UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Equação de Korteweg-de Vries em um intervalo limitado.

MARCOS VINICIUS FAGUNDES PADILHA

Maringá - PR
2014

Equação de Korteweg-de Vries em um intervalo limitado.

MARCOS VINICIUS FAGUNDES PADILHA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Gleb Germanovitch Doronin.
Co-orientador: Nikolai Andreevitch Larkin

Maringá - PR
2014

Agradecimentos

Aos meus orientadores Gleb Germanovitch Doronin e Nikolai Andreevitch Larkin pelo conhecimento compartilhado.

À CAPES pelo apoio financeiro e pela recompensadora oportunidade concedida aos medalhistas OBMEP.

Marcos Vinicius Fagundes Padilha.

Trabalho dedicado aos meus avós maternos Leonilda de Britto Fagundes e Telmo Boaventura Fagundes.

Resumo

Neste trabalho, iremos estudar a boa colocação e o comportamento assintótico de soluções da equação de Korteweg-de Vries em um intervalo limitado. De fato, primeiramente, analisaremos o problema linear

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{1}$$

onde a função $a : [0, L] \to \mathbb{R}^+$ representa um possível efeito de amortecimento. O estudo da boa colocação é feito através da teoria de semigrupos, aplicando o Teorema de Lumer-Phillips e técnicas de integração. Veremos que se $a(x) \equiv 0$ a estabilização dependerá do valor assumido para o comprimento L. Mais precisamente, se $L \in \mathcal{N} = \{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2},\ k, l \in \mathbb{N}\}$ então nem sempre a energia associada ao sistema terá um decaimento. No caso em que $L \notin \mathcal{N}$ iremos provar que sempre há o decaimento exponencial de soluções. Porém, se assumirmos o termo de amortecimento $a(x) \geq a_0 > 0$ em um conjunto aberto $\omega \subset [0, L]$, com $a(x) \in L^\infty(0, L)$, iremos mostrar que para qualquer dado inicial $u_0 \in L^2(0, L)$ a energia do sistema decairá exponencialmente.

Finalmente, faremos uma análise do problema não linear da equação, dado por

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{2}$$

Demonstrando a boa-colocação através do Teorema de ponto fixo de Banach, provaremos o resultado principal do trabalho, o decaimento exponencial da energia do sistema quando $a(x) \in L^\infty$ e $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \omega$, onde ω é um subconjunto aberto de $[0, L]$ contendo dois intervalos $(0, \delta)$ e $(L - \delta, L)$ para algum $\delta > 0$.

Palavras-chave: Equação de Korteweg-de Vries, KdV, semigrupos, estabilização, decaimento, damping.

Abstract

This work is concerned with the well-posedness and asymptotic behavior of solutions for the Korteweg-de Vries equation posed on a bounded interval. First, we study the folowing linear problem:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, \quad x \in (0,L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

where the function $a : [0,L] \to \mathbb{R}^+$ indicates a possible damping effect. The study of well-posedness is determined by using the semigroup theory, more precisely, the Lumer-Phillips theorem and some integration tools. We will see that if $a(x) \equiv 0$, the stabilization depends on $L > 0$. Namely, if $L \in \mathcal{N} = \{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2},\ k, l \in \mathbb{N}\}$, then the energy can not decay. When $L \notin \mathcal{N}$, we prove that every solution has exponential stabulity. However, taking $a(x) \geq a_0 > 0$ in an open interval $\omega \in [0,L]$ with $a(x) \in L^\infty(0,L)$, we show that for all initial values $u_0 \in L^2(0,L)$ and for all $L > 0$, the energy of system possesses an exponential decay.

Next, we are going to study the non-linear problem given by

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, \quad x \in (0,L), \quad t > 0 \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{4}$$

Well-posedness of (4) is determined employing the Banach fixed point theorem. Finally, we prove the principal result, that is an exponential decay of the energy provided $a(x) \in L^\infty$ and $a(x) \geq a_0 > 0$ for all $x \in \omega$, where ω is an open subset of $[0,L]$ containing two open intervals $(0,\delta)$ e $(L-\delta, L)$ for some $\delta > 0$.

Key-words: KdV equation, semigroups, asymptotic behavior, damping.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Diariamente convivemos intensivamente com movimentos de ondas, como no tráfego de veículos, marés, propagação da luz e som. Casualmente podemos nos deparamos com notícias de tsunamis e danos causados por ondas sônicas. De fato, o assunto é intensivamente estudado em quase todos ramos da ciência, pela grande gama de aspectos naturais onde se encontram e pelos fenômenos que as envolvem, como difração, refração, reflexão e ressonância, as ondas podem significar grandes catástrofes e ao mesmo tempo contribuir para a tecnologia de forma grandiosa.

Não sendo diferente, na Matemática, há um rico desenvolvimento dos conceitos, técnicas e tratamentos. Nosso objetivo é fazer um estudo teórico da equação de Korteweg-De Vries (ou simplesmente KdV), uma forma de descrever ondas em um canal de águas razas. A origem desse modelo, foi por volta de 1834 por John Scott Russel, mais tarde também estudada por George Airy, George Stokes e Joseph Boussinesq. Baseado nos trabalhos de Boussinesq no final do século XIX, os matemáticos holandeses Diederik Korteweg e Gustav de Vries apresentaram a equação que hoje chamamos a KdV [KDV], e nos dias atuais tem sido objetivo de muitos pesquisadores na área de análise de equações diferenciais.

1.1 Conceitos básicos sobre ondas

Não há como, e nem seria uma tarefa fácil determinar uma definição simples para "onda". Diremos apenas que uma onda é uma perturbação que se propaga através do tempo e do espaço. Dessa forma fica mais simples englobar fenômenos como sendo uma onda. Um fato muito interessante e motivador é que uma onda pode se propagar transportando energia de um ponto até outro sem deslocar as partículas do meio, ou seja, sem nenhum ou baixo transporte de massa.

Agora veremos alguns conceitos físicos básicos sobre ondas

- **Amplitude** (A) de uma onda é a medida de um distúrbio em um meio durante um ciclo de onda. Por exemplo, em uma corda, a amplitude será a distância que a corda se desloca de sua posição de repouso. A amplitude pode ser constante ou pode variar com o tempo.

- **Período** (T) é chamado o tempo (em segundos) de um ciclo completo de uma oscilação da onda.

- **Frequência** (F) expressa quantas vezes (em hertz) por um segundo a onda completou um ciclo, ou especificamente
$$F = \frac{1}{T}.$$

- A **frequência angular** (ω) é uma medida (em radianos) relacionada a frequência, ou ao período, dada por
$$\omega = 2\pi F = \frac{2\pi}{T}$$

- O **comprimento de onda** (λ) é a distância (em metros) que uma forma inteira da onda leva pra completar um ciclo. Sendo v a velocidade com que a onda viaja, o comprimento é dado por
$$\lambda = \frac{v}{F}$$

1.2 Conceitos matemáticos

Em [12], as ondas são distinguidas em duas classes principais. A primeira é descrita por equações diferenciais parciais hiperbólicas, diremos **ondas hiperbólicas**. A segunda não pode ser caracterizada com a mesma simplicidade, e por ser motivada pelos casos mais simples de ondas dispersivas em problemas lineares, iremos chamar essa classe de **ondas dispersivas**. Vale citar que alguns movimentos ondulatórios podem ser caracterizados pelas duas classes e em raras exceções por nenhuma delas.

O mais simples protótipo para ondas hiperbólicas é dado pela equação do transporte
$$u_t + au_x = 0.$$

Um bom modelo (unidimensional) para ondas hiperbólicas pode ser dado pela equação da onda
$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

Já quando falamos em ondas dispersivas nos baseamos no *tipo de solução* ao invés de um *tipo de equação*. Chamamos de sistema oscilatório, um sistema que admita soluções da forma
$$u = a\cos(kx - \omega t), \tag{1.1}$$
onde a frequência ω é uma função real (determinada pelo sistema) da constante k chamada **número de onda**. A **velocidade de fase** é dada por $\omega(k)/k$. Diremos que uma onda é *dispersiva* se a velocidade de fase for real e não é constante com respeito a k. Chamaremos assim, pois uma solução geral seria composta da superposição de várias ondas dessa forma com diferentes valores de k. Se a velocidade de fase $\omega(k)/k$ não for

a mesma para cada k, ou seja, $\omega \neq c_0 k$ (onde c_0 é alguma constante), as ondas com números k diferentes se propagarão a velocidades diferentes e vão se dispersar. É conveniente modificar a definição e dizer que um sistema linear oscilatório é dispersivo se $\omega'(k)$ não é constante, isto é, $\omega''(k) \neq 0$.

Note que (1.1) é tanto uma solução da equação do transporte com $\omega(k) = ak$ quanto da equação da onda com $\omega(k) = \pm ck$. Mas esses casos são excluídos da classificação dispersiva já que $\omega''(k) = 0$.

1.3 Ondas planas e o fenômeno da dispersão

Fisicamente, dispersão trata-se de que, quando em um grupo de ondas, se tiverem frequências diferentes, se propagam com velocidades diferentes. Devido a essa diferença de velocidade, as ondas do grupo se dispersam no meio. Para definirmos matematicamente o fenômeno de forma mais precisa, faremos uso do conceito de onda plana. Uma onda plana unidimensional é uma função da forma

$$u(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)},$$

onde A representa a amplitude, k o número de onda e ω é a frequência angular. Uma onda plana é dispersiva quando for possível escrever a frequência angular como uma função real derivável do número de onda, $\omega(k)$, e sua derivada $\omega'(k)$ não for constante.

No caso unidimensional, consideremos uma EDP na forma $F(\partial_x, \partial_t)u(x,t) = 0$, onde F é um polinômio das derivadas parciais. Como derivadas em x de u evidenciam ik e derivadas em t evidenciam $-i\omega$, a EDP terá solução do tipo onda plana se, e somente se, $F(ik, -i\omega) = 0$. Alguns exemplos:

(a) Na equação do transporte, temos $F = \partial_t + a\partial_x$ e assim $F(ik, -i\omega) = -i\omega + aik$. Isso nos dá a relação de dispersão $\omega(k) = ak$ que é uma função real, porém $\omega''(x) = 0$.

(b) Na equação do calor, temos $F = \partial_t - \partial_x^2$ e assim $F(ik, -i\omega) = -i\omega + k^2$. Isso nos dá a relação de dispersão $\omega(k) = -ik^2$ que não é uma função real.

(c) Na equação da onda, temos $F = \partial_t^2 - c^2\partial_x^2$ e assim $F(ik, -i\omega) = -\omega^2 + c^2k^2$. Temos então a relação de dispersão $\omega(k) = \pm ck$ que não é uma função.

(d) Para equação de Airy, temos $F = \partial_t + \partial_x^3$ e assim $F(ik, -i\omega) = -i\omega - ik^3$. O que nos dá a relação de dispersão $\omega(k) = -k^3$ que é uma função real com $\omega'' = -6k \neq 0$.

(e) Para a equação de Schrödinger linear, temos $F = i\partial_t + \partial_x^2$ e assim $F(ik, -i\omega) = \omega - k^2$. Por relação de dispersão temos $\omega(k) = k^2$ que é uma função real com $\omega'' = 2 \neq 0$.

1.3.1 Ondas solitárias

A mais antiga citação documentada sobre "sólitons" foi feita em 1834 pelo cientista e engenheiro escocês John Scott Russel, acerca de sua observação do movimento de uma balsa no canal de Edinburgh, em Glasgow. A balsa era puxada por dois cavalos, um em cada margem do estreito canal, quando parou bruscamente. Segundo suas próprias palavras "*a massa de água que se acumulava na frente da balsa em movimento, em um estado de violenta agitação, seguiu em alta velocidade, assumindo a forma de uma grande elevação solitária, uma montanha de água, lisa e bem definida, que continuou seu curso ao longo do canal, aparentemente sem mudar sua forma ou diminuir sua velocidade*"([10]). Russell a seguiu a cavalo, por mais de 3km, correndo a uma velocidade de aproximadamente 15km/h.

Russell teve a oportunidade de observar a onda, que no início chamou de "onda de translação"e, posteriormente, "onda solitária". E não foi por acaso, Russel trabalhava em um estudo sobre desenho de cascos para barcaças e a essa altura, já havia realizdo experimentos em outros canais, lagos e rios.

O curioso é que essa onda não se deformava por uma boa distância, assim Russell realizou uma série de experimentos e descobriu como reproduzi-las; construindo um canal raso contendo um anteparo em uma de suas extremidades permitindo acumular água. Retirando o anteparo bruscamente a massa de água era liberada, fazendo com que uma onda solitária se deslocasse na direção da extremidade oposta. A partir de experimentos dessa forma, foi possível deduzir uma primeira fórmula: $c^2 = g(h_0 + a)$ onde c é a velocidade da onda, a é sua altura em relação ao nível da água em repouso e a h_0 a profundidade. Mas a fórmula provocou polêmica, pois entrava em contradição com a equação de Airy, que era dada puramente por argumentos teóricos. Russel tentou de diversas formas modelar matematicamente sua onda solitária. Desenvolveu teoria para ondas solitárias formadas por ar e éter e utilizou para calcular a espessura da atmosfera com sucesso e sem sucesso, calcular o tamanho do universo.

Russel faleceu em 1882 sem ter obtido sua fórmula matemática que descrevesse a onda solitária. Mas, em 1895, os matemáticos holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries, deduziram a equação para a propagação de ondas em águas rasas. A partir dessa equação, hoje conhecida KdV, é possível determinar a fórmula para o perfil das ondas solitárias.

Com efeito, seja um referencial que se move em um canal de profundidade h, a KdV é expressa por

$$u_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{h}}\left[\frac{1}{2}u^2 + \frac{3}{2}\alpha u + \frac{1}{3}\beta u_{xx}\right]_x \tag{1.2}$$

onde $u(x,t)$ representa a elevação da água com relação ao nível de equilíbrio no momento $t > 0$ da posição espacial $x \in \mathbb{R}$ do canal. O coeficiente $\alpha > 0$ é a constante de propulsão linear, $g > 0$ é a constante gravitacional e $\beta = \frac{h^3}{3} - \frac{Th}{g\rho}$ é constante relacionada às forças capilares do tensor T com densidade $\rho > 0$.

Do ponto de vista da análise matemática, os coeficientes na KdV não representam um papel fundamental, dessa forma podemos escolhe-los de forma conveniente através de mudanças de variáveis para facilitar o cálculo ou as demonstrações.

Iremos por hora, considerar a equação $u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0$, e iremos procurar alguma solução do tipo onda solitária, isto é, satisfazendo as condições:
(i) Representa uma onda de forma permanente, ou seja, é da forma $v(x-ct)$ onde $c \in \mathbb{R}$;
(ii) É localizada, ou seja, $v(s) \to 0$, assim como todas as suas derivadas, quando $|s| \to \infty$.

Utilizando (i) temos $-cv' + 6vv' + v''' = 0$, daí

$$-cv' + 3(v^2)' + v''' = 0,$$

$$(-cv + 3v^2 + v'')' = 0.$$

O que implica

$$-cv + 3v^2 + v'' = k_1$$
$$v'' = -3v^2 + cv + k_1$$

Fazendo a mudança $v' = f$ e encarando f como uma função de v obtemos

$$f\frac{df}{dv} = -3v^2 + cv + k_1$$

$$fdf = (-3v^2 + cv + k_1)dv$$
$$\frac{f^2}{2} = -v^3 + \frac{cv^2}{2} + k_1 v + k_2.$$

Fazendo uso de (ii), temos $k_1 = k_2 = 0$. Assim, chegamos à equação separável

$$\frac{dv}{ds} = v(-2v + c)^{1/2}$$

onde $s = x - ct$. O problema fica então reduzido a

$$s = -\int_0^{v(s)} \frac{dz}{z(c-2z)^{1/2}} + k.$$

Considerando $z = \frac{c}{2} sech^2(\theta)$, temos

$$dz = -csech^2(\theta)\, tanh(\theta)\, d\theta$$

e

$$z(c-2z)^{1/2} = \frac{c^{3/2}}{2} sech^2(\theta)\, tanh(\theta).$$

Daí

$$
\begin{aligned}
s = -\int_0^{v(s)} \frac{dz}{z(c-2z)^{1/2}} + k &= -\int_0^{\theta_1} \frac{-c sech^2(\theta)\, tanh(\theta)\ d\theta}{\frac{c^{3/2}}{2} sech^2(\theta)\, tanh(\theta)} + k \\
&= -\int_0^{\theta_1} \frac{-c}{\frac{c^{3/2}}{2}}\ d\theta + k \\
&= \frac{2\theta_1}{\sqrt{c}} + k,
\end{aligned}
$$

onde θ_1 é dado implicitamente pela relação

$$\frac{c}{2} sech^2(\theta_1) = v(s).$$

Combinando os resultados, finalmente obtemos

$$v(s) = \frac{c}{2} sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(s-k)\right)$$

então

$$v(x,t) = \frac{c}{2} sech^2\left(\frac{\sqrt{c}}{2}(x-ct-k)\right),$$

onde k é uma constante arbitrária.

A solução nos mostra uma relação direta entre a amplitude e a velocidade de propagação da onda, também podemos notar que ela não apresenta um decaimento com o passar do tempo.

1.3.2 Observações sobre modelagem

Como vimos na seção anterior, a KdV foi considerada em um domínio ilimitado, aparecendo na forma

$$u_t + 6uu_x + u_{xxx} = 0, \ \ (x,t) \in (-\infty, +\infty) \times [0, +\infty). \tag{1.3}$$

Note que a EDP em (1.3) foi obtida de (1.2), escolhendo os coeficientes de forma conveniente, o que do ponto de vista da análise, não influencia nas demonstrações, pois trata-se de uma mudança de variável $x \mapsto x - b(\alpha)t$, onde $b(\alpha)$ representa uma constante.

Com o avanço da tecnologia e os computadores tendo se tornado uma ferramenta poderosa para simulações numéricas, a equação KdV deve ser acoplada a um sistema, para o melhor uso dessa ferramenta. Para o computador fica impossível distinguir o valor do domínio até o infinito, sendo assim escolhemos um valor para o qual o domínio será limitado, o que chamamos de truncamento do domínio, o tornando assim limitado. Na prática, a maioria dos fenômenos acontecem em domínios limitados. De fato, o canal de Edinburgh é longo, mas finito, os fios de supercondutores são longos, mas finitos, etc.

Agora, trabalhando com $x \in (0, L)$, devemos investigar se um sistema formado pela KdV ainda faria sentido matematicamente, ou seja, se ainda existirá uma solução e se tal solução é única. Para isso, devemos impor corretamente as tal chamadas "condições de fronteira", isto é, os valores que a solução admite quando x está próximo dos extremos $x = 0$ ou $x = L$. Quando a solução $u(x,t)$ da equação for contínua e limitada, seria como simplesmente tomar

$$\lim_{x \to 0} u(x,t) \text{ ou } \lim_{x \to L} u(x,t).$$

Mas, com o avanço da teoria de distribuições e dos espaços de Sobolev no século XX, atualmente procuramos soluções do sistema não tão rigorosas, que não são necessariamente contínuas, e nesse caso não podemos simplesmente garantir a existência do limite. Para tal, existe o conceito de **traço** (ver [20]), e assim escreveremos em nosso sistema simplesmente $u(0,t)$ e $u(L,t)$ para representar o traço da função.

Na teoria clássica, se diz que as condições de fronteira devem retratar o fato de que a elevação das ondas sob as paredes é zero, ou imitar a absorção de ondas viajando através das fronteiras para o domínio exterior. Assim, do ponto de vista natural (como se trata de um canal de águas razas ou eventos que também tem essa característica), iremos adotar como as condições na fronteira as seguintes relações:

$$u(0,t) = 0 \text{ e } u(L,t) = 0.$$

Esses dados representam o que chamamos de valores de fronteira (ou de contorno, no caso em que envolvem mais de uma variável para o espaço), e para que o modelo matemático esteja bem colocado adicionaremos o terceiro valor, dado por

$$u_x(L,t) = 0,$$

onde o termo u_x representa a derivada em relação a x, como definida nas preliminares. O que do ponto de vista natural, também faz sentido, tendo em vista que a derivada em relação a variável espacial significa a variação, por exemplo, de elevação da onda naquele ponto, que representa um ponto ao fim do canal, ilustrando a ideia de que o canal, no caso, é bastante longo.

Sendo $x \in (0, L)$ e $t > 0$, surge imediatamente uma correção no modelo (1.3): a mudança de variável $x \mapsto x - bt$ em (1.3), acima citada, resulta em uma mudança de domínio, que se torna "não cilíndrico". Isto é, a posição das fronteiras do domínio varia com o tempo, o que fica inaceitável para a modelagem, por exemplo, de um canal em Edinburgh. Portanto, para trabalhar em um domínio limitado devemos analisar a KdV com o fator u_x presente da equação, o modelo até então a ser estudado aparece com os valores iniciais e de contorno seguintes:

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \ x \in (0, L) \subset \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in (0, L). \end{cases} \tag{1.4}$$

Outro conceito importante que será analisado é o efeito de algum mecanismo de amortecimento (ou do inglês: damping), pouco sabemos fisicamente o que nosso mecanismo representa, ele pode ser comparado como algum tipo de atrito. No problema, ele será representado pela adição do fator $a(x)u$ na KdV, onde $a(x) \in L^\infty(0, L)$ é uma função não negativa, veremos que dependendo da condição estabelecida para o damping o comportamento da energia do sistema será alterado. Tornando o problema principal

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, \ x \in (0, L) \subset \mathbb{R}, \ t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = u_x(L, t) = 0, \ t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \ x \in (0, L). \end{cases} \tag{1.5}$$

onde $a(x) \in L^\infty(0, L)$ e $a(x) \geq 0$ para todo $x \in (0, L)$.

1.3.3 Resultados principais

Assumindo que (1.4) possui soluções suaves, multiplicando por u, integrando formalmente em $(0, L)$ e aplicando as condições de fronteira obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2(x, t)\, dx = -\frac{1}{2}u_x^2(0, t),$$

o que representa a variação da energia do sistema dada por $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x, t)dx$ em função do tempo. Daí, se $u_x(0, t) \neq 0$, a energia do sistema decai com o passar do tempo. Entretanto, se $u_x(0, t) \equiv 0$, temos uma lei de conservação de energia $\frac{1}{2}\int_0^L u^2(x, t)dx = \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2(x)dx$, ou seja, a energia associada a (1.4) é uma constante ao longo do tempo. A análise detalhada dessas duas situações é o objetivo da nossa dissertação, bem como o estudo de possíveis condições sobre mecanismo de amortecimento para garantir a dissipação da energia, independente das restrições sobre o comprimento do intervalo $(0, L) \subset \mathbb{R}$.

A maior parte do conteúdo da presente dissertação é baseada no trabalho de Gustavo Perla Menzala, Carlos Frederico Vasconcellos e Enrique Zuazua ([1]), no qual, o sistema elaborado para a KdV linearizada, dado por

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \, x \in (0, L), \, t > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = u_x(L, t) = 0, \, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \, x \in (0, L), \end{cases} \tag{1.6}$$

tem sua boa colocação demonstrada praticamente como consequência da teoria de semigrupos. Iremos tratar a KdV já assumindo a atuação do termo não negativo de amortecimento, sendo ele $a(x)u$, obtendo o sistema

$$
\begin{cases}
u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, \ x \in (0, L), \ t > 0, \\
u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \ t > 0, \\
u(x,0) = u_0(x), \ x \in (0, L),
\end{cases}
\tag{1.7}
$$

onde $a(x) \in L^\infty(0, L)$, e no caso de $a(x) \equiv 0$ o sistema coincide com (1.6).

Já no estudo do decaimento exponencial do sistema (1.6), são utilizados resultados importantes do trabalho de Lionel Rosier ([2]), onde a desigualdade chamada de observabilidade

$$
\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq C\|u_x(0,t)\|_{L^2(0,T)}
$$

faz um papel fundamental. Em síntese, Rosier mostrou que a desigualdade é válida se, e somente se, o comprimento L em questão não pertence a um conjunto crítico, dado por

$$
\mathcal{N} = \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2}; \quad k, l \in \mathbb{N} \right\}.
$$

Vale destacar que, na nossa dissertação, deduzimos este conjunto crítico de forma inédita e detalhada, utilizando argumentos de álgebra linear. Tendo em mãos a desigualdade de observabilidade, chegaremos ao decaimento exponencial do sistema (1.6) quando $L \notin \mathcal{N}$, utilizando alguns resultados da teoria de semigrupos.

Para o sistema (1.7), com o mecanismo $a(x) \geq a_0 > 0$ para alguma constante a_0, em algum intervalo aberto $\omega \subset (0, L)$, iremos aplicar argumentos de compacidade e provaremos que sendo $L \in \mathbb{R}^+$, a energia $E(t)$ decai exponencialmente.

Já o sistema principal em questão, o sistema não linear (1.4), tem sua boa-colocação feita a partir da teoria de semigrupos combinada com o Teorema do ponto fixo de Banach. O decaimento exponencial, só será feito no caso em que o mecanismo de amortecimento $a(x)$, obedece $a(x) \geq a_0 > 0$ para $x \in \omega$, onde ω é um conjunto aberto de $(0, L)$ que contém dois conjuntos especiais: um da forma $(0, \delta)$, e outro $(L - \delta, L)$.

Embora nossa abordagem se limite até aqui, o caso geral em que o damping pode estar atuando em qualquer subconjunto aberto de $(0, L)$, foi considerado por Ademir Pazoto ([3]). No contexto vale citar o trabalho de Lionel Rosier e Bingyu Zhang, onde foi provado o decaimento para a generalização da equação KdV em [4].

No contexto, da estabilização da equação KdV, temos os mais recentes trabalhos de Gustavo Perla Menzada, com Massarolo e Ademir Pazoto. Um deles prova a estabilização para um damping enfraquecido [5], outro trás resultado similar para sistema de Kdv's [6].

Sobre o problema sem a presença de nenhum amortecimento, que ainda é considerado aberto, temos trabalhos atuais. Em [7] foi mostrado por Jixun Chu, Jean-Michel

Coron, Peipei Shang, uma estabilidade assintótica local para a KdV sem damping considerada no intervalo $(0, 2\pi)$. Porém, em [8] foram construídas soluções não triviais estacionarias (que não decaem no tempo) no intervalo limitado de qualquer cumprimento $L > 0$, inclusive quando $L \in \mathcal{N}$.

Capítulo 2

Preliminares

Este capítulo é destinado à apresentação de alguns resultados e definições da área de análise, fundamentais em nosso trabalho.

2.1 Resultados clássicos

Apresentaremos alguns resultados clássicos que serão utilizados, suas demosntrações serão omitidas, podendo ser encontradas facilmente na literatura, como em [20] [22] [23] [21].

As notações usadas para **norma** e **produto interno** são $\|.\|$ e $\langle .,. \rangle$ respectivamente. Também utilizaremos as notações $C^k(\Omega)$ com $k \in \mathbb{N}$ como o conjunto das funções k-vezes continuamente diferenciáveis em Ω, e $C^\infty(\Omega)$ para as funões infinitamente diferenciáveis em Ω.

Definição 1. *Um espaço é dito* ***completo*** *quando toda sequência de Cauchy converge dentro do próprio espaço.*

Definição 2. *Um espaço é dito* ***Espaço de Banach****, quando além de ser um espaço vetorial normado, ele é completo.*

Definição 3. *Um espaço é dito Espaço de Hilbert, quando além de ser um espaço de Banach, a norma provém de um produto interno.*

Definição 4. *Uma função $u : \Omega \to \mathbb{R}$ é dita* ***do tipo escada*** *quando pode ser escrita na forma*

$$u(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x)$$

onde $0 \leq n \in \mathbb{N}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, A_i representam abertos disjuntos de Ω onde $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = \Omega$ e χ_{A_i} é o símbolo da função característica do conjunto A_i, ou seja

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 \, se \, x \in A \\ 0 \, se \, x \notin A \end{cases} \tag{2.1}$$

Definição 5. *Dizemos que uma função* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *é* ***mensurável****, quando é limite quase sempre de alguma sucessão de funções do tipo escada*

Definição 6. *Seja* $u : \Omega \to \mathbb{R}$ *uma função mensurável, sendo* $(\omega_i)_{i\in\lambda}$ *uma família de conjuntos onde* $u(x) \equiv 0$ *quase sempre em* ω_i*, então chamamos de* ***suporte*** *de* u*, ou simplesmente* $supp(u) = \omega \setminus \bigcup_{i\in\lambda} \omega_i$.

Observação 1. *Se* u *é contínua então podemos escrever* $supp(u) = \{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}$.

Vamos escrever $C_0^k(\Omega)$ para o conjunto das funções $u \in C^k(\Omega)$ com $supp(u)$ sendo um conjunto compacto. E analogamente C_0^∞ para as funções $u \in C^\infty(\Omega)$ tal que $suppu$ é um conjunto compacto. A noção intuitiva de função com suporte compacto é de que a função se anule antes da fronteira do seu domínio.

Definição 7. *Seja* Ω *um conjunto aberto e não vazio de* $\mathbb{R}$ *e* $1 \leq p \leq \infty$*, escrevemos* $L^p(\omega)$ *o conjunto das funções mensuráveis* $u(x) : \Omega \to \mathbb{R}$*, tais que para* $p < \infty$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

e para $p = \infty$

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{M \in \mathbb{R}^+; |u(x)| < M,\, q.s.\, em\, \omega\} < \infty.$$

Observação 2. *Em* $L^p(\Omega)$*, as funções que diferem apenas por um conjunto de medida nula serão identificadas na mesma classe de funções em* $L^2(\Omega)$.

Observação 3. *O espaço* $C(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$.

Observação 4. *Os espaços* $L^p(\Omega)$ *são espaços de Banach.*

Observação 5. *O espaço* $L^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert, munido com o produto interno* $\langle u, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega uvdx$.

Teorema 1 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $x,\ y \in \mathbb{R}+$*, e* $p,\ q$ *de forma que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então*

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}. \tag{2.2}$$

Teorema 2 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sendo* Ω *um aberto de* $\mathbb{R}^n$*,* $1 \leq p \leq \infty$ *e* q *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. sendo* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$*, então teremos que* $uv \in L^1(\Omega)$ *e ainda*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\omega)}.$$

Proposição 1. *Sendo* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$*,* $1 \leq p \leq q \leq \infty$*. Se* $u \in L^q(\Omega)$ *então* $u \in L^p(\Omega)$ *valendo a desigualdade*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq med(\Omega)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|u\|_{L^q(\Omega)}.$$

Sendo $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, vamos escrever

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_n,$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Um espaço de funções com domínio em Ω, estará munido com a topologia do limite indutivo, quando se uma sequência de funções $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge para zero equivale a dizer que existe um conjunto $K \in \Omega$ compacto tal que $supp(u_n) \subset K$, $\forall n \in N$ e que para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, então $D^\alpha u_n$ é convergente para 0.

Definição 8. *Chamaremos de **espaço de funções teste**, escrevendo $\mathcal{D}(\omega)$ sendo o espaço das funções de C_0^∞ com a topologia do limite indutivo.*

Definição 9. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto diferente do vazio. Dizemos que um funcional T sobre $\mathcal{D}$ é uma **distribuição** sobre Ω se ele for contínuo na topologia do limite indutivo.*

Definição 10. *A **derivada** de ordem α de T é o funcional linear em $\mathcal{D}(\Omega)$ definido por*

$$\langle D^\alpha T, \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \phi \rangle$$

onde $\phi \in \mathcal{D}(A)$.

Definição 11. *Sejam Ω um conjunto aberto e não vazio de $\mathbb{R}$ e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o **espaço de Sobolev** $W^{k,p}(\omega)$ como sendo o espaço das funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^u \in L^p(\Omega)$ munidos com as normas*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

quando $p < \infty$ e

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup |D^\alpha u(x)|.$$

Observação 6. *Para $p = 2$ iremos escrever apenas $W^{k,2} = H^k$ pela estrutura Hilbertiana do conjunto.*

Proposição 2. *$W^{k,p}$ é um espaço de Banach e H^k é um espaço de Hilbert com produto interno*

$$\langle u, v \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

onde $u, v \in H^k(\Omega)$.

Em grande parte do texto utilizaremos a notação $X(0,T; Y(0,L))$ para representar o espaço das funções $u : (0,T) \to Y(0,L)$ tais que $\|u\|_{Y(0,L)} \in X(0,T)$. Ou analogamente para $X([0,T]; Y(0,L))$, no último caso, X representará um espaço de funções contínuas, tendo em vista que os espaços L^p são de funções definidas em um domínio aberto.

Teorema 3 (Ponto Fixo de Banach)**.** *Seja $\phi : B \to B$ onde ϕ é uma contração, e B é um espaço métrico completo, então ϕ possui um único ponto fixo x ($\phi(x) = x$).*

Teorema 4 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável e $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções convergente com $u_n \to u$ em X. Suponhamos que $|u(x)| \leq \phi(x)$ $\forall x \in X$ onde $\phi(x)$ é uma função integrável em X. Então u é integrável e ainda*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X u_n(x)dx = \int_X u(x)dx.$$

Lema 1 (Desigualdade Diferencial de Gronwall)**.** *Seja $u(t)$ uma função não negativa e diferenciável em [0,T], que satisfaz*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t),$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são funções integráveis em $[0,T]$. Então

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s)e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau} ds \right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ e $g(t)$ forem não negativas, então a expressão torna-se

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau} \left[u(0) + \int_0^t g(s)ds \right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Definição 12. *Definimos o conjunto $H_0^k(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia de $H^k(\Omega)$.*

Intuitivamente o símbolo "0"no índice do conjunto nos dá a impressão de que $H_0^k(\Omega)$ são as funções de $H^k(\Omega)$ com suporte compacto, o que na verdade acontece de forma semelhante a intuição de suporte compacto, ou seja, que a função se anule quase sempre, antes da fronteira de Ω.

Proposição 3 (Desigualdade de Interpolação de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Se $u \in H_0^k(0,L)$ então existe $C \geq 0$ tal que*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)} \|u_x\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,L)}.$$

Definição 13. *Seja $s \in \mathbb{N}$, o conjunto $H^{-s}(\Omega)$ é o dual topológico de $H_0^s(\Omega)$*

Teorema 5. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um aberto e T uma distribuição sobre Ω. Então $T \in H^{-k}$ se e somente se existirem funções $f_\alpha \in L^2(\Omega)$, com $|\alpha| \leq k$ tais que*

$$T = \sum_{|\alpha|\leq k} D^\alpha f_\alpha.$$

Tal teorema é formulado de uma maneira muito geral, como iremos trabalhar apenas com o espaço $H^k(0,L)$ iremos escrever o corolário abaixo, consequência imediata do teorema acima que nos dará aplicação direta

Corolário 1. *Se $v(x) : (0, L) \to \mathbb{R}$ está em $L^2(0, L)$. Então $\frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in H^{-k}(0, L)$.*

Definição 14. *Diremos que um espaço de Banach X está **imerso** em um espaço de Banach Y ou $X \hookrightarrow Y$ se a função identidade $I : X \to Y$ for contínua. Ou seja, $X \subset Y$ e ainda, para $u \in X$ vale*

$$\|u\|_Y \leq C\|u\|_X$$

para algum $C > 0$.

Proposição 4. *Vale a imersão $L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-k}(0, L)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.*

Definição 15. *Diremos que um espaço de Banach X está compactamente imerso em um espaço Y ou apenas $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$ se $X \hookrightarrow Y$ e a função identidade $I : X \to Y$ for compacta.*

Proposição 5. *Vale a imersão compacta $W^{1,p}(0, L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^p(0, L)$.*

Teorema 6 (Princípio da limitação uniforme)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $\{S_i\}_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares contínuos de X em Y. Assumindo que*

$$\sup_{i \in I} \|S_i(u)\|_Y < \infty, \;\; u \in X.$$

Então

$$\sup_{i \in I} \|S_i\|_{\mathcal{L}(X,Y)} < \infty.$$

Proposição 6. *Sejam X e Y espaços de Banach, e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$, então o adjunto A^* de A é um operador fechado.*

Teorema 7 (Teorema de unicidade de Holmgren)**.** *Dado o problema*

$$Lu \equiv \sum_{|\alpha| \leq m} A_\alpha(x) D^\alpha u = B(x), \tag{2.3}$$

se A_α são coeficientes constantes [1]*, com os dados de Cauchy prescritos sobre uma superfície S não característica. Então (2.3) não possui mais de uma solução.*

Teorema 8 (Lema de Riesz)**.** *Sejam X um espaço normado e Y um subconjunto aberto de X, onde $X \neq Y$ e $k \in (0, 1)$, então existe $x \in X$ tal que $\|x\|_X = 1$ tal que $\|x - y\|_X > k$ para todo $y \in Y$.*

Corolário 2. *Seja X um espaço vetorial de dimensão infinita, então a bola unitária $B_1 = \{x \in X, \;\; \|x\|_X \leq 1\}$ não é compacta.*

[1] No enunciado original do teorema de Holmgren trata-se de coeficientes analíticos, aqui iremos utilizar apenas o caso particular de coeficientes constantes

Definição 16. *Seja E um espaço de Banach. A* ***topologia fraca*** *$\sigma(X, X')$ sobre X, é a topologia "menos fina"(com menos abertos) em X que torna as aplicações $f \in X'$ contínuas.*

Definição 17. *Sejam X um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in N}$ uma sequência em X. Diremos que $x_n \to x$* ***fracamente****, ou que x_n* ***converge fraco*** *para x em X quando $x_n \to x$ na topologia fraca $\sigma(X, X')$, ou equivalente*

$$\langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall f \in X'.$$

Definição 18. *Sendo H um espaço de Hilbert e $\Omega \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto, dizemos que uma função $u : \Omega \to H$, é* ***fracamente contínua*** *quando dada uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Omega$, tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, então $u(x_n) \to u(x)$ fracamente em H.*

Denotaremos o conjunto das funções fracamente contínuas por

$$C_w(\Omega; H).$$

Na maioria das referências utiliza-se a notação $x_n \rightharpoonup x$ para designar que x_n converge fracamente para x.

Proposição 7. *Sendo X um espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in N} \subset X$ se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$.*

Proposição 8. *Sendo X espaço de Banach e $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, sabendo que $x_n \rightharpoonup x$, então $\|x\|_X$ é limitada e ainda*

$$\|x\|_X \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|_X.$$

2.2 Resultados utilizados da teoria de semigrupos

Esse capítulo é destinado para a apresentação da teoria de semigrupos, a qual será fundamental na nossa abordagem da boa colocação e no estudo do decaimento exponencial de soluções da KdV.

A teoria de semigrupos é motivada pelo estudo de problemas da forma

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $u_0 \in X$, e X é um espaço de Banach, A é um operador linear definido em $\mathcal{D}(A) \subset X$ e $\mathcal{D}(A)$ é um espaço vetorial denso em X (o que veremos mais além). A teoria irá definir semigrupos e algumas propriedades básicas que nos darão ferramentas para investigar a boa colocação e a estabilização das soluções do problema (2.4). Contudo, estabelecendo condições sobre o operador A para obter a existência e unicidade de solução, estaremos nos próximos capítulos verificando-as para a KdV.

2.2.1 Semigrupos de operadores lineares

Vamos assumir informalmente que $u : [0, \infty) \to X$ seja a solução única de (2.4) para cada dado inicial $u_0 \in X$. Escreveremos $u(t) := S(t)u_0$ para ressaltar como $u(t)$ depende do dado inicial $u_0 \in X$. Para cada momento $t \geq 0$, podemos enxergar $S(t)$ como uma função de X em X.

Definição 19. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ uma família de operadores lineares limitados de X em X. Diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um* **semigrupo** *se para cada $t, s \geq 0$, as seguintes condições estão satisfeitas:*

1. $S(0)u_0 = u_0$, $\forall u_0 \in X$;
2. $S(t+s)u_0 = S(t)S(s)u_0 = S(s)S(t)u_0 \quad \forall t, s \geq 0,\ , \forall u_0 \in X$;

   Ainda diremos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 se satisfaz

3. *Fixado $u_0 \in X$, a função*

$$\begin{array}{rcl} S(\cdot) : \mathbb{R}^+ & \to & X \\ t & \mapsto & S(t)u_0 \end{array}$$

   é contínua.

Definição 20. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo. Se $\forall t \geq 0$ tem-se $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X,X)} \leq 1$, diremos que é um* **semigrupo de contração**.

Proposição 9. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0. Então a função*

$$\begin{array}{rcl} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ t & \mapsto & \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \end{array}$$

é limitada.

Demonstração: Primeiro iremos mostrar que existe um $\delta > 0$ de forma que para todo $t \in [0, \delta]$, a função em questão é limitada. Supondo que esse fato não seja verdadeiro, assumimos que para todo $\delta > 0$ e $M \geq 1$, existe algum $t \in [0, \delta]$ tal que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \geq M$.

Dessa forma, tomando $M = n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $t_n \in [0, \delta]$ tal que $\|S(t_n)\|_{\mathcal{L}(X)} > M$ para todo $\delta > 0$. Pelo Teorema da limitação uniforme, obtemos que existe algum $u \in X$ de forma que $\|S(t_n)u\|_X$ não é limitada.

Por outro lado, da definição de semigrupo de classe C_0, se escolhermos $\epsilon = 1$ na definição de continuidade, obtemos

$$\exists \delta, \forall\, t_n < \delta \Rightarrow \|S(t_n)u - u\|_X < 1,\, \forall\, u \in X,$$

e como

$$\|S(t_n)u\|_X - \|u\|_X \leq \|S(t_n)u - u\|_X < 1,$$

conclui-se que

$$\|S(t_n)u\|_X < 1 + \|u\|_X,$$

para todo $t_n \in [0, \delta]$. Como $\|u\|_X \leq c$ para algum c, temos que para todo $t_n \in [0, \delta]$

$$\|S(t_n)u\|_X < 1 + c,$$

o que é uma contradição.

Agora resta apenas mostrar a afirmação para $t \in [\delta, T]$, onde δ representa o mesmo encontrado acima. Para todo $t \in [\delta, T]$, podemos escrever $t = n\delta + r$ onde $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r \leq \delta$. O que nos dá

$$n = \frac{t - r}{\delta} \leq \frac{t}{\delta},$$

mas, por outro lado

$$\|S(t)\| = \|S(n\delta{+}r)\| = \|S(n\delta)S(r)\| \leq \|S(\delta)\|^n \|S(r)\| \leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\delta}} M = M(M^{\frac{1}{\delta}})^t = Me^{kt},$$

onde $M^{\frac{1}{\delta}} = e^k$, ou seja, $0 < k = \delta^{-1} \ln M > 0$. Portanto, se $t \in [0, T]$, então $\|S(t)\| \leq Me^{kt} \leq Me^{kT}$, demonstrando a proposição. $\square$

O próximo Teorema será utilizado na demonstração do decaimento exponencial, para tal necessitaremos do seguinte lema:

Lema 2. *Sejam* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ *um semigrupo de classe* C_0, *e*

$$\begin{aligned} \phi : [0, \infty) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto \phi(t) = \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}. \end{aligned}$$

Então existe $\lim_{t \to \infty} \phi(t)$ *e ainda*

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t} = \inf_{t > 0} \frac{\ln \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}. \tag{2.5}$$

Observação 7. *Para facilitar a visualização dos cálculos, nas próximas demonstrações iremos omitir o índice de $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ escrevendo simplesmente $\|S(t)\|$.*

Demonstração: Vamos definir por $\omega_0 = \inf_{t>0} \phi(t)$. Dessa forma o ínfimo pode ser $\omega_0 = -\infty$ ou $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Primeiramente consideremos $\omega_0 \in \mathbb{R}$. Pela definição de ínfimo, dado $\epsilon > 0, \exists T > 0$ tal que $\frac{\ln \|S(T)\|}{T} < \omega_0 + \epsilon$. Se $t > T$, então existem $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < T$ tais que $t = nT + r$ e dessa forma

$$\begin{aligned}
\omega_0 &\leq \frac{\ln \|S(t)\|}{t} \\
&\leq \frac{n \ln \|S(T)\| + \ln \|S(r)\|}{t} \\
&= \frac{nT \ln \|S(T)\|}{Tt} + \frac{\ln \|S(r)\|}{t} \\
&< \omega_0 + \epsilon + \frac{\ln \|S(r)\|}{t},
\end{aligned}$$

daí teremos

$$\omega_0 - \epsilon < \frac{\ln \|S(t)\|}{t} < \omega_0 + \epsilon + \frac{\ln \|S(r)\|}{t}.$$

Observe que $\ln \|S(r)\|$ é limitado, portanto $\frac{\ln \|S(r)\|}{t} \to 0$ quando $t \to \infty$, donde

$$\omega_0 - \epsilon < \frac{\ln \|S(t)\|}{t} < \omega_0 + \epsilon,$$

ou seja

$$\Big| \frac{\ln \|S(t)\|}{t} - \omega_0 \Big| < \epsilon.$$

Quando $\omega_0 = -\infty$, dado $\omega \in \mathbb{R}$, analogamente existirá $T > 0$ tal que $\frac{\ln \|S(T)\|}{T} < \omega$. Se $t > 0$ então existirão $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq r < T$ tais que $t = nT + r$ e assim

$$\begin{aligned}
\omega_0 \leq \frac{\ln \|S(t)\|}{t} &= \frac{\ln \|S(nT + r)\|}{t} \\
&\leq \frac{n \ln \|S(T)\| + \ln \|S(r)\|}{t} \\
&= \frac{Tn \ln \|S(T)\|}{Tt} + \frac{\ln \|S(r)\|}{t} \\
&\leq \omega + \frac{\ln \|S(r)\|}{t}.
\end{aligned}$$

Analogamente quando $t \to \infty$ teremos que

$$\frac{\ln \|S(t)\|}{t} < \omega.$$

Portanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t} = \inf_{t>0} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}.$$

□

Teorema 9. *Sejam $\{S\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e ω_0 definido como no Lema 2. Então para cada $\omega > \omega_0$ existirá uma constante $M \geq 1$ tal que $\forall t > 0$*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{\omega t}. \tag{2.6}$$

Demonstração: Pela definição de limite e pela Proposição 9, se $\omega > \omega_0$, então existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t > t_0$ vale

$$\ln \frac{\|S(t)\|}{t} < \omega. \tag{2.7}$$

Pela Proposição 9, sabemos que para todo $t \in [0, t_0]$, existe uma constante M_0 tal que $\|S(t)\| \leq M_0$. Pela definição de semigrupo $\|S(0)\| = \|I\| = 1$. Agora vamos dividir as considerações em quatro casos

1. Se $\omega \geq 0$ e $0 < t \leq t_0$, então

   $$\|S(t)\| \leq M_0,$$

   assim

   $$\ln \|S(t)\| \leq \ln M_0 \leq \ln M_0 + \omega t,$$

   daí

   $$\|S(t)\| \leq M_0 e^{\omega t}.$$

   Obtendo o desejado.

2. Sejam agora $\omega \geq 0$ e $t \geq t_0$. Por (2.7) teríamos

   $$\ln \|S(t)\| < \omega t \leq \omega t + \ln M_0$$

e

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{\omega t}.$$

Assim, basta escolher $M = M_0$.

3. No caso em que $\omega < 0$ e $0 < t \leq t_0$, utilizando que $\omega(t_0 - t) < 0$ teremos

$$\|S(t)\| \leq M_0$$

$$\ln \|S(t)\| \leq \ln M_0 \leq \ln M_0 - \omega(t_0 - t)$$

logo

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{-\omega t_0} e^{\omega t}.$$

4. O último caso, se $\omega < 0$ e $t > t_0$, utilizamos (2.7) e segue que

$$\ln \|S(t)\| < \omega t < \omega t - \omega t_0 \leq \omega t - \omega t_0 + \ln M_0,$$

o que nos dá

$$\|S(t)\| \leq M_0 e^{-\omega t_0} e^{\omega t}.$$

Considerando $M = M_0 e^{-\omega t_0}$, temos completado a demonstração. □

2.2.2 Geradores infinitesimais de semigrupos

Nessa sessão veremos como o operador A, que aparece na equação (2.4), se relaciona com a teoria de semigrupos (veremos que esse operador é chamado de gerador), ou seja, quais ferramentas da teoria tal operador pode nos oferecer.

Neste capítulo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ representará um semigrupo de contrações no espaço de Banach X.

Definição 21. *Dado $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, vamos definir o conjunto*

$$\mathcal{D}(A) := \left\{ u_0 \in X \text{ tal que } \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t} \text{ existe em } X \right\},$$

como domínio do operador A, que é dado por

$$Au := \lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u_0 - u_0}{t}, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

Sendo assim $A : \mathcal{D}(A) \to X$ será dito o **gerador** *(infinitesimal) do semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $\mathcal{D}(A)$, o* **domínio** *de A.*

Teorema 10 (Propriedades diferenciais de semigrupos)**.** *Seja $u \in \mathcal{D}(A)$ como na definição (21). Então*

(i) $S(t)u \in \mathcal{D}(A)$ *e* $AS(t)u = S(t)Au$ *para todo* $t \geq 0$*;*

(ii) A função

$$\begin{array}{rcl} S(t)u : [0, \infty] & \to & X \\ t & \mapsto & S(t)u \end{array}$$

é diferenciável e $\frac{d}{dt}S(t)u = AS(t)u$ *para todo* $t > 0$*;*

(iii) $\int_0^t S(s)uds \in \mathcal{D}(A)$ *e* $S(t)u - u = A\int_0^t S(s)uds$.

Demonstração: *(i)* Seja $u \in \mathcal{D}(A)$

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0+} \frac{S(s)S(t)u - S(t)u}{s} &= \lim_{s\to 0+} \frac{S(t)S(s)u - S(t)u}{s} \\ &= \lim_{s\to 0+} \frac{S(t)[S(s)u - u]}{s} \\ &= S(t) \lim_{s\to 0+} \frac{S(s)u - u}{s} \\ &= S(t)Au. \end{aligned}$$

(ii) Agora dados $u \in \mathcal{D}(A)$, $h > 0$ e $t > 0$, vale

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0+} \left\{ \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ \frac{S(t-h+h)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ \frac{S(t-h)S(h)u - S(t-h)u}{h} - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ S(t-h)\left(\frac{S(h)u - u}{h} \right) - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ S(t-h)\left(\frac{S(h)u - u}{h} \right) + S(t-h)Au - S(t-h)Au - S(t)Au \right\} \\ &= \lim_{h\to 0+} \left\{ S(t-h)\left(\frac{S(h)u - u}{h} - Au \right) + (S(t-h) - S(t))Au \right\} = 0. \end{aligned}$$

Sabendo que $S(t-h)$ é limitado e que $\lim_{h\to 0} \frac{S(h)u-u}{h} \to Au$. Temos

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$$

Analogamente, concluímos que

$$\lim_{h\to 0-} \frac{S(t)u - S(t-h)u}{h} = S(t)Au.$$

Concluindo que a derivada existe no ponto t e seu valor é dado como

$$\frac{d}{dt}S(t)u = S(t)Au = AS(t)u.$$

(iii) Vamos definir $A_h u := \frac{S(h)-I}{h}u$. Assim, para todo $u \in X$ teremos

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t S(s)u\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t [S(h)-I]S(s)u\,ds &= \frac{1}{h}\int_0^t S(h+r)u\,dr - \frac{1}{h}\int_0^t S(r)u\,dr \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{h+t} S(r)u\,dr - \frac{1}{h}\int_0^t S(r)u\,dr \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(r)u\,dr - \frac{1}{h}\int_0^h S(r)u\,dr. \end{aligned}$$

De acordo com

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(r)u\,dr - \frac{1}{h}\int_0^h S(r)u\,dr\right) = S(t)u - u,$$

temos que

$$\lim_{h\to 0} A_h \int_0^t S(r)u\,dr = S(t)u - u.$$

Assim $\int_0^t S(r)u\,dr \in \mathcal{D}(A)$ e vale

$$A\int_0^t S(s)u\,ds = S(t)u - u.$$

□

Teorema 11 (Propriedades de geradores)**.** *Seja $\mathcal{D}(A)$ como na definição (21), então*

(i) $\mathcal{D}(A)$ é denso em X;

(ii) A é um operador fechado. Isto é, se $u_k \to u$ em X e $Au_k \to v$ então $u \in D(A)$ e $v = Au$.

Demonstração: *(i)* Seja $u \in X$ qualquer. Para cada $t > 0$ definimos

$$u^t = \int_0^t S(t)u\,dt.$$

Pelo item *(iii)* do Teorema 10 e por $\mathcal{D}(A)$ ser um espaço vetorial, temos que $\frac{1}{t}u^t \in \mathcal{D}(A)$. Tomando o limite quando $t \to 0$ temos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{u^t}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{u^{(t-0)} + u^0}{t} = \frac{d}{dt}u^0 = S(0)u = u.$$

Definindo a sequência $u_n = \frac{u^{\frac{1}{n}}}{t}$, pelas igualdades acima, segue que $u_n \to u$. Dessa forma para todo $u \in X$, temos uma sequência de elementos de $\mathcal{D}(A)$ que converge para u. O que prova *(i)*.

(ii) Dada a sequência $u_k \in \mathcal{D}(A)$ e supondo $u_k \to u$ e $Au_x \to v$. Devemos mostrar que $u \in D(A)$ e $v = Au$. Integrando a equação do item *(ii)*, do Teorema 10 obtemos

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t AS(s)u_k\, ds,$$

combinando com o item *(iii)*, temos que

$$S(t)u_k - u_k = \int_0^t S(s)Au_k\, ds,$$

donde

$$S(t)u - u = \int_0^t S(s)v\, ds.$$

Mas como

$$\lim_{t\to 0+} \frac{S(t)u - u}{t} = \lim_{t\to 0+} \frac{1}{t}\int_0^t S(s)v\, ds = v,$$

pela definição do domínio $\mathcal{D}(A)$, temos que $u \in \mathcal{D}(A)$ e ainda $Au = v$. Assim A é fechado. □

2.2.3 Resolventes

Definição 22. *Chamaramos de* **conjunto resolvente** *($\rho(A)$), de um operador A dado, o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que o operador $(\lambda I - A) : D(A) \to X$ é inversível. Quando $\lambda \in \rho(A)$, é possível definir o* **operador resolvente** *$R_\lambda : X \to D(A)$ como sendo $R_\lambda u := (\lambda I - A)^{-1}$. Tal operador é linear, limitado, fechado e se $u \in \mathcal{D}(A)$, temos $AR_\lambda u = R_\lambda Au$*

Teorema 12 (Propriedades do operador resolvente)**.** .

(i) Sejam $\lambda, \mu \in \rho(A)$, então $R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$ e $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$;

(ii) Seja $u \in X$ e $\lambda > 0$ então $\lambda \in \rho(A)$ e, além disso,

$$R_\lambda u = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt,$$

sendo assim $||R_\lambda||_{\mathcal{L}(X)} \leq \frac{1}{\lambda}$.

Demonstração: *(i)* Como $A : \mathcal{D}(A) \to X$ é um operador linear fechado e $\lambda \in \rho(A)$, então $Im(\lambda I - A) = X$. Assim, para todo $v \in X$ existirá $u \in X$ de modo que $v = (\lambda I - A)u$. Então

$$u = R_\lambda y. \tag{2.8}$$

Além disso para todo $u \in X$

$$(\mu I - A)u = (\lambda I - A)u = (\mu - \lambda)u,$$

substituindo (2.8) na equação acima, para todo $v \in X$ obteremos

$$(\mu I - A)R_\lambda v - v = (\mu - \lambda)R_\lambda v. \tag{2.9}$$

Com um cálculo análogo, obtemos os termos para R_μ. Compondo-os na equação (2.9), temos

$$R_\lambda v - R\mu v = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda v, \forall v \in X. \tag{2.10}$$

Agora, note que $\forall u \in X$

$$(\lambda I - A)u - (\mu I - A)u = (\lambda - \mu)u,$$

ainda denotando $u = R_\mu v$, já que $\mu \in \rho(A)$ e $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ é um operador fechado. Analogamente, como na equação 2.10, chegamos a seguinte expressão:

$$R_\mu v - R_\lambda v = (\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu v, \forall v \in X. \tag{2.11}$$

De (2.10) e (2.11), teremos para todo $v \in X$ que

$$-(\lambda - \mu)R_\lambda R_\mu v = (\mu - \lambda)R_\mu R_\lambda v,$$

logo

$$R_\lambda R_\mu v = R_\mu R_\lambda v,$$

sempre que $\lambda \neq \mu$. Daí basta utilizar (2.10) e teremos

$$R_\lambda v = R_\mu v = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu u, \forall v \in X,$$

o que implica

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu,$$

sempre que $\mu \neq \lambda$. Se $\lambda = \mu$ o resultado é segue

$$R_\lambda - \mathbb{R}_\mu = 0 = (\mu - \lambda)\mathbb{R}_\lambda R_\mu.$$

(ii) Escrevendo
$$\tilde{R}_\lambda := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u\, dt,$$
vamos mostrar que $\tilde{R}_\lambda = R_\lambda$. Note que a integral está definida, pois $\lambda > 0$ e $||S(t)|| \leq 1$. Assim, para $h > 0$ e $u \in X$, utilizando as propriedades diferenciais de semigrupo, temos

$$\begin{aligned}
\frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} &= \frac{1}{h}\left\{S(h)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)\, dt\right\} \\
&= \frac{1}{h}\left\{\int_0^\infty e^{-\lambda t}[S(t+h)u - S(t)u]\, dt\right\} \\
&= -\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda(t-h)}S(t)u\, dt + \frac{1}{h}\int_0^\infty (e^{-\lambda(t-h)} - e^{-\lambda t})S(t)u\, dt \\
&= -e^{\lambda h}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}S(t)u\, dt + \left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\, dt,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{h\to 0+} \frac{S(h)\tilde{R}_\lambda u - \tilde{R}_\lambda u}{h} = -u + \lambda \tilde{R}_\lambda u.$$

Assim, $A\tilde{R}_\lambda u = -u + \tilde{R}_\lambda u$, o que implica, $(\lambda I - A)\tilde{R}_\lambda u = u$, para todo $u \in X$.

Por outro lado, se $u \in D(A)$, utilizando que A é fechado e o exercício 12, do capítulo 7 de [23], calculamos

$$\begin{aligned}
A\tilde{R}_\lambda u &= A\int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)u\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}AS(t)u\, dt \\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda t}S(t)Au\, dt \\
&= \tilde{R}_\lambda Au,
\end{aligned}$$

daí $\tilde{R}_\lambda(\lambda I - A)u = u$, para todo $u \in D(A)$.

Concluímos que $\lambda I - A$ é inversível, sendo assim $\lambda \in \rho(A)$. Tendo então $\tilde{R}_\lambda = R_\lambda$.
□

2.2.4 Gerando semigrupos de contração

Nesta sessão apresentaremos os teoremas de Hille-Yosida e Lumer-Phillips (as demonstrações estão em [24]. Porém, nosso objetivo principal se concentra em um colorário do segundo teorema, que para a equação KdV com nossas condições se encaixará com simplicidade.

Teorema 13 (Hille-Yosida). *Seja $A : \mathcal{D}(A) \to X$ um operador linear, então A é o gerador infinitesimal do semigrupo $\{S\}_{t\geq 0}$ de classe C_0, se e somente se*

(i) A é fechado e $\mathcal{D}(A)$ é denso em X;

(ii) Existem $M, \omega \in \mathbb{R}$ tais que para todo $\lambda > \omega$, tenhamos $\lambda \in \rho(A)$ e ainda

$$\|R_\lambda^n\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

Definição 23. *O operador A será dito* **dissipativo***, se para todo $x \in \mathcal{D}(A)$, existe $x^* \in F(x)$ tal que $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.*

Teorema 14 (Lumer-Phillips). *Seja A um operador linear com domínio $\mathcal{D}(A)$ denso em X.*

(i) Se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que a imagem $R_{\lambda_0}(\lambda_0 I - A)(\mathcal{D}(A)) = X$. Então A é o gerador de um semigrupo de contrações em X;

(ii) Se A é o gerador de um semigrupo de contrações em X, então $R_\lambda(\lambda I - A)(\mathcal{D}(A)) = X$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. E ainda teremos que para todo $x \in \mathcal{D}(A)$ e cada $x^* \in F(x)$, $Re\langle Ax, x^*\rangle \leq 0$.

Corolário 3. *Sejam X espaço de Banach, $A : \mathcal{D}(A) \subset X \to X$ um operador linear fechado com adjunto A^*. Se A e A^* são dissipativos, então A gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em X.*

2.2.5 Semigrupos e a solução da equação diferencial

Observando o problema apresentado em (2.4)

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t), & t > 0, \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

e já considerando que A gera algum semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Pelas propriedades diferenciais do gerador, temos que $A(t)u = \frac{d}{dt}S(t)u$, ou seja, substituindo na equação do sistema acima, temos

$$u(t) = S(t)\bar{u}.$$

Como $u(0) = u_0 = S(0)\bar{u} = \bar{u}$, $S(t)u_0$ representa a solução do problema. Agora devemos observar em que espaço a solução $u = S(t)u_0$ se encontra. Veremos que a solução existirá e será única em um espaço que dependerá da restrição admitida para o dado inicial u_0.

Definição 24. • *Dado $u_0 \in D(A)$, uma solução* **clássica** *de (2.4) é uma função $u : [0,T] \to X$, tal que $u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1(0,T;X)$, que satisfaz (2.4) em todos os pontos $t \in [0,T]$.*

- *Dada $u_0 \in X$, uma solução* **mild** *(fraca ou generalizada) de (2.4) é uma função $u \in C([0,T], X)$ definida por $S(t)u_0$.*

Teorema 15. *Seja A gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ então o problema (2.4) possui uma única solução clássica.*

Agora, considere o sistema associado a uma equação não homogênea

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{2.13}$$

Sendo A o gerador do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e u uma solução de (2.13), definindo $g(s) = S(t-s)u(s)$, com $s \in (0,t)$, obtemos a fórmula

$$\begin{aligned} g'(s) &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)u'(s) \\ &= -AS(t-s)u(s) + S(t-s)Au + S(t-s)f(s) \\ &= S(t-s)f(s). \end{aligned}$$

Para prosseguir consideremos $f \in L^1(0,T;X)$, assim resolvendo a integral

$$\int_0^t g'(s)\,ds = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

assim

$$g(t) - g(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds$$

portanto

$$S(0)u(t) - S(t)u(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds,$$

o que implica

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds. \tag{2.14}$$

• Agora, se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$, diremos que uma solução clássica de (2.13) é uma função $u : [0,T) \to X$, onde $u \in C([0,T); D(A)) \cap C^1(0,T;X)$, satisfazendo (2.13).
• Sabendo que $u_0 \in X$, diremos que u é uma solução mild de (2.13) quando $u \in C([0,T],X)$ é definida pela fórmula acima.

2.3 Resultados específicos

Esta sessão é destinada para apresentação de resultados específicos oriundos de artigos em nossas referências.

Definição 25. *Dizemos que um conjunto U de funções é **relativamente compacto** em B quando toda sequência $u_n \in U$ possui uma subsequência uniformemente convergente em U.*

Teorema 16 (Compacidade para funções com valores em espaços intermediários)**.** *Se vale a imersão $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y \hookrightarrow B$, e sendo u_n uma sequência limitada em $L^p(0,T;X)$, onde $1 \leq p < \infty$ e $(u_n)_t$ limitada em $L^1(0,T;Y)$. Então u_n é relativamente compacta em $L^p(0,T;B)$.*

Demonstração: Corolário 4 [15]

Observação 8. *No próximo resultado usaremos a seguinte notação:*

$$L^2_b(\omega) = \{u \text{ mensurável} : \int_\omega u^2(x) e^{2bx}\, dx < \infty\}.$$

onde ω representa um conjunto aberto.

Teorema 17 (Suavidade de soluções para valores iniciais em $L^2 \cap L^2_b$.)**.** *Seja $\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2_b(\mathbb{R})$ para algum $b > 0$. Existe uma única solução u para o problema*

$$\begin{cases} u_t + u_{xxx} + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.15}$$

com as seguintes propriedades:

$$u \in C_w([0,\infty); L^2(\mathbb{R})), \tag{2.16}$$

$$e^{bx}u \in C([0,\infty); L^2(\mathbb{R})), \quad e^{bx}u_x \in C(0,\infty; L^2(\mathbb{R})), \tag{2.17}$$

$$e^{bx}u \in C^\infty(0,\infty; H^\infty(\mathbb{R})), \tag{2.18}$$

com

$$\|\frac{d}{dt}e^{bx}u\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq K't^{-\frac{(s+3n)}{2}}, \quad 0 < t \leq T < \infty, \; s \geq 0, \; n = 0, \; 1, \; 2, ... \tag{2.19}$$

Onde K' é uma constante dependendo de $T, n, s, b, \|\phi\|$, e $\|e^{bx}\phi\|$.

Além disso, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} u(t) : [0,\infty) & \to & L^2(\mathbb{R}) \\ t & \to & u(t), \end{array}$$

- *é fortemente contínua a direita, com $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})}$ monótona não crescente;*
- *é fortemente contínua à esquerda exceto por um valor enumerável de valores de t.*

Por fim, a função

$$\begin{array}{rcl} L^2(\mathbb{R}) \cap L^2_b(\mathbb{R}) & \to & C([0,T]; L^2_b(\mathbb{R})) \\ \phi & \to & u, \end{array}$$

é contínua para cada $0 < T < \infty$.

Observação 9. *a) As condições (2.16), (2.17) e (2.19) garantem a unicidade da solução u.*
b) A propriedade (2.19) implica que $u \in C^\infty(0,\infty; C^\infty(\mathbb{R}))$.
c) Não é possível saber se para $t \geq 0$ vale $\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\phi\|$.

Demonstração: Teorema 12.1 [13]

Teorema 18 (Continuação única para $s > \frac{3}{2}$)**.** *Seja $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}, H^s(\mathbb{R}))$, $s > \frac{3}{2}$ solução da equação $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$. Se existem $t_1 < t_2$ tais que, para alguns $a, \; b \in \mathbb{R}$, vale*

$$supp \; u(\cdot \;, t_j) \subset (a,b), \quad j = 1, 2,$$

então

$$u(x,t) \equiv 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Teorema 4.3 [14].

Capítulo 3

A KdV linearizada

3.1 Boa colocação

A forma mais simples da KdV, trata-se da "exclusão" do termo não linear uu_x, que do ponto de vista matemático, representa a linearização da equação em torno da solução nula. Vamos então considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u = 0, \quad t > 0, \ x \in (0, L), \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u_x(L, t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in (0, L), \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $a(x) \in L^\infty(0, L)$, $a \geq 0$.

Iremos demonstrar que dado $u_0(x) \in L^2(0, L)$, para todo $T > 0$ existirá uma solução mild de (3.1) tal que $u \in C([0, T]; L^2(0, L)) \cap L^2(0, T; H_0^1(0, L))$.

Defina o operador $Av = -v''' - v' - a(x)v$ sobre o domínio

$$\mathcal{D}(A) = \{v \in H^3(0, L); \quad v(0) = v(L) = v'(L) = 0\}, \tag{3.2}$$

denso em $L^2(0, L)$.

Proposição 10. *O operador A, definido acima, gera um semigrupo de contrações de classe C_0 em $L^2(0, L)$.*

Demonstração: Seja $v \in \mathcal{D}(A)$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle v, Av\rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L v(x)(-v'''(x) - v'(x) - a(x)v(x))\,dx\\
&= \int_0^L -vv''' - vv' - a(x)v^2\,dx\\
&= -\int_0^L vv'''dx - \int_0^L vv'\,dx - \int_0^L a(x)v^2\,dx\\
&= \int_0^L v'v''\,dx - [vv'']_0^L - \int_0^L \frac{(v^2)'}{2}\,dx - \int_0^L a(x)v^2\,dx\\
&\leq \int_0^L \frac{(v'^2)'}{2}\,dx - [\frac{v^2}{2}]_0^L\\
&= \frac{1}{2}[v'^2]_0^L = -\frac{1}{2}v'(0)^2 \leq 0.
\end{aligned}$$

Logo A é dissipativo.

Agora para aplicarmos o Corolário 3, precisamos que o operador A^* também seja dissipativo. Primeiramente, vamos mostrar que $A^*w = w''' + w' - aw$ com domínio $\mathcal{D}(A^*) = \{w \in H^3(0,L);\quad w(0) = w(L) = w'(0) = 0\}$.

Seja $v \in \mathcal{D}(A)$ e $w \in \mathcal{D}(A^*)$. Temos

$$\begin{aligned}
\langle Av, w\rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L (-v''' - v' - a(x)v)w\,dx\\
&= -\int_0^L v'''w\,dx - \int_0^L v'w\,dx - \int_0^L a(x)vw\,dx\\
&= \int_0^L v''w'\,dx - [v''w]_0^L + \int_0^L vw'\,dx - [vw]_0^L - \int_0^L a(x)vw\,dx\\
&= -\int_0^L v'w''\,dx + [v'w']_0^L + \int_0^L vw'\,dx - \int_0^L a(x)vw\,dx\\
&= \int_0^L vw''' + [vw'']_0^L + \int_0^L vw'\,dx - \int_0^L avw\,dx\\
&= \int_0^L v(w''' + w' - aw)\,dx.
\end{aligned}$$

Portanto $A^*w = w''' + w' - aw$ com domínio $\mathcal{D}(A^*)$ definido acima.

Sendo $w \in \mathcal{D}(A^*)$. Então

$$
\begin{aligned}
\langle w, A^*w\rangle_{L^2(0,L)} &= \int_0^L w(x)(w'''(x) + w'(x) - a(x)w(x))\,dx \\
&= \int_0^L +ww''' + ww' - a(x)w^2\,dx \\
&= \int_0^L ww'''dx + \int_0^L ww'\,dx - \int_0^L a(x)w^2\,dx \\
&= -\int_0^L w'w''\,dx - [ww'']_0^L + \int_0^L \frac{(w^2)'}{2}\,dx - \int_0^L a(x)w^2\,dx \\
&\leq -\int_0^L \frac{(w'^2)'}{2}\,dx - [\frac{w^2}{2}]_0^L \\
&= -\frac{1}{2}[w'^2]_0^L = -\frac{1}{2}w'(L)^2 \leq 0.
\end{aligned}
$$

Além disso, temos $A^{**} = A$, com respectivo domínio $D(A^{**}) = D(A)$, assim, pela Proposição 6, A é fechado.

Portanto, A e A^* são dissipativos e fechados, logo aplicando o Corolário 3, pela densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $L^2(0,L)$, concluímos que A gera um semigrupo de contrações C_0 em $L^2(0,L)$. □

Assim, pelo Teorema 15, se $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ então garantimos a existência de soluções $u \in C([0,T];\mathcal{D}(A) \cap C^1(0,T;L^2(0,L))$. A partir de agora iremos assumir que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por A.

Tendo em mãos a solução clássica podemos fazer estimativas dela , vista a regularidade imposta em $\mathcal{D}(A) \subset H^3(0,L)$ utilizaremos a densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $L^2(0,L)$ para provar a existência de solução mild.

De fato, dado $u_0 \in L^2(0,L)$ tomamos $\{u_0^n\} \subset \mathcal{D}(A)$, onde $u_0^n \to u_0$ em $L^2(0,L)$, a existência de tal sequência é provida da densidade de $\mathcal{D}(A)$ em $L^2(0,L)$. Considerando $u(x,t) = S(t)u_0(x)$ e $u_n(x,t) = S(t)u_0^n(x)$, sabemos que $u_n \in C([0,T];\mathcal{D}(A)) \cap C^1([0,T];L^2(0,L))$. Assim

$$
\|u_n(t) - u(t)\|_{L^2(0,L)} = \|S(t)u_0^n - S(t)u_0\|_{L^2(0,L)} \leq \|u_0^n - u_0\|_{L^2(0,L)},
$$

donde podemos afirmar que $u_n \to u$ em $C([0,T];L^2(0,L))$.

Agora note que

$$\int_0^L \|u_n\|^2_{L^2(0,L)}(t)\,dt \leq \int_0^T \|u_0^n\|^2_{L^2(0,L)}\,dt \leq (L+T)\|u_0^n\|_{L^2(0,L)},$$

donde

$$\|u_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} = \int_0^T \|u_n\|^2_{L^2(0,L)}(t) + \|(u_n)_x\|^2_{L^2(0,L)}(t)\,dt \leq 2(L+T)\|u_0^n\|^2_{L^2(0,L)}.$$

pela limitação de $\{u_0^n\}$ em $L^2(0,L)$, garantimos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(0,L)$. O que nos garante a existência de uma subsequência $\{u_m\}$ de $\{u_n\}$ tal que u_m converge para alguma v em $L^2(0,T;H_0^1(0,L))$. Mas como $u_n \to u$ em $C([0,T];L^2(0,L))$ a unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(0,L))$ fornece $u = v$. De forma semelhante podem ser provadas convergências de outros fatores que aparecem nas desigualdade seguintes e utilizando a Propriedade 8 garantimos uma limitação que garante a as desigualdades nas soluções do tipo mild.

Definamos o espaço de Banach $B = C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$ munido com a norma

$$\|u\|_B := \sup_{t\in[0,T]} \|u(.,t)\|_{L^2(0,L)} + \left(\int_0^T \|u(.,t)\|^2_{H^1(0,L)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.3}$$

Nosso próximo objetivo é mostrar que $u \in B$, de forma que, a norma $\|u\|_B$ é limitada por $\|u_0\|_{L^2(0,L)}$, provando assim a continuidade da solução $u = S(t)u_0$ quando $u_0 \in L^2(0,L)$. Para tal vamos utilizar técnicas de multiplicação e integração.

Proposição 11. *Seja $u = S(t)u_0$ solução do sistema (3.1). Então $u \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$. Mas ainda, a solução é contínua como aplicação de $L^2(0,L)$ em B.*

Demonstração: Pela continuidade do semigrupo, $u \in C([0,T];L^2(0,L))$.

Utilizando o fato que $\|S(t)\| \leq 1$, para $u_0 \in \mathcal{D}(A)$ temos

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(0,L))} = \|S(t)u_0\|_{C([0,T];L^2(0,L))} \leq \|S(t)\|\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq \|u_0\|_{L^2(0,L)}. \tag{3.4}$$

Para mostrar a continuidade até $L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, vamos supor que u é solução clássica do problema (3.1). Multiplicando a equação do sistema (3.1) por xu e integrar em $(0,T)\times(0,L)$, obtendo

$$\int_0^T\int_0^L xuu_t\,dxdt + \int_0^T\int_0^L xuu_x\,dxdt + \int_0^T\int_0^L xuu_{xxx}\,dxdt + \int_0^T\int_0^L xa(x)u^2\,dxdt = 0. \tag{3.5}$$

Utilizando Teorema de Fubini, as condições iniciais e propriedades da derivada, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (xu)u_t \, dxdt &= \int_0^L \int_0^T x\frac{(u^2)_t}{2} \, dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L x[u^2(x,T) - u^2(x,0)] \, dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L xu^2(x,T)dx - \frac{1}{2}\int_0^L xu_0^2(x) \, dx.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (xu)u_x \, dxdt &= \int_0^T \int_0^L x\frac{(u^2)_x}{2} \, dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T (\int_0^L -\frac{u^2}{2} \, dx + [u^2]_0^L) \, dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L u^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_0^L (xu)u_{xxx} dxdt &= -\int_0^T \int_0^L (xu)_x u_{xx} \, dxdt + \int_0^T [(xu)u_{xx}]_0^L \, dt \\
&= -\int_0^T \int_0^L (u + xu_x)u_{xx} \, dxdt \\
&= -\int_0^T \int_0^L uu_{xx} \, dxdt - \int_0^T \int_0^L xu_x u_{xx} \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt - \int_0^T [uu_x]_0^L \, dt - \int_0^T \int_0^L \frac{x(u_x^2)_x}{2} \, dxdt \\
&= \int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt + \int_0^T \int_0^L \frac{u_x^2}{2} \, dxdt - \int_0^T [x\frac{u_x^2}{2}]_0^L \, dt \\
&= \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt.
\end{aligned}$$

Somando os fatores em (3.5) e multiplicando por 2, obtemos

$$\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt - \int_0^L xu^2(x,T)\,dx + \int_0^L xu_0^2(x)\,dx - 3\int_0^T \int_0^L u_x^2\,dxdt - 2\int_0^T \int_0^L xa(x)u^2\,dxdt = 0. \tag{3.6}$$

Daí,

$$\begin{aligned} 3\int_0^T \int_0^L u_x^2\,dxdt &\leq \int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt + \int_0^L xu_0^2(x)\,dx \\ &\leq \int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt + L\int_0^L u_0^2(x)\,dx, \end{aligned}$$

então, se somarmos em ambos os lados $3\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt$, obtemos

$$3\int_0^T \int_0^L u_x^2\,dxdt + 3\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt \leq 4\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt + L\int_0^L u_0^2(x)\,dx. \tag{3.7}$$

Estimando

$$\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt \leq T \sup_{t\geq 0} \int_0^L u^2 dx = T\|u\|^2_{C([0,T];L^2(0,L))}$$

e utilizando (3.4), obtemos

$$\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt \leq T\|u_0\|_{L^2(0,L)}. \tag{3.8}$$

Aplicando a equação (3.8) em (3.7), concluimos que

$$3\left(\int_0^T \int_0^L u_x^2\,dxdt + \int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt\right) \leq 4T\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + L\|u_0\|^2_{L^2(0,L)},$$

daí

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{3.9}$$

A partir de (3.4) e (3.9) podemos afirmar que existe $C = C(L,T) > 0$ tal que

$$\|u\|_B \leq C\|u_0\|_{L^2(0,L)}.$$

Pela linearidade de $S(t)$, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} S(t)u_0 : L^2(0,L) & \to & C(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ u_0 & \mapsto & S(t)u_0, \end{array}$$

é lipschtziana, daí contínua. $\square$

Proposição 12. *Seja* $u \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$ *solução do sistema (3.1), então* u *é única.*

Demonstração: Supondo que existe $v \neq u$ tal que v soluciona o sitema linear, então definindo $w = u - v$, $w(x,t)$ resolve o seguinte sistema:

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + a(x)w = 0, \quad t > 0, \ x \in (0,L), \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ w_x(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ w(x,0) = 0, \ x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.10}$$

Dessa forma, temos que $w = S(t)0$ onde $S(t)$ representa o semigrupo de contrações gerado por $A = -\frac{\partial^3}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x} - a(x)$. Assim $u - v = w \equiv 0$, portanto $u \equiv v$. $\square$

3.2 Decaimento

Vamos analisar novamente o sistema (3.1). Definimos a energia do sistema por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2\,dx.$$

Multiplicando a primeira equação do sistema (3.1) por u e integrando formalmente no intervalo $(0,L)$ obtemos

$$\int_0^L uu_t\,dx = -\int_0^L uu_x\,dx - \int_0^L uu_{xxx}\,dx - \int_0^L a(x)u^2\,dx,$$

assim

$$\int_0^L \frac{(u^2)_t}{2}\, dx = -\int_0^L \frac{(u^2)x}{2}\, dx + \int_0^L u_x u_x x\, dx - [uu_x x]_0^L - \int_0^L a(x)u^2\, dx.$$

Utilizando o fato de que $u(0,t) = u(L,t) = 0$ temos

$$\frac{1}{2}\int_0^L (u^2)_t\, dx = -\frac{1}{2}[u^2]_0^L - \int_0^L \frac{(u_x^2)_x}{2}\, dx - \int_0^L a(x)u^2\, dx,$$

donde

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\int_0^L u^2\, dx = -\frac{1}{2}[u_x^2]_0^L - \int_0^L a(x)u^2\, dx. \tag{3.11}$$

Por fim, pelo fato de que $u_x(L,t) = 0$, vale

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}u_x^2(0,t) - \int_0^L a(x)u^2\, dx \leq 0. \tag{3.12}$$

Note que o termo $u_x^2(0,t)$ a princípio não está definido, tendo em vista que a solução $u \in C([0,T]L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$. Argumentos sobre tal função são registrados no apêndice B.

A desigualdade (3.12) nos quer dizer que a variação de energia é sempre não positiva, ou seja a função energia $E(t)$ é uma função não crescente. Nos cabe a pergunta, $E(t) \to 0$ quando $t \to \infty$? No caso afirmativo é possível encontrar um padrão para o decaimento? Ou seja, a energia em qualquer momento t é majorada por algum tipo de função?

3.2.1 O caso $a \equiv 0$

A ausência do termo de amortecimento $a(x)u$, nos dá o seguinte sistema:

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0, & t > 0,\ x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{3.13}$$

É fácil notar que se por exemplo $L = 2\pi$ e $u_0 = 1 - \cos x$, teremos que, $u = 1 - \cos x$ resolve o sistema. Mas também

$$\begin{aligned} E(t) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos x)^2\,dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} 1 - 2\cos x + \cos^2 x\,dx \\ &= \frac{1}{2}\left([x]_0^{2\pi} - 2[\sin x]_0^{2\pi} + [\frac{x}{2} - \frac{\sin(2x)}{4}]_0^{2\pi}\right) \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi. \end{aligned}$$

Portanto a energia não varia com o tempo. Dessa forma não teremos decaimento para tal solução. Logo, o modelo não será dissipativo, ou seja $E(t) \nrightarrow 0$, para valores arbitrários de L e de u_0. Nossa meta nessa sessão será então encontrar condições sobre L tais que ocorra o decaimento esperado e, se pudermos, estimá-lo.

Antes de iniciarmos definiremos o chamado "**conjunto crítico**", $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^+$, dado por

$$\mathcal{N} = \left\{\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2};\; k, l \in \mathbb{N}\right\}.$$

Lema 3. *Seja $L \in (0, +\infty)$. Se o problema da equação diferencial ordinária característica de (3.1)*

$$\begin{cases} \lambda u_0 + u_0' + u_0''' = 0, \quad x \in (0, L), \quad \lambda \in \mathbb{C}, \\ u_0(0) = u_0(L) = 0, \\ u_0'(0) = u_0'(L) = 0. \end{cases} \tag{3.14}$$

admite uma solução não trivial $u_0 \in H^3(0, L)$, então λ é um imaginário puro, isto é, podemos escrever $\lambda = -pi$ com $p \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Denotando por $\lambda = a + bi$, se u_0 for uma função complexa podemos escreve-la como $u_0(x) = v(x) + iw(x) \neq 0$ para algum x. Multiplicando a equação do sistema (3.14) por u_0 e integrando no intervalo $(0, L)$, obtemos

$$\int_0^L \lambda u_0^2\,dx + \int_0^L u_0 u_0'''\,dx + \int_0^L u_0 u_0'\,dx = 0.$$

Utilizando a integração por partes, tem-se

$$\int_0^L \lambda u_0^2\,dx - \int_0^L u_0' u_0''\,dx + [u_0 u_0'']_0^L\,dx + \int_0^L \frac{(u_0^2)'}{2}\,dx = 0,$$

onde, utilizando o fato de que $u_0(0) = u_0(L) = 0$, obtemos

$$\int_0^L \lambda u_0^2\, dx - \int_0^L \frac{(u_0'^2)'}{2}\, dx = 0.$$

e como $u_0'(0) = u_0'(L) = 0$, isso se torna

$$\int_0^L \lambda u_0^2\, dx = 0.$$

Note que, Se $\lambda = 0$ não há o que fazer visto que pode ser escrito na forma de imaginário puro. Supondo que $\lambda \neq 0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_0^L \lambda u_0^2\, dx &= \int_0^L (a+bi)(v+iw)^2\, dx = \int_0^L (a+bi)(v^2 - 2vwi - w^2)\, dx \\
&= \int_0^L (av^2 - aw^2 - 2bvw + bv^2 i - bw^2 i + 2bvwi)\, dx \\
&= \int_0^L (av^2 - aw^2 - 2bvw)\, dx + i\int_0^L (bv^2 - bw^2 + 2avw)\, dx = 0,
\end{aligned}$$

utilizando que a parte real é nula e a parte imaginária é nula, obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} a\int_0^L v^2\, dx - a\int_0^L w^2\, dx - 2b\int_0^L vw\, dx = 0 \\ \\ b\int_0^L v^2\, dx - b\int_0^L w^2\, dx + 2a\int_0^L vw\, dx = 0. \end{cases} \tag{3.15}$$

e se a = 0, o lema está provado.

Se $a \neq 0$, na primeira equação isolamos o termo

$$\int_0^L v^2\, dx = \int_0^L w^2\, dx + \frac{2b}{a}\int_0^L vw\, dx$$

e, substituindo na segunda equação, obtemos

$$b\left(\int_0^L w^2\, dx + \frac{2b}{a}\int_0^L vw\, dx\right) - b\int_0^L w^2\, dx + 2a\int_0^L vw\, dx = 0,$$

ou seja,

$$(b^2 + a^2) \int_0^L vw\, dx = 0.$$

De tal forma, tendo em vista que $b^2 + a^2 \neq 0$ teremos

$$\int_0^L vw\, dx = 0. \tag{3.16}$$

Voltando para o sistema (3.14), vamos escrever diretamente $u_0(x) = v(x) + w(x)i$ e obtemos

$$\begin{aligned}
(a + bi)(v + wi) + (v + wi)''' + (v + wi)' = 0,\\
av + awi + ibv - bw + v''' + iw''' + v' + iw' = 0,\\
v''' + v' + av - bw + i(w''' + w' + aw + bv) = 0.
\end{aligned}$$

Especificando a parte real e utilizando os dados de fronteiras do sistema (3.14), vale

$$\begin{cases} av - bw + v''' + v' = 0,\\ v(0) = v(L) = v'(0) = v'(L) = 0. \end{cases} \tag{3.17}$$

Multiplicando a equação do sistema (3.17) por v e integrando em $(0, L)$, temos

$$a \int_0^L v^2\, dx - b \int_0^L vw\, dx + \int_0^L vv'''\, dx + \int_0^L vv'\, dx = 0,$$

utilizando a integração por partes como nos cálculos acima, obtemos

$$a \int_0^L v^2\, dx - b \int_0^L vw\, dx = 0,$$

o que, aplicado juntamente com a equação (3.16), fornece

$$a \int_0^L v^2 dx = 0. \tag{3.18}$$

Vamos proceder da mesma forma especificando a parte imaginária e os dados de fronteira de (3.14), obtendo

$$\begin{cases} aw + bw + w''' + w' = 0, \\ w(0) = w(L) = w'(0) = w'(L) = 0. \end{cases} \tag{3.19}$$

Multiplicando a equação por w e integrando no intervalo $(0, L)$ temos

$$a\int_0^L w^2\,dx + b\int_0^L vw\,dx + \int_0^L ww'''\,dx + \int_0^L ww'\,dx,$$

o que analogamente implica

$$a\int_0^L w^2\,dx = 0. \tag{3.20}$$

Portanto, com a combinação de (3.18) e (3.20) temos que

$$a\left(\int_0^L v^2\,dx + \int_0^L w^2\,dx\right) = 0.$$

Então, $u_0 = v + wi \equiv 0$, o que é um absurdo, pois a solução esperada é não nula. Portanto $a = 0$ e podemos escrever $\lambda = -pi$, imaginário puro. □

Teorema 19. *O problema (3.14) possui uma solução não trivial $u_0 \in H^3(0, L)$, se e somente se, $L \in \mathcal{N}$.*

Uma demonstração sofisticada, utilizando Transformadas de Fourier e Teorema de Paley-Wiener pode ser encontrada em [2], Lema 3.5.
Aqui iremos proceder de forma diferente, utilizando argumentos de álgebra linear.

Demonstração: Utilizando o lema anterior, vamos chamar $\lambda = -pi$ e tomando a equação característica, a partir dos coeficientes da equação diferencial ordinária linear homogênea em (3.14), temos

$$\xi^3 + \xi - pi = 0, \tag{3.21}$$

onde ξ são números complexos. Por efeitos de simplificação, tendo em vista que não estamos procurando a forma da solução e sim trabalhando sua existência, vamos chamar $si = \xi$, e a equação característica nos dá

$$(si)^3 + (si) - pi = 0,$$
$$-s^3 i + si - pi = 0.$$

Multiplicando a equação acima por i obtemos, finalmente,

$$s^3 - s + p = 0. \tag{3.22}$$

Nossa primeira afirmação é que se a equação característica possui raiz dupla, então $u_0 \equiv 0$. Com efeito, se α for a raiz simples e β for uma raiz dupla podemos escrever

$$\begin{aligned} s^3 - s + p &= (s-\alpha)(s-\beta)^2 = 0 \\ &= (s-\alpha)(s^2 - 2s\beta + \beta^2) \\ &= s^3 - 2s^3\beta + s\beta^2 - \alpha s^2 + 2s\alpha\beta - \alpha\beta^2 \\ &= s^3 + s(-2\beta - \alpha) + s(\beta^2 + 2\alpha\beta) - \alpha\beta^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{cases} -2\beta - \alpha = 0 \\ \beta^2 + 2\alpha\beta = -1 \\ -\alpha\beta^2 = p. \end{cases} \tag{3.23}$$

Resolvendo o sistema, temos

$$\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \alpha = \mp\frac{2}{\sqrt{3}}, \quad p = \mp\frac{2}{3\sqrt{3}},$$

dessa forma teremos que a solução geral da equação de (3.14) é dada por

$$u_0(x) = c_1 e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}ix} + c_2 e^{\sqrt{\frac{1}{3}}ix} + c_3 x e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}ix},$$

onde c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{C}$. A primeira derivada

$$u_0'(x) = -2\sqrt{\frac{1}{3}}ic_1 e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}ix} + \sqrt{\frac{1}{3}}ic_2 e^{\sqrt{\frac{1}{3}}ix} + c_3\left(e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}ix} - 2x\sqrt{\frac{1}{3}}ie^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}x}\right).$$

Aplicando os valores de fronteira, temos o seguinte sistema em c_1, c_2 e c_3:

$$\begin{cases} u_0(0) = c_1 + c_2 = 0, \\ u_0(L) = c_1 e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} + c_2 e^{\sqrt{\frac{1}{3}}iL} + c_3 L e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} = 0, \\ u_0'(0) = -2\sqrt{\frac{1}{3}}ic_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}ic_2 + c_3 = 0, \\ u_0'(L) = -2\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}L}ic_1 + \sqrt{\frac{1}{3}}e^{\sqrt{\frac{1}{3}}L}ic_2 + (e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} - 2Li\sqrt{\frac{1}{3}}e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}L})c_3 = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

Substituindo a primeira equação ($c_1 = -c_2$), na segunda e na terceira obtemos o sistema homogêneo

$$\begin{cases} (e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} - e^{\sqrt{\frac{1}{3}}iL})c_1 + Le^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}L}c_3 = 0, \\ -\sqrt{3}ic_1 + c_3 = 0. \end{cases} \tag{3.25}$$

Utilizando a regra de Cramer, temos que o sistema só possuirá solução não nula se o determinante do mesmo for igual a 0. Assim

$$(e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} - e^{\sqrt{\frac{1}{3}}iL}) + Le^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL}\sqrt{3}i = 0,$$

logo

$$(1 + L\sqrt{3}i)e^{-2\sqrt{\frac{1}{3}}iL} = e^{\sqrt{\frac{1}{3}}iL},$$

portanto

$$(1 + L\sqrt{3}i) = e^{\sqrt{3}iL} = \cos(\sqrt{3}L) + i\sin(\sqrt{3}L).$$

O que só será verdade caso $L = 0$, que é uma contradição. Portanto o sistema só admite solução nula, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Mas isso nos daria uma solução de (3.14) nula, o que não é o procurado. Portanto, e equação característica com uma raiz de multiplicidade 2 não nos interessa.

Assumindo que a equação característica (3.21) possui três raízes simples r_1, r_2 e r_3, vamos trabalhar com o caso da solução geral dada por

$$u_0(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} + c_3e^{r_3x}.$$

Derivando e aplicando os valores de fronteira, novamente vamos obter um sistema algébrico. Para facilitar o cálculo utilizaremos a notação $e_j = e^{r_j}$ para $j = 1, 2, 3$.

$$\begin{cases} u_0(0) = c_1 + c_3 + c_3 = 0, \\ u_0(L) = e_1c_1 + e_2c_2 + e_3c_3 = 0, \\ u_0'(0) = r_1c_1 + r_2c_2 + r_3c_3 = 0, \\ u_0'(L) = r_1e_1c_1 + r_2e_2c_2 + r_3e_3c_3. \end{cases} \tag{3.26}$$

Vamos trabalhar com a matriz do sistema e realizar escalonamentos obtendo

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1e_1 & r_2e_2 & r_3e_3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & e_2 - e_1 & e_3 - e_1 \\ 0 & r_2 - r_1 & r_3 - r_1 \\ 0 & r_2(e_2 - e_1) & r_3(e_3 - e_1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & e_3 - e_1 - \frac{r_3-r_1}{r_2-r_1}(e_2 - e_1) \\ 0 & r_2 - r_1 & r_3 - r_1 \\ 0 & 0 & (r_3 - r_2)(e_3 - e_1) \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & r_2 - r_1 & r_3 - r_1 \\ 0 & 0 & e_3 - e_1 - \frac{r_3-r_1}{r_2-r_1}(e_2 - e_1) \\ 0 & 0 & (r_3 - r_2)(e_3 - e_1) \end{pmatrix}.$$

Tomando as linhas $1, 2$ e 4 da matriz acima, formamos um determinante menor. O sistema homogêneo (3.26) só terá solução não nula se o tal determinante for 0, assim

$$(r_2 - r_1)(r_3 - r_2)(e_3 - e_1) = 0.$$

Como sabemos que nenhuma raiz é dupla, é forçado que $e_3 = e_1$. Analogamente, podemos ver que $e_2 = e_1$. Dessa forma

$$e^{r_1 L} = e^{r_2 L} = e^{r_3 L}, \tag{3.27}$$

sendo r_1, r_2 e r_3 raízes de (3.22) temos que is_1, is_2 e is_3 seriam raízes da equação característica de coeficientes reais da equação. Portanto podemos escrever a equação acima como

$$e^{is_1 L} = e^{is_2 L} = e^{is_3 L}$$

onde, expandindo as exponenciais pela fórmula de Euler vamos obter

$$cos(Ls_1) = cos(Ls_2) = cos(Ls_3),$$
$$sen(Ls_1) = sen(Ls_2) = sen(Ls_3).$$

Daí concluimos que existem $k, l \in \mathbb{N}$ tais que

$$s_2 = s_1 + k\frac{2\pi}{L} \quad \text{e} \quad s_3 = s_1 + k\frac{2\pi}{L} + l\frac{2\pi}{L}. \tag{3.28}$$

Para definir os valores de L que nos trazem solução do problema iremos utilizar as seguintes equações, que associam as raízes do polinômio aos coeficientes:

$$\begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 = 0, \\ s_1 s_2 + s_1 s_3 + s_2 s_3 = -1, \\ s_1 s_2 s_3 = -p. \end{cases} \tag{3.29}$$

Da primeira equação tiramos que

$$3s_1 + s_1 + k\frac{2\pi}{L} + s_1 + k\frac{2\pi}{L} + l\frac{2\pi}{L} = 0,$$

assim

$$3s_1 + 4k\frac{\pi}{L} + 2l\frac{\pi}{L} = 0,$$

obtendo

$$s_1 = \frac{-2\pi(2k+l)}{3L},$$

donde

$$s_2 = \frac{-2\pi(-k+l)}{3L}; \quad s_3 = \frac{-2\pi(-k-2l)}{3L}. \tag{3.30}$$

Substituindo (3.30) na segunda equação de (3.29), temos

$$4\pi^2\frac{(2k+l)(-k-2l)}{9L^2} + 4\pi^2\frac{(2k+l)(-k-2l)}{9L^2} + 4\pi^2\frac{(-k+l)(-k-2l)}{9L^2} = -1,$$

logo

$$\begin{aligned} -9L^2 &= 4\pi^2[(2k+l)(-2k-l) + (-k+l)(-k-2l)] \\ &= 4\pi^2(-4k^2 - 4kl - l^2 + k^2 + 2kl - kl - 2l^2) \\ &= 4\pi^2(-3k^2 - 3kl - 3l^2), \end{aligned}$$

donde

$$L^2 = \frac{12}{9}\pi^2(k^2 + kl + l^2),$$

ou seja

$$L = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\sqrt{k^2+kl+l^2}.$$

Portanto, se (3.14) possuir uma solução não nula, então $L \in \mathcal{N}$.

Reciprocamente, se $L \in \mathcal{N}$, existem $k \in \mathbb{N}$ e $l \in \mathbb{N}$ tais que $L = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi\sqrt{k^2+kl+l^2}$. Basta tomar $s_1 = -\frac{1}{3}(2k+l)\frac{2\pi}{L}$ com $s_2 = s_1 + k\frac{2\pi}{L}$ $s_3 = s_1 + (k+l)\frac{2\pi}{L}$. Teremos que $e_1 = e_2 = e_3$ do sistema (3.26), assim todos os determinantes menores após o escalonamento terão valor nulo, o que implica o sistema ter uma solução não nula. Isto é, existem c_1, c_2 e $c_3 \in \mathbb{C}$, não simultaneamente nulos, tais que

$$u_0(x) = c_1e^{\xi_1 x} + c_2e^{\xi_2 x} + c_3e^{\xi_3 x}$$

soluciona (3.14) com seus valores de fronteira. □

Corolário 4. *Se u_0 e λ solucionam (3.14), então $u(x,t) = u_0(x)e^{\lambda t}$ é solução de (3.13) e não possui decaimento.*

Demonstração: $u_0e^{\lambda t}$ resolve (3.13) pois

$$\begin{aligned} u_0e^{\lambda t}_t + (u_0)_xe^{\lambda t} + (u_0)_{xxx}e^{\lambda t} &= u_0\lambda e^{\lambda t} + u_0'e^{\lambda t} + u_0'''e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda t}[\lambda u_0 + u_0'(x) + u_0'''(x)] = 0. \end{aligned}$$

Além disso $u(0,t) = u_0(0)e^{\lambda t} = 0$, $u(L,t) = u_0(L)e^{\lambda t} = 0$ e $u_x(L,t) = u_0'(L)e^{\lambda t} = 0$. Obtemos o desejado.

Agora utlizando (3.12), a variação de energia do sistema será dada por

$$\frac{d}{dt}E(t) - \frac{1}{2}u_x^2(0,t) = 0, \tag{3.31}$$

pois $u_x(0,t) = u_0'(0)e^{\lambda t} = 0$. Portanto não há decaimento. □

Lema 4. *Seja u solução do sistema (3.13), então vale a estimativa*

$$\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{T}\|S(t)u_0\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} + \|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)}. \tag{3.32}$$

Demonstração: Multiplicando a equação do sistema (3.13) por $(T-t)u$ e integrando em $(0,T)\times(0,L)$ obtemos

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_t\,dxdt+\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_x\,dxdt+\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_{xxx}\,dxdt=0,$$

onde, utilizando integração por partes e Teorema de Fubini, vamos analisar cada fator separdamente

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_t\,dxdt &= \int_0^L\int_0^T Tuu_t\,dtdx-\int_0^T\int_0^L (tu)u_t\,dtdx\\
&= T\int_0^L\int_0^T \frac{(u^2)_t}{2}\,dtdx+\int_0^L\int_0^T (u+tu_t)u\,dtdx\\
&- \int_0^L Tu^2(x,T)\,dx\\
&= \int_0^L T\left[\frac{u^2(x,T)}{2}-\frac{u_0^2(x)}{2}\right],\ dx\\
&+ \int_0^L\int_0^T [u^2+tuu_t]\,dxdt-\int_0^L Tu^2(x,T)\,dx\\
&= -T\int_0^L \frac{u_0^2(x)}{2}\,dx+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt.
\end{aligned}$$

As outras integrais são facilmente analisadas como na boa colocação

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_x\,dxdt=0,$$

e

$$\int_0^T\int_0^L (T-t)uu_{xxx}\,dxdt=\int_0^T (T-t)\frac{u_x^2(0,t)}{2}\,dt.$$

Juntando os fatores acima obtemos

$$\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt-T\int_0^L u_0^2(x)\,dx+\int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)\,dt=0. \tag{3.33}$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\int_0^L u_0^2(x)\,dx &= \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt + \int_0^T \frac{(T-t)}{T}u_x^2(0,t)\,dt \\
&\leq \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt + \int_0^T u_x^2(0,t)\,dt.
\end{aligned}
$$

O que prova (3.32). □

Lema 5. *Dado $T > 0$, definindo*

$$
N_T := \left\{u_0 \in L^2(0,L); u = S(t)u_0 \text{ satisfaz } u_x(0,t) = 0 \in L^2(0,T)\right\},
$$

onde u é solução mild do sistema (3.13).

Se $L \in (0,+\infty)\backslash\mathcal{N}$, então $N_T = \{0\}$.

Demonstração: Primeiro devemos observar que se $T < T'$ então $N_{T'} \subset N_T$. Com efeito, se $u_0 \in N_{T'}$ então sendo $u = S(t)u_0$ temos que $u_x(0,t) = 0\,\forall t \in (0,T')$, mas como $[0,T] \subset [0,T']$ valerá $\forall t \in [0,T]$.

É fácil verificar que N_T é um espaço vetorial, pois $N_T \in L^2(0,L)$, $0 \in N_T$ e dados $k \in \mathbb{R}$, $u_0, v_0 \in N_T$ escrevendo

$$
U(x,t) = S(t)[ku_0(x) + v_0(x)] = kS(t)u_0(x) + S(t)v_0(x),
$$

então $U(x,t) \in N_T$, tendo em vista que

$$
U_x(0,t) = k[S(t)u_0(x)] + [S(t)v_0(x)] = 0.
$$

Agora sendo $\{u_0^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset N_T$ uma sequência onde $\|u_0^n\|_{L^2(0,L)} \leq 1$, sendo $u^n(x,t) = S(t)u_0^n(x)$, teremos

$$
u_t^n = -u_x^n - u_{xxx}^n \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L)),
$$

de acordo com o Lema 1. Pela Proposição 11, vale que

$$
u \in L^2(0,T;H^1(0,L)).
$$

Dessa forma podemos utilizar o Teorema 16 e as imersões

$$H^1(0,L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,L) \hookrightarrow H^{-2}(0,L), \tag{3.34}$$

para afirmar que $u^n = S(t)u_0^n$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(0,L)$. Portanto, dada u_0^n temos que existe uma subsequência u^m convergente em $L^2(0,T;L^2(0,L))$. Assim $u^m(x,0) = u_0^m$ é uma subsequência de u_0^n e converge em $L^2(0,L)$. Temos dessa forma que, a bola unitária de N_T é compacta, como consequência do lema de Riesz (Corolário 2), comprovamos que N_T tem dimensão finita.

Sendo $T' > 0$ qualquer, da primeira afirmação, temos que, se existe algum $0 < T < T'$, tal que $N_T = \{0\}$, teremos provado o lema. A função

$$\begin{aligned} D : [0,\infty) &\rightarrow \mathbb{N} \\ T &\mapsto D(T) = \dim N_T, \end{aligned}$$

é uma função não crescente, tendo em vista que $N_{T'} \subset N_T$. Assim, como os valores de $\dim N_T$ variam em $\mathbb{N}$ e os valores de T variam em $\mathbb{R}^+$, podemos notar que $\exists\, T, \epsilon > 0$ tais que $T < T+\epsilon < T'$ e $\dim N_T = \dim N_{T+\epsilon}$, o que implica $N_{\bar{T}} = N_T$ para $T \leq \bar{T} \leq T+\epsilon$.

Dado $u_0 \in N_T$, escrevendo $u(x,t) = S(t)u_0$ como anteriormente, se $0 < s < \epsilon$ então para algum $\tau \in (0,T)$, $S(\tau)(S(s)u_0) = S(\tau+t)u_0 = S(\tau)u_0 + S(s)u_0$. Derivando essa função em relação a x, e aplicando no ponto $x = 0$, o valor encontrado será 0, pois $\tau, s \in (0,T)$ e $u_0 \in N_T$. Daí tiramos que $S(s)u_0 \in N_T$. Por N_T ser um espaço vetorial temos que

$$\frac{S(s)u_0 - S(t)u_0}{s} \in N_T. \tag{3.35}$$

Definimos agora, um conjunto auxiliar $M_T := \{\bar{u} = S(\tau)\bar{u}_0;\ \bar{u}_0 \in N_T \text{ e } 0 \leq \tau \leq T\}$. Pela definição, $M_T \subset C([0,T];L^2(0,L))$.

Por N_T ter dimensão finita, M_T também será um espaço vetorial de dimensão finita. Como a solução $u \in L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ temos que $u_{xxx} \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$, sendo assim $u_t = -u_x - u_{xxx} \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$.

Por outro lado, utilizando (3.35), observamos que para $0 < s < \epsilon$ teremos $\frac{S(s+t)u_0 - S(t)u_0}{s} \in M_T$. Mas como M_T tem dimensão finita e está contido em um espaço de Banach $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$, então M_T é fechado nesse espaço. Dessa forma

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(t+h)u_0 - S(t)u_0}{h} = u_t \in M_T \subset C([0,T];L^2(0,L)),$$

daí obtemos que $u \in C^1([0,T];L^2(0,L))$ e poderemos escrever

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = u_t(x,0) \in L^2(0,L). \tag{3.36}$$

Como $u_{xxx}(x,0) = -u_t(x,0) - u_x(x,0) \in L^2(0,L)$, então $\frac{d^3u_0}{dx^3}(x) \in L^2(0,L)$, o que implica $u_0(x) \in H^3(0,L)$. Dessa forma $u_0 \in \mathcal{D}(A)$.

Como $A(u_0) = -u_x(x,0) - u_{xxx}(x,0) = u_t(x,0)$ e como $u_t(x,t) \in M_T$ temos que $A(u_0) \in N_T$.

Tendo que $u \in C([0,T];\mathcal{D}(A))$ implicando $u_x \in C([0,T];C[0,L])$ e por fim $u_x(0,t) \in C([0,T])$. Dessa forma, como $u_x(0,t) = 0$ teremos

$$\left(\frac{du_0}{dx}\right)_{|x=0} = u_x(0,0), \tag{3.37}$$

isto é, $u_0'(0) = 0$. Agora supondo que $N_T \neq \{0\}$, escreveremos $\mathbb{C}N_T$ como a complexificação [1] do espaço N_T. Como $\mathbb{C}N_T \neq \{0\}$, tomando $v_0 \in \mathbb{C}N_T$ não nulo, com $\dim \mathbb{C}N_T = n$, existem $a_0, a_1, ..., a_n$ de forma que

$$a_0v_0 + a_1Av_0 + a_2A^2v_0 + ... + a_nA^nv_0 = 0, \tag{3.38}$$

pois, $v_0, Av_0, ..., A^nv_0$ são linearmente dependentes. Sejam $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n \in \mathbb{C}$ as raízes do polinômio $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$, podemos escrever (3.38) como

$$(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)...(A-\lambda_n)v_0 = 0.$$

Dessa forma, existe pelo menos um $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(A-\lambda)w_0 = 0$ para $w_0 \in \mathbb{C}N_T$ não nulo, ou seja, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{C}N_T & \to & \mathbb{C}N_T \\ u_0 & \mapsto & A(u_0), \end{array}$$

possui pelo menos um autovalor, isto é, existirá $\lambda \in \mathbb{C}$ e $u_0 \in \{v \in H^3(0,L)\setminus\{0\}; v(0) = v(L) = v'(L) = v'(0) = 0\}$ que resolva o problema de autovalores

$$\lambda u_0 = -u_0' - u_0'''.$$

[1] Trata-se de do espaço formado pelas funções $a + bi$ onde $a, b \in N_T$

Mas pelo teorema anterior, temos que o problema só é resolvido quando $L \in \mathcal{N}$. Assim concluímos que se $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$ então $N_T = \{0\}$. □

Proposição 13 (Observabilidade). *Se $L \in (0, +\infty) \setminus \mathcal{N}$ então existe $c(L, T) > 0$ tal que para toda $u_0 \in L^2(0, L)$ valerá*

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq c\|u_x(0,t)\|_{L^2(0,T)}. \tag{3.39}$$

Demonstração: Supondo que a afirmação seja falsa, então para todo $c > 0$ teremos que $\frac{\|u_0\|_{L^2(0,L)}}{\|u_x(0,t)\|_{L^2(0,T)}} > c$. Assim existe uma sequência $\{u_0^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $L^2(0, L)$ normalizada, isto é $\|u_0^n\|_{L^2(0,L)} = 1$, tal que $\frac{1}{\|u_x^n(0,t)\|_{L^2(0,T)}} \to \infty$ quando $n \to \infty$, onde $u^n(x, t) = S(t)u_0^n$, isso acontece somente quando

$$\|u_x^n(0, t)\|_{L^2(0,T)} \to 0. \tag{3.40}$$

Como provado na boa colocação, $u^n \in L^2(0, T; H^1(0, L))$ e como $u_t^n = -u_x^n - u_{xxx}^n$ pelo Teorema 1, $\{u_t^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0, T; H^{-2}(0, L))$. Utilizando novamente que

$$H^1(0, L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0, L) \hookrightarrow H^{-2}(0, L),$$

e o Teorema 16, temos que $\{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é relativamente compacto em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Dessa forma existe $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^n\}_{n\in\mathbb{N}}$ convergente em $L^2(0, T; L^2(0, L))$. Observe que dados $p, q \in \mathbb{N}$, u_0^p e u_0^q estão em $L^2(0, L)$, daí $u_0^p - u_0^q \in L^2(0, L)$, escrevendo $U(x, t) = S(t)(u_0^p - u_0^q)$, pelo Lema 4 e a linearidade do problema, valerá

$$\|U(x, 0)\|_{L^2(0,L)}^2 \leq \frac{1}{T}\|U(x, t)\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|U_x(0, t)\|_{L^2(0,T)}^2,$$

ou seja

$$\|u_0^p - u_0^q\|_{L^2(0,L)}^2 \leq \frac{1}{T}\|S(t)(u_0^p - u_0^q)\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 + \|U_x(0, t)\|_{L^2(0,T)}^2,$$

Como

$$\|S(t)(u_0^p - u_0^q)\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 = \|S(t)u_0^p - S(t)u_0^q\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 = \|u^p - u^q\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}^2 \to 0,$$

pois $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é convergente e por hipótese da suposição $\|U_x(0, t)\|_{L^2(0,T)} \to 0$, temos que $\|u_0^p - u_0^q\|_{L^2(0,L)} \leq \epsilon$ quando $p, q > N_0$ para algum N_0. Portanto u_0^n é uma sequência de Cauchy em $L^2(0, L)$. Como $L^2(0, L)$ é um espaço completo, temos que u_0^m converge, diremos $u_0^m \to u_0$ em $L^2(0, L)$.

Pela Proposição 11, sabemos que a função

$$\begin{array}{rcl} S(t)u_0^m : L^2(0,L) & \to & C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \\ u_0^m & \mapsto & u^m = S(t)u_0^m \end{array}$$

é contínua, o que implica $u^m(x,t) = S(t)u_0^m \to u(x,t) = S(t)u_0$. Integrando (3.12) no intervalo $(0,T)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)} = \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,T)\,dt + \int_0^L\int_0^T a(x)u^2\,dxdt,$$

utilizando (3.40) e a Proposição (8), calculamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)} &= \frac{1}{2}\int_0^L u_0^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,T)\,dt + \int_0^L\int_0^T a(x)u^2\,dxdt \\ &\leq \liminf_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}\int_0^L (u_n)_0^2\,dx - \frac{1}{2}\int_0^L u_n^2(x,T)\,dt + \int_0^L\int_0^T a(x)u_n^2\,dxdt\right] \\ &= \liminf_{n\to\infty}\int_0^T (u_n)_x^2(0,t)\,dt = 0, \end{aligned}$$

assim obtemos que $u_x(0,t) = 0$ em $L^2(0,T)$. Mas nesse caso teríamos que $\|u_0\|_{L^2(0,L)} = 1$ e $u_x(0,t) = 0$. Mas como $L \in (0,+\infty)\setminus\mathcal{N}$, pelo lema anterior, $N_T = \{0\}\ \forall T > 0$ e não existirá tal função. Portanto é provada (3.39) quando $L \notin \mathcal{N}$. □

Teorema 20. *Seja u solução de*

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0, \quad t > 0, \quad x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{3.41}$$

Se $L \notin \mathcal{N}$, então existirá $k > 0$ e $\mu > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(t) \leq k\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}e^{-\mu t}, \tag{3.42}$$

Para todo $t > 0$ e $u_0 \in L^2(0,L)$.

Demonstração: Multiplicando a equação do sistema (3.13) por u e integrando no intervalo $[0,L]$ obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^L uu_t dx + \int_0^L uu_x\,dx + \int_0^L uu_{xxx}\,dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(0,L}(t) - \int_0^L u_x u_{xx}\,dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(0,L}(t) - \frac{1}{2}\int_0^L (u_x^2)x\,dx. \end{aligned}$$

Integrando a equação acima no intervalo $(0, T)$ para algum $T > 0$ temos que

$$\frac{1}{2}\left[\|u(x,T)\|^2_{L^2(0,L)} - \|u_0(x)\|^2_{L^2(0,L)}\right] = -\|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)}.$$

Multiplicando por $(1 + c)$ onde c é a constante de observabilidade definida em (3.39) $(\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq c\|u_x(0, L)\|_{L^2(0,T)})$, obtemos

$$\begin{aligned}(1+c)\|u\|^2_{L^2(0,T)}(T) &= \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - c\|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)} \\ &+ c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - \|u_x(0,s)\|^2_{L^2(0,T)}.\end{aligned}$$

Utilizando a observabilidade $\|u_0\|_{L^2(0,L)} - c\|u_x(0, L)\|_{L^2(0,T)} \leq 0$ vale

$$\begin{aligned}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - c\|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)} &+ c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - \|u_x(0,s)\|^2_{L^2(0,T)}. \\ &\leq c\|u_0\|^2 - \|u_x(0,t)\|^2_{L^2(0,T)} \leq c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)},\end{aligned}$$

e os extremos nos dão

$$(1+c)\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) \leq c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)},$$

o que implica

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) \leq \frac{c}{1+c}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}.$$

Chamando $\frac{c}{1+c} = \gamma$ temos que $0 < \gamma < 1$.

Agora, note que

$$\begin{aligned}\|S(T)\|^2_{\mathcal{L}(L^2)} &= \sup_{\|u_0\|=1} \|S(T)u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\ &\leq \sup_{\|u_0\|=1} \gamma^2\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\ &< \sup_{\|u_0\|=1} \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} = 1.\end{aligned}$$

Portanto $\|S(T)\|_{\mathcal{L}(L^2)} < 1$. Daí podemos afirmar que

$$\omega_0 = \inf_{t\geq 0} \frac{\ln\|S(t)\|}{t} \leq \frac{\ln\|S(T)\|}{T} < 0. \tag{3.43}$$

Utilizando o Teorema 9 temos que para todo $t > 0$ existe $\omega_0 < \omega < 0$ tal que

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t},$$

daí

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(t) = \|S(t)u_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq \left(\|S(t)\|\|u_0\|_{L^2(0,L)}\right)^2 \leq \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}Me^{\omega t}.$$

Chamando $\|u_0\|_{L^2(0,L)}M = k$ e $\omega = -\mu$ provamos o desejado. □

3.2.2 O caso $a(x) \neq 0$

Nessa sessão iremos supor que $a \in L^\infty(0,L)$ possui a seguinte propriedade:

$$\exists a_0; a(x) \geq a_0 > 0 \ \forall x \in \omega \subset (0,L), \tag{3.44}$$

Onde ω é um conjunto aberto de $(0,L)$.

O termo $a(x)u$ na equação do sistema (3.1) agora funcionará como um mecanismo de amortecimento (ou damping) da energia do sistema, trabalhando exatamente para garantir que haja decaimento no caso em que $L \in \mathcal{N}$.

Observe que, no caso em que $\omega = (0,L)$, isto é, o amortecimento atua em todo ponto $x \in (0,L)$, a obtenção do decaimento fica trivial. Com efeito, de (3.12), segue que

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{1}{2}u_x^2(0,t) + \int_0^L a(x)u^2\,dx = 0,$$

donde

$$\frac{d}{dt}E(t) + 2a_0E(t) \leq 0, \tag{3.45}$$

pois $\int_0^L a(x)u^2\,dx \geq a_0\int_0^L u^2\,dx$. Multiplicando (3.45) por e^{2a_0t} obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t)e^{2a_0t} + 2a_0E(t)e^{2a_0t} \leq 0,$$

donde utilizando a propriedade da derivada

$$\frac{d}{dt}(E(t)e^{2a_0t}) \leq 0.$$

Integrando em $(0,t)$ para qualquer $t>0$, obtemos

$$E(t)e^{2a_0t}-E(0)\le 0,$$

por fim, multiplicando pelo fator e^{-2a_0t}, obtemos o desejado, dado por

$$E(t)\le \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}e^{-2a_0t}.$$

O fato de que um mecanismo de amortecimento que age sobre todo o intervalo $(0,L)$ garante o decaimento exponencial para qualquer L, nos motiva a enfraquecer tal hipótese. Daí surge o termo "amortecimento localizado", neste caso, o conjunto ω citado, é um aberto de $(0,L)$, estritamente contido em $(0,L)$. Para provar o decaimento neste caso, caminharemos em busca da observabilidade, agora para o caso com amortecimento localizado e veremos que seja qual for $L\in(0,\infty)$ a energia do sistema (3.1) decai exponencialmente.

Teorema 21. *Seja $u(x,t)$ solução do sistema*

$$\begin{cases} u_t+u_x+u_{xxx}+a(x)u=0, \quad t>0, \quad x\in(0,L),\\ u(0,t)=u(L,t)=0, \quad t>0\\ u_x(L,t)=0, \quad t>0\\ u(x,0)=u_0(x)\in L^2(0,L), \end{cases} \tag{3.46}$$

onde $a(x)\in L^\infty(0,L)$ e $a(x)\ge a_0>0$ para todo $x\in\omega$, sendo ω um conjunto aberto de $(0,L)$.

Então para qualquer $L\in(0,+\infty)$ existirá $k,\mu>0$ tais que, para todo $t\ge 0$ valerá

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(t)\le ke^{-\mu t}.$$

Demonstração: Assim como na demonstração do Lema 4, vamos multiplicar a equação por $(T-t)u$ e integrar em $(0,T)\times(0,L)$, de forma a conseguirmos

$$\begin{aligned}\int_0^L u_0^2\,dx &= \int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt+\int_0^T(T-t)u_x^2(0,t)\,dt+\\ &+ 2\int_0^T\int_0^L (T-t)a(x)u^2\,dxdt.\end{aligned}$$

Note que, exceto pelo último termo, que é imediato, as outras integrais estão resolvidas detalhadamente em (3.33). Daí tiramos que

$$\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}\le \frac{1}{T}\int_0^T\int_0^L u^2\,dxdt+\int_0^T u_x^2(0,t)\,dx+2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxdt. \tag{3.47}$$

Nossa próxima afirmação é que existe $c_1 > 0$ independente de u tal que

$$\int_0^T \int_0^L u^2\, dxdt \leq c_1 \left[\int_0^T u_x^2(0,t)\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2\, dxdt\right]. \qquad (3.48)$$

Vamos utilizar um argumento de compacidade-unicidade. De fato se a afirmação for falsa, então para toda constante c_1 teremos alguma u solução de (3.46) tal que

$$\frac{\|u\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}}{\int_0^T u_x^2(0,t)\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2\, dxdt} > c_1.$$

Assim, podemos afirmar que existe uma sequência u_n de soluções de (3.46) tal que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}}{\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}u_n(0,t)\right]^2\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u_n^2\, dxdt} = +\infty.$$

Agora iremos normalizar $u_n(x,t)$, sendo $\lambda_n = \|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}$, chamando $v_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}$, teremos que v_n resolve o problema (3.46) porém com dado inicial $v_n(x,0) = \frac{u_n(x,0)}{\lambda_n}$. E como foi normalizado $\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1$. Dessa forma, o limite acima nos dará

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}v_n(0,t)\right]^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v_n^2\, dxdt\right] = 0.$$

Escrevendo (3.47) para v_n, temos que

$$\|v_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{T}\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}v_n\right]^2 (0,t)\, dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)v_n^2\, dxdt,$$

como o lado direito converge para zero podemos dizer que existe $v_n(x,0)$, limitada em $L^2(0,L)$. Juntando ao fato de que a energia $\frac{1}{2}\|v_n\|^2_{L^2(0,L)}(t)$ é decrescente temos que existe M tal que

$$\|v_n(x,t)\|^2_{L^2(0,L)} \leq M \ \forall\, 0 \leq t \leq T.$$

Aplicando a desigualdade (3.9) obtemos

$$\|v_n\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|v_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)M^2,$$

o que mostra que $\{v_n\}_{n\in N}$ é limitada em $L^2(0,T;H^1(0,L))$. Agora como $(v_n)_t = -(v_n)_x - (v_n)_{xxx} - a(x)(v_n)$ temos que $(v_n)_t \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$. Aplicando novamente o Teorema 16 e utilizando a imersão

$$H^1(0,L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,L) \hookrightarrow H^{-2}(0,L), \qquad (3.49)$$

chegamos que $\{v_n\}_{n\in N}$ é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(0,L))$, Assim podemos extrair uma subsequência convergente $\{v_m\}_{m\in N}$, tal que $v_m \to v$ em $L^2(0,T;L^2(0,L))$.

É claro que $\|v_m\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1$ implica $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1$, mas utilizando a Proposição 8 temos que

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{m\to\infty}\left[\int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}v_m(0,t)\right)^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v_m^2\,dxdt\right] \\ &\geq \int_0^T \left(\frac{\partial}{\partial x}v(0,t)\right)^2 dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)v^2\,dxdt. \end{aligned}$$

O que garante que $a(x)v \equiv 0$ quando $x \in (0,L)$. Portanto v é solução também de

$$v_t + v_x + v_{xxx} = 0, \quad \forall x \in (0,L), \quad t > 0.$$

Porém, o Teorema da unicidade de Holmgren, nos garante que isso só é possível quando $v \equiv 0$ para todo $x \in [0,L]$ e $t \in (0,T)$ [2]. Mas assim chegaríamos a uma contradição, tendo em vista que $\int_0^T\int_0^L v^2 dxdt = 1$. Portanto a estimativa (3.48) é válida.

Agora facilmente substituindo (3.48) em (3.47) temos a seguinte desigualdade, o que chamaremos de observabilidade com damping:

$$\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq c\left[\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxdt\right]. \tag{3.50}$$

Integrando a equação (3.11) no intervalo $(0,T)$ obtemos

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) = \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - \int_0^T u_x^2(0,s)\,ds - 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxds.$$

Semelhante ao caso sem damping, multiplicaremos por $(1+c)$ onde c é a constante de observabilidade de (3.50) e temos

[2]Para qualquer $\xi \in \omega$ tem-se: $u(\xi,t) = u_x(\xi,t) = u_{xx}(\xi,t) = 0$. Aplicando o teorema de Holmgren, obtemos $u(x,t) \equiv 0$ $\forall x \in (0,L)$, $t \in (0,T)$.

$$
\begin{aligned}
(1+c)\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) &= (1+c)\left[\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} - \int_0^T u_x^2(0,s)\,ds - 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxds\right]\\
&= c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}\\
&+ (1+c)\left[-\int_0^T u_x^2(0,s)ds - 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxds\right]\\
&\leq c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + c\left[\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxdt\right]\\
&- c\left[\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u^2\,dxdt\right]\\
&= c\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
$$

Daí tiramos a estimativa principal

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) \leq \frac{c}{1+c}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{3.51}$$

Novamente $\frac{c}{1+c} = \gamma < 1$. Logo, a propriedade de semigrupos garante o decaimento como na demonstração do Teorema 20. $\square$

Capítulo 4

A KdV não linear

Agora o problema considerado será

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, & t > 0, \quad x \in (0, L), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x) \in L^2(0,L), \end{cases} \tag{4.1}$$

Onde $a(x) \in L^\infty(0,L)$ e $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \omega \subset (0,L)$, sendo ω um subconjunto aberto de (0,L).

A equação KdV nesta forma, possui um fator não linear, dado por uu_x; esse modelo apresenta algumas sutilezas em relação ao trabalho feito na KdV linearizada, tanto para chegarmos ao decaimento, quanto para a boa colocação. Existência e unicidade de soluções fortes (regulares) para qualquer $L > 0$ finito, foram registradas em [18], [19]. Nós vamos trabalhar com soluções milds (fracas); por isso, para provar estimativas necessárias, iremos aproximar a função inicial $u_0(x)$ pelas funções suficientemente regulares. Isto garante a existência de soluções fortes e nós dá a possibilidade de executar as ações necessárias. Pela densidade, vamos obter as estimativas desejadas para soluções fracas, veja [18].

4.1 Boa colocação.

No problema não linear estaremos trabalhando com soluções no conjunto $C([0,+\infty];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$. Note que, sendo $A = -\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial^3}{\partial x^3} - a(x)$, pelo trabalho feito no caso linear, sabemos que A gera um semigrupo de contrações em $L^2(0,L)$. O que devemos considerar agora é uma equação no caso não homogêneo, para tentar chegar a alguma solução de (4.1). Considere o problema homogêneo

$$\begin{cases} u_t = -(\partial_x + \partial_x^3 + a(x))u + f(x,t), & t \in (0,T), \quad x \in (0,L), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{4.2}$$

Desta forma se escolhermos $f = -uu_x$ e ainda uu_x pertencer a $L^1(0,T;L^2(0,L))$, então o problema, como anteriormente (equação (2.14)), satisfazendo a equação integral

$$u(x,t) = S(t)u_0(x) + \int_0^t S(t-s)f(x,s)\,ds,$$

o que nos motiva a definir o operador

$$\begin{array}{rcl} \Phi : X_T & \to & X_T \\ u & \mapsto & S(t)u_0(x) - \displaystyle\int_0^t S(t-s)uu_x(x,s)ds, \end{array}$$

$X_T = C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,L;H_0^1(0,L))$.

Nosso objetivo agora é mostrar que Φ possui um único ponto fixo, isto é, um único elemento $x \in X_T$ tal que $\Phi(u) = u$. Em passos, queremos mostrar que a aplicação Φ está bem definida e ainda é uma contração de X_T em X_T para uma escolha adequada de T. Assim, como X_T é um espaço completo, poderemos aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach provando que a solução existe localmente. Depois estenderemos os resultados para $T > 0$ qualquer, provando a existência global da solução.

Tendo em vista a Proposição 11, nos restará se preocupar com o "fator não linear" da solução, dado por

$$\int_0^t S(t-s)uu_x(x,s)\,ds.$$

Lema 6. *A aplicação*

$$\begin{array}{rcl} L^2(0,T;H^1(0,L)) & \to & L^1(0,T;L^2(0,L)) \\ u & \mapsto & uu_x, \end{array}$$

está bem definida e é contínua.

Demonstração: Primeiro vamos relembrar que $H^1(0,L) \hookrightarrow L^\infty(0,L)$, daí existe $C_1 \geq 0$ tal que $\|u\|_{L^\infty(0,L)} \leq C_1\|u\|_{H^1(0,L)}$.

Dados $u, v \in L^2(0,T;H^1(0,L))$, temos

$$
\begin{aligned}
\|uu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} &= \|uu_x + vu_x - vu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\
&\leq \int_0^T \|(u-v)u_x\|_{L^2(0,L)}\, dt + \int_0^T \|v(u_x - v_x)\|_{L^2(0,L)}\, dt \\
&\leq \int_0^T \|u-v\|_{L^\infty(0,L)}\|u_x\|_{L^2(0,L)}\, dt + \int_0^T \|v\|_{L^\infty(0,L)}\|u_x - v_x\|_{L^2(0,L)}\, dt \\
&\leq \int_0^T C_1\|u-v\|_{H^1(0,L)}\|u\|_{H^1(0,L)}\, dt + \int_0^T C_1\|v\|_{H^1(0,L)}\|u-v\|_{H^1(0,L)}\, dt \\
&\leq C_1[\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} + \|v\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}]\|u-v\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))},
\end{aligned}
$$

assim

$$
\|uu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \leq C_1[\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} + \|v\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}]\|u-v\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}.
$$

Escolhendo $v = 0$, temos que

$$
\|uu_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \leq C_1\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} < \infty \tag{4.3}
$$

portanto $uu_x \in L^1(0,T;L^2(0,L))$.

E se escolhermos $v = v_n$ tal que $v_n \to u$ temos que dado $\epsilon > 0$,

$$
\begin{aligned}
\|uu_x - v_n(v_n)_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} &\leq C_1[\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} + \|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}]\|u - v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \\
&\leq C_1[\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} + \|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}]\epsilon_1 \\
&\leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

já que ϵ_1 é obtido a partir da convergência $v_n \to u$ e pode ser escolhido arbitrariamente pequeno.

Lema 7. *A aplicação*

$$
\begin{aligned}
L^1(0,T;L^2(0,L)) &\to C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L)) \\
f &\mapsto \int_0^t S(t-s)f(\cdot,s)\, ds,
\end{aligned}
$$

está bem definida e é contínua.

Demonstração: Sejam $t \in [0,T]$ fixado e $t_n \to t$. Para cada n, defina

$$
\psi_n(s) = \begin{cases} S(t_n - s)f(x,s), & \text{se } s \leq t_n \\ 0, & \text{se } s > t_n. \end{cases}
$$

Note que quando $n \to \infty$ teremos $\psi_n(s) \to \psi(s)$, definida como

$$\psi(s) = \begin{cases} S(t-s)f(x,s), & \text{se } s \leq t \\ 0, & \text{se } s > t. \end{cases}$$

Por $\|S(t-s)\| \leq 1$, pois é um semigrupo de contrações, vale

$$\|\psi_n(s)\|_{L^2(0,L)} \leq \|f(x,s)\|_{L^2(0,L)} \in L^1(0,T), \tag{4.4}$$

o que nos permite aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, donde

$$\int_0^{t_n} S(t_n - s)f(x,s)\,ds = \int_0^T \psi_n(s)\,ds \to \int_0^T \psi(s)\,ds = \int_0^t S(t-s)f(x,s)\,ds.$$

A afirmação acima nos dá $\| \int_0^T S(t-s)f(x,s)\,ds\|_{C([0,T];L^2(0,L))} \leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}$. Portanto, a aplicação é contínua até $C([0,T];L^2(0,L))$. Mais ainda, denotando

$$u(x,t) := \int_0^t S(t-s)f(x,s)ds \in C([0,T];L^2(0,L)),$$

por (4.4) e $\|S(t)\| \leq 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^2(0,L)}(t) &= \| \int_0^t S(t-s)f(x,s)\,ds\|_{L^2(0,L)} \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)f(x,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds \\ &\leq \int_0^t \|S(t-s)\|_{L^2(0,L)}\|f(x,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds \\ &\leq \int_0^T \|f(x,s)\|_{L^2(0,L)}\,ds = \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}, \end{aligned}$$

assim

$$\|u\|_{L^2(0,L)}(t) \leq \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}. \tag{4.5}$$

Resta mostrar a continuidade até $L^2(0,T;H^1(0,L))$. Como

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} = \int_0^T \|u\|^2_{L^2(0,L)}\,dt + \int_0^T \|u_x\|^2_{L^2(0,L)}\,dt,$$

e a primeira integral é estimada em (4.5), nos resta buscar a estimativa

$$\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \leq C_1 \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}.$$

Procedendo como na equação (3.6), porém agora com a atuação do termo não homogêneo, vamos multiplicar a equação por xu e integrar em $(0,T) \times (0,L)$:

$$\int_0^T \int_0^L xu(u_t + u_x + u_{xxx} + a(x)u)\, dxdt = \int_0^T \int_0^L xuf\, dxdt,$$

daí

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L xu^2(x,T)\, dx - \frac{1}{2}\int_0^T \int_0^L u^2\, dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T \int_0^L u_x^2\, dxdt \ &+ \ \int_0^L \int_0^L xa(x)u^2\, dxdt \\ &= \ \int_0^T \int_0^L xuf\, dxdt.\end{aligned}$$

Usando (3.9), (4.5), integração por partes e a desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L u_x^2\, dxdt \ &= \ \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L u^2\, dxdt + \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L xuf\, dxdt \\ &- \ \frac{1}{3}\int_0^L xu^2(x,T)\, dx - \frac{2}{3}\int_0^T \int_0^L xa(x)u^2 dxdt \\ &\leq \ \frac{1}{3}\int_0^T \int_0^L u^2\, dxdt + \frac{2L}{3}\int_0^T \|u\|_{L^2(0,L)}\|f\|_{L^2(0,L)}\, dt \\ &\leq \ \frac{T}{3}\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \frac{2L}{3}\|u\|_{C([0,T];L^2(0,L))}\|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\ &\leq \ \frac{1}{3}(T+2L)\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))},\end{aligned}$$

o que completa a prova com

$$\begin{aligned}\left\| \int_0^t S(t-s)f(x,s)\, ds \right\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \ &\leq \ T\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} + \left(\frac{T+2L}{3}\right)\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\ &= \ \left(\frac{4T+2L}{3}\right)\|f\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,L))},\end{aligned}$$

logo

$$\| \int_0^t S(t-s)f(x,s)ds\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+2L}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))}. \tag{4.6}$$

$\square$

4.1.1 Solução local

O próximo passo na existência e unicidade de uma solução, é mostrar que para T suficientemente pequeno, o sistema possuirá solução única em X_T.

Proposição 14. *Sendo* $X_T = C(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$*, existe uma bola* $B_R = \{u \in X_T; \|u\|_{X_T} \leq R\}$*, onde o operador*

$$\begin{aligned} \Phi : B_R &\rightarrow X_T \\ u &\mapsto S(t)u_0(x) - \int_0^t S(t-s)uu_x(x,s)\,ds \end{aligned}$$

é uma contração.

Demonstração: Dados $u, v \in B_R$, temos que

$$\begin{aligned} \Phi(v) - \Phi(u) &= S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)vv_x\,ds - (S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)uu_x\,ds) \\ &= \int_0^t S(t-s)[uu_x - vv_x]\,ds. \end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades (4.5) e (4.6), temos

$$\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_{X_T} \leq K\|uu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))},$$

onde

$$K = 1 + \left(\frac{4T + 2L}{3}\right)^{1/2}.$$

Assim, utilizando as desigualdades de Cauchy-Shwartz e de Hölder, vale

$$\begin{aligned} \|\Phi(v) - \Phi(u)\|_{X_T} &\leq K\|uu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\ &= K\|uu_x + vu_x - vu_x - vv_x\|_{L^1(0,T;L^2(0,L))} \\ &\leq K[\|u - v\|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \\ &+ \|v\|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}\|u_x - v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}], \end{aligned}$$

ou seja

$$\|\Phi(v)-\Phi(u)\|_{X_T} \leq K[\|u-v\|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}\|u_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \tag{4.7}$$
$$+\|v\|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))}\|u_x-v_x\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}. \tag{4.8}$$
$$\tag{4.9}$$

Por outro lado, a desigualdade de Gagliardo-Nirenberg nos dá

$$\begin{aligned}
\|u\|^2_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))} &= \int_0^T \|u\|^2_{L^\infty(0,L)}\,dt \leq C^2\int_0^T \|u\|_{L^2(0,L)}\|u_x\|_{L^2(0,L)}\,dt \\
&\leq C^2\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\|u\|_{L^1(0,T;H^1(0,L))} \\
&\leq C^2T^{1/2}\|u\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}
\end{aligned}$$

donde obtemos

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^2(0,T;L^\infty(0,L))} &\leq CT^{1/4}\|u\|^{1/2}_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\|u\|^{1/2}_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \\
&\leq CT^{1/4}\|u\|^{1/2}_{C(0,T;L^2(0,L))}\|u\|^{1/2}_{L^2(0,T;H^1(0,L))}.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade acima em (4.7), temos

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v)-\Phi(u)\|_{X_T} &\leq KCT^{1/4}[\|u-v\|^{1/2}_{C(L^2)}\|u-v\|^{1/2}_{L^2(L^2)}\|u_x\|_{L^2(L^2)} \\
&+ \|v\|^{1/2}_{L^2(L^2)}\|v\|^{1/2}_{C(L^2)}\|u_x-v_x\|_{L^2(L^2)}] \\
&\leq KCT^{1/4}[\|u-v\|_{X_T}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} + \|v\|_{X_T}\|u-v\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}] \\
&\leq KCT^{1/4}[\|u\|_{X_T}+\|v\|_{X_T}]\|u-v\|_{X_T} \\
&\leq 2RKCT^{1/4}\|u-v\|_{X_T}.
\end{aligned}$$

Da penúltima linha tomando $v=0$, concluimos

$$\|\Phi(u)\|_{X_T} \leq KCT^{1/4}\|u\|^2_{X_T}. \tag{4.10}$$

Da última linha, tomando $v=0$ temos

$$\|\Phi(u)\|_{X_T} \leq 2RKCT^{1/4}\|u\|_{X_T}.$$

Alem disso, escolhendo T de forma que $2RKCT^{1/4}<1$, Φ será contração de B_R em X_T. $\square$

Nos resta garantir que para uma escolha adequada de R, a função Φ é uma contração de B_R em B_R ou seja $\Phi(B_R)\subset B_R$.

Proposição 15. *Existem R, T tais que $\Phi : B_R \to X_T$ como definida na proposição acima, é uma contração de B_R em B_R.*

Demonstração: Para qualquer $u \in B_R$, utilizando a desigualdade triangular e (4.10), temos

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{X_T} &= \|S(t)u_0 - \int_0^t S(t-s)uu_x\, ds\|_{X_T} \\
&\leq \|S(t)u_0\|_{X_T} + \|\int_0^t S(t-s)uu_x\, ds\|_{X_T} \\
&\leq \|S(t)u_0\|_{X_T} + KCT^{1/4}\|u\|_{X_T}^2.
\end{aligned}
$$

Pelos cálculos da parte linear

$$
\begin{aligned}
\|S(t)u_0\|_{X_T} &= \|S(t)u_0\|_{C((0,T);L^2(0,L))} + \|S(t)u_0\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \\
&\leq \|u_0\|_{L^2(0,L)} + \left(\frac{4T+2L}{3}\right)^{1/2}\|u_0\|_{L^2(0,L)} \\
&\leq K\|u_0\|_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
$$

Escolhendo $R = 2K\|u_0\|_{L^2(0,L)}$, vale

$$
\begin{aligned}
\|\Phi(u)\|_{X_T} &\leq K\|u_0\|_{L^2(0,L)} + KCT^{1/4}R^2 \\
&\leq \left[K + 4K^3CT^{1/4}\|u_0\|_{L^2(0,L)}\right]\|u_0\|_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
$$

Tomando T suficientemente pequeno de modo que $4K^3CT^{1/4}\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq K$ e $2RKCT^{1/4} < 1$ satisfazendo a proposição anterior, teremos $\|\Phi(u)\|_{X_T} \leq R$. $\square$

Pelas proposições acima, temos as condições para aplicar o Teorema do Ponto Fixo de Banach, assim a equação $\Phi(u) = u$ possui uma única solução em X_T desde que T satisfaça as condições impostas nas proposições acima.

Corolário 5. *Existe $T > 0$ de forma que o sistema (4.1) possui uma solução $u \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$.*

4.1.2 Solução global

Para estender a solução obtida acima para qualquer $T > 0$, admitindo assim que o sistema possuirá solução única até $C([0,+\infty);L^2(0,L)) \cap L^2(0,+\infty;H^1(0,L))$, utilizaremos o fato crucial da dissipação de energia do sistema.

Lema 8 (Dissipação de Energia)**.** *.Seja u solução do sistema (4.1), a energia $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)dx$ é não crescente.*

Demonstração: Sendo u uma solução de (4.1), temos

$$\begin{aligned}\int_0^L u(uu_x)\,dx &= \frac{1}{3}\int_0^L (u^3)_x\,dx \\ &= \frac{1}{3}[u^3(L) - u^3(0)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Multiplicando a equação por u e integrando no intervalo $(0,L)$, usando cálculos anteriores e o fato acima temos que

$$\frac{dE}{dt} = -\int_0^L a(x)u^2(x,t)dx - \frac{1}{2}u_x^2(0,t) \leq 0.$$

Portanto a energia $E(t)$ é não crescente. □

Novamente aqui temos a presença do termo $u_x^2(0,t)$ tal qual não é bem definido na boa colocação. Argumentos sobre o uso desse termo estarão registrados no apêndice B.

Proposição 16. *O sistema (4.1) possui uma única solução $u \in C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$ para qualquer $T > 0$.*

Demonstração: Pelo Corolário 5 podemos assumir a existência de solução no intervalo $[0,T_0]$. Tomando $T_1 \in (0,T_0]$ e chamando $u(x,T_1) = u_1 \in L^2(0,L)$, teremos que $u(x,t)$ satisfaz o sistema

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + uu_x + a(x)u = 0, & x \in (0,L), \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(L,t) = 0, & t > 0, \\ u_x(L,t) = 0, & t > 0, \\ u(x,T_1) = u_1(x), \in L^2(0,L). \end{cases} . \tag{4.11}$$

Utilizando o Lema 4.12, note que

$$2E(T_1) = \|u_1\|^2_{L^2(0,L)} \leq \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} = 2E(0). \tag{4.12}$$

Observe que o valor T utilizado na construção de solução local para $[0,T_0]$ satisfaz

$$4K^3CT^{1/4}\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq K \text{ e } 2RKCT^{1/4} < 1,$$

onde constantes K e C dependem apenas de L e T. Logo, construindo a solução no intervalo $[T_1, T_1+T]$, o valor de $T>0$ irá satisfazer

$$4K^3CT^{1/4}\|u_1\|_{L^2(0,L)} \leq K,$$

visto (4.12). Chamando $R_1 = 2K\|u_1\|_{L^2(0,L)}$, como na sessão anterior, novamente por (4.12) vale $R_1 \leq R_2$, portanto denotando $\bar{X}_{T_1} := C([T, T_1+T]; L^2(0,L)) \cap L^2(T_0, T+1; H_0^1(0,L))$, obtemos

$$\|\phi(u)\|_{\bar{T}_1} \leq R,$$

Valerá assim a Proposição 15, mas com Φ contração de $\bar{X}_{T_1}$, como $T_1 \leq T_0$ garantimos a existência de solução para $X_{T_1} = C([0,T_1]; L^2(0,L)) \cap L^2(0,T; H_0^1(0,L))$. Repetindo o processo n vezes, temos a solução no intervalo $[0, nT]$, consequentemente, garantimos a existência de solução no espaço X_t para qualquer $t>0$.

Sabendo da existência de solução em X_T para qualquer $T>0$, iremos provar a unicidade. Supondo que u e v são soluções de (4.1). Definindo $w = u - v$, tendo em vista que

$$uu_x - vv_x + uv_x - uv_x = uw_x + v_x w,$$

w satisfaz o problema

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + a(x)w + uw_x + v_x w = 0, & t>0, \quad x \in (0,L), \\ w(0,t) = w(L,t) = 0, & t>0, \\ w_x(L,t) = 0, & t>0, \\ w(x,0) = 0, & \forall x \in L^2(0,L). \end{cases} \tag{4.13}$$

Multiplicando a equação do sistema (4.13) por $1+x$ e integrando em $(0,L)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\langle(1+x),w^2\rangle_{L^2(0,L)}(t) &+ \frac{1}{2}w_x^2(0,t)+\frac{3}{2}\|w_x\|^2_{L^2(0,L)}(t)+\int_0^L(1+x)a(x)w^2\,dx\\
&= -\int_0^L(1+x)[uw_xw+v_xw^2]\,dx\\
&= -\int_0^L uww_x\,dx+\int_0^L vw^2\,dx+2\int_0^L(1+x)ww_x\,dx\\
&= \int_0^L(1+x)[2v-u]ww_x\,dx+\int_0^L vw^2\,dx\\
&\leq \int_0^L(1+x)^2\frac{[2v-u]^2}{2}w^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L w_x^2\,dx+\int_0^L vw^2\,dx\\
&\leq \sup_{x\in(0,L)}\frac{|2v-u|^2}{2}(1+L)\int_0^L(1+x)w^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L w_x^2\,dx\\
&+ \sup_{x\in(0,L)}|v|\int_0^L(1+x)w^2\,dx\\
&\leq \frac{1}{2}\|w_x\|^2_{L^2(0,L)}(t)+C(L)(\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}+\|v_x\|^2_{L^2(0,L)})\int_0^L(1+x)w^2\,dx.
\end{aligned}
$$

o que implica

$$
\frac{d}{dt}\langle(1+x),w^2\rangle_{L^2(0,L)}(t)\leq C(L)[1+\|u_x\|^2_{L^2(0,L)}+\|v_x\|^2_{L^2(0,L)}]\langle(1+x),w^2\rangle_{L^2(0,L)}(t).
$$

Como $u,v\in L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, pelo Lema de Gronwall $\langle(1+x),w^2\rangle_{L^2(0,L)}(t)\equiv 0$, quase sempre em $(0,T)$.

Daqui $\|w\|_{L^2(0,L)}(t)=\|u-v\|_{L^2(0,L)}(t)\equiv 0$. Isto prova a unicidade $\square$

4.2 Decaimento

Em acordo com o Lema 8, notamos que a energia do sistema é não crescente, e nesse caso podemos esperar o decaimento da energia associada ao sistema, tendo em vista que o amortecimento $a(x)$ dado foi suficiente para provar no caso linear. Nesta sessão iremos mostrar que com determinadas condições sobre o mecanismo $a(x)$, mais precisamente, sobre o conjunto $\omega\subset(0,L)$, também obteremos um decaimento exponencial para o sistema (4.1). O método utilizado será semelhante ao caso linear, onde praticamente todas as estimativas feitas são aceitas, porém não poderemos utilizar o Teorema de Holmgren na prova da "observabilidade", teremos que então com a condição estabelecida recorrer a outros métodos. Aqui utilizaremos um conceito de "Propriedade de Continuação Única", ou simplesmente (UCP), como em [14]. Vamos iniciar definindo o que se trata (UCP) que é aplicado sobre o conjunto ω no qual o amortecimento $a(x)$ está agindo.

Definição 26. *Dizemos que o conjunto ω satisfaz a propriedade de continuação única, ou simplesmente a UCP (do inglês: unique continuation property) quando, se $v \in L^2(0,T;H_0^1(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$ resolve*

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \lambda v v_x = 0 \quad t \in (0,T), \quad \forall x \in (0,L), \\ v(0,t) = v(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\ v \equiv 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \omega. \end{cases} \tag{4.14}$$

Com $\lambda \geq 0$ e $T > 0$, então $v \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$.

Observação 10. *Note que se $\lambda = 0$ então qualquer $\omega \subset (0,L)$ aberto satisfaz a UCP, pois pela hipótese da UCP v resolve*

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} = 0 \quad t \in (0,T), \quad x \in (0,L), \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ v \equiv 0, \quad t \in (0,T), \quad x \in \omega, \end{cases} \tag{4.15}$$

que é linear. Aplicando o Teorema da unicidade de Holmgren, como $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$, teremos que $v \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$. Logo ω satisfaz a UCP.

Teorema 22. *Seja $\omega \subset (0,L)$ um conjunto que satisfaz a UCP. Sendo u solução de (4.1), $a(x) \in L^\infty(0,L)$ uma função não negativa, mas $a(x) \geq a_0 > 0$ para todo $x \in \omega$, temos que para cada $L > 0$ e $R > 0$ com $\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq R$, existem $c > 0$ e $\mu > 0$ tais que*

$$E(t) \leq c\|u_0\|_{L^2(0,L)} e^{-\mu t},$$

para todo $t \geq 0$, onde $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,t)\,dx$.

Demonstração: Como na demonstração do Teorema 21, a maioria do trabalho se concentra em mostrar a desigualdade de observabilidade

$$\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq c\left[\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2\,dxdt\right]. \tag{4.16}$$

.

Vamos iniciar multiplicando a equação do sistema (4.1) por xu e integrar em $(0,L) \times (0,T)$. Como

$$\int_0^T \int_0^L xu^2 u_x \, dxdt = -\frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L u^3 \, dxdt,$$

utilizando os cálculos feitos em (3.6), temos

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt + \frac{1}{3} \int_0^L xu^2(x,T) \, dx + \frac{2}{3} \int_0^T \int_0^L xa(x)u^2 \, dxdt \\ = \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L u^2 \, dxdt + \frac{1}{3} \int_0^L xu_0^2(x) \, dx + \frac{2}{9} \int_0^T \int_0^L u^3 \, dxdt,\end{aligned}$$

Daí tiramos que

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt \leq \frac{1}{3} \int_0^T \int_0^L u^2 \, dxdt + \frac{1}{3} \int_0^L xu_0^2(x) \, dx + \frac{2}{9} \int_0^T \int_0^L u^3 \, dxdt$$

e

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 \, dxdt + \int_0^T \int_0^L u^2 \, dxdt \leq \frac{4}{3} \int_0^T \int_0^L u^2 \, dxdt + \frac{L}{3} \int_0^L u_0^2(x) \, dx + \frac{2}{9} \int_0^T \int_0^L u^3 \, dxdt. \tag{4.17}$$

Utilizando a dissipação de energia

$$2E(t) \leq \|u_0\|_{L^2(0,L)}$$

obtemos

$$\int_0^L u^2 dx \leq \int_0^L u_0^2 \, dx,$$

logo

$$\int_0^T \int_0^L u^2 \leq T\|u_0\|_{L^2(0,L)}. \tag{4.18}$$

Aplicando esta desigualdade em (4.17) conclui-se

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right) \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{2}{9} \int_0^T \int_0^L u^3 \, dxdt. \tag{4.19}$$

Notando que

$$u^2(x) \leq \int_0^x u_y^2(y)\,dy \leq 2\int_0^L |uu_x|\,dx \leq 2\|u\|_{L^2(0,L)}\|u_x\|_{L^2(0,L)}, \tag{4.20}$$

e utilizando a definição de supremo na análise de (4.20), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L u^3\,dxdt &= \int_0^T\int_0^L u^2u\,dxdt \\
&\leq \int_0^T\left(\sup_{x\in(0,L)} u^2\int_0^L |u|\,dx\right)dt \\
&\leq 2\int_0^T \|u\|_{L^2(0,L)}\|u_x\|_{L^2(0,L)}\|u\|_{L^2(0,L)}\sqrt{L}\,dt \\
&= 2\sqrt{L}\int_0^T \|u\|^2_{L^2(0,L)}\|u_x\|_{L^2(0,L)}\,dt \\
&\leq 2\sqrt{L}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}\int_0^T \|u_x\|_{L^2(0,L)}\,dt \\
&\leq C\sqrt{T}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))},
\end{aligned}$$

para alguma constante $C > 0$, onde C depende de L. Portando temos

$$\int_0^T\int_0^L u^3\,dxdt \leq C\sqrt{T}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)}\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}. \tag{4.21}$$

Substituindo (4.21) em (4.19), obtemos

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{2}{9}C\sqrt{T}\|u_0\|_{L^2(0,L)}\|u\|_{L^2(0,T:H^1(0,L))}.$$

Para simplificar os cálculos, chamando $z = \|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}$, $\alpha = \left(\frac{4T+L}{3}\right)$, $\beta = \frac{2}{9}C\sqrt{T}$, e $k = \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}$. A equação acima nos fornecerá

$$z^2 \leq \alpha k + \beta kz,$$

ou, de outra forma,

$$z^2 - \beta kz - \alpha k \leq 0.$$

Calculando o discriminante Δ da equação de segundo grau $z^2 - \beta kz - \alpha k = 0$ temos

$$\Delta = (-\beta k)^2 - 4(-\alpha k) = \beta^2 k^2 + 4\alpha k > 0.$$

Como o coeficiente de z^2 é positivo e o discriminante também é positivo, o gráfico da parábola só será negativo para z entre as duas raízes, ou seja, $z \in [z_1, z_2]$ onde z_1 e z_2 são as raízes da equação $z^2 - \beta k z - \alpha k = 0$.

Sendo $z_2 = \frac{\beta k + \sqrt{\beta^2 k^2 + 4\alpha k}}{2}$ a maior raíz, vamos usar que $z \leq z_2$ assim

$$2z \leq \beta k + \sqrt{\beta^2 k^2 + 4\alpha k}.$$

Elevando ao quadrado

$$\begin{aligned}
4z^2 &\leq (\beta k + \sqrt{\beta^2 k^2 + 4\alpha k})^2 \\
&= \beta^2 k^2 + 2\beta k \sqrt{\beta^2 k^2 + 4\alpha k} + \beta^2 k^2 + 4\alpha k \\
&= 2\beta^2 k^2 + 4\alpha k + 2\sqrt{\beta^2 k^2 (\beta^2 k^2 + 4\alpha k)} \\
&= 2\beta^2 k^2 + 4\alpha k + 2\sqrt{(\beta^2 k^2)^2 + 4\alpha k (\beta^2 k^2)} \\
&= 2\beta^2 k^2 + 4\alpha k + 2\sqrt{(\beta^2 k^2)^2 + 2[2ak(\beta^2 k^2)] + (2\alpha k)^2 - (2\alpha k)^2} \\
&\leq 2\beta^2 k^2 + 4\alpha k + 2\sqrt{(\beta^2 k^2)^2 + 2[2\alpha k(\beta^2 k^2)] + (2\alpha k)^2} \\
&= 2\beta^2 k^2 + 4\alpha k + 2\sqrt{(\beta^2 k^2 + 2\alpha k)^2} \\
&= 4\beta^2 k^2 + 8\alpha k,
\end{aligned}$$

concluindo que

$$z^2 \leq \frac{4\beta^2 k^2 + 8\alpha k}{4} = \beta^2 k^2 + 2\alpha k.$$

Devolvendo os valores de z, α, β e k, então

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4}{81} C^2 T\right) \|u_0\|^4_{L^2(0,L)} + 2\left(\frac{4T + L}{3}\right) \|u_0\|^2_{L^2(0,L)},$$

obtendo a importante estimativa

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4C^2 T}{81}\right) \|u_0\|^4_{L^2(0,L)} + \left(\frac{8T + 2L}{3}\right) \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{4.22}$$

Além disso

$$\int_0^T \int_0^L (T-t)u(uu_x)\,dxdt = \int_0^T (T-t)\left(\int_0^L u(uu_x)\,dx\right)\,dt = 0.$$

daí, podemos multiplicar formalmente a equação do sistema (4.1) por $(T-t)u$ e integrar em $(0,L)\times(0,T)$ como em (3.47) e (3.33), obtendo

$$\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \leq \frac{1}{T}\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt + \int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2\,dxdt. \tag{4.23}$$

Observe que desse ponto para chegarmos a observabilidade (4.16), resta apenas que exista C_1 dependendo de R, L e T, tal que

$$\int_0^T \int_0^L u^2\,dxdt \leq C_1\left[\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x)u^2\,dxdt\right], \tag{4.24}$$

para toda solução de (4.1) onde $\|u_0\|_{L^2(0,L)} \leq R$ dado.

Supondo que não exista C_1 nas condições de (4.24), existirá uma sequência de funções $u_n \in L^\infty(0,T;L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H^1(0,L))$ soluções de (4.1), satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|u_n\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))}}{\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x}u_n(0,t)\right]^2\,dt + 2\int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2\,dxdt} = +\infty.$$

Normalizando u_n, definimos $\lambda_n = \|u_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))}$ e $v_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L)} = 1. \tag{4.25}$$

Como u_n resolve (4.1), vale

$$(u_n)_t + (u_n)_x + (u_n)_{xxx} + (u_n)(u_n)_x + a(x)(u_n) = 0.$$

Substituindo $v_n = \frac{u_n}{\lambda_n}$, tem-se

$$(\lambda_n v_n)_t + (\lambda_n v_n)_x + (\lambda_n v_n)_{xxx} + (\lambda_n v_n)(\lambda_n v_n)_x + a(x)(\lambda_n v_n) = 0,$$

ou

$$(v_n)_t + (v_n)_x + (v_n)_{xxx} + \lambda_n(v_n)(v_n)_x + a(x)(v_n) = 0.$$

Assim v_n satisfaz o seguinte sistema:

$$
\begin{cases}
(v_n)_t + (v_n)_x + (v_n)_{xxx} + \lambda_n(v_n)(v_n)_x + a(x)(v_n) = 0, & t \in (0,T), \quad x \in (0,L), \\
v_n(0,t) = v_n(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\
(v_n)_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,T), \\
v_n(x,0) = \frac{u_n(x,0)}{\lambda_n}, \quad x \in (0,L).
\end{cases}
\tag{4.26}
$$

Dessa forma, o limite escrito anteriormente se torna

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} v_n(0,t)\right]^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) v_n^2 \, dxdt} = +\infty,
$$

daí tiramos que

$$
\lim_{n\to\infty} \left[\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} v_n(0,t)\right]^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) v_n^2 \, dxdt = 0 \right]. \tag{4.27}
$$

Pela desigualdade (4.18), λ_n é limitada. Assim supomos inicialmente que λ_n não converge para 0, ou seja, existe $k > 0$ tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ $\lambda_n > k$.

Utilizando a desigualdade (4.22), para $u_n(x,t) = v_n \lambda_n$ obtemos

$$
\begin{aligned}
k^2 \|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} &< \lambda_n^2 \|v_n\|_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \\
&= \|v_n \lambda_n\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \\
&\leq \left(\frac{4C^2T}{81}\right) \|u_n(x,0)\|^4_{L^2(0,L)} + \left(\frac{8T+2L}{3}\right) \|u_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)}.
\end{aligned}
$$

Assim, é possível encontrar uma constante C_2 em função de R, T e L de forma que

$$
\|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq C_2, \ \forall n \in \mathbb{N}.
$$

No caso em que $\lambda_n \to 0$, iremos proceder analogamente ao processo feito na construção da desigualdade (4.22).

Multiplicando[1] o sistema (4.26) por $(T-t)u$ e integrando em $(0,L)\times(0,T)$, utilizando o fato que o problema (4.26) só difere de (4.1) pelo fator não linear acompanhar o coeficiente λ_n, resolvendo

$$
\int_0^T \int_0^L (T-t) v_n (\lambda_n v (v_n)_x) \, dxdt = \lambda_n \int_0^T (T-t) \left(\int_0^L v_n (v(v_n)_x) \, dx \right) dt = 0,
$$

[1] Soluções regulares do problema (4.26) são garantidas por uma mudança de variável

obtemos a desigualdade (4.23) para v_n, daí $\|v_n(x,0)\|_{L^2(0,L)}$ é limitada.

Multiplicando a equação do sistema (4.26) por xu e integrando em $(0,L)\times(0,T)$ como em (4.19), obtemos a estimativa

$$\|v_n\|^2_{L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|v_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)} + \frac{2\lambda_n}{9}\int_0^T\int_0^L (v_n)^3\,dxdt.$$

Utilizando a desigualdade (4.21) obtemos

$$\|v_n\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \left(\frac{4T+L}{3}\right)\|v_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)}+\frac{2\lambda_n}{9}C\sqrt{T}\|v_n(x,0)\|_{L^2(0,L)}\|v_n\|_{L^2(0,T:H^1(0,L))}.$$

Agora, nossos artifícios serão $\|u\|_{L^2(0,T;H^1(0,L))}$, $\alpha = \left(\frac{4T+L}{3}\right)$, $\beta = \frac{2\lambda_n}{9}C\sqrt{T}$, e $k = \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}$.
Pelos mesmos argumentos feitos na obtenção de (4.22) obtemos

$$z^2 \leq \beta^2k^2 + 2\alpha k.$$

devolvendo os valores obtemos a estimativa

$$\|v_n\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))} \leq \lambda_n^2\left(\frac{4C^2T}{81}\right)\|v_n(x,0)\|^4_{L^2(0,L)} + \left(\frac{8T+2L}{3}\right)\|v_n(x,0)\|^2_{L^2(0,L)}. \quad (4.28)$$

Tendo em vista que λ_n é convergente para 0, afirmamos que existe N_0 tal que se $n > N_0$ então $\lambda_n < 1$, dessa forma, para $n > N_0$ valerá

$$\|v_n\|_{(L^2(0,T;H_0^1(0,L))} \leq C_2.$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
\|v_n(v_n)_x\|^2_{L^2(0,T;L^1(0,L))} &= \int_0^T \|v_n(v_n)_x\|^2_{L^1(0,L)}\,dt \\
&\leq \int_0^T \|v_n\|^2_{L^2(0,L)}\|(v_n)_x\|^2_{L^2(0,L)}\,dt \\
&\leq \sup_{t\geq 0}\|v_n\|^2_{L^2(0,L)}(t)\int_0^T \|(v_n)_x\|^2_{L^2(0,L)}(t)\,dt \\
&= \|v_n\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\|(v_n)_x\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,L))} \\
&\leq \|v_n\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(0,L))}\|v_n\|^2_{L^2(0,T;H^1(0,L))}.
\end{aligned}$$

Por fim, concluímos que existe C_3 tal que para todo $n > N_0$ valerá

$$\|v_n(v_n)_x\|_{L^2(0,T;L^1(0,L))} \leq C_3,$$

o que implica $v_n(v_n)_x$ ser limitada $L^2(0,T;L^1(0,L))$.

Como $(v_n)_t = -(v_n)_x - (v_n)_{xxx} - \lambda_n(v_n)(v_n)_x - a(x)(v_n)$, já havíamos visto que sendo v_n em $L^2(0,T;H^1(0,L))$, então $-(v_n)_x - (v_n)_{xxx} - a(x)(v_n) \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$. Utilizando que $v_n(v_n)_x \in L^2(0,T;L^1(0,L))$, então $(v_n)_t$ pertence a $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$. Daí $(v_n)_t$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$.

Pela Proposição 16 e novamente pela imersão

$$H^1(0,L) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,L) \hookrightarrow H^{-2}(0,L), \tag{4.29}$$

temos que v_n é relativamente compacta em $L^2(0,T;L^2(0,L))$ ou seja, podemos extrair uma subsequência v_m convergente em $L^2(0,T;L^2(0,L)$. Vamos dizer $v_m \to v$ quando $m \to \infty$. Note que por (4.25), $\|v_n\|_{L^2(0,T;L^2(0,L))} = 1$, então $\|v\|_{L^2(0,T;L^2(0,L)} = 1$.

Por outro lado, a Proposição 8 nos dá

$$\begin{aligned} 0 &= \liminf_{m\to\infty} \left[\int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} v_m(0,t) \right]^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) v_m^2 \, dxdt \right] \\ &\geq \int_0^T \left[\frac{\partial}{\partial x} v(0,t) \right]^2 dt + 2\int_0^T \int_0^L a(x) v^2 \, dxdt, \end{aligned}$$

onde nessas condições, as seguintes afirmações são válidas:

1. $v_x(0,t) = 0$.
2. $a(x)v \equiv 0$ em $(0,L) \times (0,T)$.
3. Como $a(x) > 0$ em ω é forçado que $v \equiv 0$ em $\omega \times (0,T)$.

Aplicando os dados acima no sistema (4.26), caímos em dois casos, segundo a convergência de λ_m,

- (i) Se $\lambda_m \to 0$ quando $m \to \infty$, temos que v satisfaz o problema

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} = 0 \quad t \in (0,L), \quad x \in (0,L), \\ v(0,t) = v(L,t) = 0 \quad t \in (0,T), \\ v_x(0,t) = v_x(L,t) = 0 \quad t \in (0,T), \\ v(x,t) = 0 \quad t \in (0,L), \quad\quad x \in \omega. \end{cases} \tag{4.30}$$

Donde pelo Teorema da unicidade de Holmgren, concluímos que $v \equiv 0$ em $(0, L) \times (0, T)$, o que é uma contradição, tendo em vista que $\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt = 1$.

- (ii) Se $\lambda_m \to \lambda > 0$ quando $m \to \infty$, caímos no caso em que v resolve

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + \lambda v v_x = 0, \quad t \in (0, L), \quad x \in (0, L), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ v_x(0, t) = v_x(L, t) = 0, \quad t \in (0, T), \\ v(x, t) = 0, \quad t \in (0, L), \quad x \in \omega. \end{cases} \tag{4.31}$$

E como ω satisfaz a UCP, imediatamente concluímos que $v \equiv 0$ em $(0, T) \times (0, L)$, o que novamente não é possível pois $\int_0^T \int_0^L v^2 dxdt = 1$. Portanto provamos (4.16).

A partir da estimativa (4.16), vamos fazer um cálculo análogo como na parte linear em (3.51) e obtemos

$$\|u\|^2_{L^2(0,L)}(T) \leq \gamma \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}, \tag{4.32}$$

onde $\gamma = \frac{1}{1+c} < 1$.

Dessa vez, para chegar ao decaimento não utilizaremos o mesmo método utilizado no caso linear, pois a solução não é dada simplesmente como $u(x, t) = S(t)u_0$.

Tendo em vista que

$$nt \leq t < (n + 1)t, \tag{4.33}$$

utilizando todo o processo acima a partir do dado inicial $u(T) \in L^2(0, L)$, chegaríamos que

$$\|u(2T)\|^2_{L^2(0,L)} \leq \gamma \|u(T)\|_{L^2(0,L)} \leq \gamma^2 \|u_0\|^2_{L^2(0,L)},$$

o que, com n vezes repetido o processo nos dá a desigualdade

$$\|u(nT)\|^2_{L^2(0,L)} \leq \gamma^n \|u_0\|^2_{L^2(0,L)}. \tag{4.34}$$

Então, pela lei dissipação de energia (Lema 8), temos que para todo $nT \leq t \leq (n + 1)T$, existe r onde $nT + r = t$ e vale

$$\|u(t)\|^2_{L^2(0,L)} \leq \|u(nT)\|^2_L(0, L), \tag{4.35}$$

daí, por (4.33), vale $\frac{t}{T} - 1 \leq n$ e por $\gamma < 1$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\|u(t)\|^2_{L^2(0,L)} &\leq \|u(nT)\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\leq \gamma^n \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\leq \gamma^{\frac{t}{T}-\frac{r}{T}} \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\leq \gamma^{\frac{t}{T}-1} \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\
&= \gamma^{(\frac{t}{T})}\gamma^{-1} \|u_0\|^2_{L^2(0,L)} \\
&\leq \frac{1}{\gamma}\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} e^{\frac{\ln\gamma}{T}t}.
\end{aligned}
$$

O teorema está provado. □

Teorema 23. *Se ω contém dois conjuntos, um da forma $(0,\delta)$ e outro da forma $(L-\delta, L)$ para algum $\delta > 0$, então vale a UCP para ω.*

Demonstração: Seja v solução de (4.14), com $v \in L^2(0,T;H^1_0(0,L)) \cap L^\infty(0,T;L^2(0,L))$. Como anteriormente, podemos obter que $v_t \in L^2(0,T;H^{-2}(0,L))$ o que juntamente com $v \in L^2(0,T;H^1_0(0,L))$, por [16] e o Lema 1.4 cap. 3 de [17], temos que v é uma função fracamente contínua de $[0,T]$ em $L^2(0,L)$. Da forma em que ω foi definido, nós temos que $v \equiv 0$ em $\{(0,\delta)\cup(L-\delta,L)\}\times(0,T)$. Nosso objetivo é estender o domínio da função $v(x,t)$ para toda a reta, de forma a usar os resultados conhecidos sobre UCP. Iremos definir

$$
V(x,t) = \begin{cases} v(x,t) \text{ se } (x,t) \in (\delta, L-\delta)\times(0,T); \\ 0 \text{ se } (x,t) \in \{\mathbb{R} - (\delta, L-\delta)\}\times(0,T). \end{cases} \tag{4.36}
$$

Assim, como V satisfaz o problema

$$
\begin{cases} V_t + V_x + V_{xxx} + \lambda V V_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T), \\ V(x,0) = \phi(x), \; x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{4.37}
$$

onde pelo fato de que v é fracamente contínua, nos permite escrever

$$
\phi(x) \begin{cases} v(x,0) \text{ se } x \in (\delta, L-\delta) \\ 0 \text{ se } x \in \mathbb{R} - (\delta, L-\delta). \end{cases} \tag{4.38}
$$

Considerando a função $W(x,t) = V(x+t,t)$, então W satisfaz o seguinte problema:

$$
\begin{cases} W_t + W_{xxx} + \lambda W W_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \in (0,T), \\ W(x,0) = \phi(x), \quad x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.39}
$$

Note que, utilizando a desigualdade de Cauchy-Shwartz e a Proposição 1, para qualquer $b > 0$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \phi^2(x) e^{2bx}\, dx &= \int_{\mathbb{R}\setminus(\delta, L-\delta)} \phi^2(x) e^{2bx}\, dx + \int_{(\delta, L-\delta)} \phi^2(x) e^{2bx}\, dx \\
&= \int_{(\delta, L-\delta)} \phi^2(x) e^{2bx}\, dx \\
&= \|\phi^2(x) e^{2bx}\|_{L^1((\delta, L-\delta))} \\
&\leq \|\phi^2(x)\|_{L^1((\delta, L-\delta))} \|e^{2bx}\|_{L^1((\delta, L-\delta))} \\
&\leq (L - 2\delta)^{\frac{1}{2}} \|\phi^2(x)\|_{L^2((\delta, L-\delta))} K_1 \\
&\leq K_2 \|\phi(x)\|^2_{L^2((\delta, L-\delta))} < \infty
\end{aligned}
$$

Observamos que $\phi \in L^2((\delta, L-\delta))$, já que nesse domínio $\phi(x) = v(x, 0)$. Agora utilizando que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ e o cálculo acima, temos

$$\phi \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^2_b(\mathbb{R}).$$

Isso nos permite aplicar sobre o sistema (4.39) o Teorema 17, mais especificamente, a equação (2.18), que nos garante que a solução $W \in C^\infty(0, \infty; H^s(\mathbb{R}))$, para qualquer $s \geq 0$. Podemos então escolher um $s > \frac{3}{2}$ e focar nosso objetivo em utilizar Teorema 18 acerca da UCP.

A última hipótese necessária decorre de que $v \in L^2(0, T; H^1_0(0, L)) \cap L^\infty(0, T; L^2(0, L))$, e assim, $V(x, t)$ possui suporte contido em um intervalo. Tendo em vista que $W(x, t) = V(x + t, t)$, se tomarmos um $t \in [0, T]$, teremos que supp$W \subset (a, b)$ para a e b tais que $-\infty < a < b < +\infty$. Do Teorema 18 recorre imediatamente que $W \equiv 0$, logo $V \equiv 0$, consequentemente temos que

$$v(x, t) \equiv 0, \;\; x \in (0, L), \;\; t \in (0, T).$$

Concluímos que ω satisfaz o UCP. □

Corolário 6. *Se ω contém dois conjuntos, um da forma $(0, \delta)$ e outro da forma $(L-\delta, L)$, para algum $\delta > 0$, então a solução de (4.1) possui decaimento exponencial.*

Apêndice A

Decaimento para dados iniciais pequenos

O trabalho para mostrar que a solução do sistema (4.1) possui decaimento exponencial quando o conjunto ω em que o amortecimento atuava, estava contendo dois abertos das formas $(0,\delta)$ e $(L-\delta, L)$ foi extenso e utilizou certas técnicas e resultados anteriores relativamente avançados. Veremos aqui que se o dado inicial $u_0(x) \in L^2(0,L)$ do sistema (4.1) for relativamente pequeno, isto é, se a norma $\|u_0\|_{L^2(0,L)}$ puder ser estimada por uma constante $K(T,\gamma,C)$, onde $T > 0$ é um valor escolhido, γ é a constante obtida na estimativa (3.51) ($\|S(T)u_0\|_{L^2(0,L)} < \gamma\|u_0\|_{L^2(0,L)}$), e C é a constante da estimativa (4.22), simplificada para a forma

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(0,L))} \leq C\left[\|u_0\|^2_{L^2(0,L)} + \|u_0\|^4_{L^2(0,L)}\right], \tag{A.1}$$

teremos que a prova do decaimento para o sistema sairá de argumentos simples.

Primeiro note que como em (2.14), a solução do sistema (4.1) aplicada no ponto $t = T$, pode ser escrita como

$$u(T) = S(T)u_0(x) - \int_0^T S(T-s)[uu_x](x,s)\, ds,$$

assim, a norma que pretendemos estimar, já pode ter sua primeira estimativa

$$\begin{aligned}
\|u(T)\|_{L^2(0,L)} &\leq \|S(T)u_0\|_{L^2(0,L)} + \int_0^T \|uu_x(s)\|_{L^2(0,L)}\, ds \\
&\leq \gamma\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \int_0^T \|uu_x(s)\|_{L^2(0,L)}\, ds \\
&\leq \gamma\|u_0\|_{L^2(0,L)} + c\|u\|^2_{L^2(0,T;H^1_0(0,L))}.
\end{aligned}$$

Aplicando a estimativa (A.1), obtemos

$$\|u(T)\|_{L^2(0,L)} \leq \|u_0\|_{L^2(0,L)} \left[\gamma + C\|u_0\|_{L^2(0,L)} + C\|u_0\|^3_{L^2(0,L)}\right]. \tag{A.2}$$

A afirmação final é que se $\|u_0\|_{L^2(0,L)}$ for suficientemente pequeno, teremos o decaimento, pois se tomarmos u_0 de forma que, por exemplo

$$\|u_0\|_{L^2(0,L)} + \|u_0\|^3_{L^2(0,L)} \leq \frac{1-\gamma}{2C},$$

teremos

$$\|u(T)\|_{L^2(0,L)} \leq \frac{1+\gamma}{2}\|u_0\|_{L^2(0,L)},$$

e utilizando novamente a propriedade de semigrupos, como anteriormente, chegamos ao decaimento.

O "traço" $u_x(0,t)$

Em algumas das principais estimativas durante o trabalho, tanto no caso linear, na equação (3.12), tanto no caso não linear, (Lema 8), aparece o termo $u_x(0,t)$. Como a boa colocação do sistema é feita no espaço $C([0,T];L^2(0,L)) \cap L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, nada garante que a integral $\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt$ está definida. Destinaremos este espaço para mostrar que $u_x(0,t) \in L^2(0,T)$.

2.1 O caso linear

Iremos considerar primeiramente o caso linear, tomando uma sequência $u_0^n \in \mathcal{D}(A)$, tal que $u_n \to u_0$ quando $n \to \infty$, onde $\mathcal{D}(A)$ é o domínio do operador A como definido anteriormente.

Dessa forma sendo u_n a solução do sistema (3.1) com dado inicial u_0^n, multiplicando a equação do sistema por u_n e integrando em $(0,L)$ depois em $(0,T)$ obtemos a estimativa

$$\frac{1}{2}\int_0^T (u_n)_x^2(0,t)\,dt - \int_0^T\int_0^L a(x)u_n^2\,dxdt \leq E_{u_n}(0) - E_{u_n}(T) \tag{B.1}$$

Tendo em vista a estimativa (3.9), valerá que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, daí $\{(u_n)_x\}$ será limitada em $L^2(0,T;L^2(0,L))$, o que implica $\{(u_n)_t\}_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $H^{-1}(0,T;L^2(0,L))$.

Por outro lado, sabemos que

$$(u_n)_{xxx} = (u_n)_t - (u_n)_x - a(x)u_n,$$

daí $(u_n)_{xxx} \in H^{-1}(0,T;L^2(0,L))$, o que implica $(u_n)_x \in H^{-1}(0,T;H^2(0,L))$, e pela imersão $H^2(0,L) \hookrightarrow C([0,L])$ vale que $\{(u_n)_x(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0,T)$.

Assim, afirmarmos que existe uma subsequência de u_n, chamada v_n tal qual

$$(v_n)_x(0,t) \rightharpoonup \frac{\partial}{\partial x} u(0,t) = u_x(0,t) \text{ em } H^{-1}(0,T). \tag{B.2}$$

Escrevendo a equação (B.1) para v_n obtemos que

$$\frac{1}{2}\int_0^T (v_n)_x^2(0,t)\,dt \le E_{v_n}(0) - E_{v_n}(T) + \int_0^T \int_0^L a(x) v_n \,dxdt,$$

E tendo em vista que $E_{v_n}(0) - E_{v_n}(T) \to E(0) - E(T)$ quando $n \to \infty$ e que $\{v_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(0,L))$ portanto $\int_0^T \int_0^L a(x) v_n \,dxdt$ é limitada, temos que $\{(v_n)_x(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T)$.

Portanto, existe uma subsequência de v_n chamada w_n que converge fraco em $L^2(0,T)$. De acordo com (B.2), então

$$(w_n)_x(0,t) \rightharpoonup u_x(0,t).$$

Utilizando o Lema 8, obtemos que

$$\|u_x(0,t)\|_{L^2(0,T)} \le \liminf \|(w_n)_x(0,t)\|_{L^2(0,T)} < +\infty.$$

O que nos permite afirmar que $u_x(0,t) \in L^2(0,T)$.

2.2 O caso não linear

Para o caso não linear, iremos proceder analogamente tomando uma sequência $u_0^n \in \mathcal{D}(A)$, com $u_n \to u_0$ quando $n \to \infty$, onde $\mathcal{D}(A)$ é o domínio do operador A como definido anteriormente.

Sendo u_n solução do sistema (4.1) com o dado u_0^n, novamente multiplicando a equação do sistema por u_n e integrando em $(0,L)$ depois em $(0,T)$ obtemos a estimativa

$$\frac{1}{2}\int_0^T (u_n)_x^2(0,t)\,dt - \int_0^T \int_0^L a(x) u_n^2 \,dxdt \le E_{u_n}(0) - E_{u_n}(T) \tag{B.3}$$

Agora iremos utilizar a estimativa (4.22), para afirmar que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(0,L))$, daí $\{(u_n)_x\}$ será limitada em $L^2(0,T;L^2(0,L))$, o que implica $\{(u_n)_t\}_{n\in\mathbb{N}}$ ser limitada em $H^{-1}(0,T;L^2(0,L))$.

Pela equação (4.3), vale que $u_n(u_n)_x$ é limitada em $L^1(0,T;L^2(0,L))$. Por

$$(u_n)_{xxx} = (u_n)_t - (u_n)_x - u_n(u_n)_x - a(x)u_n,$$

obtemos $(u_n)_{xxx} \in H^{-1}(0,T;L^2(0,L))$, o que implica $(u_n)x \in H^{-1}(0,T;H^2(0,L))$, e utilizando a imersão $H^2(0,L) \hookrightarrow C([0,L])$ vale que $\{(u_n)_x(0,t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H^{-1}(0,T)$.

O restante, segue analogamente como na sessão anterior para mostrarmos que $u_x(0,t) \in L^2(0,T)$.

Bibliografia

[1] G.P. Menzala, C.F. Vasconcellos, E. Zuazua, Stabilization of the Korteweg-de Vries equation with localized damping. Quart. Appl. Math. 60, no. 1, 111–129, 2002.

[2] L. Rosier, Exact Boundary Controllability for the Korteweg-De Vries Equation on a Bounded Domain. ESAIM, Control. Optimization and Calculus of Variations, vol. 2, 1997, 33-55.

[3] A. F. Pazoto, Unique continuation for the Korteweg-de Vries equation with localized damping. ESAIM. Control opt. (2005) 473-486

[4] L. Rosier and B-Y Zhang, Global Stabilization of the generalized Korteweg-de Vries Equation Posed on a finite Domain, SIAM J. Control Optim. 45 (2006), no. 3, 927-956

[5] C.Massarolo,G.Perla Menzala and A.Pazoto On the uniform decay for the Korteweg -de Vries equation with weak dampinp, Mathematical Methods in the Applied Sciences ,2007 ,30 ,1419-1433

[6] C. Massarolo, G. P. Menzala and A. Pazoto, Uniform stabilization of a class of coupled systems of KdV equations with localized damping, Quart. Appl. Math. 69 (2011), 723-746, 2011

[7] J. Chu, J.-M. Coron et P. Shang, Asymptotic stability of a nonlinear Korteweg-de Vries equation with a critical length, preprint, 2013

[8] G. G. Doronin, F. M. A. Natali, An example of non-decreasing solution for the KdV equation posed on a bounded interval. Aceito a publicação em: CRMATHEMATIQUE (Comptes rendus Mathematique), 2014.

[9] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. 39 (1895) 422-443.

[10] J.S. Russel, Report on waves, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., 1844, pg. 311-390.

[11] J. López Gondar, R. Cipolatti, Iniciação à Física Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 2009.

[12] G.B. Whitham, Linear and nonlinear waves, Wiley-Interscience, 1974.

[13] T. Kato, On the Cauchy problem for the (Generalized) Korteweg-De Vries Equation, Stud. Appl. Math, Adv. in Math. Suppl. Stud, (8), 1983, 93-128

[14] B-Y Zhang, Unique Continuation for the Korteweg-De Vries Equation, SIAM, J. Math. Anal., (23), 1991, 55-71.

[15] J. Simon, Compact sets in the space $L^p(0,T;B)$. Annali di Matematica Pura ed Appicata CXLVI (IV) (1987), 65-96.

[16] J. Simon and E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, tome 1, Dunod, Paris, 1968.

[17] R. Temam, Navier-Stokes Equations, Studies in Mathematics and its Applications 2, Noth-Holland, 1977.

[18] Bona, H. Chen, S-M. SUU, B-Y. Zhang, Comparison of quarter-plane and two-point boundary value problems; the KdV-Equation. Discr.Cont.Dysem. Syst- B, Vol. 7 Issue 3 (2007), 465-496

[19] N.A. Larkin, E. Tronco, Mixed problems with nonlinear boundary conditions for the Korteweg-de Vries equation in bounded intervals, Neclassieheski uravernia matematiekeskoi fiziki (Russian), Institute of Mathematics Novosibirsk, Russia, (2010) pg. 328-337.

[20] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Departament of Mathematics, Academic Press, United States of America, 1970.

[21] L. Bers, F. John, and M. Schechter, Partial Differential Equations, Interscience, New York, 1964. American Mathematical Society, 1979.

[22] H. Brézis, Analyse Fontionelle, Théorie et Applications, Paris, Masson, 1973.

[23] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1997.

[24] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.