \lambda_i \leq h(d_i, l_i, t_i),\ \ i = 1,\dots,r, \tag{3.5}$$

e

$$t_i - s_i \geq t_{i+1} + l_{i+1}, t_{i+1} + d_{i+1},\ i = 1, \ldots, r-1. \tag{3.6}$$

Sejam $D_1 = D_{\lambda_1}, D_2 = D_{\lambda_2}, \ldots, D_r = D_{\lambda_r}$ os respectivos diagramas de Young. A condição (3.5) nos diz que o comprimento das primeiras $d_i$ linhas de $D_i$ é maior ou igual a $l_i + t_i - s_i$ e menor ou igual a $l_i + t_i$. Da mesma forma, o comprimento das primeiras $l_i$ colunas (se $l_i > 0$) é maior ou igual a $d_i + t_i - s_i$ e menor ou igual a $d_i + t_i$. As desigualdades (3.6) nos dizem que, se colarmos a primeira linha de $D_{i+1}$ na $(d_i+1)$-ésima linha de $D_i$, a segunda linha de $D_{i+1}$ na $(d_i+2)$-ésima linha de $D_i$ e assim por diante, como resultado, obtemos um diagrama de Young denotado $D_i \star D_{i+1}$ com $n_i + n_{i+1}$ células.

Considere o diagrama $D_\lambda = D_1 \star D_2 \star \ldots \star D_r$ obtido por colando-se os diagramas $D_1, D_2, \ldots, D_r$ da maneira descrita acima.

Tomando $l = l_1 + \ldots + l_r$ e $d = d_1 + \ldots + d_r$, temos $\lambda \leq h(d, l, t)$ se $t \geq t_1 + l_1 - l, t_1 + d_1 - d$, e $\lambda \geq h(d, l, t_r - s_r)$.

Agora sejam $T_1, \ldots, T_r$ tabelas de Young correspondentes a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente. Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ satisfaz (3.5) e (3.6) acima, podemos colar as tabelas de uma forma similar, se $\alpha_{uv}$ é a entrada aparecendo na posição $(u, v)$ de $T_i$, escrevemos $T_i = D_i(\alpha_{uv})$. Para cada $i = 2, \ldots, r$, adicionamos $n_1 + \ldots + n_{i-1}$ a todas as entradas de $T_i$, obtendo desta maneira uma nova tabela $D_i(\alpha_{uv} + n_1 + \ldots + n_{i-1})$. Se $T_1 = D_1(\alpha_{uv}), T_2 = D_2(\beta_{uv}), \ldots, T_r = D_r(\gamma_{uv})$, então definimos

$$T_\lambda = T_1 \star T_2 \star \ldots \star T_r = D_1(\alpha_{uv}) \star D_2(\beta_{uv} + n_1) \star \ldots \star D_r(\gamma_{uv} + n_1 + \ldots + n_{r-1}).$$

É claro que a tabela obtida desta forma é preenchida com inteiros distintos $1, 2, \ldots, n$, onde $n = n_1 + \ldots + n_r$.

Defina $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ e, para $2 \leq i \leq r$, $N_i = \{n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_i\}$. Assim $N = \{1, \ldots, n\}$ é a união disjunta $N = N_1 \cup \ldots \cup N_r$. Para $i = 1, \ldots, r$, consideramos $S_{n_i}$ como o grupo de permutações agindo no conjunto $N_i$, de modo que podemos considerar as álgebras de grupo $FS_{n_1}, \ldots, FS_{n_r}$ mergulhadas em $FS_n$ com interseção unidimensional.

A seguir relacionamos $e(T_\lambda) \in F(S_n)$ com $e(T_1), \ldots, e(T_r)$.

**Lema 3.16.** *Suponha que $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ satisfazem as condições (3.5) e (3.6) e sejam $T_1, \ldots, T_r$ suas tabelas respectivas. Se $T_\lambda = T_1 \star \ldots \star T_r$, então*

$$e(T_\lambda) = e(T_1) \ldots e(T_r) + b$$

*onde $b$ é uma combinação linear de permutações $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(N_i) \nsubseteq N_i$ para algum $1 \leq i \leq r$.*

*Demonstração.* Seja $H = \{\sigma \in S_n | \sigma(N_i) \subseteq N_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, r\}$. Em nossa notação claramente $H = S_{n_1} \times \ldots \times S_{n_r}$. Precisamos checar que

$$e(T_\lambda) - e(T_1) \ldots e(T_r) = \sum_{\sigma \in S_n \setminus H} \alpha_\sigma \sigma$$

para $\alpha_\sigma \in F$ adequados. Lembramos que

$$e(T_\lambda) = \sum_{\sigma \in R(T_\lambda); \tau \in C(T_\lambda)} \operatorname{sgn}(\tau) \sigma \tau, \tag{3.7}$$

onde $R(T_\lambda)$ é o subgrupo de $S_n$ de permutações linha de $T_\lambda$ e $C(T_\lambda)$ é o subgrupo de $S_n$ de permutações colunas de $T_\lambda$. Denote por $R = R(T_\lambda) \cap H$, $C = C(T_\lambda) \cap H$ e

$$R_i = \{\sigma \in R | \sigma(x) = x \text{ para todo } x \in N \setminus N_i\}$$

$$C_i = \{\sigma \in C | \sigma(x) = x \text{ para todo } x \in N \setminus N_i\}.$$

Pode-se dividir a soma (3.7) em duas partes, $e(T_\lambda) = u + w$, onde

$$u = \sum_{\sigma \in R; \tau \in C} \text{sgn}(\tau)\sigma\tau = (\sum_{\sigma \in R} \sigma)(\sum_{\tau \in C} \text{sgn}(\tau)\tau)$$

e $w$ contém todos os termos restantes no segundo membro de (3.7). Vamos provar que $u = e(T_1)\dots e(T_r)$ e $w$ é uma combinação linear de permutações $\sigma$ que não pertencem a $H$.

Primeiramente note que qualquer $\sigma \in R$ tem uma decomposição única da forma $\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_r$ onde $\sigma_i \in R_i$, $i = 1, \dots, r$. Por isso,

$$\sum_{\sigma \in R} \sigma = \sum_{\sigma_1 \in R_1, \dots, \sigma_r \in R_r} \sigma_1 \dots \sigma_r = (\sum_{\sigma_1 \in R_1} \sigma_1) \dots (\sum_{\sigma_r \in R_r} \sigma_r). \tag{3.8}$$

Da mesma forma, qualquer $\tau \in C$ tem uma decomposição única da forma $\tau = \tau_1 \dots \tau_r$ onde $\tau_i \in C_i$, $i = 1, \dots, r$. Assim

$$\sum_{\tau \in C} \text{sgn}(\tau)\tau = \sum_{\tau_1 \in C_1, \dots, \tau_r \in C_r} sgn(\tau_1 ... \tau_r)\tau_1 \dots \tau_r = (\sum_{\tau_1 \in C_1} \text{sgn}(\tau_1)\tau_1) \dots (\sum_{\tau_r \in C_r} \text{sgn}(\tau_r)\tau_r). \tag{3.9}$$

Como, para $i \neq j$, os elementos de $FS_{n_i}$ comutam com os elementos de $FS_{n_j}$ em $FS_n$ e

$$\left(\sum_{\sigma \in R_i} \sigma\right)\left(\sum_{\tau \in C_i} \text{sgn}(\tau)\tau\right) = e(T_i),$$

obtemos de (3.8) e (3.9) que $u = e(T_1)\dots e(T_r)$. Agora seja $\tau \in C(T_\lambda) \setminus H$. Então existe $i$ tal que $\tau(x) \in N_j$ para algum $x \in N_i$ e $j < i$. Suponha que $x$ pertence a $k$-ésima linha de $T_\lambda$. Então $\tau(x)$ situa-se em uma linha acima (digamos na $m$-ésima linha) de $T_\lambda$ pois $\tau(x) \in N_j$ e $j < i$. Pela construção de $T_\lambda$, todas as entradas da $m$-ésima linha pertencem a $N_1 \cup \ldots \cup N_j$. Por isso, para toda $\sigma \in R(T_\lambda)$, temos que $\sigma\tau(x)$ não pertence a $N_i$ e, portanto, $\sigma\tau \notin H$.

Por outro lado, se $\tau \in C(T_\lambda) \cap H$ e $\sigma \in R(T_\lambda) \setminus H$, então $\sigma\tau$ não pertence a $H$, pois $H$ é um subgrupo de $S_n$ e $\tau \in H$. Segue que $w = \sum_{\sigma \in S_n \setminus H} \alpha_\sigma \sigma$ e a prova do lema está completa. $\square$

No próximo lema são combinadas a construção de um novo polinômio com a técnica de colagem apresentada anteriormente.

**Lema 3.17.** *Seja $A$ uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $F$. Sejam $B_1, \dots, B_r$ superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples de $A$ distintas tais que $B_1 J B_2 J \dots J B_r \neq 0$ e seja*

$$d = \dim(B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_r^{(0)}),\ l = \dim(B_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus B_r^{(1)}).$$

*Então, para qualquer inteiro positivo $t \geq 2.\dim A$, existe uma partição $\lambda \vdash n$ com*

$$h(d, l, 2t - s) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t),$$

*$s = 4.\dim A$, e uma tabela $T_\lambda$ tal que $e(T_\lambda)f$ não pertence a $T(G(A))$ para algum polinômio multilinear $f = f(x_1, \dots, x_n, \dots)$ com grau $f \leq n + 3.\dim A$.*

*Demonstração.* Para $i = 1, \ldots, r$, defina $d_i = \dim B_i^{(0)}$, $l_i = \dim B_i^{(1)}$ de modo que $d = d_1 + \ldots + d_r$ e $l = l_1 + \ldots + l_r$. Pelo Lema 3.13, para qualquer inteiro $t_i$ existem uma partição $\lambda_i$ tal que

$$h(d_i, l_i, 2t_i - s_i) \leq \lambda \leq h(d_i, l_i, 2t_i),$$

onde $l_i, d_i \leq s_i = \dim B_i$, e uma tabela $T_i$ associada a $\lambda_i$ tal que $g_i$ não pertence a $T(G(B_i))$ para algum polinômio multilinear $g_i$ correspondente a $T_i$.

Escolhemos $t_1, \ldots, t_r$ pela seguinte regra. Seja $t_1 = t \geq 2.\dim A$ arbitrário. Denote $q_i = s_{i-1} + \max\{l_i, d_i\}$, $i = 2, \ldots, r$, e determine $q_i' = q_i$ se $q_i$ é par e $q_i' = q_i + 1$ se $q_i$ é ímpar. Então defina $2t_{i+1} = 2t_i - q_{i+1}'$, $i = 1, \ldots, r-1$. Segue que

$$2t_i - s_i = 2t_{i+1} + q_{i+1}' - s_i \geq 2t_{i+1} + \max\{l_{i+1}, d_{i+1}\}.$$

Pela escolha feita acima, vemos que $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ satisfaz (3.5) e (3.6),com $t_1, \ldots, t_r$ substituídos por $2t_1, \ldots, 2t_r$.

Agora colamos as tabelas $T_1, \ldots, T_r$ (correspondentes às partições $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente) pelo procedimento mostrado anteriormente. Obtemos desta forma a $\lambda$-tabela $T_\lambda = T_1 \star \ldots \star T_r$ satisfazendo

$$h(d, l, 2t_r - s_r) \leq \lambda \leq h(d, l, u), \tag{3.10}$$

para cada $u \geq 2t_1 + l_1 - l, 2t_1 + d_1 - d$. Agora calculamos

$$2t_1 - 2t_r = \sum_{i=1}^{r-1}(2t_i - 2t_{i+1}) = \sum_{i=1}^{r-1} q_{i+1}' \leq r + \sum_{i=1}^{r-1} q_{i+1} \leq$$

$$\leq r + \sum_{i=1}^{r-1}(s_i + s_{i+1}) \leq r + 2\dim(B_1 \oplus \ldots \oplus B_r) \leq 3\dim A.$$

Por isso $2t_r - s_r \geq 2t - 3.\dim A - r \geq 2t - 4.\dim A$ e as inclusões dadas em (3.10) tornam-se

$$h(d, l, 2t - 4.\dim A) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t).$$

Para cada $i = 1, \ldots, r$, defina $n_i$ como sendo o grau de $g_i$ onde $g_i \notin T(G(B_i))$ é um polinômio multilinear correspondente a $T_i$. Escreva $n = n_1 + \ldots + n_r$ e seja $\{1, \ldots, n\} = N_1 \cup \ldots \cup N_r$ onde $N_1 = \{1, \ldots, n_1\}$ e, para $2 \leq i \leq r$, $N_i = \{n_1 + \ldots + n_{i-1} + 1, \ldots, n_1 + \ldots + n_i\}$. Finalmente, para cada $i = 1, \ldots, r$, denotamos por $f_i$ o polinômio multilinear $g_i$ escrito em um novo conjunto de variáveis $\{x_j | j \in N_i\}$.

Agora construiremos o polinômio multilinear

$$f = u_1 f_1 v_1 w_1 u_2 v_2 w_2 \ldots w_{r-1} u_r f_r v_r$$

onde os $u_i, v_i, w_i$ são variáveis novas. Então, pelo Lema 3.15, $f$ não pertence a $T(G(A))$. Mais ainda, o grau de $f$ é $n + 3r - 1 \leq n + 3\dim A$. Portanto, para completar a prova do lema, é suficiente mostrar que $e(T_\lambda)f$ não pertence a $T(G(A))$.

Agora, tal como na demonstração do Lema 3.15, existe uma substituição $\theta : F\langle X\rangle \to G(A)$ tal que $\theta(f) \neq 0$ e

$$\theta(w_i) = \overline{w}_i,\ \theta(u_i) = \overline{u}_i,\ \theta(v_i) = \overline{v}_i,\ \theta(x_i) = \overline{x}_i,$$

onde $\overline{w}_1, \ldots, \overline{w}_{r-1} \in J \otimes E$, $\overline{u}_i, \overline{v}_i \in B_i \otimes E$ e $\overline{x}_j \in B_i \otimes E$ se $j \in N_i$. Também, pelo lema anterior,

$$\theta(e(T_\lambda)f) = \theta(e(T_1)\ldots e(T_r)f) + \theta(bf)$$

onde $b$ é uma combinação linear dos elementos $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma$ "embaralha" os conjuntos $N_1, \ldots, N_r$. Como $e(T_i)^2 = \mu_i e(T_i)$, para algum $\mu_i \in \mathbb{Z}$, $\mu_i \neq 0$, e o polinômio multilinear $f_i$ corresponde a $T_i$, temos que $e(T_i)f_i = \mu_i f_i$. Por isso

$$\theta(e(T_1)\ldots e(T_r)f) = \mu_1 \ldots \mu_r \theta(f) \neq 0.$$

Por outro lado, mostraremos a seguir que cada parcela em $\theta(bf)$ é igual a zero. De fato, seja $\sigma \in S_n$ tal que $\sigma(N_i) \nsubseteq N_i$ para algum $1 \leq i \leq r$. Então $\sigma(j) \in N_q$ para algum $j \in N_i$ $q \neq i$. Isto significa que $\theta(\sigma f_i)$ pertence a $G(B_q)$. Mas então, como $\overline{u}_i\theta(\sigma f_i) \in G(B_i)G(B_q) \subseteq B_iB_q \otimes E = 0$, temos

$$\theta(\sigma f) = \overline{u}_i \theta(\sigma f_1)\overline{v}_1 \overline{w}_1 \ldots \theta(\sigma f_r)\overline{v}_r = 0.$$

Portanto $\theta(bf) = 0$ e a prova está completa.

□

## 3.5 Existência do expoente

Nesta seção será provado o principal resultado do capítulo. Iremos mostrar que o inteiro $q$ definido no início da Seção 3.2 para uma superálgebra de dimensão finita $A$, coincide com o PI-expoente de seu envelope de Grassmann. Do Corolário 1.46 segue que o expoente de uma PI-álgebra sempre existe e é um inteiro não negativo.

**Proposição 3.18.** *Seja $A$ uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Seja $q \geq 0$ o inteiro definido na Seção 3.2. Então existem constantes $C_1, C_2, r_1, r_2$ dependendo somente da* $\dim A$ *tais que* $C_1 \neq 0$ *e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(G(A)) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

*Demonstração.* Relembrando que $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k + J$ com $A_1, \ldots, A_k$ superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples, e $q = \dim_F(B_1 \oplus \ldots \oplus B_r)$ é máxima, onde $B_1, \ldots, B_r$ são subálgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$ e $B_1JB_2J\ldots JB_r \neq 0$. Seja

$$d = \dim(B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_r^{(0)}),\ l = \dim(B_1^{(1)} \oplus \ldots \oplus B_r^{(1)}).$$

e $m = \dim A$.

Para qualquer inteiro $N > 5m^2+3m$, divida $N-dl-3m$ por $2q$ e escreva $N = 2tq+dl+3m+r$, para algum $t > 2m$ e $0 \leq r < 2q$.

Pelo Lema 3.17, existem $n$ com $2tq - 4mq + dl \leq n \leq 2tq + dl$, e uma partição $\lambda \vdash n$ com

$$h(d, l, 2t-4m) \leq \lambda \leq h(d, l, 2t),$$

tal que $e(T_\lambda)f$ não pertence a $T(G(A))$, para uma tabela adequada $T_\lambda$ e um polinômio multilinear $f$ com $n$ não superando o grau de $f$, que não supera $n + 3m$.

Construímos o polinômio $f' = f.x_{c+1} \dots x_N$, onde $x_{c+1}, \dots, x_N$ são novas variáveis distintas das que aparecem em $f$ e $c = gr\ f$. Pelos Lemas 3.15, 3.17 e suas demonstrações, $e(T_\lambda)f'$ não pertence a $T(G(A))$. Pelo Teorema da Ramificação (Teorema 2.32), segue que

$$FS_N e(T_\lambda) \subseteq \bigoplus_{\mu \vdash N; \mu \geq \lambda} I_\mu f'$$

onde $I_\mu$ é o ideal bilateral minimal de $FS_N$ correspondente à partição $\mu$, tal como no Teorema 2.25. Por isso, existem $\mu \geq \lambda$ e uma tabela $T_\mu$ tais que $FS_N e(T_\mu)f' \nsubseteq T(G(A))$.

Relembrando que $d_\mu$ denota a dimensão do $S_N$-módulo irredutível associado a $\mu$, segue da fórmula do gancho (Teorema 2.24)

$$c_N(G(A)) \geq d_\mu \geq d_{h(d,l,2t-4m)}.$$

Como

$$N - |h(d,l,2t-4m)| = N - (2tq - 4mq + dl) < 4m^2 + 5m$$

é limitado, podemos aplicar o Lema 3.7. Como o Lema 3.9 nos garante que

$$d_{h(d,l,2t-4m)} \simeq an^b(d+l)^n,$$

segue que $c_N(G(A)) \geq C_1 N^{r_1} q^N$, para algumas constantes $C_1, r_1$ dependendo de $m$. E pelo Lema 3.10, $c_N(G(A)) \leq C_2 N^{r_2} q^N$, para algumas constantes $C_2, r_2$, a conclusão da proposição segue. □

O Teorema 1.56 nos garante que as codimensões de uma álgebra não se alteram quando estendemos o corpo de escalares, isso nos dá a vantagem de trabalhar sobre o fecho algébrico do corpo com que estamos lidando. Assim, obtemos o principal resultado do capítulo.

**Teorema 3.19** (Giambruno-Zaicev)**.** *Seja $A$ uma PI-álgebra sobre um corpo $F$. Então existe um inteiro $q \geq 0$ e constantes $C_1, C_2, r_1, r_2$ tal que $C_1 \neq 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

*Como uma consequência* $\exp(A)$ *existe e é um inteiro não-negativo.*

*Demonstração.* Como se observou no Teorema 1.56, as codimensões não mudam pela extensão do corpo. Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir que $F$ é algebricamente fechado. Pelo Corolário 1.46, existe uma superálgebra de dimensão finita $B$ sobre $F$ tal que $T(A) = T(G(B))$. Mas então a conclusão do teorema segue direto da Proposição 3.18. □

## 3.6 Calculando o expoente de algumas álgebras

Nesta seção vamos explorar a construção das seções anteriores e calcularemos o PI-expoente de algumas álgebras significativas. Começaremos examinando álgebras de dimensão finita.

Seja $A$ uma álgebra de dimensão finita sobre $F$. Então $A$ pode ser vista como uma superálgebra com a graduação trivial $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = 0$. Seu envelope de Grassmann é $G(A) = (E^{(0)} \otimes A) \oplus (E^{(1)} \otimes 0) = E^{(0)} \otimes A$ e pelo Teorema 1.40, $T(E^{(0)} \otimes A) = T(A)$, pois $E^{(0)}$ é uma álgebra comutativa.

Quando $F$ é algebricamente fechado, escreva $A = A_{ss} + J$, onde $A_{ss}$ e uma subálgebra semissimples maximal e seja $A_{ss} = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ onde $A_1, \ldots, A_k$ são subálgebras simples (relembrando que a graduação em $A$ é trivial). Então $\exp(A)$ é a dimensão maximal da subálgebra semissimples $A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_r}$ tal que $A_{i_1} J \ldots J A_{i_r} \neq 0$ onde $A_{i_1}, \ldots, A_{i_r}$ são distintas entre $A_1, \ldots, A_k$.

Faremos uso desta redução na prova do próximo teorema. Lembramos que para uma álgebra $A$ denotamos por $Z(A)$ o centro de $A$.

**Teorema 3.20.** *Seja $A$ uma álgebra de dimensão finita. Então*

*(i)* $\exp(A) \leq \dim_F(A)$.

*(ii) Se $A$ é semissimples,* $\exp(A) = \dim_{Z(B)} B$ *onde $B$ é uma subálgebra simples de $A$ de maior dimensão sobre seu centro $Z(B)$. Em particular, se $A$ é simples* $\exp(A) = \dim_{Z(A)} A$.

*(iii) $A$ é central simples sobre $F$ se, e somente se,* $\exp(A) = \dim_F A$.

*Demonstração.* Seja $\overline{F}$ o fecho algébrico de $F$ e $\overline{A} = A \otimes_F \overline{F}$. Assim, pelo Teorema 1.56, as codimensões de $A$ e $\overline{A}$ são as mesmas. Mais ainda, pela discussão anterior, $\exp(\overline{A})$ é a dimensão de uma subálgebra semissimples apropriada de $\overline{A}$. Assim $\exp(A) = \exp(\overline{A}) \leq dim_{\overline{F}}\overline{A} = dim_F A$ e $(i)$ está provado.

Suponha que $A$ é semissimples e seja $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$ a decomposição de $A$ em subálgebras simples. Então

$$\overline{A} = A \otimes_F \overline{F} \cong \bigoplus_i (A_i \otimes_F \overline{F}) \cong \bigoplus_i (B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_{s_i}})$$

onde $B_{i_1} \cong \ldots \cong B_{i_{s_i}}$ são álgebras centrais simples sobre $\overline{F}$ e $s_i = \dim_F Z(A_i)$. Então, pela discussão acima, $\exp(A) = \exp(\overline{A}) = \max_i\{\dim_{\overline{F}} B_{i_1}\}$. Como para todo $i$,

$$(\dim_{Z(A_i)} A_i)(\dim_F Z(A_i)) = \dim_F A_i = \dim_{\overline{F}} A_i \otimes_F \overline{F} = (\dim_{\overline{F}} B_{i_1})(\dim_F Z(A_i))$$

deduzimos que $\dim_{Z(A_i)} A_i = \dim_{\overline{F}} B_{i_1}$ e $(ii)$ está provado.

Suponha agora que $\exp(A) = \dim_F A = \dim_{\overline{F}} \overline{A}$. Como $\exp(A) = \exp(\overline{A}) > 0$, $\overline{A}$ deve conter uma subálgebra semissimples $B$. Pela descrição do expoente, $\dim_{\overline{F}} \overline{A} = \exp(A) \leq \dim_{\overline{F}} B$. Assim $\overline{A} = B$ é semissimples e, por (ii), obtemos que $A$ deve ser central simples sobre $F$.

□

Uma classe importante de álgebras de dimensão finita é dada pela álgebra das matrizes triangulares superiores em blocos $UT(d_1, \ldots, d_m)$. Temos que

$$UT(d_1, \ldots, d_m) = \begin{pmatrix} M_{d_1}(F) & B_{12} & \cdots & B_{1m} \\ 0 & M_{d_2}(F) & \cdots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & M_{d_m}(F) \end{pmatrix}$$

onde todos os $B_{ij}$'s são matrizes retangulares sobre $F$ de tamanho $d_i \times d_j$. Então $UT(d_1, \ldots, d_m) \cong M_{d_1}(F) \oplus \ldots \oplus M_{d_m}(F) + J$, onde $\bigoplus_{i,j} B_{ij} = J$ é o radical de Jacobson. A fim de calcular o expoente, podemos assumir que $F$ é algebricamente fechado. Então neste caso,

$$M_{d_1}(F) B_{12} M_{d_2}(F) B_{23} \ldots B_{m-1,m} M_{d_m}(F) \neq 0,$$

obtemos que $\exp(UT(d_1, \ldots, d_m)) = \dim M_{d_1}(F) + \ldots + \dim M_{d_m}(F)$. Assim temos o seguinte resultado.

**Corolário 3.21.** $\exp(UT(d_1, \ldots, d_m)) = d_1^2 + \ldots + d_m^2$.

A seguir calculamos o PI-expoente das demais álgebras T-primas. Uma álgebra é T-prima se seu T-ideal de identidades é T-primo, isto é, se o produto de dois T-ideais está contido nele, um dos fatores deve estar contido. Kemer provou em [17] que qualquer álgebra T-prima não trivial satisfaz as mesmas identidades de uma das seguintes álgebras: $M_k(F)$ ou $M_k(E)$ ou $M_{k,l}(E)$ $(0 < l \leq [\frac{k}{2}])$. Já sabemos pelo teorema anterior que $\exp(M_k(F)) = k^2$.

**Corolário 3.22.** *(i)* $\exp(M_k(E)) = 2k^2$;

*(ii)* $\exp(M_{k,l}(E)) = (k+l)^2$.

*Demonstração.* Assuma que $F$ é algebricamente fechado. Para provar $(i)$, relembre que

$$M_k(E) \cong (M_k(F) \otimes E^{(0)}) \oplus (M_k(F) \otimes E^{(1)}) \cong (M_k(F) \otimes E^{(0)}) \oplus (cM_k(F) \otimes E^{(1)})$$

e este último é o envelope de Grassmann da superálgebra simples $M_k(F \oplus cF)$. Por isso

$$\exp(M_k(E)) = \dim M_k(F \oplus cF) = 2k^2.$$

Finalmente, $M_{k,l}(E) \cong (M_{k,l}^{(0)}(F) \otimes E^{(0)}) \oplus (M_{k,l}^{(1)}(F) \otimes E^{(1)})$ é o envelope de Grassmann da superálgebra simples $M_{k,l}(F)$. Por isso $\exp(M_{k,l}(E)) = \dim M_{k,l}(F) = (k+l)^2$.

□

# Capítulo 4

# Maximalidade para o expoente do polinômio *standard*

Neste capítulo é demonstrado que o expoente do polinômio *standard* apresenta um comportamento maximal com respeito aos demais polinômios de mesmo grau. A abordagem segue de perto [5] e [8].

O polinômio *standard* $s_n(x_1, \ldots, x_n)$ de grau $n$, definido por

$$s_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)},$$

apresenta comportamento bastante notável com relação às PI-álgebras. A seguir apontamos alguns fatos que demonstram tal comportamento.

(i) $FS_n s_n$ constitui o único $S_n$-módulo irredutível de dimensão 1 que pode aparecer na decomposição de $P_n \cap T(A)$, já que assumimos $A$ unitária sobre um corpo de característica zero.

(ii) $s_{2n}$ é um polinômio de grau mínimo satisfeito por $M_n(F)$.

(iii) Toda PI-álgebra $A$ satisfaz uma potência de um polinômio *standard*.

A primeira afirmação é trivial, já que $FS_n s_n$ é isomorfo a $FS_n e_{T_\lambda}$ sendo $\lambda = (1, 1, \ldots, 1)$ e o outro gerador de um $S_n$-módulo irredutível de dimensão 1, isomorfo a $FS_n e_{T_\mu}$ sendo $\mu = (n)$ em $P_n$ é o polinômio

$$\sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)}$$

e que nunca é identidade polinomial de uma álgebra com as hipóteses consideradas. A segunda afirmação é o famoso Teorema de Amitsur–Levitzki [1] combinado com a Observação 1.36. Já a terceira afirmação é um teorema de Amitsur [3].

Neste capítulo mostraremos que os polinômios *standards*, em um sentido que será explicado, geram T-ideais minimais de identidades. A fim de esclarecer melhor esse fato, vamos definir o expoente de um polinômio.

**Definição 4.1.** *Seja $0 \neq f \in F\langle X \rangle \setminus 0$, a álgebra associativa livre de posto enumerável infinito. Definimos o expoente de $f$, denotado por $\exp(f)$ como sendo o expoente de $F\langle X \rangle / \langle f \rangle^T$.*

Nosso objetivo ao longo deste capítulo será fornecer as demonstrações dos seguintes fatos relativos ao expoente de $s_n$.

(i) $\exp(s_n) = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^2$.

(ii) Se $f$ é qualquer polinômio de grau $n \geq 4$, $\exp(f) \leq \exp(s_n)$.

(iii) Se o grau do polinômio multilinear $f$ é $n \geq 4$, $\exp(f) = \exp(s_n)$ se, e somente se, $f$ é um múltiplo escalar de $s_n$, se o grau de $n$ é par, ou decorre de $s_{n-1}$ se $n$ é ímpar.

Como o expoente reflete o comportamento de crescimento das codimensões de uma PI-álgebra, (ii) e (iii) acima nos permitem concluir que o crescimento das codimensões de uma álgebra cujo T-ideal é gerado por um $s_n$ é maior do que o de qualquer outra álgebra cujo T-ideal é gerado por um único polinômio de mesmo grau. Como as codimensões medem a dimensão de $P_n$ módulo as identidades da álgebra, note que então o T-ideal gerado por $s_n$ apresenta um comportamento mínimo com relação a todas as álgebras que satisfazem uma identidade de grau $n$ e não satisfazem identidades de grau menor. Torna-se necessário então atentar ao PI-grau de uma álgebra, que vai definido a seguir.

**Definição 4.2.** *O **PI-grau** de uma PI-álgebra $A$, denotado por $\partial_{PI}(A)$ denota o menor grau de uma identidade polinomial satisfeita por $A$.*

## 4.1 Álgebras produto primo

Encerramos o capítulo anterior calculando os expoentes das superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples de dimensão finita e de seus respectivos envelopes de Grassmann.

Sejam $A_1, \ldots, A_n$ tais que $A_1 = G(B_1), \ldots, A_n = G(B_n)$, onde as álgebras $B_i$ são todas superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples. Primeiro definimos $B_1 \circ \ldots \circ B_n$ como sendo a álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada de matrizes

$$\begin{pmatrix} B_1 & * & \cdots & * \\ 0 & B_2 & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & B_n \end{pmatrix}$$

sendo esta álgebra graduada de forma consistente com as graduações nos $B_i$'s ($B_i^{(j)} \subset (B_1 \circ \ldots \circ B_n)^{(j)}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 0, 1$). A forma mais simples é permitir que todas as entradas $*$ tenham grau zero e um. A seguir definimos $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ sendo o envelope de Grassman $G(B_1 \circ \ldots \circ B_n)$, que terá a seguinte aparência

$$\begin{pmatrix} G(B_1) & * & \cdots & * \\ 0 & G(B_2) & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & G(B_n) \end{pmatrix},$$

onde todas as entradas vem de $E$ e as entradas $*$ são arbitrárias em $E$. Chamaremos uma álgebra desta forma uma **álgebra produto primo**. Seja $A = G(B)$ com $B$ $\mathbb{Z}_2$-simples. Então, como utilizado no último corolário do capítulo anterior, $\exp(A) = \dim B$. Pela demonstração do teorema 3.19 segue que

$$\exp(A_1 \circ \ldots \circ A_n) = \exp(A_1) + \ldots + \exp(A_n) = \dim B_1 + \ldots + \dim B_n. \quad (4.1)$$

Aqui estão duas propriedades úteis de álgebras produto primo.

**Observação 4.3.** *Se $f_i$ é uma identidade para $A_i$, $i = 1, \ldots, n$, então o produto $f_1 \ldots f_n$ é uma identidade para $A_1 \circ \ldots \circ A_n$. Pois se substituímos a variável $x_k$ por $\beta_k \in A_1 \circ \ldots \circ A_n$ denotando por $C_{k,i}$ o i-ésimo bloco de $\beta_k$, temos*

$$f_1 \ldots f_n(\beta_1, \ldots, \beta_k) = \begin{bmatrix} f_1 \ldots f_n(C_{1,1}, \ldots, C_{k,1}) & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & f_1 \ldots f_n(C_{1,n}, \ldots, C_{k,n}) \end{bmatrix} = 0.$$

**Observação 4.4.** *Dada uma matriz $R$ com entradas na álgebra de Grassmann $E$, o suporte de $R$ é o menor subespaço do espaço vetorial de dimensão infinita enumerável $V$ que gera $E$ sobre o qual todas as entradas estão definidas. Um conjunto de matrizes possui suporte disjunto se quaisquer dois suportes de matrizes distintas desse conjunto possuem interseção trivial. Então, se $0 \neq a_i \in A_i$, $i = 1, \ldots, n$, possuem suporte disjuntos, existem $x_i \in A_1 \circ \ldots \circ A_n$ tal que $a_1 x_1 \ldots x_{n-1} a_n \neq 0$.*

Às vezes será útil definir $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ quando cada $A_i$ é uma álgebra produto primo. De modo geral, se $A \subseteq M_n(E)$ e $B \subseteq M_m(E)$, podemos definir $A \circ B \subseteq M_{n+m}(E)$ de uma forma óbvia

$$A \circ B = \left\{ \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} | a \in A,\ c \in M_{n,m}(E),\ b \in B \right\}.$$

Note que se os $B_i$'s são álgebras de matrizes $\mathbb{Z}_2$-simples, então

$$B_1 \circ \ldots \circ B_n \cong B_1 \oplus \ldots \oplus B_n + J,$$

$J$ sendo o correspondente radical de Jacobson.

**Lema 4.5.** *Sejam $B = B' + J$, $J = J(B)$ o radical de Jacobson, e $B' = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ onde os $B_i$'s são álgebras de matrizes. Assuma que para alguns $x_1, \ldots, x_{s-1} \in J$, tenhamos $B_1 x_1 B_2 x_2 \ldots x_{s-1} B_s \neq 0$. Então $B$ contém a subálgebra*

$$D = \bigoplus_{1 \le i \le j \le s} B_i x_i B_{i+1} x_{i+1} \ldots x_{j-1} B_j,$$

*e $D$ é isomorfo com $B_1 \circ \ldots \circ B_s$.*

*Demonstração.* Que a soma em $D$ é direta facilmente segue da ortogonalidade dos $B_i$'s.

Seja $B_i = M_{a_i}(F)$. Primeiro, denote por $e^i_{\alpha,\beta}$ as matrizes unitárias (tais como definidas na Observação 1.17) em $B_i$. Para cada $i$ existem matrizes $e^i_{\alpha,\beta}$, $e^{i+1}_{\gamma,\delta}$ tais que $e^i_{\alpha,\beta} x_i e^{i+1}_{\gamma,\delta} \neq 0$. Substituindo $x_i$ por $e^i_{1,\alpha} e^i_{\alpha,\beta} x_i e^{i+1}_{\gamma,\delta} e^{i+1}_{\delta,1}$, podemos assumir sem perda de generalidade que $e^i_{11} x_i e^{i+1}_{11} \neq 0$ e $e^i_{\alpha\alpha} x_i e^{i+1}_{\beta\beta} = 0$ se $\alpha \neq 1$ ou $\beta \neq 1$.

Indexamos as matrizes unitárias em $B_1 \circ \ldots \circ B_s$ por $e(i,j,\alpha,\beta)$, onde $1 \leq i \leq j \leq s$, $1 \leq \alpha \leq \dim B_i$ e $1 \leq \beta \leq \dim B_j$. Assim, na álgebra de matriz $B_1 \circ \ldots \circ B_s$, $e(i,j,\alpha,\beta)$ é a matriz unitária $e_{u,v} = e(i,j,\alpha,\beta)$, onde $u = a_1 + \ldots + a_{i-1} + \alpha$ e $v = a_1 + \ldots + a_{j-1} + \beta$. É facil verificar que a multiplicação é dada por $e(i,j,\alpha,\beta)e(k,l,\gamma,\delta) = 0$ a não ser que $j = k$ e $\beta = \gamma$, e que, nesse caso, é igual a $e(i,l,\alpha,\delta)$. Como os $B_i$'s são ortogonais, um cálculo simples mostra que a correspondência

$$e(i,j,\alpha,\beta) \leftrightarrow e^i_{\alpha,1} x_i e^{i+1}_{1,1} x_{i+1} e^{i+2}_{1,1} \ldots x_{j-2} e^{j-1}_{1,1} x_{j-1} e^j_{1,\beta}$$

é o isomorfismo procurado.

$\square$

Agora podemos provar:

**Teorema 4.6.** *Seja $A$ uma PI-álgebra qualquer. Então* $\exp(A)$ *é o valor máximo de* $\exp(\overline{A})$*, onde $\overline{A}$ percorre todas álgebras produto primo que satisfazem todas identidades de $A$.*

*Demonstração.* Considere os envelopes de Grassmann de álgebras de dimensão finita da forma $A_1 = G(B_1 \oplus \ldots \oplus B_n + J)$, satisfazendo todas identidades de $A$ (existem pelo Corolário 1.46). Aqui $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n + J$, $J = J(B)$ o radical de Jacobson, e os $B_i$ são superálgebras de matrizes $\mathbb{Z}_2$-simples. Pela demonstração do Teorema de Giambruno-Zaicev, $\exp(A)$ é o valor máximo de

$$dim(B_{i_1}) + \ldots + dim(B_{i_s})$$

tomando todas essas álgebras $A_i$, e tal que $B_{i_1} J B_{i_2} J \ldots J B_{i_s} \neq 0$, $i_1, \ldots, i_s$ distintos. A prova agora segue do lema anterior.

$\square$

Este teorema permite restringir nosso campo de investigação às álgebras produto primo. O teorema seguinte ([5, Teorema 2.8]) relaciona os $T$-ideais de identidades de uma álgebra produto primo $A_1 \circ \ldots \circ A_n$ e de $A_1, \ldots, A_n$.

**Teorema 4.7.** *Para qualquer álgebra produto primo $A = A_1 \circ \ldots \circ A_n$, temos que*

$$T(A_1 \circ \ldots \circ A_n) = T(A_1) \ldots T(A_n).$$

Agora calculamos o expoente do $n$-ésimo polinômio *standard*.

**Teorema 4.8.** *Seja $n \geq 2$. Então* $\exp(s_n) = \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor^2$.

*Demonstração.* Seja $A = A_1 \circ \ldots \circ A_t$ onde todas as álgebras são envelopes de Grassmann de superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples e satisfazem $s_n$. Como vimos no capítulo anterior, as álgebras $A_i$ podem ser $M_k(E^{(0)})$, que satisfaz exatamente as mesmas identidades de $M_k(F)$, ou $M_k(E)$, ou $M_{p,q}(E) = G(M_{p,q}(F))$. Como existem infinitos monômios distintos de comprimento 1 em $E$, ela nunca satisfaz $s_n$, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente, nem $M_k(E)$, nem $M_{p,q}(E)$ satisfazem qualquer $s_n$, portanto podemos considerar todos os $A_i$ como sendo $M_{k_i}(F)$. Da Equação (4.1) e do Teorema 3.20,

$$\exp(A) = k_1^2 + \ldots + k_t^2$$

e $\exp(s_n)$ é o valor máximo da soma $k_1^2 + \ldots + k_t^2$.

Usando o mesmo argumento usado na Observação 1.36 para mostrar que $M_k(F)$ não satisfaz identidade de grau inferior a $2k$, para que $M_{k_1}(F) \circ \ldots \circ M_{k_t}(F)$ satisfaça $s_n$, necessariamente $2m \leq n$, onde $m = k_1 + \ldots + k_t$, ou seja

$$k_1 + \ldots + k_t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

e

$$\exp(s_n) = \max \left\{ k_1^2 + \ldots + k_t^2 | k_1 + \ldots + k_t \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right\} = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2 .$$

□

**Teorema 4.9.** *Sejam $A_1, \ldots, A_n$ envelopes de Grassmann de superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples. Se $P, Q$ são T-ideais de $F\langle X \rangle$ tais que $PQ \subseteq T(A_1) \ldots T(A_n)$, então $P$ ou $Q$ está contido em $T(A_1) \ldots T(A_n)$ ou existe $1 \leq k \leq n-1$ tal que $P \subseteq T(A_1 \circ \ldots \circ A_k)$ e $Q \subseteq T(A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n)$.*

*Demonstração.* Este é o Teorema 8.4.4 de [11]. □

A próxima proposição será útil ao longo de todo o capítulo.

**Proposição 4.10.** *Sejam $f_1$, $f_2$ polinômios em conjuntos disjuntos de variáveis tais que* $\exp(f_1), \exp(f_2) \geq 1$. *Então* $\exp(f_1 f_2) = \exp(f_1) + \exp(f_2)$. *Analogamente,*

$$\exp(f_1 \ldots f_r) = \sum_{i=1}^{r} \exp(f_i).$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 4.6, para qualquer polinômio $f$, $\exp(f)$ é o valor máximo de $\exp(\overline{A})$ onde $\overline{A}$ percorre todas as álgebras produto primo tais que $f \in T(\overline{A})$. Portanto consideremos $A$ uma álgebra produto primo de modo que $f_1 f_2 \in T(A)$ e $\exp(f_1 f_2) = \exp(A)$.

Primeiramente afirmamos que nem $f_1$, nem $f_2$ são identidades de $A$.

Suponha $f_1 \in T(A)$ e seja $B$ uma álgebra produto primo tal que $f_2 \in T(B)$ com $\exp(f_2) = \exp(B) \geq 1$. Então

$$\exp(f_1 f_2) \geq \exp(A \circ B) = \exp(A) + \exp(B) > \exp(A),$$

o que leva a uma contradição. Trocando $f_1$ por $f_2$ concluímos que ambos não pertencem a $T(A)$.

Sendo $A_1, \ldots, A_n$ envelopes de Grassmann de superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples tais que $A = A_1 \circ \ldots \circ A_n$, da afirmação anterior e do Teorema 4.9 segue que existe $1 \leq k \leq n-1$ tal que $f_1 \in T(A_1 \circ \ldots \circ A_k)$ e $f_2 \in T(A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n)$.

Da maximalidade do expoente de $A$ segue $\exp(f_1) = \exp(A_1 \circ \ldots \circ A_k)$. Analogamente $\exp(f_2) = \exp(A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n)$. Portanto

$$\exp(f_1 f_2) = \exp(A) = \exp(A_1 \circ \ldots \circ A_k) + \exp(A_{k+1} \circ \ldots \circ A_n) = \exp(f_1) + \exp(f_2).$$

□

## 4.2 Limitantes para PI-graus

Nesta seção forneceremos limitantes para os PI-graus de $M_n(F)$, $M_n(E)$ e $M_{p,q}(E)$, que como já vimos correspondem a superálgebras $\mathbb{Z}_2$-simples.

O Teorema de Amitsur-Levitzki nos diz que $\partial_{PI}(M_k(F)) = 2k$.

De [21], temos $\partial_{PI}(M_{1,1}(E)) = 5$ e $\partial_{PI}(M_2(E)) = 7$ e de [26], temos que $\partial_{PI}(M_{2,1}(E)) \geq 9$.

A seguir fornecemos limitantes inferiores para os PI-graus de $M_n(E)$ e $M_{p,q}(E)$.

Primeiramente, note que $E$ não satisfaz identidade de grau 2, pois se satisfizesse, satisfaria uma identidade da forma $\alpha xy + \beta yx$, mas se substituímos $x$ por 1, obtemos $\alpha + \beta = 0$, se substituímos ambos $x$ e $y$ por elementos de $E^{(1)}$ cujo produto é diferente de zero, obtemos $\alpha - \beta = 0$, de onde segue que o polinômio em questão é nulo. Por outro lado, já mostramos no capítulo 1 que $[[x, y], z]$ é uma identidade de $E$, portanto $\partial_{PI}(E) = 3$.

Consideremos agora $k \geq 2$, note que

$$M_2(E) \circ \underbrace{E \circ \ldots \circ E}_{k-2} \subseteq M_k(E).$$

Segue então do Teorema 4.7 que $\partial_{PI}(M_k(E)) \geq 7 + 3(k-2) = 3k + 1$.

Resta então encontrar um limitante inferior para o PI-grau de $M_{p,q}(E)$.

Seja $\varphi : M_{p,q}(E) \rightarrow M_{p,q+1}(E)$ tal que $\varphi(ge_{ij}) = ge_{ij}$, para qualquer matriz unitária $e_{ij}$ e qualquer $g \in E$, $\mathbb{Z}_2$-homogêneo de grau condizente com o par $(i, j)$ e estendida por linearidade para todo $M_{p,q}(E)$. Claramente a imagem de $M_{p,q}(E)$, que corresponde ao bloco $(p + q) \times (p + q)$ superior esquerdo de $M_{p,q+1}(E)$ é isomorfa a $M_{p,q}(E)$. Analogamente temos uma cópia de $M_{p,q}(E)$ em $M_{p+1,q}(E)$, obtida "ignorando-se" as primeiras linha e coluna de $M_{p+1,q}(E)$.

**Lema 4.11.** *Seja $f \in P_n$ uma identidade de $M_{p,q+1}(E)$ e escreva*

$$f = \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n-2)} x_{n-1} x_n + \textit{outras parcelas}$$

*e denote por*

$$p(x_1, \ldots, x_{n-2}) := \sum_{\sigma \in S_{n-2}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n-2)}.$$

*Então o polinômio $p$ é uma identidade de $M_{p,q}(E)$. O mesmo ocorre se trocamos $M_{p,q+1}(E)$ por $M_{p+1,q}(E)$.*

*Demonstração.* Considere a subálgebra $A$ de $M_{p,q+1}(E)$ formada por todas as matrizes que possuem a última linha e a última coluna ambas nulas. Pela observação feita antes do presente lema, $A$ é isomorfa a $M_{p,q}(E)$. Se existissem $d_1, \ldots, d_{n-2} \in A$ tais que $p(d_1, \ldots, d_{n-2}) \neq 0$, então alguma entrada $(i, j)$ de $p(d_1, \ldots, d_{n-2}) = \alpha_{i,j} \neq 0$. Então

$$p(d_1, \ldots, d_{n-2}) g e_{j,p+q+1} e_{p+q+1,p+q+1} \neq 0,$$

escolhendo-se $g \in E$ $\mathbb{Z}_2$-homogêneo adequado, condizente com a entrada $(j, p + q + 1)$. Mas então teríamos:

$$0 = f(d_1, \ldots, d_{n-2}, g e_{j,p+q+1}, e_{p+q+1,p+q+1}) = p(d_1, \ldots, d_{n-2}) g e_{j,p+q+1}, e_{p+q+1,p+q+1} \neq 0.$$

Isso mostra o lema para $M_{p,q+1}(E)$, para $M_{p+1,q}$ a demonstração é exatamente a mesma, trocando $p + q + 1$ por 1. $\square$

**Corolário 4.12.** *Para quaisquer $p, q$, inteiros positivos,*

$$\partial_{PI}(M_{p+1,q}(E)), \partial_{PI}(M_{p,q+1}(E)) \geq \partial_{PI}(M_{p,q}(E)) + 2.$$

Deste corolário, segue o limitante inferior seguinte para $M_{p,q}(E)$.

**Proposição 4.13.** *Se $p$ e $q$ são inteiros positivos satisfazendo $p+q \geq 3$, então $\partial_{PI}(M_{p,q}(E)) \geq 2(p+q)+3$.*

*Demonstração.* Vishne mostrou em [26] que $\partial_{PI}(M_{2,1}(E)) \geq 9$ e estamos feitos no caso em que $p+q=3$. O resultado segue por indução sobre $p+q$ usando o corolário anterior. □

## 4.3 Maximalidade de $\exp(s_n)$

Primeiramente vamos mostrar que o expoente de qualquer polinômio de grau $n$ não supera $\exp(s_n)$. No início da seção anterior observamos que $\partial_{PI}(M_k(E)) \geq 3k+1$. Em particular, $\partial_{PI}(M_2(E)) \geq 7$. Como $\partial_{PI}(E) = 3$, $\partial_{PI}(M_2(E)) \geq 7$, $M_2(E) \circ E \subseteq M_3(E)$ e $M_2(E) \circ M_2(E) \circ E \subseteq M_5(E)$, temos $\partial_{PI}(M_3(E)) \geq 10$ e $\partial_{PI}(M_5(E)) \geq 17$ pela Equação (4.1).

Segue do Corolário 4.13 e de $\partial_{PI}(M_{1,1}(E)) = 5$ que $\partial_{PI}(M_{p,q}(E)) \geq 2(p+q)$.

Com isso podemos mostrar o seguinte lema.

**Lema 4.14.** *Seja $A = M_{a_1}(F) \circ \ldots \circ M_{a_r}(F) \circ M_{p_1,q_1}(E) \circ \ldots \circ M_{p_s,q_s}(E) \circ M_{b_1}(E) \circ \ldots \circ M_{b_t}(E)$ uma álgebra produto primo que satisfaz um polinômio de grau $n \geq 4$. Então $\exp(A) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.*

*Demonstração.* Assuma primeiro que $r = s = 0$ e $t = 1$. Então $A = M_u(E)$ e assuma ainda mais que $u$ é ímpar. Para $u = 1$, temos $A = E$ e $\exp(E) = 2 < 4 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$. Se $A = M_3(E)$, pelo observado antes deste lema, $10 \leq \partial_{PI}(A) \leq n$; portanto

$$\exp(A) = 18 < 25 = \left\lfloor \frac{10}{2} \right\rfloor^2.$$

De maneira similar, para $A = M_5(E)$ obtemos $17 \leq \partial_{PI}(A) \leq n$ e

$$\exp(A) = 50 < 64 = \left\lfloor \frac{17}{2} \right\rfloor^2.$$

Para qualquer $u$ ímpar, temos $3u \leq \partial_{PI}(A) \leq n$, portanto

$$3\left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor + 1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

e se $u \geq 7$

$$\exp(A) = 2u^2 \leq \left(3\left\lfloor \frac{u}{2} \right\rfloor + 1\right)^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2.$$

No caso geral temos

$$\exp(A) = a_1^2 + \ldots + a_r^2 + (p_1+q_1)^2 + \ldots + (p_s+q_s)^2 + 2(b_1^2 + \ldots + b_t^2).$$

Chamando $h = a_1 + \ldots + a_r + p_1 + q_1 + \ldots + p_s + q_s$ e $u = b_1 + \ldots + b_t$, repare que para $t \geq 2$

$$2(b_1^2 + \ldots + b_t^2) \leq 2(b_1 + \ldots + b_t)^2 - 2 = 2u^2 - 2,$$

então $\exp(A) \leq h^2 + 2u^2 - 2$. Como também foi visto no início da seção anterior, $\partial_{PI}(M_k(F)) = 2k$, $\partial_{PI}(M_{p,q}(E)) \geq 2(p+q)$ e $\partial_{PI}(M_k(E)) \geq 3k$, então $2h + 3u \leq \partial_{PI}(A) \leq n$, portanto, basta mostrar que

$$h^2 + 2u^2 - 2 \leq \left\lfloor \frac{2h+3u}{2} \right\rfloor^2 = \left( h + \left\lfloor \frac{3u}{2} \right\rfloor \right)^2,$$

o que é sempre verdade, quer $u$ seja par ou ímpar.

Assuma portanto $t \leq 1$. Se $h = 0$, basta mostrar o caso em que $u$ é par. Neste caso, bem como nos casos $h \geq 1$, basta mostrar que

$$h^2 + 2u^2 \leq \left\lfloor \frac{2h+3u}{2} \right\rfloor^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2,$$

o que é facilmente verificado. □

Por simplicidade, ao longo desta seção, denotaremos por $J_n$ o T-ideal de $F\langle X \rangle$ gerado por $s_n$. Relembrando que $P_k$ denota o $S_k$-módulo formado pelos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_k$, temos que $J_{n,n} = J_n \cap P_n$ é o conjunto dos múltiplos de $p_n$, já que $s_n$ gera um submódulo de dimensão 1 em $P_n$. Assim, pelo Teorema 4.8, se $0 \neq f \in J_{n,n}$ e $n \geq 2$, então $\exp(f) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.

Leron também provou em [20] que todas as identidades de grau $2k+1$ de $M_k(F)$ pertencem a $J_{2k} \cap P_{2k+1}$.

**Lema 4.15.** *Se $0 \neq f \in J_{2m} \cap P_{2m+1}$ onde $m \geq 2$, então $\exp(f) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor^2$.*

*Demonstração.* Como o grau de $f$ é $2m+1 \geq 5$, o Lema 4.14 e o Teorema 4.6 nos dão que $\exp(f) \leq m^2$. Reciprocamente como $f \in J_{2m}$, então $\langle f \rangle^T \subseteq J_{2m}$, portanto, $c_n(s_{2m}) \leq c_n(f)$, onde $c_n(p)$ denota a $n$-ésima codimensão de uma álgebra cujas identidades satisfeitas decorrem todas do polinômio $p$. Portanto, $m^2 = \exp(s_{2m}) \leq \exp(f)$. □

**Lema 4.16.** *Se $r + t \geq 2$ e $2(a_1 + \ldots + a_r) + 3(b_1 + \ldots + b_t) \leq n$, onde $r, t$, os $a_i$ e os $b_j$ são todos números naturais, então*

$$a_1^2 + \ldots + a_r^2 + 2(b_1^2 + \ldots + b_t^2) < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2.$$

*Demonstração.* Se $t = 0$ e, portanto, $r \geq 2$, e $\sum_{i<j} a_i a_j \geq 1$. Então

$$\sum_{i=1}^{r} a_i^2 < \sum_{i=1}^{r} a_i^2 + 2 \sum_{i<j} a_i a_j = \left( \sum_{i=1}^{r} a_i \right)^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2,$$

e esse caso está resolvido.

Se $t > 0$ e $b_1 + ... + b_t = 2k$ é par, então, por hipótese $2\sum_i a_i + 6k \leq n$, portanto $\sum_i a_i + 3k \leq \lfloor n/2 \rfloor$, então

$$9k^2 \leq \left( \sum_{i=1}^{r} a_i \right)^2 + 9k^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2,$$

e basta mostrar que $2\sum_j b_j^2 < 9k^2$. Mas como $\sum_j b_j = 2k$, temos $2(\sum_j b_j^2) \leq 2(\sum_j b_j)^2 \leq 8k^2 < 9k^2$.

Resta analisar o caso em que $\sum_i b_i = 2k+1$. Da hipótese segue que $\sum_j a_j + 3k + 1 \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Elevando ambos os membros ao quadrado, obtemos

$$\sum_{i=1}^{r} a_1^2 + 2\sum_{i<j} a_i a_j + (6k+3)\sum_{i=1}^{r} a_i + (3k+1)^2 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^2.$$

Assim, basta provar que

$$2\sum_{i=1}^{t} b_i^2 < 2\sum_{i<j} a_i a_j + (6k+3)\sum_{i=1}^{r} a_i + (3k+1)^2.$$

Como $\sum_i b_i = 2k+1$,

$$2\sum_{i=1}^{t} b_i^2 = 2(2k+1)^2 - 4\sum_{i<j} b_i b_j,$$

bastando mostrar que

$$8k^2 + 8k + 2 - 4\sum_{i<j} b_i b_j < 2\sum_{i<j} a_i a_j + (6k+3)\sum_{i=1}^{r} a_i + (3k+1)^2. \tag{4.2}$$

Se $t = 1$, então $\sum_i a_i \geq 1$ e, o segundo membro de (4.2) é maior ou igual a $6k+3+(3k+1)^2 = 9k^2 + 12k + 3$ enquanto o primeiro membro não supera $8k^2 + 8k + 2$ e este caso está resolvido.

Se $t > 1$, então $\sum_{i<j} b_i b_j \geq 1$, e o primeiro membro de (4.2) não supera $8k^2 + 8k - 2$ enquanto o segundo membro é maior ou igual a $(3k+1)^2$, mas

$$(3k+1)^2 - (8k^2 + 8k - 2) = (k-1)^2 + 2 > 0,$$

de onde segue o resultado. □

Agora estamos aptos a provar o principal resultado do capítulo.

**Teorema 4.17.** *Seja $f \in P_n$, $n \geq 6$.*

*(i) Se $n$ é par e $f \notin J_n$ (o que equivale a dizer que $f$ não é múltiplo escalar de $s_n$), então* $\exp(f) < \exp(s_n)$.

*(ii) Se $n$ é ímpar e $f \notin J_{n-1}$, então* $\exp(f) < \exp(s_n)$.

*Demonstração.* Do Teorema 4.6, $\exp(f)$ é

$$\exp(M_{a_1}(F) \circ \ldots \circ M_{a_r}(F) \circ M_{p_1,q_1}(E) \circ \ldots \circ M_{p_s,q_s}(E) \circ M_{b_1}(E) \circ \ldots \circ M_{b_t}(E)),$$

sendo a álgebra produto primo acima a de maior expoente que contém $f$ em seu T-ideal. Observamos que acima pode ocorrer de $r$, $s$ ou $t$ serem zero (não os três simultaneamente). O expoente de $f$ deve ser igual a

$$\exp(f) = \sum_{i=1}^{r} a_i^2 + \sum_{i=1}^{s} (p_i + q_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{t} b_i^2.$$

Lidemos primeiramente com o caso $r+s+t=1$, ou seja, a álgebra em questão é T-prima, isto é $\exp(f)=\exp(A)$ sendo $A=M_a(F)$ ou $A=M_{p,q}(E)$ ou $A=M_b(E)$. Analisaremos separadamente cada caso e, no primeiro deles, distinguiremos os subcasos $n$ par e $n$ ímpar.

**1.** $A=M_a(F)$ e $n=2m$. De [1] e [2], segue que, como $n$ é par e $f\notin J_n$, o grau do polinômio $f$ deve satisfazer $n>2a$ e, portanto, $m>a$. Assim, $2a+2\leq n$. Portanto

$$\exp(f)=a^2<(a+1)^2\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2.$$

**2.** $A=M_a(F)$ e $n=2m+1$. Pelo mesmo argumento usado no primeiro caso, $2a+1\leq n$. Por [20], se a igualdade ocorresse $f$ pertenceria a $J_{n-1}$, contrariando nossa hipótese, então $n\geq 2a+3$. Assim,

$$\exp(f)=a^2<(a+1)^2=\left\lfloor\frac{2a+3}{2}\right\rfloor^2\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2.$$

**3.** $A=M_{p,q}(E)$. Como, por hipótese, $n\geq 6$, temos

Se $p+q=2$, então

$$\exp(f)=\exp(M_{1,1}(E))=4<9=\lfloor 3\rfloor^2\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2.$$

Se $p+q\geq 3$, então, pela Proposição 4.13, $2(p+q)+3\leq\partial_{PI}(M_{p,q}(E))$. Como $f\in T(M_{p,q}(E))$, temos $n\geq 2(p+q)+3$ e obtemos

$$\exp(f)=\exp(M_{p,q}(E))=(p+q)^2<(p+q+1)^2\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2.$$

**4.** $A=M_b(E)$. O caso $b=1$ é trivial, como $p+q=1$ no caso anterior. Do discutido no início da Seção 4.1, se $b\geq 2$, $\partial_{PI}(M_b(E))\geq 3b+1$. Então $3b+1\leq n$ e

$$\exp(f)=\exp(M_b(E))=2b^2<\left\lfloor\frac{3b+1}{2}\right\rfloor^2\leq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2.$$

O caso $r+s+t\geq 2$ segue do Lema 4.16, pois repare que nesse caso precisamos mostrar que se

$$2(a_1+\ldots+a_r)+2((p_1+q_1)+\ldots+(p_s+q_s))+3(b_1+\ldots+b_t)\leq n,$$

então

$$a_1^2+\ldots+a_r^2+(p_1+q_1)^2+\ldots+(p_s+q_s)^2+2(b_1^2+\ldots+b_t^2)<\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor^2,$$

que foi exatamente o que foi mostrado naquele lema, já que os $p_i+q_i$ se comportam como os $a_j$ em ambas as expressões acima. $\square$

**Proposição 4.18.** *Se $f\neq 0$ é uma identidade de grau 5 de $M_{1,1}(E)$, então $\exp(f)=4$. Portanto, $f\in P_5\setminus J_4$, mas $\exp(f)=\lfloor 5/2\rfloor^2$.*

*Demonstração.* Como $f \in T(M_{1,1}(E))$, temos que $\exp(f) \geq 4$. Por outro lado, suponha $f$ identidade da álgebra produto primo

$$A = M_{a_1}(F) \circ \ldots \circ M_{a_r}(F) \circ M_{p_1,q_1}(E) \circ \ldots \circ M_{p_s,q_s}(E) \circ M_{b_1}(E) \circ \ldots \circ M_{b_t}(E),$$

para a qual a soma $\sum a_i^2 + \sum(p_i + q_i)^2 + 2\sum b_i^2$ é a maior possível. Como 5 é o grau de $f$, pelos PI-graus de $M_n(F)$, $M_{p,q}(E)$ e $M_n(E)$, temos que

$$2\sum_{i=1}^{r} a_i + 2\sum_{i=1}^{s}(p_i + q_i) + 3\sum_{i=1}^{t} b_i \leq 5,$$

assim, podem ocorrer somente $r + s + t = 1$ ou 2 e, no segundo caso, as únicas possibilidades são $r = 2$ e $r = t = 1$. Analisamos os casos separadamente abaixo.

**1.** Caso $r + s + t = 1$. Para o subcaso $r = 1$, como $\partial_{PI}(M_a(F)) = 2a$ e $\exp(f) \geq 4$, o único caso possível é $a = 2$ e, como apontado anteriormente, $f$ é consequência de $s_4$, contradizendo $f \in T(M_{1,1}(E))$. Para o subcaso $s = 1$, então as mesmas restrições analisadas para o caso anterior nos fornecem $p = q = 1$ e $\exp(f) = 4$, como desejado. Se $A = M_b(E)$, o PI-grau de $A$ implica $b = 1$ e $\exp(f) = \exp(E) = 2 < 4$.

**2.** Caso $r + s + t = 2$. Para o subcaso $r = 2$, devemos ter $a_1 = a_2 = 1$ e $\exp(f) = \exp(F \circ F) = \exp(F) + \exp(F) = 2 < 4$. Se $r = t = 1$, devemos ter $a = 1 = b$ e $\exp(f) = \exp(F \circ E) = \exp(F) + \exp(E) = 3 < 4$.

E a única possibilidade é $\exp(f) = \exp(M_{1,1}(E)) = 4$. $\square$

De [21], $[[x_1, x_2], [x_3, x_4], x_5]$ é uma identidade de $M_{1,1}(E)$. Portanto, pela proposição anterior, possui expoente 4 e não pertence a $J_4$, constituindo assim um contraexemplo, nesse caso com $n = 5$, mostrando que a condição $n = 6$ é ótima.

# Referências Bibliográficas


[1] AMITSUR, S. A., LEVITZKI, J. Minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1**, p.449–463, 1950.

[2] AMITSUR, S. A., LEVITZKI, J. Remarks on minimal identities for algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.* **2**, p. 320–327, 1951.

[3] AMITSUR, S. A. The identities of PI-rings. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3**, p. 27–34, 1952.

[4] BERELE, A., REGEV, A. Applications of hook Young diagrams to P.I. algebras. *J. Algebra* **82**, p.559-567, 1983.

[5] BERELE, A., REGEV. A. Exponential growth for codimensions of some p.i. algebras. *J. Algebra* **241**, p. 118–145, 2001.

[6] CURTIS, C.W., REINER I. *Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras*. Pure and Applied Mathematics v. XI. New York: John Wiley & Sons, 1962.

[7] DEHN, M. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme. *Math. Ann.* **85**, 184–194, 1922.

[8] GIAMBRUNO,A., REGEV, A. Standard polynomials are characterized by their degree and exponent. *J. Algebra* **335**, 74–82, 2011.

[9] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. On codimension growth of finitely generated associative algebras. *Adv. Math.* **140**, 145–155, 1998.

[10] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate. *Adv. Math.* **142**, 221–243, 1999.

[11] GIAMBRUNO, A., ZAICEV, M. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. Mahtematical Surveys and Monographs v.122. American Mathematical Society: Providence, 2005.

[12] GONÇALVES, A. *Tópicos em Representação de Grupos*. IX Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA. Rio de Janeiro, 1973.

[13] JAMES, G., KERBER, A. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications v.16. Addison-Wesley: Reading, 1981.

[14] KAPLANSKY, Rings with a polynomial identity. *Bull. Amer. Math. Soc.* **54**, 496–500, 1948.

[15] KEMER, A. R. Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras (russo). *Izv. Akad. SSSR Ser. Mat.* **48** (5), p.1042–1059, 1984.

[16] KEMER, A. R. Solutions of the problem as to wether associative algebras have a finite basis of identities. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* **298**, 273–277, 1987.

[17] KEMER, A. R. *Ideals and Identities of Associative Algebras*. AMS Translations of Mathematical Monograph. v.87, American Mathematical Society: Providence, 1988.

[18] LAM, T. Y. *A First Course in Noncommutative Rings*. Graduate Texts in Mathematics v.131. Springer-Verlag: New York, 1991.

[19] LAMBEK, J. *Lectures on Rings and Modules*. Blaisdell: Waltham, 1966.

[20] LERON, U. Multilinear identities of the matrix ring. *Trans. Amer. Math. Soc.* **183**, p. 175–202, 1973.

[21] POPOV, A. P. On the identities of the matrices over the Grassmann algebra. *J. Algebra* **168**, p. 828–852, 1994.

[22] REGEV, A. Existence of identities in $A \otimes B$. *Israel J. Math.* **11**, 131–152, 1972.

[23] REGEV, A. The polynomial identities of matrices in characteristic zero, *Comm. Algebra* **8**, p.1417-1467, 1980.

[24] REGEV, A. On the identities of subalgebras of matrices over the Grassmann algebra. *Israel J. Math.* **58**, p. 351–369, 1987.

[25] SPECHT, W. Gesetza in Ringen. *Math. Z.* **52**, 557–589, 1950.

[26] VISHNE, U. Polynomial identities of $M_2(G)$. *Comm. Algebra* **30** (1), p. 443–454, 2002.

[27] WAGNER, W. Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme. *Math. Ann.* **113**, 528–567, 1936.