UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

MARIANA APARECIDA CANIATTO

SOLUBILIDADE DE UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO AMORTECIDOS COM IMPULSOS

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

SOLUBILIDADE DE UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO AMORTECIDOS COM IMPULSOS

MARIANA APARECIDA CANIATTO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Claudete Matilde Webler Martins.

Maringá-PR
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Caniatto, Mariana Aparecida
C223s Solubilidade de uma classe de problemas de vibração amortecidos com impulsos / Mariana Aparecida Caniatto. – Maringá, 2018.
107 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Claudete Matilde Webler Martins.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2018.

1. Equações diferenciais impulsivas. 2. Ponto crítico. 3. Método variacional. 4. Equações diferenciais parciais. 5. Impulsive differential equations. 6. Critical point. 7. Variational method. 8. Partial differential equations. I. Martins, Claudete Matilde Webler, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353
Edilson Damasio CRB9-1.123

MARIANA APARECIDA CANIATTO

SOLUBILIDADE DE UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO AMORTECIDOS COM IMPULSOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Claudete Webler
Profa. Dra. Claudete Matilde Webler Martins
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Manuel Zuloeta
Prof. Dr. Manuel Francisco Zuloeta Jimenez
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Londrina

Luciene Parron G. Arantes
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 15 de fevereiro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, pela força e coragem a mim concedida nos momentos difíceis para que eu conseguisse alcançar meu objetivo.

Aos meus colegas de turma, pelos momentos compartilhados.

A todos os professores que contribuíram para a minha formação, em especial, a minha orientadora Claudete, pela paciência e dedicação.

À minha família pelo carinho e incentivo, sem os quais nada disso seria possível.

Finalmente agradeço à CAPES, pelo apoio financeiro, que foi fundamental para que eu pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos.

"Tudo posso naquele que me fortalece."

Filipenses 4.13

Resumo

Neste trabalho, consideramos uma classe de problemas de vibração amortecidos com impulsos. Obtemos resultados de existência utilizando o método variacional e teorema do ponto crítico. Apresentamos um exemplo para ilustrar a viabilidade e a eficácia dos resultados.

Palavras-chave: Equações diferenciais impulsivas, ponto crítico, método variacional.

Abstract

In this work, we consider a class of impulsive damped vibration problems. We obtain existence results by using variational method and critical point theorem. An example is presented to ilustrate the feasibility and effectiveness of the results.

Keywords: Impulsive differential equations, critical point, variational method.

SUMÁRIO

Introdução **9**

1 Resultados Preliminares **11**

2 Método Direto do Cálculo de Variações **21**

3 Solubilidade de uma classe de problemas de vibração amortecidos com impulsos **47**

Bibliografia **105**

INTRODUÇÃO

Baseados no artigo [3], estudamos a existência de solução do seguinte problema de vibração com saltos:

$$u''(t) + g(t)u'(t) = \nabla F(t, u(t)), \tag{0.1}$$

para quase todo $t \in [0, T]$,

$$u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0, \tag{0.2}$$

com condições impulsivas

$$\triangle(u'^i(t_j)) = I_{ij}(u^i(t_j)), i = 1, 2, ..., N, j = 1, 2, ..., p, \tag{0.3}$$

onde $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^N(t)), T > 0, t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $g \in L^1(0, T; \mathbb{R}), \int_0^T g(t)dt = 0, \triangle(u'^i(t_j)) = u'^i(t_j^+) - u'^i(t_j^-)$, onde $u'^i(t_j^+)$ e $u'^i(t_j^-)$ denotam os limites à direita e à esquerda de $u'^i(t)$ em $t = t_j$, respectivamente. As funções impulsivas $I_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}(i = 1, 2, ..., N, j = 1, 2, ..., p)$ são contínuas, $\nabla F(t, x)$ é o gradiente de $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ com relação a x, e F satisfaz hipóteses apropriadas.

Mawhin e Willem estudaram em [4] as soluções periódicas de (0.1)-(0.3) quando $g \equiv 0$ e $I_{ij} \equiv 0, i = 1, 2, ..., N$, $j = 1, 2, ..., p$, e obtiveram uma série de resultados. Eles provaram que se

$$\| \nabla F(t, x) \| \leq g(t),$$

para algum $g \in L^1(0,T)$ e

$$\int_0^T F(t,x)dt \to +\infty \quad \text{quando} \parallel x \parallel \to +\infty,$$

então o problema (0.1)-(0.3) (com $g \equiv 0 \equiv I_{ij}, i = 1,2,...,N$ e $j = 1,2,...,p$) tem pelo menos uma solução. Zhou e Li estabeleceram em [13] algumas condições suficientes para a existência de soluções para o problema (0.1)-(0.3) com $g \equiv 0$. As soluções são encontradas usando técnicas que envolvem pontos críticos de um certo operador.

Muitos processos de evolução são caracterizados pelo fato de que em certos momentos eles sofrem uma mudança abrupta de estado. Estes processos estão sujeitos às perturbações de curto prazo cuja duração é insignificante em comparação com a duração destes processos. Consequentemente, é natural assumir que estas perturbações são instantâneas, isto é, na forma de impulsos. Equações diferenciais impulsivas, isto é, equações diferenciais envolvendo efeitos de impulso, aparecem como uma descrição natural de fenômenos de evolução observados em vários problemas do mundo real, como podemos ver em [11].

A fim de aplicar a teoria de ponto crítico, construímos uma estrutura variacional. Com esta estrutura, reduzimos o problema de encontrar soluções de (0.1)-(0.3) a procurar por pontos críticos de um funcional correspondente a este problema.

Esta dissertação esta organizada da seguinte maneira. No Capítulo 1, apresentamos as notações, terminologias e resultados preliminares essenciais ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes. No Capítulo 2, introduzimos os conceitos de derivada fraca, espaço de Sobolev e alguns resultados de cálculo variacional. Concluímos o Capítulo 2 com um resultado que estabelece uma condição suficiente para a existência de solução do problema dado por (0.1)-(0.2) com $g \equiv 0$. Por fim, no Capítulo 3, são apresentados resultados de [3], que estabelecem condições suficientes para a existência de solução fraca para o problema descrito por (0.1)-(0.3). Concluímos este trabalho com um exemplo para ilustrar resultados aqui apresentados.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo, apresentamos as notações e os resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento deste trabalho, introduzindo alguns conceitos e resultados de Análise Funcional, sem enfoque nas demonstrações, porém, indicamos referências bibliográficas onde as quais podem ser encontradas.

Denotamos por $x = (x_1, x_2, ..., x_N)$ um elemento de $\mathbb{R}^N$ e por $\mathbb{K}$ o corpo dos números reais ou complexos. Além disso, $(.,.)$ denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^N$, $\| \ . \ \|$ a norma euclidiana e $| \ . \ |$ o módulo de um número real. Também denotamos por $\mathbb{N}$ o conjunto dos números naturais e por $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, ...\}$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Denotaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço de Banach das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$, tais que $| \ u \ |^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω, com norma

$$\| \ u \ \|_{L^p} = \left(\int_\Omega | \ u(x) \ |^p \ dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

para $1 \leq p < +\infty$, e essencialmente limitadas em Ω, Ω com a medida de Lebesgue, com norma

$$\| \ u \ \|_{L^\infty} = \text{supess} \ | \ u(x) \ |,$$

para $p = +\infty$.

A seguir, apresentamos os principais resultados utilizados neste trabalho relacionados ao espaço $L^p(\Omega)$.

Proposição 1.0.1. *(Desigualdade de Hölder) Seja $E \subset \mathbb{R}$ um conjunto mensurável, $1 \leq p < \infty$, e q o expoente conjugado de p, isto é, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Se $f \in L^p(E)$ e $g \in L^q(E)$, então fg é integrável sobre E e*

$$\| fg \|_{L^1} \leq \| f \|_{L^p} \| g \|_{L^q} .$$

Demonstração. Veja [5], página 140. □

Proposição 1.0.2. *Sejam E um conjunto de medida finita e f uma função mensurável em E. Se f é integrável sobre E, então para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $A \subset E$ é mensurável e $\mathrm{med(A)} < \delta$, onde med denota a medida de Lebesgue de um determinado conjunto, então,*

$$\int_A | f | < \epsilon.$$

Demonstração. Veja Proposição 23 em [5], página 92. □

Observação 1.0.3. *De acordo com as referências [8] e [9], se f é uma função de período $T > 0$ e $f \in L^p(E)$, onde $E \subset \mathbb{R}$, para $1 < p < \infty$, então a série de Fourier de f, dada por*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k x}{T}}, \tag{1.1}$$

onde

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{\frac{-2\pi i k x}{T}} dx,$$

converge em quase todo ponto de E.

Seja $f \in L^p(E)$ uma função periódica de período T. Denotaremos por $S_N f$ a N-ésima soma parcial simétrica da série dada em (1.1), isto é,

$$S_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{f}(k) e^{\frac{2\pi i k x}{T}}.$$

Lema 1.0.4. *$S_N f$ converge a f na norma $L^p(E)$, $1 \leq p < \infty$ se, e somente se, existe uma* *constante $C_p > 0$ independente de N tal que*

$$\parallel S_N f \parallel_{L^p} \leq C_p \parallel f \parallel_{L^p} .$$

Demonstração. Veja [9], página 8. □

Proposição 1.0.5. *(Igualdade de Parseval) Se $f \in L^2(E)$ e f tem período $T > 0$, então*

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mid f(x) \mid^2 dx = \frac{\mid \hat{f}(0) \mid^2}{2} + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mid \hat{f}(k) \mid^2 .$$

Demonstração. Veja [8], página 38. □

Definição 1.0.6. *Seja X um espaço normado. Uma função $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é convexa se*

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v),$$

para todo $\lambda \in (0,1)$ e $u, v \in X$.

Proposição 1.0.7. *(Desigualdade de Jensen) Sejam φ uma função convexa em $(-\infty, +\infty)$, f uma função integrável sobre $[0,1]$ e $\varphi \circ f$ também integrável sobre $[0,1]$. Então,*

$$\varphi\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \leq \int_0^1 (\varphi \circ f)(x)dx.$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [5], na página 133. □

Teorema 1.0.8. *(Teorema da Convergência Uniforme) Seja (f_k) uma sequência de funções Lebesgue-integráveis em um conjunto de medida finita E. Se f_k converge uniformemente a f, então f é Lebesgue-integrável em E e*

$$\int_E f_k \to \int_E f.$$

Demonstração. A prova deste resultado corresponde a demonstração do Teorema 5.33 em [2]. □

Definição 1.0.9. *Sejam E um espaço de Banach, E' seu dual (dotado da norma $\parallel f \parallel_{E'} = \sup\limits_{\{x \in E; \|x\| \leq 1\}} |< f, x >|$) e E'' seu bidual, isto é, o dual de E' (dotado da norma $\parallel \xi \parallel_{E''} =$*

$\sup_{\{f \in E'; \|f\| \leq 1\}} |< \xi, f >|$), *a injeção canônica*

$$J : E \longrightarrow E''$$

é definida como segue.

Seja $x \in E$ fixo, a aplicação

$$f \longmapsto < f, x >$$

de E' em $\mathbb{R}$ é uma forma linear contínua sobre E', isto é, um elemento de E''. Assim, coloca-se,

$$< J_x, f >_{E'',E'} = < f, x >_{E',E}, \forall x \in E, \forall f \in E'.$$

Definição 1.0.10. *Sejam E um espaço de Banach e J a injeção canônica de E em E''. Diz-se que E é reflexivo se a aplicação J for sobrejetora, isto é, $J(E) = E''$.*

Proposição 1.0.11. *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$. Para $1 < p < +\infty$, $L^p(\Omega)$ é reflexivo.*

Demonstração. Veja página 284 em [5]. □

Proposição 1.0.12. *Suponhamos que E é um espaço de Banach reflexivo e seja $M \subset E$ um subespaço fechado de E. Então, M é reflexivo.*

Demonstração. Ver página 70 em [10]. □

Sejam E um espaço de Banach e $f \in E'$. Designamos por $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por

$$\varphi_f(x) = < f, x > .$$

Quando f percorre E', se obtém uma família $(\varphi_f)_{f \in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.0.13. *A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $(\varphi_f)_{f \in E'}$.*

Dada uma sequência $(x_n) \subset E$, denotamos por $x_n \rightharpoonup x$, a convergência de x_n a x na topologia fraca $\sigma(E, E')$.

Teorema 1.0.14. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma sequência limitada em E. Então, existe uma subsequência (x_{n_k}) de (x_n) que converge na topologia $\sigma(E, E')$, isto é, $x_{n_k} \rightharpoonup x$ para algum $x \in E$.*

Demonstração. Ver Proposição III.27 em [1]. □

Definição 1.0.15. *Dizemos que uma função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua se, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer coleção (finita ou não) de sub-intervalos disjuntos $[a_i, b_i]$, temos*

$$\sum_i (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_i \mid F(b_i) - F(a_i) \mid < \epsilon.$$

Definição 1.0.16. *Seja X um espaço de Banach sobre $\mathbb{R}$ dotado da norma $\| \ . \ \|_X$. Vamos denotar por $C^1(X, \mathbb{R})$, o conjunto da funções $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que possuem a derivada contínua. Dada $f \in C^1(X, \mathbb{R})$, dizemos que f satisfaz a condição (PS) se qualquer sequência $(u_n) \subset X$ para a qual $(f(u_n))$ é limitada e $f'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$ possui uma subsequência convergente.*

A seguir, denotamos por $\overline{D}$ o fecho de um conjunto D e por ∂D a fronteira do conjunto D.

Teorema 1.0.17. *(Teorema do Ponto de Sela) Seja $X = V \oplus W$ um espaço de Banach, onde $\dim V < \infty$, e seja $\varphi \in C^1(X; \mathbb{R})$ um funcional satisfazendo a condição (PS). Se D é uma vizinhança limitada de 0 em V tal que*

$$a := \max_{\partial D} \varphi < \inf_{W} \varphi =: b,$$

então

$$c := \inf \max_{h \in \tau, u \in \bar{D}} \varphi(h(u))$$

é um valor crítico de φ com $c \geq b$. (Aqui τ é uma classe de transformações de $\overline{D}$ em X que fixam ∂D pontualmente, isto é, $\tau = \{h \in C(\bar{D}, X); h(u) = u, \forall u \in \partial D\}$.)

Demonstração. Veja página 41 em [12]. □

Definição 1.0.18. *Seja X um espaço normado. Uma sequência minimizante para uma função $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é uma sequência (u_k) em X tal que $\varphi(u_k) \longrightarrow \inf \varphi$ quando $k \longrightarrow \infty$.*

Definição 1.1. Seja $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma aplicação definida em um espaço normado X. Dizemos que f é coerciva se

$$f(u) \to +\infty \ \text{ quando } \| \ u \ \|_X \to +\infty.$$

Proposição 1.2. *Seja X um espaço normado. Se $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é limitada inferiormente em X e é uma aplicação coerciva, então φ possui uma sequência minimizante limitada em X.*

Demonstração. De fato, uma vez que φ é limitada inferiormente, existe uma sequência $(\varphi(u_k)) \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi(u_k) \to \inf \varphi \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Ou seja, (u_k) é uma sequência minimizante para φ. Suponhamos, por absurdo que, (u_k) não seja limitada, então $\| \ u_k \ \|_X \to +\infty$. Assim, $\varphi(u_k) \to +\infty$, pois φ é coerciva. Mas, isto é um absurdo, visto que a sequência $(\varphi(u_k))$ é convergente. Portanto, (u_k) é uma sequência minimizante limitada para φ. $\square$

A seguir, denotamos o $\liminf_{k\to\infty} \varphi(u_k)$ por $\underline{\lim}\varphi(u_k)$.

Definição 1.0.19. *Seja X um espaço normado. Uma função $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é dita semi-contínua inferiormente (respectivamente fracamente semi-contínua inferiormente), se para toda sequência (u_k) em X*

$$u_k \to u \Rightarrow \underline{\lim}\varphi(u_k) \geq \varphi(u)$$

(respectivamente,

$$u_k \rightharpoonup u \Rightarrow \underline{\lim}\varphi(u_k) \geq \varphi(u)).$$

Proposição 1.0.20. *Seja X um espaço normado. Se $\phi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ e $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ são funções semi-contínuas inferiormente (respectivamente, fracamente semi-contínuas inferiormente), então*

(i) *$\phi + \varphi$ é semi-contínua inferiormente (respectivamente fracamente semi-contínua inferiormente).*

(ii) *$\phi.\varphi$ é semi-contínua inferiormente (respectivamente fracamente semi-contínua inferiormente).*

(iii) *Se $(\psi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ é uma família de funções semi-contínuas inferiormente (respectivamente fracamente semi-contínuas inferiormente), então a função $\sup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda$ definida por*

$$\left(\sup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda\right)(u) = \sup_{\lambda\in\Lambda} \psi_\lambda(u)$$

é semi-contínua inferiormente (respectivamente fracamente semi-contínua inferiormente).

Demonstração. Os itens **(i)** e **(ii)** seguem diretamente da definição de semi-contínua inferiormente (respectivamente, fracamente semi-contínua inferiormente). O item **(iii)** segue diretamente das definições de supremo e semi-contínua inferiormente (respectivamente, fracamente semi-contínua inferiormente). □

Teorema 1.0.21. *Se φ é fracamente semi-contínua inferiormente em um espaço de Banach reflexivo X e tem uma sequência minimizante limitada, então φ tem um mínimo em X.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência minimizante limitada para a função φ. Pelo Teorema 1.0.14, existe uma subsequência (u_{k_j}) que converge fracamente para algum $u \in X$. Assim,

$$\varphi(u) \leq \underline{\lim}\varphi(\mathrm{u_{k_j}}) = \lim \varphi(\mathrm{u_{k_j}}) = \inf \varphi.$$

Portanto,

$$\varphi(u) = \inf \varphi,$$

donde segue que φ tem um mínimo em X. □

Teorema 1.0.22. (Teorema de Mazur) *Se (u_k) é uma sequência em um espaço normado X tal que $u_k \rightharpoonup u$, então existe uma subsequência de combinações convexas*

$$v_k = \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} u_j, \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_{k_j} = 1, \quad \alpha_{k_j} \geq 0 (k \in \mathbb{N}^*)$$

tais que $v_k \to u$ em X.

Demonstração. Veja página 350 em [7]. □

Lema 1.0.23. *Se X é um espaço normado e $\varphi : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ é semi-contínua inferiormente e convexa, então φ é fracamente semi-contínua inferiormente.*

Demonstração. Veja Teorema 1.2 em [4]. □

Teorema 1.0.24. *Seja X um espaço normado. Se $\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável, então todo ponto de mínimo local (respectivamente, máximo local) satisfaz a equação de Euler*

$$\varphi'(u) = 0.$$

Demonstração. Veja Teorema 1.3 em [4]. □

O Teorema acima nos diz que se u é um ponto de mínimo ou máximo local de φ, então u é um ponto crítico de φ.

Definição 1.0.25. *Sejam E e F espaços vetoriais normados. Denotamos por $\mathcal{L}(E,F)$ o espaço dos operadores lineares contínuos de E em F dotado da norma*

$$\| T \|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup_{\{x \in E, \|x\|_E \leq 1\}} \| Tx \|_F .$$

Teorema 1.0.26. *(Banach-Steinhaus) Sejam E e F espaços de Banach e $(T_i)_{i \in I}$ uma família (não necessariamente enumerável) de operadores lineares e contínuos de E em F. Suponhamos que*

$$\sup_{i \in I} \| T_i x \|_F < +\infty, \forall x \in E.$$

Então,

$$\sup_{i \in I} \| T_i \|_{\mathcal{L}(E,F)} < +\infty.$$

Dito de outro modo, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\| T_i x \|_F \leq c \| x \|_E \ \forall x \in E, \forall i \in I.$$

Demonstração. Veja Teorema II.1 em [1]. □

Proposição 1.0.27. *Sejam E um espaço de Banach, $f \in E'$ e (x_n) uma sequência em E. Se verifica:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* $\sigma(E,E') \Leftrightarrow < f, x_n > \to < f, x >, \forall f \in E'$.

(ii) *Se $x_n \to x$, então $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E,E')$.*

(iii) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E,E')$, então (x_n) é limitada e $\| x \|_E \leq \liminf \| x_n \|_E$.*

(iv) *Se $x_n \rightharpoonup x$ em $\sigma(E,E')$ e se $f_n \to f$ em E' (isto é, $\| f_n - f \|_{E'} \to 0$), então $< f_n, x_n > \to < f, x >$.*

Demonstração. Veja Proposição III.5 em [1]. □

Definição 1.0.28. *Sejam X um espaço de Banach real e $T > 0$. Definimos $C(0,T;X)$ como sendo o espaço das funções $v : [0,T] \to X$ que são contínuas no intervalo fechado $[0,T]$, com norma*

$$\| v \|_{C(0,T;X)} = \max_{t \in [0,T]} \| v(t) \|_X .$$

Definição 1.0.29. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. *Vamos denotar por* $C^\infty(\Omega)$ *o espaço das funções*

$$\begin{aligned} f : \Omega &\to \mathbb{R}^N \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

que são infinitamente diferenciáveis. Dotamos tal espaço da seguinte norma

$$\| f \|_\infty = \max_{x \in \Omega} \| f(x) \| .$$

Definição 1.0.30. *Seja* E *um conjunto de funções* $f : I \to \mathbb{R}$, *todas com o mesmo domínio* $I \subset \mathbb{R}$. *Dado* $x_0 \in I$, *dizemos que o conjunto* E *é equicontínuo no ponto* x_0 *quando, dado arbitrariamente* $\epsilon > 0$, *existir* $\delta > 0$ *tal que*

$$x \in I, |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon,$$

qualquer que seja $f \in E$. *Ainda, diz-se que* (f_n) *é uma sequência equicontínua no ponto* $x_0 \in I$ *quando o conjunto* $E = \{f_1, f_2, ...\}$ *é equicontínuo no ponto* x_0.

Definição 1.0.31. *Um conjunto* E *de funções* $f : I \to \mathbb{R}$ *chama-se equicontínuo quando* E *é equicontínuo em todos os pontos* $x_0 \in I$. *Analogamente, uma sequência de funções* (f_n) *é equicontínua quando é equicontínua em todos os pontos* $x_0 \in I$.

Definição 1.0.32. *Um conjunto* E *de funções* $f : I \to \mathbb{R}$ *chama-se uniformemente equicontínuo quando, para cada* $\epsilon > 0$ *dado, existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$x, y \in I, |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon, \forall f \in E.$$

Teorema 1.0.33. *Se uma sequência equicontínua de funções* $f_n : I \to \mathbb{R}$ *converge simplesmente num subconjunto denso* $D \subset I$, *então* (f_n) *converge uniformemente em cada parte compacta* $K \subset I$.

Demonstração. Veja Teorema 20, página 410 de [6]. $\square$

Definição 1.0.34. *Um conjunto* E *de funções* $f : I \to \mathbb{R}$ *diz-se simplesmente limitado (ou pontualmente limitado) quando para cada* $x \in I$ *existe um número* $c_x > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq c_x, \forall f \in E$.

Definição 1.0.35. *Um conjunto* E *de funções* $f : I \to \mathbb{R}$ *diz-se uniformemente limitado quando existe* $c > 0$ *tal que* $|f(x)| \leq c$ *para toda* $f \in E$ *e todo* $x \in I$.

Definição 1.0.36. *Uma sequência* (f_n) *diz-se simplesmente (ou uniformemente) limitada quando o conjunto* $\{f_1, f_2, ...\}$ *for simplesmente (ou uniformemente) limitado.*

Teorema 1.0.37. *(Ascoli-Arzelá) Seja* $K \subset \mathbb{R}$ *um compacto. Toda sequência equicontínua e simplesmente limitada de funções* $f_n : K \to \mathbb{R}$ *possui uma subsequência uniformemente convergente.*

Demonstração. Veja Teorema 22, página 412 em [6]. $\square$

CAPÍTULO 2

MÉTODO DIRETO DO CÁLCULO DE VARIAÇÕES

Introduzimos neste capítulo os conceitos de derivada fraca e algumas de suas propriedades. Definimos o espaço de Sobolev $W_T^{1,p}$ e apresentamos alguns resultados importantes para o desenvolvimento deste trabalho. Nossa principal referência é [4].

Seja C_T^∞ o espaço das funções T-periódicas infinitamente diferenciáveis de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^N$.

Lema 2.0.1. *(Lema Fundamental) Sejam $u, v \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$. Se para toda $f \in C_T^\infty$,*

$$\int_0^T (u(t), f'(t))\, dt = -\int_0^T (v(t), f(t))\, dt, \tag{2.1}$$

então

$$\int_0^T v(s)ds = 0 \tag{2.2}$$

e existe $C \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$u(t) = \int_0^t v(s)ds + C, \tag{2.3}$$

quase sempre em $[0, T]$.

Demonstração. Denotemos por (e_j) a base canônica de $\mathbb{R}^N$. Podemos escolher as funções constantes $f(t) = e_j$ em (2.1), o que nos dá

$$\int_0^T (u(t), 0)dt = -\int_0^T (v(t), e_j)dt, j = 1, 2, ..., N,$$

o que implica que
$$\int_0^T (v(t), e_j)dt = 0, j = 1, 2, ..., N,$$
e, portanto,
$$\int_0^T v^j(t)dt = 0, j = 1, 2, ..., N.$$
Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T v(s)ds &= \int_0^T ((v(s), e_1), (v(s), e_2), ..., (v(s), e_N))\, ds\\ &= \int_0^T \left(v^1(s), ..., v^N(s)\right) ds\\ &= \left(\int_0^T v^1(s)ds, ..., \int_0^T v^N(s)ds\right) = 0,\end{aligned}$$

provando (2.2).

Definamos $w \in C(0, T; \mathbb{R}^N)$ por

$$w(t) = \int_0^t v(s)ds,$$

de modo que,
$$\int_0^T (w(t), f'(t))dt = \int_0^T \left(\int_0^t (v(s), f'(t))ds\right) dt.$$
Pelo Teorema de Fubini e (2.2), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T (w(t), f'(t))dt &= \int_0^T \left[\int_0^t (v(s), f'(t))ds\right] dt\\ &= \int_0^T \left[\int_s^T (v(s), f'(t))dt\right] ds\\ &= \int_0^T (v(s), f(T) - f(s))ds\\ &= \int_0^T (v(s), f(T))ds - \int_0^T (v(s), f(s))ds\\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^N v^i(s)f^i(T)ds - \int_0^T (v(s), f(s))ds\\ &= \sum_{i=1}^N \int_0^T v^i(s)f^i(T)ds - \int_0^T (v(s), f(s))ds\\ &= \sum_{i=1}^N f^i(T) \int_0^T v^i(s)ds - \int_0^T (v(s), f(s))ds\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$= -\int_0^T (v(s), f(s))ds.$$

Por (2.4) e (2.1), para toda $f \in C_T^\infty$,

$$\int_0^T (u(t) - w(t), f'(t))dt = 0. \tag{2.5}$$

Seja $g = u - w$. A série de Fourier de g é dada por

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{2\pi ikx}{T}\right),$$

sendo $\hat{g}(k)$ os coeficientes de g, ou seja,

$$\begin{aligned}
&\hat{g}(k) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\exp\left(-\frac{2\pi ikx}{T}\right)dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\left[\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) - isen\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)\right]dx \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx - \frac{i}{T}\int_0^T g(x)sen\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx.
\end{aligned}$$

Tomando

$$f(t) = sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)e_j, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \leq j \leq N$$

e

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)e_j, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \leq j \leq N,$$

obtemos por (2.5) que os coeficientes de Fourier de g são todos nulos para $k \neq 0$.

Considerando

$$S_N g(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k)e^{\frac{2\pi ikx}{T}} = \hat{g}(0),$$

temos que g satisfaz as hipóteses do Lema 1.0.4, pois

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \leq \frac{1}{T} \parallel g \parallel_{L^1},$$

logo

$$\parallel S_N g \parallel_{L^1} \leq \frac{1}{T} \parallel g \parallel_{L^1}.$$

Portanto, a série de Fourier de g converge quase sempre, o que implica que $g = \hat{g}(0)$ quase sempre em $[0, T]$. O resultado segue considerando $C = \hat{g}(0)$.

$\square$

Definição 2.0.2. *Uma função $v \in L^1(0,T;\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (2.1) é chamada derivada fraca de u. A derivada fraca de u é denotada por u'.*

Observação 2.0.3. *A derivada fraca, se existir, é única.*

De fato, suponhamos que existam $v, \bar{v} \in L^1(0,T;\mathbb{R}^N)$ satisfazendo (2.1). Então, para toda $f \in C_T^\infty$, temos

$$\int_0^T (u(t), f'(t))dt = -\int_0^T (v(t), f(t))dt$$

e

$$\int_0^T (u(t), f'(t))dt = -\int_0^T (\bar{v}(t), f(t))dt.$$

Disto, segue que

$$\int_0^T (v(t) - \bar{v}(t), f(t))dt = 0, \forall f \in C_T^\infty. \tag{2.6}$$

Seja $g = v - \bar{v}$. A série de Fourier de g é dada por

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) \exp\left(\frac{2\pi ikx}{T}\right),$$

com

$$\begin{aligned}\hat{g}(k) &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\exp\left(-\frac{2\pi ikx}{T}\right)dx \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\left[\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right) - i\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi \mathrm{kx}}{\mathrm{T}}\right)\right]dx \\ &= \frac{1}{T}\int_0^T g(x)\cos\left(\frac{2\pi kx}{T}\right)dx - \frac{i}{T}\int_0^T g(x)\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi \mathrm{kx}}{\mathrm{T}}\right)\mathrm{dx}.\end{aligned}$$

Tomando

$$f(t) = sen\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)e_j, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \le j \le N$$

e

$$f(t) = \cos\left(\frac{2\pi kt}{T}\right)e_j, k \in \mathbb{N} - \{0\}, 1 \le j \le N,$$

obtemos por (2.6), que os coeficientes de Fourier de g são todos nulos para $k \neq 0$.

Tomando

$$S_N g(x) = \sum_{k=-N}^{N} \hat{g}(k) e^{\frac{2\pi i k x}{T}} = \hat{g}(0),$$

temos que g satisfaz as hipóteses do Lema 1.0.4, pois

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T g(x)dx \leq \frac{1}{T} \parallel g \parallel_{L^1},$$

logo

$$\parallel S_N g \parallel_{L^1} \leq \frac{1}{T} \parallel g \parallel_{L^1} .$$

Portanto, a série de Fourier de g converge quase sempre, o que implica que $g = \hat{g}(0)$ quase sempre em $[0, T]$.

Temos por (2.2),

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{T}\int_0^T v(x)dx - \frac{1}{T}\int_0^T \bar{v}(x)dx = 0.$$

Assim, $v = \bar{v}$ quase sempre em $[0, T]$.

Observação 2.0.4. (i) Pelo Lema 2.0.1, se $u \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$, então

$$u(t) = \int_0^t u'(s)ds + C \quad \text{quase sempre em} \quad [0, T],$$

onde C é uma constante.

Identificamos a classe de equivalência de u e seu representante contínuo por

$$\hat{u}(t) = \int_0^t u'(s)ds + C. \tag{2.7}$$

Em particular, por (2.2), temos que $u(0) = u(T) = C$ e

$$u(t) = u(\tau) + \int_\tau^t u'(s)ds,$$

para $t, \tau \in [0, T]$.

(ii) Segue diretamente do Teorema Fundamental do Cálculo que se u' é contínua em $[0, T]$, então por (2.7), u' é a derivada clássica de u, isto é, $u = \hat{u}$. Também, segue que u' é a derivada clássica de u quase sempre em $[0, T]$, pois $u' \in L^1(0, T; \mathbb{R}^N)$, assim, u' tem representante contínuo que é igual a u' a menos de um conjunto de medida nula.

Definição 2.0.5. *Seja $1 < p < \infty$. O espaço de Sobolev $W_T^{1,p}$ é o espaço das funções $u \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$ tendo a derivada fraca $u' \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$. A norma em $W_T^{1,p}$ é definida por*

$$\| u \|_{1,T} = \left(\int_0^T \| u(t) \|^p \, dt + \int_0^T \| u'(t) \|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observação 2.0.6. *Se $u \in W_T^{1,p}$, então*

$$u(t) = \int_0^t u'(s)ds + C$$

e $u(0) = u(T) = C$.

Denotamos por H_T^1 o espaço de Sobolev $W_T^{1,2}$, isto é, $H_T^1 = \{\{u : [0,T] \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N), u(0) = u(T)$ e $u' \in L^2(0,T;\mathbb{R}^N)\}$.

Teorema 2.0.7. *$W_T^{1,p}$ é um espaço de Banach reflexivo e $C_T^\infty \subset W_T^{1,p}$.*

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que $W_T^{1,p}$ é um espaço de Banach. De fato, seja $(u_n) \subset W_T^{1,p}$ uma sequência de Cauchy. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$ então

$$\| u_n - u_m \|_{1,T}^p = \| u_n - u_m \|_{L^p}^p + \| u_n'(t) - u_m'(t) \|_{L^p}^p < \epsilon.$$

Disto, segue que (u_n) e (u_n') são sequências de Cauchy em $L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$, que é um espaço de Banach. Logo, existem $u_1, u_2 \in L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$ tais que $u_n \longrightarrow u_1$ e $u_n' \longrightarrow u_2$ em $L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$. Vamos mostrar que $u_1' = u_2$.

Pela definição de derivada fraca,

$$\int_0^T (u_n(t), f'(t))dt = -\int_0^T (u_n'(t), f(t))dt, \tag{2.8}$$

para toda $f \in C_T^\infty$ e para todo $n \in \mathbb{N}$.

Além disso, como $u_n \longrightarrow u_1$ e $u_n' \longrightarrow u_2$ em $L^p(0,T;\mathbb{R}^N)$,

$$\begin{aligned} \left\| \int_0^T (u_n(t), f'(t))dt - \int_0^T (u_1(t), f'(t))dt \right\| &= \left\| \int_0^T (u_n(t) - u_1(t), f'(t))dt \right\| \\ \leq \int_0^T \| u_n(t) - u_1(t) \| \| f'(t) \| \, dt \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\leq \| f' \|_\infty \int_0^T \| u_n(t) - u_1(t) \| dt$$
$$\leq \| f' \|_\infty \| u_n - u_1 \|_{L^p} T^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0$$

quando $n \to +\infty$, e

$$\begin{aligned}
&\left|\left| \int_0^T (u_n'(t), f(t))dt - \int_0^T (u_2(t), f(t))dt \right|\right| = \left|\left| \int_0^T (u_n'(t) - u_2(t), f(t))dt \right|\right| \\
&\leq \int_0^T \| u_n'(t) - u_2(t) \| \| f(t) \| dt \\
&\leq \| f \|_\infty \int_0^T \| u_n'(t) - u_2(t) \| dt \\
&\leq \| f \|_\infty \| u_n' - u_2 \|_{L^p} T^{\frac{1}{q}} \longrightarrow 0,
\end{aligned} \tag{2.10}$$

quando $n \to \infty$.

Obtemos de (2.8), (2.9) e (2.10),

$$\int_0^T (u_1(t), f'(t))dt = -\int_0^T (u_2(t), f(t))dt, \forall f \in C_T^\infty.$$

Pela Definição 2.0.2, temos que $u_1' = u_2$, então $u_1 \in W_T^{1,p}$. Assim,

$$\| u_n - u_1 \|^p = \| u_n - u_1 \|_{L^p}^p + \| u_n' - u_1' \|_{L^p}^p \longrightarrow 0,$$

donde concluímos que $W_T^{1,p}$ é um espaço de Banach.

Agora, iremos mostrar que $W_T^{1,p}$ é um espaço reflexivo. De fato, seja $E = L^p \times L^p$. Consideremos em E a seguinte norma

$$\| (u, v) \|_E = \| u \|_{L^p} + \| v \|_{L^p},$$

para todo $u, v \in L^p$.

Como L^p é reflexivo, então E é reflexivo. Defina a seguinte aplicação

$$\begin{aligned}
T: \ W_T^{1,p} &\longrightarrow L^p \times L^p \\
u \ &\longmapsto (u, u'),
\end{aligned}$$

a qual é uma isometria, pois

$$\begin{aligned}&\| Tu - Tv \|_E = \| (u,u') - (v,v') \|_E = \| (u-v, u'-v') \|_E \\ &= \| u - v \|_{L^p} + \| u' - v' \|_{L^p} = \| u - v \|_{1,T} \ .\end{aligned}$$

Assim, $T(W_T^{1,p})$ é fechado em E, e pela Proposição 1.0.12, concluímos que $T(W_T^{1,p})$ é reflexivo.

Logo, a aplicação

$$\begin{aligned}T_1 : \ W_T^{1,p} &\longrightarrow T(W_T^{1,p}) \\ u \ &\longmapsto (u,u'),\end{aligned}$$

é bijetora, e portanto, $W_T^{1,p}$ é reflexivo.

Finalmente, vamos mostrar que $C_T^\infty \subset W_T^{1,p}$. Seja $u \in C_T^\infty$. Então, u tem derivada clássica u'. Assim,

$$\begin{aligned}|| \ u(t) \ || \leq \| \ u \ \|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} || \ u(t) \ || < +\infty, \\ || \ u'(t) \ || \leq \| \ u' \ \|_\infty = \max_{0 \leq t \leq T} || \ u'(t) \ || < +\infty\end{aligned}$$

e consequentemente,

$$\int_0^T || \ u(t) \ ||^p \leq \| \ u \ \|_\infty^p \ T < +\infty,$$

e

$$\int_0^T || \ u'(t) \ ||^p \ dt \leq \| \ u' \ \|_\infty^p \ T < +\infty.$$

Portanto, $u \in W_T^{1,p}$.

$\square$

Observação 2.0.8. *H_T^1 é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por*

$$< u, v > = \int_0^T (u'(t), v'(t))dt + \int_0^T (u(t), v(t))dt,$$

para todo $u, v \in H_T^1$, onde $(.,.)$ denota o produto interno em $\mathbb{R}^N$. A norma correspondente é dada por

$$\| \ u \ \|_{1,T} = \left(\int_0^T || \ u'(t) \ ||^2 \ dt + \int_0^T || \ u(t) \ ||^2 \ dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $u \in H_T^1$.

Proposição 2.0.9. *Existe $C > 0$ tal que, se $u \in W_T^{1,p}$, então*

$$\| u \|_\infty \leq C \| u \|_{1,T} . \tag{2.11}$$

Mais ainda, se

$$\int_0^T u(t)dt = 0,$$

então

$$\| u \|_\infty \leq C \| u' \|_{L^p} . \tag{2.12}$$

Demonstração. Vamos demonstrar esta proposição para as componentes de u, isto é, consideremos as funções $u^j, j = 1, 2, ..., N$. Pelo Teorema do Valor Médio para integrais (veja [6]) existe $\tau \in (0, T)$ tal que

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^j(s)ds = u^j(\tau).$$

Assim, para $t \in [0, T]$, pela Proposição 1.0.1,

$$\begin{aligned}
| u^j(t) | &= \left| u^j(\tau) + \int_\tau^t u'^j(s)ds \right| \\
&\leq | u^j(\tau) | + \int_0^T | u'^j(s) | \, ds \\
&= \frac{1}{T}\left| \int_0^T u^j(s)ds \right| + \int_0^T | u'^j(s) | \, ds \\
&\leq \frac{1}{T}\left| \int_0^T u^j(s)ds \right| + T^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^T | u'^j(s) |^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \frac{1}{T}\left| \int_0^T u^j(s)ds \right| + T^{\frac{1}{q}} \| u'^j \|_{L^p} .
\end{aligned}$$

Se

$$\int_0^T u^j(s)ds = 0,$$

obtemos (2.12). No caso geral, temos, pela Proposição 1.0.1, para $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
| u^j(t) | &\leq \frac{1}{T}\int_0^T | u^j(s) | \, ds + T^{\frac{1}{q}} \| u'^j \|_{L^p} \\
&\leq T^{\frac{-q+1}{q}} \left(\int_0^T | u^j(s) |^p \, ds \right)^{\frac{1}{p}} + T^{\frac{1}{q}} \| u'^j \|_{L^p} \\
&= T^{\frac{-q+1}{q}} \| u^j \|_{L^p} + T^{\frac{1}{q}} \| u'^j \|_{L^p}
\end{aligned}$$

$$\leq T^{\frac{-q+1}{q}} \parallel u^j \parallel_{1,T} + T^{\frac{1}{q}} \parallel u^j \parallel_{1,T}$$
$$= C \parallel u^j \parallel_{1,T},$$

onde $C = T^{\frac{-q+1}{q}} + T^{\frac{1}{q}}$.

□

Proposição 2.0.10. *Dado $u \in H_T^1$, sejam $\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt$ e $\tilde{H}_T^1 \equiv \{u \in H_T^1; \bar{u} = 0\}$, então H_T^1 é a soma direta dos espaços $\mathbb{R}^N$ e $\tilde{H}_T^1$, isto é,*

$$H_T^1 = \mathbb{R}^N \oplus \tilde{H}_T^1.$$

Demonstração. De fato, notemos que a função constante $n \equiv 0$ é tal que $n \in \mathbb{R}^N \cap \tilde{H}_T^1$. Além disso, dado $u \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$, temos

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u dt = \frac{u}{T}T = u \neq 0,$$

logo, $u \notin \tilde{H}_T^1$. Portanto,

$$\mathbb{R}^N \cap \tilde{H}_T^1 = \{0\}.$$

Agora, vamos mostrar que

$$H_T^1 = \mathbb{R}^N + \tilde{H}_T^1.$$

Como $\mathbb{R}^N$ e $\tilde{H}_T^1$ são subespaços de H_T^1, então

$$\mathbb{R}^N + \tilde{H}_T^1$$

também é um subespaço de H_T^1, portanto,

$$\mathbb{R}^N + \tilde{H}_T^1 \subset H_T^1.$$

Por outro lado, dado $u \in H_T^1$, podemos escrever

$$u = \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds + \left(u - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right).$$

Sejam

$$x = \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds$$

e

$$g = u - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds.$$

É claro que $x \in \mathbb{R}^N$. Além disso, $g \in H_T^1$ e

$$\begin{aligned}
\bar{g} &= \frac{1}{T}\int_0^T \left[u(t) - \frac{1}{T}\int_0^T u(s)ds\right] dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt - \frac{1}{T^2}\int_0^T \left(\int_0^T u(s)ds\right) dt \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt - \frac{1}{T^2}T\int_0^T u(s)ds \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo, $g \in \tilde{H}_T^1$, donde conluímos que

$$H_T^1 \subset \mathbb{R}^N + \tilde{H}_T^1.$$

Portanto,

$$H_T^1 = \mathbb{R}^N \oplus \tilde{H}_T^1.$$

□

Proposição 2.0.11. *Suponhamos $u \in H_T^1$ e $\int_0^T u(t)dt = 0$, então temos as seguintes desigualdades:*

(i) *(Desigualdade de Wirtinger)*

$$\| u \|_{L^2}^2 \leq \frac{T^2}{4\pi^2} \| u' \|_{L^2}^2 .$$

(ii) *(Desigualdade de Sobolev)*

$$\| u \|_{\infty}^2 \leq \frac{T}{12} \| u' \|_{L^2}^2 .$$

Demonstração. Como, por hipótese, $u \in H_T^1$, então u pode ser representado por sua série de Fourier da forma:

$$u(t) = \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} u_k \exp\left(\frac{2i\pi kt}{T}\right),$$

considerando que

$$\int_0^T u(t)dt = 0.$$

Da mesma forma,

$$u'(t) = \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} u_k \left(\frac{2\pi i k}{T}\right) \exp\left(\frac{2i\pi k t}{T}\right).$$

Pela Proposição 1.0.5,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \| u'(t) \|^2 \, dt &= T \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \left(\frac{2\pi k}{T}\right)^2 \mid u_k \mid^2 \\
&\geq \frac{4\pi^2}{T^2} \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} T \mid u_k \mid^2 \\
&= \frac{4\pi^2}{T^2} \int_0^T \| u(t) \|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Logo, vale a Desigualdade de Wirtinger. A Desigualdade de Cauchy-Schwarz (para somas) e a Igualdade de Parseval implicam que, para $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
\| u(t) \|^2 &= \left\| \sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} u_k \exp\left(\frac{2i\pi k t}{T}\right) \right\|^2 \\
&\leq \left(\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \| u_k \| \right)^2 \\
&\leq \left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{T}{4\pi^2 k^2} \right] \left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4\pi^2 k^2}{T} \| u_k \|^2 \right] \\
&= \frac{T}{4\pi^2} \frac{2\pi^2}{6} \left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4\pi^2 k^2}{T} \| u_k \|^2 \right] \\
&= \left(\frac{T}{12}\right) \left[\sum_{\substack{k=-\infty,\\ k\neq 0}}^{+\infty} \frac{4\pi^2 k^2}{T} \| u_k \|^2 \right] \\
&= \left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T \| u'(t) \|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\| u \|_\infty^2 = \max_{t\in[0,T]} \| u(t) \|^2 \leq \left(\frac{T}{12}\right) \| u' \|_{L^2}^2 .$$

$\square$

Lema 2.0.12. *Dado $u \in H^1_T$, temos que*

$$\| u \|_{1,T} \longrightarrow +\infty \quad \textit{se, e somente se,} \quad \left(|| \bar{u} ||^2 + \| u' \|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow +\infty. \tag{2.13}$$

Demonstração. Primeiramente, notemos que provar (2.13) é equivalente a mostrar que

$$\| u' \|^2_{L^2} + \int_0^T || u(t) ||^2 \, dt \longrightarrow +\infty \quad \text{se, e somente se, } || \bar{u} ||^2_{1,T} + \| u' \|^2_{L^2} \longrightarrow +\infty.$$

Suponhamos, por absurdo, que

$$\| u' \|^2_{L^2} + \int_0^T || u(t) ||^2 \, dt \longrightarrow +\infty,$$

e que

$$|| \bar{u} ||^2_{1,T} + \| u' \|^2_{L^2} < +\infty.$$

Então,

$$\int_0^T || u(t) ||^2 \, dt \longrightarrow +\infty$$

e

$$|| \bar{u} ||^2_{1,T} + \| u' \|^2_{L^2} < +\infty.$$

Temos, pelo item (ii) da Proposição 2.0.11, que

$$\begin{aligned}
\int_0^T || u(t) ||^2 \, dt &= \int_0^T || \bar{u} + \tilde{u}(t) ||^2 \, dt \\
&\leq 2 \int_0^T [\| \bar{u} \|^2 + || \tilde{u}(t) ||^2] dt \\
&= 2T \| \bar{u} \|^2 + \int_0^T || \tilde{u}(t) ||^2 \, dt \\
&\leq 2T \| \bar{u} \|^2 + \int_0^T \| \tilde{u} \|^2_{\infty} \, dt \\
&\leq 2T \| \bar{u} \|^2 + \int_0^T \frac{T}{12} \| \tilde{u}' \|^2_{L^2} \, dt \\
&= 2T \| \bar{u} \|^2 + \frac{T^2}{12} \| \tilde{u}' \|^2_{L^2} \\
&= 2T \| \bar{u} \|^2 + \frac{T^2}{12} \| u' \|^2_{L^2} < +\infty,
\end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que

$$\parallel \bar{u} \parallel_{1,T}^2 + \parallel u' \parallel_{L^2}^2 \longrightarrow +\infty,$$

e que

$$\parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \int_0^T \parallel u(t) \parallel^2 dt < +\infty.$$

Então,

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \right\|^2 \longrightarrow +\infty$$

e

$$\int_0^T \parallel u(t) \parallel^2 dt + \parallel u' \parallel_{L^2}^2 < +\infty.$$

No entanto, pela Proposição 1.0.7,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{T} \int_0^T u(t)dt \right\|^2 &= \frac{1}{T^2} \left\| \int_0^T u(t)dt \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{1}{T} \int_0^T u_i(t)dt \right)^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^N \frac{1}{T^2} \int_0^T (u_i(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \sum_{i=1}^N (u_i(t))^2 dt \\ &= \frac{1}{T^2} \int_0^T \parallel u(t) \parallel^2 dt < +\infty, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. O resultado segue.

□

Proposição 2.0.13. *Se a sequência (u_k) converge fracamente a u em $W_T^{1,p}$, então (u_k) converge uniformemente a u em $[0,T]$.*

Demonstração. Defina

$$\begin{aligned} \varphi : W_T^{1,p} &\longrightarrow C(0,T;\mathbb{R}^N) \\ u &\longmapsto u. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que φ é contínua. De fato, dados $\epsilon > 0$ e $u_0 \in W_T^{1,p}$, temos pela Proposição 2.0.9 que existe $c > 0$ tal que se $u \in W_T^{1,p}$, então $\| u - u_0 \|_\infty \leq c \| u - u_0 \|_{1,T}$. Assim, tomando $\delta = \frac{\epsilon}{c}$, obtemos

$$u \in W_T^{1,p}, \| u - u_0 \|_{1,T} < \delta \Rightarrow \| \varphi(u) - \varphi(u_0) \|_\infty \leq c \| u - u_0 \|_{1,T} < c\delta = \epsilon.$$

Portanto, φ é contínua em $W_T^{1,p}$.

Uma vez que $u_k \rightharpoonup u$ em $W_T^{1,p}$ e φ é contínua na topologia forte (logo, fracamente contínua), então $\varphi(u_k) \rightharpoonup \varphi(u)$ em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$, ou seja, $u_k \rightharpoonup u$ em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$.

Assim, pela Proposição 1.0.27, obtemos que a sequência (u_k) é limitada em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$ e em $W_T^{1,p}$, logo, existem $M_1, M_2 > 0$ tais que

$$\| u_k \|_{1,T} \leq M_1$$

e

$$\| u_k \|_\infty \leq M_2, \forall k \in \mathbb{N}.$$

Em particular, (u_k) é simplesmente limitada. Além disso, (u_k) é uniformemente equicontínuo, pois dado $\epsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \left(\frac{\epsilon}{M_1}\right)^q$ e, pela Proposição 1.0.1 e pelo Lema 2.0.1,

$$\begin{aligned} s,t \in [0,T], |s-t| < \delta \Rightarrow ||u_k(t) - u_k(s)|| &= \left|\left| \int_0^t u_k'(\tau)d\tau + c_1 - \int_0^s u_k'(\tau)d\tau - c_1 \right|\right| \\ &\leq \int_s^t ||u_k'(\tau)||d\tau \\ &\leq |s-t|^{\frac{1}{q}} \left(\int_s^t ||u_k'(\tau)||^p d\tau \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq |s-t|^{\frac{1}{q}} \| u_k \|_{1,T} \\ &\leq |s-t|^{\frac{1}{q}} M_1 \\ &< \frac{\epsilon M_1}{M_1} = \epsilon. \end{aligned}$$

Logo, (u_k) é equicontínuo. Como $[0,T]$ é compacto, segue do Teorema 1.0.37 que (u_k) possui uma subsequência uniformemente convergente, digamos $u_{k_j} \to u_1$. Pela Proposição 1.0.27, (u_{k_j}) converge fracamente a u_1 e segue da unicidade do limite fraco em $C(0,T;\mathbb{R}^N)$ que $u_1 = u$, ou seja, (u_{k_j}) converge uniformemente a u em $[0,T]$.

Repetindo este último argumento, concluímos que toda subsequência de (u_k), uniformemente convergente, converge uniformemente a u em $[0,T]$. Logo, $u_k \to u$ uniformemente em $[0,T]$.

$\square$

Teorema 2.0.14. *Seja* $L : [0,T]\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, (t,x,y) \mapsto L(t,x,y)$ *uma função mensurável em* t *para cada* $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$ *e continuamente diferenciável em* (x,y) *para quase todo* $t \in [0,T]$. *Se existirem* $a \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+), b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ *e* $c \in L^q(0,T;\mathbb{R}^+), 1 < q < \infty$*, tais que, para quase todo* $t \in [0,T]$ *e todo* $(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$*, temos*

$$(a)\begin{cases} \mid L(t,x,y) \mid \leq a(\parallel x \parallel)(b(t)+ \parallel y \parallel^p) \\ \mid D_xL(t,x,y) \mid \leq a(\parallel x \parallel)(b(t)+ \parallel y \parallel^p) \\ \mid D_yL(t,x,y) \mid \leq a(\parallel x \parallel)(c(t)+ \parallel y \parallel^{p-1}) \end{cases}$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*, então o funcional* φ *definido por*

$$\varphi(u) = \int_0^T L(t,u(t),u'(t))dt$$

é continuamente diferenciável em $W_T^{1,p}$ *e*

$$(b) \qquad <\varphi'(u),v>= \int_0^T [(D_xL(t,u(t),u'(t)),v(t)) + (D_yL(t,u(t),u'(t)),v'(t))]\,dt.$$

Demonstração. Vamos mostrar que φ tem em todo ponto u a derivada direcional $\varphi'(u) \in (W_T^{1,p})'$ dada por *(b)*.

Dado $u \in W_T^{1,p}$, temos por *(a)* que

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \int_0^T L(t,u(t),u'(t))dt \\ &\leq \int_0^T \mid L(t,u(t),u'(t)) \mid dt \\ &\leq \int_0^T a(\parallel u(t) \parallel)(b(t)+ \parallel u'(t) \parallel^p)dt < +\infty, \end{aligned}$$

pois $a \in C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+)$ e $b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$. Logo, φ é finita em $W_T^{1,p}$.

Defina, para u e v fixos em $W_T^{1,p}$, $t \in [0,T], \lambda \in [-1,1]$,

$$F(\lambda,t) = L(t,u(t)+\lambda v(t),u'(t)+\lambda v'(t))$$

e

$$\psi(\lambda) = \int_0^T F(\lambda, t)dt = \varphi(u + \lambda v).$$

Por *(a)*,

$$\begin{aligned}
\mid D_\lambda F(\lambda, t) \mid =& \mid (D_x L(t, u(t) + \lambda v(t), u'(t) + \lambda v'(t)), v(t)) \\
&+ (D_y L(t, u(t) + \lambda v(t), u'(t) + \lambda v'(t)), v'(t)) \mid \\
&\leq a(\| u(t) + \lambda v(t) \|) \left[(b(t) + \| u'(t) + \lambda v'(t) \|^p) \| v(t) \| \right. \\
&\left. + (c(t) + \| u'(t) + \lambda v'(t) \|^{p-1}) \| v'(t) \| \right] \\
&\leq a_0 \left[(b(t) + (\| u'(t) \| + \| v'(t) \|)^p) \| v(t) \| \right. \\
&\left. + (c(t) + (\| u'(t) \| + \| v'(t) \|)^{p-1}) \| v'(t) \| \right],
\end{aligned}$$

onde

$$a_0 = \max_{(\lambda,t) \in [-1,1] \times [0,T]} a(\| u(t) + \lambda v(t) \|).$$

Uma vez que $b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, $(\mid u' \mid + \mid v' \mid)^p \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, $c \in L^q$, $\mid v' \mid \in L^p(0, T; \mathbb{R}^N)$, e v é contínua, temos

$$\mid D_\lambda F(\lambda, t) \mid \leq d(t) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+).$$

Assim, a fórmula de Leibniz é aplicável e

$$\psi'(\lambda) = \int_0^T D_\lambda F(\lambda, t)dt,$$

logo,

$$\psi'(0) = \int_0^T D_\lambda F(0, t)dt = \int_0^T \left[(D_x L(t, u(t), u'(t)), v(t)) + (D_y L(t, u(t), u'(t)), v'(t))\right] dt.$$

Mais ainda,

$$|D_x L(t, u(t), u'(t))| \leq a(\| u(t) \|)(b(t) + \| u'(t) \|^p) \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+),$$

e

$$|D_y L(t, u(t), u'(t))| \leq a(\| u(t) \|)(c(t) + \| u'(t) \|^{p-1}) \in L^q(0, T, \mathbb{R}^+).$$

Disto, pela Proposição 2.0.9 e pela Proposição 1.0.1, existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [(D_xL(t,u(t),u'(t)),v(t)) + (D_yL(t,u(t),u'(t)),v'(t))]\,dt \\
&\leq \| D_xL \|_{L^1} \| v \|_\infty + \| D_yL \|_{L^q} \| v' \|_{L^p} \\
&\leq \| D_xL \|_{L^1} \| v \|_\infty + \| D_yL \|_{L^q} \| v \|_{1,T} \\
&\leq \| D_xL \|_{L^1} C \| v \|_{1,T} + \| D_yL \|_{L^q} \| v \|_{1,T} \\
&= C_1 \| v \|_{1,T}
\end{aligned}$$

onde $C_1 = \| D_xL \|_{L^1} C + \| D_yL \|_{L^q}$. Assim, φ tem em u, uma derivada direcional $\varphi'(u) \in (W_T^{1,p})'$ dada por *(b)*.

Agora, vamos mostrar que a aplicação

$$\begin{aligned}
\varphi' : W_T^{1,p} &\longrightarrow (W_T^{1,p})' \\
u &\longmapsto \varphi'(u)
\end{aligned}$$

é contínua.

De fato, como L é continuamente diferenciável em (x,y) para quase todo $t \in [0,T]$, dados $u_0 \in W_T^{1,p}$ e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$u \in W_T^{1,p}, \| u(t) - u_0(t) \| < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad \| u'(t) - u_0'(t) \| < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}}$$

implica

$$\begin{aligned}
&| D_xL(t,u(t),u'(t)) - D_xL(t,u_0(t),u_0'(t)) | < \frac{\epsilon}{2T^{\frac{1}{q}}} \\
&\text{e} \\
&| D_yL(t,u(t),u'(t)) - D_yL(t,u_0(t),u_0'(t)) | < \frac{\epsilon}{2T^{\frac{1}{q}}}
\end{aligned} \tag{2.14}$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

Vamos mostrar que, se

$$u \in W_T^{1,p}, \| u - u_0 \|_{1,T} < \delta, \tag{2.15}$$

então,

$$\| u(t) - u_0(t) \| < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}} \quad \text{e} \quad \| u'(t) - u_0'(t) \| < \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}},$$

para quase todo $t \in [0,T]$. De fato, suponhamos, por absurdo, que

$$\| u(t)-u_0(t) \| \geq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}} \quad \text{ou} \quad \| u'(t)-u_0'(t) \| \geq \frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}},$$

para quase todo $t \in [0,T]$. Então,

$$\begin{aligned}
\| u-u_0 \|_{1,T} &= \left[\int_0^T \| u(t)-u_0(t) \|^p \, dt + \int_0^T \| u'(t)-u_0'(t) \|^p \, dt\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(T\left(\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}}\right)^p + C\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\geq \left(T\left(\frac{\delta}{T^{\frac{1}{p}}}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} = \delta,
\end{aligned}$$

para algum $C \in \mathbb{R}$, o que contradiz (2.15).

Portanto,

$$u \in W_T^{1,p}, \| u-u_0 \|_{1,T} < \delta$$

implica por (2.14) e pela Proposição 1.0.1 que

$$\begin{aligned}
&\| \varphi'(u)-\varphi'(u_0) \|_{(W_T^{1,p})'} = \sup_{\{v \in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T} \leq 1\}} |< \varphi'(u)-\varphi'(u_0), v >| \\
&= \sup_{\{v \in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T} \leq 1\}} \left| \int_0^T [(D_xL(t,u(t),u'(t)),v(t)) + (D_yL(t,u(t),u'(t)),v'(t))]\, dt + \right. \\
&\left. - \int_0^T [(D_xL(t,u_0(t),u_0'(t)),v(t)) + (D_yL(t,u_0(t),u_0'(t)),v'(t))]\, dt \right| \\
&\leq \sup_{\{v \in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T} \leq 1\}} \left\{ \int_0^T |(D_xL(t,u(t),u'(t)),v(t)) - (D_xL(t,u_0(t),u_0'(t)),v(t))|\, dt + \right. \\
&\left. + \int_0^T |(D_yL(t,u(t),u'(t)),v'(t)) - (D_yL(t,u_0(t),u_0'(t)),v'(t))|\, dt \right\} \\
&= \sup_{\{v \in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T} \leq 1\}} \left\{ \int_0^T |(D_xL(t,u(t),u'(t)) - D_xL(t,u_0(t),u_0'(t)),v(t))|\, dt + \right. \\
&\left. + \int_0^T |(D_yL(t,u(t),u'(t)) - D_yL(t,u_0(t),u_0'(t)),v'(t))|\, dt \right\} \\
&\leq \sup_{\{v \in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T} \leq 1\}} \left\{ \int_0^T | D_xL(t,u(t),u'(t)) - D_xL(t,u_0(t),u_0'(t)) | \| v(t) \| \, dt + \right. \\
&\left. + \int_0^T | D_yL(t,u(t),u'(t)) - D_yL(t,u_0(t),u_0'(t)) | \| v'(t) \| \, dt \right\}
\end{aligned}$$

$$\leq \sup_{\{v\in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T}\leq 1\}} \left\{ \int_0^T \frac{\epsilon}{2(T)^{\frac{1}{q}}} \parallel v(t) \parallel dt + \int_0^T \frac{\epsilon}{2(T)^{\frac{1}{q}}} \parallel v'(t) \parallel dt \right\}$$
$$\leq \sup_{\{v\in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T}\leq 1\}} \left\{ \frac{\epsilon}{2} \parallel v \parallel_{L^p} + \frac{\epsilon}{2} \parallel v' \parallel_{L^p} \right\}$$
$$\leq \sup_{\{v\in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T}\leq 1\}} \left\{ \frac{\epsilon}{2} \parallel v \parallel_{1,T} + \frac{\epsilon}{2} \parallel v \parallel_{1,T} \right\}$$
$$\leq \sup_{\{v\in W_T^{1,p}, \|v\|_{1,T}\leq 1\}} \left\{ 2\frac{\epsilon}{2} \right\} = \epsilon,$$

donde concluímos que φ' é contínua.

□

Corolário 2.0.15. *Seja*

$$L : [0,T] \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por

$$L(t,x,y) = \left(\frac{1}{2}\right) || \, y \, ||^2 + F(t,x)$$

onde

$$F : [0,T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(t,x) \longmapsto F(t,x)$$

é mensurável em t para cada $x \in \mathbb{R}^N$, continuamente diferenciável em x para quase todo $t \in [0,T]$ e satisfazendo a seguinte condição

$$| \, F(t,x) \, | \leq a(|| \, x \, ||)b(t) \quad e \quad || \, \nabla F(t,x) \, || \leq a(|| \, x \, ||)b(t) \tag{2.16}$$

para quase todo $t \in [0,T]$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$, algum $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e algum $b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$. Se $u \in H_T^1$ é uma solução da equação de Euler correspondente $\varphi'(u) = 0$, então u' tem uma derivada fraca u'', e

$$u''(t) = \nabla F(t, u(t)), \quad \text{quase sempre em} \quad [0,T],$$
$$u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0.$$

Demonstração. Vamos mostrar que a função L satisfaz a hipótese (*a*) do Teorema 2.0.14.

Por (2.16), segue que

$$\begin{aligned}
| L(t,x,y) | &\leq \frac{1}{2} \| y \|^2 + | F(t,x) | \\
&\leq \frac{1}{2} \| y \|^2 + a(\| x \|)b(t) \\
&\leq \| y \|^2 + a(\| x \|)b(t) \\
&\leq (a(\| x \|) + 1)(b(t) + \| y \|^2),
\end{aligned}$$

e de (2.16) vem

$$\begin{aligned}
\| D_x L(t,x,y) \| &= \| \nabla F(t,x) \| \\
&\leq a(\| x \|)b(t) \\
&\leq (a(\| x \|) + 1)(b(t) + \| y \|^2),
\end{aligned}$$

também segue que

$$\| D_y L(t,x,y) \| = \| y \| \leq (a(\| x \|) + 1)(1 + \| y \|).$$

Pelo Teorema 2.0.14,

$$0 = < \varphi'(u), v > = \int_0^T \left[(\nabla F(t,u(t)), v(t)) + (u'(t), v'(t)) \right] dt, \forall v \in H_T^1.$$

Assim, em particular,

$$\int_0^T (u'(t), v'(t))dt = - \int_0^T (\nabla F(t,u(t)), v(t))dt, \forall v \in C_T^\infty.$$

Segue do Lema 2.0.1 que

$$u''(t) = \nabla F(t,u(t)),$$

quase sempre em $[0,T]$. Mais ainda, a existência da derivada fraca de u e de u' implicam que

$$u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0.$$

$\square$

Consideremos o problema introduzido no Corolário 2.0.15, a saber,

$$u''(t) = \nabla F(t, u(t)), \quad \text{quase sempre em} \quad [0, T], \tag{2.17}$$

onde $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que:

$F(t, x)$ é mensurável em t para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e continuamente diferenciável em x para quase todo $t \in [0, T]$, e existem $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ tais que

$$| F(t, x) | \leq a(|| x ||)b(t), \; || \nabla F(t, x) || \leq a(|| x ||)b(t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e quase todo $t \in [0, T]$.

O funcional correspondente φ em H^1_T dado por

$$\varphi(u) = \int_0^T \left[\frac{|| u'(t) ||^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt \tag{2.18}$$

é continuamente diferenciável em H^1_T, pelo Teorema 2.0.14, e além disso, temos o seguinte resultado.

Lema 2.0.16. *Seja φ dada por (2.18). Se φ tem sequência minimizante limitada, então φ tem mínimo em H^1_T e tal mínimo é solução do problema (2.17).*

Demonstração. Uma vez que a função quadrática é convexa, temos que a função

$$\int_0^T \frac{|| u'(t) ||^2}{2} dt \tag{2.19}$$

é também convexa. De fato, dados $u, v \in H^1_T$ e $\lambda \in (0, 1)$, temos

$$\int_0^T \frac{\| (1-\lambda)u'(t) + \lambda v'(t) \|^2}{2} dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \left[(1-\lambda) \| u'(t) \| + \lambda \| v'(t) \| \right]^2 dt$$
$$\leq \frac{1}{2} \int_0^T (1-\lambda) \| u'(t) \|^2 \, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \lambda \| v'(t) \|^2 \, dt$$
$$= (1-\lambda) \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \lambda \int_0^T \frac{\| v'(t) \|^2}{2} dt.$$

Além disso,

$$\int_0^T \frac{|| u'(t) ||^2}{2} dt$$

é semi-contínua inferiormente. Com efeito, sejam $(u_k) \subset H_T^1$ e $u \in H_T^1$ tais que

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad H_T^1.$$

Vamos mostrar que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \frac{\| u_k'(t) \|^2}{2} dt = \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt.$$

Como

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad H_T^1, \quad \text{então} \quad u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H_T^1.$$

Daí, pela Proposição 2.0.13, temos que

$$u_k \to u \quad \text{uniformemente em} \quad [0,T].$$

Disto, e pela continuidade da norma, obtemos que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \frac{\| u_k'(t) \|^2}{2} dt = \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt.$$

Portanto,

$$\int_0^T \frac{|| u'(t) ||^2}{2} dt$$

é semi-contínua inferiormente. Assim, segue do Teorema 1.0.23 que (2.19) é fracamente semi-contínua inferiormente. Além disso,

$$\int_0^T F(t,u(t))dt \tag{2.20}$$

é fracamente semi-contínua inferiormente. De fato, sejam $(u_k) \subset H_T^1$ uma sequência e $u \in H_T^1$ tais que

$$u_k \rightharpoonup u,$$

em H_T^1. Temos, pela Proposição 2.0.13, que

$$u_k \quad \text{converge uniformemente a } u\text{, em} \quad [0,T].$$

Disto, segue que

$$\underline{\lim} \int_0^T F(t, u_k(t))dt = \int_0^T F(t, u(t))dt,$$

portanto, a aplicação dada em (2.20) é fracamente semi-contínua inferiormente. Segue do item (i) da Proposição 1.0.20 que

$$\varphi(u) = \int_0^T \left[\frac{\| u'(t) \|^2}{2} + F(t, u(t)) \right] dt$$

é fracamente semi-contínua inferiormente.

Daí, segue do Teorema 1.0.21 que φ tem um mínimo em H_T^1, digamos u_0. Pelo Teorema 1.0.24 segue que $\varphi'(u_0) = 0$. Disto, e pelo Corolário 2.0.15, concluímos que u_0' tem uma derivada fraca e

$$u_0'' = \nabla F(t, u_0(t)), \quad \text{quase sempre em} \quad [0, T].$$

Portanto, u_0 é uma solução do problema (2.17). $\square$

Pelo lema anterior, vemos que para estabelecermos a solubilidade do problema (2.17), basta encontrar condições sobre as quais φ tem uma sequência minimizante limitada. Este problema na literatura é conhecido como método direto do cálculo de variações. Esta técnica foi utilizada por alguns autores. O leitor mais interessado pode encontrar maiores detalhes em [14] e [15].

Teorema 2.0.17. *Assumamos que $F(t, x)$ é mensurável em t para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e continuamente diferenciável em x para quase todo $t \in [0, T]$, e existem $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), b \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$ tais que*

$$| F(t, x) | \leq a(\| x \|)b(t), \| \nabla F(t, x) \| \leq a(\| x \|)b(t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e quase todo $t \in [0, T]$ e que existe $g \in L^1(0, T)$ tal que

$$\| \nabla F(t, x) \| \leq g(t),$$

para quase todo $t \in [0, T]$ e todo $x \in \mathbb{R}^N$. Se

$$\int_0^T F(t, x)dt \longrightarrow +\infty \quad \textit{quando} \quad \| x \| \longrightarrow +\infty, \tag{2.21}$$

então o problema (2.17) tem pelo menos uma solução que minimiza a função φ em H_T^1, onde φ é dada por (2.18).

Demonstração. Seja $u \in H_T^1$. Então $u = \bar{u} + \tilde{u}$, onde

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \quad \text{e} \quad \tilde{u} \in \tilde{H}_T^1.$$

Pelo Lema 2.0.16, temos

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \int_0^T \left[\frac{\| u'(t) \|^2}{2} + F(t,u(t))\right] dt \\
&= \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt + \int_0^T [F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})]\, dt \\
&= \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt + \int_0^T \int_0^1 (\nabla F(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\, dsdt.
\end{aligned}$$

Agora, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz, Hölder e Sobolev, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &\geq \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - \int_0^T \int_0^1 \| \nabla F(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)) \| \| \tilde{u}(t) \|\, dsdt \\
&\geq \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - \int_0^T \int_0^1 g(t) \| \tilde{u}(t) \|\, dsdt \\
&= \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - \int_0^T g(t) \| \tilde{u}(t) \|\, dt \\
&\geq \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - \int_0^T | g(t) |\, dt \| \tilde{u} \|_\infty \\
&\geq \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - \int_0^T | g(t) |\, dt \left[\left(\frac{T}{12}\right) \int_0^T \| u'(t) \|^2\, dt\right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \int_0^T \frac{\| u'(t) \|^2}{2} dt + \int_0^T F(t,\bar{u})dt - C\left(\int_0^T \| u'(t) \|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

onde

$$C = \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \int_0^T | g(t) |\, dt.$$

Logo φ é limitada inferiormente em H_T^1. Como

$$\| u \|_{1,T} \longrightarrow +\infty \quad \text{se, e somente se,} \quad \left(\| \bar{u} \|^2 + \int_0^T \| u'(t) \|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow +\infty,$$

temos pela desigualdade acima e por (2.21) que

$$\varphi(u) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \quad \| u \|_{1,T} \longrightarrow +\infty.$$

Portanto, φ é coerciva e limitada inferiormente, segue da Proposição 1.2 que φ possui uma sequência minimizante limitada. Pelo Lema 2.0.16, o problema (2.17) tem uma solução que, por sua vez, é um mínimo local da função φ em H^1_T.

$\square$

CAPÍTULO 3

SOLUBILIDADE DE UMA CLASSE DE PROBLEMAS DE VIBRAÇÃO AMORTECIDOS COM IMPULSOS

Neste capítulo estudamos a existência de solução do seguinte problema de vibração com impulsos

$$u''(t) + g(t)u'(t) = \nabla F(t, u(t)) \tag{3.1}$$

para quase todo $t \in [0, T]$,

$$u(0) - u(T) = u'(0) - u'(T) = 0, \tag{3.2}$$

com condições impulsivas

$$\triangle(u'^i(t_j)) = I_{ij}(u^i(t_j)), i = 1, 2, ..., N, j = 1, 2, ..., p, \tag{3.3}$$

onde $u(t) = (u^1(t), u^2(t), ..., u^N(t)), u'^i(t)$ indica a derivada de $u^i(t)$, ou seja, $(u^i(t))'$, $T > 0, t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_p < t_{p+1} = T$, $\triangle(u'^i(t_j)) = u'^i(t_j^+) - u'^i(t_j^-)$, onde $u'^i(t_j^+)$ e $u'^i(t_j^-)$ denotam os limites à direita e à esquerda de $u'^i(t)$ em $t = t_j$, respectivamente. As funções impulsivas $I_{ij} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, ..., N, j = 1, 2, ..., p)$ são contínuas, $\nabla F(t, x)$ é o gradiente de $F : [0, T] \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ com relação a x. Vamos assumir que F e g satisfazem as seguintes hipóteses:

(A) $F(t,x)$ é mensurável em relação a t para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e continuamente diferenciável em relação a x para quase todo $t \in [0,T]$, e existem $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ tais que

$$| F(t,x) | \leq a(\| x \|)b(t), \ || \nabla F(t,x) || \leq a(\| x \|)b(t)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e quase todo $t \in [0,T]$.

(B) $g : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}, g \in L^1(0,T;\mathbb{R})$ e $\int_0^T g(t)dt = 0$.

Neste capítulo, nos referimos ao problema impulsivo (3.1)-(3.3) como (PI). Denotamos por $\mathcal{H}$ o subconjunto de $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ tal que, para quaisquer $h \in \mathcal{H}$, existem constantes $C_0, K_1 > 0, K_2 > 0$, e $\alpha \in [0,1)$ tais que

(i) $h(s) \leq h(t), \forall s \leq t, \quad s,t \in \mathbb{R}^+$;

(ii) $h(s+t) \leq C_0(h(s)+h(t)), \quad \forall s,t \in \mathbb{R}^+$;

(iii) $0 \leq h(s) \leq K_1 s^\alpha + K_2, \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$;

(iv) $h(s) \to +\infty$ quando $s \to +\infty$.

Observação 3.0.1. *No decorrer deste capítulo, utilizamos as seguintes notações:*

$$\mathcal{A} \equiv \{1,2,...,N\}, \mathcal{B} \equiv \{1,2,...,p\},$$
$$M \equiv \int_0^T | g(t) | \, dt, \quad G(t) \equiv \int_0^t g(s)ds,$$

e

$$E(x) = \int_0^T e^{G(t)} F(t,x)dt + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{x^i} I_{ij}(y)dy.$$

O primeiro resultado nos garante que $G(t) = \int_0^t g(s)ds$ é absolutamente contínua e limitada em $[0,T]$.

Lema 3.0.2. *A função $G : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por*

$$G(t) = \int_0^t g(s)ds,$$

é uma função absolutamente contínua. Além disso, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$| G(t) | \leq M,$$

para todo $t \in [0, T]$.

Demonstração. Primeiramente, vamos mostrar que G é absolutamente contínua. Dada uma coleção arbitrária e disjunta de sub-intervalos $\{[a_k, b_k]\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $[0, T]$, seja

$$E = \bigcup_{k=1}^{\infty}(a_k, b_k),$$

então
$$\sum_{k=1}^{\infty} \mid G(b_k) - G(a_k) \mid = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \int_{a_k}^{b_k} g \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{a_k}^{b_k} \mid g \mid = \int_E \mid g \mid .$$

Uma vez que g é integrável sobre $[0, T]$, temos pela Proposição 1.0.2 que, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que
$$\text{se} \quad \text{med}(E) < \delta, \quad \text{então} \quad \int_E \mid g \mid < \epsilon. \tag{3.4}$$

Assim, tomando δ de modo que (3.4) seja satisfeito, obtemos

$$\text{med}(E) < \delta \quad \text{implica} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \mid G(b_k) - G(a_k) \mid = \int_E \mid g \mid < \epsilon.$$

Portanto, G é absolutamente contínua.

Ainda,

$$\mid G(t) \mid = \left| \int_0^t g(s)ds \right| \leq \int_0^t \mid g(s) \mid ds \leq \int_0^T \mid g(s) \mid ds = M. \tag{3.5}$$

□

Com o intuito de utilizar o método direto do cálculo variacional, vamos encontrar o funcional adequado de modo que os seus pontos críticos correspondam as soluções de (PI). Primeiramente, vamos definir solução fraca do problema em questão.

Consideremos, agora, a equação (3.1). Multiplicando ambos os lados de (3.1) por $e^{G(t)}$, obtemos

$$e^{G(t)}u''(t) + e^{G(t)}g(t)u'(t) = e^{G(t)}\nabla F(t, u(t)), \tag{3.6}$$

para quase todo ponto $t \in [0, T]$.

Levando em conta que u' é a derivada clássica de u quase sempre em $[0, T]$, a equação (3.6) implica que

$$\left(e^{G(t)}u'(t)\right)' = e^{G(t)}\nabla F(t,u(t)), \tag{3.7}$$

para quase todo $t \in [0,T]$.

Agora, multiplicando (3.7) por $v \in H_T^1$ e integrando de 0 e T, temos

$$\int_0^T \left(\left(e^{G(t)}u'(t)\right)', v(t)\right) dt - \int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u(t)), v(t))dt = 0. \tag{3.8}$$

Sabendo que u' é a derivada clássica de u quase sempre em $[0,T]$, pelas equações (3.2), (3.3) e do fato de que $\int_0^T g(t)dt = 0$, para o primeiro termo de (3.8), temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left(\left(e^{G(t)}u'(t)\right)', v(t)\right) dt = \sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(\left(e^{G(t)}u'(t)\right)', v(t)\right) dt \\
&= \sum_{j=0}^{p} \left[\left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt \right] \\
&= \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_0^{t_1^-} + \sum_{j=1}^{p-1} \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} + \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_p^+}^{T} + \\
&- \sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt \\
&= \left(e^{G(t_1^-)}u'(t_1^-), v(t_1^-)\right) - \left(e^{G(0)}u'(0), v(0)\right) + \sum_{j=1}^{p-1} \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} + \\
&+ \left(e^{G(T)}u'(T), v(T)\right) - \left(e^{G(t_p^+)}u'(t_p^+), v(t_p^+)\right) - \sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt \\
&= \left(e^{G(t_1^-)}u'(t_1^-), v(t_1^-)\right) + \sum_{j=1}^{p-1} \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_j^+}^{t_{j+1}^-} - \left(e^{G(t_p^+)}u'(t_p^+), v(t_p^+)\right) + \\
&- \sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt \\
&= \left(e^{G(t_1^-)}u'(t_1^-), v(t_1^-)\right) - \sum_{j=1}^{p-1} \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right) \Big|_{t_{j+1}^-}^{t_j^+} - \left(e^{G(t_p^+)}u'(t_p^+), v(t_p^+)\right) + \\
&- \sum_{j=0}^{p} \int_{t_j}^{t_{j+1}} \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{j=1}^{p} \left(e^{G(t)}u'(t), v(t)\right)|_{t_j^-}^{t_j^+} - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt$$
$$= -\sum_{j=1}^{p} \left[\left(e^{G(t_j^+)}u'(t_j^+), v(t_j^+)\right) - \left(e^{G(t_j^-)}u'(t_j^-), v(t_j^-)\right)\right] - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt$$
$$= -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} \left[e^{G(t_j^+)}u'^i(t_j^+)v^i(t_j^+) - e^{G(t_j^-)}u'^i(t_j^-)v^i(t_j^-)\right] - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt$$
$$= -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\triangle(u'^i(t_j))v^i(t_j) - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt$$
$$= -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}I_{ij}(u^i(t_j))v^i(t_j) - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt.$$

Assim, substituindo em (3.8), obtemos

$$-\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}I_{ij}(u^i(t_j))v^i(t_j) - \int_0^T \left(e^{G(t)}u'(t), v'(t)\right) dt - \int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t, u(t)), v(t))dt = 0,$$

ou seja,

$$\int_0^T e^{G(t)}(u'(t), v'(t))dt + \int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t, u(t)), v(t))dt = -\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}I_{ij}(u^i(t_j))v^i(t_j). \tag{3.9}$$

Motivados por (3.9), introduzimos o seguinte conceito de solução fraca para (PI).

Definição 3.0.3. *Uma função $u \in H_T^1$ é dita solução fraca de (PI) se (3.9) se verifica para todo $v \in H_T^1$.*

Consideremos o funcional

$$\phi : \; H_T^1 \to \mathbb{R}$$
$$u \mapsto \phi(u) = \phi_1(u) + \phi_2(u),$$

onde

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \parallel u'(t) \parallel^2 dt + \int_0^T e^{G(t)}F(t, u(t))dt$$

e

$$\phi_2(u) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy.$$

Seja $\phi = \phi_1 + \phi_2$. O próximo lema nos garante que as soluções de (PI) correspondem aos pontos críticos de ϕ.

Lema 3.0.4. *Suponhamos as hipóteses (A) e (B).*

(a) *A aplicação $\phi_1 : H_T^1 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi_1(u) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \parallel u'(t) \parallel^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} F(t, u(t))dt$$

é continuamente diferenciável em H_T^1. Além disso,

$$< \phi_1'(u), v >= \int_0^T e^{G(t)}(u'(t), v'(t))dt + \int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t, u(t)), v(t))dt,$$

para quaisquer $u, v \in H_T^1$. ***(b)*** *Seja $\phi_2 : H_T^1 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\phi_2(u) = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy.$$

Então $\phi_2 \in C^1(H_T^1; \mathbb{R})$ e

$$< \phi_2'(u), v >= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u^i(t_j))v^i(t_j).$$

(c) *Seja $\phi = \phi_1 + \phi_2$. Então $\phi \in C^1(H_T^1; \mathbb{R})$ e as soluções fracas de (PI) correspondem aos pontos críticos de ϕ.*

Demonstração. Seja

$$L(t, x, z) = e^{G(t)}\frac{\parallel z \parallel^2}{2} + e^{G(t)}F(t, x),$$

para todos $x, z \in \mathbb{R}^N$ e $t \in [0, T]$. Vamos mostrar que $L(t, x, y)$ satisfaz as hipóteses do Teorema 2.0.14. Como $e^{G(t)}$ é uma função contínua em t, então é mensurável em t. Uma vez que $F(t, x)$ é mensurável em t para todo $x \in \mathbb{R}^N$, segue que $L(t, x, z)$ é mensurável em t para todo $(x, z) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$. Além disso, como $F(t, x)$ é continuamente diferenciável em x para quase todo $t \in [0, T]$, então $L(t, x, z)$ é continuamente diferenciável em (x, z) para quase todo $t \in [0, T]$. Pelas hipóteses, existem

$a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+), b \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$ tais que

$$\begin{aligned}
| L(t,x,z) | &\le e^{G(t)} \frac{\| z \|^2}{2} + e^{G(t)} \mid F(t,x) \mid \\
&\le e^{G(t)} \frac{\| z \|^2}{2} + e^{G(t)} a(\| x \|) b(t) \\
&\le e^{M} \frac{\| z \|^2}{2} + e^{M} a(\| x \|) b(t) \\
&\le e^{M} \| z \|^2 + e^{M} a(\| x \|) b(t) \\
&\le C[\| z \|^2 + a(\| x \|) b(t)] + C a(\| x \|) \| z \|^2 + C b(t) \\
&= C[a(\| x \|) + 1](b(t) + \| z \|^2) \\
&= \bar{a}(\| x \|)(b(t) + \| z \|^2),
\end{aligned}$$

onde $\bar{a}(t) = C(a(t)+1) \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e $C = e^M$; além disso,

$$\begin{aligned}
|| D_x L(t,x,z) || &= || e^{G(t)} \nabla F(t,x) || \\
&\le e^{G(t)} a(\| x \|) b(t) \\
&\le C a(\| x \|) b(t) \\
&\le C a(\| x \|) b(t) + C a(\| x \|) \| z \|^2 + C b(t) + C \| z \|^2 \\
&= C[a(\| x \|) + 1](b(t) + \| z \|^2) \\
&= \bar{a}(\| x \|)(b(t) + \| z \|^2);
\end{aligned}$$

$$|| D_z L(t,x,z) || = | e^{G(t)} \| z \| | \le C \| z \| \le C \| z \| + C a(\| x \|) \| z \| = \bar{a}(\| x \|) \left(\| z \| + c(t) \right),$$

com $c(t) = 0, \forall t \in [0,T]$.

Pelo Teorema 2.0.14, ϕ_1 é continuamente diferenciável em H_T^1 e

$$\begin{aligned}
< \phi_1'(u), v > &= \int_0^T \left[e^{G(t)} (\nabla F(t,u(t)), v(t)) + (e^{G(t)} u'(t), v'(t)) \right] dt \\
&= \int_0^T e^{G(t)} (u'(t), v'(t)) dt + \int_0^T e^{G(t)} (\nabla F(t,u(t)), v(t)) dt,
\end{aligned} \tag{3.10}$$

para todos $u, v \in H_T^1$, provando o item (a).

Como I_{ij} são funções contínuas ($i = 1,2,...,N, j = 1,2,...,p$), então $\phi_2 \in C^1(H_T^1, \mathbb{R})$ e

$$< \phi_2'(u), v > = \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u^i(t_j)) v^i(t_j), \tag{3.11}$$

para todo $u, v \in H_T^1$ e o item (b) também está provado. Pela definição da aplicação ϕ, temos pelos itens (a) e (b) que $\phi \in C^1(H_T^1, \mathbb{R})$, e segue de (3.10) e (3.11) que as soluções fracas de (PI) correspondem aos pontos críticos de ϕ, concluindo a prova do item (c).

$\square$

Neste capítulo, vamos assumir as hipóteses (A) e (B). Sob determinadas condições, garantimos que o problema (PI) tem pelo menos uma solução. No teorema a seguir, denotamos por med a medida de Lebesgue de um determinado conjunto.

Teorema 3.0.5. *Suponhamos que existam funções $p, q \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, $\mathrm{med}\{\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]; \mathrm{p(t)} = 0\} < \mathrm{T}, \mathrm{h} \in \mathcal{H}$ e $a_{ij}, b_{ij} > 0$ tais que*

$$\| \nabla F(t, x) \| \leq p(t)h(\| x \|) + q(t), \tag{3.12}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e quase todo $t \in [0, T]$ e

$$| I_{ij}(y) | \leq a_{ij}h(| y |) + b_{ij}, \tag{3.13}$$

para todo $i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$ e $y \in \mathbb{R}$, além disso, suponhamos que

$$\lim \inf_{\|x\| \to +\infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} > 2e^M \left(\sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{A_5 A_6} \right)^2. \tag{3.14}$$

Então, o problema (PI) tem pelo menos uma solução fraca que minimiza a função ϕ em H_T^1. Mais ainda, se $p \in L^2(0, T; \mathbb{R}^+)$, então o resultado é também verdadeiro quando (3.14) é enfraquecida pela seguinte condição

$$\lim \inf_{\|x\| \to \infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} > \min \left\{ 2e^M \left(\sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{A_5 A_6} \right)^2, 2e^M \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6} \right)^2 \right\}. \tag{3.15}$$

Observação 3.0.6. *Antes de iniciar a prova, introduzimos as seguintes notações, com o intuito de simplificar as estimativas que serão feitas ao longo da demonstração.*

$$M_1 \equiv \int_0^T e^{G(t)} p(t) dt, \quad M_2 \equiv \int_0^T e^{G(t)} q(t) dt, \quad M_3 \equiv \left(\int_0^T e^{2G(t)} p^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$A_1 \equiv \frac{T}{24}, \quad A_2 \equiv \frac{C_0^2 M_1^2}{2}, \quad A_3 \equiv \frac{T^2}{8\pi^2},$$
$$A_4 \equiv \frac{C_0^2 M_3^2}{2}, \quad A_5 \equiv \frac{pT}{24}, \quad e \quad A_6 \equiv \frac{C_0^2}{2} \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} a_{ij}^2 e^{2G(t_j)}.$$

Vamos a demonstração do Teorema 3.0.5.

Demonstração. A prova está dividida em dois passos.

Passo 1) ϕ é fracamente semi-contínua inferiormente em H_T^1. De fato, como

$$\frac{1}{2} \int_0^T e^{G(t)} \parallel u'(t) \parallel^2 dt$$

é semi-contínua inferiormente e convexa, então, pelo Lema 1.0.23, segue que

$$\frac{1}{2} \int_0^T e^{G(t)} \parallel u'(t) \parallel^2 dt$$

é fracamente semi-contínua inferiormente em H_T^1. Assim, basta mostrar que

$$\int_0^T e^{G(t)} F(t, u(t)) dt + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y) dy$$

é fracamente semi-contínua inferiormente em H_T^1. Seja (u_n) uma sequência fracamente convergente a u_0 em H_T^1. Então, pela Proposição 2.0.13, temos que (u_n) converge uniformemente a u_0 em $[0, T]$. Uma vez que toda sequência convergente é limitada, segue que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\parallel u_n \parallel_\infty \leq C_1,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pela hipótese (A) e pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T e^{G(t)} \left[F(t, u_n(t)) - F(t, u_0(t)) \right] dt \right| &\leq \int_0^T e^{G(t)} \mid F(t, u_n(t)) - F(t, u_0(t)) \mid dt \\
&\leq C \int_0^T \parallel \nabla F(t, \xi) \parallel \parallel u_n(t) - u_0(t) \parallel dt \\
&\leq C \parallel u_n - u_0 \parallel_\infty \int_0^T \parallel \nabla F(t, \xi) \parallel dt \\
&\leq C \parallel u_n - u_0 \parallel_\infty \int_0^T a(\parallel \xi \parallel) b(t) dt \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$.

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^T e^{G(t)}F(t,u_n(t))dt = \int_0^T e^{G(t)}F(t,u_0(t))dt.$$

Por (3.5) e pela continuidade das funções $I_{ij}, i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$, temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{u_0^i(t_j)} I_{ij}(y)dy\right| = \\
&= \left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_{u_0^i(t_j)}^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y)dy\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{M}\int_{u_0^i(t_j)}^{u_n^i(t_j)} \mid I_{ij}(y)\mid dy \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{M}\int_{u_0^i(t_j)}^{u_n^i(t_j)} C_2 dy \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{M}C_2 \mid u_n^i(t_j) - u_0^i(t_j)\mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{M}C_2 \parallel u_n - u_0 \parallel_\infty \\
&= pNe^{M}C_2 \parallel u_n - u_0 \parallel_\infty \longrightarrow 0,
\end{aligned}$$

quando $n \longrightarrow +\infty$, onde

$$C_2 = \max_{i\in\mathcal{A}, j\in\mathcal{B}, |y|\leq C_1} \mid I_{ij}(y)\mid .$$

Portanto,

$$\underline{\lim}\int_0^T e^{G(t)}F(t,u_n(t))dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y)dy =$$

$$= \int_0^T e^{G(t)}F(t,u_0(t))dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{u_0^i(t_j)} I_{ij}(y)dy.$$

Segue da Proposição 1.0.20 que ϕ é fracamente semi-contínua inferiormente.

Passo 2) Vamos mostrar que $\phi(u) \longrightarrow +\infty$ quando $\parallel u \parallel \longrightarrow +\infty$ em H_T^1.

Sejam a_1, a_2, a_3 constantes positivas, que serão determinadas posteriormente. A partir de agora, iremos realizar uma série de estimativas com o objetivo de obter uma estimativa para $\phi(u)$.

Seguem das propriedades (i) e (ii) de $\mathcal{H}$ e da desigualdade triangular que

$$
\begin{aligned}
h(\| \bar{u} + s\tilde{u}(t) \|) \leq h(\| \bar{u} \| + \| s\tilde{u}(t) \|) &\leq C_0 \left[h(\| \bar{u} \|) + h(\| s\tilde{u}(t) \|)\right] \\
&= C_0 h(\| \bar{u} \|) + C_0 h(s \| \tilde{u}(t) \|) \\
&\leq C_0 h(\| \bar{u} \|) + C_0 h(\| \tilde{u}(t) \|), \forall s \in [0,1].
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

Pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, (3.12) e (3.16), vem que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T e^{G(t)} \left(F(t,u(t)) - F(t,\bar{u})\right) dt\right| = \left|\int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 \left(\nabla F(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t)\right) dsdt\right| \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 \left|(\nabla F(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t))\right| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 \| \nabla F(t, \bar{u} + s\tilde{u}(t)) \| \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 [p(t) h(\| \bar{u} + s\tilde{u}(t) \|) + q(t)] \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&= \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) h(\| \bar{u} + s\tilde{u}(t) \|) \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) \left[C_0 h(\| \bar{u} \|) + C_0 h(\| \tilde{u}(t) \|)\right] \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&= \int_0^T C_0 e^{G(t)} \int_0^1 p(t) h(\| \bar{u} \|) \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \int_0^T C_0 e^{G(t)} \int_0^1 p(t) h(\| \tilde{u}(t) \|) \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&= \int_0^T C_0 e^{G(t)} p(t) h(\| \bar{u} \|) \| \tilde{u}(t) \| dt + \int_0^T C_0 e^{G(t)} p(t) h(\| \tilde{u}(t) \|) \| \tilde{u}(t) \| dt + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} q(t) \| \tilde{u}(t) \| dt.
\end{aligned} \tag{3.17}
$$

Pela Desigualdade de Sobolev, e das propriedades (i) e (iii) de $\mathcal{H}$,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T C_0 e^{G(t)} p(t) h(\| \tilde{u}(t) \|) \| \tilde{u}(t) \| dt + \int_0^T e^{G(t)} q(t) \| \tilde{u}(t) \| dt \\
&\leq C_0 \int_0^T e^{G(t)} p(t) h(\| \tilde{u} \|_\infty) \| \tilde{u} \|_\infty dt + \int_0^T e^{G(t)} q(t) \| \tilde{u} \|_\infty dt \\
&= C_0 M_1 h(\| \tilde{u} \|_\infty) \| \tilde{u} \|_\infty + M_2 \| \tilde{u} \|_\infty \\
&\leq C_0 M_1 [K_1 \| \tilde{u} \|_\infty^\alpha + K_2] \| \tilde{u} \|_\infty + M_2 \| \tilde{u} \|_\infty
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

$$= C_0M_1K_1 \parallel \tilde{u} \parallel_\infty^{\alpha+1} + [C_0M_1K_2 + M_2] \parallel \tilde{u} \parallel_\infty$$
$$\leq C_0M_1K_1 \left(\frac{T}{12} \parallel u' \parallel_{L^2}^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} + [C_0M_1K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12} \parallel u' \parallel_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= C_0M_1K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + [C_0M_1K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} .$$

Segue da Proposição 2.0.11 que

$$\begin{aligned} C_0h(\parallel \bar{u} \parallel) \int_0^T e^{G(t)}p(t) \parallel \tilde{u}(t) \parallel dt &\leq C_0h(\parallel \bar{u} \parallel)M_1 \parallel \tilde{u} \parallel_\infty \\ &\leq \frac{a_1}{2} \parallel \tilde{u} \parallel_\infty^2 + \frac{C_0^2M_1^2}{2a_1}h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\ &\leq \frac{a_1}{2}\frac{T}{12} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{C_0^2M_1^2}{2a_1}h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\ &= \frac{Ta_1}{24} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{C_0^2M_1^2}{2a_1}h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\ &= A_1a_1 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_2}{a_1}h^2(\parallel \bar{u} \parallel), \end{aligned} \tag{3.19}$$

para $p \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$.

Pelas Proposições 1.0.1 e 2.0.11, obtemos

$$\begin{aligned} C_0h(\parallel \bar{u} \parallel) \int_0^T e^{G(t)}p(t) \parallel \tilde{u}(t) \parallel dt &\leq C_0h(\parallel \bar{u} \parallel) \left(\int_0^T \left(e^{G(t)}p(t)\right)^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \parallel \tilde{u}(t) \parallel^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_0h(\parallel \bar{u} \parallel)M_3 \parallel \tilde{u} \parallel_{L^2} \\ &\leq \frac{a_2}{2} \parallel \tilde{u} \parallel_{L^2}^2 + \frac{C_0^2M_3^2}{2a_2}h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\ &\leq \frac{a_2}{2}\frac{T^2}{4\pi^2} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{C_0^2M_3^2}{2a_2}h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\ &= A_3a_2 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_4}{a_2}h^2(\parallel \bar{u} \parallel), \end{aligned} \tag{3.20}$$

para $p \in L^2(0, T; \mathbb{R}^+)$.

Em virtude de (3.17)-(3.19),

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T e^{G(t)} \left(F(t, u(t)) - F(t, \bar{u})\right) dt \right| &\leq \int_0^T C_0e^{G(t)}p(t)h(\parallel \bar{u} \parallel) \parallel \tilde{u}(t) \parallel dt + \\ + \int_0^T C_0e^{G(t)}p(t)h(\parallel \tilde{u}(t) \parallel) \parallel \tilde{u}(t) \parallel dt &+ \int_0^T e^{G(t)}q(t) \parallel \tilde{u}(t) \parallel dt \end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\leq \int_0^T C_0 e^{G(t)} p(t) h(\| \bar{u} \|) \| \tilde{u}(t) \| \, dt +$$
$$+ C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u' \|_{L^2}^{\alpha+1} + [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2}$$
$$\leq A_1 a_1 \| u' \|_{L^2}^2 + \frac{A_2}{a_1} h^2(\| \bar{u} \|) + C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u' \|_{L^2}^{\alpha+1} +$$
$$+ [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2},$$

para $p \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Segue de (3.17), (3.18) e (3.20) que

$$\left| \int_0^T e^{G(t)} \left(F(t,u(t)) - F(t,\bar{u}) \right) dt \right| \leq A_3 a_2 \| u' \|_{L^2}^2 + \frac{A_4}{a_2} h^2(\| \bar{u} \|) +$$
$$+ C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u' \|_{L^2}^{\alpha+1} + [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2}, \tag{3.22}$$

para $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Para todo $i \in \mathcal{A}$, $j \in \mathcal{B}$ e $s \in [0,1]$, resulta das propriedades de $\mathcal{H}$ que

$$\begin{aligned} h(| \bar{u}^i + s\tilde{u}^i(t_j) |) &\leq h(| \bar{u}^i | + | s\tilde{u}^i(t_j) |) \\ &\leq C_0 h(| \bar{u}^i |) + C_0 h(| s\tilde{u}^i(t_j) |) \\ &\leq C_0 h(| \bar{u}^i |) + C_0 h(| \tilde{u}^i(t_j) |), \end{aligned} \tag{3.23}$$

e segue da Proposição 2.0.11 que

$$| \tilde{u}^i(t_j) | \leq \| \tilde{u}(t_j) \| \leq \| \tilde{u} \|_\infty \leq \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2} . \tag{3.24}$$

Em vista de (3.13) e (3.23),

$$\left| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y) dy - \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y) dy \right) \right| = \left| \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^1 I_{ij} \left(\bar{u}^i + s\tilde{u}^i(t_j) \right) \tilde{u}^i(t_j) ds \right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^1 | I_{ij}(\bar{u}^i + s\tilde{u}^i(t_j)) || \tilde{u}^i(t_j) | \, ds$$
$$\leq \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^1 \left[a_{ij} h(| \bar{u}^i + s\tilde{u}^i(t_j) |) + b_{ij} \right] | \tilde{u}^i(t_j) | \, ds \tag{3.25}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^1 [a_{ij}(C_0 h(\mid \bar{u}^i \mid) + C_0 h(\mid \tilde{u}^i(t_j) \mid))] \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid ds+$$
$$+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^1 b_{ij} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid ds$$
$$= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \bar{u}^i \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \tilde{u}^i(t_j) \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} b_{ij} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid .$$

Pela propriedade (i) de $\mathcal{H}$ e pela Proposição 2.0.11, temos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \bar{u}^i \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid \leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\parallel \bar{u} \parallel) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} \frac{a_3}{2} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2a_3} C_0^2 a_{ij}^2 e^{2G(t_j)} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\
&= \sum_{j=1}^{p} \frac{a_3}{2} \mid\mid \tilde{u}(t_j) \mid\mid^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} \frac{C_0^2}{2a_3} a_{ij}^2 e^{2G(t_j)} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\
&\leq \frac{a_3 p}{2} \parallel \tilde{u} \parallel_\infty^2 + \frac{C_0^2}{2a_3} \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}^2 e^{2G(t_j)} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\
&\leq \frac{a_3 p T}{24} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{C_0^2}{2a_3} \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}^2 e^{2G(t_j)} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \\
&= A_5 a_3 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u} \parallel).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Segue da propriedade (iii) de $\mathcal{H}$ e (3.24) que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \tilde{u}^i(t_j) \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} b_{ij} e^{G(t_j)} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} \left(K_1 \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid^\alpha + K_2\right) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} b_{ij} e^{G(t_j)} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid^{\alpha+1} + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) e^{G(t_j)} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid
\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) e^{G(t_j)} \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} .$$

Assim, em vista de (3.25)-(3.27),

$$\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \bar{u}^i \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \tilde{u}^i(t_j) \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} b_{ij} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid$$

$$\leq A_5 a_3 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \tilde{u}^i(t_j) \mid) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} b_{ij} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid$$

$$\leq A_5 a_3 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) e^{G(t_j)} \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} . \tag{3.28}$$

Quando $p \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, por (3.5), (3.21) e (3.28),

$$\phi(u) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} F(t, u(t))dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy+$$

$$+\left(\int_0^T e^{G(t)} F(t, \bar{u})dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy - \int_0^T e^{G(t)} F(t, \bar{u})dt - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy \right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} (F(t, u(t)) - F(t, \bar{u}))dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy\right) + \int_0^T e^{G(t)} F(t, \bar{u})dt+$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy \tag{3.29}$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt - A_1 a_1 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_2}{a_1} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} -$$

$$- [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy\right) +$$

$$+ \int_0^T e^{G(t)} F(t,\bar{u})dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^T e^{-M} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt - A_1 a_1 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_2}{a_1} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} -$$

$$- [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} - A_5 a_3 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1$$

$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) e^{G(t_j)} \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} + \int_0^T e^{G(t)} F(t,\bar{u})dt +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy$$

$$= \left(\frac{e^{-M}}{2} - A_1 a_1 - A_5 a_3\right) \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} -$$

$$- \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} +$$

$$+ h^2(\parallel \bar{u} \parallel) \left[\frac{E(\bar{u})}{h^2(\parallel \bar{u} \parallel)} - \frac{A_2}{a_1} - \frac{A_6}{a_3}\right].$$

Quando $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, por (3.5), (3.22) e (3.28),

$$\phi(u) \geq \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt - A_3 a_2 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_4}{a_2} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$

$$- [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy\right) +$$

$$+ \int_0^T e^{G(t)} F(t,\bar{u})dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y)dy$$

$$\geq \frac{1}{2}\int_0^T e^{-M} \mid\mid u'(t) \mid\mid^2 dt - A_3 a_2 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_4}{a_2} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$

$$- [C_0 M_1 K_2 + M_2] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2} - A_5 a_3 \parallel u' \parallel_{L^2}^2 - \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u} \parallel) - \tag{3.30}$$

$$-\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u' \|_{L^2}^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) e^{G(t_j)} \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2} +$$

$$+ \int_0^T e^{G(t)} F(t,\bar{u}) dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}^i} I_{ij}(y) dy$$

$$= \left(\frac{e^{-M}}{2} - A_3 a_2 - A_5 a_3\right) \| u' \|_{L^2}^2 - C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u' \|_{L^2}^{\alpha+1} +$$

$$- \left[C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right] \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u' \|_{L^2} +$$

$$+ h^2(\| \bar{u} \|) \left[\frac{E(\bar{u})}{h^2(\| \bar{u} \|)} - \frac{A_4}{a_2} - \frac{A_6}{a_3}\right].$$

Como $p(t) \geq 0$ e med $\{t \in [0,T]; p(t) = 0\} < T$, então $\int_0^T p(t)dt > 0$. Assim, $A_2 > 0$ e $A_4 > 0$.

A partir de agora, vamos determinar os valores das constantes a_1, a_2 e a_3 de modo que os coeficientes do termo de maior grau dos polinômios que se encontram ao lado direito das desigualdades (3.29) e (3.30) sejam positivos, assim como

$$\lim \inf_{\|\bar{u}\| \to +\infty} \left[\frac{E(\bar{u})}{h^2(\| \bar{u} \|)} - \frac{A_2}{a_1} - \frac{A_6}{a_3}\right] > 0$$

e

$$\lim \inf_{\|\bar{u}\| \to +\infty} \left[\frac{E(\bar{u})}{h^2(\| \bar{u} \|)} - \frac{A_4}{a_2} - \frac{A_6}{a_3}\right] > 0.$$

Com isso sendo satisfeito, conseguiremos provar que ϕ é coerciva tanto no caso em que $p \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$, quanto no caso em que $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Pra tanto, dividiremos esse passo em 2 casos.

Caso 1: $p \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Seja

$$a_1 = \frac{1}{2e^M A_1} \frac{\sqrt{A_1 A_2}}{\sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{A_5 A_6}}.$$

Por (3.14), temos que

$$\begin{aligned} B = \lim_{\|x\| \to \infty} \inf \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} &> 2e^M (\sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{A_5 A_6})^2 \\ &= 2e^M A_1 A_2 + 4e^M \sqrt{A_1 A_2}\sqrt{A_5 A_6} + 2e^M A_5 A_6 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2e^M A_1 A_2}{\sqrt{A_1A_2}}\sqrt{A_1A_2} + \frac{2e^M A_1 A_2}{\sqrt{A_1A_2}}\sqrt{A_5A_6} + \frac{2e^M A_5A_6\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_5A_6}} + \\
&+ \frac{2e^M A_5A_6\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{A_5A_6}} \\
&= \frac{2e^M A_1A_2(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6})}{\sqrt{A_1A_2}} + \frac{2e^M A_5A_6(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6})}{\sqrt{A_5A_6}} \\
&= \frac{A_2}{a_1} + A_6 x,
\end{aligned}
$$

onde

$$x = \frac{2e^M A_5(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6})}{\sqrt{A_5A_6}}.$$

Como

$$B > \frac{A_2}{a_1} + A_6 x,$$

existe $k > 0$ tal que

$$B > k > \frac{A_2}{a_1} + A_6 x,$$

podemos escolher

$$k = \frac{A_2}{a_1} + A_6 l < B,$$

onde $l > x$, ou seja,

$$\frac{1}{l} < \frac{1}{x}.$$

Seja

$$a_3 = \frac{1}{l}.$$

Deste modo, obtemos

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \inf \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} > \frac{A_2}{a_1} + \frac{A_6}{a_3}. \tag{3.31}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
A_1a_1 + A_5a_3 &< A_1\frac{1}{2e^M A_1}\frac{\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}} + A_5\frac{1}{2e^M A_5}\frac{\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}} \\
&= \frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)} = \frac{1}{2e^M} = \frac{e^{-M}}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\frac{e^{-M}}{2} - A_1a_1 - A_5a_3 > 0. \tag{3.32}$$

Pelo Lema 2.0.12, para $u \in H^1_T$

$$\| u \|_{1,T} \to +\infty \quad \text{se, e somente se,} \quad \left(\| \bar{u} \|^2 + \| u' \|^2_{L^2}\right)^{\frac{1}{2}} \to +\infty.$$

Disto, (3.29), (3.31), (3.32), e propriedade (iv) de $\mathcal{H}$, segue que

$$\phi(u) \to +\infty \quad \text{quando} \quad \| u \|_{1,T} \to +\infty.$$

Caso 2: $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Seja

$$a_2 = \frac{1}{2e^M A_3} \frac{\sqrt{A_3 A_4}}{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}.$$

Por (3.15), temos

$$\begin{aligned} B' = \liminf_{\|x\| \to \infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} &> 2e^M \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}\right)^2 \\ &= 2e^M A_3 A_4 + 4e^M \sqrt{A_3 A_4}\sqrt{A_5 A_6} + 2e^M A_5 A_6 \\ &= \frac{2e^M A_3 A_4}{\sqrt{A_3 A_4}} \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}\right) + \frac{2e^M A_5 A_6}{\sqrt{A_5 A_6}} \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}\right) \\ &= \frac{A_4}{a_2} + \frac{2e^M A_5 A_6}{\sqrt{A_5 A_6}} \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}\right) \\ &= \frac{A_4}{a_2} + A_6 y, \end{aligned}$$

onde

$$y = \frac{2e^M A_5 \left(\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}\right)}{\sqrt{A_5 A_6}}.$$

Como

$$B' > \frac{A_4}{a_2} + A_6 y,$$

existe $k' > 0$ tal que

$$B' > k' > \frac{A_4}{a_2} + A_6 y,$$

podemos escolher

$$k' = \frac{A_4}{a_2} + A_6 m < B'$$

onde $m > y$, ou seja,

$$\frac{1}{m} < \frac{1}{y}.$$

Seja

$$a_3 = \frac{1}{m}.$$

Deste modo, obtemos

$$\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} > \frac{A_4}{a_2} + \frac{A_6}{a_3}, \tag{3.33}$$

Observemos que

$$\begin{aligned} A_3a_2 + A_5a_3 &< \frac{\sqrt{A_3A_4}}{2e^M\left(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}\right)} + \frac{\sqrt{A_5A_6}}{2e^M\left(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}\right)} \\ &= \frac{e^{-M}}{2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{e^{-M}}{2} - A_3a_2 - A_5a_3 > 0. \tag{3.34}$$

Como

$$\| u \|_{1,T} \to +\infty \quad \text{se, e somente se,} \left(\| \bar{u} \|^2 + \| u' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} \to +\infty,$$

(3.30), (3.33), (3.34) e a propriedade (iv) de $\mathcal{H}$ implicam que

$$\phi(u) \to +\infty \quad \text{quando} \; \| u \|_{1,T} \to +\infty.$$

Portanto, ϕ é coerciva e limitada inferiormente, assim, pela Proposição 1.2, existe uma sequência minimizante limitada em H_T^1 para ϕ. Pelo Teorema 1.0.21, segue dos passos 1 e 2 que ϕ tem um mínimo em H_T^1. Assim, existe $u \in H_T^1$ tal que $\phi'(u) = 0$, logo

$$< \phi'(u), v >= 0, \forall v \in H_T^1.$$

Portanto, o problema (PI) tem pelo menos uma solução fraca que minimiza a função ϕ em H_T^1.

□

Teorema 3.0.7. *Suponha que existem* $p, q \in L^1(0, T; \mathbb{R}^+)$, $\mathrm{med}\{\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}]; \mathrm{p(t)} = 0\} < \mathrm{T}$, $h \in \mathcal{H}$, *e* $a_{ij}, b_{ij} > 0$ *tais que sejam válidos (3.12) e (3.13) e*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \sup \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} < D_1, \tag{3.35}$$

onde

$$D_1 \equiv -2e^M(2+e^{2M})\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2.$$

Então, o problema (PI) tem pelo menos uma solução fraca em H_T^1. Além disso, se $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$, então o resultado também é válido quando (3.35) é enfraquecida pela condição

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \sup \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} < \min\{D_1, D_2, D_3, D_4\}, \tag{3.36}$$

onde

$$D_2 \equiv -2e^M(2+e^{2M})\left(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2,$$

$$D_3 \equiv -2e^M\left(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left[2\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)+e^{2M}\left(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}\right)\right],$$

e

$$D_4 \equiv -2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left[2\left(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}\right)+e^{2M}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\right].$$

Demonstração. Provaremos este resultado fazendo uso do Teorema 1.0.17. Já vimos que $H_T^1 = \mathbb{R}^N \oplus \tilde{H}_T^1$ é um espaço de Banach e que $\phi \in C^1(H_T^1;\mathbb{R})$, assim, para termos condições de aplicar tal resultado, basta mostrarmos que ϕ satisfaz a condição (PS) e exibirmos uma vizinhança limitada D do subespaço das funções constantes de H_T^1 de modo que

$$\max_{\partial D} \phi < \inf_{\tilde{H}_T^1} \phi.$$

A prova será dividida em três passos.

Passo 1) Para $x \in \mathbb{R}^N, \phi(x) \to -\infty$ quando $\| x \| \to +\infty$. De fato, temos tanto pela condição (3.35) quanto pela (3.36) que

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \sup h^{-2}(\| x \|)E(x) < 0.$$

Além disso,

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \mid 0 \mid^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} F(t,x)dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{x^i} I_{ij}(y)dy = E(x).$$

Disto e pela propriedade (iv) de $\mathcal{H}$, obtemos

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \phi(x) = \lim_{\|x\|\to\infty} E(x) = -\infty.$$

Passo 2) Para $\tilde{u} \in \tilde{H}_T^1, \quad \phi(\tilde{u}) \longrightarrow +\infty$ quando $\| \tilde{u} \|_{1,T} \longrightarrow +\infty$.

Com efeito, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz, Proposição 2.0.11, propriedade (iii) de $\mathcal{H}$ e (3.12), resulta que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T e^{G(t)} \left(F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,0)\right) dt\right| = \left|\int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 \left(\nabla F(t, s\tilde{u}(t)), \tilde{u}(t)\right) dsdt\right| \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 || \nabla F(t, s\tilde{u}(t)) |||| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 (p(t)h(|| s\tilde{u}(t) ||) + q(t)) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&= \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t)h(s \mid\mid \tilde{u}(t)) \mid\mid) \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t)(K_1 s^\alpha \| \tilde{u}(t) \|^\alpha + K_2) \| \tilde{u}(t) \| dsdt + \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&= \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) K_1 s^\alpha \| \tilde{u}(t) \|^{\alpha+1} dsdt + \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) K_2 \| \tilde{u}(t) \| dsdt+ \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 q(t) \| \tilde{u}(t) \| dsdt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) K_1 s^\alpha \| \tilde{u} \|_\infty^{\alpha+1} dsdt + \int_0^T e^{G(t)} p(t) K_2 \| \tilde{u} \|_\infty dt + \int_0^T e^{G(t)} q(t) \| \tilde{u} \|_\infty dt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \int_0^1 p(t) K_1 s^\alpha \left(\frac{T}{12} \| \tilde{u}' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} dsdt + \int_0^T e^{G(t)} p(t) K_2 \left(\frac{T}{12} \| u' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt+ \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} q(t) \left(\frac{T}{12} \| u' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&= \int_0^T e^{G(t)} p(t) \frac{K_1}{\alpha+1} \left(\frac{T}{12} \| \tilde{u}' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} dt + \int_0^T e^{G(t)} p(t) K_2 \left(\frac{T}{12} \| u' \|_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}} dt+
\end{aligned} \tag{3.37}$$

$$+\int_0^T e^{G(t)}q(t)\left(\frac{T}{12}\parallel u'\parallel_{L^2}^2\right)^{\frac{1}{2}}dt$$
$$=M_1\frac{K_1}{\alpha+1}\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\parallel u'\parallel_{L^2}^{\alpha+1}+M_1K_2\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\parallel u'\parallel_{L^2}+M_2\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\parallel u'\parallel_{L^2}$$
$$=\frac{K_1}{\alpha+1}M_1\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\parallel u'\parallel_{L^2}^{\alpha+1}+(M_1K_2+M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\parallel u'\parallel_{L^2}.$$

Em vista de (3.13) e propriedade (iii) de $\mathcal{H}$, temos

$$\begin{aligned}\mid I_{ij}(y)\mid &\leq a_{ij}h(\mid y\mid)+b_{ij}\\ &\leq a_{ij}(K_1\mid y\mid^{\alpha}+K_2)+b_{ij}\\ &=a_{ij}K_1\mid y\mid^{\alpha}+(a_{ij}K_2+b_{ij}),\end{aligned}\tag{3.38}$$

para todo $i\in\mathcal{A}, j\in\mathcal{B}$ e $y\in\mathbb{R}$. Quando $\tilde{u}^i(t_j)\geq 0$, por (3.38), temos que

$$\begin{aligned}&\frac{-a_{ij}K_1}{\alpha+1}(\tilde{u}^i(t_j))^{\alpha+1}-(a_{ij}K_2+b_{ij})\tilde{u}^i(t_j)\leq\int_0^{\tilde{u}^i(t_j)}I_{ij}(y)dy\\ &\leq\frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}(\tilde{u}^i(t_j))^{\alpha+1}+(a_{ij}K_2+b_{ij})\tilde{u}^i(t_j),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{-a_{ij}K_1}{\alpha+1}\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid^{\alpha+1}-(a_{ij}K_2+b_{ij})\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid\leq\int_0^{\tilde{u}^i(t_j)}I_{ij}(y)dy\\ &\leq\frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid^{\alpha+1}+(a_{ij}K_2+b_{ij})\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid.\end{aligned}\tag{3.39}$$

Quando $\tilde{u}^i(t_j)<0$, segue de (3.38) que

$$\begin{aligned}&\frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}(-1)^{\alpha}(\tilde{u}^i(t_j))^{\alpha+1}-(a_{ij}K_2+b_{ij})(-1)\tilde{u}^i(t_j)\leq\int_{\tilde{u}^i(t_j)}^0 I_{ij}(y)dy\\ &\leq\frac{-a_{ij}K_1}{\alpha+1}(-1)^{\alpha}(\tilde{u}^i(t_j))^{\alpha+1}+(a_{ij}K_2+b_{ij})(-1)\tilde{u}^i(t_j),\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}&\frac{-a_{ij}K_1}{\alpha+1}\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid^{\alpha+1}-(a_{ij}K_2+b_{ij})\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid\leq\int_{\tilde{u}^i(t_j)}^0 I_{ij}(y)dy\\ &\leq\frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid^{\alpha+1}+(a_{ij}K_2+b_{ij})\mid\tilde{u}^i(t_j)\mid.\end{aligned}\tag{3.40}$$

Em vista de (3.39) e (3.40), para todo $\tilde{u}^i(t_j)\in\mathbb{R}$, obtemos

$$\left|\int_0^{\tilde{u}^i(t_j)} I_{ij}(y)dy\right| \leq \frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1} \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid^{\alpha+1} + (a_{ij}K_2 + b_{ij}) \mid \tilde{u}^i(t_j) \mid,$$

que combinado com (3.24) nos dá

$$\left|\int_0^{\tilde{u}^i(t_j)} I_{ij}(y)dy\right| \leq \frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + (a_{ij}K_2 + b_{ij})\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}. \quad (3.41)$$

Assim, seguem de (3.5), (3.37) e (3.41) que, para todo $\tilde{u} \in \tilde{H}_T^1$,

$$\begin{aligned}
\phi(\tilde{u}) &= \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \parallel \tilde{u}'(t) \parallel^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} F(t,\tilde{u}(t))dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\tilde{u}^i(t_j)} I_{ij}(y)dy \\
&= \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \parallel u'(t) \parallel^2 dt + \int_0^T e^{G(t)}(F(t,\tilde{u}(t)) - F(t,0))dt + \int_0^T e^{G(t)}F(t,0)dt + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\tilde{u}^i(t_j)} I_{ij}(y)dy \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^T e^{-M} \parallel u'(t) \parallel^2 dt - \frac{K_1}{\alpha+1}M_1\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - (K_2M_1 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\parallel u' \parallel_{L^2} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} -e^{G(t_j)}\left[\frac{a_{ij}K_1}{\alpha+1}\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + (a_{ij}K_2 + b_{ij})\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}\right] + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)}F(t,0)dt \\
&= \frac{1}{2}e^{-M} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 + \int_0^T e^{G(t)}F(t,0)dt - \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}a_{ij}\right)\frac{K_1}{\alpha+1}\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \\
&\parallel u' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - \left(K_2M_1 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(a_{ij}K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u' \parallel_{L^2}.
\end{aligned} \quad (3.42)$$

Além disso,

$$\lim_{\|\tilde{u}\|_{1,T}\to+\infty} \parallel u' \parallel_{L^2}^2 = +\infty.$$

De fato, como

$$\parallel \tilde{u} \parallel_{1,T}^2 = \parallel \tilde{u} \parallel_{L^2}^2 + \parallel u' \parallel_{L^2}^2,$$

então

$$\parallel \tilde{u} \parallel_{1,T}^2 \longrightarrow +\infty$$

implica que

$$\| \tilde{u} \|_{L^2}^2 \longrightarrow +\infty \quad \text{ou} \quad \| u' \|_{L^2}^2 \longrightarrow +\infty.$$

Se

$$\| \tilde{u} \|_{L^2}^2 \longrightarrow +\infty,$$

então a Proposição 2.0.11 implica

$$\| u' \|_{L^2}^2 \longrightarrow +\infty.$$

Disto e de (3.42) concluímos que

$$\phi(\tilde{u}) \longrightarrow +\infty \quad \text{quando} \; \| \tilde{u} \|_{1,T} \longrightarrow +\infty \quad \text{em} \tilde{H}_T^1,$$

Passo 3) ϕ satisfaz a condição (PS).(Veja Definição 1.0.16).

De fato, seja (u_n) uma sequência em H_T^1 tal que $(\phi(u_n))$ é limitada e $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow +\infty$. Vamos mostrar que (u_n) possui uma subsequência que converge em H_T^1. Sejam $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8$ constantes positivas, as quais serão determinadas posteriormente. Inicialmente, faremos algumas estimativas com o intuito de mostrar que as sequências $(\| \bar{u}_n \|)$ e $(\| u_n' \|_{L^2})$ são limitadas.

Segue de (3.12), (3.16) e da Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^T e^{G(t)} (\nabla F(t, u_n(t)), \tilde{u}_n(t)) dt \right| = \left| \int_0^T e^{G(t)} (\nabla F(t, \bar{u}_n + \tilde{u}_n(t)), \tilde{u}_n(t)) dt \right| \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \, || \nabla F(t, \bar{u}_n + \tilde{u}_n(t)) |||| \tilde{u}_n(t) \| \, dt \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} \, [p(t) h(\| \bar{u}_n + \tilde{u}_n(t) \|) + q(t)] \, \| \tilde{u}_n(t) \| \\
&\leq \int_0^T e^{G(t)} p(t) C_0 h(\| \bar{u}_n \|) \, \| \tilde{u}_n(t) \| \, dt + \int_0^T e^{G(t)} p(t) C_0 h(\| \tilde{u}_n(t) \|) \, \| \tilde{u}_n(t) \| \, dt + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)} q(t) \, \| \tilde{u}_n(t) \| \, dt.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Por (3.13) e (3.23), temos que

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u_n^i(t_j))\tilde{u}_n^i(t_j)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \mid I_{ij}(\bar{u}_n^i + \tilde{u}_n^i(t_j)) \parallel \tilde{u}_n^i(t_j) \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left[a_{ij} h(\mid \bar{u}_n^i + \tilde{u}_n^i(t_j) \mid) + b_{ij}\right] \mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid \\
&\leq \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left[a_{ij}(C_0 h(\mid \bar{u}_n^i \mid) + C_0 h(\mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid)) + b_{ij}\right] \mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid \\
&= \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \bar{u}_n^i \mid) \mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} b_{ij} e^{G(t_j)} \mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} h(\mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid)) \mid \tilde{u}_n^i(t_j) \mid,
\end{aligned}$$

que combinado com (3.26) e (3.27) nos dá

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u_n^i(t_j))\tilde{u}_n^i(t_j)\right| \leq A_5 a_3 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{a_3} h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2},
\end{aligned} \tag{3.44}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos para obter (3.28), obtemos

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y)dy\right)\right| \\
&\leq A_5 b_8 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{b_8} h^2(\bar{u}_n) + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij}) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2},
\end{aligned} \tag{3.45}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dividiremos a demonstração do terceiro passo em dois casos:

1º caso) $p \in L^1(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Em vista de (3.43), (3.18) e (3.19), temos que

$$\left|\int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u_n(t)),\tilde{u}_n(t))dt\right| \leq A_1 b_1 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_2}{b_1} h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + \\ + C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}, \tag{3.46}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue de (3.10), (3.11), (3.5), (3.46) e (3.44) que

$$\begin{aligned} \parallel \tilde{u}_n \parallel_{1,T} \geq\ & < \phi'(u_n), \tilde{u}_n >= \int_0^T e^{G(t)}(u_n'(t), u_n'(t))dt + \int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u_n(t)),\tilde{u}_n(t))dt + \\ & + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u_n^i(t_j))\tilde{u}_n(t_j) \\ & \geq (e^{-M} - A_1 b_1 - A_5 b_3 - b_4) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + b_4 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \\ & - C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - (C_0 M_1 K_2 + M_2 + \\ & + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\Bigg)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} - \left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel), \end{aligned} \tag{3.47}$$

para n suficientemente grande, pois $\phi'(u_n) \longrightarrow 0$.

Mais ainda, a Proposição 2.0.11 implica que

$$\parallel \tilde{u}_n \parallel_{1,T} \leq \frac{T}{2\pi} \parallel u_n' \parallel_{L^2} \leq \frac{(T^2 + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \parallel u_n' \parallel_{L^2}. \tag{3.48}$$

Em vista de (3.47) e (3.48), temos que

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) \geq Q(\parallel u_n' \parallel_{L^2}) + b_4 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2, \tag{3.49}$$

para n suficientemente grande, onde

$$Q(\| u_n' \|_{L^2}) = (e^{-M} - A_1b_1 - A_5b_3 - b_4) \| u_n' \|_{L^2}^2 - C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)} \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$
$$\| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} - \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0a_{ij}K_2 + b_{ij}) \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2} +$$
$$- \frac{(T^2 + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \| u_n' \|_{L^2} .$$

Assim, por (3.49), se $e^{-M} - A_1b_1 - A_5b_3 - b_4 > 0$, então, existem constantes C_3 e C_4 tais que

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3} \right) h^2(\| \bar{u}_n \|) \geq b_4 \| u_n' \|_{L^2}^2 + C_3, \tag{3.50}$$

e

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) \geq \sqrt{b_4} \| u_n' \|_{L^2} - C_4, \tag{3.51}$$

para n suficientemente grande. De fato, primeiramente note que $e^{-M} - A_1b_1 - A_5b_3 - b_4 > 0$ implica que $Q(x) \longrightarrow +\infty$ quando $\| x \| \longrightarrow +\infty$. Então, existe uma constante $C_5 > 0$ tal que $Q(x) \geq 0$ para todo $x \geq C_5$. Seja $C_3 = \inf\limits_{x \in [0,+\infty)} \{Q(x)\}$. Assim, (3.50) segue de (3.49).

Em vista de (3.49), temos que

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) \geq \sqrt{b_4} \| u_n' \|_{L^2}, \tag{3.52}$$

para n suficientemente grande e $\| u_n' \|_{L^2} \geq C_5$, pois $Q(\| u_n' \|_{L^2}) \geq 0$ sempre que $\| u_n' \|_{L^2} \geq C_5$.

Seja $C_4 = \sqrt{b_4} C_5$, então

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) \geq 0 \geq \sqrt{b_4} \| u_n' \|_{L^2} - C_4, \tag{3.53}$$

para n suficientemente grande e $\| u_n' \|_{L^2} < C_5$. Assim, por (3.52) e (3.53) segue que

$$\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) \geq \sqrt{b_4} \| u_n' \|_{L^2} - C_4,$$

para n suficientemente grande, provando (3.51).

De uma maneira similar à prova de (3.21), obtemos

$$\left|\int_0^T e^{G(t)}\left(F(t,u_n(t))-F(t,\bar{u}_n)\right)dt\right| \le A_1 b_6 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_2}{b_6}h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + \\ + C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}, \tag{3.54}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Em vista de (3.5), (3.54) e (3.45), temos que

$$\begin{aligned}
\phi(u_n) &= \frac{1}{2}\int_0^T e^{G(t)} \parallel u_n'(t) \parallel^2 dt + \int_0^T e^{G(t)}\left(F(t,u_n(t))-F(t,\bar{u}_n)\right)dt + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\left(\int_0^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y)dy - \int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y)dy\right) + \int_0^T e^{G(t)}F(t,\bar{u}_n)dt + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y)dy \\
&\le \frac{e^M}{2} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + A_1 b_6 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_2}{b_6}h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_0 M_1 K_1\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \\
&+ (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + A_5 b_8 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{b_8}h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + \\
&+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + \\
&+ \int_0^T e^{G(t)}F(t,\bar{u}_n)dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}\int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y)dy \\
&= \left(\frac{e^M}{2} + A_1 b_6 + A_5 b_8\right) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + C_0 K_1\left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \\
&+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + \\
&+ h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_2}{b_6} + \frac{A_6}{b_8}\right],
\end{aligned} \tag{3.55}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar agora que $(\parallel \bar{u}_n \parallel)$ e $(\parallel u_n' \parallel_{L^2})$ são sequências limitadas. Sejam

$$b_1 = b_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1 A_2} + \sqrt{A_5 A_6}}$$

e

$$b_3 = b_8 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&-\frac{A_2}{b_6}-\frac{A_6}{b_8}-\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)\\
&=-2A_2\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}-2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}+\\
&-\frac{1}{b_4}\left(2A_2\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}+2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}\right)\\
&\left(\frac{e^M}{2}+\frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\\
&=-2e^MA_1A_2-2e^M\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_5A_6}-2e^M\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_5A_6}-2e^MA_5A_6+\\
&-\frac{1}{b_4}\left(2e^MA_1A_2+2e^M\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_5A_6}+2e^MA_5A_6+2e^M\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_5A_6}\right)\\
&\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\\
&=-2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2-\frac{1}{b_4}2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\\
&=-2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2\left[1+\frac{1}{b_4}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right].
\end{aligned}$$

Além disso, como

$$\lim\sup_{\|x\|\to\infty} h^{-2}(\| x \|)E(x) < D_1,$$

conforme (3.35), podemos então escolher

$$0 < b_4 < \frac{e^{-M}}{2}$$

tal que

$$\lim\sup_{\|x\|\to\infty}\frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} < -\frac{A_2}{b_6}-\frac{A_6}{b_8}-\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right), \tag{3.56}$$

pois

$$
\begin{aligned}
&-\frac{A_2}{b_6}-\frac{A_6}{b_8}-\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)=-2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2\\
&\left[1+\frac{1}{b_4}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right]\\
&>-2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2\left[1+\frac{2}{e^{-M}}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right]\\
&=-2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)^2(2+e^{2M})\\
&=D_1\\
&>\lim\sup_{\|x\|\to\infty}\frac{E(x)}{h^2(\| x \|)}.
\end{aligned}
$$

Notemos que

$$
\begin{aligned}
&A_1b_1+A_5b_3+b_4<A_1b_1+A_5b_3+\frac{e^{-M}}{2}\\
&=\frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{e^{-M}}{2}\\
&=\frac{e^{-M}}{2}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{e^{-M}}{2}\\
&=e^{-M},
\end{aligned}
$$

logo,

$$e^{-M}-(A_1b_1+A_5b_3+b_4)>0.$$

Como $(\phi(u_n))$ é limitada, existe uma constante C_8 tal que

$$\phi(u_n)\geq C_8.$$

Segue disto, de (3.55), (3.50) e (3.51) que

$$
\begin{aligned}
&C_8\leq\phi(u_n)\\
&\leq\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)\| u_n' \|_{L^2}^2+C_0K_1\left(M_1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}e^{G(t_j)}\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1}+
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

$$+\left(C_0M_1K_2+M_2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2+b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\parallel u_n'\parallel_{L^2}+h^2(\parallel \bar{u}\parallel)$$

$$\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)}+\frac{A_2}{b_6}+\frac{A_6}{b_8}\right]$$

$$\leq\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)\left(\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)-\frac{C_3}{b_4}\right)+C_0K_1\left(M_1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}e^{G(t_j)}\right)$$

$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{b_4}}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}}h(\parallel \bar{u}_n\parallel)+\frac{C_4}{\sqrt{b_4}}\right)^{\alpha+1}+$$

$$+\left(C_0M_1K_2+M_2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2+b_{ij})\right)$$

$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{b_4}}\left[\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}}h(\parallel \bar{u}_n\parallel)+C_4\right]+h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)}+\frac{A_2}{b_6}+\frac{A_6}{b_8}\right]$$

$$=h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)\left[\frac{E(\parallel \bar{u}_n\parallel)}{h^2(\parallel \bar{u}_n\parallel)}+W_1\right]-\frac{C_3}{b_4}\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)+C_0K_1\left(M_1+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}a_{ij}e^{G(t_j)}\right)$$

$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}b_4^{-\frac{\alpha+1}{2}}\left[\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}}h(\parallel \bar{u}_n\parallel)+C_4\right]^{\alpha+1}+$$

$$+\left(C_0M_1K_2+M_2+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2+b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}}b_4^{-\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}}h(\parallel \bar{u}_n\parallel)+C_4\right],$$

para n suficientemente grande, onde

$$W_1=\frac{A_2}{b_6}+\frac{A_6}{b_8}+\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right).$$

Observemos que, se $(\parallel \bar{u}_n\parallel)$ não fosse limitada, então

$$\lim_{n\to+\infty}\parallel \bar{u}_n\parallel=+\infty$$

e teríamos pela propriedade (iv) de $\mathcal{H}$ que

$$\lim_{n\to\infty}h(\parallel \bar{u}_n\parallel)=+\infty.$$

Deste modo, por (3.57) e (3.56), obteríamos que

$$\phi(u_n)<-\infty,$$

o que contradiz o fato de que $(\phi(u_n))$ é limitada. Portanto, $(\parallel \bar{u}_n\parallel)$ é limitada.

Então, segue da propriedade (iii) de $\mathcal{H}$ e (3.51) que

$$\begin{aligned}\| u_n' \|_{L^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{b_4}}\left[\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|)+C_4\right]\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{b_4}}\left[\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} (K_1 \| \bar{u}_n \|^{\alpha} + K_2)+C_4\right]\end{aligned}$$

para n suficientemente grande, portanto $(\| u_n' \|_{L^2})$ é limitada.

Disto e pelo Lema 2.0.12, obtemos que a sequência $(\| u_n \|_{1,T})$ é limitada. Como H_T^1 é um espaço de Banach reflexivo, temos, pelo Teorema 1.0.14, que existem $u \in H_T^1$ e uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tais que

$$u_{n_k} \rightharpoonup u$$

em H_T^1. Pela Proposição 2.0.13, segue que (u_{n_k}) converge uniformemente a u em $[0,T]$.

2º Caso) $p \in L^2(0,T;\mathbb{R}^+)$.

Segue de (3.43), (3.18) e (3.20) que

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^T e^{G(t)}\left(\nabla F(t,u_n(t)),\tilde{u}_n(t)\right)dt\right| \leq A_3 b_2 \| u_n' \|_{L^2}^2 + \frac{A_4}{b_2} h^2(\| \bar{u}_n \|) +\\ &+ C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} + (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2},\end{aligned} \tag{3.58}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Segue de (3.10), (3.11), (3.5), (3.58) e (3.44) que

$$\begin{aligned}\| \tilde{u}_n \| \quad &\geq \quad < \phi'(u_n), \tilde{u}_n >\\ &= \int_0^T e^{G(t)}(u_n'(t),u_n'(t))dt + \int_0^T e^{G(t)}\left(\nabla F(t,u_n(t)),\tilde{u}_n(t)\right)dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} I_{ij}(u_n^i(t_j))\tilde{u}_n(t_j)\\ &\geq \int_0^T e^{-M}(u_n'(t),u_n'(t))dt - A_3 b_2 \| u_n' \|_{L^2}^2 - \frac{A_4}{b_2}h^2(\| \bar{u}_n \|) - C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} +\\ &- (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2} - A_5 b_3 \| u_n' \|_{L^2}^2 - \frac{A_6}{b_3} h^2(\| \bar{u}_n \|) -\\ &- \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} - \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}\end{aligned} \tag{3.59}$$

$$= (e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + b_5 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 - C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)} \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

$$\parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0a_{ij}K_2 + b_{ij}) \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} +$$

$$- \left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel),$$

para n suficientemente grande, pois $\phi'(u_n) \to 0$ quando $n \to \infty$.

Se

$$e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5 > 0,$$

então existem constantes C_6 e C_7 tais que

$$\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) \geq b_5 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + C_6 \tag{3.60}$$

e

$$\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) \geq \sqrt{b_5} \parallel u_n' \parallel_{L^2} - C_7 \tag{3.61}$$

para n suficientemente grande.

De fato, em vista de (3.59) e (3.48), temos que

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) &\geq (e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + b_5 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \\ &- C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)} \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - \\ &- \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0a_{ij}K_2 + b_{ij}) \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} - \frac{(T^2 + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \parallel u_n' \parallel_{L^2} \\ &= Q(\parallel u_n' \parallel_{L^2}) + b_5 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2, \end{aligned} \tag{3.62}$$

para n suficientemente grande, onde

$$Q(\parallel u_n' \parallel_{L^2}) = (e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 - C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)} \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

$$\parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} - \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (C_0a_{ij}K_2 + b_{ij}) \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} -$$

$$- \frac{(T^2 + 4\pi^2)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \parallel u_n' \parallel_{L^2}.$$

Como

$$e^{-M} - A_3 b_2 - A_5 b_3 - b_5 > 0,$$

então,

$$Q(x) \to +\infty \quad \text{quando} \parallel x \parallel \to +\infty,$$

Deste modo, existe uma constante $C_8 > 0$ tal que $Q(x) \geq 0$, para todo $x \geq C_8$. Seja $C_6 = \inf_{x \in [0,+\infty)} \{Q(x)\}$; então, (3.60) segue de (3.62).

Em vista de (3.62), temos que

$$\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) \geq \sqrt{b_5} \parallel u_n' \parallel_{L^2} \tag{3.63}$$

para n suficientemente grande e $\parallel u_n' \parallel_{L^2} \geq C_8$.

Mais ainda, seja $C_7 = \sqrt{b_5} C_8$; então,

$$\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3} \right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) \geq 0 \geq \sqrt{b_5} \parallel u_n' \parallel_{L^2} - C_7 \tag{3.64}$$

para n suficientemente grande e $\parallel u_n' \parallel_{L^2} < C_8$. Assim, (3.61) segue de (3.63) e (3.64).

De uma maneira similar à prova de (3.22), obtemos

$$\begin{aligned} &\left| \int_0^T e^{G(t)} (F(t, u_n(t)) - F(t, \bar{u}_n)) dt \right| \leq \\ &A_3 b_7 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_4}{b_7} h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \\ &+ (C_0 M_1 K_2 + M_2) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} \end{aligned} \tag{3.65}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos por (3.5), (3.65) e (3.45) que

$$\begin{aligned} \phi(u_n) &= \frac{1}{2} \int_0^T e^{G(t)} \mid u_n'(t) \mid^2 dt + \int_0^T e^{G(t)} (F(t, u_n(t)) - F(t, \bar{u}_n)) dt + \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(\int_0^{u_n^i(t_j)} I_{ij}(y) dy - \int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y) dy \right) + \int_0^T e^{G(t)} F(t, \bar{u}_n) dt + \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y) dy \end{aligned} \tag{3.66}$$

$$\leq \frac{1}{2}e^M \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + A_3 b_7 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_4}{b_7} h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_0 M_1 K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$
$$+ (C_0 M_1 K_2 + M_2)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + A_5 b_8 \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + \frac{A_6}{b_8} h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) +$$
$$+ \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} C_0 a_{ij} e^{G(t_j)} K_1 \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} +$$
$$+ \int_0^T e^{G(t)} F(t,\bar{u}_n)dt + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \int_0^{\bar{u}_n^i} I_{ij}(y)dy$$
$$= \left(\frac{e^M}{2} + A_3 b_7 + A_5 b_8\right) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +$$
$$+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)$$
$$\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8}\right],$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos mostrar que as sequências $(\parallel \bar{u}_n \parallel)$ e $(\parallel u_n' \parallel_{L^2})$ são limitadas. Para isto, consideraremos três subcasos:

Caso 2.1) $\limsup\limits_{\parallel x \parallel \to \infty} h^{-2}(\parallel x \parallel) E(x) < D_2$.

Sejam

$$b_2 = b_7 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}$$

e

$$b_3 = b_8 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}};$$

então,

$$-\frac{A_4}{b_7} - \frac{A_6}{b_8} - \frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_3 b_7 + A_5 b_8\right)$$
$$= -2A_4\sqrt{\frac{A_3}{A_4}}\frac{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}{e^{-M}} - 2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}{e^{-M}} - \frac{1}{b_5}$$
$$\left(2A_4\sqrt{\frac{A_3}{A_4}}\frac{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}{e^{-M}} + 2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}{e^{-M}}\right)$$
$$\left(\frac{e^M}{2} + \frac{A_3}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}} + \frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3 A_4} + \sqrt{A_5 A_6}}\right)$$

$$= -2e^M A_3A_4 - 2e^M\sqrt{A_3A_4}\sqrt{A_5A_6} - 2e^M A_5A_6 - 2e^M\sqrt{A_3A_4}\sqrt{A_5A_6} - \frac{1}{b_5}$$
$$\left(2e^M A_3A_4 + 2e^M\sqrt{A_3A_4}\sqrt{A_5A_6} + 2e^M A_5A_6 + 2e^M\sqrt{A_3A_4}\sqrt{A_5A_6}\right)$$
$$\left(\frac{e^M}{2} + \frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_3A_4}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}} + \frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}\right)$$
$$= -2e^M(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2 - \frac{1}{b_5}2e^M(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)$$
$$= -2e^M(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2\left[1+\frac{1}{b_5}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right].$$

Mais ainda, como

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} h^{-2}(\| x \|)E(x) < D_2,$$

podemos escolher

$$0 < b_5 < \frac{e^{-M}}{2}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\|x\|\to\infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} < D_2 \\
&= -2e^M(2+e^{2M})(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2 \\
&= -2e^M\left[1+\frac{2}{e^{-M}}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right](\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2 \qquad (3.67)\\
&< -2e^M\left[1+\frac{1}{b_5}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\right)\right](\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})^2 \\
&= -\frac{A_4}{b_7} - \frac{A_6}{b_8} - \frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_3b_7+A_5b_8\right).
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
A_3b_2 + A_5b_3 + b_5 &< A_3b_2 + A_5b_3 + \frac{e^{-M}}{2} \\
&= \frac{A_3}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}} + \frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}} + \frac{e^{-M}}{2} \\
&= \frac{e^{-M}}{2} + \frac{e^{-M}}{2} \\
&= e^{-M},
\end{aligned}$$

então,

$$e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5 > 0.$$

Assim, segue da limitação de $(\phi(u_n))$, das desigualdades em (3.66), (3.60) e (3.61) que existe uma constante C_9 tal que

$$
\begin{aligned}
&C_9 \leq \phi(u_n)\\
&\leq \left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right) \parallel u_n' \parallel_{L^2}^2 + C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}e^{G(t_j)}\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2}^{\alpha+1} +\\
&+ \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \parallel u_n' \parallel_{L^2} + h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\\
&\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8}\right]\\
&\leq \left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right) \left[\frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) - \frac{C_6}{b_5}\right] + C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}e^{G(t_j)}\right)\\
&\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + \frac{C_7}{\sqrt{b_5}}\right]^{\alpha+1} +\\
&+ \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) +\right.\\
&\left.+ \frac{C_7}{\sqrt{b_5}}\right] + h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8}\right]\\
&= h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + W_2\right] - \frac{C_6}{b_5}\left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right) + C_0K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}e^{G(t_j)}\right)\\
&\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} b_5^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left[\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_7\right]^{\alpha+1} +\\
&+ \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} b_5^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_7\right],
\end{aligned} \tag{3.68}
$$

para n suficientemente grande, onde

$$W_2 = \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8} + \frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right).$$

Pela propriedade (iv) de $\mathcal{H}$, se $\parallel \bar{u}_n \parallel \to +\infty$ quando $n \to +\infty$, então

$$h(\parallel \bar{u}_n \parallel) \to +\infty.$$

Assim, por (3.67) e (3.68), teríamos que

$$C_9 \leq \phi(u_n) \leq -\infty,$$

o que contradiz o fato de que $(\phi(u_n))$ é limitada. Portanto, $(\| \bar{u}_n \|)$ é limitada.

Temos, por (3.61) e pela propriedade (iii) de $\mathcal{H}$, que

$$\begin{aligned}\| u_n' \|_{L^2} &\leq \frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|)+\frac{C_7}{\sqrt{b_5}}\\ &\leq \frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2}+\frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}}(K_1 \| \bar{u}_n \|^{\alpha}+K_2)+\frac{C_7}{\sqrt{b_5}}.\end{aligned}$$

Uma vez que $(\| \bar{u}_n \|)$ é limitada , segue que $(\| u_n' \|_{L^2})$ também é limitada.

Caso 2.2) $\limsup\limits_{\|x\|\to\infty} h^{-2}(\| x \|)E(x) < D_3$.

Sejam

$$b_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}},$$

$$b_3 = b_8 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}},$$

e

$$b_6 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}.$$

Então,

$$\begin{aligned}&-\frac{A_2}{b_6}-\frac{A_6}{b_8}-\frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_1b_6+A_5b_8\right)\\ &= -2A_2\sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}-2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}-\\ &-\frac{1}{b_5}\left(2A_4\sqrt{\frac{A_3}{A_4}}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}+2A_6\sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}\right)\\ &\left(\frac{e^M}{2}+\frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\\ &= -2e^M(\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_1A_2}\sqrt{A_5A_6})-2e^MA_5A_6-2e^M\sqrt{A_5A_6}\sqrt{A_3A_4}-\frac{2}{b_5}e^M\\ &(A_3A_4+\sqrt{A_3A_4}\sqrt{A_5A_6}+A_5A_6+\sqrt{A_5A_6}\sqrt{A_3A_4})\\ &\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_1A_2}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\\ &= -2e^M(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})\\ &\left[\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}+(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})\frac{1}{b_5}\left(\frac{e^M}{2}+\frac{1}{2e^M}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\right]\end{aligned}$$

$$= -2e^M(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})$$
$$\left[\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6} + (\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\frac{1}{b_5}\frac{e^M}{2} + \frac{\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}}{2e^M b_5}\right]$$
$$= -2e^M(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})$$
$$\left[\left(1 + \frac{1}{2e^M b_5}\right)\left(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}\right) + \frac{e^M}{2b_5}(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\right].$$

De posse disto e do fato de que

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} h^{-2}(\| x \|)E(x) < D_3,$$

podemos escolher

$$0 < b_5 < \frac{e^{-M}}{2}$$

de modo que

$$\begin{aligned}
& -\frac{A_2}{b_6} - \frac{A_6}{b_8} - \frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_1b_6 + A_5b_8\right) \\
& = -2e^M(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\left[\left(1 + \frac{1}{2e^M b_5}\right)\left(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{e^M}{2b_5}(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\right] \\
& > -2e^M(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\left[\left(1 + \frac{1}{2e^M}2e^M\right)\left(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}\right) + \right. \\
& \left. + \frac{e^M}{2}2e^M(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6})\right] \\
& = D_3 \\
& > \limsup_{\|x\|\to\infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)}.
\end{aligned} \tag{3.69}$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
& A_3b_2 + A_5b_3 + b_5 < A_3b_2 + A_5b_3 + \frac{e^{-M}}{2} \\
& = \frac{A_3}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}} + \frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}} + \frac{e^{-M}}{2} \\
& = e^{-M},
\end{aligned}$$

então,

$$e^{-M} - A_3b_2 - A_5b_3 - b_5 > 0.$$

Assim, segue da limitação das desigualdades em $(\phi(u_n))$, (3.55), (3.60) e (3.61) que existe uma constante C_{10} tal que

$$
\begin{aligned}
&C_{10} \leq \phi(u_n) \\
&\leq \left(\frac{e^M}{2} + A_1 b_6 + A_5 b_8\right) \| u_n' \|_{L^2}^2 + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} + \\
&+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2} + h^2(\| \bar{u}_n \|) \\
&\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\| \bar{u}_n \|)} + \frac{A_2}{b_6} + \frac{A_6}{b_8}\right] \\
&\leq \left(\frac{e^M}{2} + A_1 b_6 + A_5 b_8\right) \left(\frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right) h^2(\| \bar{u}_n \|) - \frac{C_6}{b_5}\right) + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right) \\
&\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) + \frac{C_7}{\sqrt{b_5}}\right]^{\alpha+1} + \\
&+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{b_5}}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) + \right. \\
&\left. + \frac{C_7}{\sqrt{b_5}}\right] + h^2(\| \bar{u}_n \|) \left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\| \bar{u}_n \|)} + \frac{A_2}{b_6} + \frac{A_6}{b_8}\right] \\
&= h^2(\| \bar{u}_n \|) \left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\| \bar{u}_n \|)} + W_3\right] - \frac{C_6}{b_5}\left(\frac{e^M}{2} + A_1 b_6 + A_5 b_8\right) + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right) \\
&\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} b_5^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left[\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\| \bar{u}_n \|) + C_7\right]^{\alpha+1} + \\
&+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right) \left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} b_5^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} + C_7\right],
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

para n suficientemente grande, onde

$$W_3 = \frac{A_2}{b_6} + \frac{A_6}{b_8} + \frac{1}{b_5}\left(\frac{A_4}{b_2} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_1 b_6 + A_5 b_8\right).$$

Em vista de (3.70), (3.69) e da propriedade (iv) de $\mathcal{H}$, concluímos que $(\| \bar{u}_n \|)$ é limitada. Logo, como no caso anterior, $(\| u_n' \|_{L^2})$ também é limitada.

Caso 2.3) $\limsup\limits_{\|x\| \to \infty} h^{-2}(\| x \|) E(x) < D_4$.

Sejam

$$b_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}},$$

$$b_3 = b_8 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}},$$

e

$$b_7 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}},$$

então,

$$
\begin{aligned}
&-\frac{A_4}{b_7}-\frac{A_6}{b_8}-\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1}+\frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2}+A_3b_7+A_5b_8\right)\\
&= -A_4\ \ 2\ \sqrt{\frac{A_3}{A_4}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}} - A_6\ \ 2\ \sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}+\\
&-\frac{1}{b_4}\left(A_2\ \ 2\ \sqrt{\frac{A_1}{A_2}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}+A_6\ \ 2\ \sqrt{\frac{A_5}{A_6}}\frac{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}{e^{-M}}\right)\left(\frac{e^M}{2}+\frac{A_3}{2}\sqrt{\frac{A_4}{A_3}}\right.\\
&\left.\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}+\frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\\
&= -2e^M\sqrt{A_3A_4}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)-2e^M\sqrt{A_5A_6}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)+\\
&-\frac{1}{b_4}\left(2e^M\sqrt{A_1A_2}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)+2e^M\sqrt{A_5A_6}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\right)\left(\frac{e^M}{2}\right.\\
&\left.+\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{2e^M}\left(\frac{1}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\right)\\
&= -2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left[\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}+\left(\frac{1}{b_4}\sqrt{A_1A_2}+\frac{1}{b_4}\sqrt{A_5A_6}\right)\right.\\
&\left.\left(\frac{e^M}{2}+\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{2e^M}\left(\frac{1}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)\right)\right]\\
&= -2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left[\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}+\frac{1}{b_4}\sqrt{A_1A_2}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{2e^M}\right.\\
&\left(\frac{1}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)+\frac{1}{b_4}\sqrt{A_5A_6}\frac{\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6}}{2e^M}\left(\frac{1}{\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}}\right)+\\
&\left.+\frac{1}{b_4}\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left(\frac{e^M}{2}\right)\right]\\
&= -2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6}\right)\left[(\sqrt{A_3A_4}+\sqrt{A_5A_6})\left(1+\frac{1}{2e^Mb_4}\right)+\frac{e^M}{2b_4}(\sqrt{A_1A_2}+\sqrt{A_5A_6})\right].
\end{aligned}
$$

Mais ainda, como

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} h^{-2}(\| x \|)E(x) < D_4,$$

podemos escolher
$$0 < b_4 < \frac{e^{-M}}{2}$$
de modo que

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\|x\|\to\infty} \frac{E(x)}{h^2(\| x \|)} < D_4 \\
&= -2e^M(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6})[2(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}) + e^{2M}(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6})] \\
&= -2e^M(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}) \left[\left(1 + \frac{1}{2e^M}2e^M\right)(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}) + \right. \\
&\left. + \frac{e^M}{2}2e^M(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6})\right] \\
&< -2e^M(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}) \left[\left(1 + \frac{1}{2e^M b_4}\right)(\sqrt{A_3A_4} + \sqrt{A_5A_6}) + \right. \\
&\left. + \frac{e^M}{2b_4}(\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6})\right] \\
&= -\frac{A_4}{b_7} - \frac{A_6}{b_8} - \frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right).
\end{aligned} \tag{3.71}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&A_1b_1 + A_5b_3 + b_4 < A_1b_1 + A_5b_3 + \frac{e^{-M}}{2} \\
&= \frac{A_1}{2}\sqrt{\frac{A_2}{A_1}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}} + \frac{A_5}{2}\sqrt{\frac{A_6}{A_5}}\frac{e^{-M}}{\sqrt{A_1A_2} + \sqrt{A_5A_6}} + \frac{e^{-M}}{2} \\
&= e^{-M},
\end{aligned}$$

então,
$$e^{-M} - A_1b_1 - A_5b_3 - b_4 > 0.$$

Assim, segue da limitação da sequência $(\phi(u_n))$, e das desigualdades em (3.66), (3.50) e (3.51) que existe uma constante C_{11} tal que

$$\begin{aligned}
&C_{11} \le \phi(u_n) \\
&\le \left(\frac{e^M}{2} + A_3b_7 + A_5b_8\right) \| u_n' \|_{L^2}^2 + C_0K_1\left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij}e^{G(t_j)}\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \| u_n' \|_{L^2}^{\alpha+1} + \\
&+ \left(C_0M_1K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0a_{ij}K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} \| u_n' \|_{L^2} + h^2(\| \bar{u}_n \|)
\end{aligned} \tag{3.72}$$

$$\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8}\right]$$
$$\leq \left(\frac{e^M}{2} + A_3 b_7 + A_5 b_8\right)\left[\frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right) h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel) - \frac{C_3}{b_4}\right] + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right)$$
$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} b_4^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left[\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_4\right]^{\alpha+1} +$$
$$+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} b_4^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_4\right] +$$
$$+ h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8}\right]$$
$$= h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)\left[\frac{E(\bar{u}_n)}{h^2(\parallel \bar{u}_n \parallel)} + W_4\right] - \frac{C_3}{b_4}\left(\frac{e^M}{2} + +A_3 b_7 + A_5 b_8\right) + C_0 K_1 \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} e^{G(t_j)}\right)$$
$$\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}} b_4^{-\frac{\alpha+1}{2}} \left[\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_4\right]^{\alpha+1} +$$
$$+ \left(C_0 M_1 K_2 + M_2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)}(C_0 a_{ij} K_2 + b_{ij})\right)\left(\frac{T}{12}\right)^{\frac{1}{2}} b_4^{-\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)^{\frac{1}{2}} h(\parallel \bar{u}_n \parallel) + C_4\right],$$

para n suficientemente grande, onde

$$W_4 = \frac{A_4}{b_7} + \frac{A_6}{b_8} + \frac{1}{b_4}\left(\frac{A_2}{b_1} + \frac{A_6}{b_3}\right)\left(\frac{e^M}{2} + A_3 b_7 + A_5 b_8\right).$$

Em vista de (3.71), (3.72) e propriedade (iv) de $\mathcal{H}$, temos que $(\parallel \bar{u}_n \parallel)$ é limitada. Disto, segue, como no caso 2.2 que $(\parallel u_n' \parallel_{L^2})$ é limitada.

Por hipótese,

$$\limsup_{\|x\|\to\infty} \frac{E(x)}{h^2(\parallel x \parallel)} < \min\{D_1, D_2, D_3, D_4\},$$

então concluímos dos três subcasos analisados acima que, ambas as sequências $(\parallel \bar{u}_n \parallel)$ e $(\parallel u_n' \parallel_{L^2})$ são limitadas, quando $p \in L^2(0, T; \mathbb{R}^+)$. De maneira análoga ao primeiro caso, existem $u \in H_T^1$ e uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) tais que (u_{n_k}) converge uniformemente a u em $[0, T]$.

A seguir, vamos mostrar que ϕ satisfaz a condição (PS). Pelo Teorema 1.0.8, temos que

$$\int_0^T \parallel u_{n_k}(t) - u(t) \parallel^2 dt \to 0 \tag{3.73}$$

quando $k \to +\infty$, e para todo $i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$, ou seja,

$$u^i_{n_k}(t_j) \to u^i(t_j),$$

quando $k \to +\infty$, pois

$$| \; u^i_{n_k}(t_j) - u^i(t_j) \; | \leq | \; u_{n_k}(t_j) - u(t_j) \; |,$$

para todo $i \in \mathcal{A}, j \in \mathcal{B}$.

Segue da continuidade das I_{ij} que

$$\sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} \left(I_{ij}(u^i_{n_k}(t_j)) - I_{ij}(u^i(t_j)) \right) (u^i_{n_k}(t_j) - u^i(t_j)) \to 0, \tag{3.74}$$

quando $k \to +\infty$.

Levando em conta que (u_{n_k}) converge uniformemente a u em $[0, T]$, temos pela hipótese (A), por (3.5) e pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \int_0^T e^{G(t)} (\nabla F(t, u_{n_k}(t)) - \nabla F(t, u(t)), u_{n_k}(t) - u(t)) dt \right| \\ &\leq \int_0^T e^{G(t)} \, ||\nabla F(t, u_{n_k}(t)) - \nabla F(t, u(t))|| \, \| \, u_{n_k}(t) - u(t) \, \| \, dt \\ &\leq \int_0^T e^M \left[a(\| \, u_{n_k}(t) \, \|) + a(\| \, u(t) \, \|) \right] b(t) \, \| \, u_{n_k} - u \, \|_\infty \, dt \to 0. \end{aligned} \tag{3.75}$$

Como (u_{n_k}) converge fracamente a u em H^1_T e $\phi'(u_{n_k}) \to 0$, então segue da Proposição 1.0.27 que

$$< \phi'(u_{n_k}) - \phi'(u), u_{n_k} - u > \to 0 \tag{3.76}$$

quando $k \to +\infty$.

Temos, ainda por (3.10) e (3.11), que

$$\begin{aligned} &< \phi'(u_{n_k}) - \phi'(u), u_{n_k} - u > = < \phi'(u_{n_k}), u_{n_k} - u > - < \phi'(u), u_{n_k} - u > \\ &= \int_0^T e^{G(t)} (u'_{n_k}(t), u'_{n_k}(t) - u'(t)) dt + \int_0^T e^{G(t)} (\nabla F(t, u_{n_k}(t)), u_{n_k}(t) - u(t)) dt + \end{aligned} \tag{3.77}$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}I_{ij}(u^i_{n_k}(t_j))(u^i_{n_k}(t_j)-u^i(t_j))+$$
$$-\left[\int_0^T e^{G(t)}(u'(t),u'_{n_k}(t)-u'(t))dt+\int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u(t)),u_{n_k}(t)-u(t))dt+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}I_{ij}(u^i(t_j))(u^i_{n_k}(t_j)-u^i(t_j))\right]$$
$$=\int_0^T e^{G(t)}\parallel u'_{n_k}(t)-u'(t)\parallel^2 dt+\int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u_{n_k}(t))-\nabla F(t,u(t)),u_{n_k}(t)-u(t))dt+$$
$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}\left(I_{ij}(u^i_{n_k}(t_j))-I_{ij}(u^i(t_j))\right)(u^i_{n_k}(t_j)-u^i(t_j)).$$

Assim, em vista de (3.74)-(3.77) e (3.5), temos que

$$0\le e^{-M}\int_0^T\parallel u'_{n_k}(t)-u'(t)\parallel^2 dt$$
$$\le\int_0^T e^{G(t)}\parallel u'_{n_k}(t)-u'(t)\parallel^2 dt$$
$$=<\phi'(u_{n_k})-\phi'(u),u_{n_k}-u>-\int_0^T e^{G(t)}(\nabla F(t,u_{n_k}(t))-\nabla F(t,u(t)),u_{n_k}(t)-u(t))dt+$$
$$-\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{N}e^{G(t_j)}\left(I_{ij}(u^i_{n_k}(t_j))-I_{ij}(u^i(t_j))\right)(u^i_{n_k}(t_j)-u^i(t_j))\to 0,$$

quando $k\to+\infty$.

Assim,
$$\int_0^T\parallel u'_{n_k}(t)-u'(t)\parallel^2 dt\to 0$$

quando $k\to+\infty$, o que combinando com (3.73), nos dá que

$$\parallel u_{n_k}-u\parallel_{1,T}=\left(\int_0^T\parallel u'_{n_k}(t)-u'(t)\parallel^2 dt+\int_0^T\parallel u_{n_k}(t)-u(t)\parallel^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\to 0,$$

quando $k\to+\infty$.

Portanto, (u_{n_k}) converge fortemente a u em H^1_T, o que significa que ϕ satisfaz a condição (PS).

Vamos mostrar que ϕ é limitada inferiormente em $\tilde{H}^1_T$. De fato, como ϕ é coerciva em $\tilde{H}^1_T$, então, existe $R>0$ tal que

$$u\in\tilde{H}^1_T,\parallel\tilde{u}\parallel_{1,T}\ge R\ \text{ implica }\ \phi(u)>1.$$

Logo, ϕ é limitada inferiormente no subconjunto

$$\{\tilde{u} \in \tilde{H}^1_T; \parallel \tilde{u} \parallel_{1,T} \geq R\}.$$

Sejam

$$B_1 = \frac{1}{2}e^{-M}, \ \ B_2 = \int_0^T e^{G(t)}F(t,0)dt,$$

$$B_3 = \left(M_1 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} a_{ij} \right) \frac{K_1}{\alpha+1} \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}}$$

e

$$B_4 = \left(K_2 M_1 + M_2 + \sum_{j=1}^{p} \sum_{i=1}^{N} e^{G(t_j)} (a_{ij} K_2 + b_{ij}) \right) \left(\frac{T}{12} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Observe que B_1, B_3 e B_4 são constantes positivas.

Por (3.42),

$$\phi(\tilde{u}) \geq B_1 \parallel u' \parallel^2_{L^2} + B_2 - B_3 \parallel u' \parallel^{\alpha+1}_{L^2} - B_4 \parallel u' \parallel_{L^2},$$

para todo $\tilde{u} \in \tilde{H}^1_T$.

Para $\tilde{u} \in \tilde{H}^1_T$ tal que $\parallel \tilde{u} \parallel_{1,T} < R$, temos

$$\parallel u' \parallel^2_{L^2} = \parallel \tilde{u}' \parallel^2_{L^2} = \parallel \tilde{u} \parallel^2_{1,T} - \parallel \tilde{u} \parallel^2_{L^2} \leq \parallel \tilde{u} \parallel^2_{1,T} < R^2,$$

logo,

$$\parallel u' \parallel_{L^2} < R.$$

Portanto, para $\tilde{u} \in \tilde{H}^1_T$ tal que $\parallel \tilde{u} \parallel_{1,T} < R$, segue que

$$\phi(\tilde{u}) \geq B_1 \parallel u' \parallel^2_{L^2} + B_2 - B_3 \parallel u' \parallel^{\alpha+1}_{L^2} - B_4 \parallel u' \parallel_{L^2} \geq B_2 + B_3(-R)^{\alpha+1} - RB_4.$$

Seja

$$P = \min\{1, B_2 + B_3(-R)^{\alpha+1} - RB_4\},$$

então

$$\phi(\tilde{u}) \geq P, \forall \tilde{u} \in \tilde{H}^1_T,$$

donde conluímos que ϕ é limitada inferiormente em $\tilde{H}^1_T$.

Deste modo,

$$\inf_{\tilde{H}_T^1} \phi \geq -\infty.$$

Seja

$$I = \inf_{\tilde{H}_T^1} \phi.$$

Conforme vimos no Passo (1), temos para $x \in \mathbb{R}^N$

$$\lim_{x \to +\infty} \phi(x) = -\infty.$$

Se $I < 0$ então, existe $R > 0$ tal que $\| x \| \geq R$ implica $\phi(x) < I$.

Se $I > 0$, então $-I < 0$ e assim, existe $R > 0$ tal que $\| x \| \geq R$ implica $\phi(x) < -I < I$. Por fim, se $I = 0$, então existe $R > 0$ tal que

$$\| x \| \geq R \quad \text{implica} \quad \phi(x) < -1 < I.$$

Disto concluímos que, para qualquer que seja $I \in \mathbb{R}$, existe $R > 0$ tal que $\| x \| = R$ implica $\phi(x) < I$.

Assim,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N, \|x\| = R} \phi(x) < \inf_{\tilde{u} \in \tilde{H}_T^1} \phi.$$

Pelo Teorema 1.0.17, ϕ tem pelo menos um ponto crítico (passos 1-3). Logo, (PI) tem pelo menos uma solução fraca em H_T^1.

$\square$

Exemplo 3.0.8. *Consideremos o seguinte problema de vibração impulsivo amortecido:*

$$\begin{aligned}
&u''(t) + \left(\frac{1}{2} - t\right) u'(t) = \nabla F(t, u(t)), \\
&u(0) - u(1) = u'(0) - u'(1) = 0, \\
&\triangle(u'^i(t_j)) = I_{ij}(u^i(t_j)), i = 1, 2, j = 1,
\end{aligned} \tag{3.78}$$

onde $0 < t_1 < 1$ *e*

$$I_{11}(y) = I_{21}(y) = \frac{2y}{1 + y^2}, y \in \mathbb{R}. \tag{3.79}$$

Vamos provar que

1. *Se*
$$F(t,x) = \left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+ \parallel x \parallel^2) \parallel x \parallel + e^{\frac{t^2}{2}} \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2), \tag{3.80}$$
então o problema (3.78)-(3.79) tem pelo menos uma solução fraca.

2. *Se*
$$F(t,x) = \left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+ \parallel x \parallel^2) \parallel x \parallel - e^{\frac{t^2}{2}} \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2), \tag{3.81}$$
então o problema (3.78)-(3.79) tem pelo menos uma solução fraca.

Primeiramente, vamos mostrar que:

(a) Dado $\epsilon > 0$ existe uma constante C_{15} tal que
$$\mid I_{i1}(y) \mid < \epsilon \ln(1+ \mid y \mid^2) + C_{15},$$
para todo $i \in \{1,2\}$ e $y \in \mathbb{R}$.

(b) A aplicação h dada por
$$h(s) = \ln(1+s^2)$$
é tal que $h \in \mathcal{H}$.

Vamos, inicialmente, provar o item (a). Como
$$\begin{aligned}
\lim_{y\to+\infty} \frac{I_{i1}(y)}{\ln(1+\mid y \mid^2)} &= \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{(1+y^2)\ln(1+\mid y \mid^2)} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{2y\ln(1+\mid y \mid^2) + (1+y^2)\frac{2|y|}{1+|y|^2}} \\
&= \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{2y\ln(1+\mid y \mid^2) + 2\mid y \mid} \\
&= 0,
\end{aligned}$$
para todo $i \in \{1,2\}$, então, temos que, dado $\epsilon > 0$, existe uma constante $C_{14} > 0$ tal que
$$\mid I_{i1}(y) \mid < \epsilon \ln(1+ \mid y \mid^2), \tag{3.82}$$
para todo $\mid y \mid > C_{14}$.

A continuidade de $| I_{i1}(y) | -\epsilon \ln(1+ | y |^2)$ implica que existe uma constante $C_{15} > 0$ tal que

$$| I_{i1}(y) |< \epsilon \ln(1+ | y |^2) + C_{15}, \tag{3.83}$$

para todo $| y |\leq C_{14}$.

Assim, segue de (3.82) e (3.83) que, dado $\epsilon > 0$, existe uma constante C_{15} tal que

$$| I_{i1}(y) |< \epsilon \ln(1+ | y |^2) + C_{15}, \tag{3.84}$$

para todo $i \in \{1, 2\}$ e $y \in \mathbb{R}$.

Para provarmos o item (b), vamos mostrar que as propriedades (i)-(iv) de $\mathcal{H}$ são satisfeitas por h, com $C_0 = 2$.

(i) Vejamos que

$$\ln(1 + s^2) \leq \ln(1 + t^2),$$

para todo $s \leq t, s, t \in \mathbb{R}^+$, pois a função logarítmica é uma função crescente.

(ii) Note que

$$\begin{aligned}
&[(1 + s^2)(1 + t^2)]^2 = (1 + s^4 + 2s^2)(1 + t^4 + 2t^2) \\
&= 1 + t^4 + 2t^2 + s^4 + s^4t^4 + 2s^4t^2 + 2s^2 + 2s^2t^4 + 4s^2t^2 \\
&\geq 1 + t^4 + s^4 + s^4t^4 + 2s^4t^2 + 2s^2t^4 + 4s^2t^2 + t^2 + s^2 + 2st \\
&\geq 1 + t^2 + s^2 + 2st \\
&= 1 + (s + t)^2.
\end{aligned}$$

Uma vez que a função logarítmica é crescente, segue que

$$\begin{aligned}
h(s + t) &= \ln(1 + (s + t)^2) \\
&\leq \ln[(1 + s^2)(1 + t^2)]^2 \\
&= 2 \ln \left[(1 + s^2)(1 + t^2)\right] \\
&= 2 \left[\ln(1 + s^2) + \ln(1 + t^2)\right] \\
&= 2(h(s) + h(t)), \forall s, t \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned}$$

(iii) Vamos mostrar que

$$0 \leq \ln(1+s^2) \leq s^{\frac{1}{2}} + C_{13}, \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

Com efeito, como

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to+\infty} \frac{\ln(1+s^2)}{s^{\frac{1}{2}}} &= \lim_{s\to+\infty} \frac{\frac{2s}{1+s^2}}{\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}} \\
&= \lim_{s\to+\infty} \frac{2s}{1+s^2} 2s^{\frac{1}{2}} \\
&= \lim_{s\to+\infty} \frac{4s^{\frac{3}{2}}}{1+s^2} \\
&= \lim_{s\to+\infty} \frac{6s^{\frac{1}{2}}}{2s} \\
&= \lim_{s\to+\infty} \frac{3}{s^{\frac{1}{2}}} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

então, existe $C_{12} > 0$ tal que

$$\frac{\ln(1+s^2)}{s^{\frac{1}{2}}} \leq 1, \tag{3.85}$$

para todo $s \geq C_{12}$.

A continuidade de $\ln(1+s^2) - s^{\frac{1}{2}}$ implica que existe $C_{13} > 0$ tal que

$$\ln(1+s^2) \leq s^{\frac{1}{2}} + C_{13}, \tag{3.86}$$

para todo $s \in [0, C_{12}]$. Seguem de (3.85) e (3.86) que

$$\ln(1+s^2) \leq s^{\frac{1}{2}} + C_{13}, \forall s \in \mathbb{R}^+.$$

(iv) Por último, temos

$$\lim_{s\to+\infty} \ln(1+s^2) = +\infty.$$

Portanto, (i)-(iv) valem, provando que $h \in \mathcal{H}$.

Finalmente, iremos demonstrar os resultados 1 e 2 enunciados anteriormente, neste exemplo.

Caso 1. Consideremos o problema (3.78)-(3.79) com F dada por (3.80). Usaremos o Teorema 3.0.5 para demonstrar este caso.

A função F dada por (3.80) satisfaz a hipótese (A). De fato, uma vez que F é contínua em t, para todo $x \in \mathbb{R}^2$, segue que F é mensurável em em t, para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Também temos que ∇F é contínua em x para quase todo $t \in [0,T]$. Com efeito, para $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, temos

$$\nabla F(t,x) = \left(\frac{(1-2t) \parallel x \parallel}{1+ \parallel x \parallel^2} + \left(\frac{1}{2} - t\right) \frac{\ln(1+ \parallel x \parallel^2)}{\parallel x \parallel} + 4e^{\frac{t^2}{2}} \frac{\ln(1+ \parallel x \parallel^2)}{1+ \parallel x \parallel^2} \right) x,$$

donde vemos que ∇F é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ para quase todo $t \in [0,T]$.

Para verificar a continuidade de ∇F em $0 \in \mathbb{R}^2$, vamos mostrar que

$$\nabla F(t,0,0) = \lim_{x \to (0,0)} \nabla F(t,x).$$

Temos

$$\nabla F(t,0,0) = \left(\frac{\partial F}{\partial e_2}(t,0,0), \frac{\partial F}{\partial e_3}(t,0,0) \right).$$

Uma vez que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial e_2}(t,0,0) &= \lim_{s \to 0} \frac{F(t,s,0) - F(t,0,0)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+s^2)\sqrt{s^2} + e^{\frac{t^2}{2}} \ln^2(1+s^2)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \left\{ \left(\frac{1}{2} - t\right) \left[\frac{2s\sqrt{s^2}}{1+s^2} + \ln(1+s^2) sgn \quad s \right] + e^{\frac{t^2}{2}} 2\ln(1+s^2) \frac{2s}{1+s^2} \right\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial e_3}(t,0,0) &= \lim_{s \to 0} \frac{F(t,0,s) - F(t,0,0)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+s^2)\sqrt{s^2} + e^{\frac{t^2}{2}} \ln^2(1+s^2)}{s} \\
&= \lim_{s \to 0} \left\{ \left(\frac{1}{2} - t\right) \left[\frac{2s\sqrt{s^2}}{1+s^2} + \ln(1+s^2) sgn \quad s \right] + e^{\frac{t^2}{2}} 2\ln(1+s^2) \frac{2s}{1+s^2} \right\} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

então,

$$\nabla F(t,0,0) = (0,0). \tag{3.87}$$

Por outro lado, escrevendo $y =\| x \|$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to(0,0)} \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{\| x \|} = \lim_{\|x\|\to 0} \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{\| x \|}\\
&= \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+y^2)}{y}\\
&= \lim_{y\to 0} \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{2y}{1+y^2}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

disto, obtemos

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to(0,0)} \nabla F(t,x) = \lim_{x\to(0,0)} \frac{(1-2t)\| x \|}{1+\| x \|^2}x + \lim_{x\to(0,0)} \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{\| x \|}x+\\
&+ \lim_{x\to(0,0)} 4e^{\frac{t^2}{2}}\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{1+\| x \|^2}x \\
&= (0,0).
\end{aligned} \tag{3.88}$$

De (3.87) e de (3.88), segue que $\nabla F(t,x)$ também é contínua em $(0,0)$ para quase todo $t \in [0,T]$. Além disso,

$$| F(t,x) |\leq a(\| x \|)b(t), \quad || \nabla F(t,x) ||\leq a(\| x \|)b(t),$$

com

$$a(\| x \|) = 1 + (\| x \| +1)\left(\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right)$$

e

$$b(t) = \left|\frac{1}{2}-t\right| + 2e^{\frac{t^2}{2}}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
&| F(t,x) |\leq \left|\frac{1}{2}-t\right| \ln(1+\| x \|^2)\| x \| + e^{\frac{t^2}{2}}\ln^2(1+\| x \|^2)\\
&\leq \left|\frac{1}{2}-t\right| \ln(1+\| x \|^2)(\| x \| +1) + e^{\frac{t^2}{2}}\ln^2(1+\| x \|^2)(\| x \| +1)\\
&\leq \left|\frac{1}{2}-t\right| \ln(1+\| x \|^2)(\| x \| +1) + e^{\frac{t^2}{2}}\ln^2(1+\| x \|^2)(\| x \| +1) + \left|\frac{1}{2}-t\right|\ln^2(1+\| x \|^2)\\
&(\| x \| +1) + 2e^{\frac{t^2}{2}}\ln(1+\| x \|^2)(\| x \| +1)\\
&\leq \left[1+\left(\ln(1+\| x \|^2)+\ln^2(1+\| x \|^2)\right)(\| x \| +1)\right]\left(\left|\frac{1}{2}-t\right| + 2e^{\frac{t^2}{2}}\right),
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\| \nabla F(t,x) \| =& \Bigg| \Bigg(\left(\left(\frac{1}{2}-t\right) \left(\frac{2x_1}{1+\| x \|^2} \| x \| + \ln(1+\| x \|^2)\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}}2x_1 \right) + \right.\\
&+ e^{\frac{t^2}{2}} 2\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{1+\| x \|^2}2x_1, \left(\frac{1}{2}-t\right) \left(\frac{2x_2}{1+\| x \|^2} \| x \| + \ln(1+\| x \|^2)\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}}2x_2 \right) + \\
&+ e^{\frac{t^2}{2}} \frac{2\ln(1+\| x \|^2)}{1+\| x \|^2}2x_2 \Bigg) \Bigg| \\
=& \left| \left[\frac{(1-2t)\| x \|}{1+\| x \|^2} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+\| x \|^2)}{\| x \|} + 2e^{\frac{t^2}{2}}\frac{2\ln(1+\| x \|^2)}{1+\| x \|^2} \right] x \right| \\
=& \left| \frac{(1-2t)\| x \|^2}{1+\| x \|^2} + \left(\frac{1}{2}-t\right)\ln(1+\| x \|^2) + 2e^{\frac{t^2}{2}}\frac{2\ln(1+\| x \|^2)\| x \|}{1+\| x \|^2} \right| \\
\leq& | 1-2t | + \left|\frac{1}{2}-t\right| \left[\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right] + 2e^{\frac{t^2}{2}}\left[\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right] \\
\leq& 1 + \left|\frac{1}{2}-t\right| \left[\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right](\| x \| + 1) + \\
&+ 2e^{\frac{t^2}{2}}\left[\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right](\| x \| + 1) \\
\leq& (\| x \| + 1)\left[\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right]\left(\left|\frac{1}{2}-t\right| + 2e^{\frac{t^2}{2}}\right) + \left|\frac{1}{2}-t\right| + 2e^{\frac{t^2}{2}} \\
=& \left[1 + (\| x \| + 1)\left(\ln(1+\| x \|^2) + \ln^2(1+\| x \|^2)\right)\right]\left(\left|\frac{1}{2}-t\right| + 2e^{\frac{t^2}{2}}\right).
\end{aligned}$$

Note que $a \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ e $b \in L^1(0,1;\mathbb{R}^+)$. Portanto, F satisfaz a hipótese (A). Uma vez que

$$g(t) = \frac{1}{2} - t,$$

temos $g \in L^1(0,1;\mathbb{R})$ e $\int_0^1 g(t)dt = 0$, portanto, g satisfaz (B).

Resta mostrar que as condições (3.12), (3.13) e (3.14) são satisfeitas.

A desigualdade (3.12) é satisfeita com

$$p(t) = \left|\frac{1}{2} - t\right| \in L^1(0,1;\mathbb{R}^+),$$

$$h(s) = \ln(1+s^2) \in \mathcal{H}$$

e

$$q(t) = | 1-2t | + 4e^{\frac{t^2}{2}}C_{16} \in L^1(0,1;\mathbb{R}^+),$$

para alguma constante $C_{16} > 0$.

De fato, como

$$\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\ln(1+\parallel x\parallel^2)\parallel x\parallel}{1+\parallel x\parallel^2}=\lim_{\|x\|\to+\infty}\frac{\frac{2\|x\|^2}{1+\|x\|^2}+\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{2\parallel x\parallel}$$
$$=\lim_{\|x\|\to+\infty}\left[\frac{\parallel x\parallel}{1+\parallel x\parallel^2}+\frac{\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{2\parallel x\parallel}\right]$$
$$=\lim_{\|x\|\to+\infty}\left[\frac{1}{2\parallel x\parallel}+\frac{2\parallel x\parallel}{2(1+\parallel x\parallel^2)}\right]$$
$$=0,$$

então, existe uma constante $C_{16}>0$ tal que

$$\ln\left[\frac{(1+\parallel x\parallel^2)\parallel x\parallel}{1+\parallel x\parallel^2}\right]\leq C_{16}. \tag{3.89}$$

Então, por (3.89),

$$\parallel\nabla F(t,x)\parallel=\left|\left(\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{2x_1}{1+\parallel x\parallel^2}\parallel x\parallel+\ln(1+\parallel x\parallel^2)\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}}2x_1\right)+\right.\right.$$
$$+e^{\frac{t^2}{2}}2\frac{\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{1+\parallel x\parallel^2}2x_1,\left(\frac{1}{2}-t\right)\left(\frac{2x_2}{1+\parallel x\parallel^2}\parallel x\parallel+\ln(1+\parallel x\parallel^2)\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-\frac{1}{2}}2x_2\right)+$$
$$\left.\left.+e^{\frac{t^2}{2}}\frac{2\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{1+\parallel x\parallel^2}2x_2\right)\right|$$
$$=\left|\left[\frac{(1-2t)\parallel x\parallel}{1+\parallel x\parallel^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\frac{\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{\parallel x\parallel}+2e^{\frac{t^2}{2}}\frac{2\ln(1+\parallel x\parallel^2)}{1+\parallel x\parallel^2}\right]x\right|$$
$$=\left|\frac{(1-2t)\parallel x\parallel^2}{1+\parallel x\parallel^2}+\left(\frac{1}{2}-t\right)\ln(1+\parallel x\parallel^2)+4e^{\frac{t^2}{2}}\frac{\ln(1+\parallel x\parallel^2)\parallel x\parallel}{1+\parallel x\parallel^2}\right|$$
$$\leq\mid 1-2t\mid+\left|\frac{1}{2}-t\right|\ln(1+\parallel x\parallel^2)+4e^{\frac{t^2}{2}}C_{16}.$$

Portanto, (3.12) é satisfeita.

Por meio de cálculo direto, obtemos

$$M=\int_0^1\left|\frac{1}{2}-t\right|dt=\int_0^{\frac{1}{2}}\left|\frac{1}{2}-t\right|dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left|\frac{1}{2}-t\right|dt$$
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-t\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\left(t-\frac{1}{2}\right)dt$$
$$=0,25 \quad ,$$

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \int_0^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\left|\frac{1}{2}-t\right| dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-t\right) dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right) dt \\
&= 2(e^{\frac{1}{8}}-1),
\end{aligned}
$$

$$A_1 = \frac{1}{24}$$

e

$$A_2 = \frac{4M_1^2}{2} = 8\left(e^{\frac{1}{8}}-1\right)^2.$$

Como

$$2(e^{\frac{1}{2}}-1) \approx 1,297 > 0,015 \approx 2e^M(\sqrt{A_1A_2})^2,$$

então, existe uma constante $\epsilon_1 > 0$ tal que

$$2(e^{\frac{1}{2}}-1) > 2e^M\left(\sqrt{A_1A_2}+\left(\frac{e^{t_1-t_1^2}}{6}\right)^{\frac{1}{2}}\epsilon_1\right)^2. \tag{3.90}$$

Em (3.84), escolha $\epsilon = \epsilon_1$. Então (3.13) é satisfeita com $a_{i1} = \epsilon_1$, $h(s) = \ln(1+s^2)$ e $b_{i1} = C_{15}$, para todo $i \in \{1,2\}$.

Finalmente, iremos mostrar que a condição (3.14) é satisfeita. De (3.79), vem

$$\int_0^{x^i} I_{i1}(y)dy = \int_0^{x^i} \frac{2y}{1+y^2}dy = \ln(1+(x^i)^2)$$

e então,

$$0 \leq \int_0^{x^i} I_{i1}(y)dy \leq \ln(1+\parallel x \parallel^2), \forall i \in \{1,2\}.$$

Assim,

$$0 \leq \frac{\sum_{i=1}^{2} e^{G(t_1)} \int_0^{x^i} I_{i1}(y)dy}{\ln^2(1+\parallel x \parallel^2)} \leq \frac{2e^{G(t_1)}}{\ln(1+\parallel x \parallel^2)} \to 0, \tag{3.91}$$

quando $\| x \| \to \infty$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{G(t)} F(t,x)dt &= \int_0^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\left[\left(\frac{1}{2}-t\right)\ln(1+\| x \|^2)\| x \| + \right. \\
&+ \left. \exp\left(\frac{t^2}{2}\right)\ln^2(1+\| x \|^2)\right] dt \\
&= \int_0^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-t\right)\ln(1+\| x \|^2)\| x \| \, dt + \int_0^1 \exp\left(\frac{t}{2}\right)\ln^2(1+\| x \|^2)dt \\
&= \left[\exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right)\ln(1+\| x \|^2)\| x \| + 2\exp\left(\frac{t}{2}\right)\ln^2(1+\| x \|^2)\right]_0^1 \\
&= 2(\exp\left(\frac{1}{2}\right) - 1)\ln^2(1+\| x \|^2).
\end{aligned} \tag{3.92}$$

Segue de (3.91) e (3.92)

$$\begin{aligned}
\lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{E(x)}{\ln^2(1+\| x \|^2)} &= \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{G(t)}F(t,x)dt}{\ln^2(1+\| x \|^2)} + \lim_{\|x\|\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^2 e^{G(t_1)}\int_0^{x^i} I_{i1}(y)dy}{\ln^2(1+\| x \|^2)} \\
&= 2(e^{\frac{1}{2}} - 1).
\end{aligned} \tag{3.93}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\sqrt{A_5 A_6} &= \left(\frac{1}{24}\frac{2^2}{2}\sum_{i=1}^2 a_{i1}^2 \;\; e^{2G(t_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{1}{12}\sum_{i=1}^2 a_{i1}^2 \;\; e^{t_1-t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{2}{12}\;\epsilon_1^2\;\; e^{t_1-t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{e^{t_1-t_1^2}}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_1,
\end{aligned}$$

que combinando com (3.93) e (3.90) nos dá (3.14).

Portanto, concluímos pelo Teorema 3.0.5 que o problema (3.78)-(3.79) com F dada por (3.80) tem pelo menos uma solução fraca.

Caso 2. Consideremos o problema (3.78)-(3.79) com F dada por (3.81). Faremos uso do Teorema 3.0.7 para demonstrar este caso. Temos de maneira análoga ao primeiro caso que F satisfaz a hipótese (A) e g satisfaz (B). Mostraremos agora que as condições (3.12), (3.13) e (3.35) são satisfeitas.

Consideremos

$$p(t) = \left|\frac{1}{2} - t\right|,$$

$$h(s) = \ln(1 + s^2)$$

e

$$q(t) =| 1 - 2t | +4 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) C_{16},$$

observemos que $p \in L^2(0, 1; \mathbb{R}^+)$ e $q \in L^1(0, 1; \mathbb{R}^+)$.

Por (3.81) e (3.89), resulta

$$\begin{aligned} \| \nabla F(t,x) \| &= \left| \left(\frac{1}{2} - t\right) \left[\frac{2 \| x \|^2}{1+ \| x \|^2} + \ln(1+ \| x \|^2)\right] - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) 2 \ln(1+ \| x \|^2) \frac{2 \| x \|}{1+ \| x \|^2} \right| \\ &\le \left|\frac{1}{2} - t\right| \ln(1+ \| x \|^2) + \left(| 1 - 2t | +4 \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) C_{16} \right). \end{aligned}$$

Portanto, (3.12) é satisfeita.

Como

$$-2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) \approx -1,297 < -0,055 \approx -2e^M(2 + e^{2M}) \left(\sqrt{A_1 A_2}\right)^2,$$

então, existe uma constante $\epsilon_2 > 0$ tal que

$$-2\left(e^{\frac{1}{2}} - 1\right) < -2e^M(2 + e^{2M}) \left(\sqrt{A_1 A_2} + \left(\frac{e^{t_1 - t_1^2}}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_2\right)^2 = D_1. \tag{3.94}$$

Escolhendo em (3.84) $\epsilon = \epsilon_2$, obtemos (3.13) com $a_{i1} = \epsilon_2$, $h(s) = \ln(1 + s^2)$ e $b_{i1} = C_{15}$, para todo $i \in \{1, 2\}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} \sqrt{A_5 A_6} &= \left(\frac{1}{24}\frac{2^2}{2}\sum_{i=1}^{2} a_{i1}^2 \; e^{2G(t_1)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{2} a_{i1}^2 \; e^{t_1 - t_1^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \tag{3.95}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\frac{2}{12} \ \epsilon_2^2 \ e^{t_1 - t_1^2} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\frac{e^{t_1 - t_1^2}}{6} \right)^{\frac{1}{2}} \epsilon_2 .
\end{aligned}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 e^{G(t)} F(t,x) dt = \int_0^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right) \left[\left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+ \parallel x \parallel^2) \parallel x \parallel + \right. \\
&\left. - \exp\left(\frac{t^2}{2}\right) \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2) \right] dt \\
&= \int_0^1 \exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right) \left(\frac{1}{2} - t\right) \ln(1+ \parallel x \parallel^2) \parallel x \parallel dt - \int_0^1 \exp\left(\frac{t}{2}\right) \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2) dt \\
&= \left[\exp\left(\frac{t-t^2}{2}\right) \ln(1+ \parallel x \parallel^2) \parallel x \parallel -2 \exp\left(\frac{t}{2}\right) \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2) \right]_0^1 \\
&= -2e^{\frac{1}{2}} \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2) + 2 \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2) \\
&= -2(\exp\left(\frac{1}{2}\right) - 1) \ln^2(1+ \parallel x \parallel^2).
\end{aligned}
\tag{3.96}
$$

Assim, segue de (3.91) e (3.96)

$$
\begin{aligned}
\lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{E(x)}{\ln^2(1+ \parallel x \parallel^2)} &= \lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\displaystyle\int_0^1 e^{G(t)} F(t,x) dt}{\ln^2(1+ \parallel x \parallel^2)} + \lim_{\|x\| \to +\infty} \frac{\displaystyle\sum_{i=1}^{2} e^{G(t_1)} \int_0^{x^i} I_{i1}(y) dy}{\ln^2(1+ \parallel x \parallel^2)} \\
&= -2 \left(e^{\frac{1}{2}} - 1 \right).
\end{aligned}
\tag{3.97}
$$

Combinando (3.94), (3.95) e (3.97), obtemos (3.35) com $h(s) = \ln(1 + s^2)$. Portanto, concluímos pelo Teorema 3.0.7 que o problema (3.78)-(3.79), com F dada por (3.81), tem pelo menos uma solução fraca.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] BREZIS, H.,**Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Masson, Paris, 1983.

[2] WHEEDEN, R. L. AND ZYGMUND, A., **Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis**. Pure and Applied Mathematics. Chapman and Hall/CRC; 2 edition, 2015.

[3] BAI, L. AND DAI, B., **Solvability of a class of impulsive damped vibration problems.** Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2013, 2371–2396.

[4] MALWHIN, J. AND WILLEM, M., **Critical Point and Halmitonian Systems**. Springer-Verlag, Berlim, 1989.

[5] ROYDEN, H. L. AND FITZPATRICK, P. M., **Real Analysis**. China Machine Press; 4 edition, 2010.

[6] LIMA, E. L., **Curso de Análise Real**. Volume 1, 14 ed.; Rio de Janeiro. IMPA, 2013.

[7] RENARDY M. AND ROGERS, R. C., **An introduction to partial differential equations. Texts in Applied Mathematics**. New York: Springer-Verlag; 2 edition, 2004.

[8] FIGUEIREDO, D. G., **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.

[9] DUOANDIKOETXEA, J., **Fourier Analysis**. Volume 29. American Mathematical Society. Providence, Rhode Island. 2001.

[10] BREZIS, H., **Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations**. Springer. New York. 2011.

[11] BELLMAN, R. E.,**Topics in pharmacokinetics, III Repeat dosage and impulse control**. Math. Biosci. 12, Nos. 1-2, 1983.

[12] COSTA, D. G.,**An Invitation to Variational Methods in Differential Equations**. Birkhauser Boston. New York.

[13] ZHOU J., LI. Y.,**Existence of solutions for a class of second-order Hamiltonian systems with impulsive effects**. Nonlinear Analysis TMA; 72: 1594-1603. 2010.

[14] GOLDSTINE, H.H., **A History of the Calculus of Variations from the 17th Through the 19th Century**. Springer. New York, 1980.

[15] GELFAND, I.M., **Calculus of variations**. Springer. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall, 1963.