UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

KATIA ACOSTA SOARES

Existência e comportamento assintótico de soluções da equação da onda degenerada com condições de fronteira não lineares

Maringá-PR
2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DA ONDA DEGENERADA COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

KATIA ACOSTA SOARES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Claudete Matilde Webler Martins.

Maringá-PR
2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Soares, Katia Acosta
S676e Existência e comportamento assintótico de soluções da equação da onda degenerada com condições de fronteira não lineares / Katia Acosta Soares. – Maringá, 2019.
115 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Claudete Matilde Webler Martins.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática – Área de Concentração: Análise, 2019.

1. Equação da onda degenerada. 2. Condições de fronteira não lineares. 3. Método de Galerkin. 4. Método de energia perturbada. 5. Degenerate wave equation. 6. Nonlinear boundary condition. 7. Galerkin method. 8. Perturbed energy method. I. Martins, Claudete Matilde Webler, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática – Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.3535

Edilson Damasio CRB9-1.123

KATIA ACOSTA SOARES

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DA ONDA DEGENERADA COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Claudete Webler
Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Wellington José Corrêa
Prof. Dr. Wellington José Corrêa
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Campo Mourão

Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 17 de abril de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Aos meus sobrinhos Artur, Fellipe, Érick e Flavia.

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família que sempre esteve comigo durante essa caminhada. Em especial aos meus pais, Maria e Henrique, pelo carinho e incentivo aos estudos. Às minhas irmãs Ilma, Ângela e Helena por sempre, com carinho, cuidarem de mim.

À minha irmã Ilma, e meu cunhado Calixto, pelo incentivo aos estudos e pelo apoio financeiro especialmente na graduação e no mestrado, que me propiciaram a chance de estudar.

Aos meus amigos, pelos momentos de alegria e desafios vividos juntos. Em especial, aos meus amigos da graduação Edcleia, Rafael e Benverson pelo carinho, companheirismo e apoio nos momentos de estudo. Às minhas amigas do mestrado Nágela e Kamila pelo conhecimento e pelas alegrias compartilhadas, que me ajudaram a lidar com a saudade.

À minha orientadora Profª. Claudete M. W. Martins pela paciência, sabedoria, compreensão, dedicação e incentivo que tornaram possível a conclusão deste trabalho.

Ao Profº. Wellington José Corrêa e a Profª. Valéria Neves Domingos Cavalcanti pelas contribuições na correção deste trabalho.

À todos os meus professores que contribuíram com a minha formação profissional e pessoal.

À CAPES, pelo apoio financeiro, que foi essencial para minha dedicação exclusiva aos estudos.

Enfim, agradeço a todos que ajudaram-me direta ou indiretamente a superar, com persistência e paciência, os desafios até aqui. Agradeço a todos aqueles que acreditaram em mim.

Meu muito Obrigada!

Katia Acosta Soares

"The beauty of mathematics only
shows itself to more patient followers."
Maryam Mirzakhani.

Resumo

Neste trabalho estudamos a equação da onda degenerada com condições de fronteira não lineares

$$\begin{cases} \rho(x)y'' - \Delta y = 0 \ \text{ em } \Omega \times (0, \infty), \\ y = 0 \ \text{ em } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ y(x, 0) = y^0(x), \ \ (\sqrt{\rho}y')(x, 0) = (\sqrt{\rho}y^1)(x) \ \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde y' denota a derivada de y com relação a variável t, as funções f, g e ρ satisfazem hipóteses apropriadas. A existência de soluções será provada por meio do Método de Faedo-Garlekin. Além disso, o decaimento uniforme será obtido por meio do Método de Energia.

Palavras-chave: equação da onda degenerada, não linear, método de Galerkin.

Abstract

In this work we study the degenerated wave equation with nonlinear boundary conditions

$$\begin{cases} \rho(x)y'' - \Delta y = 0 \ \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ y = 0 \ \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ y(x,0) = y^0(x), \ \ (\sqrt{\rho}y')(x,0) = (\sqrt{\rho}y^1)(x) \ \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

where y' denoting the derivative of y with respect to t, the functions f, g and ρ satisfying suitable hypothesis. The existence of solutions will be proved using the Faedo-Garlekin Method. In addition, the uniform decay will be obtained by means of the Energy Method.

Keywords: degenerate wave equation, nonlinear, Galerkin method.

SUMÁRIO

Introdução **12**

1 Resultados Preliminares **15**

1.1 Alguns resultados de Análise Funcional 15

1.1.1 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert 15

1.1.2 Topologia Fraca e Topologia Fraca $*$ 17

1.2 Teoria das distribuições e Espaços funcionais 19

1.2.1 Distribuições e derivada fraca 19

1.2.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$ 21

1.2.3 Os Espaços de Sobolev 24

1.3 Espaços funcionais a valores vetoriais 31

1.4 Teoria do Traço 35

1.5 Teorema de Carathéodory 37

1.6 Resultados auxiliares 38

2 Equação da onda degenerada com condições de fronteira não lineares **45**

2.1 Hipóteses 45

2.2 Existência e unicidade de solução 48

2.2.1 Estimativas a priori 57

2.2.2 Análise dos termos não lineares 72

2.2.3 Passagem ao limite 75

2.2.4 Condições iniciais 82

2.2.5 Unicidade 85

2.3 Existência de solução fraca 88

2.3.1 Passagem ao Limite 93

2.3.2 Condições iniciais 97

3 Comportamento assintótico **98**

Bibliografia **113**

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi baseado no artigo de Marcelo Moreira Cavalcanti, Váleria Neves Domingos Cavalcanti e Juan Amadeo Soriano [8].

Sejam Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Sejam Γ_0 e Γ_1 subconjuntos não vazios de Γ tais que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ com $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. Consideramos a equação da onda degenerada $(\rho \geq 0)$ com condições de fronteira não lineares

$$(*) \begin{cases} \rho(x)y'' - \Delta y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ y = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ y(x,0) = y^0(x), \;\; (\sqrt{\rho}y')(x,0) = (\sqrt{\rho}y^1)(x) \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde y' denota a derivada de y com respeito ao parâmetro t.

No artigo [8], os autores provam a existência global de soluções regulares e fracas para o problema $(*)$ com a condição de que os dados iniciais pertençam a uma classe especial de funções, e além disso, obtêm o decaimento exponencial da energia relatada para o problema $(*)$. Quando $\rho = 1$ e $f, g = 0$, a existência de soluções fracas e regulares do problema $(*)$ foi estudada por muitos autores usando argumentos de semigrupos, por exemplo, em Quinn e Russel [35]; Chen [11], [12] e [13]; Lagnese [23] e [24]; e Komornik e Zuazua [20]. Mais tarde, Lasiecka e Tataru [25] estudaram um problema similar não degenerado $(\rho > 0)$ usando teoria de semigrupos não linear. Neste contexto, citamos os trabalhos de Conrad e Rao [15] e Komornik e Rao [21]. Uma vez que a teoria de semigrupos não é adequada para tratar problemas degenerados $(\rho \geq 0)$, usaremos aproximação de Galerkin. Contudo, como ocorrido nos trabalhos Cavalcanti

(2000) [10], Cavalcanti (1999) [9] e Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [5], devido aos autores, a necessidade de estimativas adicionais para passar o limite traz à tona dificuldades técnicas as quais são superadas considerando uma mudança de variáveis, a qual transforma o problema $(*)$ em um equivalente com dados iniciais nulos.

A fim de obter o decaimento exponencial da energia, usamos o método de energia perturbada, veja por exemplo, Komornik e Zuazua [20]. Para isso, consideramos Γ_0 e Γ_1 como segue

$$(1)\ \ \Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\} \ \text{ e } \ \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) < 0\},$$

onde $m(x) = x - x^0$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\nu(x)$ é um vetor normal unitário, normal a Γ em $x \in \Gamma$, apontado para fora. A característica que diferencia o artigo [8] dos demais é exatamente lidar com uma equação da onda degenerada sujeita a condições de fronteira não lineares, o que forçou os autores de [8] a lidar com uma estrutura de Liapunov mais difícil do que uma usada pelos mesmos autores num trabalho anterior, [9]. De fato, em [9] foi estudada a equação da onda com condições de fronteira não lineares sujeita a um amortecimento por atrito adicional atuando no domínio, cujo decaimento foi estabelecido considerando um funcional de Lyapunov padrão. Além disso, tiveram que lidar com a degeneracidade da função $\rho = \rho(x)$.

Assumimos que $\rho \geq 0$ em Ω, satisfazendo a seguinte condição

$$(2)\ \ \nabla\rho\cdot m \geq 0 \text{ em } \Omega.$$

Segundo o ponto de vista físico, se $\rho \geq 0$ é a densidade de massa do material o qual é modelado para ter a forma de Ω, a hipótese (2) nos informa que a distribuição da massa é concentrada de tal maneira que a densidade da massa cresce tanto quanto a distância dos pontos de Ω até o ponto x^0. Por outro lado, se $\rho = 0$, $(*)$ é um problema elíptico com condições de fronteira dinâmica o qual pode ser reduzido ao seguinte problema

$$(3) = \begin{cases} Ay + y' + f(y) + g(y) = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ y = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ y(x,0) = \gamma_0(y^0) \ \text{ em } \ \Gamma, \end{cases}$$

onde γ_0 é o operador traço e $A : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ é o operador linear auto-adjunto dado por $A\varphi = \dfrac{\partial w}{\partial \nu}$ onde ω é a única solução do problema elíptico

$$(4)\begin{cases} \Delta\omega = 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ \omega = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1, \\ \omega = \varphi \ \text{ em } \ \Gamma_0. \end{cases}$$

O problema (3) juntamente com (4), reduz (3) a um problema físico matemático sobre uma variedade. Nesta direção, é importante mencionar o trabalho de Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [5].

Considerando que a hipótese acima é válida, podemos mostrar que toda solução regular e fraca do problema $(*)$ decai uniformemente. Em outras palavras, se

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho|y'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 dx + \frac{C_0}{\delta+2}\int_{\Gamma_0} |y|^{\delta+2} d\Gamma, \tag{0-1}$$

é a energia associada ao problema $(*)$, podemos obter $E(t) \leq C\ e^{-\theta t}$, para todo $t \geq 0$ e C, θ constantes positivas.

Podemos citar ainda, alguns trabalhos mais recentes que foram publicados depois de [8], que abordam estudos semelhantes, entre eles os trabalhos de Sung e Wang [37], Feng [17], e de Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Santos [7].

Este trabalho é organizado conforme segue: No Capítulo 1 apresentamos alguns resultados auxiliares e notações que serão utilizados ao longo de todo o trabalho. No Capítulo 2, estudamos a existência e unicidade da solução regular, para isso fizemos uso do Método de Faedo-Galerkin. E com argumentos de densidade estudamos a solução fraca para o problema $(*)$. Por fim, no Capítulo 3, estudamos o decaimento da energia associada ao problema $(*)$ por meio do Método de Energia Perturbada.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentaremos os principais conceitos, resultados e notações que serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho. Ao longo deste capítulo, Ω denotará um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$.

Cabe destacar que não provaremos os resultados expostos, mas citaremos a referência onde as provas estão feitas.

1.1 Alguns resultados de Análise Funcional

1.1.1 Espaços de Banach e Espaços de Hilbert

Definição 1.1. Um *espaço normado* X é um espaço vetorial, com uma norma definida em X, ou seja, existe uma aplicação $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer $x, y \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\|x\|_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\|\alpha x\|_X = |\alpha| \, \|x\|_X$;
- $\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X$.

Observação 1.2. *Todo espaço normado $(X, \|\cdot\|)$ pode ser considerado um espaço métrico (X, d), considerando, $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in X$. Esta métrica é chamada de métrica induzida pela* *norma.*

Definição 1.3. Um espaço vetorial normado $(X, \|\cdot\|)$ é chamado de *espaço de Banach* quando toda sequência de Cauchy em X é convergente em X, com respeito à métrica induzida pela norma $\|\cdot\|$, isto é, X é um espaço normado completo.

Definição 1.4. Seja X um espaço vetorial normado e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ duas normas em X. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ é equivalente a $\|\cdot\|_2$ quando existem constantes $C_1 > 0$ e $C_2 > 0$ tais que

$$C_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq C_2 \|x\|_1 , \text{ para todo } x \in X.$$

Definição 1.5. Seja X um espaço vetorial. Um produto interno em X é uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X \times X \to \mathbb{R}^+$ tal que para quaisquer $x, y, z \in X$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

- $\langle x + y, z \rangle_X = \langle x, z \rangle_X + \langle y, z \rangle_X$;
- $\langle \alpha x, y \rangle_X = \alpha \langle x, y \rangle_X$;
- $\langle x, y \rangle_X = \overline{\langle y, x \rangle}_X$;
- $\langle x, x \rangle_X = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Neste caso, X com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ é chamado *espaço com produto interno* ou *espaço pré-Hilbert*.

Definição 1.6. Dizemos que X é um *espaço de Hilbert*, quando X é um espaço pré-Hilbert completo, em relação a norma definida por $||x||_X = \sqrt{\langle x, x \rangle_X}$.

Observação 1.7. *Se X é um espaço com produto interno então X é um espaço normado, e se X é um espaço de Hilbert então X é Banach.*

Teorema 1.8. *Seja Y um subespaço de um espaço de Hilbert H. Então:*

(a) Y é completo se, e somente se, Y é fechado em H.

(b) Se Y tem dimensão finita, então Y é completo.

(c) Se H é separável, então Y é separável. De forma geral, todo subconjunto de um espaço com produto interno separável é separável.

Demonstração. Ver Teorema 3.2-4 em [22]. □

Teorema 1.9. *Todo espaço de Hilbert é reflexivo.*

Demonstração. Ver Teorema 4.6.6 em [22]. □

Definição 1.10. Seja X um espaço de Hilbert. Detonamos por X' o conjunto de todos os funcionais lineares limitados sobre X, o qual chamamos de *espaço dual* de X.

Definição 1.11. Sejam X e Y espaços de Banach com $X \subseteq Y$. O operador de imersão $j : X \rightharpoonup Y$ é definido por $j(u) = u$ para todo $u \in X$.

(i) A imersão $X \subseteq Y$ é chamada continua se, e somente se, o operador j é contínuo, isto é, existe uma constante positiva b tal que

$$||u||_Y \leq b||u||_X, \text{ para todo } u \in X.$$

(ii) A imersão $X \subseteq Y$ é chamada compacta se, e somente se, o operador j é contínuo e toda sequência limitada em X possui uma subsequência convergente em Y.

Escrevemos $X \hookrightarrow Y$ e $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ para representar imersões contínuas e imersões compactas, respectivamente.

1.1.2 Topologia Fraca e Topologia Fraca $*$

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.

Seja $\{x_n\}$ uma sequência convergente para x na topologia fraca $\sigma(E, E')$, escrevemos $x_n \rightharpoonup x$ em E.

Proposição 1.12. *Seja $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle u, x_n\rangle \longrightarrow \langle u, x\rangle$, $\forall u \in E'$;

(ii) Se $x_n \longrightarrow x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E;

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $||x_n||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$;

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $u_n \longrightarrow u$ em E', então $\langle u_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle u, x\rangle$.

Demonstração. Ver Proposição 3.5 em [2]. □

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. Considere a aplicação

$$J_x : E' \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \langle J_x, u \rangle = \langle u, x \rangle \,,$$

que é linear e contínua e portanto $J_x \in E''$, para todo $x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja $\{u_n\}$ uma sequência convergente para u na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$, simbolicamente escrevemos

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } E'.$$

Proposição 1.13. *Seja $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então*

(i) $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle u_n, x\rangle \longrightarrow \langle u, x\rangle \,, \ \forall x \in E$;

(ii) Se $u_n \longrightarrow u$ *em* E*, então* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(E', E'')$;

(iii) Se $u_n \rightharpoonup u$ *em* $\sigma(E', E'')$*, então* $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *em* E';

(iv) Se $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *em* E'*, então* $||u_n||_{E'}$ *é limitada e* $||u||_{E'} \leq \liminf ||u_n||_{E'}$;

(v) Se $u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *em* E' *e* $x_n \longrightarrow x$ *em* E*, então* $\langle u_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle u, x\rangle$.

Demonstração. Ver Proposição 3.13 em [2]. □

Teorema 1.14. *Seja X um espaço de Banach e separável. Então toda sequência limitada $\{u_n\}$ em X' possui uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ convergente fraco $*$ para u em X'.*

Demonstração. Ver Teorema 21.E em [39]. □

Teorema 1.15. *Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em um espaço de Banach reflexivo X, então (u_n) possui uma subsequência fracamente convergente.*

Demonstração. Ver Proposição 21.23 em [39]. □

1.2 Teoria das distribuições e Espaços funcionais

1.2.1 Distribuições e derivada fraca

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, definimos $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$. Representamos por D^α o operador de derivação de ordem $|\alpha|$, isto é,

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1}\partial_{x_2}^{\alpha_2}...\partial_{x_n}^{\alpha_n}}.$$

No caso $0 = (0, 0, ..., 0)$ o operador D^0 será representado pelo operador identidade.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representamos por $C^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das funções numéricas definidas em Ω, indefinidamente continuamente deriváveis em Ω.

Definição 1.16. Seja $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Definimos o suporte de u, e denotaremos por $supp(u)$, como sendo o fecho em Ω do conjunto dos pontos de Ω onde u é diferente de zero. Isto é, $supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$. Se este conjunto for um compacto do $\mathbb{R}^n$, então dizemos que u possui suporte compacto.

Definição 1.17. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial, com as operações usuais, das funções infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto.

Definição 1.18. Uma sequência (φ_ν) em $C_0^\infty(\Omega)$ converge para φ em $C_0^\infty(\Omega)$, quando existe um compacto K de Ω, tal que:

(i) $supp(\varphi), supp(\varphi_\nu) \subset K$, para todo $\nu \in \mathbb{N}$;

(ii) Para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se $D^\alpha(\varphi_\nu - \varphi) \longrightarrow 0$ uniformemente em K.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido dessa noção de convergência, é chamado de *Espaço das Funções Testes sobre* Ω e é representado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.19. Uma distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um funcional linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R}$, contínuo no sentido da convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é,

(i) $T(a\varphi + b\psi) = aT(\varphi) + bT(\psi)$, para toda função $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$;

(ii) Se φ_ν converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ então $T(\varphi_\nu)$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{R}$.

O *Espaço das Distribuições sobre* Ω é denotado por $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, representamos o valor da distribuição T em φ por $\langle T, \varphi \rangle$. Com isso, dizemos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R}, \text{ para toda função } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K \subset \Omega$.

Lema 1.20. ***(Du Bois Raymond)*** *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Então, $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração. Ver Corolário 4.24 em [2]. □

Exemplo 1.21. Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. O funcional $T_u : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$, definido por

$$\langle T_u, \phi \rangle = \int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \quad \forall \phi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

é uma distribuição sobre Ω.

Demonstração. Ver Exemplo 4, Capítulo 1, em [29]. □

Observação 1.22. *Segue do Lema de Du Bois Raymond que se* $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$*, então* $T_u = T_v$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$ *se, e somente se,* $u = v$*. Desta forma, temos uma correspondência biunívoca entre as distribuições do tipo* T_u *com o espaço* $L^1_{loc}(\Omega)$.

Exemplo 1.23. Seja (u_ν) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$, convergente para u em $L^p(\Omega)$. Então (T_{u_ν}) converge para T_u em $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Demonstração. Ver Exemplo 6, Capítulo 1, em [29]. □

No que segue, definiremos a derivada fraca dada por Sobolev, e a derivada no sentido distribucional. Para detalhes sobre a motivação para estas definições veja [29] e [31].

Definição 1.24. Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x)dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx.$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Definição 1.25. Seja T uma distribuição sobre Ω e α um multi-índice. A derivada $D^\alpha T$ de ordem $|\alpha|$ de T é um funcional $D^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, D^\alpha \varphi \rangle .$$

Além disso, D^α é uma distribuição sobre Ω.

Observação 1.26. *Decorre da definição acima que uma distribuição tem derivada de todas as ordens. Além disso, o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$ dado por $D^\alpha(T) = D^\alpha T$ é linear e contínuo no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Para mais detalhes veja [29].*

1.2.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.27. Denotaremos por $L^p(\Omega), 1 \leq p < \infty$, o conjunto das (classes de) funções reais f definidas em Ω cuja p-ésima potência é integrável no sentido de Lebesgue e por $L^\infty(\Omega)$ denotaremos o conjunto das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω.

Definição 1.28. Por $L^p_{loc}(\Omega), 1 \leq p < \infty$, denotaremos o espaço das (classes de) funções reais definidas em Ω, cuja p-ésima potência é integrável à Lebesgue sobre qualquer subconjunto compacto $\mathbb{R}^n$ contido em Ω e por $L^\infty_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções mensuráveis e essencialmente limitadas em qualquer subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$ contido em Ω.

Teorema 1.29. *O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad se \;\; 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \|f\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} ess \, |f(x)| \, , \quad se \;\; p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Demonstração. Ver Teorema 2.10 em [1]. □

Corolário 1.30. *O espaço $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por*

$$(u,v)_{L^2(\Omega)} = (u,v) = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Teorema 1.31. *$L^p(\Omega)$ é um espaço separável se $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.15 em [1]. □

Teorema 1.32. *$L^p(\Omega)$ é um espaço reflexivo se $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.35 em [1]. □

Teorema 1.33. *Se $0 < p_1 < p_2 \leq \infty$ e $|\Omega| < \infty$, então $L^{p_2}(\Omega) \subset L^{p_1}(\Omega)$, onde $|\Omega|$ denota a medida de Lebesgue de Ω.*

Demonstração. Ver Teorema 8.2 em [38]. □

Teorema 1.34. *$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ para $1 \leq p \leq \infty$ e qualquer domínio Ω.*

Demonstração. Ver Corolário 2.9 em [1]. □

Teorema 1.35. *Seja $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $L^p(\Omega)$ e seja h pertencente a $L^p(\Omega)$ tal que $||h_n - h||_{L^2(\Omega)} \longrightarrow 0$. Então, existe uma subsequência (h_{n_j}) e uma função $l \in L^p(\Omega)$ tal que*

(a) $h_{n_j} \longrightarrow h$ quase sempre em Ω,

(b) $|h_{n_j}(x)| \leq l(x)\ \forall j$, quase sempre em Ω.

Demonstração. Ver Teorema 4.9 em [2]. □

Teorema 1.36. *$C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.19 em [1]. □

Definição 1.37. Seja $1 \leq p \leq \infty$. Dizemos que um número real q é expoente conjugado de p quando $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ se $p \in (1,\infty)$, $q = \infty$ se $p = 1$ e $q = 1$ se $p = \infty$.

Teorema 1.38. ***(Desigualdade de Young)*** *Sejam $1 < p < \infty$ e $q \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Dados $a, b \geq 0$, então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração. Ver Apêndice B.2 em [16]. □

Corolário 1.39. ***(Desigualdade de Young para ε)*** *Dados $a, b \geq 0$ e $\varepsilon > 0$ vale*

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{1}{q(\varepsilon p)^{q/p}} b^q.$$

Demonstração. Ver Apêndice B.2 em [16]. □

Teorema 1.40. ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Se $1 \leq p \leq \infty$ então*

$$\|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \,.$$

Demonstração. Ver Apêndice B.2 em [16]. □

Teorema 1.41. ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e q o expoente conjugado de p. Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então $fg \in L^1(\Omega)$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q \,.$$

Demonstração. Ver Teorema 4.6 em [2]. □

Teorema 1.42. ***(Desigualdade de Hölder generalizada)*** *Sejam $u_1, u_2, ..., u_k$ funções reais, tais que $u_i \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p_i$ para $i = 1, ..., k$, e ainda, $\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = 1$ então $\prod_{i=1}^{k} u_i \in L^p(\Omega)$ e*

$$\int_\Omega \left| \prod_{i=1}^{k} u_i(x) \right| dx \leq \prod_{i=1}^{k} \left\{ \int_\Omega |u_i(x)|^{p_i} \right\}^{\frac{1}{p_i}} .$$

Demonstração. Ver Teorema 3.1.1 em [36]. □

Teorema 1.43. ***(Teorema de Representação de Riesz)*** *Sejam $1 < p < \infty$ e $f \in (L^p(\Omega))'$. Então existe uma única função $u \in L^q(\Omega)$ com $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$, tal que*

$$\langle f, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \text{para todo } v \in L^p(\Omega).$$

Mas ainda,

$$\|u\|_q = \|f\|_{(L^p(\Omega))'}\,.$$

E, se $p = 1$ e $f \in (L^1(\Omega))'$, existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que

$$\langle f, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \ \forall\, v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_\infty = \|f\|_{(L^1(\Omega))'}\,.$$

Demonstração. Ver Teorema 4.11 e 4.14 em [2]. □

Se $(u, v)_{L^2(\Omega)} = 0$, então u e v são ditos ortogonais. Um conjunto $\{\phi_\alpha\}_{\alpha\in A}$ é ortogonal se para quaisquer dois elementos do conjunto são ortogonais. Um sistema $\{\phi_\alpha\}$ é ortonormal se é ortogonal e $||\phi_\alpha||_{L^2(\Omega)} = 1$, para todo α. Uma coleção $\psi_1, ..., \psi_N$ é dita linearmente independente se $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} a_k\psi_k(x) = 0$ implica que $a_k = 0$, para todo k.

Teorema 1.44. *Se $\{\psi_k\}$ é ortogonal em $L^2(\Omega)$, então é linearmente independente.*

Demonstração. Ver Teorema 8.22 em [38]. □

1.2.3 Os Espaços de Sobolev

Definição 1.45. Dado um número inteiro $m \geq 1$, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções de $L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo $\alpha \leq m$, no sentido distribucional. Simbolicamente,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall\, |\alpha| \leq m, \ \ \text{no sentido distribucional}\}$$

Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \text{quando } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}, \ \text{quando } p = \infty.$$

Teorema 1.46. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Demonstração. Ver Proposição 2.2.1 em [31]. □

Em particular, quando $p = 2$ representamos por $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$. E se $\Omega = \mathbb{R}^n$ denotamos por $W^{m,2}(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$ o espaço

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n);\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; \mid \alpha \mid \leq m\},$$

onde as derivadas são distribucionais, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1-1}$$

Corolário 1.47. *Os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert com a estrutura de produto interno dada por*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$. Por isto defini-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. E denotamos por $H_0^1(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$denotamos por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.48. *O espaço $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert separável munido do produto interno*

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}dx.$$

Demonstração. Ver Proposição 1 e 2, Capítulo 3, em [29]. □

Teorema 1.49. *Seja Ω um aberto, limitado, bem regular do $\mathbb{R}^n$. Então, a imersão do $H^1(\Omega)$ no $L^2(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração. Ver Teorema 6, Capítulo 3, em [29]. □

Teorema 1.50. *$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Ver Teorema 2.2.1 em [31]. □

Proposição 1.51. *Seja $u \in W^{m,p}(\Omega)$. Então supp $(D^\alpha u) \subset$ supp u, para todo $|\alpha| \leq m$.*

Demonstração. Ver Observação 5, Capítulo 2, em [31]. □

Teorema 1.52. *(**Desigualdade de Poincaré**) Se $|\Omega| < \infty$ então existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Demonstração. Ver Corolário 9.19 em [2]. □

Corolário 1.53. *As normas $\|v\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Capítulo 3 em [29]. □

Observação 1.54. *A desigualdade de Poincaré é válida também para funções que se anulam (no sentido do traço) em apenas uma parte da fronteira $\partial\Omega$ e também para as funções que tem média nula, isto é $\frac{1}{med(\Omega)} \int_\Omega u(x)dx = 0$. Para mais detalhes ver [36], página 127.*

Definição 1.55. Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, definimos a transformada de Fourier $\mathcal{F}u = \hat{u}$ por

$$\hat{u}(y) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle} u(y)dy, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n.$$

E sua transformada de Fourier inversa $\mathcal{F}^{-1}u = \check{u}$ por

$$\check{u}(y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle x,y\rangle} u(y)dy, \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^n$$

onde $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

Teorema 1.56. *(**Teorema de Plancherel**) Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ então $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|\hat{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\check{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração. Ver Teorema 1, Capítulo 4, em [16]. □

Definição 1.57. Em vista do Teorema de Plancherel podemos definir a transformada de Fourier para uma função $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ como segue. Escolha uma sequência $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_k \longrightarrow u$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema de Plancherel, tem-se

$$\begin{aligned}
\|\hat{u_k} - \hat{u_j}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= \left\|(2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle x,y\rangle}(u_k - u_j)(y)dy\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&= \left\|\widehat{u_k - u_j}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|u_k - u_j\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \|u_k - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_j - u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}
\end{aligned}$$

Logo $(\hat{u_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é completo, essa sequência converge para um limite o qual definimos $\hat{u} = \mathcal{F}u$: $\hat{u}_k \longrightarrow \hat{u}$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Definimos do mesmo modo $\check{u}$.

Teorema 1.58. *(Propriedades da Transformada de Fourier) Seja $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{u}\bar{\hat{v}}dy$.

(ii) $\widehat{(D\ \alpha u)} = (iy)^\alpha \hat{u}$ *para cada multi índice α tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) Se $u, v \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\widehat{(u * v)} = (2\pi)^{n/2}\hat{u}\hat{v}$.

(iv) Além disso, $u = \check{\hat{u}}$.

Demonstração. Ver Teorema 2, Capítulo 4, em [16]. □

Definição 1.59. O *Espaço de Schwartz* ou espaço das funções rapidamente decrescentes, que denotamos por S, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que:

$$\lim_{\|x\|\mapsto\infty} \|x\|^k D^\alpha\varphi(x) = 0$$

quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Denotamos $S'(\mathbb{R}^n)$ como o dual topológico de $S(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto dos funcionais lineares contínuos sobre $S(\mathbb{R}^n)$.

Consideremos o seguinte espaço

$$\{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier de u, munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle = \left\langle (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{v}\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1-2}$$

Proposição 1.60. *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos:*

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in S'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, as normas $\|\cdot\|_m$ e $\|\cdot\|$ provenientes dos produtos internos dados em (1-1) e (1-2) são equivalentes.

Demonstração. Ver Teorema 2.6.1 em [31] ou Proposição 1, Capítulo 5 , em [4]. □

Motivados pela Proposição 1.60 temos a seguinte definição:

Definição 1.61. Definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Proposição 1.62. *O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert, munido do produto interno*

$$\langle u, v \rangle = \left\langle (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)} .$$

Demonstração. Ver Proposição 2.6.2 em [31]. □

Observação 1.63. *Se $s \geq 0$, temos que $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow (H^s(\mathbb{R}^n))' = H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.64. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado bem regular (ou o $\mathbb{R}^n_+$) e $s \geq 0$. Definimos para $s < m$ os espaços fracionários

$$H^s(\Omega) = \{u = v_{|\Omega};\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

cuja norma é dada por

$$\|u\|_{H^s(\Omega)} = \inf\{\|v\|_{H^s(\mathbb{R}^n)};\ v_{|\Omega} = u\}.$$

Observação 1.65. *Quando $s \geq 0$ é um inteiro as definições de $H^s(\Omega)$ e de $H^m(\Omega)$ são equivalentes.*

Proposição 1.66. *Para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver Proposição 2, Capítulo 5, em [4]. □

Proposição 1.67. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver Proposição 2.6.7 em [31]. □

Agora, considerando Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular vamos introduzir os espaços $H^s(\Gamma)$.

Seja $\{(U_1, \varphi_1), ..., (U_k, \varphi_k)\}$ um sistema de cartas locais para Γ. A cobertura aberta $\Omega, U_1, ..., U_k$ de $\bar{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada à mesma. Mais precisamente, existem $\theta_0, \theta_1, ..., \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que

(i) $supp(\theta_0) \subset \Omega$; $supp(\theta_i) \subset U_i$ para $i = 1, ...k$;

(ii) $\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1$; para todo $x \in \bar{\Omega}$;

(iii) $0 \leq \theta_i \leq 1$ para $i = 1, ..., k$.

Seja u uma função definida sobre Γ. Por (ii), temos que

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} (\theta_i u)(x), \text{ quase sempre em } \Gamma. \tag{1-3}$$

Para cada $i \in \{1, ..., k\}$, definimos $u_i(y) = (\theta_i u)(\varphi_i^{-1}(y))$, onde $y \in \sum = (0,1)^{n-1}$.

Notemos que $S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Gamma;\ (u\theta_i)(x) \neq 0\}} \subset supp(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma$.

Então, $S(u_i) = \overline{\{x \in (0,1)^{n-1};\ (u_i)(x) \neq 0\}}$ é um compacto do $\mathbb{R}^{n-1}$ contido no aberto $\sum$. Além disso, como, $supp(u_i) \subset S(u_i) \subset \sum$ podemos estender u_i a uma função $\tilde{u}_i$ definida por

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i)(\varphi_i^{-1}(y)), & \text{se } y \in \sum \\ 0, & \text{se } y \in \mathbb{R}^{n-1} - \sum. \end{cases}$$

Se $\tilde{u}_i$ for para todo $i = 1, ..., k$, uma função integrável em $\mathbb{R}^{n-1}$ então em virtude de (1-3)

$$\int_\Gamma u(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_\Gamma (u\theta_i)(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y) \bar{J}(y) dy,$$

onde $\bar{J}(y)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\mathbb{R}^{n-1}$.

Denotando por $d\Gamma$ a medida superficial sobre Γ induzida pela medida de Lebesgue, designaremos por $L^p(\Gamma)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das funções L^p somáveis sobre Γ para a medida superficial $d\Gamma$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |\ u(x)\ |^p \ d\Gamma \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty \tag{1-4}$$

ou,

$$\|u\|_{L^\infty(\Gamma)} = \sup_{x \in \Gamma} ess\ |\ u(x)\ |, \text{ se } p = \infty.$$

Seja $m \in \mathbb{N}$. Representamos por $C^m(\Gamma)$ o espaço das funções $u : \Gamma \to \mathbb{R}$ de classe

C^m e por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço das funções infinitamente diferenciáveis sobre Γ. Usando a partição da unidade $\{\theta_i\}_{0\leq i\leq k}$ introduzida anteriormente temos,

$$L^p(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}),\ i = 1, ..., k\},$$

$$C^m(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}),\ i = 1, ..., k\}$$

e $\quad \mathcal{D}(\Gamma) = \{u : \Gamma \to \mathbb{R};\ u\widetilde{\theta_i \circ \varphi_i^{-1}} = \tilde{u}_i \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}),\ \forall m \in \mathbb{N}\ \ e\ i = 1, ..., k\}.$

Consideramos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_i : \mathcal{D}(\Gamma) &\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto \phi_i(u) = \widetilde{u\theta_i} \circ \varphi^{-1} \end{aligned} \tag{1-5}$$

Sendo $v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ vem que

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)v(y)dy = \int_{U_i\cup\Gamma} u(x)\theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x)d\Gamma, \tag{1-6}$$

onde $J_i(x)$ é uma aplicação infinitamente diferenciável sobre $\Gamma_i = U_i \cap \Gamma$. Definindo

$$\psi_i(v)(x) = \begin{cases} \theta_i(x)v(\varphi_i(x))J_i(x), & \text{se } x \in U_i \cap \Gamma \\ 0, & \text{se } x \in \Gamma - (U_i \cap \Gamma) \end{cases}$$

então, de (1-6) podemos escrever

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})\times\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \int_\Gamma u(x)\psi_i(v)(x)d\Gamma,$$

ou ainda, do fato que $\psi_i(v) \in \mathcal{D}(\Gamma)$, temos

$$\langle \phi_i(u), v\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}),\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})} = \langle u, \psi_i(v)\rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma),\mathcal{D}(\Gamma)}\,.$$

Da igualdade acima e do fato que $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$, resulta que a aplicação definida em (1-5) se prolonga, por continuidade a uma aplicação que ainda denotaremos por ϕ_i de $\mathcal{D}'(\Gamma)$ em $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1})$.

Definição 1.68. Definimos para $s \in \mathbb{R}$,

$$H^s(\Gamma) = \{u;\ \phi_i(u) \in H^s(\mathbb{R}^{n-1}),\ i = 1, 2, ..., k\},$$

equipado da norma

$$\|u\|_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{j=1}^{k} \|\phi_i(u)\|^2_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observação 1.69. *Alguns resultados sobre o espaço $H^s(\Gamma)$*

- *$H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert em virtude de $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ o ser.*
- *$D(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.*
- *A imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ é contínua e compacta.*

Para mais detalhes consultar [4], [31] ou [28].

Lema 1.70. ***(Imersões de Sobolev)*** *Seja Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, Ω de classe C^m e $1 \leq p < \infty$. Então as imersões abaixo são contínuas.*

(i) Se $mp < n$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right)$;

(ii) Se $mp = n$, então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, para $q \in [1, \infty)$;

Demonstração. Ver Teorema 2.5.1 em [31]. □

Teorema 1.71. ***(Teorema de Rellich-Kondrachov)*** *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$, para $n \geq 2$. Então as seguintes imersões são compactas:*

(i) Se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, para todo $q \in \left[1, \dfrac{np}{n-mp}\right)$;

(ii) Se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, para todo $q \in [1, \infty)$;

(iii) Se $p > n$, então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C^0(\bar{\Omega})$.

Demonstração. Ver Teorema 2.5.4 em [31]. □

1.3 Espaços funcionais a valores vetoriais

Nesta seção iremos determinar espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o que é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Para $t \in (0, T)$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x,t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento com $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Definição 1.72. Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) O espaço $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < \infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u : (a,b) \to X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

(b) O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess \left(\|u(t)\|_X \right).$$

(c) O espaço $C(a,b;X)$, consiste de todas as funções contínuas $u : (a,b) \to X$ que possuem derivadas contínuas sobre $[a,b]$. A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{C(a,b;X)} := \max_{t \in [a,b]} ||u(t)||_X.$$

Definição 1.73. Denotamos por $W^{1,p}(0,T;X)$ o espaço das funções $u \in L^p(0,T;X)$ tais que u' existe no sentido fraco e pertence ao espaço $L^p(0,T;X)$. Além disso,

$$||u||_{W^{1,p}(0,T;X)} := \left(\int_0^T [||u(t)||_X^p + ||u'(t)||_X^p] \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\sup_{0 \leq t \leq T} ess \left(||u(t)||_X + ||u'(t)||_X \right) \text{ se } p = \infty.$$

Escrevemos $H^1(0,T;X) = W^{1,2}(0,T;X)$ e $C(a,b;X)$ em vez de $C^0(a,b;X)$.

Teorema 1.74. *Sejam $m = 0, 1, ...,$ e $1 \leq p < \infty$, X e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m(a,b;X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$.

(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < \infty$ e $L^\infty(a,b;X)$ são espaços de Banach sobre $\mathbb{R}$.

(d) $C(a,b;X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C(a,b;X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(e) Se X é um espaço de Hilbert com produto interno $(.,.)_X$ então $L^2(a,b;X)$ é também um

espaço de Hilbert com produto interno

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_\Omega (u(t), v(t))_X dt. \tag{1-7}$$

(e) $L^p(a, b; X)$ *é separável, se* X *for separável e* $1 \leq p < \infty$.

(f) O espaço $L^p(a, b; X)$ *é reflexivo se* $1 < p < \infty$.

(g) Se $X \hookrightarrow Y$, *então* $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq \infty$.

Demonstração. Ver Teorema 23.2 em [39]. □

Definição 1.75. Seja X um espaço de Hilbert. Denotaremos por $\mathcal{D}(a, b, X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (a, b) \to X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a, b).

Dizemos que uma sequência $\varphi_\nu \longrightarrow \varphi$ em $\mathcal{D}(a, b; X)$ se

(i) Existe um compacto K de (a, b) tal que supp(φ_ν) e supp(φ) estão contidos em K, para todo ν;

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu \longrightarrow \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi$ em X, uniformemente em $t \in (a, b)$.

O espaço das aplicações lineares de $\mathcal{D}(a, b) = \mathcal{D}(a, b; \mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(a, b; X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}(a, b; X)$ se $S : \mathcal{D}(a, b) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \longrightarrow \theta$ em $\mathcal{D}(a, b)$ implicar que $\langle S, \theta_\nu \rangle \longrightarrow \langle S, \theta \rangle$ em X.

Diremos que $S_\nu \longrightarrow S$ em $\mathcal{D}(a, b; X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \longrightarrow \langle S, \theta \rangle$ para todo $\theta \in \mathcal{D}(a, b)$.

O espaço $\mathcal{D}'(a, b; X)$ munido da convergência acima é denominado *espaços das distribuições vetoriais* de (a, b) com valores em X.

Denotaremos por $H_0^1(a, b; X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a, b; X) := \left\{u \in L^2(a, b; X); u' \in L^2(a, b; X) \text{ e } u(a) = u(b) = 0\right\}$$

munido com o produto interno

$$((w, u)) = \int_a^b (w(t), u(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), u'(t))_X dt.$$

Uma vez que X é um espaço de Hilbert, identificamos $X \equiv X'$. Assim, identificando $L^2(a, b; X)$ com seu dual $(L^2(a, b; X))' \equiv (L^2(a, b; X'))$, via Teorema de Riesz obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$. Aqui $\hookrightarrow$ denota a imersão contínua e densa de um espaço no seguinte.

Proposição 1.76. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único funcional $h \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica $\langle h, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T),$ para todo $\xi \in X$.*

Demonstração. Ver Proposição 1 em [33]. □

Observação 1.77. *Baseado na Proposição 1.76, identificamos h com u'. Em razão disso, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in [H_0^1(a,b;X)]'$.*

Corolário 1.78. *A aplicação $u \in L^2(0,T;X) \longmapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$ é linear e contínua.*

Proposição 1.79. *Sejam X, Y espaços de Hilbert tal que a imersão $X \hookrightarrow Y$ é contínua e $u \in L^p(0,T;X)$, $u' \in L^p(0,T;Y)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então $u \in C^0([0,T];Y)$.*

Demonstração. Ver Seção 1, Corolário 1, em [30]. □

Proposição 1.80. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Então o espaço $L^1(0,T;X)$ é separável e $L^1(0,T;X)' \equiv L^\infty(0,T;X')$.*

Demonstração. Ver Exercício 23.12d em [39]. □

Observação 1.81. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Da Proposição 1.80 e do Teorema 1.14, toda sequência limitada (v_n) em $L^\infty(0,T;X')$ possui uma subsequência (v_{n_k}) com*

$$v_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} v \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;X') \text{ quando } n \to \infty,$$

isto é, para todo $u \in L^1(0,T;V)$,

$$\int_0^T \langle v_{n_k}(t), u(t)\rangle\, dt \to \int_0^T \langle v(t), u(t)\rangle\, dt, \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Proposição 1.82. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável. Se $v_n' = u_n$ em $[0,T]$ para todo n, e*

$$u_n \overset{*}{\rightharpoonup} u \ \ em \ \ L^\infty(0,T;X), \ \ quando \ n \to \infty,$$
$$v_n \overset{*}{\rightharpoonup} v \ \ em \ \ L^\infty(0,T;X), \ \ quando \ n \to \infty,$$

então $v' = u$ *em* $[0,T]$.

Demonstração. Ver Exercício 23.12g em [39]. □

1.4 Teoria do Traço

Consideramos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Como vimos $\mathcal{D}(\Gamma)$ é o espaço vetorial das funções reais definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\bar{\Omega}$, representaremos por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ. Por $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ representa o conjunto de todas as funções $\varphi : \bar{\Omega} \to \mathbb{R}$ que são restrições de funções pertencentes a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ restrita a $\bar{\Omega}$. Em simbologia $\mathcal{D}(\bar{\Omega}) = \{\varphi = \psi|_{\bar{\Omega}}, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.

Proposição 1.83. *Existe uma constante positiva* C *tal que* $||\gamma_0 u||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C||u||_{H^1(\Omega)}$.

Demonstração. Ver Proposição 2.7.1 em [31]. □

De acordo com a Proposição 1.83 e pelo fato de que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $H^1(\Omega)$, podemos estender a aplicação $\gamma_0 : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a única aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0,

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H_1(\Omega) &\to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u|_\Omega, \forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}). \end{aligned} \tag{1-8}$$

A aplicação dada em (1-8) é denominada a *aplicação traço de ordem zero*.

Teorema 1.84. *O núcleo de* γ_0 *é o espaço* $H_0^1(\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 2.7.1 em [31]. □

Em face de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ ser denso em $H^m(\Omega)$ podemos estender a aplicação $\gamma_j : \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \to$

$H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ a uma única aplicação linear e contínua e tal que

$$\left.\frac{\partial u^j}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma = \gamma_j u, \forall u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), \forall j = 1, 2, ..., m-1.$$

Assim, a partir das $\gamma_j s$, podemos enunciar o seguinte Teorema:

Teorema 1.85. *Existe uma única aplicação linear e contínua* γ

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

$$u \mapsto \gamma u = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_{m-1})$$

com a topologia natural do espaço $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *dada por*

$$||w||_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} = ||w||_{H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma)} + ||w||_{H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma)} + ... + ||w||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $w = (w_0, w_1, ..., w_{m-1})$.

Demonstração. Ver Teorema 2.7.2 em [31]. □

Observação 1.86. *A aplicação* γ *acima é denominada aplicação traço de ordem* m.

Teorema 1.87. *Seja* Ω *um subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* Γ *de classe* C^1. *Então existe um operador linear limitado* $T : W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Gamma)$ *tal que*

(i) $Tu = u|_\Gamma$ *se* $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*;*

(ii) $||Tu||_{L^p(\Gamma)} \leq C||u||_{W^{1,p}(\Omega)}$, *para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$, *com* C *constante dependendo somente de* p *e* u.

Demonstração. Ver Teorema 1, Capítulo 5, em [16]. □

Observação 1.88. *Chamamos* Tu *de traço de* u *sobre* Γ.

Para estudo do da Teoria do Traço nos espaços $L^2(0, T, H^m(\Omega))$ e $H^{-1}(0, T, H^m(\Omega))$ veja [33].

1.5 Teorema de Carathéodory

Nesta seção apresentaremos o Teorema de Carathéodory que será usado para provar que existe solução para o problema aproximado, no Capítulo 2.

Seja D um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^{n+1}$, cujos elementos serão denotados por (t, x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ e seja $h : D \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = h(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1-9}$$

Dizemos que h está nas condições de Carathéodory sobre D se

(i) $h(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $h(t, x)$ é contínua em x para cada t fixado;

(iii) para cada compacto K de D, existe uma função real $m_K(t)$ integrável, tal que

$$|h(x, t)| \leq m_K(t), \text{ para todo } (x, t) \in K.$$

Teorema 1.89. ***(Carathéodory).*** *Sejam $h : D \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D. Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1-9) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

Demonstração. Ver [14]. □

Corolário 1.90. ***(Prolongamento).*** *Sejam $D = [0, T] \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $h : D \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre D. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução do problema (1-9) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

Demonstração. Ver [14]. □

1.6 Resultados auxiliares

Teorema 1.91. ***(Teorema da Compacidade de Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \hookrightarrow B \hookrightarrow B_1$ e*

(i) B_0 e B_1 são reflexivos;

(ii) A imersão $B_0 \hookrightarrow B$ é compacta;

(iii) A imersão $B \hookrightarrow B_1$ é contínua.

Definamos $W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u' \in L^{p_1}(0,T;B_1)\}$, onde $1 < p_0; p1 < \infty$. Consideramos W munido da norma

$$||u||_W = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u'||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

a qual o torna um espaço de Banach. Então a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração. Ver Teorema 5.1, Capítulo 1, em [28]. □

Teorema 1.92. ***(Lema de Lions)*** *Seja (u_μ) uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$ e $Q = \Omega \times (0,T)$. Se*

(i) $u_\mu \longrightarrow u$ quase sempre em Q;

(ii) $||u_\mu||_{L^q(Q)} \leq C, \;\; \forall \mu \in \mathbb{N}$;

então $u_\mu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração. Ver Lema 1.3, Capítulo 1, em [28]. □

Proposição 1.93. ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam $m \in L^1(0,T)$ tal que $m \geq 0$ quase sempre em $(0,T)$ e seja $a \geq 0$ uma constante. Considere φ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\varphi(s)ds, \;\; \forall t \in (0,T),$$

então

$$\varphi(t) \leq a.e^{\int_0^t m(s)ds}, \;\; \forall \in (0,T).$$

Demonstração. Ver Lema A.4 em [3]. □

Proposição 1.94. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)*** *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^n$, tem-se $|a \cdot b| \leq ||a||_{\mathbb{R}^n}||b||_{\mathbb{R}^n}$, onde $\cdot$ denota o produto interno no $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração. Ver Apêndice B.2 em [16]. □

Proposição 1.95. *Sejam X, Y, Z espaços de Banach. Então*

(a) Se a imersão $X \subseteq Y$ e $Y \subset Z$ são contínuas, então a imersão $X \subseteq Z$ também o é. Além disso, se a imersão $X \subseteq Y$ ou $Y \subset Z$ é compacta, então a imersão $X \subseteq Z$ também o é.

(b) Se a imersão $X \subseteq Y$ é contínua, então quando $n \longrightarrow \infty$,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } X \text{ implica que } u_n \longrightarrow u \text{ em } Y$$
$$\text{e } \ u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \text{ implica que } u_n \rightharpoonup u \text{ em } Y.$$

(c) Se a imersão $X \subseteq Y$ é compacta, então quando $n \longrightarrow \infty$,

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } X \text{ implica que } u_n \longrightarrow u \text{ em } Y.$$

Demonstração. Ver Proposição 21.35 em [39]. □

Definição 1.96. Um par dual (ou sistema dual) é um par de espaços vetoriais $\langle L, L' \rangle$ relacionados por meio de uma aplicação bilinear $\langle \cdot, \cdot \rangle : L \times L' \to \mathbb{R}$ que satisfaz

(a) se $\langle x, x' \rangle = 0$ para todo $x' \in L'$, então $x = 0$.

(b) se $\langle x, x' \rangle = 0$ para todo $x \in L$, então $x' = 0$.

Definição 1.97. Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é dita $H-$ elíptica ou coerciva, quando existe uma constante $\alpha > 0$ tal que $a(v, v) \geq \alpha ||v||_H^2$, para todo $v \in H$.

Teorema 1.98. ***(Lax - Milgran)*** *Seja $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear contínua, $H-$ elíptica e seja $f : H \to \mathbb{R}$ uma forma linear contínua. Então existe um único $u \in H$ tal que $a(u, v) = \langle f, v \rangle = f(v)$, para todo $v \in H$.*

Demonstração. Ver Teorema 1, Capítulo 4, em [29]. □

Definição 1.99. Denotamos por $\mathcal{H}$ o seguinte conjunto

$$\mathcal{H} = \left\{ u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega) \right\},$$

o qual, munido do produto interno,

$$((u,v))_{\mathcal{H}} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u,v \in \mathcal{H}$$

e a norma

$$||u||_{\mathcal{H}} = \left[||u||^2_{L^2(\Omega)} + ||\Delta u||^2_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.100. *$\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}$.*

Demonstração. Ver Proposição 6.3.2, em [4]. □

Proposição 1.101. *Existe uma única aplicação linear e contínua:*

$$\gamma : \mathcal{H} \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$$
$$u \mapsto (\gamma_0(u), \gamma_1(u))$$

e ainda a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem 2.

Demonstração. Ver Proposição 6.3.3 em [4]. □

Proposição 1.102. *Existe uma única aplicação linear e contínua:*

$$\gamma_1 : \mathcal{H} \cap H^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração. Ver Proposição 6.3.6 em [4]. □

Teorema 1.103. ***(Fórmulas de Green)*** *Seja Ω aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, são válidas as seguintes fórmulas*

(i) $\displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma u v \nu^i dx; \quad \forall u,v \in H^1(\Omega)$ *e* $i = 1, 2, ..., n.$
Aqui as funções u e v são identificadas com a imagem da aplicação traço γ_0.

(ii) $\displaystyle -\int_\Omega \Delta u v dx = (\nabla u, \nabla v) - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} v dx; \quad \forall u \in H^2(\Omega)$ *e* $\forall v \in H^1(\Omega)$,

(iii) $\displaystyle (\Delta u, v) + (\nabla u, \nabla v) = \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, v \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$ *;* $\forall u \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$,

onde $\displaystyle (\nabla u, \nabla v) = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx$ *e* $\nu = (\nu^1, \nu^2, ..., \nu^n)$ *é a normal unitária exterior à Γ.*

Demonstração. Ver Seção 6.3 em [4]. □

Seja Ω um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Sejam Γ_0 e Γ_1 subconjuntos não vazios de Γ tais que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.

Definição 1.104. Denotamos por V o subespaço de $H^1(\Omega)$, dado por

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_1 \right\}.$$

Proposição 1.105. *O espaço V com a norma induzida por $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. Ver [34]. □

Proposição 1.106. *Considerando em V a norma*

$$||v||_V = ||\nabla v||_{L^2(\Omega)}, \text{ para todo } v \in V,$$

segue que $||\cdot||_V$ e $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ são equivalentes.

Demonstração. Ver Proposição 1, Capítulo 4, em [29]. □

Corolário 1.107. *V é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$((u,v))_V = \int_\Gamma \nabla u \cdot \nabla v dx, \text{ para todo } u, v \in V.$$

Observação 1.108. *Da Proposição 1.48 e do Teorema 1.8 concluímos que V é um espaço separável. Além disso, pelo Teorema 1.9 segue que V é reflexivo.*

Teorema 1.109. *Seja Ω um domínio no $\mathbb{R}^n$, com fronteira Γ de classe C^m. Se $mp < n$ e $p \le q \le \dfrac{p(n-1)}{n-mp}$, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma).$$

Se $mp = n$, então a imersão acima é válida para $p \le q < \infty$.

Demonstração. Ver Teorema 5.22 em [1]. □

Observação 1.110. *Notemos que a imersão acima esta definida no sentido do traço. Para mais detalhes veja [1].*

Seja δ uma constante tal que:

- $\delta \leq \dfrac{1}{n-2}$ para $n \geq 3$;
- $\delta > 0$ para $n = 1$ ou $n = 2$.

Afirmamos que $V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma)$. Com efeito, consideramos $q = 2\delta + 2$ e $m = 1$ segue, para $n \geq 3$, que $1 < q < \dfrac{2(n-1)}{n-2}$. Assim pelo Teorema 1.109 temos a imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma)$, consequentemente,

$$V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma). \tag{1-10}$$

Agora, para $n = 1$ ou $n = 2$, consideramos δ suficientemente pequeno tal que $q = 2\delta + 2 < \infty$. Assim, para $n = 2, m = 1$ e $p = 2$, o Teorema 1.109 garante a imersão (1-10). Da mesma forma, para $n = 1$ e $m = p = 1$, obtemos o mesmo resultado. Concluindo a prova da afirmação.

Proposição 1.111. *Dado $f \in L^2(\Omega)$ e $g \in L^2(\Gamma_0)$, existe uma única solução $u : \Omega \to \mathbb{R}$, em V, para o problema de Dirichlet-Neumann*

$$\begin{cases} \Delta u = f \ \ em \ \ \Omega \\ u = 0 \ \ em \ \ \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = g \ \ em \ \ \Gamma_0 \end{cases} \tag{1-11}$$

Demonstração. Notemos que a formulação variacional do problema (1-11) é dado por

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) + (g, v)_{\Gamma_0}, \ \text{ para todo } \ v \in V. \tag{1-12}$$

Definamos a aplicação $a : V \times V \to \mathbb{R}$ por $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = (u, v)_V$. Segue que a é uma aplicação linear, contínua e coerciva.
Definamos a aplicação $h : V \to \mathbb{R}$ por $\langle h, v\rangle = (f, v) + (g, v)_{\Gamma_0}$. Afirmamos que h é linear e contínua. De fato, Sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que

$$\begin{aligned} \langle h, \alpha v_1 + v_2\rangle &= (f, \alpha v_1 + v_2) + (g, \alpha v_1 + v_2)_{\Gamma_0} \\ &= \alpha(f, v_1) + \alpha(g, v_1)_{\Gamma_0} + (f, v_2) + (g, v_2)_{\Gamma_0} \\ &= \alpha \langle h, v_1\rangle + \langle h, v_2\rangle . \end{aligned}$$

Além disso, da desigualdade de Holder (Teorema 1.41), desigualdade de Poincaré em

V e da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ temos que

$$|\langle h, v\rangle| \leq ||f||_{L^2(\Omega)}||v||_{L^2(\Omega)} + ||g||_{L^2(\Gamma_0)}||v||_{L^2(\Gamma_0)} \tag{1-13}$$
$$\leq \lambda_1||f||_{L^2(\Omega)}||v||_V + \lambda_2||g||_{L^2(\Gamma_0)}||v||_V \tag{1-14}$$
$$= \lambda_3||v||_V, \tag{1-15}$$

sendo $\lambda_3 = \lambda_1||f||_{L^2(\Omega)} + \lambda_2||g||_{L^2(\Gamma_0)}$ e λ_1, λ_2 constantes positivas. Logo a aplicação h é linear e contínua.

Assim, pelo Teorema de Lax-Milgran (Teorema 1.98) existe uma única solução $u : \Omega \to \mathbb{R}$, em V, que verifica a igualdade (1-12). Além disso, como Ω é limitado com fronteira de classe C^2, por regularidade elítica (veja [2] ou [18]) temos que $u \in H^2(\Omega)$, ou seja, $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ (veja Proposição 1.67).

Em particular, para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$, de (1-12) temos $(\nabla u, \nabla\varphi) = (f, \varphi)$, para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Pela fórmula de Green segue que $(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi)$. Como $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$, obtemos

$$(-\Delta u, \varphi) = (f, \varphi) \text{ para toda } \varphi \in L^2(\Omega), \tag{1-16}$$

pelo Lema de Du Bois Raymond (Lema 1.20) $-\Delta u = f$ quase sempre em Ω. Notemos que $\Delta u \in L^2(\Omega)$ uma vez que $f \in L^2(\Omega)$.

Como $\Delta u \in L^2(\Omega)$, temos que $u \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$. Assim, pela fórmula de Green e de (1-16) obtemos

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial u}{\partial\nu}, v\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} &= (\Delta u, v) + (\nabla u, \nabla v)\\ &= (\Delta u, v) + (f, v) + (g, v)_{\Gamma_0}\\ &= (\Delta u + f, v) + (g, v)_{\Gamma_0}\\ &= (g, v)_{\Gamma_0},\end{aligned}$$

ou seja, $\left\langle \frac{\partial u}{\partial\nu}, v\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = (g, v)_{\Gamma_0}$ para toda $v \in V$. Consequentemente, $\frac{\partial u}{\partial\nu} = g$ em $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$. Por outro lado, temos $g \in L^2(\Gamma_0) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$, logo $\frac{\partial u}{\partial\nu} = g$ em $L^2(\Gamma_0)$. $\square$

A fim de simplificar a notação, denotaremos, no decorrer do trabalho

$$(u,v)=\int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad (u,v)_{\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0} u(x)v(x)dx, \quad ||u||^2=\int_\Omega |u|^2dx,$$

$$||u||^2_{\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0}|u(x)|^2d\Gamma \quad \text{e} \quad ||u||^p_{p,\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0}|u(x)|^pd\Gamma.$$

CAPÍTULO 2

EQUAÇÃO DA ONDA DEGENERADA COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA NÃO LINEARES

Seja Ω um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ de classe C^2. Sejam Γ_0 e Γ_1 subconjuntos não vazios de Γ tais que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.

Estudaremos a existência global de soluções da equação da onda degenerada com condições de fronteira não lineares

$$(*) \begin{cases} \rho(x)y'' - \Delta y = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ y = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ y(x,0) = y^0(x), \quad (\sqrt{\rho}y')(x,0) = (\sqrt{\rho}y^1)(x) \text{ em } \Omega, \end{cases}$$

onde y' denota a derivada de y com respeito ao parâmetro t.

2.1 Hipóteses

Nesta seção, apresentaremos algumas hipóteses sobre o problema $(*)$.

Assumiremos que

$$\rho \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \rho \in C^1(\bar{\Omega}). \tag{2-1}$$

Consideramos a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(s) = C_0|s|^\delta s, \quad \text{para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e para algum } \ C_0 > 0, \tag{2-2}$$

e $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 não-decrescente tal que existem $k_1, k_2 > 0$ verificando

$$k_1|s|^{\xi+2} \leq g(s)s \leq k_2|s|^{\xi+2}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}, \tag{2-3}$$

onde $0 < \delta, \xi \leq \dfrac{1}{n-2}$ se $n \geq 3$ ou $\delta, \xi > 0$ se $n = 1$ ou $n = 2$.

Observação 2.1. *Para estudarmos a existência de solução regular e fraca, sem perda de generalidade, consideramos $C_0 = 1$ na hipótese (2-2).*

A fim de obter a existência de soluções regulares, assumimos que

$$y^0, y^1 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega), \tag{2-4}$$

satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta y^0 = 0 \ \text{ em } \ \Omega, \\ y^0 = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial y^0}{\partial \nu} + f(y^0) = -y^1 - g(y^1) \ \text{ em } \ \Gamma_0. \end{cases} \tag{2-5}$$

Observação 2.2. *Recordamos que $V = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ em } \Gamma_1\}$ (veja Definição 1.104).*

Observação 2.3. *Vimos que, para $n \geq 1$, temos as imersões $V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ e $V \hookrightarrow L^{2\xi+2}(\Gamma_0)$. Consequentemente, $y^0 \in L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ e $y^1 \in L^{2\xi+2}(\Gamma_0)$. Assim, das hipóteses (2-2) e (2-3) temos que $f(y^0), g(y^1) \in L^2(\Gamma_0)$, pois $||f(y^0)||^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq C_0^2||y^0||^{2\delta+2}_{2\delta+2,\Gamma_0}$ e $||g(y^1)||^2_{L^2(\Gamma_0)} \leq k_2^2||y^0||^{2\xi+2}_{2\xi+2,\Gamma_0}$. Além disso, $y^1 \in V \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$. Portanto, temos*

$$\frac{\partial y^0}{\partial \nu} = -f(y^0) - y^1 - g(y^1) \in L^2(\Gamma_0).$$

Então dado $y^1 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ o problema elíptico (2-5) tem uma única solução $y^0 \in V$ a *qual verifica esta igualdade (veja Proposição 1.111). Além disso, como Ω é de classe C^2, por regularidade elíptica $y^0 \in H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, isto é, $y^0 \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$.*

As hipóteses (2-4) e (2-5) parecem ser restritivas, mas, na verdade, elas não são restritivas uma vez que dado $y^1 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, o problema elíptico (2-5) possui uma única solução $y^0 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$. Assim sendo, para cada $y^1 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ existe um único $y^0 \in V \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ verificando (2-5) o qual prova que as condições (2-4) e (2-5) fazem sentido.

Agora para obter a existência de soluções fracas, consideramos, de um modo natural,

$$\left\{y^0, y^1\right\} \text{ pertencente ao fecho do conjunto } \mathcal{C} \text{ em } V \times L^2(\Omega), \tag{2-6}$$

onde $\mathcal{C} = \left\{\{y^0, y^1\} \in (H^{\frac{3}{2}}(\Omega))^2; \text{ verificando } (2-5)\right\}$.

Agora estamos em condições de enunciar os seguintes resultados:

Teorema 2.4. *Assuma que as hipóteses (2-1)−(2-5) são válidas. Então, o problema $(*)$ possui uma única solução tal que*

$$y \in L^\infty(0,\infty;V), \qquad \sqrt{\rho}y' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), \tag{2-7}$$

$$y' \in L^\infty(0,\infty;V), \qquad \sqrt{\rho}y'' \in L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)), \tag{2-8}$$

$$\rho y'' - \Delta y = 0 \quad em \quad \Omega \times (0,\infty), \tag{2-9}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \quad em \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \tag{2-10}$$

$$y(0) = y^0, \qquad \sqrt{\rho}y'(0) = \sqrt{\rho}y^1. \tag{2-11}$$

A função y será dita solução regular para o problema $(*)$.

Teorema 2.5. *Assuma que as hipóteses (2-1) e (2-6) sejam válidas. Então o problema $(*)$ possui pelo menos uma solução fraca na classe*

$$y \in C^0([0,\infty);V), \qquad \sqrt{\rho}y' \in C^0([0,\infty);L^2(\Omega)) \tag{2-12}$$

$$y' \in L^2([0,\infty);L^2(\Gamma_0)). \tag{2-13}$$

2.2 Existência e unicidade de solução

Nesta seção provaremos a existência de soluções regulares para o problema $(*)$ (Teorema 2.4) e para este propósito empregaremos o Método de Galerkin.

Se y é solução regular do problema $(*)$ então vale

$$\rho(x)y'' - \Delta y = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times (0,\infty). \tag{2-14}$$

Seja w pertencente a V, calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ em ambos os membros da igualdade (2-14), obtemos

$$(\rho y''(t), w) - (\Delta y(t), w) = 0. \tag{2-15}$$

Notemos que pela fórmula de Green

$$\begin{aligned} -(\Delta y(t), w) &= (\nabla y(t), \nabla w) - \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu} w d\Gamma \\ &= (\nabla y(t), \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial y}{\partial \nu} w d\Gamma. \end{aligned}$$

Como $w \in V$, segue que $w|_{\Gamma_1} = 0$, logo

$$-(\Delta y(t), w) = (\nabla y(t), \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} w d\Gamma. \tag{2-16}$$

Do problema $(*)$ temos que $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = -y' - f(y) - g(y')$ em $\Gamma_0 \times (0,\infty)$ e, consequentemente, usando (2-2),

$$-\int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial \nu} w d\Gamma = \int_{\Gamma_0} (y' + f(y) + g(y')) w d\Gamma = \int_{\Gamma_0} y' w d\Gamma + \int_{\Gamma_0} |y|^\delta y w d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(y') w d\Gamma.$$

Substituindo em (2-16) obtemos

$$-(\Delta y, w) = (\nabla y, \nabla w) + (y', w)_{\Gamma_0} + (|y|^\delta y, w)_{\Gamma_0} + (g(y'), w)_{\Gamma_0}. \tag{2-17}$$

Portanto, substituindo (2-17) em (2-15), obtemos a formulação variacional do problema

$(*)$, dado por:

$$(\rho y'', w) + (\nabla y, \nabla w) + (y', w)_{\Gamma_0} + (|y|^{\delta} y, w)_{\Gamma_0} + (g(y'), w)_{\Gamma_0} = 0, \tag{2-18}$$

para todo w pertencente a V.

A fim de resolver o problema $(*)$, vamos transformá-lo num problema equivalente, com dados iniciais nulos. Para isso, consideramos a seguinte mudança de variáveis

$$v(x,t) = y(x,t) - \phi(x,t), \tag{2-19}$$

sendo

$$\phi(x,t) = y^0(x) + t y^1(x), \quad \text{para todo } t \in [0,T]. \tag{2-20}$$

Notemos que

- $\phi'(x,t) = y^1(x) \quad \text{e} \quad \phi''(x,t) = 0.$
- $v'(x,t) = y'(x,t) - \phi'(x,t) = y'(x,t) - y^1(x)$, isto é, $v'(x,t) + y^1(x) = y'(x,t)$.
- $v''(x,t) = y''(x,t) - \phi''(x,t) = y''(x,t)$.

Das igualdades acima e do problema $(*)$, formalmente temos

$$\begin{aligned} 0 = \rho(x) y''(x,t) - \Delta y(x,t) &= \rho(x) v''(x,t) - \Delta\left[v(x,t) + \phi(x,t)\right] \\ &= \rho(x) v''(x,t) - \Delta v(x,t) - \Delta \phi(x,t), \end{aligned} \tag{2-21}$$

ou seja,

$$\rho(x) v''(x,t) - \Delta v(x,t) = \Delta \phi(x,t) = \Delta y^0(x) + t \Delta y^1(x).$$

Por outro lado, pelas condições de fronteira, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial y}{\partial \nu}(x,t) + y'(x,t) + f(y(x,t)) + g(y'(x,t)) \\ &= \frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t) + \frac{\partial \phi}{\partial \nu}(x,t) + v'(x,t) + y^1(x) \\ &+ |v(x,t) + \phi(x,t)|^{\delta}(v(x,t) + \phi(x,t)) + g(v'(x,t) + \phi'(x,t)), \end{aligned} \tag{2-22}$$

isto é,

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} + v' + |v + \phi|^{\delta}(v + \phi) + g(v' + \phi') = -y^1 - \frac{\partial \phi}{\partial \nu}, \ \text{ em } \Gamma_0 \times (0,T).$$

A seguir, analisaremos as condições iniciais, para isso observamos que

$$\begin{aligned}(\sqrt{\rho}y^1)(x) &= (\sqrt{\rho}y')(x,0) = (\sqrt{\rho}v')(x,0) + (\sqrt{\rho}\phi')(x,0)\\ &= (\sqrt{\rho}v')(x,0) + (\sqrt{\rho}y^1)(x),\end{aligned}$$

logo $(\sqrt{\rho}v')(0) = 0$.

Também, $v(x,0) = y(x,0) - \phi(x,0) = y^0(x) - y^0(x) = 0$.

Portanto, v é solução do problema:

$$\begin{cases}\rho(x)v'' - \Delta v = F(x,t) \text{ em } \Omega \times (0,T),\\ v = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,T),\\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} + v' + |v+\phi|^\delta (v+\phi) + g(v'+\phi') = G(x,t) \text{ em } \Gamma_0 \times (0,T),\\ v(0) = 0, (\sqrt{\rho}v')(0) = 0 \text{ em } \Omega.\end{cases} \tag{2-23}$$

sendo

$$F(x,t) = \Delta y^0(x) + t\Delta y^1(x), \quad \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{2-24}$$

$$G(x,t) = -y^1(x) - \left(\frac{\partial y^0}{\partial \nu}(x) + t\frac{\partial y^1}{\partial \nu}(x)\right), \quad \forall (x,t) \in \Gamma_0 \times (0,T) \tag{2-25}$$

Podemos dizer que o problema $(*)$ é equivalente ao problema (2-23)$-$(2-25) no seguinte sentido: se v é uma solução de (2-23) em $[0,T]$, então $y = v + \phi$ é uma solução para o problema $(*)$ no mesmo intervalo.

Representamos por $V_m = [w_1, w_2, ..., w_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$, o subespaço de V gerado pelos m primeiros vetores da base $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ em V, a qual é ortonormal em $L^2(\Omega)$.

Definamos, para $\epsilon > 0$,

$$\rho_\epsilon = \rho + \epsilon \quad \text{e} \quad v_{\epsilon m}(t) \in V_m \Leftrightarrow v_{\epsilon m}(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{j\epsilon m}(t) w_j, \tag{2-26}$$

onde $v_{\epsilon m}(t)$ é solução do seguinte problema de Cauchy:

$$\begin{cases} (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), w) + (\nabla v_{\epsilon m}(t), \nabla w) + (v'_{\epsilon m}(t), w)_{\Gamma_0} \\ +(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0} + (g(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0} \\ = (F(t), w) + (G(t), w)_{\Gamma_0}, \quad \forall w \in V_m, \\ v_{\epsilon m}(0) = v'_{\epsilon m}(0) = 0. \end{cases} \tag{2-27}$$

A seguir, reescreveremos o problema de Cauchy acima, a fim de verificarmos se as condições do Teorema de Carathéodory (Teorema 1.89) são satisfeitas. Dessa forma, provaremos que o problema (2-27) possui solução no intervalo $[0, t_{\epsilon m})$.

Fazendo $w = w_j, j = 1, 2, ..., m$ em (2-27), temos

$$\begin{aligned} (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), w_j) + (\nabla v_{\epsilon m}(t), \nabla w_j) + (v'_{\epsilon m}(t), w_j)_{\Gamma_0} \\ +(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), w_j)_{\Gamma_0} + (g(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0} \\ = (F(t), w_j) + (G(t), w_j)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-28}$$

Substituindo $v_{\epsilon m}(t) = \sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t) w_i$ na equação (2-28), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m g''_{i\epsilon m}(t)(\rho_\epsilon w_i, w_j) + \sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)(\nabla w_i, \nabla w_j) + \sum_{i=1}^m g'_{i\epsilon m}(t)(w_i, w_j)_{\Gamma_0} \\ +(|\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t) w_i + \phi(t)|^\delta (\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t) w_i + \phi(t)), w_j)_{\Gamma_0} \\ +(g(\sum_{i=1}^m g'_{i\epsilon m}(t) w_i + \phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0} = (F(t), w_j) + (G(t), w_j)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-29}$$

O problema (2-29) é equivalente ao sistema

$$\begin{bmatrix} (\rho_\epsilon w_1, w_1) & (\rho_\epsilon w_2, w_1) & \dots & (\rho_\epsilon w_m, w_1) \\ (\rho_\epsilon w_1, w_2) & (\rho_\epsilon w_2, w_2) & \dots & (\rho_\epsilon w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\rho_\epsilon w_1, w_m) & (\rho_\epsilon w_2, w_m) & \dots & (\rho_\epsilon w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''_{1\epsilon m}(t) \\ g''_{2\epsilon m}(t) \\ \vdots \\ g''_{m\epsilon m}(t) \end{bmatrix}$$

$$
+\begin{bmatrix} (\nabla w_1,\nabla w_1) & (\nabla w_2,\nabla w_1) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (\nabla w_1,\nabla w_2) & (\nabla w_2,\nabla w_2) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla w_1,\nabla w_m) & (\nabla w_2,\nabla w_m) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1\epsilon m}(t) \\ g_{2\epsilon m}(t) \\ \vdots \\ g_{m\epsilon m}(t) \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} (w_1,w_1)_{\Gamma_0} & (w_2,w_1)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m,w_1)_{\Gamma_0} \\ (w_1,w_2)_{\Gamma_0} & (w_2,w_2)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m,w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m)_{\Gamma_0} & (w_2,w_m)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m,w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1\epsilon m}(t) \\ g_{2\epsilon m}(t) \\ \vdots \\ g_{m\epsilon m}(t) \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} (|\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)|^\delta(\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)),w_1)_{\Gamma_0} \\ (|\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)|^\delta(\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)),w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (|\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)|^\delta(\sum_{i=1}^m g_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi(t)),w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix} (g(\sum_{i=1}^m g'_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi'(t)),w_1)_{\Gamma_0} \\ (g(\sum_{i=1}^m g'_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi'(t)),w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (g(\sum_{i=1}^m g'_{i\epsilon m}(t)w_i+\phi'(t)),w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (F(t),w_1) \\ (F(t),w_2) \\ \vdots \\ (F(t),w_m) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (G(t),w_1)_{\Gamma_0} \\ (G(t),w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (G(t),w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}.
$$

Denotaremos cada matriz acima da seguinte forma

$$
C=\begin{bmatrix} (\rho_\epsilon w_1,w_1) & (\rho_\epsilon w_2,w_1) & \dots & (\rho_\epsilon w_m,w_1) \\ (\rho_\epsilon w_1,w_2) & (\rho_\epsilon w_2,w_2) & \dots & (\rho_\epsilon w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\rho_\epsilon w_1,w_m) & (\rho_\epsilon w_2,w_m) & \dots & (\rho_\epsilon w_m,w_m) \end{bmatrix},
$$

$$
A=\begin{bmatrix} (\nabla w_1,\nabla w_1) & (\nabla w_2,\nabla w_1) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (\nabla w_1,\nabla w_2) & (\nabla w_2,\nabla w_2) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla w_1,\nabla w_m) & (\nabla w_2,\nabla w_m) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix},
$$

$$E = \begin{bmatrix} (w_1, w_1)_{\Gamma_0} & (w_2, w_1)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m, w_1)_{\Gamma_0} \\ (w_1, w_2)_{\Gamma_0} & (w_2, w_2)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m, w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m)_{\Gamma_0} & (w_2, w_m)_{\Gamma_0} & \dots & (w_m, w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}, z(t) = \begin{bmatrix} g_{1\epsilon m}(t) \\ g_{2\epsilon m}(t) \\ \vdots \\ g_{m\epsilon m}(t) \end{bmatrix},$$

$$B(z(t)) = \begin{bmatrix} (|\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)|^{\delta}(\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)), w_1)_{\Gamma_0} \\ (|\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)|^{\delta}(\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)), w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (|\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)|^{\delta}(\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi(t)), w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix},$$

$$D(z'(t)) = \begin{bmatrix} (g(\sum_{i=1}^{m} g'_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi'(t)), w_1)_{\Gamma_0} \\ (g(\sum_{i=1}^{m} g'_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi'(t)), w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (g(\sum_{i=1}^{m} g'_{i\epsilon m}(t)w_i + \phi'(t)), w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix},$$

$$\bar{F}(t) = \begin{bmatrix} (F(t), w_1) \\ (F(t), w_2) \\ \vdots \\ (F(t), w_m) \end{bmatrix} \text{ e } \bar{G}(t) = \begin{bmatrix} (G(t), w_1)_{\Gamma_0} \\ (G(t), w_2)_{\Gamma_0} \\ \vdots \\ (G(t), w_m)_{\Gamma_0} \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$Cz''(t) + Az(t) + Ez'(t) + B(z(t)) + D(z'(t)) = \bar{F}(t) + \bar{G}(t).$$

A seguir, analisaremos as condições iniciais do problema, notemos que

$$\sum_{i=1}^{m} g_{i\epsilon m}(0)w_i = v_{\epsilon m}(0) = 0 = v'_{\epsilon m}(0) = \sum_{i=1}^{m} g'_{i\epsilon m}(0)w_i.$$

Como $\{w_i\}$ é um conjunto linearmente independente em $L^2(\Omega)$, temos que

$$g_{i\epsilon m}(0) = g'_{i\epsilon m}(0) = 0, \quad \forall\, i = \{1, 2, ..., m\}.$$

Logo $z(0) = z'(0) = 0$, onde 0 denota a matriz nula.

Portanto obtemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + Ez'(t) + B(z(t)) + D(z'(t)) = \bar{F}(t) + \bar{G}(t) \\ z(0) = z'(0) = 0. \end{cases} \tag{2-30}$$

Afirmamos que a matriz C é inversível. De fato, seja um $u = (u_1, u_2, ..., u_m)$ um vetor pertencente ao $\mathbb{R}^m$. Mostraremos que se $Cu = 0$ (o qual 0 representa a matriz nula) então $u = 0$, o que implica que C é inversível. Suponhamos $Cu = 0$ então

$$Cu = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{m}(\rho_\epsilon w_i u_i, w_1) \\ \sum_{i=1}^{m}(\rho_\epsilon w_i u_i, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{m}(\rho_\epsilon w_i u_i, w_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isso implica,

$$0 = \sum_{i=1}^{m}(\rho_\epsilon w_i u_i, w_j) = (\sum_{i=1}^{m} \rho_\epsilon w_i, w_j), \quad \forall j = 1, 2, ..m. \tag{2-31}$$

Como $\rho_\epsilon > 0$, podemos escrever $\rho_\epsilon = (\sqrt{\rho_\epsilon})^2$, comparando com (2-31) obtemos

$$(\sqrt{\rho_\epsilon}\sum_{i=1}^{m} w_i u_i, \sqrt{\rho_\epsilon} w_j) = 0. \tag{2-32}$$

Multiplicando (2-32) por u_j e somando $j = 1, 2, ..., m$, obtemos

$$(\sqrt{\rho_\epsilon}\sum_{i=1}^{m} w_i u_i, \sqrt{\rho_\epsilon}\sum_{j=1}^{m} w_j u_j) = 0 \text{ em } L^2(\Omega).$$

Isso implica que $\sqrt{\rho_\epsilon}\sum_{i=1}^{m} w_i u_i = 0$. Mas $\rho_\epsilon > 0$, logo $\sum_{i=1}^{m} w_i u_i = 0$. Por outro lado w_i é ortogonal em $L^2(\Omega)$, consequentemente é linearmente independente em $L^2(\Omega)$, então $u_i = 0$, para todo $i = 1, 2, ..., m$, ou seja, $u = 0$. Portanto C é inversível, concluindo a prova da afirmação.

Assim, reescrevemos o problema (2-30) da seguinte forma

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}Ez'(t) + C^{-1}B(z(t)) + C^{-1}D(z'(t)) = C^{-1}\bar{F}(t) + C^{-1}\bar{G}(t), \\ z(0) = z'(0) = 0. \end{cases} \tag{2-33}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \quad Y_2(t) = z'(t) \ \text{ e } \ Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.$$

De (2-33) resulta que

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z'(t) \\ C^{-1}\bar{F}(t) + C^{-1}\bar{G}(t) - C^{-1}Az(t) - C^{-1}Ez'(t) - C^{-1}B(z(t)) - C^{-1}D(z'(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} z'(t) \\ C^{-1}\bar{F}(t) + C^{-1}\bar{G}(t) - C^{-1}B(z(t)) - C^{-1}D(z'(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z'(t) \\ -C^{-1}Az(t) - C^{-1}Ez'(t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}\bar{F}(t) + C^{-1}\bar{G}(t) - C^{-1}B(Y_1(t)) - C^{-1}D(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) - C^{-1}EY_2(t) \end{bmatrix}.$$

Donde obtemos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}(\bar{F}(t) + \bar{G}(t) - B(Y_1(t)) - D(Y_2(t))) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E \end{bmatrix} Y(t), \\ Y(0) = Y^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{cases} \tag{2-34}$$

Provaremos que o problema acima possui uma única solução local utilizando o Teorema de Carathéodory, para tal, consideramos a seguinte aplicação

$$h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m},$$

definida por

$$h(t,Y) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}(\bar{F}(t) + \bar{G}(t) - B(Y_1) - D(Y_2)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E \end{bmatrix} Y$$

onde $Y = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_{2m}), Y_1 = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_m)$ e $Y_2 = (\xi_{m+1}, ..., \xi_{2m})$.

Inicialmente, verificaremos se a função h esta nas condições de Carathéodory. Com efeito,

(i) Seja $Y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função h é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que $C^{-1}\bar{F}(t)$ e $C^{-1}\bar{G}(t)$ são mensuráveis e os outros termos não dependem de t.

(ii) Considere t fixo, h é contínua como função de Y.

De fato, a função $N : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definida por

$$N(Y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -C^{-1}A & -C^{-1}E \end{bmatrix} Y$$

é linear e consequentemente contínua.

Como t está fixado, as aplicações $C^{-1}\bar{F}(t)$ e $C^{-1}\bar{G}(t)$ são constantes, logo são contínuas. Além disso pela continuidade das funções f e g concluímos que as aplicações $C^{-1}B(Y_1)$ e $C^{-1}D(Y_2)$ também são contínuas. Logo h é contínua como função de Y.

(iii) Seja $K \subset [0,T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um compacto, então

$$||h(t,Y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq ||C^{-1}\bar{F}||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}\bar{G}||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}B(Y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}D(Y_2)||_{\mathbb{R}^m} + ||NY||_{\mathbb{R}^{2m}} \tag{2-35}$$

Agora como as funções B, D, N são contínuas segue que são limitadas em K. Além disso, as funções $\bar{F}$ e $\bar{G}$ são contínuas, então existe uma constante positiva M_k tal que

$$||C^{-1}\bar{F}||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}\bar{G}||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}B(Y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}D(Y_2)||_{\mathbb{R}^m} + ||NY||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k \tag{2-36}$$

para todo $(t,Y) \in K$, onde $y = (Y_1, Y_2)$.

Comparando (2-35) com (2-36) obtemos

$$||h(t,Y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k, \text{ para todo } (t,Y) \in K.$$

Portanto dos itens $(i)-(iii)$, temos que as condições de Carathéodory estão satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, Y) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo da forma $[0, t_m)$, com $t_m > 0$. Além disso, Y é absolutamente contínua, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta daí, que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas e, consequentemente, $z''(t)$ existe em quase todo ponto de $[0, t_m)$.

O corolário do prolongamento (Corolário 1.90), juntamente com a primeira estimativa a priori, garantem a extensão da solução para $[0, T]$.

2.2.1 Estimativas a priori

Primeira estimativa a priori

Considerando $w = \sum_{i=1}^{m} g'_{i\epsilon m} w_i$ em (2-27) obtemos

$$\begin{aligned} &(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) + (\nabla v_{\epsilon m}(t), \nabla v'_{\epsilon m}(t)) + (v'_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \\ &+ (|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} + (g(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \\ &= (F(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} + (G(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-37}$$

Afirmamos que

- $(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon m}||^2;$ (2-38)
- $(\nabla v'_{\epsilon m}(t), \nabla v_{\epsilon m}(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2;$ (2-39)
- $(F(t), v'_{\epsilon m}(t)) = \dfrac{d}{dt}(F(t), v_{\epsilon m}(t)) - (F'(t), v_{\epsilon m}(t));$ (2-40)
- $(G(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = \dfrac{d}{dt}(G(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} - (G'(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}.$ (2-41)

Com efeito, notemos que

$$\frac{d}{dt}(\rho_\epsilon v'_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) = (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) + (\rho_\epsilon v'_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)) = 2(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)),$$

pois,

$$
\begin{aligned}
(\rho_\epsilon v'_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)) &= \int_\Omega \rho_\epsilon(x) v'_{\epsilon m}(x,t) v''_{\epsilon m}(x,t) dx \\
&= \int_\Omega \rho_\epsilon(x) v''_{\epsilon m}(x,t) v'_{\epsilon m}(x,t) dx \\
&= (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)).
\end{aligned}
$$

Assim, $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}(\rho_\epsilon v'_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) = (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t))$, ou seja,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\|\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon m}(t)\right\|^2 = (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)),
$$

uma vez que

$$
(\rho_\epsilon v'_{\epsilon m}(t), v'_{\epsilon m}(t)) = \int_\Omega \rho_\epsilon(x) \left|v'_{\epsilon m}(x,t)\right|^2 dx = \int_\Omega (\sqrt{\rho_\epsilon(x)})^2 (v'_{\epsilon m}(x,t))^2 dx = \left\|\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon m}(t)\right\|.
$$

De forma análoga, obtemos $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 = (\nabla v'_{\epsilon m}(t), \nabla v_{\epsilon m}(t))$.

Agora, notemos que $\dfrac{d}{dt}(F(t), v_{\epsilon m}(t)) = (F'(t), v_{\epsilon m}(t)) + (F(t), v'_{\epsilon m}(t))$, ou seja,

$$
(F(t), v'_{\epsilon m}(t)) = \frac{d}{dt}(F(t), v_{\epsilon m}(t)) - (F'(t), v_{\epsilon m}(t)).
$$

Analogamente, concluímos que $(G(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = \dfrac{d}{dt}(G(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} - (G'(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$.

Isso completa a prova da afirmação.

A seguir, analisaremos o termo $(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$. Para isso observamos que

$$
\begin{aligned}
&(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t) - \phi'(t))_{\Gamma_0} \\
&\quad = (|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))_{\Gamma_0} \\
&\qquad - (|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)), \phi'(t))_{\Gamma_0}.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, temos que

$$
\frac{1}{\delta+2}\frac{d}{dt}\left|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)\right|^{\delta+2} = \left|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)\right|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t))(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)),
$$

logo

$$(|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^{\delta}\,(v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)), v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)-\phi'(t))_{\Gamma_0} =$$
$$\frac{1}{\delta+2}\frac{d}{dt}||v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} - (|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^{\delta}(v_{\epsilon m}(t)+\phi(t),\phi'(t)))_{\Gamma_0}. \quad (2\text{-}42)$$

Reescrevendo (2-37) a partir das igualdades (2-38)−(2-41) e (2-42), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||\sqrt{\rho_\epsilon}v'_{\epsilon m}(t)||^2+||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2+\frac{2}{\delta+2}||v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}\right]\\
&\quad+||v'_{\epsilon m}(t)||^2_{\Gamma_0}-(|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^{\delta}(v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}\\
&\quad+(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))_{\Gamma_0}-(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}\\
&=\frac{d}{dt}(F(t),v_{\epsilon m}(t))-(F'(t),v_{\epsilon m}(t))+\frac{d}{dt}(G(t),v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}-(G'(t),v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}. \quad (2\text{-}43)
\end{aligned}$$

A seguir estudaremos estimativas para os termos $(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))_{\Gamma_0}$ e $(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}$. Pela hipótese (2-3) existem k_1 e k_2 positivos tais que $k_1|s|^{\xi+2}\leq g(s)s\leq k_2|s|^{\xi+2}$, então $k_1|v'_{\epsilon m}(t)-\phi'(t)|^{\xi+2}\leq g(v'_{\epsilon m}(t)-\phi'(t))(v'_{\epsilon m}(t)-\phi'(t))$ e $g(v'_{\epsilon m}(t)-\phi'(t))\leq k_2|v'_{\epsilon m}(t)-\phi'(t)|^{\xi+1}$. Logo

$$\begin{aligned}
(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))_{\Gamma_0} &= \int_{\Gamma_0} g(v'_{\epsilon m}+\phi')(v'_{\epsilon m}+\phi')d\Gamma\\
&\geq k_1\int_{\Gamma_0}|v'_{\epsilon m}+\phi'|^{\xi+2}d\Gamma\\
&= k_1|v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)|^{\xi+2}_{\xi+2,\Gamma_0} \quad (2\text{-}44)
\end{aligned}$$

e

$$(g(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)),\phi'(t))_{\Gamma_0}=\int_{\Gamma_0} g(v'_{\epsilon m}+\phi')\phi' d\Gamma\leq k_2\int_{\Gamma_0}|v'_{\epsilon m}+\phi'|^{\xi+1}|\phi'|d\Gamma. \quad (2\text{-}45)$$

Das estimativas (2-44), (2-45) e de (2-43) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon}v'_{\epsilon m}(t)||^2+\frac{1}{2}||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2+\frac{1}{\delta+2}||v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}\right]\\
&\quad+||v'_{\epsilon m}(t)||^2_{\Gamma_0}+k_1||v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)||^{\xi+2}_{\xi+2,\Gamma_0}\\
&\leq\frac{d}{dt}(F(t),v_{\epsilon m}(t))-(F'(t),v_{\epsilon m}(t))+\frac{d}{dt}(G(t),v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}\\
&\quad-(G'(t),v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}+\int_{\Gamma_0}|v_{\epsilon m}+\phi|^{\delta}(v_{\epsilon m}+\phi)\phi' d\Gamma\\
&\quad+k_2\int_{\Gamma_0}|v'_{\epsilon m}+\phi'|^{\xi+1}|\phi'|d\Gamma. \quad (2\text{-}46)
\end{aligned}$$

Integrando (2-46) sobre o intervalo $[0,t]$, com $t\leq t_{\epsilon m}$, e recordando que $v'_{\epsilon m}(0)=$

$v_{\epsilon m}(0) = 0$ (consequentemente $\nabla v_{\epsilon m}(0) = 0$) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon}v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{\delta+2}||v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} + \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
+k_1\int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s)+\phi'(s)||^{\xi+2}_{\xi+2,\Gamma_0} ds \leq \frac{1}{\delta+2}||\phi(0)||^{\delta+2}_{\delta+2} + (F(t), v_{\epsilon m}(t)) \\
-\int_0^t (F'(s), v_{\epsilon m}(s))ds + (G(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} - \int_0^t (G'(s), v_{\epsilon m}(s))_{\Gamma_0} ds \\
+\int_0^t \int_{\Gamma_0} |v_{\epsilon m}(s)+\phi(s)|^\delta (v_{\epsilon m}(s)+\phi(s))\phi'(s) d\Gamma ds \\
+k_2 \int_0^t \int_{\Gamma_0} |v'_{\epsilon m}(s)+\phi'(s)|^{\xi+1}|\phi'(s)| d\Gamma ds. \quad \text{(2-47)}
\end{aligned}$$

A seguir, faremos estimativas para alguns dos termos a esquerda da desigualdade (2-47).

Para analisar $(F(t), v_{\epsilon m}(t))$ e $\displaystyle\int_0^t (F'(s), v_{\epsilon m}(s))ds$ aplicamos a desigualdade de Hölder (Teorema 1.41) e a desigualdade de Young (Corolário 1.39) para $\eta > 0$ em $(F(t), v_{\epsilon m}(t))$ e $(F'(t), v_{\epsilon m}(t))$, daí

$$\begin{aligned}
(F(t), v_{\epsilon m}(t)) = \int_\Omega |F(x,t)|v_{\epsilon m}(x,t)|dx \leq ||F(t)||||v_{\epsilon m}(t)|| \leq ||F(t)||\lambda||\nabla v_{\epsilon m}(t)|| \\
\leq \eta||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{\lambda^2}{4\eta}||F||^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}, \quad \text{(2-48)}
\end{aligned}$$

sendo $\lambda > 0$ uma constante tal que, pela desigualdade de Poincaré, $||v|| \leq \lambda||\nabla v||$, para todo $v \in V$.

De forma análoga, obtemos

$$(F'(t), v_{\epsilon m}(t)) \leq \eta||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{\lambda^2}{4\eta}||F'(t)||^2,$$

considerando $\eta = \dfrac{1}{2}$ e integrando de 0 a t, obtemos a seguinte estimativa

$$\int_0^t (F'(s), v_{\epsilon m}(s))ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t ||\nabla v_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \frac{\lambda^2}{2}||F'||^2_{L^2(\Omega\times(0,T))}. \quad \text{(2-49)}$$

De forma similar obtemos

$$(G(t), v_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \leq \eta||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{C_2^2}{4\eta}||G||^2_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))} \quad \text{(2-50)}$$

e para $\eta = \dfrac{1}{2} > 0$

$$\int_0^t (G'(s), v_{\epsilon m}(s))_{\Gamma_0} ds \leq \frac{1}{2}\int_0^t ||\nabla v_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \frac{C_2^2}{2}||G'||^2_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}, \tag{2-51}$$

sendo $C_2 > 0$ uma constante positiva tal que $||v||_{L^2(\Gamma_0)} \leq C_2||\nabla v||$, para todo $v \in V$.

Agora, para analisar o termo $\displaystyle\int_0^t \int_{\Gamma_0} |v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)|^{\delta+1}|\phi'(s)|d\Gamma ds$, consideramos $p = \dfrac{\delta+2}{\delta+1}$ e $q = \delta + 2$ então, pela desigualdade de Young (Teorema 1.38), obtemos

$$|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta+1}|\phi'(t)| \leq \frac{\delta+1}{\delta+2}|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta+2} + \frac{1}{\delta+2}|\phi'(t)|^{\delta+2},$$

e como $\phi'(t) = y^1$ segue que

$$|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta+1}|\phi'(t)| \leq \frac{\delta+1}{\delta+2}|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta+2} + \frac{1}{\delta+2}|y^1|^{\delta+2}.$$

Integrando sobre Γ_0, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_0} |v_{\epsilon m} + \phi|^{\delta+1}|\phi'|d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_0}\left(\frac{\delta+1}{\delta+2}|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta+2} + \frac{1}{\delta+2}|y^1|^{\delta+2}\right)d\Gamma\\ &= \frac{\delta+1}{\delta+2}||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} + \frac{1}{\delta+2}||y^1||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}.\end{aligned}$$

Integrando de 0 a t, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t\int_{\Gamma_0} |v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)|^{\delta+1}|\phi'(s)|d\Gamma ds &\leq \int_0^t\left(\frac{\delta+1}{\delta+2}||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} + \frac{1}{\delta+2}||y^1||^{\delta+2}_{\delta,\Gamma_0}\right)\\ &\leq \frac{\delta+1}{\delta+2}\int_0^t ||v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}ds + \frac{1}{\delta+2}T||y^1||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}.\end{aligned} \tag{2-52}$$

Observação 2.6. *As normas $||v_{\epsilon m} + \phi||_{\delta+2,\Gamma_0}$ e $||\phi'||_{\delta+2,\Gamma_0}$ fazem sentido pois $v_{\epsilon m}, \phi, \phi' \in V$, $V \hookrightarrow L^{\delta+2}(\Gamma_0)$ e $L^{2(\delta+1)}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^{\delta+2}(\Gamma_0)$, pois $2(\delta+1) > \delta+2$.*

Para analisar $k_2\displaystyle\int_0^t\int_{\Gamma_0} |v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)|^{\xi+1}|\phi'(s)|d\Gamma ds$, consideramos $p = \dfrac{\xi+2}{\xi+1}$ e $q = \xi + 2$ então pela desigualdade de Young para $\eta > 0$ obtemos

$$|v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)|^{\xi+1}k_2|\phi'(t)| \leq \eta||v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)|^{\xi+2} + H(\xi)|y^1|^{\xi+2},$$

onde $H(\xi) = \dfrac{k_2^{\xi+2}}{(\xi+2)\left(\frac{\eta(\xi+2)}{\xi+1}\right)^{\xi+1}}$. Dessa forma, segue que

$$k_2 \int_0^t \int_{\Gamma_0} |v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)|^{\xi+1} |\phi'(s)| d\Gamma ds \leq \eta \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2} ds$$
$$+ H(\xi) T ||y^1||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2}. \qquad \text{(2-53)}$$

Sendo assim, das estimativas encontradas em (2-48)$-$(2-53) e de (2-47), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||\sqrt{\rho} v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \left(\frac{1}{2} - 2\eta\right) ||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{\delta+2} ||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} \\
&+ \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s)||_{\Gamma_0}^2 ds + (k_1 - \eta) \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2} ds \\
&\leq C_1 + \frac{\lambda^2}{4\eta} ||F||_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \frac{\lambda^2}{2} ||F'||_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2 + \int_0^t ||\nabla v_{\epsilon m}(s)||^2 ds \\
&+ \frac{C_2^2}{4\eta} ||G||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))}^2 + \frac{C_2^2}{2} ||G'||_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}^2 + C_3 \int_0^t ||v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} ds, \qquad \text{(2-54)}
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \dfrac{1}{\delta+2} ||\phi(0)||_{\delta+2}^{\delta+2} + \dfrac{1}{\delta+2} T ||y^1||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} + H(\xi) T ||y^1||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2}$ e $C_3 = \dfrac{\delta+1}{\delta+2}$.

Consideramos

$$\widetilde{G_0}(t) = \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s)||_{\Gamma_0}^2 ds + \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2} ds > 0,$$

$$\begin{aligned}
C_4 = C_1 &+ \frac{\lambda^2}{4\eta} ||F||_{C([0,T];L^2(\Omega))}^2 + \frac{\lambda^2}{2} ||F'||_{L^2(\Omega\times(0,T))}^2 + \frac{C_2^2}{4\eta} ||G||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))}^2 \\
&+ \frac{C_2^2}{2} ||G'||_{L^2(\Gamma_0\times(0,T))}^2,
\end{aligned}$$

e $n_0 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - 2\eta, \frac{1}{\delta+2}, k_1 - \eta\right\}$. Escolhendo η suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned}
&||\sqrt{\rho} v'_{\epsilon m}(t)||^2 + ||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + ||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} + \widetilde{G_0}(t) \\
&\leq \frac{1}{n_0} C_4 + \frac{1}{n_0} \int_0^t \left[||\nabla v_{\epsilon m}(s)||^2 + C_3 ||v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2}\right] \\
&\leq \frac{1}{n_0} C_4 + \int_0^t k_3 \left[||\sqrt{\rho} v'_{\epsilon m}(s)||^2 + ||\nabla v_{\epsilon m}(s)||^2 + ||v_{\epsilon m}(s) + \phi(s)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} + \widetilde{G_0}(s)\right] ds,
\end{aligned} \qquad \text{(2-55)}$$

onde $k_3 = \max\left\{n_0^{-1}, n_0^{-1} C_3\right\}$.

Por fim, estamos em condições de aplicar o Lema de Gronwall (Proposição 1.93) em

(2-55), dessa forma obtemos a primeira estimativa

$$||\sqrt{\rho}v'_{\epsilon m}(t)||^2 + ||\nabla v_{\epsilon m}(t)||^2 + ||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} + \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$$
$$+ \int_0^t ||v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)||^{\xi+2}_{\xi+2,\Gamma_0} ds \leq L_1, \qquad (2\text{-}56)$$

onde $L_1 = n_0^{-1} C_4 e^{k_3 T}$ é uma constante positiva independente de $\epsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, t_{\epsilon m}[$.

Segunda estimativa a priori

Inicialmente, estudaremos uma estimativa para $||\rho v''_{\epsilon m}(0)||$. Para isso consideramos $t = 0$ em (2-28), obtemos

$$(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), w_j) + (\nabla v_{\epsilon m}(0), \nabla w_j) + (v'_{\epsilon m}(0), w_j)_{\Gamma_0}$$
$$+(|v_{\epsilon m}(0) + \phi(0)|^\delta (v_{\epsilon m}(0) + \phi(0)), w_j)_{\Gamma_0} + (g(v'_{\epsilon m}(0) + \phi'(0)), w_j))_{\Gamma_0}$$
$$= (F(0), w_j) + (G(0), w_j)_{\Gamma_0}, \quad \text{para } j = 1, ..., m. \qquad (2\text{-}57)$$

Como $v'_{\epsilon m}(0) = v_{\epsilon m}(0) = 0, \phi(0) = y^0$ e $\phi'(0) = y^1$, para $j = 1, 2, ..., m$, temos

$$(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), w_j) + (|y^0|^\delta y^0, w_j)_{\Gamma_0} + (g(y^1), w_j)_{\Gamma_0} = (F(0), w_j) + (G(0), w_j)_{\Gamma_0}. \qquad (2\text{-}58)$$

Por outro lado, das hipóteses (2-24), (2-25) e (2-5) obtemos

$$F(0) = \Delta y^0 \ \text{ em } \Omega, \ \text{ e } G(0) = g(y^1) + f(y^0) \ \text{ em } \Gamma_0.$$

Substituindo estas igualdades em (2-58) temos

$$(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), w_j) + (|y^0|^\delta y^0, w_j)_{\Gamma_0} + (g(y^1), w_j)_{\Gamma_0} = (\Delta y^0, w_j) + (g(y^1), w_j)_{\Gamma_0}$$
$$+(|y^0|^\delta y^0, w_j)_{\Gamma_0}, \quad j = 1, ..., m,$$

ou seja, $(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), w_j) = (\Delta y^0, w_j)$ para $j = 1, ..., m$.
Multiplicando a igualdade acima por $g''_{j\epsilon m}(0)$ e somando $j = 1, 2, ..., m$ temos

$$(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), v''_{\epsilon m}(0)) = (\Delta y^0, v''_{\epsilon m}(0)) = 0,$$

pois de (2-5) temos $\Delta y^0 = 0$ em Ω.

Portanto

$$||\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0)||^2 = (\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(0), v''_{\epsilon m}(0)) = 0. \tag{2-59}$$

Seguindo, agora, para a segunda estimativa derivando (2-28) com respeito a t, multiplicando o resultado por $g''_{j\epsilon m}(t)$ e somando $j = 1, 2, ..., m$ obtemos

$$\begin{aligned} &(\rho_\epsilon v'''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)) + (\nabla v'_{\epsilon m}(t), \nabla v''_{\epsilon m}(t)) + (v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \\ +&(\frac{d}{dt}\left(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t))\right), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} + (\frac{d}{dt}\left(g(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))\right), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \\ &= (F'(t), v''_{\epsilon m}(t)) + (G'(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-60}$$

Notemos que

$$\frac{d}{dt}\left(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon m}(t) + \phi(t))\right) = (\delta + 1)|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^\delta (v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)) \tag{2-61}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(g(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))\right) &= g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))\,(v''_{\epsilon m}(t) + \phi''(t)) \\ &= g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)) v''_{\epsilon m}(t). \end{aligned} \tag{2-62}$$

De forma similar as contas feitas para obter a primeira estimativa (2-56), seguem

- $(F'(t), v''_{\epsilon m}(t)) = \dfrac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) - (F''(t), v'_{\epsilon m}(t))$;
- $(G'(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = \dfrac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} - (G''(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$.

De (2-24) e (2-25) temos que que $F(t) = \nabla y^0 + t\nabla y^1$ e $G(t) = -y^1 - \dfrac{\partial y^0}{\partial \nu} - t\dfrac{\partial y^1}{\partial \nu}$, consequentemente, $F''(t) = G''(t) = 0$. Disso, segue que

$$(F'(t), v''_{\epsilon m}(t)) = \frac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)); \tag{2-63}$$

$$(G'(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = \frac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}. \tag{2-64}$$

Ainda,

$$\frac{d}{dt}(\rho_\epsilon v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)) = 2(\rho_\epsilon v'''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 = (\rho_\epsilon v'''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)). \tag{2-65}$$

De forma análoga

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 = (\nabla v'_{\epsilon m}(t), \nabla v''_{\epsilon m}(t)). \tag{2-66}$$

A partir das igualdades (2-61)−(2-66), reescrevemos (2-60)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + ||v''_{\epsilon m}(t)||^2_{\Gamma_0} \\
&+((\delta+1)|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} + (g'(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} \\
&= \frac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) + \frac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}.
\end{aligned} \tag{2-67}$$

A seguir vamos estimar alguns termos da igualdade (2-67), são eles:

- $((\delta+1)|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$;
- $(g'(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$.

Para analisar $I = ((\delta+1)|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}$ observamos que

$$\begin{aligned}
|I| &= \left|(\delta+1)\int_{\Gamma_0}|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))v''_{\epsilon m}(t)d\Gamma\right| \\
&\le (\delta+1)\int_{\Gamma_0}|v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta|v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)||v''_{\epsilon m}(t)|d\Gamma.
\end{aligned} \tag{2-68}$$

Considerando $p_1 = \dfrac{2\delta+2}{\delta}$, $p_2 = 2\delta+2$ e $p_3 = 2$, segue que $\dfrac{1}{p_1}+\dfrac{1}{p_2}+\dfrac{1}{p_3} = 1$. Assim, aplicando a desigualdade de Hölder generalizada (Teorema 1.42) em (2-68) obtemos

$$|I| = (\delta+1)\left\||v_{\epsilon m}(t)+\phi(t)|^\delta\right\|_{\frac{2\delta+2}{\delta},\Gamma_0}\|v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t)\|_{2\delta+2,\Gamma_0}||v''_{\epsilon m}(t)||_{\Gamma_0}. \tag{2-69}$$

Observação 2.7. *As normas* $|||v_{\epsilon m}+\phi|^\delta||_{\frac{2\delta+2}{\delta},\Gamma_0}$, $||v'_{\epsilon m}+\phi'||_{2\delta+2,\Gamma_0}$ *e* $||v''_{\epsilon m}||_{\Gamma_0}$ *fazem sentido uma vez que* $v_{\epsilon m}, \phi, v'_{\epsilon m}, \phi' \in V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ *e* $v''_{\epsilon m} \in V \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\left\| |v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta} \right\|_{\frac{2\delta+2}{\delta},\Gamma_0} &= \left(\int_{\Gamma_0} \left(|v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{\delta} \right)^{\frac{2\delta+2}{\delta}} d\Gamma \right)^{\frac{1}{\frac{2\delta+2}{\delta}}} \\
&= \left[\left(\int_{\Gamma_0} |v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)|^{2\delta+2} d\Gamma \right)^{\frac{1}{2\delta+2}} \right]^{\delta} \\
&= ||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||^{\delta}_{2\delta+2,\Gamma_0}.
\end{aligned}$$

Da imersão $V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ e da primeira estimativa obtemos

$$\begin{aligned}
||v_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||^{\delta}_{2\delta+2,\Gamma_0} &\leq b_0^{\delta} ||\nabla v_{\epsilon m}(t) + \nabla\phi(t)||^{\delta} \\
&\leq b_0^{\delta} \left(||\nabla v_{\epsilon m}(t)|| + ||\nabla\phi(t)|| \right)^{\delta} \\
&\leq b_0^{\delta} \left(L_1 + ||\nabla\phi(t)|| \right)^{\delta} = \widetilde{b_0},
\end{aligned}$$

onde b_0 é uma constante positiva e, $\widetilde{b_0}$ não depende de ϵ e m. Logo, comparando com (2-69), formalmente temos

$$|I| \leq (\delta+1)\tilde{b_0} \, \|v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)\|_{2\delta+2,\Gamma_0} \, ||v''_{\epsilon m}(t)||_{\Gamma_0}. \tag{2-70}$$

Aplicando a desigualdade de Young para $\eta > 0$ em (2-70), obtemos

$$|I| \leq \frac{1}{4\eta} \left((\delta+1)\widetilde{b_0} ||v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0} \right)^2 + \eta ||v''_{\epsilon m}(t)||^2_{\Gamma_0}. \tag{2-71}$$

Por outro lado

$$||v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0} \leq ||v'_{\epsilon m}(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0} + ||\phi'(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0},$$

e, como $v'_{\epsilon m}(t) \in V \hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ temos

$$||v'_{\epsilon m}(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0} \leq b_1 ||v'_{\epsilon m}(t)||_V = b_1 ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||,$$

onde b_1 é uma constante positiva. Daí

$$\left(||v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0} \right)^2 \leq \left(b_1 ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)|| + ||y^1||_{2\delta+2,\Gamma_0} \right)^2. \tag{2-72}$$

Aplicando a desigualdade $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ em (2-72), temos

$$\left(||v'_{\epsilon m}(t) + \phi(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0}\right)^2 \leq 2b_1^2||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + 2||y^1||^2_{2\delta+2,\Gamma_0}. \tag{2-73}$$

Comparando (2-71) com (2-73), obtemos

$$|I| \leq \frac{(\delta+1)^2}{4\eta}\tilde{b_0}^2\left[2b_1^2||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + 2||y^1||^2_{2\delta+2,\Gamma_0}\right] + \eta||v''_{\epsilon m}||^2_{\Gamma_0},$$

ou seja,

$$|I| \leq C_4(\eta)||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \bar{C}_4(\eta) + \eta||v''_{\epsilon m}||^2_{\Gamma_0}, \tag{2-74}$$

onde $C_4(\eta) = 2\dfrac{(\delta+1)^2}{4\eta}\tilde{b_0}^2 b_1^2 = \dfrac{(\delta+1)^2}{2\eta}\tilde{b_0}^2 b_1^2$ e $\bar{C}_4(\eta) = \dfrac{(\delta+1)^2}{2\eta}\tilde{b_0}^2||y^1||^2_{2\delta+2,\Gamma_0}$.

Agora analisaremos $(g'(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = \displaystyle\int_{\Gamma_0} g'(v'_{\epsilon m}(t)+\phi'(t))|v''_{\epsilon m}(t)|^2 d\Gamma$. Por hipótese temos que g é uma função não decrescente, consequentemente $g'(s) \geq 0$ para todo s real.

Dessa forma temos $g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)) \geq 0$, ou seja, $-g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))|v''_{\epsilon m}(t)|^2 \leq 0$. Logo

$$(-g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} = -\int_{\Gamma_0} g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))|v''_{\epsilon m}(t)|^2 d\Gamma \leq 0. \tag{2-75}$$

Observação 2.8. *A integral* $\displaystyle\int_{\Gamma_0} g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t)|v''_{\epsilon m}(t)|^2 d\Gamma_0$ *está bem definida pois,* $g' \in L^{\frac{2\xi+2}{\xi}}(\Gamma_0)$, $v''_{\epsilon m} \in L^{2\xi+2}(\Gamma_0)$ *e* $v''_{\epsilon m} \in L^2(\Gamma_0)$.

Da equação (2-67) e (2-74) obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + ||v''_{\epsilon m}(t)||^2_{\Gamma_0}\\
&= -I - (g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)))_{\Gamma_0} + \frac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) + \frac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}\\
&\leq |I| - (g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)))_{\Gamma_0} + \frac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) + \frac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}\\
&\leq C_4(\eta)||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \bar{C}_4(\eta) + \eta||v''_{\epsilon m}||^2_{\Gamma_0} - (g'(v'_{\epsilon m}(t) + \phi'(t))v''_{\epsilon m}(t), v''_{\epsilon m}(t)))_{\Gamma_0}\\
&\quad + \frac{d}{dt}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) + \frac{d}{dt}(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}.
\end{aligned} \tag{2-76}$$

Integrando a equação (2-76) sobre o intervalo $[0,t]$, com $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}(t)||^2 - \frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}(0)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 - \frac{1}{2}||\nabla v'_{\epsilon m}(0)||^2 + \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$$
$$\leq C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \int_0^t \bar{C}_4(\eta) ds + \eta \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$$
$$- \int_0^t (g'(v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)) v''_{\epsilon m}(s), v''_{\epsilon m}(s))_{\Gamma_0} ds + (F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) - (F'(0), v'_{\epsilon m}(0))$$
$$+(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0} - (G'(0), v'_{\epsilon m}(0)). \tag{2-77}$$

Como $||\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}(0)||^2 = v'_{\epsilon m}(0) = 0$ (consequentemente $\nabla v'_{\epsilon m}(0) = 0$), temos

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$$
$$\leq C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \bar{C}_4(\eta) T + \eta \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$$
$$- \int_0^t (g'(v'_{\epsilon m}(s) + \phi'(s)) v''_{\epsilon m}(s), v''_{\epsilon m}(s))_{\Gamma_0} ds + (F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) + (G'(t), v'_{\epsilon m}(t))_{\Gamma_0}. \tag{2-78}$$

A seguir analisaremos os termos $(F'(t), v'_{\epsilon m}(t))$ e $(G'(t), v'_{\epsilon m}(t))$ da equação (2-78).

Para a análise de $(F'(t), v'_{\epsilon m}(t))$ aplicaremos a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Young. Assim

$$\begin{aligned}(F'(t), v'_{\epsilon m}(t)) &\leq \left|\int_\Omega F'(x,t) v'_{\epsilon m}(x,t) dx\right| \leq \int_\Omega |F'(x,t)||v'_{\epsilon m}(x,t)| dx \\ &\leq ||F'(t)||||v'_{\epsilon m}(t)|| \leq ||F'(t)|| b_2 ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)|| \\ &\leq \eta ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{b_2^2}{4\eta}||F'(t)||^2 \\ &\leq \eta ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{b_2^2}{4\eta}||F'||_{C([0,T];L^2(\Omega))},\end{aligned} \tag{2-79}$$

pois $F'(t) = \Delta y^1$ é contínua em relação a t. Sendo b_2 uma constante positiva.

Analogamente obtemos a estimativa

$$(G'(t), v'_{\epsilon m}(t)) \leq \eta ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{b_3^2}{4\eta}||G'||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))}, \tag{2-80}$$

onde b_3 é uma constante positiva tal que $||v'_{\epsilon m}(t)|| \leq b_3 ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||$.

Das estimativas (2-79), (2-80) e de (2-78) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
&\leq C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \bar{C}_4(\eta)T + \eta\int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
&- \int_0^t (g'(v'_{\epsilon m}(s)+\phi'(s))v''_{\epsilon m}(s), v''_{\epsilon m}(s))_{\Gamma_0} ds + 2\eta||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 \\
&+\frac{b_2^2}{4\eta}||F'||_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \frac{b_3^2}{4\eta}||G'||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))}.
\end{aligned}
\tag{2-81}
$$

Da equação (2-81) e (2-75) temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
&\leq C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds + \bar{C}_4(\eta)T + \eta\int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
&+2\eta||v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \frac{b_2^2}{4\eta}||F'||_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \frac{b_3^2}{4\eta}||G'||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))},
\end{aligned}
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + (\frac{1}{2}-2\eta)||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + (1-\eta)\int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \\
\leq C_5 + C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds,
\end{aligned}
\tag{2-82}
$$

a qual $C_5 = \bar{C}_4(\eta)T + \frac{b_2^2}{4\eta}||F'||_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \frac{b_3^2}{4\eta}||G'||_{C([0,T];L^2(\Gamma_0))}$ é uma constante que não depende de $\epsilon > 0, m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$.

Escolhemos η suficientemente pequeno tal que

$$
\begin{aligned}
||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \widetilde{G}_1(t) &\leq n_1^{-1}C_5 + n_1^{-1}C_4(\eta)\int_0^t ||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 ds \\
&\leq n_1^{-1}C_5 + \int_0^t k_4\left[||\nabla v'_{\epsilon m}(s)||^2 + ||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon m}(t)||^2 + \widetilde{G}_1(t)\right] ds,
\end{aligned}
\tag{2-83}
$$

onde $\widetilde{G}_1(t) = \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds$, $n_1 = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-2\eta, 1-\eta\right\}$ e $k_4 = n_1^{-1}C_4(\eta)$.

Finalmente, aplicando o Lema de Gronwall (Proposição 1.93) em (2-83) obtemos a segunda estimativa

$$||\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}(t)||^2 + ||\nabla v'_{\epsilon m}(t)||^2 + \int_0^t ||v''_{\epsilon m}(s)||^2_{\Gamma_0} ds \leq L_2, \tag{2-84}$$

sendo $L_2 = n_1^{-1} C_5 e^{k_4 T}$ uma constante positiva que não depende de ϵ, m e $t \in [0, T]$.

Da primeira e segunda estimativas, (2-56) e (2-84), concluímos:

- $\{v_{\epsilon m}\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$;
- $\{v'_{\epsilon m}\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$;
- $\left\{\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon m}\right\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$;
- $\{v'_{\epsilon m}\}$ é limitada em $L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$.

Recordamos que V e $L^2(\Omega)$ são espaços de Banach separáveis e reflexivos. Então pela Proposição 1.80 os espaços $L^1(0, T; V)$ e $L^1(0, T; L^2(\Omega))$ são separáveis e

$$[L^1(0, T; V)]' \equiv L^\infty(0, T; V');$$
$$[L^1(0, T; L^2(\Omega))]' \equiv L^\infty(0, T; L^2(\Omega)').$$

Assim, pela Observação 1.81 podemos extrair uma subsequência, a qual denotaremos por $\{v_{\epsilon l}\}$ de $\{v_{\epsilon m}\}$, tal que

$$v_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; V), \tag{2-85}$$

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} u_1 \text{ em } L^\infty(0, T; V), \tag{2-86}$$

$$\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho_\epsilon} u_2 \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{2-87}$$

Afirmamos que $u_1 = v'_\epsilon$ e $u_2 = v''_\epsilon$. Com efeito, das convergências (2-85), (2-86) e da Proposição 1.82 concluímos que $v'_\epsilon = u_1$, ou seja,

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; V). \tag{2-88}$$

Resta mostrar que $u_2 = v''_\epsilon$. Para isso, observamos que

$$\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho_\epsilon} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

De fato, da imersão $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e da convergência (2-88) segue

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

isto é,

$$\int_0^T \langle v'_{\epsilon l}(t), u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow \int_0^T \langle v'_\epsilon(t), u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt,$$

para todo $u \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$.

Observação 2.9. *Para toda função $u \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $\sqrt{\rho_\epsilon}u$ pertence a $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ uma vez que $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$.*

Identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual, temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \langle \sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon l}(t), u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt &= \int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon l}(t), u(t))_{L^2(\Omega)}dt \\ &= \int_0^T (v'_{\epsilon l}(t), \sqrt{\rho_\epsilon} u(t))_{L^2(\Omega)}dt \\ &= \int_0^T \langle v'_{\epsilon l}(t), \sqrt{\rho_\epsilon} u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt,\end{aligned}$$

donde

$$\int_0^T \langle v'_{\epsilon l}(t), \sqrt{\rho_\epsilon} u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt \longrightarrow \int_0^T \langle v'_\epsilon(t), \sqrt{\rho_\epsilon} u(t)\rangle_{L^2(\Omega)',L^2(\Omega)}\,dt,$$

ou seja,

$$\sqrt{\rho_\epsilon} v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho_\epsilon} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2-89}$$

Portanto das convergências (2-87) e (2-89) e da Proposição 1.82 segue que

$$\sqrt{\rho_\epsilon} v''_\epsilon = \sqrt{\rho_\epsilon} u_2, \text{ isto é, } v''_\epsilon = u_2,$$

concluindo a prova da afirmação.

Como $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ é um espaço de Hilbert, pelo Teorema 1.15, existe uma subsequência de $\{v'_{\epsilon l}\}$, a qual ainda denotaremos por $\{v'_{\epsilon l}\}$, tal que

$$v'_{\epsilon l} \rightharpoonup u_3 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)),$$

consequentemente, pelo Teorema 1.13,

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} u_3 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-90}$$

Por outro lado, da imersão $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ e da convergência (2-88) obtemos

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-91}$$

Assim, das convergências (2-90), (2-91) e da unicidade do limite fraco $*$ segue que $u_3 = v'_\epsilon$.

Dessa forma, concluímos

$$v_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T;V), \tag{2-92}$$

$$v'_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v'_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T;V), \tag{2-93}$$

$$\sqrt{\rho_\epsilon} v''_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho_\epsilon} v''_\epsilon \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2-94}$$

$$v'_{\epsilon l} \rightharpoonup v'_\epsilon \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-95}$$

As convergências (2-92)$-$(2-95) são suficientes para passar o limite nos termos lineares da equação (2-28).

2.2.2 Análise dos termos não lineares

Nosso próximo objetivo é passar o limite no problema de Cauchy (2-28), mas antes precisamos obter estimativas para as condições de contorno não lineares no lado esquerdo de (2-28) contendo f e g. É importante observar que estes termos não foram incluídos na primeira e tampouco na segunda estimativa e, por isso, iremos analisá-los aqui.

Da continuidade do traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \longrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos

$$||v_{\epsilon l}(t)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq k_5 ||v_{\epsilon l}(t)||_{H^1(\Omega)},$$

onde k_5 é uma constante positiva (veja Proposição 1.83).

Como $v_{\epsilon m} \in V$, segue que

$$||v_{\epsilon l}(t)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq k_5||v_{\epsilon l}(t)||_{H^1(\Omega)} \leq \tilde{k_5}||\nabla v_{\epsilon l}(t)||,$$

sendo $\tilde{k_5} = k_5 k_6$ uma constante positiva, tal que $||v_{\epsilon l}(t)||_{H^1(\Omega)} \leq k_6||\nabla v_{\epsilon l}(t)||$ (veja Proposição 1.106).

Além disso, da primeira estimativa (2-56), temos que $||\nabla v_{\epsilon m}(t)|| \leq \sqrt{L_1}$. Então

$$||v_{\epsilon l}(t)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq \tilde{k_5}\sqrt{L_1}$$

e integrando sobre $[0, T]$ obtemos

$$\int_0^T ||v_{\epsilon l}(t)||^2_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \leq \tilde{k_5}^2 L_1 T,$$

ou seja,

$$\{v_{\epsilon l}\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \tag{2-96}$$

Ainda da primeira estimativa temos que

$$\{v'_{\epsilon l}\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)). \tag{2-97}$$

Recordamos que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ e $L^2(\Gamma_0)$ são espaços de Hilbert e reflexivos. Identificando $L^2(\Gamma_0)$ com seu dual via Teorema da Representação de Riesz, temos que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0) \equiv L^2(\Gamma_0)' \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$. Além disso, a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ é contínua e compacta.

Consideramos $W = \left\{u \in L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)); \;\; u' \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))\right\}$, munido da norma

$$||u||_W = ||u||_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))} + ||u'||_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))}.$$

Pelo Teorema de Aubin - Lions (Teorema 1.91) a imersão $W \hookrightarrow L^2(0, T; L^2(\Gamma_0))$ é compacta. Além disso, de (2-96) e (2-97), temos que

$$||v_{\epsilon l}||_W = ||v_{\epsilon l}||_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))} + ||v'_{\epsilon l}||_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} \leq C,$$

onde C é uma constante positiva, ou seja, $\{v_{\epsilon l}\}$ é limitada em W.

Logo podemos extrair uma subsequência $(v_{\epsilon\mu})$ de $(v_{\epsilon l})$ (veja Definição 1.11) tal que

$$v_{\epsilon\mu} \longrightarrow v_\epsilon \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \equiv L^2(\Gamma_0 \times [0,T]),$$

consequentemente, pelo Teorema 1.35,

$$v_{\epsilon\mu} \longrightarrow v_\epsilon \text{ quase sempre em } \Gamma_0 \times [0,T]. \tag{2-98}$$

Agora, de forma similar as contas feitas para obter (2-96), segue que

$$\left\{v'_{\epsilon\mu}\right\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)).$$

Ainda da segunda estimativa (2-84) temos que

$$\left\{\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon\mu}\right\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).$$

Logo

$$\begin{aligned} ||v'_{\epsilon\mu}||_W &= ||v'_{\epsilon\mu}||_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))} + ||v''_{\epsilon\mu}||_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} \\ &\leq ||v'_{\epsilon\mu}||_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0))} + ||\sqrt{\rho_\epsilon}v''_{\epsilon\mu}||_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))} \\ &\leq k_9, \end{aligned}$$

sendo k_9 uma constante positiva. Portanto $\left\{v'_{\epsilon\mu}\right\}$ é limitada em W.

Assim obtemos uma subsequência, a qual ainda representamos por $(v_{\epsilon\mu})$, tal que

$$v'_{\epsilon\mu} \longrightarrow v'_\epsilon \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)),$$

consequentemente, pelo Teorema 1.35,

$$v'_{\epsilon\mu} \longrightarrow v'_\epsilon \text{ quase sempre em } \Gamma_0 \times [0,T]. \tag{2-99}$$

Como as funções f e g são contínuas, de (2-98) e (2-99) temos

$$|v_{\epsilon\mu}|^\delta v_{\epsilon\mu} \longrightarrow |v_\epsilon|^\delta v_\epsilon \text{ e } g(v'_{\epsilon\mu}) \longrightarrow g(v'_\epsilon), \text{ quase sempre } \Gamma_0 \times [0,T]. \tag{2-100}$$

Daí segue que $\left\{|v_{\epsilon\mu}|^\delta v_{\epsilon\mu}\right\}$ e $\left\{g(v'_{\epsilon\mu})\right\}$ são limitadas quase sempre em $\Gamma_0 \times [0,T]$ e, portanto $\left\{|v_{\epsilon\mu}|^\delta v_{\epsilon\mu}\right\}$ e $\left\{g(v'_{\epsilon\mu})\right\}$ são limitadas em $L^\infty(\Gamma_0 \times [0,T])$.

Do Teorema 1.33 temos $L^\infty(\Gamma_0 \times [0,T]) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0 \times [0,T])$. Então

$$\left\{|v_{\epsilon\mu}|^{\delta}v_{\epsilon\mu}\right\} \text{ e } \left\{g(v'_{\epsilon\mu})\right\} \text{ são limitadas em } L^2(\Gamma_0 \times [0,T]). \tag{2-101}$$

Então combinando (2-100) com (2-101), pelo Lema de Lions (Teorema 1.92) obtemos

$$|v_{\epsilon\mu}|^{\delta}v_{\epsilon\mu} \rightharpoonup |v_\epsilon|^{\delta}v_\epsilon \text{ em } L^2(\Gamma_0 \times [0,T]); \tag{2-102}$$

$$g(v'_{\epsilon\mu}) \rightharpoonup g(v_\epsilon) \text{ em } L^2(\Gamma_0 \times [0,T]). \tag{2-103}$$

As convergências acima são suficientes para passar o limite nos termos não lineares da equação (2-28).

2.2.3 Passagem ao limite

Seja $j \in \mathbb{N}$ arbitrário porém fixado e consideramos $\mu > j$. Então de (2-28) resulta que

$$\begin{aligned}&(\rho_\epsilon v''_{\epsilon\mu}(t), w_j) + (\nabla v_{\epsilon\mu}(t), \nabla w_j) + (v'_{\epsilon\mu}(t), w_j)_{\Gamma_0}\\ &+(|v_{\epsilon\mu}(t)+\phi(t)|^{\delta}(v_{\epsilon\mu}(t)+\phi(t)), w_j)_{\Gamma_0} + (g(v'_{\epsilon\mu}(t)+\phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0}\\ &= (F(t), w_j) + (G(t), w_j)_{\Gamma_0}.\end{aligned} \tag{2-104}$$

Multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre $[0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\rho_{\epsilon\mu} v''_{\epsilon\mu}(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_{\epsilon\mu}(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (v'_{\epsilon\mu}(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt\\ &+\int_0^T (|v_{\epsilon\mu}(t)+\phi(t)|^{\delta}(v_{\epsilon\mu}(t)+\phi(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v'_{\epsilon\mu}(t)+\phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0}(\theta(t))dt\\ &= \int_0^T (F(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt.\end{aligned} \tag{2-105}$$

Das convergências (2-92)−(2-95) e (2-102)−(2-103), quando $\mu \longrightarrow \infty$ temos que

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\rho_\epsilon v''_\epsilon(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (v'_\epsilon(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt\\ &+\int_0^T (|v_\epsilon(t)+\phi(t)|^{\delta}(v_\epsilon(t)+\phi(t)), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v'_\epsilon(t)+\phi'(t)), w_j)_{\Gamma_0}(\theta(t))dt\\ &= \int_0^T (F(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w_j)_{\Gamma_0}\theta(t)dt,\end{aligned}$$

para todo $w_j \in V$, com $j = 1, 2, ..., m$, e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Pela densidade da base $\{w_j\}$ em V obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w)\theta(t)dt + \int_0^T (v_\epsilon'(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ + \int_0^T (|v_\epsilon(t) + \phi(t)|^\delta (v_\epsilon(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v_\epsilon'(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0}(\theta(t))dt \\ = \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt,\end{aligned} \tag{2-106}$$

para todo $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Em particular para $w \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$, de (2-106) e observando que w se anula na fronteira de Ω, obtemos

$$\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w)\theta(t)dt = \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt, \tag{2-107}$$

para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Pela fórmula de Green temos $-(\Delta v_\epsilon(t), w) = (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w)$, para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$. Substituindo em (2-107) obtemos

$$\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta v_\epsilon(t), w)\theta(t)dt = \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt, \tag{2-108}$$

para todo $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Tomemos $w\theta$, com $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ obtemos as seguintes igualdades:

- $\displaystyle\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt = \int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w\theta(t))dt = \langle \rho v_\epsilon'', w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$;
- $\displaystyle\int_0^T (\Delta v_\epsilon(t), w)\theta(t)dt = \int_0^T (\Delta v_\epsilon(t), w\theta(t))dt = \langle \Delta v_\epsilon, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$;
- $\displaystyle\int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt = \int_0^T (F(t), w\theta(t))dt = \langle F, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)}$.

sendo $Q = \Omega \times [0,T]$.

Combinando as igualdades acima com (2-108), obtemos

$$\langle \rho v_\epsilon'', w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta v_\epsilon, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle F, w\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0. \tag{2-109}$$

Como $R = \{w\theta; w \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ e } \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é denso em $\mathcal{D}(Q)$, obtemos

$$\langle \rho_\epsilon v_\epsilon'', \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta v_\epsilon, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} - \langle F, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0, \forall \psi \in \mathcal{D}(Q),$$

ou ainda, $\langle \rho_\epsilon v_\epsilon'' - \Delta v_\epsilon - F, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0$, para todo $\psi \in \mathcal{D}(Q)$. Logo

$$\rho_\epsilon v_\epsilon'' - \Delta v_\epsilon - F = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q). \tag{2-110}$$

Além disso, temos que $\Delta v_\epsilon \in L^2(Q)$ uma vez que $\rho_\epsilon v_\epsilon''$ e F pertencem a $L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv L^2(Q)$. Portanto,

$$\rho_\epsilon v_\epsilon'' - \Delta v_\epsilon - F = 0 \text{ em } L^2(Q). \tag{2-111}$$

Multiplicando (2-111) por $w\theta$ com $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre o intervalo $[0,T]$ obtemos

$$\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta v_\epsilon(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (F(t), w)\theta(t) = 0. \tag{2-112}$$

Como $v_\epsilon, \Delta v_\epsilon \in L^2(Q)$ então $v_\epsilon \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$, logo da Proposição 1.102

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} \in L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)).$$

Pela fórmula generalizada de Green (Teorema 1.103) obtemos

$$-(\Delta v_\epsilon(t), w) = (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w) - \left\langle \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)}. \tag{2-113}$$

Substituindo (2-113) em (2-112) obtemos

$$\int_0^T (\rho_\epsilon v_\epsilon''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (F(t), w)\theta(t) + \int_0^T (\nabla v_\epsilon(t), \nabla w)\theta(t)dt$$
$$- \int_0^T \left\langle \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \theta(t)dt = 0. \tag{2-114}$$

Comparando (2-114) com (2-106) obtemos

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} dt + \int_0^T (v'_\epsilon, w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (|v_\epsilon(t) + \phi(t)|^\delta (v_\epsilon(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v'_\epsilon + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt$$
$$- \int_0^T (G(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt = 0,$$

para todo $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Então

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} + v'_\epsilon + |v_\epsilon + \phi|^\delta (v_\epsilon + \phi) + g(v'_\epsilon + \phi') - G, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \theta(t)dt = 0.$$

Portanto

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} + v'_\epsilon + |v_\epsilon + \phi|^\delta (v_\epsilon + \phi) + g(v'_\epsilon + \phi') - G = 0 \text{ em } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0).$$

Como $v'_\epsilon, f, g, G \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_0))$ temos que $\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$. Logo

$$\frac{\partial v_\epsilon}{\partial \nu} + v'_\epsilon + |v_\epsilon + \phi|^\delta (v_\epsilon + \phi) + g(v'_\epsilon + \phi') - G = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-115}$$

Observamos que para cada $\epsilon_n = \frac{1}{n} > 0$ fixado, com $n \in \mathbb{N}$, a função $v_{\epsilon_n} : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma solução fraca para o problema de Dirichlet-Neumann (veja Proposição 1.111)

$$\begin{cases} -\Delta v_{\epsilon_n} = F^*(x,t) \text{ em } \Omega, \\ v_{\epsilon_n} = 0 \text{ em } \Gamma_1, \\ \dfrac{\partial v_{\epsilon_n}}{\partial \nu} = G^*(x,t) \text{ em } \Gamma_0, \end{cases} \tag{2-116}$$

onde

$$F^*(x,t) = F(x,t) - \rho_{\epsilon_n} v''_{\epsilon_n} \in L^2(\Omega)$$

e

$$G^*(x,t) = -|v_{\epsilon_n} + \phi|^\delta (v_{\epsilon_n} + \phi) - g(v'_{\epsilon_n} + \phi') + G(x,t) - v'_{\epsilon_n} \in L^2(\Gamma_0).$$

Além disso, uma vez que $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$, da teoria de problemas elípticos $v_{\epsilon_n} \in L^\infty(0,T;H^{\frac{3}{2}}(\Omega))$.

A formulação variacional do problema de Dirichlet-Neumann, para cada $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, é dada por

$$(\rho_{\epsilon_n} v''_{\epsilon_n}(t), w) + (\nabla v_{\epsilon_n}(t), \nabla w) + (v'_{\epsilon_n}(t), w)_{\Gamma_0} + (|v_{\epsilon_n}(t) + \phi(t)|^\delta (v_{\epsilon_n}(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0}$$
$$+(g(v'_{\epsilon_n}(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0} = (F(t), w) + (G(t), w)_{\Gamma_0}, \tag{2-117}$$

para todo $w \in V$.

Recordamos que, da primeira estimativa (2-56), $\{v_{\epsilon l}\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$. Por outro lado, da convergência $v_{\epsilon l} \overset{*}{\rightharpoonup} v_\epsilon$ e da Proposição 1.13 obtemos

$$||v_{\epsilon_n}||_{L^\infty(0,T;V)} \leq \liminf ||v_{\epsilon l}||_{L^\infty(0,T;V)} \leq ||v_{\epsilon l}||_{L^\infty(0,T;V)},$$

ou seja, $\{v_{\epsilon_n}\}$ é limitada em $L^\infty(0, T; V)$.

Segue da Observação 1.81 que existe uma subsequência de $\{v_{\epsilon_n}\}$, a qual ainda denotaremos por $\{v_{\epsilon_n}\}$ tal que

$$v_{\epsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty(0, T; V). \tag{2-118}$$

Com argumentos similares, obtemos

$$v'_{\epsilon_n} \overset{*}{\rightharpoonup} v' \text{ em } L^\infty(0, T; V); \tag{2-119}$$
$$\sqrt{\rho_{\epsilon_n}} v''_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho} v'' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)); \tag{2-120}$$
$$v'_{\epsilon_n} \rightharpoonup v' \text{ em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_0)). \tag{2-121}$$

Além disso, uma vez que a imersão $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \hookrightarrow L^2(\Gamma_0)$ é contínua e compacta, pelo Teorema de Aubin-Lions podemos extrair uma subsequência de $\{v_{\epsilon_n}\}$, a qual ainda denotaremos por $\{v_{\epsilon_n}\}$, tal que

$$v_{\epsilon_n} \longrightarrow v \text{ quase sempre em } \Gamma_0 \times [0, T],$$
$$v'_{\epsilon_n} \longrightarrow v' \text{ quase sempre em } \Gamma_0 \times [0, T].$$

Com argumentos inteiramente análogos para obter (2-102)$-$(2-103), deduzimos

$$|v_{\epsilon_n}|^{\delta} v_{\epsilon} \rightharpoonup |v|^{\delta} v \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)), \tag{2-122}$$

$$g(v'_{\epsilon_n}) \rightharpoonup g(v') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-123}$$

Multiplicando (2-117) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando o resultado sobre $[0,T]$ obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\rho_{\epsilon_n} v''_{\epsilon_n}(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v_{\epsilon_n}(t), \nabla w)\theta(t)dt + \int_0^T (v'_{\epsilon}(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (|v_{\epsilon_n}(t) + \phi(t)|^{\delta}(v_{\epsilon_n}(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v'_{\epsilon_n}(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt. \end{aligned} \tag{2-124}$$

Passando o limite em (2-124), para $\epsilon_n = \frac{1}{n}$ quando $n \longrightarrow \infty$, das convergências (2-118)$-$(2-123) obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (\rho v''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla v(t), \nabla w)\theta(t)dt + \int_0^T (v'(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &+ \int_0^T (|v(t) + \phi(t)|^{\delta}(v(t) + \phi(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt + \int_0^T (g(v'(t) + \phi'(t)), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (G(t), w)_{\Gamma_0}\theta(t)dt. \end{aligned} \tag{2-125}$$

Observação 2.10. *Como $\rho_{\epsilon_n} = \epsilon_n + \rho$, com $\epsilon_n = \frac{1}{n}$, quando $n \longrightarrow \infty$ temos que $\rho_{\epsilon_n} \longrightarrow \rho$.*

Em particular para $w \in \mathcal{D}(\Omega) \subset V$, e pela fórmula de Green obtemos

$$\int_0^T (\rho v''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta v, w)\theta(t)dt = \int_0^T (F(t), w)\theta(t)dt,$$

para todo $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Tomemos $w\theta$, com $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, uma vez que o conjunto $R = \{w\theta; w \in \mathcal{D}(\Omega)\ e\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é denso em $\mathcal{D}(Q)$ obtemos

$$\langle \rho v''(t) - \Delta v(t) - F(t), \psi \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0, \ \ \forall \psi \in \mathcal{D}(Q).$$

Ainda, $\Delta v \in L^2(Q)$ uma vez que $\rho v'', F \in L^2(Q)$. Portanto

$$\rho v'' - \Delta v - F = 0 \ \text{ em } \ L^2(Q). \tag{2-126}$$

Fazendo $v = y - \phi$ e lembrando que $F(t) = \Delta y^0 - t\Delta y^1 = \Delta\phi$ deduzimos

$$\rho y'' - \Delta y = 0 \ \text{ em } \ L^2(Q). \tag{2-127}$$

A seguir vamos mostrar que y satisfaz as condições de fronteira do problema $(*)$. Multiplicando (2-127) por $w\theta$, com $w \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando sobre o intervalo $[0,T]$ obtemos

$$\int_0^T (\rho y''(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\Delta y(t), w)\theta(t)dt = 0.$$

Por outro lado, como $y, \Delta y \in L^2(0,T; L^2(\Omega))$, temos que $y \in \mathcal{H} \cap H^1(\Omega)$ logo $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} \in L^2(0,T; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$. Assim, pela fórmula de Green, obtemos

$$\int_0^T (\rho y''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla y(t), \nabla w)\theta(t)dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu}, w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} dt. \tag{2-128}$$

Substituindo $v = y - \phi$ em (2-125) e comparando o resultado com (2-128) obtemos

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y'), w \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \theta(t)dt = 0,$$

ou seja,

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0).$$

E como $y', f(y), g(y') \in L^2(\Sigma)$, temos $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$. Então

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \ \text{ em } \ L^2(\Sigma),$$

sendo $\Sigma = \Gamma_0 \times [0,T]$.

2.2.4 Condições iniciais

Nesta seção nosso objetivo é mostrar que y verifica as condições iniciais do problema $(*)$, isto é, $y(x,0) = y^0(x)$ e $(\sqrt{\rho}y')(x,0) = (\sqrt{\rho}y^1)(x)$. Para isso mostraremos que $v(0) = \sqrt{\rho}v'(0) = 0$.

Vimos que $v_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0,T;V)$ e $v'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v'$ em $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Disso, e da imersão $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$, pela Proposição 1.79 temos que $v \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Por outro lado das convergências $\sqrt{\rho_\epsilon}v'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho}v'$ e $\sqrt{\rho_\epsilon}v''_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho}v''$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, pela Proposição 1.79, temos que $\sqrt{\rho}v' \in C^0(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto faz sentido calcular $v(0)$ e $\sqrt{\rho}v'(0)$.

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$.

Primeiramente, mostraremos que $v(0) = 0$. Com efeito, da convergência $v'_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ obtemos, da Observação 1.81, que

$$\int_0^T (v'_\epsilon(t), u(t))dt \longrightarrow \int_0^T (v'(t), u(t))dt, \forall u \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Tomamos $u(t) = w\theta(t)$ com w pertencente a $L^2(\Omega)$, então

$$\int_0^T (v'_\epsilon(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v'(t), w)\theta(t)dt, \forall w \in L^2(\Omega). \tag{2-129}$$

Observamos que

$$\int_0^T [(v_\epsilon(t), w)\theta(t)]'\, dt = \int_0^T (v'_\epsilon(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt,$$

ou seja,

$$\int_0^T (v'_\epsilon(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt - (v_\epsilon(0), w)$$

e com argumentos análogos

$$\int_0^T (v'(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (v(t), w)\theta'(t)dt - (v(0), w).$$

Das igualdades acima e da convergência (2-129) segue que

$$\left[-\int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt - (v_\epsilon(0), w)\right] \longrightarrow \left[-\int_0^T (v(t), w)\theta'(t)dt - (v(0), w)\right]. \quad (2\text{-}130)$$

Por outro lado, da convergência $v_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ temos

$$\int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (v(t), w)\theta'(t)dt, \forall w \in L^2(\Omega). \quad (2\text{-}131)$$

Das convergências (2-130) e (2-131) concluímos

$$\int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt - \left[\int_0^T (v_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt + (v_\epsilon(0), w)\right] \to \int_0^T (v(t), w)\theta'(t)dt$$
$$- \left[\int_0^T (v(t), w)\theta'(t)dt + (v(0), w)\right],$$

ou seja,

$$(v_\epsilon(0), w) \longrightarrow (v(0), w). \quad (2\text{-}132)$$

Como $v_\epsilon(0) = 0$, obtemos

$$(v_\epsilon(0), w) \longrightarrow 0, \quad \forall w \in L^2(\Omega). \quad (2\text{-}133)$$

Assim, das convergências (2-132) e (2-133), obtemos $(v(0), w) = 0$ para todo $w \in L^2(\Omega)$. Portanto $0 = v(0) = y(0) - \phi(0)$, isso implica $y(x, 0) = y^0$.

A seguir mostraremos que $\sqrt{\rho}v'(0) = 0$. Da convergência $\sqrt{\rho_\epsilon}v''_\epsilon \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho}v''$ em $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ temos

$$\int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v''_\epsilon(t), w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\rho v''(t), w)\theta(t)dt, \forall w \in L^2(\Omega). \quad (2\text{-}134)$$

Ainda, da igualdade

$$\int_0^T \left[(\sqrt{\rho_\epsilon}v'_\epsilon(t), w)\theta(t)\right]' dt = \int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v''_\epsilon(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v'_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt,$$

deduzimos

$$\int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v''_\epsilon(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v'_\epsilon(t), w)\theta'(t)dt - (\sqrt{\rho_\epsilon}v'_\epsilon(0), w).$$

De forma similar, obtemos

$$\int_0^T (\sqrt{\rho}v''(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (\sqrt{\rho}v'(t), w)\theta'(t)dt - (\sqrt{\rho}v'(0), w).$$

Das igualdades acima e da convergência (2-134) temos

$$\left[-\int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon'(t), w)\theta'(t)dt - (\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon(0), w)\right] \longrightarrow \left[-\int_0^T (\sqrt{\rho}v(t), w)\theta'(t)dt - (\sqrt{\rho}v(0), w)\right]. \tag{2-135}$$

Por outro lado, da convergência (2-119), com argumentos análogos para mostrar (2-89) obtemos a convergência $\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon' \overset{*}{\rightharpoonup} \sqrt{\rho}v'$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Consequentemente,

$$\int_0^T (\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon'(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\rho v'(t), w)\theta'(t)dt, \forall w \in L^2(\Omega). \tag{2-136}$$

Das convergências (2-135) e (2-136) segue que

$$(\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon'(0), w) \longrightarrow (\sqrt{\rho}v'(0), w). \tag{2-137}$$

Como $\sqrt{\rho_\epsilon}v_\epsilon'(0) = 0$, da convergência (2-137), obtemos $0 = \sqrt{\rho}v'(0) = \sqrt{\rho}y'(0) - \sqrt{\rho}\phi'(0)$. Portanto $\sqrt{\rho}y'(0) = \sqrt{\rho}y^1$.

Observação 2.11. *Da segunda estimativa temos que*

$$||\Delta v(t)||^2 + ||\nabla v'(t)||^2 \leq C(T), \text{ para todo } t \in [0,T] \text{ e } T > 0. \tag{2-138}$$

Assim, de (2-19) e (2-20) obtemos a mesma desigualdade dada em (2-138) para a solução y. Então, usando o seguinte argumento:

$$T_{\max} = \infty \text{ ou, se } T_{\max} < \infty \text{ então } \lim_{t\to T_{\max}} (|\Delta y(t)|^2 + |\nabla y'(t)|^2) = \infty,$$

podemos estender y para todo intervalo $]0,\infty[$. Pois, se $T_{\max} < \infty$ teríamos

$$\lim_{t\to T_{\max}} \left(|\Delta y(t)|^2 + |\nabla y'(t)|^2\right) = \infty,$$

o que contradiz (2-138), portanto temos que $T_{\max} = \infty$.

2.2.5 Unicidade

Sejam y_1 e y_2 soluções do problema $(*)$ e consideramos $z = y_1 - y_2$. Segue que

$$\rho(y_1'' - y_2'') - \Delta(y_1 - y_2) = \rho(y_1'') - \Delta(y_1) - (\rho(y_2'') - \Delta(-y_2)) = 0$$

ou seja,

$$\rho z'' - \Delta z = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega \times (0, \infty). \tag{2-139}$$

Multiplicando a equação (2-139) por $w \in V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e integrando o resultado sobre Ω, obtemos

$$(\rho z''(t), w) - (\Delta z(t), w) = 0. \tag{2-140}$$

Pela fórmula de Green e lembrando que $w|_{\Gamma_1} = 0$ temos

$$\begin{aligned} -(\Delta z(t), w) &= (\nabla z(t), \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial}{\partial \nu}(y_1 - y_2) w d\Gamma \\ &= (\nabla z(t), \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y_1}{\partial \nu} w d\Gamma + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y_2}{\partial \nu} w d\Gamma. \end{aligned} \tag{2-141}$$

Uma vez que y_1 e y_2 são soluções de $(*)$ segue que

$$\begin{aligned} -(\Delta z(t), w) &= (\nabla z(t), \nabla w) + (y_1', w)_{\Gamma_0} + (f(y_1), w)_{\Gamma_0} + (g(y_1'), w)_{\Gamma_0} \\ &\quad -(y_2', w)_{\Gamma_0} - (f(y_2), w)_{\Gamma_0} - (g(y_2'), w)_{\Gamma_0} \\ &= (\nabla z(t), \nabla w) + (y_1' - y_2', w)_{\Gamma_0} + (f(y_1) - f(y_2), w)_{\Gamma_0} \\ &\quad +(g(y_1') - g(y_2'), w)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-142}$$

Substituindo (2-142) em (2-140) temos

$$\begin{aligned} &(\rho z''(t), w) + (\nabla z(t), \nabla w) + (z'(t), w)_{\Gamma_0} + (f(y_1) - f(y_2), w)_{\Gamma_0} \\ &\quad +(g(y_1') - g(y_2'), w)_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned} \tag{2-143}$$

Consideramos $w = z'(t)$ na igualdade (2-143) temos

$$\begin{aligned} &(\rho z''(t), z'(t)) + (\nabla z(t), \nabla z'(t)) + (z'(t), z'(t))_{\Gamma_0} + (f(y_1) - f(y_2), z'(t))_{\Gamma_0} \\ &\quad +(g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0} = 0. \end{aligned} \tag{2-144}$$

De forma análoga as contas feitas para obter a primeira e a segunda estimativa, concluímos:

- $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 = (\rho z''(t), z'(t));$
- $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla z(t)||^2 = (\nabla z(t), \nabla z'(t));$
- $(z'(t), z'(t))_{\Gamma_0} = ||z'(t)||^2_{\Gamma_0}.$

Substituindo as igualdades acima em (2-144) obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla z(t)||^2\right] + ||z'(t)||^2_{\Gamma_0} + (g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0}$$
$$= (f(y_2) - f(y_1), z'(t))_{\Gamma_0}. \qquad (2\text{-}145)$$

Afirmamos que $(g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0} \geq 0$. Com efeito, por hipótese g é não decrescente, isto é, $g(s_i) \leq g(s_{i+1}),$ sempre que $s_i \leq s_{i+1}$.

Assim

- Se $y_1'(t) \leq y_2'(t)$ sobre Γ_0, então $z'(t) \leq 0$ e $g(y_1') \leq g(y_2'),$ consequentemente, temos $g(y_1') - g(y_2') \leq 0$ e $(g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0} \geq 0.$

- Se $y_1'(t) \geq y_2'(t)$ sobre Γ_0, então $z'(t) \geq 0$ e $g(y_1') \geq g(y_2'),$ consequentemente, temos $g(y_1') - g(y_2') \geq 0$ e $(g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0} \geq 0.$

Portanto $(g(y_1') - g(y_2'), z'(t))_{\Gamma_0} \geq 0.$

Da afirmação e de (2-145) concluímos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla z(t)||^2\right] + ||z'(t)||^2_{\Gamma_0} \leq (f(y_2) - f(y_1), z'(t))_{\Gamma_0}. \qquad (2\text{-}146)$$

A seguir, analisaremos o termo $(f(y_2) - f(y_1), z'(t))_{\Gamma_0}$. Para isso consideramos, sem perda de generalidade, $y_1 \leq y_2$ e observamos que pelo Teorema do Valor Intermediário existe uma constante $c = ay_1 + (1-a)y_2$ com $a \in [0,1]$ tal que

$$f(y_2) - f(y_1) = f'(c)(y_2 - y_1).$$

Como $f'(c) = (\delta + 1)|c|^\delta$ segue que

$$f(y_2)-f(y_1)=(\delta+1)|c^\delta|(y_2-y_1)\leq(\delta+1)|ay_1+(1-a)y_2|^\delta|y_1-y_2|$$
$$\leq(\delta+1)\left[|y_1|+|y_2|\right]^\delta|z|$$
$$\leq(\delta+1)2^\delta\left[|y_1|^\delta+|y_2|^\delta\right]|z(t)|. \qquad (2\text{-}147)$$

Logo

$$(f(y_2)-f(y_1),z'(t))_{\Gamma_0}\leq D_1\int_{\Gamma_0}\left[|y_1(t)|^\delta+|y_2(t)|^\delta\right]|z(t)||z'(t)|d\Gamma, \qquad (2\text{-}148)$$

sendo $D_1=(\delta+1)2^\delta$.

Usando argumentos análogos aos usados para obter a segunda estimativa, obtemos:

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z(t)||^2\right]+(1-\eta)||z'(t)||^2_{\Gamma_0}\leq D_2(\eta)||\nabla z(t)||^2, \qquad (2\text{-}149)$$

sendo $D_2(\eta)=\dfrac{C^{2\delta+2}L_1^{2\delta}}{\eta}$, a constante C vem da imersão $V\hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$.

Integrando a desigualdade acima sobre o intervalo $[0,t]$ obtemos

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2-\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(0)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z(t)||^2-\frac{1}{2}||\nabla z(0)||^2+(1-\eta)\int_0^t||z'(s)||^2_{\Gamma_0}ds$$
$$\leq D_2(\eta)\int_0^t||\nabla z(s)||^2ds. \qquad (2\text{-}150)$$

Como y_1 e y_2 são soluções do problema $(*)$, temos as condições iniciais $\sqrt{\rho}y_1'(0)=\sqrt{\rho}y^1$ e $\sqrt{\rho}y_2'(0)=\sqrt{\rho}y^1$. Consequentemente, $y_1'(0)=y^1$ e $y_2'(0)=y^1$, logo $z'(0)=0$. Das condições iniciais $y_1(0)=y^0$ e $y_1(0)=y^0$ temos $z(0)=0$, consequentemente, $\nabla z(0)=0$.

Substituindo $z'(0)=\nabla z(0)=0$ em (2-150) segue

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'(t)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z(t)||^2+(1-\eta)\int_0^t||z'(s)||^2_{\Gamma_0}ds\leq D_2(\eta)\int_0^t||\nabla z(s)||^2ds. \qquad (2\text{-}151)$$

Consideramos $\eta<1$ e $n_3=\min\left\{\frac{1}{2},1-\eta\right\}$ então

$$||\sqrt{\rho}z'(t)||^2+||\nabla z(t)||^2+\int_0^t||z'(s)||^2_{\Gamma_0}ds\leq n_3^{-1}D_2(\eta)\int_0^t||\nabla z(s)||^2ds, \qquad (2\text{-}152)$$

ou ainda,

$$||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 + ||\nabla z(t)||^2 + \widetilde{G}_2(t) \leq \int_0^t n_4 \left[||\nabla z(s)||^2 + ||\sqrt{\rho}z'(s)||^2 + \widetilde{G}_2(s)\right] ds, \quad (2\text{-}153)$$

sendo $\widetilde{G}_2(t) = \displaystyle\int_0^t ||z'(s)||^2_{\Gamma_0} ds$ e $n_4 = n_3^{-1} D_2(\eta)$.

Aplicando o Lema de Gronwall (Proposição 1.93), obtemos

$$||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 + ||\nabla z(t)||^2 + \int_0^t ||z'(s)||^2_{\Gamma_0} ds \leq 0e^{n_4 T} = 0, \quad (2\text{-}154)$$

ou seja, $\quad ||\sqrt{\rho}z'(t)||^2 = ||\nabla z(t)||^2 = \displaystyle\int_0^t ||z'(t)||_{\Gamma_0} = 0 \text{ em } [0,T].$

Portanto $z(t) = 0$ em V, para todo $t \in [0,T], T > 0$. Logo $y_1(t) = y_2(t)$ para todo $t \in [0,T]$, isto é, a solução do problema $(*)$ é única.

2.3 Existência de solução fraca

Supondo válidos (2-1) e (2-6), usando argumentos de densidade, nesta seção mostraremos que existe pelo menos uma solução fraca para o problema $(*)$ na classe de funções do Teorema 2.5.

Sejam $\{y^0, y^1\}$ satisfazendo a hipótese (2-6), isto é, $\{y^0, y^1\} \in \overline{\mathcal{C}}^{V \times L^2(\Omega)}$. Assim, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, temos que $\{y^0_\mu, y^1_\mu\}$ é uma solução para o problema elíptico (2-5) e

$$y^0_\mu \longrightarrow y^0 \text{ em } V; \quad (2\text{-}155)$$

$$y^1_\mu \longrightarrow y^1 \text{ em } L^2(\Omega). \quad (2\text{-}156)$$

Dessa forma, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, existe uma solução regular y_μ para o problema $(*)$, pertencente a classe de funções do Teorema 2.4. Podemos escrever:

$$(**) \begin{cases} \rho(x)y''_\mu - \Delta y_\mu = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty), \\ y_\mu = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial y_\mu}{\partial \nu} + y'_\mu + f(y_\mu) + g(y'_\mu) = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ y_\mu(x,0) = y^0_\mu(x), \ \ (\sqrt{\rho}y'_\mu)(x,0) = (\sqrt{\rho}y^1_\mu)(x) \text{ em } \Omega. \end{cases}$$

Considerando $w \in V$ e calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ da primeira equação de $(**)$, obtemos

$$(\rho y_\mu''(t), w) - (\Delta y_\mu(t), w) = 0, \quad \text{para todo } w \in V. \tag{2-157}$$

Como $w|_{\Gamma_1} = 0$, pela fórmula de Green, segue que

$$\begin{aligned} 0 = (\rho y_\mu''(t), w) + (\nabla y_\mu(t), \nabla w) - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y_\mu}{\partial \nu} w d\Gamma = (\rho y_\mu''(t), w) + (\nabla y_\mu(t), \nabla w) \\ +(y_\mu'(t), w)_{\Gamma_0} + (|y_\mu(t)|^\delta y_\mu(t), w)_{\Gamma_0} + (g(y_\mu'(t)), w)_{\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{2-158}$$

Fazendo $w = y_\mu'$ em (2-158) obtemos

$$(\rho y_\mu''(t), y_\mu'(t)) + (\nabla y_\mu(t), \nabla y_\mu'(t)) + ||y_\mu'(t)||_{\Gamma_0} + (|y_\mu|^\delta y_\mu + g(y_\mu'), y_\mu'(t))_{\Gamma_0} = 0. \tag{2-159}$$

De forma análoga as contas feitas para obter a primeira estimativa, temos

- $(\rho y_\mu''(t), y_\mu'(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\sqrt{\rho} y_\mu'(t)||^2$;
- $(\nabla y_\mu(t), \nabla y_\mu'(t)) = \dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\nabla y_\mu(t)||^2$;
- $(|y_\mu(t)|^\delta y_\mu(t), y_\mu'(t)) = \dfrac{1}{\delta+2}\dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{\Gamma_0} |y_\mu(t)|^{\delta+2} d\Gamma$;
- $-(g(y_\mu'), y_\mu'(t))_{\Gamma_0} \leq -k_1 \displaystyle\int_{\Gamma_0} |y_\mu'(t)|^{\xi+2} d\Gamma$, por (2-3).

Comparando com (2-159), obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||\sqrt{\rho} y_\mu'(t)||^2 + ||\nabla y_\mu(t)||^2 + \frac{2}{\delta+2}||y_\mu(t)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2}\right] + ||y_\mu'(t)||_{\Gamma_0}^2 \\ \leq -k_1 \int_{\Gamma_0} |y_\mu'(t)|^{\xi+2} d\Gamma. \end{aligned} \tag{2-160}$$

Integrando (2-160) sobre $[0, t]$ com $t \leq T$ e considerando que do problema $(**)$ temos que $y_\mu(0) = y_\mu^0$ e $\sqrt{\rho} y_\mu'(0) = \sqrt{\rho} y_\mu^1$, obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}||\sqrt{\rho} y_\mu'(t)||^2 - \frac{1}{2}||\sqrt{\rho} y_\mu^1||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y_\mu(t)||^2 - \frac{1}{2}||\nabla y_\mu^0||^2 + \frac{1}{\delta+2}||y_\mu(t)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} \\ -\frac{1}{\delta+2}||y_\mu^0||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} + \int_0^t ||y_\mu'(s)||_{\Gamma_0}^2 ds \leq -k_1 \int_0^t ||y_\mu'(s)||_{\xi+2,\Gamma_0}^{\xi+2} ds. \end{aligned} \tag{2-161}$$

Observação 2.12. *(a) Da convergência $y_\mu^0 \to y^0$ em V e da imersão $V \hookrightarrow L^{\delta+2}(\Gamma_0)$ temos que $\frac{1}{2}||\nabla y_\mu^0||^2 + \frac{1}{\delta+1}||y_\mu^0||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} < \infty$.*

(b) Da convergência $y_\mu^1 \to y^1$ em $L^2(\Omega)$ e da hipótese $\rho \in C^1(\overline{\Omega})$ temos que $\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y_\mu^1||^2 < \infty$.

A partir da Observação 2.12 podemos reescrever (2-161) como

$$||\sqrt{\rho}y_\mu'(t)||^2 + ||\nabla y_\mu(t)||^2 + ||y_\mu(t)||_{\delta+2,\Gamma_0}^{\delta+2} + \int_0^t ||y_\mu'(s)||_{\Gamma_0}^2 ds$$
$$\int_0^t ||y_\mu'(s)||_{\xi+1,\Gamma_0}^{\xi+1} ds \leq C_6, \tag{2-162}$$

onde $k_{10}^{-1} = \min\left\{\frac{1}{2}, k_1, \frac{1}{\delta+2}\right\}$ e C_6 é constante positiva que não depende de $\mu \in \mathbb{N}$ e $t \in (0,T)$.

Escrevemos $z_{\mu,\sigma} = y_\mu - y_\sigma$, com $\mu, \sigma \in \mathbb{N}$, sendo y_μ e y_σ soluções regulares do problema $(**)$. Então $z_{\mu,\sigma}$ verifica a igualdade

$$\rho z_{\mu,\sigma}'' - \Delta z_{\mu,\sigma} = 0 \text{ em } \Omega \times (0,\infty). \tag{2-163}$$

Calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$, de (2-163) com $z_{\mu,\sigma}'(t)$

$$(\rho z_{\mu,\sigma}'', z_{\mu,\sigma}'(t)) - (\Delta z_{\mu,\sigma}, z_{\mu,\sigma}'(t)) = 0. \tag{2-164}$$

Notemos que $z_{\mu,\sigma}(t) = 0$ em $\Gamma_1 \times (0,\infty)$ uma vez que y_μ e y_σ são soluções de $(**)$ e assim verificam $y_\mu = y_\sigma = 0$ em $\Gamma_1 \times (0,\infty)$.

Assim, pela fórmula de Green e da igualdade $z_{\mu,\sigma}(t) = 0$ em $\Gamma_1 \times (0,T)$, com $T > 0$, temos

$$(\rho z_{\mu,\sigma}'', z_{\mu,\sigma}'(t)) + (\nabla z_{\mu,\sigma}(t), \nabla z_{\mu,\sigma}'(t)) = \int_{\Gamma_0} \frac{\partial z_{\mu,\sigma}}{\partial \nu} z_{\mu,\sigma}'(t) d\Gamma$$
$$= -\int_{\Gamma_0} (y_\mu' + f(y_\mu) + g(y_\mu')) z_{\mu,\sigma}' d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (y_\sigma' + f(y_\sigma) + g(y_\sigma')) z_{\mu,\sigma}' d\Gamma$$
$$= -(z_{\mu,\sigma}', z_{\mu,\sigma}')_{\Gamma_0} + (f(y_\sigma) - f(y_\mu), z_{\mu,\sigma}'(t))_{\Gamma_0}$$
$$+(g(y_\sigma') - g(y_\mu'), z_{\mu,\sigma}'(t))_{\Gamma_0}. \tag{2-165}$$

Logo, de forma similar as contas realizadas na primeira estimativa, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}||^2+\frac{1}{2}||\nabla z'_{\mu,\sigma}||^2\right]+||z'_{\mu,\sigma}||^2_{\Gamma_0}+(g(y'_\mu)-g(y'_\sigma),z'_{\mu,\sigma}(t))_{\Gamma_0}$$
$$=(f(y_\mu)-f(y_\sigma),z'_{\mu,\sigma}(t))_{\Gamma_0}. \tag{2-166}$$

Notemos que, por hipótese, g é monótona não-decrescente. Daí, com argumentos análogos as contas para provar a unicidade da solução regular obtemos

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(t)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z'_{\mu,\sigma}(t)||^2\right]+||z'\mu,\sigma||^2_{\Gamma_0}$$
$$\leq (f(y_\sigma)-f(y_\mu),z'_{\mu,\sigma}(t))_{\Gamma_0}. \tag{2-167}$$

Assim,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(t)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z'_{\mu,\sigma}(t)||^2\right]+(1-\eta)||z'\mu,\sigma||^2_{\Gamma_0}$$
$$\leq D_3(\eta)||\nabla z_{\mu,\sigma}(t)||^2, \tag{2-168}$$

onde η é uma constante positiva e $D_3(\eta)=\dfrac{C^{2\delta+2}L_1^{2\delta}}{\eta}$.

Integrando (2-168) sobre o intervalo $[0,t]$ com $t\in[0,T]$ obtemos

$$\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(t)||^2-\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(0)||^2+\frac{1}{2}||\nabla z'_{\mu,\sigma}(t)||^2-\frac{1}{2}||\nabla z'_{\mu,\sigma}(0)||^2$$
$$+(1-\eta)\int_0^t||z'_{\mu,\sigma}(s)||^2_{\Gamma_0}ds\leq D_3(\eta)\int_0^t||\nabla z_{\mu,\sigma}(s)||^2ds. \tag{2-169}$$

Escolhendo $\eta<1$ segue que

$$||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(t)||^2+||\nabla z'_{\mu,\sigma}(t)||^2+\int_0^t||z'_{\mu,\sigma}(s)||^2_{\Gamma_0}ds$$
$$\leq k_{11}||\sqrt{\rho}z'_{\mu,\sigma}(0)||^2+k_{11}||\nabla z'_{\mu,\sigma}(0)||^2+k_{11}\int_0^t||\nabla z_{\mu,\sigma}(s)||^2ds, \tag{2-170}$$

sendo $k_{11}=\max\left\{(n_5)^{-1}\dfrac{1}{2},(n_5)^{-1}D_3(\eta)\right\}$ e $n_5=\min\left\{\dfrac{1}{2},1-\eta\right\}$. Logo

$$||\sqrt{\rho}y'_\mu(t)-\sqrt{\rho}y'_\sigma(t)||^2+||\nabla y'_\mu(t)-\nabla y'_\sigma(t)||^2+\int_0^t||y'_\mu(t)-y'_\sigma(t)||^2_{\Gamma_0}ds$$
$$\leq C_7+k_{11}\int_0^t||\nabla y'_\mu(t)-\nabla y'_\sigma(t)||^2ds, \tag{2-171}$$

sendo $C_7 = k_{11}||\sqrt{\rho}y_\mu^1 - \sqrt{\rho}y_\sigma^1||^2 + k_{11}||\nabla y_\mu^0 - \nabla y_\sigma^0||^2$.

Agora, estamos em condições de aplicar o Lema de Gronwall em (2-171), então

$$||\sqrt{\rho}y'_\mu(t) - \sqrt{\rho}y'_\sigma(t)||^2 + ||\nabla y'_\mu(t) - \nabla y'_\sigma(t)||^2 + \int_0^t ||y'_\mu(t) - y'_\sigma(t)||^2_{\Gamma_0} ds \leq C_7 e^{k_{11}T}. \tag{2-172}$$

De (2-172) concluímos

- $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||\sqrt{\rho}y'_\mu(t) - \sqrt{\rho}y'_\sigma(t)||^2 \leq C_7 e^{k_{11}T}$;
- $\sup\limits_{t\in[0,T]} ||\nabla y'_\mu(t) - \nabla y'_\sigma(t)||^2 \leq C_7 e^{k_{11}T}$;
- $\int_0^t ||y'_\mu(t) - y'_\sigma(t)||^2_{\Gamma_0} ds \leq C_7 e^{k_{11}T}$.

Por outro lado, como tomamos (y_μ) de forma que $y_\mu^1 \longrightarrow y_1$ em $L^2(\Omega)$ e $y_\mu^0 \longrightarrow y_0$ em V, quando $\mu, \sigma \longrightarrow \infty$, então segue que

$$\lim_{\mu,\sigma\to\infty} C_7 e^{k_{11}T} = 0.$$

Portanto

$$(y_\mu) \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0([0,T];V),$$
$$(\sqrt{\rho}y'_\mu) \text{ é uma sequência de Cauchy em } C^0([0,T];L^2(\Omega)),$$
$$(y'_\mu) \text{ é uma sequência de Cauchy em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)).$$

Como $L^2(\Gamma_0)$ é um espaço de Banach, pelo Teorema 1.74, o espaço $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0))$ também é um espaço de Banach. Além disso, pelo mesmo teorema, os espaços $C^0([0,T];V)$ e $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ são espaços de Banach.

Portanto existe uma aplicação $y : \Omega \times (0,T) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$y_\mu \longrightarrow y \text{ forte em } C^0([0,T];V), \tag{2-173}$$

$$\sqrt{\rho}y'_\mu \longrightarrow \sqrt{\rho}y' \text{ forte em } C^0([0,T];L^2(\Omega)), \tag{2-174}$$

$$y'_\mu \longrightarrow y' \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-175}$$

Da convergência (2-175) temos que

$$y'_\mu \longrightarrow y' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \equiv L^2(\Gamma_0 \times [0,T]),$$

ou seja, $y'_\mu \longrightarrow y'$ quase sempre em $\Gamma_0 \times [0,T]$. Como as funções f, g são contínuas segue que

$$f(y_\mu) \longrightarrow f(y) \;\text{ e }\; g(y'_\mu) \longrightarrow g(y') \;\text{ quase sempre em }\; \Gamma_0 \times [0,T]. \tag{2-176}$$

Assim, com argumentos análogos para obter (2-101), deduzimos

$$\{f(y_\mu)\} \;\text{ e }\; \{g(y'_\mu)\} \;\text{ são limitadas em }\; L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-177}$$

Portanto de (2-176) e (2-177), pelo Lema de Lions, concluímos

$$f(y_\mu) \rightharpoonup f(y) \text{ e } g(y'_\mu) \rightharpoonup g(y') \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-178}$$

2.3.1 Passagem ao Limite

Da primeira igualdade em $(**)$ temos

$$\rho y''_\mu - \Delta y_\mu = 0 \;\text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2-179}$$

Calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ de (2-179) por $w\theta$, onde $w \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ obtemos

$$(\rho y''_\mu(t), w\theta) - (\Delta y_\mu(t), w\theta) = 0.$$

Consequentemente, pela fórmula de Green,

$$(\rho y''_\mu(t), w\theta) - (\nabla y_\mu(t), \theta \nabla w) = 0. \tag{2-180}$$

Integrando sobre o intervalo $[0,T]$ obtemos

$$\int_0^T (\rho y''_\mu(t), w)\theta(t)dt - \int_0^T (\nabla y_\mu(t), \nabla w)\theta(t)dt = 0. \tag{2-181}$$

A seguir, nosso objetivo é passar o limite em (2-181) quando $\mu \longrightarrow \infty$. Para isso, observamos que

$$\int_0^T \left[(\rho y_\mu'(t), w)\theta(t)\right]' dt = \int_0^T (\rho y_\mu''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\rho y_\mu'(t), w)\theta'(t)dt.$$

Consequentemente

$$\int_0^T (\rho y_\mu''(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (\rho y_\mu'(t), w)\theta'(t)dt. \tag{2-182}$$

Com argumentos similares obtemos

$$\int_0^T (\rho y''(t), w)\theta(t)dt = -\int_0^T (\rho y'(t), w)\theta'(t)dt. \tag{2-183}$$

Afirmamos que $\displaystyle\int_0^T (\rho y_\mu'(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\rho y'(t), w)\theta'(t)dt$. Com efeito, usando a desigualdade de Hölder para $p = q = 2$, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_0^T (\rho y_\mu'(t), w)\theta'(t)dt - \int_0^T (\rho y'(t), w)\theta'(t)dt\right| &\leq \int_0^T \left|(\rho(y_\mu'(t) - y'(t)), w)\theta'(t)\right| dt \\ &\leq \int_0^T ||\rho(y_\mu'(t) - y'(t))||||w|||\theta'(t)|dt \\ &\leq \sup_{x\in\bar{\Omega}} |\rho(x)| \sup_{t\in[0,T]} ||\sqrt{\rho}(y_\mu' - y')||||w||||\theta'(t)||_{L^1(0,T)}.\end{aligned} \tag{2-184}$$

Da convergência (2-174) e de (2-184) deduzimos que, quando $\mu \longrightarrow \infty$,

$$\int_0^T (\rho y_\mu'(t), w)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\rho y'(t), w)\theta'(t)dt, \tag{2-185}$$

concluindo a prova da afirmação.

Com argumentos análogos, usando a convergência (2-173), concluímos

$$\int_0^T (\nabla y_\mu(t), \nabla w)\theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T (\nabla y(t), \nabla w)\theta(t)dt. \tag{2-186}$$

Dessa forma, passando o limite em (2-181), quando $\mu \longrightarrow \infty$, obtemos

$$\int_0^T (\rho y''(t), w)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla y(t), \nabla w)\theta(t) = 0. \tag{2-187}$$

Assim,

$$\langle \rho y''(t), w\theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} + \langle \nabla y(t), \theta(t)\nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0.$$

Por outro lado

$$\begin{aligned}\langle \nabla y(t), \theta(t)\nabla w\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} &= \sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial y}{\partial x_j}, \theta\frac{\partial w}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left\langle \frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}, \theta w\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}\\ &= -\langle \Delta y, \theta(t)w\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)}. \end{aligned} \tag{2-188}$$

Logo deduzimos

$$\langle \rho y''(t), w\theta(t)\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} - \langle \Delta y, \theta(t)w\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

ou seja, $\langle \rho y''(t) - \Delta y, \theta(t)w\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0$, para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Assim, pela densidade do conjunto $R = \{\theta w; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } w \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(Q)$, temos

$$\langle \rho y''(t) - \Delta y, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0, \text{ para toda } \varphi \in \mathcal{D}(Q),$$

isto é, $\rho y'' - \Delta y = 0$ em $\mathcal{D}'(Q)$.

Vimos que $\sqrt{\rho}y' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, da Observação 1.77, formalmente temos que $\sqrt{\rho}y'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Então $\Delta y'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto

$$\rho y'' - \Delta y = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2-189}$$

A seguir, verificaremos se a solução fraca y satisfaz as condições de fronteira do problema $(*)$. Das convergências (2-173)$-$(2-175) e das imersões

$$\begin{aligned}&C^0([0,T];V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^1(\Omega));\\ &C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;L^2(\Omega));\\ &C^0([0,T];L^2(\Gamma_0)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_0)),\end{aligned}$$

pelo Teorema 1.95, obtemos

$$y_\mu \longrightarrow y \text{ em } H^{-1}(0,T;H^1(\Omega)); \tag{2-190}$$

$$\sqrt{\rho}y'_\mu \longrightarrow \sqrt{\rho}y' \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)); \tag{2-191}$$

$$y'_\mu \longrightarrow y' \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Gamma_0)). \tag{2-192}$$

Como $\sqrt{\rho}y' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, da Observação 1.77, obtemos $\sqrt{\rho}y'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Então da continuidade da aplicação $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, (veja Corolário 1.78) segue que

$$\sqrt{\rho}y''_\mu \longrightarrow \sqrt{\rho}y'' \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2-193}$$

Por outro lado, temos que y_μ satisfaz a igualdade $\Delta y_\mu = -\rho y''_\mu$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Além disso, temos que ρ satisfaz a hipótese (2-1). Portanto temos que

$$\Delta y_\mu = \rho y''_\mu \rightharpoonup \Delta y = \rho y'' \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\Delta y_\mu \rightharpoonup \Delta y \text{ em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2-194}$$

Ainda, de (2-190) temos que $y_\mu \longrightarrow y$ em $H^{-1}(0,T;H^1(\Omega))$. Portanto

$$y_\mu \rightharpoonup y \text{ em } H^{-1}(0,T;\mathcal{H}\cap H^1(\Omega)).$$

Daí pela continuidade da aplicação traço $\widetilde{\gamma_1} : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}\cap H^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0))$ (veja [33]) temos que

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \nu} = \widetilde{\gamma_1}(y_\mu) \rightharpoonup \widetilde{\gamma_1}(y) = \frac{\partial y}{\partial \nu} \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \tag{2-195}$$

Como y_μ é solução regular do problema $(*)$, temos que

$$\frac{\partial y_\mu}{\partial \nu} + y'_\mu + f(y_\mu) + g(y'_\mu) = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \tag{2-196}$$

Portanto das convergências (2-178), (2-192) e (2-195) podemos passar o limite em (2-

196) e obtemos

$$\frac{\partial y}{\partial \nu} + y' + f(y) + g(y') = 0 \text{ em } H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \tag{2-197}$$

2.3.2 Condições iniciais

A seguir mostraremos que a solução fraca satisfaz as condições iniciais do problema $(*)$, ou seja, $y(x,0) = y^0$ e $\sqrt{\rho}y'(x,0) = \sqrt{\rho}y^1$.

Das convergências (2-173) e (2-174) temos que

$$y_\mu(0) \longrightarrow y(0) \text{ em } V, \tag{2-198}$$

$$\sqrt{\rho}y'_\mu(0) \longrightarrow \sqrt{\rho}y'(0) \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2-199}$$

Por outro lado, vimos que

$$y_\mu(0) = y^0_\mu \longrightarrow y^0 \text{ em } V, \tag{2-200}$$

$$\sqrt{\rho}y'_\mu(0) = \sqrt{\rho}y^1_\mu \longrightarrow \sqrt{\rho}y^1 \text{ em } L^2(\Omega). \tag{2-201}$$

Assim, das convergências (2-198), (2-200) e da unicidade do limite concluímos que $y(x,0) = y^0$. De forma similar, das convergências (2-199) e (2-201), concluímos que $\sqrt{\rho}y'(x,0) = \sqrt{\rho}y^1$.

CAPÍTULO 3

COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO

Neste capítulo mostraremos o decaimento exponencial para a solução regular (Teorema 2.4) e fraca (Teorema 2.5) do problema $(*)$. Para este fim, usaremos o método da energia perturbada, como feito em [20].

Seja x^0 um ponto fixo do $\mathbb{R}^n$ e $m(x) = x - x^0$, com $x \in \mathbb{R}^n$. Consideramos Γ_1, Γ_0 como segue

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) > 0\} \text{ e } \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x) \cdot \nu(x) < 0\}, \tag{3-1}$$

onde $\nu(x)$ é um vetor normal unitário apontado para fora de Γ.

Observação 3.1. *Na Figura 3.1 mostramos um exemplo do conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ satisfazendo as hipóteses (3-1). Lembrando que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$.*

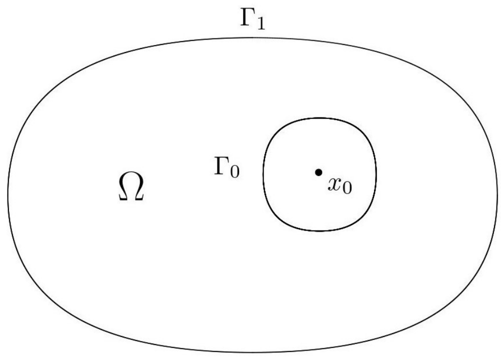

Figura 3.1:

Assumimos $\rho \geq 0$ em Ω, satisfazendo a seguinte hipótese

$$\nabla\rho \cdot m \geq 0 \text{ em } \Omega. \tag{3-2}$$

Além disso, consideramos $\xi = 0$ na hipótese (2-3).

A energia associada ao problema $(*)$ é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \rho(x)|y'(x,t)|^2dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y(x,t)|^2dx + \frac{C_0}{\delta+2}\int_{\Gamma_0} |y(x,t)|^{\delta+2}d\Gamma. \tag{3-3}$$

Para um $\varepsilon > 0$, definimos a energia perturbada

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon\psi(t), \tag{3-4}$$

onde

$$\psi(t) = 2\int_\Omega \rho(x)y'(x,t)(m\cdot\nabla y(x,t))dx + (n-1)\int_\Omega \rho(x)y'(x,t)y(x,t)dx. \tag{3-5}$$

Sabemos, da continuidade do traço $\gamma : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ que

$$\int_{\Gamma_0} v^2 d\Gamma \leq \mu\int_\Omega |\nabla v|^2dx, \quad \text{para todo } v \in V, \tag{3-6}$$

e da Desigualdade de Poincaré

$$||v(t)||^2 \leq \lambda||\nabla v(t)||^2, \quad \text{para todo } v \in V, \tag{3-7}$$

sendo μ, λ constantes positivas.

Lema 3.2. *Vale* $E'(t) \leq -(1+k_1)\int_{\Gamma_0}|y'(t)|d\Gamma$.

Demonstração. De (3-3) obtemos

$$E'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 + ||\nabla y(t)||^2 + \frac{2C_0}{\delta+2}||y(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}\right]. \tag{3-8}$$

Por outro lado, temos

$$\rho y'' - \Delta y = 0 \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Calculando o produto interno em $L^2(\Omega)$ com $y'(t)$, e usando a fórmula de Green, obtemos

$$(\rho y''(t), y'(t)) + (\nabla y(t), \nabla y'(t)) + \int_{\Gamma_0} |y'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0} f(y)y' d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(y')y' d\Gamma = 0, \quad \text{(3-9)}$$

pois $y = 0$ em Γ_1 e $\dfrac{\partial y}{\partial \nu} = -y' - f(y) - g(y')$ em $L^2(0,T; L^2(\Gamma_0))$.

Por argumentos análogos usados na prova da primeira estimativa, temos que

- $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\sqrt{\rho}y'(t)|| = (\rho y''(t), y'(t))$;
- $\dfrac{1}{2}\dfrac{d}{dt}||\nabla y(t)|| = (\nabla y(t), \nabla y'(t))$;
- $f(y)y' = C_0|y|^\delta y y' = \dfrac{C_0}{\delta+2}\dfrac{d}{dt}|y|^{\delta+2}$.

Substituindo em (3-9), vem que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 + ||\nabla y(t)||^2 + \frac{2C_0}{\delta+2}||y(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0}\right] = -||y'(t)||^2_{\Gamma_0} - \int_{\Gamma_0} g(y')y' d\Gamma. \quad \text{(3-10)}$$

Comparando (3-8) com (3-10) obtemos

$$E'(t) = -\left[||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \int_{\Gamma_0} g(y')y' d\Gamma\right]. \quad \text{(3-11)}$$

Da hipótese (2-3) temos $0 < k_1|y'|^2 \leq g(y')y'$, uma vez que consideramos $\xi = 0$. Isso implica

$$-\int_{\Gamma_0} k_1|y'|^2 d\Gamma \geq -\int_{\Gamma_0} g(y')y' d\Gamma. \quad \text{(3-12)}$$

Comparando (3-11) com (3-12) obtemos

$$E'(t) \leq -(1+k_1)\int_{\Gamma_0} |y'(t)|^2 d\Gamma, \quad \text{(3-13)}$$

concluindo a prova do lema. □

Proposição 3.3. *Existe $C_1 > 0$ tal que*

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon C_1 E(t), \quad \textit{para todo} \;\; t \geq 0.$$

Demonstração. Com efeito, de (3-5) e da desigualdade de Hölder para $p = q = 2$, obtemos

$$|\psi(t)| \leq 2\left(\int_\Omega |\rho y'(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |m \cdot \nabla y(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$+(n-1)\left(\int_\Omega |\rho y'(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |y(t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3-14}$$

Por outro lado,

- $\displaystyle\int_\Omega |\rho|^2 |y'(t)|^2 dx \leq ||\rho||^2_{C^0(\bar{\Omega})} ||\sqrt{\rho} y'(t)||^2$, pois $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$.

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz obtemos

- $\displaystyle\int_\Omega |m(x) \cdot \nabla y(x,t)|^2 dx \leq R(x^0)^2 ||\nabla y(t)||^2$, o qual $R(x^0) = \max_{x \in \bar{\Omega}} |x - x^0|$.

Então

$$|\psi(t)| \leq 2R(x^0)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}||\sqrt{\rho}y'(t)||||\nabla y(t)|| + (n-1)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}||\sqrt{\rho}y'(t)||||y(t)||. \tag{3-15}$$

De (3-15) e (3-7) obtemos

$$|\psi(t)| \leq \left[2R(x^0)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})} + (n-1)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}\sqrt{\lambda}\right] ||\sqrt{\rho}y'(t)||||\nabla y(t)||. \tag{3-16}$$

Fazendo $C_1 = 2R(x^0)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})} + (n-1)||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}\sqrt{\lambda}$, segue da desigualdade de Young que

$$|\psi(t)| \leq C_1 \left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y(t)||^2\right]$$
$$\leq C_1 E(t). \tag{3-17}$$

Portanto de (3-4) e (3-17) obtemos

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| = \varepsilon|\psi(t)| \leq \varepsilon C_1 E(t).$$

Concluindo a prova da proposição. □

Proposição 3.4. *Existem* $\varepsilon_1 > 0$ *e* $C_2 > 0$ *tais que*

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon C_2 E(t), \quad \forall\, t \geq 0 \text{ e } \forall\, \varepsilon \in (0, \varepsilon_1].$$

Demonstração. Com efeito, derivando (3-5) com respeito a t e substituindo $\rho y'' = \Delta y$ no resultado, obtemos

$$\psi'(t) = 2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx + 2\int_\Omega \rho y'(m\cdot\nabla y')dx + (n-1)\int \Delta y y dx$$
$$+(n-1)\int_\Omega \rho y' y' dx. \qquad (3\text{-}18)$$

A seguir analisaremos alguns termos da igualdade (3-18) separadamente. Lembramos que $n \geq 1$, C_0 é dado em (2-2) e δ é detalhado em (2-3).
Primeiramente, analisaremos $I_1 = 2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx$. Notemos que

$$I_1 = 2\int_\Omega \Delta y(m\cdot\nabla y)dx = 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx. \qquad (3\text{-}19)$$

Pela fórmula de Green, para $i = j$, obtemos

$$\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}dx = -\int_\Omega \frac{\partial\left(m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx + \int_\Gamma m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_j}\nu^j d\Gamma$$
$$= -\int_\Omega\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx - \int_\Omega m_j\frac{\partial^2 y}{\partial x_j^2}\frac{\partial y}{\partial x_j}dx + \int_\Gamma m_j\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2\nu^j d\Gamma. \qquad (3\text{-}20)$$

De forma análoga, para $i \neq j$, obtemos

$$\int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx = -\int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_i}dx + \int_\Gamma m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma. \qquad (3\text{-}21)$$

Assim, comparando (3-19), (3-20) e (3-21) obtemos

$$2\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx = -2\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx - 2\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_i}dx$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{n}\int_\Gamma m_j\frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma. \qquad (3\text{-}22)$$

Por outro lado, pela fórmula de Green, obtemos

$$-\int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_i}dx = \int_\Omega\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx + \int_\Omega m_j\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j\partial x_i}dx - \int_\Gamma m_j\nu^j\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx,$$

ou seja,

$$-2\int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}dx = \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx. \tag{3-23}$$

De (3-22) e (3-23) obtemos

$$\begin{aligned} 2\sum_{i,j=1}^n \int_\Omega m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}dx &= -2\sum_{j=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)^2 dx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma m_j \nu^j \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 dx + 2\sum_{i,j=1}^n \int_\Gamma m_j \frac{\partial y}{\partial x_j}\frac{\partial y}{\partial x_i}\nu^i d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-24}$$

Portanto de (3-19) e (3-24) obtemos

$$I_1 = (n-2)\int_\Omega |\nabla y|^2 dx - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma + 2\int_\Gamma (m\cdot\nabla y)\frac{\partial y}{\partial \nu}d\Gamma. \tag{3-25}$$

Agora, analisaremos $I_2 = 2\int_\Omega \rho y'(m\cdot\nabla y')dx$. Para isso, notemos que

$$2\int_\Omega \rho y'(m\cdot\nabla y')dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \rho m_i 2\frac{\partial y'}{\partial x_i}y' dx \ \text{ e } \ \frac{\partial (y')^2}{\partial x_i} = 2\frac{\partial y'}{\partial x_i}y',$$

ou seja,

$$2\int_\Omega \rho y'(m\cdot\nabla y')dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega \rho m_i \frac{\partial (y')^2}{\partial x_i}dx. \tag{3-26}$$

Pela fórmula de Green temos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \rho m_i \frac{\partial (y')^2}{\partial x_i}dx &= -\int_\Omega |y'|^2 \frac{\partial(\rho m_i)}{\partial x_i}dx + \int_\Gamma |y'|^2 \rho m_i \nu^i d\Gamma \\ &= -\int_\Omega |y'|^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_i}m_i dx - \int_\Omega |y'|^2 \rho dx + \int_\Gamma |y'|^2 \rho m_i \nu^i d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-27}$$

Substituindo (3-27) em (3-26) obtemos

$$\begin{aligned} I_2 = 2\int_\Omega \rho y'(t)(m\cdot\nabla y'(t))dx = -\int_\Omega |y'(t)|^2(\nabla\rho\cdot m)dx - n\int_\Omega \rho|y'(t)|^2 dx \\ + \int_\Gamma \rho|y'(t)|^2(m\cdot\nu)dx. \end{aligned} \tag{3-28}$$

Para analisar $I_3 = (n-1)\int_\Omega \Delta y y dx$, recordamos que $\frac{\partial y}{\partial \nu} = -y' - f(y) - g(y')$ em Γ_0 e

$y = 0$ em Γ_1. Assim, pela fórmula de Green obtemos

$$\begin{aligned} I_3 &= (n-1)\left[-(\nabla y(t), \nabla y(t)) + \int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu} d\Gamma\right] \\ &= (1-n)||\nabla y||^2 - (n-1)\left[\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma + \int_{\Gamma_0} f(y)y d\Gamma + \int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma\right]. \end{aligned} \tag{3-29}$$

Portanto de (3-18), (3-25), (3-28), (3-29) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) = &-||\nabla y(t)||^2 - \int_\Omega \rho|y'|^2 dx - (n-1)\int_{\Gamma_0} f(y)y d\Gamma + 2\int_\Gamma \frac{\partial y}{\partial \nu}(m \cdot \nabla y) d\Gamma \\ &- \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 d\Gamma - \int_\Omega (\nabla\rho \cdot m)|y'|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-30}$$

Comparando (3-30) com as hipóteses (2-2) e (2-3) obtemos para $n \geq 2$

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq &-||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 - ||\nabla y(t)||^2 - \frac{2C_0}{\delta+2}||y(t)||^{\delta+2}_{\delta+2,\Gamma_0} + 2\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial \nu}(m\cdot\nabla y) dx \\ &- \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 dx - \int_\Omega (\nabla\rho\cdot m)|y'|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma \\ &-(n-1)\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma \end{aligned} \tag{3-31}$$

e para $n = 1$

$$\begin{aligned} \psi'(t) = &-||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 - ||\nabla y(t)||^2 + 2\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial \nu}(m\cdot\nabla y) dx - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 dx \\ &- \int_\Omega (\nabla\rho\cdot m)|y'|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma \\ &-(n-1)\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-32}$$

De (3-31) e (3-32), para $n \geq 1$ obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq &-2E(t) + 2\int_\Omega \frac{\partial y}{\partial \nu}(m\cdot\nabla y) dx - \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla y|^2 dx - \int_\Omega (\nabla\rho\cdot m)|y'|^2 dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0} (m\cdot\nu)\rho|y'|^2 d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma \\ &-(n-1)\int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-33}$$

Por outro lado temos que $\dfrac{\partial y}{\partial x_i} = \dfrac{\partial y}{\partial \nu}\nu^i$ em Γ_1 (como feito em [32]), isso implica que

$$m \cdot \nabla y = (m \cdot \nu)\frac{\partial y}{\partial \nu} \ \text{ e } \ |\nabla y|^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2, \text{ sobre } \Gamma_1. \tag{3-34}$$

De fato,

- $m \cdot \nabla y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial y}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial y}{\partial \nu}\nu^i = (m \cdot \nu)\frac{\partial y}{\partial \nu}.$
- $|\nabla y|^2 = \nabla y \cdot \nabla y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\nu^i\right)^2 = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 ||\nu||^2_{\mathbb{R}^n} = \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2.$

Assim, obtemos

$$-\int_{\Gamma}(m \cdot \nu)|\nabla y|^2 d\Gamma = -\int_{\Gamma_0}(m \cdot \nu)|\nabla y|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1}(m \cdot \nu)\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right) d\Gamma \tag{3-35}$$

e

$$\begin{aligned} 2\int_{\Gamma}\frac{\partial y}{\partial \nu}(m \cdot \nabla y)d\Gamma = & -2\int_{\Gamma_0} y'(m \cdot \nabla y)d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0} g(y')(m \cdot \nabla y)d\Gamma \\ & -2\int_{\Gamma_0} f(y)(m \cdot \nabla y)d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 (m \cdot \nu)d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-36}$$

Substituindo (3-35) e (3-36) em (3-33) obtemos

$$\begin{aligned} \psi'(t) \leq -2E(t) & - 2\int_{\Gamma_0} y'(m \cdot \nabla y)d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0} g(y')(m \cdot \nabla y)d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0} f(y)(m \cdot \nabla y)d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 (m \cdot \nu)d\Gamma - \int_{\Gamma_0}(m \cdot \nu)|\nabla y|^2 d\Gamma - \int_{\Omega}(\nabla\rho \cdot m)|y'|^2 dx \\ & + \int_{\Gamma_1}(m \cdot \nu)\rho|y'|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_0}(m \cdot \nu)\rho|y'|^2 d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0} y'y d\Gamma \\ & -(n-1)\int_{\Gamma_0} g(y')y d\Gamma. \end{aligned} \tag{3-37}$$

Notemos que, das hipóteses (3-1), e (3-2) obtemos que

- $\displaystyle\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2 (m \cdot \nu)d\Gamma \leq 0;$
- $\displaystyle -\int_{\Gamma_0}(\nabla\rho \cdot m)|y'|^2 d\Gamma \leq 0;$

- $\displaystyle\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\rho|y'|^2d\Gamma \leq 0.$

Além disso, como $m(x)\cdot\nu(x) > 0$ para todo $x\in\Gamma_0$ obtemos

- $\displaystyle\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla y|^2d\Gamma \geq m_0\int_{\Gamma_0}|\nabla y|^2$, o qual $m_0 = \min\{m(x)\cdot\nu(x); x\in\Gamma_0\} > 0.$

E como $\rho\in C^1(\bar{\Omega})$ e ν é um vetor unitário, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 1.94) obtemos

- $\displaystyle\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)\rho|y'|^2 \leq ||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}R(x^0)\int_{\Gamma_0}|y'|^2d\Gamma.$

Das estimativas acima e de (3-37) obtemos

$$\begin{aligned}\psi'(t) \leq -2E(t) - m_0\int_{\Gamma_0}|\nabla y|d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0}y'(m\cdot\nabla y)d\Gamma - 2\int_{\Gamma_0}g(y')(m\cdot\nabla y)d\Gamma\\ -2\int_{\Gamma_0}f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma + ||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}R(x^0)\int_{\Gamma_0}|y'|^2d\Gamma - (n-1)\int_{\Gamma_0}y'yd\Gamma\\ -(n-1)\int_{\Gamma_0}g(y')yd\Gamma.\end{aligned} \tag{3-38}$$

A seguir estudaremos alguns termos da desigualdade (3-38), a fim de obter estimativas. Primeiramente analisaremos $-2\displaystyle\int_{\Gamma_0}y'(m\cdot\nabla y)d\Gamma$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, Hölder e Young para $\eta > 0$ em $-2\displaystyle\int_{\Gamma_0}y'(m\cdot\nabla y)d\Gamma$, obtemos

$$\begin{aligned}-2\int_{\Gamma_0}y'(m\cdot\nabla y)d\Gamma &\leq 2R(x^0)\int_{\Gamma_0}|y'||\nabla y|d\Gamma\\ &\leq 2R(x^0)||y'(t)||_{\Gamma_0}||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}\\ &\leq \frac{R(x^0)^2}{\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0}.\end{aligned} \tag{3-39}$$

Da hipótese (2-3) temos que $0 < g(y') \leq k_2|y'|$ (pois $\xi = 0$). Assim, recordando (3-6), pela desigualdade de Hölder e a de Young para $\eta > 0$ segue que

$$\begin{aligned}(n-1)\int_{\Gamma_0}g(y')yd\Gamma &\leq (n-1)k_2\int_{\Gamma_0}|y'|^2|y|d\Gamma\\ &\leq (n-1)k_2\mu||y'(t)||_{\Gamma_0}||\nabla y||_{L^2(\Omega)}\\ &\leq \frac{((n-1)k_2\mu)^2}{4\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y||^2\\ &\leq \frac{((n-1)k_2\mu)^2}{4\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + 2\eta E(t).\end{aligned} \tag{3-40}$$

Agora, analisaremos $2\int_{\Gamma_0} f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma$. Da hipótese (2-2) e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz e Hölder para $p=q=2$, obtemos

$$2\int_{\Gamma_0} f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma \leq 2R(x^0)C_0\int_{\Gamma_0}|y|^{\delta+1}|\nabla y|d\Gamma \leq 2R(x^0)C_0||y(t)||^{\delta+1}_{2\delta+2,\Gamma_0}||\nabla y(t)||_{\Gamma_0},$$

pois $|||y|^{\delta+1}||_{\Gamma_0} = ||y(t)||^{\delta+1}_{2\delta+2}$.
Da imersão $V\hookrightarrow L^{2\delta+2}(\Gamma_0)$ temos que $||y(t)||_{2\delta+2,\Gamma_0}\leq k_0||y(t)||_V = k_0||\nabla y(t)||$, com $k_0>0$. Então

$$2\int_{\Gamma_0} f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma \leq 2R(x^0)C_0k_0||\nabla y(t)||^{\delta+1}||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}.$$

Assim, aplicando a desigualdade de Young para $\eta>0$ no segundo membro da desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
2\int_{\Gamma_0} f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma &\leq \frac{(R(x^0)C_0k_0)^2}{\eta}\left[||\nabla y(t)||^2\right]^{\delta+1} + \eta||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}\\
&= \frac{2^{\delta+1}(R(x^0)C_0k_0)^2}{\eta}\left[\frac{1}{2}||\nabla y(t)||^2\right]^{\delta+1} + \eta||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}\\
&\leq \frac{2^{\delta+1}(R(x^0)C_0k_0)^2}{\eta}E(t)^{\delta+1} + \eta||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, do Lema 3.2, temos que

$$E'(t)\leq -(1+k_1)\int_{\Gamma_0}|y'|^2d\Gamma\leq 0,$$

e integrando esta desigualdade sobre $[0,t]$, com $t<T$, obtemos $E(t)\leq E(0)$. Portanto

$$2\int_{\Gamma_0} f(y)(m\cdot\nabla y)d\Gamma \leq \frac{2^{\delta+1}(R(x^0)C_0k_0)^2}{\eta}E(0)^{\delta}E(t) + \eta||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}. \tag{3-41}$$

A seguir analisaremos $2\int_{\Gamma_0} g(y')(m\cdot\nabla y)d\Gamma$ e $(n-1)\int_{\Gamma_0} y'yd\Gamma$. Pela desigualdade de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
2\int_{\Gamma_0} g(y')(m\cdot\nabla y)d\Gamma &\leq 2k_2R(x^0)\int_{\Gamma_0}|y'||\nabla y|d\Gamma\\
&\leq 2k_2R(x^0)||y'(t)||_{\Gamma_0}||\nabla y(t)||_{\Gamma_0}\\
&\leq \frac{(k_2R(x^0))^2}{\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0}
\end{aligned} \tag{3-42}$$

e

$$
\begin{aligned}
(n-1)\int_{\Gamma_0} y' y d\Gamma &\leq (n-1)||y'(t)||_{\Gamma_0}||y(t)||_{\Gamma_0} \\
&\leq (n-1)\mu||y'(t)||_{\Gamma_0}||\nabla y(t)|| \\
&\leq \frac{((n-1)\mu)^2}{4\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y(t)||^2 \\
&\leq \frac{((n-1)\mu)^2}{4\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta 2E(t). \qquad (3\text{-}43)
\end{aligned}
$$

Comparando as estimativas encontradas em (3-39)−(3-43) com a desigualdade (3-38) obtemos

$$
\begin{aligned}
\psi'(t) \leq -2E(t) - m_0\int_{\Gamma_0}|\nabla y|^2 d\Gamma + \frac{R(x^0)^2}{\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0} + \frac{(k_2 R(x^0))^2}{\eta}||y'(t)||^2 \\
+\eta||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0} + \frac{2^{\delta+1}(R(x^0)C_0K_0)^2}{\eta}E(0)^\delta E(t) + \eta||\nabla y(t)||_{\Gamma_0} + ||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}R(x^0)||y'(t)||^2_{\Gamma_0} \\
+\frac{((n-1)\mu)^2}{4\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta 2E(t) + \frac{(k_2R(x^0))^2}{\eta}||y'(t)||^2_{\Gamma_0} + \eta||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\psi'(t) \leq -(2-4\eta - C_0^2 M(\eta))E(t) - (m_0 - 3\eta)||\nabla y(t)||^2_{\Gamma_0} + N(\eta)||y'(t)||^2_{\Gamma_0}, \qquad (3\text{-}44)
$$

sendo

$$
M(\eta) = \frac{2^{\delta+1}(R(x^0)\mu K_0)^2}{\eta}E(0)^\delta
$$

e

$$
N(\eta) = \frac{R(x^0)^2}{\eta} + \frac{(k_2R(x^0))^2}{\eta} + ||\rho||_{C^0(\bar{\Omega})}R(x^0) + \frac{((n-1)\mu)}{4\eta} + \frac{((n-1)\mu k_2)^2}{4\eta}.
$$

Escolhendo η e C_0 suficientemente pequenos tais que $C_2 = 2 - 4\eta - C_0^2 M(\eta) > 0$ e $m_0 - 3\eta > 0$, de (3-44) segue que

$$
\psi'(t) \leq -C_2 E(t) + N||y'(t)||^2_{\Gamma_0}. \qquad (3\text{-}45)
$$

Por outro lado, de (3-4) temos

$$
E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon\psi'(t).
$$

Consequentemente, do Lema 3.2 e de (3-45) obtemos

$$E'_{\varepsilon}(t) \leq -C_2\varepsilon E(t) - (1 + k_1 - \varepsilon N)||y'(t)||^2_{\Gamma_0}.$$

Considerando $\varepsilon_1 = \dfrac{1+k_1}{N}$, para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_1]$, obtemos

$$E'_{\varepsilon}(t) \leq -\varepsilon C_2 E(t).$$

Concluindo a prova da proposição. □

Teorema 3.5. *Sob as hipóteses do Teorema 2.4 e a hipótese (3-2), se $\xi = 0$ e C_0 é suficientemente pequeno então obtemos o seguinte decaimento da energia*

$$E(t) \leq 3E(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}C_2 t\right), \quad \textit{para todo} \;\; t \geq 0, \;\; \textit{e para todo}\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_0], \tag{3-46}$$

sendo ε_0, C_2 constantes positivas.

Demonstração. Com efeito, definamos $\varepsilon_0 = \min\{\dfrac{1}{2C_1}, \varepsilon_1\}$ e consideramos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. Da Proposição 3.3 temos que $|E_{\varepsilon}(t) - E(t)| \leq \varepsilon C_1 E(t)$, para todo $t \geq 0$, isso implica que

$$(1 - \varepsilon C_1)E(t) \leq E_{\varepsilon}(t) \leq (1 + \varepsilon C_1)E(t). \tag{3-47}$$

Como $\varepsilon \leq \dfrac{1}{2C_1}$, obtemos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq (1 - \varepsilon C_1)E(t) \leq E_{\varepsilon}(t) \leq (1 + \varepsilon C_1)E(t) \leq \frac{3}{2}E(t),$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}E(t) \leq E_{\varepsilon}(t) \leq \frac{3}{2}E(t) \leq 2E(t), \quad \forall t \geq 0. \tag{3-48}$$

Da desigualdade (3-48) temos que $E_{\varepsilon}(t) \leq 2E(t)$, consequentemente

$$-\frac{1}{2}\varepsilon C_2 E_{\varepsilon}(t) \geq -\varepsilon C_2 E(t). \tag{3-49}$$

Da Proposição 3.4 e de (3-49) obtemos

$$E'_{\varepsilon}(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}C_2 E_{\varepsilon}(t), \quad \forall t \geq 0,$$

isto é,

$$E'_\varepsilon(t) + \frac{\varepsilon}{2}C_2E_\varepsilon(t) \leq 0, \ \ \forall t \geq 0. \tag{3-50}$$

Multiplicando $\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right)$ em ambos os lados de (3-50) obtemos

$$E'_\varepsilon(t)\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right) + \frac{\varepsilon}{2}C_2E_\varepsilon(t)\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right) \leq 0,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}\left(E_\varepsilon(t)\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right)\right) \leq 0. \tag{3-51}$$

Integrando (3-51) sobre $[0,t]$, com $T>0$, obtemos

$$E_\varepsilon(t)\exp\left(\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right) - E_\varepsilon(0)\exp(0) \leq 0,$$

isso implica que

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right). \tag{3-52}$$

De (3-48) temos que $\frac{1}{2}E(t) \leq E_\varepsilon(t)$, isto é, $E(t) \leq 2E_\varepsilon(t)$. E ainda $E_\varepsilon(t) \leq \frac{3}{2}E(t)$. Comparando com (3-52) obtemos

$$E(t) \leq 2E_\varepsilon(t) \leq 2E_\varepsilon(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right) \leq 3E(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right).$$

Portanto

$$E(t) \leq 3E(0)\exp\left(-\frac{\varepsilon}{2}C_2t\right).$$

Concluindo a prova do decaimento da energia para a solução regular do problema $(*)$. □

Teorema 3.6. *Sob as hipóteses do Teorema 2.5 e a hipótese (3-2), se $\xi = 0$ e C_0 é suficientemente pequeno então a solução fraca do problema $(*)$ decai uniformemente, em outras palavras,*

$$E(t) \leq 3E(0)\exp(-\theta t), \ \ \textit{para todo} \ \ t \geq 0,$$

e θ uma constante positiva.

Demonstração. Recordamos que a solução fraca foi obtida como limite de soluções regulares. Para cada $\mu \in \mathbb{N}$, existe uma solução y_μ para o problema $(*)$ na classe de funções do Teorema 2.4. Então do Teorema 3.5, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, a solução regular y_μ satisfaz

$$E_\mu(t) = \frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y'_\mu(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y_\mu(t)||^2 + \frac{C_0}{\delta+2}||y'_\mu(t)||^{\delta+1}_{\delta+1,\Gamma_0} \leq 3E_\mu(0)\exp(-\theta t). \quad \text{(3-53)}$$

Considerando δ suficientemente pequeno tal que $\delta + 1 \leq 2$, temos que $L^2(\Gamma_0) \hookrightarrow L^{\delta+1}(\Gamma_0)$, então $L^2(0,T;L^2(\Gamma_0)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^{\delta+1}(\Gamma_0))$ (veja Teorema 1.33 e Teorema 1.74). Assim das convergências (2-173)$-$(2-174) segue que

$$\begin{aligned} y_\mu &\longrightarrow y \text{ em } L^2(0,T;V); \\ \sqrt{\rho}y'_\mu &\longrightarrow \sqrt{\rho}y' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)); \\ y'_\mu &\longrightarrow y' \text{ em } L^2(0,T;L^{\delta+1}(\Gamma_0)), \end{aligned}$$

consequentemente,

$$y_\mu \rightharpoonup y \text{ em } L^2(0,T;V), \quad \text{(3-54)}$$

$$\sqrt{\rho}y'_\mu \rightharpoonup \sqrt{\rho}y' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \text{(3-55)}$$

$$y'_\mu \rightharpoonup y' \text{ em } L^2(0,T;L^{\delta+1}(\Gamma_0)). \quad \text{(3-56)}$$

Aplicando o Teorema 1.12 em (3-54)$-$(3-56) temos que

- $||\nabla y(t)||^2 \leq \liminf ||\nabla y_\mu(t)||^2$;
- $||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 \leq \liminf ||\sqrt{\rho}y'_\mu(t)||^2$;
- $||y'(t)||^{\delta+1} \leq \liminf ||y'_\mu(t)||^{\delta+1}$.

Das desigualdades acima e de (3-53) obtemos

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y'(t)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y(t)||^2 + \frac{C_0}{\delta+2}||y'(t)||^{\delta+1}_{\delta+1,\Gamma_0} \\ &\leq \liminf_{\mu\to\infty} E_\mu(t) \\ &\leq 3\exp(-\theta t)\liminf_{\mu\to\infty} E_\mu(0). \end{aligned} \quad \text{(3-57)}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} E_\mu(0) &= \frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y'_\mu(0)||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y_\mu(0)||^2 + \frac{C_0}{\delta+2}||y'_\mu(0)||^{\delta+1}_{\delta+1,\Gamma_0} \\ &= \frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y^1_\mu||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y^0_\mu||^2 + \frac{C_0}{\delta+2}||y^1_\mu||^{\delta+1}_{\delta+1,\Gamma_0}. \end{aligned} \tag{3-58}$$

Além disso, vimos que $y^0_\mu \longrightarrow y^0$ em V e $y^1_\mu \longrightarrow y^1$ em $L^2(\Omega)$. Desta última convergência obtemos que $y^1_\mu \longrightarrow y^1$ em $L^{\delta+1}(\Gamma_0)$ uma vez que consideramos δ tal que $\delta + 1 \leq 2$. Assim, substituindo (3-58) em (3-57) e fazendo o limite para $\mu \longrightarrow \infty$, obtemos

$$E(t) \leq 3\exp(-\theta t)\left[\frac{1}{2}||\sqrt{\rho}y^1||^2 + \frac{1}{2}||\nabla y^0||^2 + \frac{C_0}{\delta+2}||y^1||^{\delta+1}_{\delta+1,\Gamma_0}\right] = 3\exp(-\theta t)E(0).$$

isto é,

$$E(t) \leq 3E(0)\exp(-\theta t).$$

Finalizando a prova do decaimento da energia para a solução fraca. $\square$

Com isso, concluímos a proposta deste trabalho.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Pure and Applied Mathematics., Academic Press, INC., 1975. 2

[2] BREZIS, H. **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential eqations**. Springer, New York, 2011.

[3] BREZIS, H. **Operateurs Maximaux Monotones et Semigoups de Contractions dans les Spaces de Hilbert.** Amsterdam. North Holland Publishing Co. 1973.

[4] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução a Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev.** Eduem, Maringá, PR, 2009.

[5] CAVALCANTI M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **On solvability of degenerete nonlinear equations on manifolds.** Differential Integral Equations, 13 (2000) 1445−1458.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. D.; KOMORNIK, V. **Introdução a Análise Funcional.** Eduem, Maringá, PR, 2011.

[7] CAVALCANTI , M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SANTOS, M. L. **Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary.** Applied Mathematics and computation, v. 150, p. 439-465, 2004.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.; SORIANO, J. A. **On existence and asymtoptic stability of solutions of the degenerate wave equa-**

tion with nonlinear boundary conditions. Journal of Mathematical Analysis and Aplications, v. 281, p. 108−124, 2001.

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; PRATES FILHO J. S.; SORIANO J. A. **Existence and uniform decay os solutions of the degenerate equation with nonlinear boundary memory source term.** Nonlinear Anal. 38 (1999) 281−294.

[10] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; MEDEIROS L. A.; SORIANO J.A., **On existence and uniform decay os a hyperbolic equation with nonlinear conditions.** Southeast Asian Bull. Math. 24 (2000) 183−199.

[11] CHEN, G. **A note on the boundary stabilization of the wave equation.** SIAM J. Control Optim. 19 (1981).

[12] CHEN, G. **Control and stabilization for the wave equation. in a bounded domain.** SIAM J. Control Optim. 17 (1979) 114−122.

[13] CHEN, G. **Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in bounded domain.** J. Math. Pures Appl. 58 (1979) 249−273.

[14] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations.**Mac Graw-Hill. New York, 1955.

[15] CONRAD, F; RAO, B. **Decay of solutions of the wave equation in a star-shaped domain with nonlinear boundary feedback.** Asymptotic Anal. 7(1993) 159−177.

[16] EVANS, L. **Partial Differential Equations.** Graduate studies in mathematics; v. 19. 2nd ed. American Mathematical Society, 2010.

[17] FENG, B. **General decay for a viscoelastic wave equation with density and time delay term in $\mathbb{R}^n$.** Taiwanese J. Math. v. 22, n. 1, p. 205-223, 2018.

[18] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.** Classics in Mathematics. Springer. Berlin, 2001.

[19] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications.** John Wiley and Sons. New Dehli, 1989.

[20] KOMORNIK, V.; ZUAZUA, E. **A direct method for boundary stabilization of the wave equation**. J. Math. Pures Appl. 69 (1990) 33-54.

[21] KOMORNIK, V.; RAO. **Boundary stabilization of compactly coupled wave equations.** Asymtotic Anal. 14(1997) 339−359.

[22] KREYSZIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications.** Wiley Classics Library. Wiley, 1989.

[23] LAGNESE, J. E. **Decay of solution of wave equations in a bounded region with boundary dissipation.** J. Differential Equations 50 (1983) 163−182.

[24] LAGNESE, J. E. **Note on boundary stabilization of wave equations.** SIAM J. Control Optim. 26 (1988) 1250−1257.

[25] LASIECKA, I; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization os semilinear wave equation with nonlinear boundary damping.** Differential Integral Equations 6 (1993) 507−533.

[26] LIMA, E. L. **Análise real.** v.2. 6 ed. Rio de Janeiro: IMPA,2013.

[27] LIONS, J. L. **Problèmes aux Limites non Homogènes** Vol. I. Aplications, Dunod, Paris, 1968.

[28] LIONS, J. L. **Quelques Métodes de Résolution des Ploblèmes Aux Limites Non Linéares.** Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[29] MEDEIROS, L. A. **Iniciação aos espaços de Sobolev e Aplicações.** Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[30] MEDEIROS, L. A. **Tópicos em Equações Diferenciais Parciais**. Parte I. IM-UFRJ, Rio de Janeiro . 2005.

[31] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (Iniciação aos Problemas Elíticos Não Homogêneos).** IM-UFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

[32] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Hidden regularity for semilinear hyperbolic partial diferential equations.** Ann. Fac, Sci. Toulouse. v. 9 (1), p. 103-120, 1988.

[33] MILLA MIRANDA, M. **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev.** Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[34] MONTEIRO, E. **Existência e comportamento assintótico das soluções de uma equação da onda com dissipação não linear na fronteira e termo de fonte.** Dissertação de Mestrado em Matemática. Universidade Estadual de Maringá. Maringá, 2006.

[35] QUINN, J.; RUSSEL, D.L. **Asymptotic stability and energy dacay for solutions of hyperbolic equations, with boundary damping.** Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 77 (1987) 97−127.

[36] RIVERA, J. **Teoria das distribuições e equações diferenciais parciais.** UFRJ, Rio de Janeiro, 2004.

[37] SUN, F.; WANG, M. **Global solutions for a nonlinear hyperbolic equation with boundary memory source term.** J. Inequal. Appl., Art. ID 60734, p. 1-16, 2006.

[38] WHEEDEN, R. L., AND ZYGMUND, A. **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis**. Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC; 2 edition, 2015.

[39] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications.** Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.