UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

PATRICIA VILAR VITOR

Orientadora: Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2015

Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

PATRICIA VILAR VITOR

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Profª. Drª. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR
2015

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá, PR, Brasil)

Vitor, Patricia Vilar
V845p Produto tensorial não abeliano de grupos / Patricia Vilar Vitor. -- Maringá, 2015.
xiv, 88 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Irene Naomi Nakaoka.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2015.

1. Produto tensorial não abeliano. 2. Quadrado tensorial não abeliano. 3. Quadrado tensorial não abeliano - Limitantes para ordem. 4. Grupos finitos. 5. P-grupo. 6. Grupo solúvel (Teoria de grupos). 7. Homologia de grupos. I. Nakaoka, Irene Naomi, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 23.ed. 512.2
AMMA-001856

PATRICIA VILAR VITOR

PRODUTO TENSORIAL NÃO ABELIANO DE GRUPOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Irene Naomi Nakaoka
Profa. Dra. Irene Naomi Nakaoka
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Ana Cristina Vieira
Profa. Dra. Ana Cristina Vieira
Universidade Federal de Minas Gerais

Laerte Bemm
Prof. Dr. Laerte Bemm
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 03 de fevereiro de 2015.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Ao meu irmão Adriano Vitor

Ao meu noivo Walmir Ruis Salinas Junior.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela força e coragem nos momentos difíceis para que conseguisse alcançar meu sonho.

Aos meus colegas de turma, em especial ao Jonathan (Sinop), Eiji e Eralcilene, pelos momentos compartilhados, bons ou ruins, que me permitiram estar aqui hoje.

À minha professora e orientadora pela grande paciência e exemplar dedicação, fazendo parte inclusive da minha formação pessoal através de seus conselhos.

À minha família pelo carinho e incentivo, sem os quais nada disso seria possível.

Gostaria de agradecer duas pessoas incríveis. Primeiramente, meu querido irmão, Adriano Vitor, minha maior fonte de inspiração, meu maior conselheiro, meu herói, cujo exemplo carrego sempre comigo. Também agradeço aquele com quem amo dividir todos os momentos da minha vida, que luta comigo desde o início, que nunca me deixou parar de sonhar; obrigada Walmir, meu amor, minha vida.

Finalmente agradeço à UEM pelo ensino gratuito e de qualidade que me permitiu alcançar este marco na minha vida; ao CNPQ, pelo apoio financeiro e a todas as pessoas que estiveram e/ou estão comigo na caminhada, fazendo com que a vida tenha mais sentido a cada dia e a cada experiência nova.

Resumo

O objetivo desta dissertação é o estudo do produto tensorial não abeliano de grupos apresentando alguns de seus resultados importantes. Dentre esses resultados, serão abordados temas de finitude, solubilidade e nilpotência do produto tensorial não abeliano de grupos. Também serão apresentadas cotas superiores para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de algumas classes de grupos finitos. Uma construção de grupo relacionada ao produto tensorial não abeliano será definida para que possamos desenvolver grande parte deste trabalho.

Palavras-chave: Produto tensorial não abeliano, quadrado tensorial não abeliano, grupos finitos, p-grupo, grupo solúvel

Abstract

The purpose of this dissertation is study the nonabelian tensor product of groups presenting some of its most important results. Amongst these results it will be approached subjects of finiteness, solubility and nilpotency of the nonabelian tensor product of groups. Also we will present upper bounds for the order of the nonabelian tensor square of a few classes of finite groups. A group construction related to the nonabelian tensor product will be defined so we can develop most of this work.

Key-worlds: Nonabelian tensor product, nonabelian tensor square, finite groups, p-group, soluble group

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos inteiros módulo n
$X \subseteq Y$	X é um subconjunto de Y
$X \subsetneq Y$	X é um subconjunto próprio de Y
$X \times Y$	produto cartesiano de X por Y
$X \setminus Y$	$\{x \in X; x \notin Y\}$
$\|G\|$	ordem do grupo G
$\|g\|$	ordem do elemento g
$H \leq G$	H é subgrupo de G
$H < G$	H é subgrupo próprio de G
$H \lhd G$	H é subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X
G/H	grupo quociente de G por H
$< H >^G$	fecho normal de H em G
$G \simeq H$	o grupo G é isomorfo ao grupo H
$\mathrm{Sym}(G)$	grupo de permutações de G
S_n	grupo simétrico de grau n
D_{2n}	grupo diedral de ordem $2n$
Q_n	grupo dos quartérnios de ordem $4n$
$\mathrm{Aut}(G)$	grupo dos automorfismos de G
$\mathrm{Z}(G)$	$\{g \in G;\ gx = xg,\ \forall\ x \in G\}$, centro de G
$\mathrm{C}_G(x)$	$\{g \in G;\ gx = xg\}$, centralizador de x em G
$\mathrm{C}_G(H)$	$\{g \in G;\ gx = xg,\ \forall\ x \in H\}$, centralizador de H em G
$\mathrm{N}_G(H)$	$\{g \in G;\ H^g = H\}$, normalizador de H em G
$\underset{i\in I}{\mathrm{Dr}}\, H_i$	produto direto da família de grupos $\{H_i\}_{i\in I}$

$H \ltimes N$	produto semidireto de N e H
$M \otimes_A N$	produto tensorial dos módulos M e N sobre A
$G \otimes H$	produto tensorial não abelianos de grupos
$G * H$	produto livre de grupos
g^h	$h^{-1}gh$, conjugado de g por h
$[g, h]$	$g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$, comutador de g e h
G'	$[G, G]$, subgrupo derivado de G
G_{ab}	G/G', abelianizado de G
$\mathrm{Fit}(G)$	subgrupo de Fitting de G
$\mathrm{Frat}(G)$	subgrupo de Frattini de G
$\mathrm{mdc}(m, n)$	máximo divisor comum entre os inteiros m e n
$\mathbb{Z}G$	anel de grupo de G
I_G	ideal de aumento de G
$H_n(G, M)$	n-ésimo grupo de homologia de G com coeficientes em M
$\gamma_i(G)$	i-ésimo termo central da série central inferior de G
G_i	i-ésimo termo da série derivada de G
$cl(G)$	classe de nilpotência de G
$l(G)$	comprimento derivado de G

Sumário

Introdução

Sejam G e H grupos munidos com uma ação de G sobre H e de H sobre G e suponhamos que cada um age sobre si mesmo por conjugação, isto é, para $g, x \in G$ e $h, y \in H$, $g^x = x^{-1}gx$ e $h^y = y^{-1}hy$. As ações de G sobre H e de H sobre G são ditas *compatíveis* se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$\begin{array}{rcl} g^{(h^{g_1})} & = & g^{g_1^{-1}hg_1} := ((g^{g_1^{-1}})^h)^g \\ h^{(g^{h_1})} & = & h^{h_1^{-1}gh_1} := ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}. \end{array}$$

Quando dois grupos G e H atuam um sobre o outro compativelmente, define-se o *produto tensorial não abeliano* de G e H como sendo o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, sujeito às condições:

$$\begin{array}{rcl} gg_1 \otimes h & = & (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h), \\ g \otimes hh_1 & = & (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}), \end{array}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Indicaremos tal grupo por $G \otimes H$. A ação por conjugação de um grupo G sobre si mesmo verifica as condições de compatibilidade dada acima; dessa forma, o *quadrado tensorial não abeliano* $G \otimes G$ de um grupo G sempre é definido.

Um importante grupo neste trabalho é definido como segue: Sejam G e H dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^φ uma cópia de H, isomorfo por $\varphi : H \to H^\varphi$ tal que $h \mapsto h^\varphi$, para todo $h \in H$. Então, definimos o grupo

$$\eta(G, H) := \langle G, H^\varphi \mid [g, h^\varphi]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi],\ [g, h^\varphi]^{h_1^\varphi} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi],\ \forall g, g_1 \in G \,\mathrm{e}\, h, h_1 \in H\rangle.$$

Com isso queremos dizer que $\eta(G, H) = \dfrac{G * H^\varphi}{\langle R\rangle^{G * H^\varphi}}$, onde $G * H$ denota o produto livre de G

e H e

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{g_1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1},\ [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}}[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}]^{-1} \mid g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H\}.$$

Agora, quando $G = H$ e as ações são por conjugação, $\eta(G, G)$ é o grupo

$$\nu(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}},\ \forall g_1, g_2, g_3 \in G\rangle,$$

o qual foi definido por N. Rocco [26]. Neste mesmo trabalho ele prova a existência de um isomorfismo entre o subgrupo comutador $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ e o quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$.

Conforme [17], a definição do produto tensorial não abeliano de grupos como descrito acima é atribuído a R. Brown e J. L. Loday pelos trabalhos [[4], [5]]. Entretanto, algumas ideias já se encontravam no trabalho de Whitehead [34] e a essência do quadrado tensorial não abeliano de grupo aparece no trabalho [6] de K. Dennis, cuja base são as ideias de C. Miller [18].

Devido à importância topológica do produto tensorial não abeliano de grupos mostrada por Brown e Loday em [[4], [5]], este assunto vem sendo muito estudado. Grande atenção tem sido dada às propriedades gerais do produto tensorial não abeliano. Já em diversos outros trabalhos encontram-se descrições explícitas do quadrado tensorial não abeliano para grupos particulares, por exemplo, grupos nilpotentes de classe 2, grupos metacíclicos e grupos lineares. Nestas descrições, uma ferramenta frequentemente utilizada é o sistema computacional GAP - Groups, Algorithms, and Programming.

Nos parágrafos seguintes daremos um resumo dos capítulos que compõem esta dissertação.

O primeiro capítulo é dedicado aos conceitos e resultados da Teoria de Grupos e da Teoria de Módulos necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No Capítulo 2 apresentamos um estudo introdutório da homologia de grupos com um caráter algébrico. Na primeira seção definimos o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ para que possamos apresentar o conceito de ideal de aumento e, em seguida, ver alguns resultados relacionados com tal ideal. Na próxima seção, começamos construindo a chamada Resolução de Gruenberg que permite definirmos o primeiro e segundo grupos de homologia de G com coeficientes em M, sendo G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita.

Introduzimos o conceito de produto tensorial não abeliano de grupos na primeira seção do Capítulo 3, bem como alguns de seus resultados preliminares. Um breve estudo do quadrado tensorial não abeliano de grupo é feito na segunda seção. Na terceira seção definimos o grupo $\eta(G,H)$ e apresentamos diversos resultados relacionados a este grupo. Um desses resultados fornece um isomorfismo entre o subgrupo normal $[G,H^{\varphi}]$ de $\eta(G,H)$ e o produto tensorial não abeliano $G\otimes H$. A finitude do produto tensorial não abeliano de grupos finitos foi um problema muito estudado; teve início com Brown e Loday que estabeleceram a finitude do quadrado tensorial não abeliano de um grupo finito. Posteriormente, G. Ellis em [9] generalizou para o produto tensorial não abeliano de grupos finitos, fazendo uso de argumentos de homologia de grupos. Por muitos anos tentou-se demonstrar este fato utilizando apenas ferramentas da Teoria de Grupos e, em 2010, V. Z. Thomas encontrou a solução para o problema e é com esse resultado que terminamos a Seção 3. A última seção tem por objetivo fornecer uma descrição das séries central inferior e derivada de $G\otimes H$. Para tal descrição usamos o fato de que o produto tensorial não abeliano $G\otimes H$ pode ser visto como um subgrupo comutador de $\eta(G,H)$, resultado dado na Seção 3 deste capítulo.

A descoberta de limitantes para $G\otimes G$ abre portas para a determinação de diversos quadrados tensoriais não abelianos de grupo com a ajuda de computadores. Em [3] determinou-se $G\otimes G$ para todos os grupos de ordem até no máximo 30. Já em 1995 Ellis e Leonard [8] forneceram um algoritmo computacional capaz de determinar o quadrado tensorial não abeliano de alguns grupos maiores. No último capítulo dessa dissertação apresentamos alguns limitantes para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de certas classes de grupos finitos. A primeira classe de grupos estudada é a dos p-grupos finitos. O resultado que mostra o limitante para tal classe foi provado em [13] por S. H. Safari, cujo enunciado é:

Teorema 0.1. (S.H. Jafari, [13]) *Seja G um p-grupo finito d-gerado de ordem p^n com G/G' de ordem p^m e expoente p^e. Então,*

$$|G\otimes G|\leq p^{(n-e)d+m}. \tag{1}$$

Na seção seguinte a classe de grupos estudada foi a de grupos solúveis finitos, nesse sentido obtém-se:

Teorema 0.2. ([22]) *Se G é um grupo solúvel finito de comprimento derivado l, então,*

$$\begin{aligned} |G \otimes G| \quad \leq \quad & \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \prod_{i=1}^{l-1} \left(\left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right|^{2^{i-1}} \cdot \left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{G_i}\right]} I_{\left(\frac{G}{G_i}\right)}\right| \right) \\ & \cdot \prod_{i=1}^{l-2} \prod_{k=i+1}^{l-1} \left|G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_i}{G_k}\right]} I_{\left(\frac{G_i}{G_k}\right)}\right|^{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

Em seguida apresentamos o limitante que melhora o obtido no resultado anterior, quando G é um grupo solúvel de comprimento derivado 2, ou seja, um grupo metabeliano finito.

Teorema 0.3. *([22]) Seja G um grupo metabeliano finito. Então*

$$|G \otimes G| \quad \textit{divide} \quad \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \wedge G'| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{\left(G^{ab}\right)}\right|,$$

onde $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. Quando $[G', G] = 1$, temos

$$|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|.$$

Logo a seguir faremos um exemplo onde o limitante do Teorema 0.3 é atingido. Noutro exemplo, o limitante fornecido no Teorema 0.3 permite que se calcule o quadrado tensorial não abeliano de um produto semidireto de $\mathbb{Z}_p$ pelo grupo de Klein. Para finalizar nosso trabalho o seguinte isomorfismo é provado:

Teorema 0.4. *([21]) Se G é um grupo finito cujo subgrupo derivado G' é cíclico e $\mid G' \mid$ e $\mid G/G' \mid$ são relativamente primos, então*

$$G \otimes G \cong G' \times ((G/G') \otimes_{\mathbb{Z}} (G/G')).$$

Capítulo 1

Preliminares

Este primeiro capítulo tem por objetivo apresentar os conceitos e resultados da Teoria dos Grupos e da Teoria de Módulos que serão utilizados neste trabalho. Assumiremos que o leitor esteja familiarizado com aqueles conceitos e resultados que usualmente aparecem em um primeiro curso de Teoria dos Grupos e Teoria dos Anéis. Iniciaremos o texto fixando notações e terminologias.

Sejam G um grupo multiplicativo e H um subconjunto não vazio de G. Escreveremos $H \leq G$ se H for um subgrupo de G e $H \lhd G$ se H for um subgrupo normal de G. Se H for um subgrupo próprio de G, indicaremos isso por $H < G$. O elemento neutro de G e o subgrupo que contém apenas a identidade serão indicados por 1. Caso estejamos trabalhando com um grupo abeliano, onde a operação é de adição, passaremos a denotar o seu elemento neutro por 0.

Se G é um grupo e X um subconjunto não vazio de G, escreveremos $\langle X \rangle$ para denotar o subgrupo de G gerado por X e X^G para indicar o *fecho normal* de X em G, o qual é definido como sendo o menor subgrupo normal de G contendo X. Outro subgrupo importante de G é o chamado *centro* de G indicado por $Z(G)$.

Se $\varphi : X \to Y$ é uma aplicação do conjunto X no conjunto Y, escreveremos $(x)\varphi$ para a imagem do elemento x de X por φ, ou seja, as funções serão aplicadas à direita. Se A é um subconjunto não vazio de X, então, $(A)\varphi = \{(a)\varphi \mid a \in A\}$.

Um homomorfismo injetor é chamado de *monomorfismo*, um homomorfismo sobrejetor de *epimorfismo* e um isomorfismo de um grupo G nele mesmo de *automorfismo* de G.

Muitos resultados deste capítulo terão suas demonstrações omitidas, porém teremos o cuidado de fornecer sempre uma referência, onde tais provas podem ser encontradas pelo leitor.

Sejam G um grupo e g e h elementos desse grupo. O *conjugado* de g por h é definido como sendo o elemento $g^h := h^{-1}gh$ e o *comutador* de g e h (nesta ordem) é o elemento $[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$. Sejam $g_1, g_2, \cdots, g_n \in G$. Definimos, recursivamente, o *comutador simples de peso* $n \geq 2$ por

$$[g_1, \ldots, g_n] := [[g_1, \ldots, g_{n-1}], g_n] \quad \text{e} \quad [g_1] := g_1.$$

Usaremos, também, a notação $[g,_n h]$ para indicar $[g, \underbrace{h, \cdots, h}_{n}]$. A seguir, listaremos algumas propriedades básicas de comutadores.

Proposição 1.1. ([23], pág. 123) *Para x, y e z elementos de um grupo, valem:*

(i) $[x,y] = [y,x]^{-1}$;

(ii) $[xy, z] = [x,z]^y[y,z]$ *e* $[x, yz] = [x,z][x,y]^z$;

(iii) $[x, y^{-1}] = ([x,y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1}, y] = ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$;

(iv) *(Identidade de Hall-Witt)* $[x, y^{-1}, z]^y[y, z^{-1}, x]^z[z, x^{-1}, y]^x = 1$.

Sejam $X_1, X_2, \ldots, X_n$ subconjuntos não vazios de um grupo G. Definimos o *subgrupo comutador* de X_1 e X_2 por $[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1 \text{ e } x_2 \in X_2 \rangle$. Em geral, para $n \geq 2$, $[X_1, \ldots, X_n] = [[X_1, \ldots, X_{n-1}], X_n]$. Reparemos que $[X_1, X_2] = [X_2, X_1]$, pelo item *(i)* da proposição anterior. É usual escrevermos $[X,_n Y]$ para o subgrupo $[X, \underbrace{Y, \ldots, Y}_{n}]$. Além disso, definamos X^Y por $X^Y = \langle x^y \mid x \in X \text{ e } y \in Y \rangle$. Agora, listaremos propriedades de subgrupos comutadores que serão usadas com frequência neste trabalho.

Proposição 1.2. ([23], pág. 124) *Sejam G um grupo, H, K subgrupos de G e X, Y subconjuntos de G. Então,*

(i) $[H,K] \lhd \langle H, K \rangle$;

(ii) *Se* $K = \langle Y \rangle$, *então* $[X,K] = [X,Y]^K$;

(iii) *Se* $H = \langle X \rangle$ *e* $K = \langle Y \rangle$, *então* $[H,K] = [X,Y]^{HK}$.

O conjunto de todos os automorfismos de um grupo G possui uma estrutura de grupo com a operação de composição de funções. A este grupo dá-se o nome de *grupo de automorfismos* de G que será indicado por $Aut(G)$. Se H é um subgrupo de G, dizemos que ele é um *subgrupo característico* de G, e denotamos isso por H *char* G, se $(H)\varphi \leq H$, para todo $\varphi \in Aut(G)$.

Proposição 1.3. ([28], pág. 104 e [25], pág. 12)

(a) Sejam H e K subgrupos de um grupo G com $H \leq K$. Então,

(i) Se H char G, então H é normal em G;

(ii) Se H char K e K char G, então H char G;

(iii) Se H char K e $K \lhd G$, então H é normal em G;

(b) Se H e K são subgrupos característicos de G, então $[H, K]$ é um subgrupo característico de G.

Definição 1.4. Um grupo G é dito *solúvel* se existe uma série

$$1 = G^{(0)} \lhd G^{(1)} \lhd \cdots \lhd G^{(n)} = G$$

tal que cada subgrupo $G^{(i)}$ é normal em $G^{(i+1)}$ e o grupo quociente $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ é abeliano, para todo $i = 0, \ldots, n-1$. Uma série de subgrupos de G com esta propriedade chama-se *série abeliana* de G. Se G é um grupo solúvel, o comprimento da menor série abeliana de G é chamado *comprimento derivado* de G. Dessa forma, G tem comprimento derivado 0 se, e somente se, possui ordem 1. Já os grupos solúveis com comprimento derivado igual a 1 são os grupos abelianos não triviais. O grupo solúvel com comprimento derivado 2 é dito ser *metabeliano*.

Exemplo 1.5. *1)* O grupo simétrico S_3 é solúvel pois $1 \lhd A_3 \lhd S_3$ é uma série abeliana de S_3 e seu comprimento derivado é 2 já que S_3 não é abeliano.

Seja G um grupo. O subgrupo comutador $[G, G]$ é denotado por G' e o chamamos de *subgrupo derivado* de G. O grupo quociente G/G' é o maior grupo quociente abeliano de G. A este grupo de fundamental importância dá-se o nome de *abelianizado* de G, cuja notação é G^{ab}.

Para todo inteiro $n \geq 0$, definamos

$$G_0 = G,\ G_1 = [G, G] \text{ e para todo } i \geq 1, G_i = [G_{i-1}, G_{i-1}].$$

É fácil ver que G_i *char* G e G_{i-1}/G_i é abeliano, para todo $i \geq 1$. A série de subgrupos

$$G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_i \geq \ldots$$

é chamada de *série derivada de* G. Se existe um inteiro positivo k tal que $G_{k-1} \neq G_k = 1$, então o grupo é solúvel de comprimento derivado k (Veja [23], pág. 124). Caso G seja solúvel, indicaremos o seu comprimento derivado por $l(G)$.

Definição 1.6. Dizemos que um grupo G é *nilpotente* se possui uma *série central*, isto é, uma série normal

$$1 = G^{(0)} \lhd G^{(1)} \lhd \cdots \lhd G^{(n)} = G$$

tal que o quociente grupo $G^{(i+1)}/G^{(i)}$ está contido no centro de $G/G^{(i)}$, para todo $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Se G é um grupo nilpotente, o comprimento da menor série central de G é chamado *classe de nilpotência* de G. Um grupo nilpotente de classe 0 tem ordem 1, enquanto os grupos de classe 1 são os grupos abelianos não triviais. Da definição, podemos ver que todo grupo nilpotente é solúvel. Porém, um exemplo de um grupo solúvel mas não nilpotente é o grupo simétrico S_3, uma vez que seu centro é trivial.

A seguir estão listadas algumas propriedades básicas dos grupos nilpotentes:

Proposição 1.7. ([23], pág. 122 e 130)

1) Seja G um grupo nilpotente de classe c. Então, todo subgrupo e grupo quociente de G são nilpotentes e suas classes de nilpotência são no máximo c;

2) Um produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente;

3) Todo p-grupo finito é nilpotente;

4) Um grupo finito G é nilpotente se, e somente se, ele é o produto direto de seus subgrupos de Sylow.

A seguir, construiremos uma nova série que auxiliará no estudo de grupos nilpotentes. Indutivamente, definimos os seguintes subgrupos de um dado grupo G :

$$\gamma_1(G) = G,\ \gamma_2(G) = [G, G] = G' \text{ e } \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G],\ \text{para todo } n \geq 2.$$

Cada subgrupo definido acima é característico em G; logo, é normal em G. Além disso, se $K \lhd G$ e $K \leq H \leq G$, então $[H, G] \leq K$ se, e somente se, $H/K \leq \mathrm{Z}(G/K)$. Dessa forma, $[\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$ implica que $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq \mathrm{Z}(G/\gamma_{n+1}(G))$, para todo $n \geq 1$. Portanto, a série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

é uma série central em G, que chamaremos de *série central inferior* de G.

Observemos que a série central inferior pode não alcançar o subgrupo 1.

Proposição 1.8. ([23], pág. 125) *Seja* $1 = G^{(0)} \lhd G^{(1)} \lhd \cdots \lhd G^{(n)} = G$ *uma série central de um grupo nilpotente* G*. Então,*

(i) $\gamma_i(G) \leq G^{(n-i+1)}$ *e, assim,* $\gamma_{n+1}(G) = 1$*;*

(ii) A classe de nilpotência de G *é o menor inteiro* n *tal que* $\gamma_{n+1}(G) = 1$.

Mais algumas propriedades referentes a grupos nilpotentes seguem abaixo:

Proposição 1.9. ([28], pág. 116-117 e [23], pág. 129-130) *Seja* G *um grupo nilpotente. Então,*

1) Todo subgrupo maximal de G *é normal em* G*;*

2) O grupo G *satisfaz a condição normalizadora, isto é, se* $H < G$*, então* $H < \mathrm{N}_G(H)$*;*

3) Se $1 \neq N \lhd G$*, então* $N \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$*;*

4) Todo subgrupo normal minimal de G *está contido no centro de* G*.*

1.1 Apresentação de Grupo

Nesta seção iremos introduzir o conceito de grupo livre, bem como a definição e alguns resultados de apresentação de um grupo, os quais serão fundamentais para o desenvolvimento de todo nosso trabalho.

Definição 1.10. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \to G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \to G$ tal que $(x)\theta' = (x)\theta$, para todo $x \in X$. Dizer que a igualdade $(x)\theta' = (x)\theta$ ocorre, para todo $x \in X$ é equivalente a dizer que θ' estende θ, ou ainda que o diagrama abaixo comuta, onde $i : X \to F$ denota a aplicação inclusão de X em F,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\theta"'] & F \arrow[dl, dashed, "\theta'"] \\ G & \end{tikzcd} \qquad ,$$

ou seja, $i\theta' = \theta$.

Substituindo a palavra "grupo" por "grupo abeliano" na definição acima em todos os lugares em que ela aparece, obtemos o conceito de *grupo abeliano livre*.

Se F é livre sobre um conjunto X, então F é gerado por X. Podemos definir o *posto* de um grupo livre sobre um conjunto X como sendo a cardinalidade de X, em vista que, dados dois grupos livres F_1 e F_2 sobre os conjuntos X_1 e X_2, respectivamente, então, F_1 e F_2 são isomorfos se, e somente se, os conjuntos X_1 e X_2 possuem a mesma cardinalidade (Veja [15] pág. 3).

O teorema abaixo responde se um subgrupo de um grupo livre é também livre.

Teorema 1.11. (Nielsen-Schreier, cf. [15], pág. 22-23) *Todo subgrupo de um grupo livre é livre. Além disso, se F é um grupo livre de posto finito r e H um subgrupo de F de índice finito g, então o posto de H é igual a $(r-1)g+1$.*

Proposição 1.12. ([15], pág. 7) *Todo grupo é imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Sejam G um grupo e $\phi : F \to G$ um epimorfismo de um grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Então, $G \cong F/N$ onde N denota o núcleo de ϕ. Agora, seja R um subconjunto de F que gera N como um subgrupo normal de F, ou seja, $\langle R \rangle^F = N$. Reparemos que X e R determinam o grupo G a menos de isomorfismos. Assim, escrevemos $G = \langle X \mid R \rangle$ e chamamos este par uma *apresentação livre* do grupo G; em muitas situações, diremos apenas uma apresentação de G. Se X e R são finitos, onde $G = \langle X \mid R \rangle$ é uma apresentação de G, então diremos que G é *finitamente apresentado*. Os elementos do conjunto X são chamados de *geradores* e os de R *relatores*. É comum escrevermos $G = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = 1, \ldots, r_m = 1 \rangle$, quando $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \ldots, r_m\}$. Neste caso, chamamos $r_i = 1,\ 1 \leq i \leq m$, de *relações definidoras* para G.

Exemplo 1.13. *1)* O grupo diedral de ordem $2n$, D_{2n}, possui apresentação

$$D_{2n} \cong \langle x, y \mid x^2 = 1,\ y^n = 1,\ y^x = y^{-1} \rangle.$$

2) O grupo dos quatérnios de ordem 8, Q_8, tem uma apresentação dada por

$$Q_8 \cong \langle x, y \mid x^4 = 1,\ x^2 = y^2,\ x^y = x^{-1} \rangle.$$

Proposição 1.14. ([15], pág. 27) *Se G, H, K são grupos, $\alpha : G \to H$ um epimorfismo e $\beta : G \to K$ um homomorfismo tais que $Nuc(\alpha) \subseteq Nuc(\beta)$, então existe um homomorfismo $\gamma : H \to K$ tal que $\alpha\gamma = \beta$.*

$$\begin{tikzcd}
Nuc(\beta) \arrow[dr, hook] & & H \arrow[dd, "\gamma"] \\
& G \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\beta"] & \\
Nuc(\alpha) \arrow[uu, hook] \arrow[ur, hook] & & K
\end{tikzcd}$$

O resultado que apresentaremos a seguir é conhecido como *Teste da Substituição*. É um resultado de grande importância em Teoria dos Grupos pois, se $G = \langle X \mid R \rangle$ e H são grupos, ele fornece uma condição para que uma aplicação $\theta : X \to H$ se estenda para um homomorfismo $\theta' : G \to H$.

Teorema 1.15. ([15], pág. 29) *Sejam G um grupo com apresentação $\langle X \mid R \rangle$, H um grupo e $\theta : X \to H$ um aplicação. Então, θ se estende a um homomorfismo $\theta' : G \to H$ se, e* *somente se, θ é consistente com todas as relações definidoras para G, i.é, se para todo $x \in X$ e todo $r \in R$, o resultado da substituição de x por $(x)\theta$ em R dá a identidade de H.*

Se conhecermos as apresentações para os grupos, digamos G e H, então é sabido a apresentação para o produto direto $G \times H$, conforme resultado a seguir.

Proposição 1.16. *([15]), pág. 45) Dados dois grupos G e H, cujas apresentações são $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle Y \mid S \rangle$, respectivamente, então o produto direto $G \times H$ possui a seguinte apresentação $\langle X, Y \mid R,\ S,\ [X, Y] \rangle$, onde aqui $[X, Y]$ denota o conjunto dos comutadores $\{x^{-1}y^{-1}xy \mid x \in X \text{ e } y \in Y\}$.*

Definição 1.17. Sejam $G = \langle X \mid R \rangle$ e $H = \langle Y \mid S \rangle$ duas apresentações. O grupo $\langle X, Y \mid R, S \rangle$ é chamado *produto livre* de G e H e denotado por $G * H$.

O subgrupo comutador $[G, H]$ do produto livre $G * H$ tem a seguinte propriedade:

Proposição 1.18. *([23], pág. 167) Seja $G * H$ o produto livre de dois grupos não triviais. Então, o subgrupo comutador $[G, H]$ de $G * H$ é normal. Além disso, $[G, H]$ é um grupo livre sobre o conjunto $X = \{[g, h] \mid g \in G,\ h \in H,\ g, h \neq 1\}$.*

1.2 Módulos

Uma generalização da noção de espaço vetorial é a noção de A-módulo, onde A é um anel. Observemos que neste trabalho todos os anéis serão com identidade, além disso, nesta seção, A sempre denotará um anel.

Dados um anel A e um grupo abeliano M, uma aplicação $f : M \times A \to M$ é chamada *multiplicação por escalar à direita*. Se $a \in A$ e $m \in M$, é comum denotar $(m, a)f$ simplesmente por $m \cdot a$.

Definição 1.19. Seja A um anel. Um *A-módulo à direita* é um grupo abeliano junto com uma multiplicação por escalar à direita $f : M \times A \to M$ que satisfaz as seguintes condições:

(i) $m \cdot (a + b) = m \cdot a + m \cdot b$

(ii) $(m+n)\cdot a = m\cdot a + n\cdot a$

(iii) $m\cdot(ab) = (m\cdot a)\cdot b$

(iv) $m\cdot 1_A = m$,

para todos $a, b \in A$ e $m, n \in M$.

A-módulos à esquerda são definidos simetricamentes. Em muitas situações, escreveremos M_A (respectivamente, ${}_AM$) para dizer que M é um A-módulo à direita (respectivamente, à esquerda).

Observamos que, em muitas situações, dada uma multiplicação por escalar à direita (à esquerda) escreveremos simplesmente ma (am) ao invés de $m\cdot a$ ($a\cdot m$).

Exemplo 1.20. 1) Todo anel A é um A-módulo à direita (e à esquerda) com a multiplicação por escalar definida pela multiplicação de A.

2) Todo grupo abeliano $(G,+)$ é um $\mathbb{Z}$-módulo à direita (e à esquerda) com a multiplicação por escalar definida da seguinte forma: $gn = \begin{cases} \underbrace{g+\ldots+g}_{\text{n vezes}}, & se \quad n>0 \\ 0 & se \quad n=0 \\ \underbrace{(-g)+\ldots+(-g)}_{\text{-n vezes}} & se \quad n<0. \end{cases}$

Observamos que se A é um anel comutativo e M é um A-módulo à direita, então M pode ser visto também como um A-módulo à esquerda definindo $am = ma$, para todos $a \in A$ e $m \in M$.

Neste capítulo, a palavra "A-módulo" significará "A-módulo à direita" e todas as definições e resultados envolvendo A-módulos podem ser adaptadas para A-módulos à esquerda.

Definição 1.21. Seja M um A-módulo. Um subconjunto N de M é um *submódulo* de M se N é não vazio e satisfaz as seguintes condições:

(i) $m+n \in N$

(ii) $na \in N$

para todos $m, n \in N$ e $a \in A$.

Exemplo 1.22. 1) Se A é um anel, visto como A-módulo, então os A-submódulos de A são os ideais à direita.

2) Se $(G, +)$ é um grupo abeliano, visto como $\mathbb{Z}$-módulo, então os $\mathbb{Z}$-submódulos de G são os subgrupos de G.

3) Sejam M um A-módulo e $X \subseteq M$ um subconjunto não vazio. Denotaremos por $\langle X \rangle$ ou por XA a interseção de todos os submódulos de M que contém X. Então, $\langle X \rangle$ é um submódulo de M que contém X chamado *submódulo gerado* por X. Não é difícil mostrar que $\langle X \rangle = \left\{ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i a_i \mid n \in \mathbb{N}^*,\ x_i \in X \text{ e } a_i \in A,\ i = 1, \ldots, n \right\}$.

Se N é um submódulo de um A-módulo M, em particular, N é um subgrupo de M e

$$\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$$

é um grupo abeliano. Definindo uma multiplicação por escalar em M/N por elementos de A da seguinte forma:

$$(m + N)a = ma + N,\ \forall m \in M \text{ e } \forall a \in A,$$

temos que esta aplicação independe da escolha do representante da classe. De fato,

$$m + N = m' + N \Rightarrow m - m' \in N \Rightarrow (m - m')a \in N \Rightarrow ma + N = m'a + N.$$

É fácil verificar que $(M/N, +)$ com a multiplicação por escalar definida acima é um A-módulo, chamado *módulo quociente de M por N*.

Definição 1.23. Sejam M e N A-módulos. Um A-*homomorfismo* de M em N é uma aplicação $f : M \to N$ tal que

(i) $(m + n)f = (m)f + (n)f$

(ii) $(ma)f = (m)fa$

para todos $m, n \in M$ e $a \in A$.

Neste texto, A-homomorfismos também serão chamados de homomorfismos de A-módulos. Observemos que se A for o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$, então um $\mathbb{Z}$-homomorfismo é um homomorfismo de grupos abelianos.

Exemplo 1.24. Seja N um submódulo de um A-módulo M. A aplicação $\pi : M \to M/N$ dada por $m \mapsto m+N$ é um A-homomorfismo sobrejetor chamado *A-homomorfismo canônico de M em M/N.*

Sejam M e N A-módulos. Dizemos que $f : M \to N$ é um *A-isomorfismo* se f é um A-homomorfismo bijetor. Neste caso, M e N são ditos *A-isomorfos*, denotado por $M \cong N$.

Seja $f : M \to N$ um homomorfismo de A-módulos. Definimos o *núcleo de f* e a *imagem de f*, respectivamente, por

$$Nuc(f) := \{m \in M \mid (m)f = 0\} \;\; e \;\; Im(f) := \{(m)f \mid m \in M\}.$$

É fácil verificar que o núcleo e a imagem de f são submódulos de M e N, respectivamente. Além disso, um A-homomorfismo f é injetor se, e somente se, $Nuc(f) = \{0_M\}$.

Proposição 1.25. *Se $f : M \to N$ é um homomorfismo de A-módulos e K um submódulo de M tal que $K \subseteq Nuc(f)$, então f induz um A-homomorfismo $\widetilde{f} : \dfrac{M}{K} \to N$ definido por $(m+K)\widetilde{f} = (m)f$, para todo $m \in M$.*

Demonstração. Temos que a aplicação $\widetilde{f} : \dfrac{M}{K} \to N$ definida pot $(m+K)\widetilde{f} = (m)f$, para todo $m \in M$ está bem definida, pois

$$\begin{aligned} m_1 + K = m_2 + K \;\; &\Rightarrow \;\; m_1 - m_2 \in K \subseteq Nuc(f) \Rightarrow (m_1 - m_2)f = 0 \Rightarrow (m_1)f = (m_2)f \\ &\Rightarrow \;\; (m_1 + K)\widetilde{f} = (m_2 + K)\widetilde{f}. \end{aligned}$$

Além disso, facilmente verifica-se que $\widetilde{f}$ é um A-homomorfismo.

□

1.2.1 Somas Diretas e Módulos Livres

Nesta seção definiremos soma direta interna, soma direta externa de módulos e módulo livre.

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A-módulos, indexada pelo conjunto I. Denotemos por $\prod_{i \in I} M_i$ o conjunto de todas as aplicações $f : I \to \bigcup_{i \in I} M_i$ tais que $(i)f \in M_i$, para todo

$i \in I$. Dado $x \in \Pi_{i \in I} M_i$, escrevemos $x_i = (i)x$ para todo $i \in I$ e chamaremos x_i de *i-ésima componente de* x. Quando $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ escreveremos x na forma $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Notemos que dois elementos x e y do produto de $\Pi_{i \in I} M_i$ são iguais se, e somente se, a i-ésima componente de x é igual a i-ésima componente de y, para todo $i \in I$.

Definimos as operações de adição e multiplicação por escalar em $\Pi_{i \in I} M_i$ da seguinte forma: se $x, y \in \Pi_{i \in I} M_i$ e $a \in A$, então

$$\begin{array}{rcll} x + y : \ I & \to & \bigcup_{i \in I} M_i \\ i & \mapsto & x_i + y_i \end{array} \qquad \text{e} \qquad \begin{array}{rcll} xa : \ I & \to & \bigcup_{i \in I} M_i \\ i & \mapsto & x_i a, \end{array}$$

ou seja, $(x + y)_i = x_i + y_i$ e $(xa)_i = x_i a$, para todo $i \in I$.

O conjunto $\Pi_{i \in I} M_i$ munido das operações acima é um A-módulo, chamado *produto direto da família* $\{M_i\}_{i \in I}$.

Seja $\dot{\bigoplus}_{i \in I} M_i$ o subconjunto de $\Pi_{i \in I} M_i$ constituído de todos os elementos x tais que o conjunto $\{i \in I \mid x_i \neq 0\}$ é finito. É fácil verificar que $\dot{\bigoplus}_{i \in I} M_i$ é um A-submódulo de $\Pi_{i \in I} M_i$, chamado *soma direta externa da família* $\{M_i\}_{i \in I}$. Notemos que, quando I é finito, vale a igualdade abaixo:

$$\prod_{i \in I} M_i = \dot{\bigoplus_{i \in I}} M_i.$$

Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família não vazia de submódulos de um A-módulo M. Então,

$$\sum_{i \in I} M_i = \left\{ \sum_{k=1}^{n} m_{i_k} \mid n \in \mathbb{N}^*, \ i_k \in I, m_{i_k} \in M_{i_k}, \forall k \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

é um submódulo de M, chamado de *soma dos submódulos* M_i, $i \in I$.

Um A-módulo M é a *soma direta interna* de uma família $\{M_i\}_{i \in I}$ de submódulos se todo elemento de M se escreve, de forma única, como soma de elementos dos submódulos M_i. Porém, existem outras caracterizações para tal conceito, como veremos a seguir.

Proposição 1.26. ([27], pág. 34-37) *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de submódulos de um A-módulo M. As seguintes condições são equivalentes:*

(i) Cada elemento $m \in M$ se escreve de modo único na forma $m = \sum_{i \in I} m_i$, onde $m_i \in M_i$, para todo $i \in I$ e $\{i \in I \mid m_i \neq 0\}$ é finito;

(ii) $M = \sum_{i \in I} M_i$ *e se* $\sum_{i \in I} m_i = 0$, *com* $m_i \in M_i$ *para todo* $i \in I$, *então* $m_i = 0$, *para todo* $i \in I$;

(iii) $M = \sum_{i \in I} M_i$ *e, para todo* $k \in I$, *temos* $M_k \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq k}} M_i \right) = \{0\}$.

Com isso, temos a seguinte definição: seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de submódulos de um A-módulo M. Diremos que M é a *soma direta interna* dessa família quando alguma condição da proposição acima é satisfeita. Neste caso, escreveremos $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

Um importante tipo de módulo que utilizaremos no Capítulo 2 será definido abaixo. Para apresentar tal definição vejamos a seguir o conceito de base para um A-módulo.

Definição 1.27. Sejam M um A-módulo e $\{x_i\}_{i \in I}$ uma família de elementos de M. Dizemos que $\{x_i\}_{i \in I}$ é uma *base* para M se cada elemento x de M se escreve de forma única como $\sum_{i \in I} x_i a_i$, onde cada a_i é um elemento de A e $a_i = 0$, exceto para um número finito de elementos $i \in I$.

É fácil verificar que X é uma base para um A-módulo M, se X satisfaz as seguintes duas condições:

(i) X gera M;

(ii) se $y_1, \ldots, y_k \in X$ e $a_1, \ldots, a_k \in A$ são tais que $\sum_{i \in I} y_i a_i = 0$, então $a_i = 0$, para todo i.

Definição 1.28. Um A-módulo M é dito ser um *A-módulo livre* se ele possui uma base.

Exemplo 1.29. 1) Todo espaço vetorial sobre um corpo K é um K-módulo livre.

2) Consideremos A um anel e $S = 1$. Então, A é um A-módulo livre sobre S. E mais, todo conjunto de A_A com mais de um elemento não pode ser base para A_A. Por exemplo, suponhamos que $X \subseteq A$ tenha mais de um elemento. Então, dados $a_1, a_2 \in X$, temos que $a_2 a_1 + (-a_1) a_2 = 0$ e $-a_1, a_2$ são elementos de A não ambos nulos.

Um A-módulo livre pode ser identificado com uma soma direta. Veja o resultado abaixo:

Proposição 1.30. ([30], pág. 22-23) *Se* M *é um* A*-módulo livre sobre* X, *então* $M = \bigoplus_{x \in X} xA$.

Da definição de soma direta, segue que vale a recíproca do resultado anterior, ou seja, se M é um A-módulo e X um subconjunto de M tal que $M = \bigoplus_{x \in X} xA$, então M é um A-módulo livre sobre X.

A seguir veremos uma outra caracterização de módulos livres.

Proposição 1.31. ([30], pág. 23 e [11], pág. 158) *Sejam M um A-módulo e X um subconjunto não vazio de M. Então, M é um A-módulo livre sobre X se, e somente se, para todo A-módulo N e toda função $f : X \to N$ sempre é possível estender f a um único A-homomorfismo $\widetilde{f} : M \to N$, ou seja, existe um único A-homomorfismo $\widetilde{f} : M \to N$ que, quando restringido a X, coincide com f.*

1.2.2 Produto Tensorial de Módulos

Nesta subseção veremos o conceito de produto tensorial de módulos e alguns resultados que serão importantes neste trabalho. Para mais detalhes veja [29].

Sejam A um anel, M_A um A-módulo à direita, ${}_AN$ um A-módulo à esquerda e G um grupo abeliano (aditivo). Diremos que uma aplicação $f : M \times N \to G$ é A-*biaditiva* se, para todos $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ e $a \in A$, tivermos

$$\begin{aligned} (m + m', n)f &= (m, n)f + (m', n)f, \\ (m, n + n')f &= (m, n)f + (m, n')f, \\ (ma, n)f &= (m, an)f. \end{aligned}$$

Caso A seja um anel comutativo e M, N e S A-módulos, então uma função $f : M \times N \to S$ é dita ser A-*bilinear* se f for A-biaditiva e satisfazer a seguinte condição:

$$(ma, n)f = (m, an)f = a(m, n)f.$$

Reparemos que, como neste caso, $(m, n)f$ pertence a um A-módulo, $a(m, n)f$ faz sentido.

Observemos que, se $f : M \times N \to G$ é uma aplicação A-biaditiva, então

$$(0_M, n)f = (0_M + 0_M, n)f = (0_M, n)f + (0_M, n)f,$$

para todos $m \in M$ e $n \in N$; logo $(0_M, n)f = 0_G$. Analogamente, mostra-se que $(m, 0_N)f = 0_G$, assim $(0_M, n)f = (m, 0_N)f = 0_G$. Outra propriedade básica é

$$(-m, n)f = (m, -n)f = -(m, n)f,$$

pois $(m, -n)f + (m, n)f = (m, -n + n)f = (m, 0_N)f = 0_G$, para todos $m \in M$ e $n \in N$. De forma análoga, verifica-se a outra igualdade.

Exemplo 1.32. *1)* Seja A é um anel, é fácil ver que a aplicação $f : A \times A \to A$ definida por $(a, a') \mapsto aa'$ é A-biaditiva.

2) Sejam A um anel comutativo, M e N A-módulos. Então,

$$Hom_A(M, N) = \{f : M \to N \mid f \text{ é } A\text{-homomorfismo}\}$$

é um grupo abeliano com a operação dada por: se $f, g \in Hom_A(M, N)$, $f + g$ é a aplicação de M em N definida por $(m)(f + g) = (m)f + (m)g$. Definindo a multiplicação por escalar,

$$\begin{array}{ccccc} A \times Hom_A(M, N) & \longrightarrow & Hom_A(M, N) & & \\ (a, f) & \longmapsto & af: & M & \longrightarrow N \\ & & & m & \longmapsto (am)f \end{array}$$

não é difícil ver que $Hom_A(M, N)$ é um A-módulo. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : M \times Hom_A(M, N) & \to & N \\ (m, f) & \mapsto & (m)f \end{array}$$

é A-bilinear. De fato, a primeira e a terceira condições da definição de aplicação A-biaditiva são verdadeiras, já que f é um A-homomorfismo. A segunda é satisfeita pela definição da soma de funções.

Definição 1.33. Sejam A um anel, M_A e ${}_AN$ módulos. O *produto tensorial* de M e N é um par (T, h) onde T é um grupo abeliano e $h : M \times N \to T$ é uma aplicação A-biaditiva tal que, para todo grupo abeliano G e toda aplicação A-biaditiva $f : M \times N \to G$, existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\widetilde{f} : T \to G$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & T \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

.

O resultado que garantirá que sempre existe o produto tensorial entre dois módulos sobre um dado anel segue abaixo:

Teorema 1.34. ([29], pág. 71-72) *Se A é um anel, M_A e ${}_AN$ módulos, então o produto tensorial de M e N existe e é único, a menos de isomorfismos.*

Dados M_A e ${}_AN$ módulos, se (T, h) é o produto tensorial de M e N, o grupo abeliano T é denotado por $M \otimes_A N$ e, dado $(m, n) \in M \times N$, escrevemos $(m, n)h = m \otimes n$, Como h é A-biaditiva, valem as relações:

$$\begin{aligned} m \otimes (n + n') &= (m \otimes n) + (m \otimes n'); \\ (m + m') \otimes n &= (m \otimes n) + (m' \otimes n); \\ ma \otimes n &= m \otimes an, \end{aligned}$$

para todos $a \in A, m, m' \in M$ e $n, n' \in N$.

Se $f : M_A \to M'_A$ e $g :_A N \to_A N'$ são A-homomorfismos de A'-módulos à direita e à esquerda, respectivamente, então existe um único $\mathbb{Z}$-homomorfismo de $M \otimes_A N$ em $M' \otimes_A N'$, denotado por $f \otimes g$ tal que $f \otimes g : m \otimes n \mapsto (m)f \otimes (n)g$. Para demostrarmos a existência de tal $\mathbb{Z}$-homomorfismo, definamos a aplicação $\varphi : M \times N \to M' \otimes_A N'$ por $(m, n)\varphi = (m)f \otimes (n)g$. Claramente φ é A-biaditiva, já que f e g são A-homomorfismos. Assim, pela definição de produto tensorial, existe um único homomorfismo $f \otimes g : M \otimes_A N \to M' \otimes_A N'$ de forma que $m \otimes n \mapsto (m)f \otimes (n)g$.

A seguir apresentaremos algumas propriedades de produtos tensoriais de A-módulos.

Propriedades 1.35. *(a)* ([14], pág. 130-131) *Sejam M, P A-módulos à direita e N, Q A-módulos à esquerda. Então,*

(i) $M \otimes_A A \cong M$ *e* $A \otimes_A N \cong N$;

(iii) $M \otimes (N \oplus Q) \cong (M \otimes N) \oplus (M \otimes Q)$ *e* $(M \oplus P) \otimes N \cong (M \otimes N) \oplus (P \otimes N)$.

(b) ([29], pág. 79) *Se A é um anel comutativo, M e N A-módulos, então*

$$M \otimes_A N \cong N \otimes_A M.$$

(c) Se m e n são números inteiros positivos, então $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, onde $d = mdc(m, n)$.

Demonstração. (c) Consideremos a aplicação $h : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_d$ definida por $([x]_m, [y]_n)f = [xy]_d$, onde para $z, l \in \mathbb{Z}$ estamos indicando por $[z]_l$ a classe do inteiro z módulo l. Essa aplicação está bem definida. De fato,

$$\begin{aligned} ([x]_m, [y]_n) = ([x_1]_m, [y_1]_n) \ &\Rightarrow \ m|(x - x_1) \ \text{ e } \ n|(y - y_1) \ \Rightarrow \ d|(x - x_1) \ \text{ e } \ d|(y - y_1) \\ &\Rightarrow \ d|(x - x_1)y \ \text{ e } \ d|(y - y_1)x_1 \ \Rightarrow \ d|(xy - x_1y_1) \\ &\Rightarrow \ [xy]_d = [x_1y_1]_d. \end{aligned}$$

Facilmente mostra-se que h é $\mathbb{Z}$-bilinear. Agora, sejam G um grupo abeliano e $f : \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \to G$ uma aplicação $\mathbb{Z}$-bilinear.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \arrow[r, "h"] \arrow[d, "f"'] & \mathbb{Z}_d \arrow[dl, dashed, "\widetilde{f}"] \\ G & \end{tikzcd}$$

Definimos $\widetilde{f} : \mathbb{Z}_d \to G$ por $([z]_d)\widetilde{f} = ([1]_m, [z]_n)f$. Claramente, $\widetilde{f}$ é um $\mathbb{Z}$-homomorfismo e, além disso, o diagrama acima comuta, pois

$$([x]_m, [y]_n)h\widetilde{f} = ([xy]_d)\widetilde{f} = ([1]_m, [xy]_n)f = ([1]_m, x[y]_n)f = x([1]_m, [y]_n)f = ([x]_m, [y]_n)f.$$

Finalmente, é fácil verificar que se existe outro $\mathbb{Z}$-homomorfismo $\widetilde{g} : \mathbb{Z}_d \to G$ satisfazendo a igualdade $h\widetilde{g} = f$, então $\widetilde{g} = \widetilde{f}$. Portanto, para todos inteiros positivos m e n vale que $\mathbb{Z}_m \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$, onde $d = mdc(m, n)$. □

1.2.3 Sequências Exatas

Sejam $\{\ldots, G_{n-1}, G_n, G_{n+1}, \ldots\}$ uma família de grupos e $\{\ldots, h_n : G_{n-1} \to G_n, h_{n+1} : G_n \to G_{n+1}, \ldots\}$ uma família de homomorfismos de grupos. O diagrama

$$\cdots \xrightarrow{h_{n-1}} G_{n-1} \xrightarrow{h_n} G_n \xrightarrow{h_{n+1}} G_{n+1} \xrightarrow{h_{n+2}} \cdots \tag{1.1}$$

é dito ser uma *sequência exata* em G_n se $Im(h_n) = Nuc(h_{n+1})$. A sequência (1.1) é *exata* se for exata em todos os grupos G_n (exceto, eventualmente, nas extremidades).

De modo análogo definimos sequência exata de A-módulos à direita (à esquerda) considerando cada G_i como um A-módulo à direita (à esquerda) e cada h_i como um A-homomorfimo.

Seguem imediatamente da definição as seguintes observações:

(i) $1 \longrightarrow H \xrightarrow{f} K$ é exata se, e somente se, f é injetora;

(ii) $K \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, f é sobrejetora;

(iii) $1 \longrightarrow H \xrightarrow{f} K \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 1$ é exata se, e somente se, f é injetora, g sobrejetora e g induz um isomorfismo de $K/Im(f)$ sobre Q. Esse tipo de sequência exata é conhecida como *extensão* de H por Q.

Uma sequência exata de grupos como a de (iii) é *"splits" (ou cinde)* se existe um homomorfismo $h : Q \to K$ de forma que $hg = Id_Q$. Também, dizemos que ela é *central* se $Im(f)$ é um subgrupo central de K.

Proposição 1.36. *Seja G um grupo abeliano finito e consideremos a sequência exata de grupos abaixo:*

$$1 \longrightarrow K \xrightarrow{f} G \xrightarrow{g} Q \longrightarrow 1. \tag{1.2}$$

Se $mdc(|K|, |Q|) = 1$, então $G \cong K \times Q$.

Demonstração. Suponhamos que $|K| = m$ e $|Q| = n$. Sendo G um grupo abeliano finito e n um divisor de $|G|$, G possui um subgrupo H de ordem n.

Da injetividade do homomorfismo f, segue que $K \cong Im(f)$. Os subgrupos H e $Im(f)$ são subgrupos normais de G, pois G é um grupo abeliano. Assim, $HIm(f) \leq G$. Como m e n são relativamente primos, a interseção de H e $Im(f)$ é trivial; logo, $|HIm(f)| = nm$. Com isso, $G = H \times Im(f)$.

Agora, pela exatidão da sequência (1.2) temos $Q \cong G/Im(f)$. Entretanto, $G/Im(f) \cong H$; logo $H \cong Q$ e, portanto, concluímos que $G \cong H \times Im(f) \cong Q \times K$.

□

Finalizamos esse capítulo com o seguinte resultado:

Teorema 1.37. ([29], pág. 84) *Seja M um A-módulo à direita e*

$$N' \xrightarrow{\tau} N \xrightarrow{\rho} N'' \longrightarrow 0$$

uma sequência exata de A-módulos à esquerda. Então,

$$M \otimes_A N' \xrightarrow{1\otimes\tau} M \otimes_A N \xrightarrow{1\otimes\rho} M \otimes_A N'' \longrightarrow 0$$

é uma sequência exata de grupos abelianos.

Capítulo 2

Homologia de Grupos

O objetivo deste capítulo é o estudo do primeiro e segundo grupos de homologia com um caráter introdutório. Nexte texto, trataremos o assunto de forma algébrica, apresentando algumas definições e resultados e que serão necessários para o desenvolvimento dessa dissertação. Para mais detalhes, veja [23].

2.1 O anel de grupo $\mathbb{Z}G$

Na definição de homologia de grupo, iremos utilizar os chamados $\mathbb{Z}G$-módulos. Nesta seção, estudaremos tais módulos e começaremos com a definição de anel de grupo.

Sejam G um grupo com a notação multiplicativa e A um anel. Consideremos o conjunto AG cujos elementos são da forma $\sum\limits_{g\in G} a_g g$ com $a_g \in A$ e $g \in G$ sendo $a_g \neq 0$ apenas para um número finito de elementos $g \in G$. Nesse conjunto dois elementos $u = \sum\limits_{g\in G} a_g g$ e $v = \sum\limits_{g\in G} b_g g$ são iguais se, e somente se, $a_g = b_g$, para todo $g \in G$. Definimos as seguintes operações em AG :

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) + \left(\sum_{g\in G} b_g g\right) = \sum_{g\in G} (a_g + b_g) g$$

e

$$\left(\sum_{g\in G} a_g g\right) \cdot \left(\sum_{h\in G} b_h h\right) = \sum_{g,h\in G} (a_g b_h)(gh).$$

Com essas operações, AG torna-se um anel com unidade chamado *anel de grupo de* G, sendo $1_{AG} = 1_A 1$ (Aqui, 1 denota o elemento neutro do grupo G). Este anel não é comutativo, se

G não é abeliano ou se A não é comutativo.

Em todo o texto trabalharemos com um específico anel de grupo, a saber, o anel de grupo $\mathbb{Z}G$ de G.

Lembramos que uma *ação de um grupo* G sobre um grupo H é um homomorfismo $\theta : G \to \mathrm{Aut}(H)$. Dados $g \in G$ e $h \in H$, escrevemos $(h)((g)\theta)$ simplesmente como h^g, representando assim uma ação à direita.

Dizemos que G age sobre H quando está definida uma ação de G sobre H e que G age trivialmente sobre H ou que H é G-*trivial* se θ é o homomorfismo trivial.

Exemplo 2.1. Seja G um grupo e consideremos um subgrupo normal N de G . A aplicação $\theta : G \to Aut(N)$ dada por $(x)(g\theta) = x^g := g^{-1}xg$ é uma ação chamada ação de G sobre N por conjugação.

Observação 2.2. *Sejam M um grupo grupo abeliano e G um grupo. Se M é um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita, é corriqueiro verificar que*

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \ Aut(M) \\ g &\longmapsto g\varphi := \varphi_g : M \to M \\ & \qquad\qquad\qquad\quad m \mapsto mg \end{aligned}$$

é uma ação de G sobre M. Reciprocamente, se G age sobre M, não é difícil ver que a aplicação $\alpha : M \times \mathbb{Z}G \to M$ dada por $\left(m, \sum_{g\in G} \alpha_g g\right) \mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g m^g$ fornece uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à direita em M.

Dado um grupo G, a aplicação

$$\begin{aligned} \varepsilon : \mathbb{Z}G &\to \mathbb{Z} \\ \sum_{g\in G} \alpha_g g &\mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g \end{aligned}$$

é um homomorfismo sobrejetor de anéis, denominado *aplicação de aumento*. E seu núcleo é o chamado *ideal de aumento* de $\mathbb{Z}G$, o qual indicaremos por I_G.

Proposição 2.3. *Temos que I_G é um $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre o conjunto $X = \{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$.*

Demonstração. Um elemento $u = \sum_{g \in G} \alpha_g g \in \mathbb{Z}G$ pertence ao $Nuc(\varepsilon) = I_G$ se, e somente se, $\sum_{g \in G} \alpha_g = 0$. Dessa forma,

$$u = \sum_{g \in G} \alpha_g g = \sum_{g \in G} \alpha_g g - \sum_{g \in G} \alpha_g 1 = \sum_{g \in G \setminus \{1\}} \alpha_g (g-1).$$

Logo, I_G é gerado como um $\mathbb{Z}$-módulo pelo conjunto $X = \{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$. Suponhamos que $\sum_{x \in G \setminus \{1\}} \alpha_x (x-1) = 0$. Então, $\sum_{x \in G \setminus \{1\}} \alpha_x x - \left(\sum_{x \in G \setminus \{1\}} \alpha_x \right) 1 = 0$. Mas, como $\mathbb{Z}G$ é um $\mathbb{Z}$-módulo livre com base $\{x \mid x \in G\}$, então $\alpha_x = 0$, para todo $x \in G \setminus \{1\}$. Portanto, I_G é um $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre o conjunto $X = \{g - 1 \mid 1 \neq g \in G\}$. □

A seguir veremos que se F é um grupo livre, então I_F é livre não só como um $\mathbb{Z}$-módulo, mas também como um $\mathbb{Z}F$-módulo.

Proposição 2.4. *Se F é um grupo livre sobre um conjunto X, então I_F é livre como um $\mathbb{Z}F$-módulo à direita (à esquerda) sobre o conjunto $\overline{X} = \{x - 1 \mid x \in X\}$.*

Demonstração. Seja $\eta : \overline{X} \to M$ uma aplicação qualquer onde M é um $\mathbb{Z}F$-módulo (à direita). Então, é suficiente mostrarmos que η estende-se a um $\mathbb{Z}F$-homomorfismo $\beta : I_F \to M$.

Sendo M um $\mathbb{Z}F$-módulo, da Observação 2.2, segue que a multiplicação por escalar define uma ação de F sobre M. Seja $F \ltimes M$ o produto semidireto de M por F com respeito a essa ação e lembremos que a operação neste grupo é dada por: $(f_1, m_1)(f_2, m_2) = (f_1 f_2, m_1 \cdot f_2 + m_2)$ onde $f_1, f_2 \in F$ e $m_1, m_2 \in M$. Uma vez que F é livre sobre X, existe um único homomorfismo de grupos $\eta' : F \to F \ltimes M$ que envia cada $x \in X$ para $(x, (x-1)\eta)$. Para cada $f \in F$, existem $f_1 \in F$ e $a \in M$ tais que $(f)\eta' = (f_1, a)$. Mas, observemos que pela definição de η', $f = f_1$. Assim, construimos uma aplicação $\gamma : F \to M$ a partir da equação $(f)\eta' = (f, (f)\gamma)$.

Agora, para quaisquer $f_1, f_2 \in F$, temos

$$(f_1 f_2)\eta' = (f_1)\eta'(f_2)\eta' = (f_1, (f_1)\gamma)(f_2, (f_2)\gamma) = (f_1 f_2, (f_1)\gamma \cdot f_2 + (f_2)\gamma);$$

dessa forma, obtemos a seguinte igualdade

$$(f_1 f_2)\gamma = (f_1)\gamma \cdot f_2 + (f_2)\gamma. \tag{2.1}$$

Como I_F é um $\mathbb{Z}$-módulo livre sobre o conjunto $\{f-1 \mid 1 \neq f \in F\}$, construimos o homomorfismo $\beta : I_F \to M$ de grupos abelianos tal que $(f-1)\beta = (f)\gamma$, para todo $f \in F$. Logo, para $x \in X$, $(x-1)\beta = (x)\gamma = (x-1)\eta$, pois $(x)\eta' = (x, (x-1)\eta)$. Portanto, η estende-se a β. Finalmente, β é um $\mathbb{Z}F$-homomorfismo, pois β é um homomorfismo de grupos e

$$\begin{aligned} ((f-1)f_1)\beta &= ((ff_1-1)-(f_1-1))\beta = (ff_1-1)\beta - (f_1-1)\beta = (ff_1)\gamma - (f_1)\gamma \\ &\overset{(2.1)}{=} (f\gamma)\cdot f_1 + (f_1)\gamma - (f_1)\gamma = (f\gamma)\cdot f_1 = (f-1)\beta \cdot f_1, \end{aligned}$$

para quaisquer $f, f_1 \in F$. □

Dados G um grupo multiplicativo e N um subgrupo normal de G, definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon} : \mathbb{Z}G &\to \mathbb{Z}\left(\frac{G}{N}\right) \\ \sum_{g\in G} \alpha_g g &\mapsto \sum_{g \in G} \alpha_g (gN). \end{aligned}$$

Reparemos que esta aplicação é um epimorfimo de anéis.

Chamaremos o núcleo do homomorfismo $\overline{\varepsilon}$ de *ideal de aumento relativo* a N que indicaremos por $\overline{I}_N$. Este ideal, de certa forma, é uma generalização do ideal de aumento, uma vez que $\overline{I}_G = I_G$.

Observação 2.5. *Vale que $I_N(\mathbb{Z}G) = (\mathbb{Z}G)I_N$. Com efeito, um elemento de $I_N(\mathbb{Z}G)$ é uma soma finita de elementos da forma $\sum_{n\in N} \alpha_n (n-1) \sum_{g \in G} \beta_g g = \sum_{\substack{n\in N \\ g \in G}} \alpha_n \beta_g (n-1)g$ com α_n, $\beta_g \in \mathbb{Z}$, para todos $n \in N$ e $g \in G$. Mas, reparemos que para todo $n \in N$, $g \in G$*

$$(n-1)g = g(g^{-1}ng - 1) = g(n'-1),$$

onde $n' = g^{-1}ng \in N \triangleleft G$. Logo $I_N(\mathbb{Z}G) \subseteq (\mathbb{Z}G)I_N$. De modo análogo, prova-se a inclusão contrária. Assim, $I_N(\mathbb{Z}G)$ é um ideal de $\mathbb{Z}G$, o qual denotaremos por I. É fácil verificar que $\mathbb{Z}G/I$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda via multiplicação por escalar dada por $u(v+I) = uv + I$, para todos $u, v \in \mathbb{Z}G$.

Agora, mostraremos que o ideal de aumento relativo $\overline{I}_N$ coincide com I. A inclusão $I \subseteq \overline{I}_N$ é imediata. Dessa forma, verifiquemos que $\overline{I}_N \subseteq I$. Consideremos $\dfrac{\mathbb{Z}G}{I}$ como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda como visto anteriormente. Para todos $n \in N$ e $r \in \mathbb{Z}G$, a igualdade $nr + I = r + I$

é válida pois, $nr - r = (n-1)r \in I$. Com isso, podemos tornar $\dfrac{\mathbb{Z}G}{I}$ um $\mathbb{Z}\left(\dfrac{G}{N}\right)$-módulo à esquerda via seguinte regra: $gN(r+I) = gr + I$.

Agora, seja $u = \sum_{g\in G} \alpha_g g \in \overline{I}_N$. Então, $\sum_{g\in G} \alpha_g gN = 0_{\mathbb{Z}(\frac{G}{N})}$ e

$$u + I = \sum_{g\in G} \alpha_g g + I = \left(\sum_{g\in G} \alpha_g gN\right)(1_{\mathbb{Z}G} + I) = 0 + I,$$

donde segue que $u \in I$. Logo, $\overline{I}_N \subseteq I$ e, portanto, $\overline{I}_N = I$

Dessa forma, $\overline{I}_N$ é um ideal à esquerda (à direita) de $\mathbb{Z}G$ gerado pelo conjunto $\{x-1 \mid 1 \neq x \in N\}$.

Lembramos que, dado um subgrupo normal de um grupo F, um *transversal* para R em F é um conjunto T, o qual é formado tomando-se um representante de cada classe lateral de R em F. Assim, T satisfaz $F = \bigcup_{t\in T} Rt$ (união disjunta).

Proposição 2.6. *Seja R um subgrupo normal de um grupo livre F. Se R é livre sobre X, então $\overline{I}_R$ é livre como um $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda (à direita) sobre $\overline{X} = \{x - 1 \mid x \in X\}$.*

Demonstração. Sendo F um grupo livre e R um subgrupo de F, pelo Teorema 1.11, R é livre sobre um conjunto, digamos X. Suponhamos que $u = \sum_{x\in X} a_x(x-1) = 0$ onde $a_x \in \mathbb{Z}F$, para todo $x \in X$. Observemos que $\mathbb{Z}F = \oplus_{t\in T} t(\mathbb{Z}R)$, onde T é um transversal para R em F. Dessa forma, podemos escrever $a_x = \sum_{t\in T} tb_{x,t}$ onde $b_{x,t} \in \mathbb{Z}R$. Logo,

$$u = \sum_{t\in T} t\left(\sum_{x\in X} b_{x,t}(x-1)\right) = 0.$$

Mas, como $\mathbb{Z}F$ é um $\mathbb{Z}R$-módulo livre com base T, devemos ter $\sum_{x\in X} b_{x,t}(x-1) = 0$, para todo t. Pela Proposição 2.4, I_R é livre sobre o conjunto formado por todos os elementos da forma $x-1$, com $x \in X$, donde segue que $b_{x,t} = 0$, para todo $x \in X$ e $t \in I$. Portanto, $a_x = 0$, para todo $x \in X$. □

Na próxima seção construiremos a chamada Resolução de Gruenberg e o próximo resultado será essencial para tal construção.

Proposição 2.7. *Seja $R \rightarrowtail F \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G$ uma apresentação de um grupo G. Suponhamos que S e T são ideais à esquerda de $\mathbb{Z}F$ que são livres como $\mathbb{Z}F$-módulos sobre X e Y, respectivamente. Então:*

(i) $\dfrac{S}{\overline{I}_R S}$ *é livre como um* $\mathbb{Z}G$*-módulo à esquerda sobre o conjunto* $\{x + \overline{I}_R S \mid x \in X\}$;

(ii) Se S *é ideal de* $\mathbb{Z}F$*, então* ST *é livre como um* $\mathbb{Z}F$*-módulo à esquerda sobre*

$$\{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}.$$

Demonstração. (i) Primeiramente, veremos que $\dfrac{S}{\overline{I}_R S}$ possui uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda via multiplicação por escalar definida por $(f)\pi\cdot(s+\overline{I}_R S) = fs+\overline{I}_R S$. Vamos verificar que isso está bem definido. Para isso, sejam $s_1, s_2 \in S$ e $f_1, f_2 \in F$ tais que $s_1 + \overline{I}_R S = s_2 + \overline{I}_R S$ e $(f_1)\pi = (f_2)\pi$. Então, $s_1 - s_2 \in \overline{I}_R S$ e $f_1 f_2^{-1} = r$, para algum $r \in R = Nuc(\pi)$. A condição $f_1 f_2^{-1} = r$ implica que $f_1 = rf_2$. Assim, $f_1 s_1 + \overline{I}_R S = (rf_2)s_1 + \overline{I}_R S$. Mas, $(rf_2)s_1 + \overline{I}_R S = f_2 s_1 + \overline{I}_R S$, já que,

$$(rf_2)s_1 = (r-1)f_2 s_1 + f_2 s_1 \equiv f_2 s_1 \ (mod\ \overline{I}_R S);$$

logo $f_1 s_1 + \overline{I}_R S = f_2 s_1 + \overline{I}_R S$. Além disso, $f_2 s_1 + \overline{I}_R S = f_2 s_2 + \overline{I}_R S$, pois $f_2(s_1 - s_2) \in \overline{I}_R S$, já que $s_1 - s_2 \in \overline{I}_R S$ e $\overline{I}_R S$ é um ideal à esquerda. Portanto, a aplicação dada acima está bem definida e é rotineiro verificar que ela define uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda em $S/\overline{I}_R S$.

Como S é livre como $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda sobre X, então $S = \oplus_{x\in X}(\mathbb{Z}F)x$. Assim, $\overline{I}_R S = \oplus_{x\in X}(\overline{I}_R)x$. Para mostrarmos a parte *(i)*, precisamos provar os seguintes dois $\mathbb{Z}G$-isomorfismos:

1. $\dfrac{S}{\overline{I}_R S} \cong \dot{\bigoplus_{x\in X}} \dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_R x}$;

2. $\dot{\bigoplus_{x\in X}} \dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_R x} \cong \bigoplus_{x\in X} \mathbb{Z}G(x + \overline{I}_R S)$.

Antes de verificarmos (1), observemos que $\dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_R x}$ tem uma estrutura de $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda via multiplicação por escalar definida por $(f)\pi \cdot (ux + \overline{I}_R x) = fux + \overline{I}_R x$, para todo $u \in \mathbb{Z}F$. Esta aplicação está bem definida. Com efeito, suponhamos que $(f)\pi = (f_1)\pi$ e $\overline{ux} = \overline{vx}$ para $f, f_1 \in F$ e $u, v \in \mathbb{Z}F$. Então, $f_1^{-1} f \in Nuc(\pi) = R$ e $ux - vx = (u-v)x \in \overline{I}_R x$. Dessa forma, $f = f_1 r$ para algum $r \in R$; logo

$$fux = f_1 rux = f_1 ux + f_1(r-1)ux \equiv f_1 ux \ (mod\ \overline{I}_R x).$$

Com isso, a aplicação independe de f. Ainda mais, $fux+\overline{I}_Rx = fvx+\overline{I}_Rx$, pois $fux-fvx = f(u-v)x \in \overline{I}_Rx$.

(1) Consideremos a aplicação $\tau : S \to \dot{\bigoplus}_{x\in X} \dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_Rx}$ definida por

$$\sum_{x\in X} \alpha_x x \mapsto (\alpha_x x + \overline{I}_Rx)_{x\in X}.$$

Claramente, τ é um $\mathbb{Z}G$-epimorfismo. Dessa forma, resta mostrarmos que $Nuc(\tau) = \overline{I}_RS$. Dado $\sum_{x\in X} \alpha_x x \in S$, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in X} \alpha_x x \in Nuc(\tau) &\iff (\alpha_x x + \overline{I}_Rx)_{x\in X} = 0 \\
&\iff (\forall x \in X)\ (\alpha_x x + \overline{I}_Rx = 0 + \overline{I}_Rx) \\
&\iff (\forall x \in X)\ (\alpha_x x \in \overline{I}_Rx) \\
&\iff (\forall x \in X)\ (\exists u_x \in \overline{I}_R)\ (\alpha_x x = u_x x) \\
&\iff (\forall x \in X)\ (\exists u_x \in \overline{I}_R)\ (\alpha_x = u_x) \\
&\iff (\forall x \in X)\ (\alpha_x \in \overline{I}_R) \\
&\iff \sum_{x\in X} \alpha_x x \in \overline{I}_RS.
\end{aligned}$$

Portanto, $\dfrac{S}{\overline{I}_RS} = \dfrac{S}{Nuc(\tau)} \cong \dot{\bigoplus}_{x\in X} \dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_Rx}$.

(2) Agora, notemos que, para todo $u = \sum_{f\in F} \alpha_f f \in \mathbb{Z}F$, temos:

$$ux + \overline{I}_RS = \sum_{f\in F} \alpha_f fx + \overline{I}_RS = \sum_{f\in F} \alpha_f (f)\pi \cdot (x + \overline{I}_RS) \in \mathbb{Z}G(x + \overline{I}_RS).$$

Com isso, podemos definir a aplicação $\theta : \dfrac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_Rx} \to \mathbb{Z}G(x+\overline{I}_RS)$ por $ux+\overline{I}_Rx \mapsto ux+\overline{I}_RS$.

Seja $\sum_{g\in G} \alpha_g (f_g)\pi \in \mathbb{Z}G$. Então,

$$\begin{aligned}
\left(\left(\sum_{g\in G} \alpha_g (f_g)\pi\right) \cdot (ux + \overline{I}_Rx)\right)\theta &= \left(\sum_{g\in G} \alpha_g f_g ux + \overline{I}_Rx\right)\theta = \sum_{g\in G} \alpha_g f_g ux + \overline{I}_RS \\
&= \left(\sum_{g\in G} \alpha_g (f_g)\pi\right) \cdot (ux + \overline{I}_RS).
\end{aligned}$$

As outras duas condições da definição de $\mathbb{Z}G$-epimorfismo são de fácil verificação; logo concluímos que θ é um $\mathbb{Z}G$-epimorfismo. Resta mostrarmos que θ é injetora. Seja $ux + \overline{I}_R x$ um elemento do núcleo de θ. Então, $ux \in \overline{I}_R S$ o que implica na igualdade $ux = \sum_{i=1}^{k} v_i s_i$, com $k \in \mathbb{N}^*$, $s_i \in S$ e $v_i \in \overline{I}_R \subseteq \mathbb{Z}F$, $i = 1, \ldots, k$. Mas, cada s_i pode ser escrito da forma $s_i = \sum_{y \in X} \alpha_{y,i} y$ com $\alpha_{y,i} \in \mathbb{Z}F$. Assim,

$$ux = \sum_{i=1}^{k} v_i s_i = \sum_{i=1}^{k} v_i \sum_{y \in X} \alpha_{y,i} y = \sum_{i=1}^{k} \sum_{y \in X} v_i(\alpha_{y,i} y) = \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{x,i} x + \sum_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{y,i} y;$$

logo, $0 = \left(u - \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{x,i} \right) x - \sum_{\substack{y \in X \\ y \neq x}} \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{y,i} y$. Daí, devido ao fato de $S = \bigoplus_{x \in X} (\mathbb{Z}F)x$, temos

$$\sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{y,i} = 0, \text{ para todo } y \neq x \text{ e } u - \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{x,i} = 0.$$

Portanto, $u = \sum_{i=1}^{k} v_i \alpha_{x,i} \in \overline{I}_R$ ($\overline{I}_R$ é ideal de $\mathbb{Z}F$), consequentemente, $ux \in \overline{I}_R x$.

Finalmente, de (1) e (2), segue que

$$\frac{S}{\overline{I}_R S} \cong \dot{\bigoplus_{x \in X}} \frac{(\mathbb{Z}F)x}{\overline{I}_R x} \cong \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G(x + \overline{I}_R S).$$

Portanto $S/\overline{I}_R S$ é livre como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda sobre o conjunto $\{x + \overline{I}_R S \mid x \in S\}$.

(ii) Temos que

$$ST = \bigoplus_{y \in Y} S(\mathbb{Z}F)y = \bigoplus_{y \in Y} Sy = \bigoplus_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} (\mathbb{Z}F)xy,$$

ou seja, ST é livre como $\mathbb{Z}F$-módulo sobre $\{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$.

□

2.2 Homologia de Grupos

Iniciaremos essa seção apresentando uma sequência exata de módulos, conhecida como Resolução de Gruenberg e que permitirá definirmos o primeiro e segundo grupos de homologia.

Teorema 2.8. *Seja $R \rightarrowtail F \twoheadrightarrow G$ uma apresentação de um grupo G. Então, existe uma sequência exata de $\mathbb{Z}G$-módulos à esquerda livres*

$$\frac{\overline{I}_R I_F}{\overline{I}_R^2 I_F} \xrightarrow{\partial_3} \frac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2} \xrightarrow{\partial_2} \frac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \xrightarrow{\partial 1} \mathbb{Z}G \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \quad , \tag{2.2}$$

onde $\varepsilon : \mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é a aplicação de aumento, $\partial_1 : \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \to \mathbb{Z}G$ é a induzida por $\pi : F \to G$, $(u + \overline{I}_R^2)\partial_2 = u + \overline{I}_R I_F$, para todo $u \in \overline{I}_R$ e $(v + \overline{I}_R^2 I_F)\partial_3 = v + \overline{I}_R^2$, com $v \in \overline{I}_R I_F$.

Demonstração. Suponhamos que F é livre sobre X. Então, pela Proposição 2.4, I_F é livre como um $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda sobre o conjunto $\overline{X} = \{x - 1 \mid x \in X\}$. Então, pelo item *(i)* da Proposição 2.7 teremos que $\dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F}$ é livre como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda sobre o conjunto $\overline{Z} = \{(x - 1) + \overline{I}_R I_F \mid x \in X\}$. Agora, do fato de $\overline{I}_R$ ser livre como $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda, da Proposição 2.7 item *(i)* vem que $\dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2}$ é livre como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda. Além disso, supondo que R é livre sobre Y segue da Proposição 2.6 que $\overline{I}_R$ é livre como um $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda sobre $\overline{Y} = \{y - 1 \mid y \in Y\}$. Assim, como $\overline{I}_R$ é ideal de $\mathbb{Z}F$, da Proposição 2.7 segue que $\overline{I}_R I_F$ é livre como um $\mathbb{Z}F$-módulo à esquerda sobre $\overline{YX} = \{(y-1)(x-1) \mid y \in Y,\ x \in X\}$. Consequentemente, $\dfrac{\overline{I}_R I_F}{\overline{I}_R \overline{I}_R I_F}$ é livre como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda.

Do fato de $\dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F}$ ser livre como um $\mathbb{Z}G$-módulo à esquerda sobre o conjunto $\overline{Z}$, a aplicação $\widetilde{\partial_1} : \overline{Z} \to \mathbb{Z}G$ definida por $(x - 1) + \overline{I}_R I_F \mapsto (x)\pi - 1$ se estende a um $\mathbb{Z}G$-homomorfismo $\partial_1 : \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \to \mathbb{Z}G$ dado por $\left(\sum_{x \in X} \alpha_x (x - 1) + \overline{I}_R I_F \right) \partial_1 = \sum_{x \in X} \alpha_x ((x)\pi - 1)$.

Desde que $\overline{I}_R$ é um ideal de $\mathbb{Z}F$, $\overline{I}_R I_F \subseteq \overline{I}_R$; assim, podemos definir a aplicação $\partial_3' : \overline{I}_R I_F \to \dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2}$ por $(v)\partial_3' = v + \overline{I}_R^2$, para todo $v \in \overline{I}_R I_F$. Além disso, $\overline{I}_R^2 I_F \subseteq \overline{I}_R^2$; dessa forma, ∂_3' induz o homomorfismo $\partial_3 : \dfrac{\overline{I}_R I_F}{\overline{I}_R^2 I_F} \to \dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2}$ dado por $(v + \overline{I}_R^2 I_F)\partial_3 = v + \overline{I}_R^2$. Como para todo $f \in F$ e $v \in \overline{I}_R I_F$,

$$((f)\pi \cdot (v + \overline{I}_R^2 I_F))\partial_3 = (fv + \overline{I}_R^2 I_F)\partial_3 = fv + \overline{I}_R^2 = (f)\pi \cdot (v + \overline{I}_R^2)$$

concluímos que ∂_3 é um $\mathbb{Z}G$-homomorfismo. De modo análogo mostramos que ∂_2 é um $\mathbb{Z}G$-homomorfismo bem definido.

Resta mostrarmos que a sequência (2.2) é exata. Reparemos que o núcleo do epimorfismo $\mathbb{Z}G \to \mathbb{Z}$ é I_G que também é a imagem de $\partial_1 : \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \to \mathbb{Z}G$. Agora, o núcleo de

$\partial_1 : \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \to \mathbb{Z}G$ é $\dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R I_F}$, basta repararmos que o núcleo de $\mathbb{Z}F \to \mathbb{Z}G$ é $\overline{I}_R$ e usar a definição de ∂_1. Por outro lado, $\dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R I_F}$ é a imagem de $\partial_2 : \dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2} \to \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F}$. Continuando o processo dessa forma, obtemos a exatidão da sequência (2.2). □

Dado um grupo G, seja M um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita. Tensorizando a Resolução de Gruenberg por M, pelo Teorema 1.37, obtém-se a sequência de grupos abelianos:

$$M \otimes_{\mathbb{Z}G} \frac{\overline{I}_R I_F}{\overline{I}_R^2 I_F} \xrightarrow{\partial_3'} M \otimes_{\mathbb{Z}G} \frac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2} \xrightarrow{\partial_2'} M \otimes_{\mathbb{Z}G} \frac{I_F}{\overline{I}_R I_F} \xrightarrow{\partial_1'} M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \longrightarrow 0,$$

onde $(a \otimes b)\partial_j' := a \otimes (b\partial_j)$ com $a \in M,\ b \in P_j$ e $j = 1, 2, 3$.

Definamos o *primeiro e segundo grupos de homologia de G com coeficientes em M*, como sendo os grupos abelianos

$$H_1(G, M) := \frac{Nuc(\partial_1')}{Im\,(\partial_2')} \quad \text{e} \quad H_2(G, M) := \frac{Nuc(\partial_2')}{Im\,(\partial_3')},$$

respectivamente.

Um segundo grupo de homologia importante e muito estudado é $H_2(G, \mathbb{Z})$, onde G é um grupo e $\mathbb{Z}$ é um $\mathbb{Z}G$-módulo trivial. Tal grupo de homologia é conhecido como *Multiplicador de Schur* de G e denotado por $M(G)$.

Proposição 2.9. *Sejam G um grupo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita, $P_1 = \dfrac{I_F}{\overline{I}_R I_F}$, $P_2 = \dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R^2}$, $J_1 = I_G$ e $J_2 = \dfrac{\overline{I}_R}{\overline{I}_R I_F}$. Então, para $n \in \{1, 2\}$, existe uma sequência exata:*

$$0 \longrightarrow H_n(G, M) \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}G} J_n \longrightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_{n-1}.$$

Demonstração. Sejam $P_0 = \mathbb{Z}G,\ P_3 = \dfrac{\overline{I}_R I_F}{\overline{I}_R^2 I_F}$, $\nu : P_n \to J_n$ a aplicação definida por $a \mapsto (a)\partial_n$ e $i : J_n \to P_{n-1}$ a aplicação inclusão. Então, o diagrama abaixo é comutativo com linha exata:

$$\begin{tikzcd}
P_{n+1} \arrow[r, "\partial_{n+1}"] & P_n \arrow[rr, "\nu"] \arrow[dr, "\partial_n"'] & & J_n \arrow[r, "0"] \arrow[dl, "i"] & 0 \\
& & P_{n-1} & &
\end{tikzcd}$$

De fato, reparemos que o diagrama comuta, devido ao fato de $\nu i = \partial_n$, pois $(p)\nu i = (a\partial_n)i = a\partial_n$ para todo $p \in P_n$. Agora, por construção, ν é sobrejetora o que implica $Nuc(0) = J_n = Im(\nu)$. Além disso, como a sequência (2.2) é exata, $Im(\partial_{n+1}) = Nuc(\nu)$.

Assim, segue do Teorema 1.37 que o diagrama a seguir possui linha exata:

$$\begin{tikzcd} M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_{n+1} \arrow[r, "\partial'_{n+1}"] & M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_n \arrow[rr, "\nu'"] \arrow[dr, "\partial'_n"'] & & M \otimes_{\mathbb{Z}G} J_n \arrow[r] \arrow[dl, "i'"] & 0 \\ & & M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_{n-1} & & \end{tikzcd}$$

Além disso, o diagrama acima comuta, uma vez que, $(m \otimes a)\nu' i' = (m \otimes a\partial_n)i' = m \otimes a\partial = (m \otimes a)\partial'_n$.

Agora mostremos que $(Nuc(\partial'_n))\nu' = Nuc(i')$. Para a inclusão $(Nuc(\partial'_n))\nu' \subseteq Nuc(i')$, tomemos $a' \in Nuc(\partial'_n)$. Então $0 = (a')\partial'_n = (a')\nu' i'$, pela comutatividade do diagrama. Assim, $a'\nu' \in Nuc(i')$. Para a inclusão contrária, seja $b \in Nuc(i')$ e escreva $b = c\nu'$ com $c \in M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_n$. Então, $0 = (b)i' = (c\nu')i' = (c)\nu' i' = c\partial'_n$ o que implica em $c \in Nuc(\partial'_n)$; logo $b \in (Nuc(\partial'_n))\nu'$.

Com isso, ν' induz um isomorfismo $f : \frac{Nuc(\partial'_n)}{Im(\partial'_{n+1})} \to Nuc(i')$ definida por $a + Im(\partial'_{n+1}) \mapsto a\nu'$. Mas, $H_n(G, M) = \dfrac{Nuc(\partial'_n)}{Im(\partial'_{n+1})} \cong Nuc(i')$.

Finalmente, obtemos a sequência exata desejada:

$$0 \longrightarrow H_n(G, M) \cong Nuc(i') \xrightarrow{i} M \otimes_{\mathbb{Z}G} J_n \xrightarrow{i'} M \otimes_{\mathbb{Z}G} P_{n-1}.$$

□

Para finalizar este capítulo, provaremos que o primeiro grupo de homologia é isomorfo ao núcleo de um dado homomorfismo.

Teorema 2.10. *Se G é um grupo e M um $\mathbb{Z}G$-módulo à direita, então $H_1(G, M)$ é isomorfo ao núcleo do homomorfismo $M \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G \to M$ no qual $m \otimes (g-1) \mapsto m(g-1)$, para todos $m \in M$ e $g \in G$.*

Demonstração. Pela Proposição 2.9, temos que $H_1(G, M) \cong Nuc(i')$ onde $i' : M \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G \to M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G$. Mas, pela Proposição 1.35, $M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \cong M$ via isomorfismo f dado por
$m \otimes u \mapsto mu$, donde temos a sequência de módulos abaixo:

$$M \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G \xrightarrow{i'} M \otimes_{\mathbb{Z}G} \mathbb{Z}G \xrightarrow{f} M$$

tal que $Nuc(i') = Nuc(i'f)$. Portanto, $H_1(G, M)$ é isomorfo ao núcleo da aplicação $i'f : M \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G \to M$ tal que $m \otimes (g-1) \mapsto m(g-1)$, pois

$$(m \otimes (g-1))i'f \;=\; ((m \otimes (g-1))i')f = (m \otimes (g-1))f = m(g-1).$$

$\square$

Capítulo 3

Produto Tensorial não Abeliano de Grupos

O produto tensorial não abeliano de grupos foi introduzido no ano de 1984 por Brown e Loday em [4]. Neste trabalho eles apresentaram algumas aplicações deste conceito na topologia algébrica e, em virtude disso, este assunto vem sendo muito estudado. No aspecto algébrico, grande atenção tem sido dada às propriedades gerais do produto tensorial não abeliano de grupos e à descrição do quadrado tensorial não abeliano de certas classes de grupos.

Este capítulo está dividido em quatro seções. A primeira seção trará o conceito do produto tensorial não abeliano de grupos e algumas de suas propriedades. Na seção seguinte, teremos por objetivo estudar o quadrado tensorial não abeliano de um grupo, onde alguns resultados de R. Brown, D. L. Johnson e E. F. Robertson [3] serão vistos. Um grupo de extrema importância neste trabalho é o chamado $\eta(G, H)$, onde G e H são grupos agindo compativelmente um sobre o outro, e é na terceira seção que estudaremos tal grupo. Na última seção, apresentaremos uma descrição das séries central inferior e derivada do produto tensorial não abeliano de grupos.

3.1 Conceitos Básicos e Propriedades

Sejam G e H grupos munidos com uma ação de G sobre H e de H sobre G e suponhamos que cada um age sobre si mesmo por conjugação, isto é, para $g, x \in G$ e $h, y \in H$, $g^x = x^{-1}gx$

e $h^y = y^{-1}hy$. Com isso, temos uma ação do produto livre $G * H$ sobre G e H. Diremos que as ações de G sobre H e de H sobre G são *compatíveis* se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$g^{(h^{g_1})} = g^{g_1^{-1}hg_1} = ((g^{g_1^{-1}})^h)^g \tag{3.1}$$

$$h^{(g^{h_1})} = h^{h_1^{-1}gh_1} = ((h^{h_1^{-1}})^g)^{h_1}. \tag{3.2}$$

Quando dois grupos G e H atuam um sobre o outro compativelmente, R. Brown e J. L. Loday [[4], [5]] definiram o *produto tensorial (não abeliano)* de G e H, como sendo o grupo gerado pelos símbolos $g \otimes h$, com $g \in G$ e $h \in H$, sujeito às condições:

$$gg_1 \otimes h = (g^{g_1} \otimes h^{g_1})(g_1 \otimes h) \tag{3.3}$$

$$g \otimes hh_1 = (g \otimes h_1)(g^{h_1} \otimes h^{h_1}) \tag{3.4}$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Indicaremos tal grupo por $G \otimes H$.

É fácil ver que se $G = H$ e todas as ações são por conjugação, então as ações são compatíveis. Neste caso, chamamos este produto tensorial $G \otimes G$ de *quadrado tensorial não abeliano* de G.

Reparemos que se substituírmos $g \otimes h$ por $[g, h]$ e as ações por conjugação, as relações (3.3) e (3.4) tornam-se identidades de comutadores. Outro fato que devemos notar é que $1 \otimes h$ (com $h \in H$) é igual ao elemento neutro de $G \otimes H$. De fato,

$$(g \otimes h)1_{G\otimes H} = g \otimes h = g1 \otimes h \overset{(3.3)}{=} (g^1 \otimes h^1)(1 \otimes h) = (g \otimes h)(1 \otimes h)$$

e, como $G \otimes H$ é um grupo, $1 \otimes h = 1_{G\otimes H}$. De forma análoga, pode-se verificar que $g \otimes 1 = 1_{G\otimes H}$, para todo $g \in G$.

A seguir veremos alguns exemplos de produtos tensoriais não abelianos.

Exemplo 3.1. Consideremos $G =< a \mid a^2 >$ e $H =< b \mid b^3 >$ e suponhamos que H age trivialmente sobre G e que G age sobre H por $h^a = h^{-1}$, com $h \in H$. Claramente, vemos que essas ações são compatíveis. Agora, pela definição de $G \otimes H$, temos que $G \otimes H$ é gerado pelo conjunto $\{a \otimes b, a \otimes b^2\}$. Porém, podemos reduzir este conjunto gerador pois $a \otimes b^2 = (a \otimes b)(a^b \otimes b^b) = (a \otimes b)(a \otimes b) = (a \otimes b)^2$ e, assim, $G \otimes H =< a \otimes b >$. Além disso,

$$1 \otimes b = a^2 \otimes b = (a^a \otimes b^a)(a \otimes b) = (a \otimes b^2)(a \otimes b) = (a \otimes b)^3.$$

Não é difícil ver que a aplicação $\alpha : G \otimes H \to \mathbb{Z}_3$ dada por $a \otimes b \mapsto \overline{1}$ é um isomorfismo de grupos. Portanto, $G \otimes H \cong \mathbb{Z}_3$.

Exemplo 3.2. Seja $\mathbb{Z}_p =< x \mid x^p >$, com p um número primo diferente de 2, e consideremos $K =< a, b \mid a^2, b^2, [a, b] >$. Notamos que $K \cong C_2 \times C_2$. Suponhamos que $\mathbb{Z}_p$ atue trivialmente sobre K e que a ação de K sobre $\mathbb{Z}_p$ seja dada por: $x^a = x^{-1}$ e $x^b = x^{-1}$. Facilmente verifica-se que essas ações são compatíveis. Com isso, o produto tensorial não abeliano $\mathbb{Z}_p \otimes K$ está definido e notemos que é gerado pelo conjunto

$$\{x^m \otimes a, x^m \otimes b, x^m \otimes ab \mid m = 1, 2, \ldots, p-1\}.$$

Porém, reparemos que

$$x^2 \otimes a = (x^x \otimes a^x)(x \otimes a) = (x \otimes a)^2$$

e, por indução, vemos que $x^m \otimes a = (x \otimes a)^m$, para todo $m \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$. Também, $x^p \otimes a = (x \otimes a)^p = 1$, uma vez que $x^p = 1$. Analogamente, obtemos

$$x^m \otimes b = (x \otimes b)^m, (x \otimes b)^p = 1, x^m \otimes ab = (x \otimes ab)^m \ e \ (x \otimes ab)^p = 1.$$

Além disso,

$$x \otimes ab = (x \otimes b)(x^b \otimes a^b) = (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a) = (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1}, \tag{3.5}$$

o que prova que $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado por $x \otimes a$ e $x \otimes b$. Mas,

$$\begin{aligned}
(x \otimes ab)^2 &= (x \otimes ab)(x \otimes ba) = (x \otimes b)(x^b \otimes a^b)(x \otimes a)(x^a \otimes b^a) \\
&= (x \otimes b)(x^{p-1} \otimes a)(x \otimes a)(x^{p-1} \otimes b) = (x \otimes b)(x \otimes a)^{p-1}(x \otimes a)(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)(x \otimes a)^p(x \otimes b)^{p-1} = (x \otimes b)(x \otimes b)^{p-1} \\
&= (x \otimes b)^p = 1.
\end{aligned}$$

Então, temos que a ordem de $x \otimes ab$ divide 2 e também divide p, uma vez que $(x \otimes ab)^2 = 1$ e $(x \otimes ab)^p = 1$. Entretanto $mdc(2, p) = 1$, donde segue que $x \otimes ab = 1$. Assim de (3.5), obtemos $x \otimes b = (x \otimes a)^{-(p-1)}$. Logo, $\mathbb{Z}_p \otimes K$ é gerado por $x \otimes a$. Mais ainda $\mathbb{Z}_p \otimes K \cong \mathbb{Z}_p$. Para provarmos este fato, consideremos o conjunto

$$X = \{x^m \otimes a^i b^j \mid m, i, j \in \mathbb{Z}, 0 \leq m \leq p-1, 0 \leq i, j \leq 1\}$$

e a aplicação $\alpha : X \to \mathbb{Z}_p$ definida por $(x^m \otimes a^i b^j)\alpha = x^{m\varepsilon_{i,j}}$ onde $\varepsilon_{i,j} = 0$ se $i = j$ e $\varepsilon_{i,j} = 1$ se $i \neq j$. Então, para todo $m, n \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $i, j \in \{0, 1\}$, temos

$$\begin{aligned}(x^m x^n \otimes a^i b^j)\alpha &= (x^{m+n} \otimes a^i b^j)\alpha = x^{(m+n)\varepsilon_{i,j}} = x^{m\varepsilon_{i,j}} x^{n\varepsilon_{i,j}} = (x^m \otimes a^i b^j)\alpha(x^n \otimes a^i b^j)\alpha \\ &= ((x^m)^{x^n} \otimes (a^i b^j)^{x^n})\alpha(x^n \otimes a^i b^j)\alpha,\end{aligned}$$

uma vez que $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre K. Além disso, para todo $m \in \{0, 1, \ldots, p-1\}$ e $i, j, k, l \in \{0, 1\}$ e considerando que $a^2 = b^2 = 1$, obtemos

$$(x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha = (x^m \otimes a^{i+k} b^{j+l})\alpha = (x^m \otimes a^{\varepsilon_{i,k}} b^{\varepsilon_{j,l}})\alpha = x^{m\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}}}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}(x^m \otimes a^k b^l)\alpha((x^m)^{a^k b^l} \otimes (a^i b^j)^{a^k b^l})\alpha &= x^{m\varepsilon_{k,l}}[(x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}} m} \otimes a^i b^j)\alpha] = x^{m\varepsilon_{k,l}} x^{(-1)^{\varepsilon_{k,l}} m\varepsilon_{i,j}} \\ &= x^{m(\varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j})}.\end{aligned}$$

Agora, passemos a verificar que

$$\varepsilon_{\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l}} = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}. \tag{3.6}$$

Para isto devemos considerar os seguintes 4 casos:

1) se $i = j$ e $k = l$, então $\varepsilon_{i,k} = \varepsilon_{j,l}$, assim $\varepsilon_{(\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l})} = 0 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$;

2) se $i = j$ e $k \neq l$, então $\varepsilon_{i,k} \neq \varepsilon_{j,l}$. Daí, $\varepsilon_{(\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l})} = 1 = \varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j}$;

3) se $i \neq j$ e $k = l$, procedemos como no caso anterior;

4) quando $i \neq j$ e $k \neq l$, então $\varepsilon_{k,l} + (-1)^{\varepsilon_{k,l}}\varepsilon_{i,j} = 1 + (-1)^1 1 = 0$. Agora, para calcular $\varepsilon_{(\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l})}$, analisemos 2 casos:

   - se $i = k$, então $j = l$. Assim, $\varepsilon_{(\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l})} = \varepsilon_{0,0} = 0$;
   - se $i \neq k$, então $j \neq l$. Logo, $\varepsilon_{(\varepsilon_{i,k},\varepsilon_{j,l})} = \varepsilon_{1,1} = 0$.

Portanto, o quarto caso está provado. Como (3.6) acontece, em qualquer caso, podemos concluir que

$$(x^m \otimes a^i b^j a^k b^l)\alpha = (x^m \otimes a^k b^l)\alpha((x^m)^{a^k b^l} \otimes (a^i b^j)^{a^k b^l})\alpha.$$

Dessa forma, α é consistente com as relações definidoras de $\mathbb{Z}_p \otimes K$. Portanto, pelo Teste da Substituição, α estende-se a um homomorfismo $\widetilde{\alpha} : \mathbb{Z}_p \otimes K \to \mathbb{Z}_p$. Daí, como $(x \otimes a)\widetilde{\alpha} = x$, $\mathbb{Z}_p \otimes K =< x \otimes a >$ e $(x \otimes a)^p = 1$, a aplicação $\widetilde{\alpha}$ é um isomorfismo.

Definição 3.3. Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro e L um grupo qualquer. Dizemos que uma aplicação $\phi : G \times H \to L$ é uma *biderivação* se para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$

$$(gg_1, h)\phi = (g^{g_1}, h^{g_1})\phi(g_1, h)\phi \tag{3.7}$$

$$(g, hh_1)\phi = (g, h_1)\phi(g^{h_1}, h^{h_1})\phi. \tag{3.8}$$

Pelo Teste da Substituição podemos perceber que uma biderivação $\phi : G \times H \to L$ determina um único homomorfismo $\phi^* : G \otimes H \to L$ de forma que $(g \otimes h)\phi^* = (g, h)\phi$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.

Daqui para frente, salvo menção contrária, G e H denotarão grupos que agem compativelmente um sobre o outro. A seguir apresentaremos algumas propriedades dos produtos tensoriais não abelianos devidas a R. Brown e J. L. Loday [5].

Proposição 3.4. *Os grupos G e H atuam sobre $G \otimes H$ de maneira que*

$$(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g, \ (g \otimes h_1)^h = g^h \otimes h_1^h$$

para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$. Com isso, temos uma ação de $G * H$ sobre $G \otimes H$ dada por

$$(g \otimes h)^t = g^t \otimes h^t,$$

onde $g \in G, h \in H$ e $t \in G * H$.

Demonstração. Dado $g \in G$, definamos a aplicação $\phi_g : G \times H \to G \otimes H$ colocando $(g_1, h)\phi_g = g_1^g \otimes h^g$ para todos $g_1 \in G$ e $h \in H$. Vamos verificar que ϕ_g é uma biderivação, para todo $g \in G$. Com efeito, se $g \in G$, então

$$\begin{aligned}(g_1g_2, h)\phi_g &= (g_1g_2)^g \otimes h^g = g_1^g g_2^g \otimes h^g \overset{(3.3)}{=} [(g_1^g)^{g_2^g} \otimes (h^g)^{g_2^g}](g_2^g \otimes h^g) \\ &= [(g_1^g)^{g^{-1}g_2g} \otimes (h^g)^{g^{-1}g_2g}](g_2^g \otimes h^g) = (g_1^{g_2g} \otimes h^{g_2g})(g_2^g \otimes h^g) \\ &= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi_g(g_2, h)\phi_g,\end{aligned}$$

para todos $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$.

Também para todos $g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(g_1, hh_1)\phi_g &= g_1^g \otimes (hh_1)^g = g_1^g \otimes h^g h_1^g \overset{(3.4)}{=} (g_1^g \otimes h_1^g)[(g_1^g)^{h_1^g} \otimes (h_g)^{h_1^g}] \\
&\overset{(3.1)}{=} (g_1^g \otimes h_1^g)[(g_1^g)^{g^{-1}h_1 g} \otimes h_1^{-g} h^g h_1^g] = (g_1^g \otimes h_1^g)(g_1^{h_1 g} \otimes h^{h_1 g}) \\
&= (g_1, h_1)\phi_g (g_1^{h_1} \otimes h^{h_1})\phi_g
\end{aligned}$$

Logo, ϕ_g determina um único homomorfismo $\alpha_g : G \otimes H \to G \otimes H$ tal que $(g_1, h)\alpha_g = g_1^g \otimes h^g$, para todos $g_1 \in G$ e $h \in H$. Segue dos fatos $\alpha_g \alpha_{g^{-1}} = 1$ e $\alpha_{g^{-1}} \alpha_g = 1$ a bijetividade de α_g, consequentemente, α_g é um automorfismo de $G \otimes H$.

Definindo a aplicação

$$\begin{aligned}
\alpha : G &\to Aut(G \otimes H) \\
g &\mapsto \alpha_g
\end{aligned}$$

que claramente é um homomorfismo de grupos, obtemos uma ação de G sobre $G \otimes H$ tal que $(g_1 \otimes h)^g = g_1^g \otimes h^g$. Analogamente prova-se o outro caso. □

Proposição 3.5. *Existe um único isomorfismo $\nu : G \otimes H \to H \otimes G$ definido por $(g \otimes h)\nu = (h \otimes g)^{-1}$ para todos $g \in G$ e $h \in H$.*

Demonstração. Consideremos a aplicação $\phi : G \times H \to H \otimes G$ dada por $(g, h)\phi = (h \otimes g)^{-1}$. Afirmamos que ϕ é uma biderivação. De fato, para todos $g_1, g_2 \in G$ e $h \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(g_1 g_2, h)\phi &= (h \otimes g_1 g_2)^{-1} \overset{(3.4)}{=} [(h \otimes g_2)(h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})]^{-1} = (h^{g_2} \otimes g_1^{g_2})^{-1}(h \otimes g_2)^{-1} \\
&= (g_1^{g_2}, h^{g_2})\phi(g_2, h)\phi.
\end{aligned}$$

Similarmente, mostra-se que $(g, h_1 h_2)\phi = (g, h_2)\phi(g^{h_2}, h_1^{h_2})\phi$, para todos $g \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Logo, ϕ determina um único homomorfismo da forma

$$\begin{aligned}
\nu : G \otimes H &\to H \otimes G \\
g \otimes h &\mapsto (h \otimes g)^{-1}.
\end{aligned}$$

Analogamente, obtém-se um homomorfismo $\mu : H \otimes G \to G \otimes H$ tal que $(h \otimes g)\mu = (g \otimes h)^{-1}$, para todos $h \in H$ e $g \in G$. Facilmente, vemos que $\mu\nu = Id_{H \otimes G}$ e $\nu\mu = Id_{G \otimes H}$. Portanto, ν é um isomorfismo. □

Proposição 3.6. *Sejam $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ homomorfismo de grupos e suponhamos que A e B agem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservem as ações no seguinte sentido:*

$$(h^g)\beta = (h\beta)^{g\alpha},\ (g^h)\alpha = (g\alpha)^{h\beta},$$

para todos $g \in G$ e $h \in H$. Então, existe um único homomorfismo $\alpha \otimes \beta : G \otimes H \to A \otimes B$ tal que $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = g\alpha \otimes h\beta$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Além disso, se α e β são sobrejetoras, então $\alpha \otimes \beta$ também é.

Demonstração. Para provarmos que existe um único homomorfismo de $G \otimes H$ para $A \otimes B$, basta observarmos que a aplicação $\phi : G \times H \to A \otimes B$ dada por $(g, h)\phi = g\alpha \otimes h\beta$ é uma biderivação. Além disso, se α e β são sobrejetoras, para $a \in A$ e $b \in B$ existem $g \in G$ e $h \in H$ tais que $g\alpha = a$ e $h\beta = b$. Assim, $(g \otimes h)(\alpha \otimes \beta) = a \otimes b$ e, portanto, $\alpha \otimes \beta$ também é sobrejetora. □

A seguir elencamos algumas identidades importantes envolvendo os geradores do produto tensorial não abeliano.

Proposição 3.7. *Para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos*

(a) $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$;

(b) $(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{[g,h]} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$;

(c) $(g^{-1}g^h) \otimes h_1 = (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1}$;

(d) $g_1 \otimes h^{-g}h = (g \otimes h)^{-g_1}(g \otimes h)$;

(e) $[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] = g^{-1}g^h \otimes h_1^{-g_1}h_1$.

Demonstração. **(a)** Reparemos que

$$\begin{aligned} 1 \otimes h &= g^{-1}g \otimes h = ((g^{-1})^g \otimes h^g)(g \otimes h) = (g^{-1} \otimes h)^g(g \otimes h) \\ g \otimes 1 &= g \otimes h^{-1}h = (g \otimes h)(g^h \otimes (h^{-1})^h) = (g \otimes h)(g \otimes h^{-1})^h, \end{aligned}$$

para todos $g \in G$ e $h \in H$. Logo, $(g^{-1} \otimes h)^g = (g \otimes h)^{-1} = (g \otimes h^{-1})^h$.

(b) Sejam $u, v \in G$ e $x, y \in H$. Primeiramente, apliquemos (3.3) em $uv \otimes xy$, em seguida (3.4); assim

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (u \otimes xy)^v (v \otimes xy) = ((u \otimes y)(u^y \otimes x^y))^v (v \otimes y)(v^y \otimes x^y) \\ &= (u \otimes y)^v (u \otimes x)^{yv} (v \otimes y)(v \otimes x)^y. \end{aligned}$$

Agora, expandindo $uv \otimes xy$ primeiro por (3.4) e depois por (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} uv \otimes xy &= (uv \otimes y)((uv) \otimes x)^y = (u \otimes y)^v (v \otimes y)((u \otimes x)^v (v \otimes x))^y \\ &= (u \otimes y)^v (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy} (v \otimes x)^y. \end{aligned}$$

Comparando as duas igualdades acima, temos que

$$(u \otimes x)^{yv}(v \otimes y) = (v \otimes y)(u \otimes x)^{vy}.$$

Pondo $u = g_1^{g^{-1}h^{-1}}$, $v = g$, $x = h_1^{g^{-1}h^{-1}}$ e $y = h$ na igualdade anterior resulta que

$$(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) = (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh}. \tag{3.9}$$

Mas,

$$\begin{aligned} (g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{hg}(g \otimes h) &= (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}hg}(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) \\ (g \otimes h)(g_1^{g^{-1}h^{-1}} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} &= (g \otimes h)(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}. \end{aligned}$$

Então, (3.9) torna-se

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh}.$$

Além disso, pela Proposição 3.4 e sabendo que

$$\begin{aligned} g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} &= (g_1^{g^{-1}h^{-1}})^{gh} = (g^{-1}g_1^{g^{-1}h^{-1}}g)^h = g^{-h}(g_1^{g^{-1}})^{h^{-1}h}g^h = g^{-h}g_1^{g^{-1}}g^h = (g_1^{g^{-1}})^{g^h} \\ &= g_1^{g^{-1}g^h}, \end{aligned}$$

e $h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = (h_1^{g^{-1}})^{h^{-1}gh} \overset{(3.2)}{=} (h_1^{g^{-1}})^{g^h} = h_1^{g^{-1}g^h}$, obtemos

$$(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}h^{-1}gh} \otimes h_1^{g^{-1}h^{-1}gh} = g_1^{g^{-1}g^h} \otimes h_1^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h}.$$

Analogamente, $(g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}$. Portanto,

$$(g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)(g \otimes h) = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}h^{-1}gh} = (g_1 \otimes h_1)^{g^{-1}g^h} = (g_1 \otimes h_1)^{h^{-g}h}.$$

(c) Para todos $g \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned}
(g^{-1}g^h \otimes h_1) &= (g^{-h^{-1}}g \otimes h_1^{h^{-1}})^h = [((g^{-h^{-1}})^g \otimes (h_1^{h^{-1}})^g)(g \otimes h_1^{h^{-1}})]^h \quad \text{(por (3.3))} \\
&= [(g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}g}(g \otimes h^{-1})(g^{h^{-1}} \otimes (hh_1)^{h^{-1}})]^h \qquad \text{(pelo item (a))} \\
& (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h^{-1})^h(g \otimes hh_1) \qquad \text{por (3.4)} \\
&= (g^{-1} \otimes h_1)^{h^{-1}gh}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \qquad \text{(pelo item (a) e (3.4))} \\
&= (g \otimes h_1)^{-[g,h]}(g \otimes h)^{-1}(g \otimes h_1)(g \otimes h)^{h_1} \qquad \text{(pelo item (a))} \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1} \qquad \text{(pelo item (b))}.
\end{aligned}$$

(d) Análogo ao item anterior.

(e) Para todos $g, g_1 \in G$ e $h, h_1 \in H$, temos

$$\begin{aligned}
[g \otimes h, g_1 \otimes h_1] &= (g \otimes h)^{-1}(g_1 \otimes h_1)^{-1}(g \otimes h)(g_1 \otimes h_1) \\
&= (g \otimes h)^{-1}(g \otimes h)^{h_1^{-g_1}h_1} = (g^{-1}g^h \otimes h^{-g_1}h_1).
\end{aligned}$$

□

Definição 3.8. Dizemos que um homomorfismo de grupos $\mu : M \to P$ juntamente com uma ação de P sobre M é um *módulo cruzado* se satisfaz as condições a seguir:

$$\begin{aligned}
(m^p)\mu &= p^{-1}(m\mu)p \\
(m_1)^{m\mu} &= m^{-1}m_1m
\end{aligned}$$

para todos $p \in P$ e $m, m_1 \in M$.

No resultado a seguir são apresentados dois módulos cruzados de $G \otimes H$ e algumas de suas propriedades.

Proposição 3.9. **(a)** *Existem homomorfismo de grupos* $\lambda : G \otimes H \to G$ *e* $\lambda' : G \otimes H \to H$ *tais que*

$$(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h \quad e \quad (g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h;$$

(b) *Os homomorfismos* λ *e* λ' *com as ações dadas na Proposição 3.4 são módulos cruzados;*

(c) *Se* $g \in G, h \in H$ *e* $t \in G \otimes H$, *então* $t\lambda \otimes h = t^{-1}t^h$ *e* $g \otimes t\lambda' = t^{-g}t$;

(d) $t\lambda \otimes t_1\lambda' = [t, t_1]$ *para todo* $t, t_1 \in G \otimes H$;

(e) *As ações de* G *sobre* $Nuc(\lambda')$ *e de* H *sobre* $Nuc(\lambda)$ *são triviais.*

Demonstração. **(a)** Definimos a aplicação $\alpha : G \times H \to G$ pondo $(g, h)\alpha = g^{-1}g^h$. Agora, vamos mostrar que α é uma biderivação. Para todos $g, g_1 \in G$ e $h \in H$, temos

$$(gg_1, h)\alpha \;=\; (gg_1)^{-1}(gg_1)^h = (g^{g_1})^{-1}(g^h)^{g_1}g_1^{-1}g_1^h = (g^{g_1})^{-1}(g^{g_1})^{h^{g_1}}g_1^{-1}g_1^h = (g^{g_1}, h^{g_1})\alpha(g_1, h)\alpha.$$

Da mesma forma prova-se que $(g, hh_1)\alpha = (g, h_1)\alpha(g^{h_1}, h^{h_1})\alpha$, para todos $g \in G$ e $h, h_1 \in H$. Logo, existe um homomorfismo $\lambda : G \otimes H \to G$ tal que $(g \otimes h)\lambda = g^{-1}g^h$ com $g \in G$ e $h \in H$. Para a aplicação λ' procedemos de forma análoga.

(b) Pelo item anterior, λ e λ' são homomorfismos de grupos; então, é suficiente provarmos que λ e λ' satisfazem as duas condições da Definição 3.8, para todos os geradores de $G \otimes H$. Sejam $t = g_1 \otimes h \in G \otimes H$ e $g \in G$. Então,

$$(t^g)\lambda = (g_1^g \otimes h^g)\lambda = (g_1^g)^{-1}(g_1^g)^{h^g} = g_1^{-g}g_1^{hg} = (g_1^{-1}g_1^h)^g = g^{-1}(t)\lambda g,$$

o que verifica a primeira condição. A outra condição é uma consequência imediata do item (b) da Proposição 3.7. De modo análogo mostramos que λ' também é um módulo cruzado.

(c) Segue dos itens (c) e (d) da Proposição 3.7.

(d) É uma consequência do item (e) da Proposição 3.7.

(e) Sejam $t \in Nuc(\lambda')$ e $g \in G$. Então, pelo item (c), temos $1_{G\otimes H} = g \otimes t\lambda' = t^{-g}t$; logo $t^g = t$, o que mostra que G age trivialmente sobre $Nuc(\lambda')$. O caso de H agir trivialmente sobre $Nuc(\lambda)$ é demonstrado de modo análogo. $\square$

Quando dois grupos G e H agem trivialmente um sobre o outro, $G \otimes H$ é isomorfo ao produto tensorial de seus grupos abelianizados, vistos como $\mathbb{Z}$-módulos. Este é o resultado que segue abaixo.

Teorema 3.10. *Se G age trivialmente sobre H e H age trivialmente sobre G, então*

$$G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}.$$

Demonstração. Pela Proposição 3.7 item (e), $G \otimes H$ é um grupo abeliano. Agora, por hipótese, G age trivialmente sobre H, donde temos que $(g \otimes h)\lambda' = h^{-g}h = h^{-1}h = 1$, para todos $g \in G$ e $h \in H$ e, assim, $Nuc(\lambda') = G \otimes H$. Logo, $G \otimes H$ é G-trivial (Proposição 3.9 item (e)). Analogamente, $G \otimes H$ é também H-trivial. Definimos a aplicação $\theta : G^{ab} \times H^{ab} \to G \otimes H$ pondo $(\overline{g}, \overline{h})\theta = g \otimes h$ onde $\overline{g} = G'g$ e $\overline{h} = H'h$. Primeiramente, vamos verificar que θ está bem definida. Se $g, x \in G$ e $h, y \in H$ são tais que $\overline{g} = \overline{x}$ e $\overline{h} = \overline{y}$, então existem $c \in G'$ e $d \in H'$ de maneira que $g = cx$ e $h = dy$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} g \otimes h &= cx \otimes dy = (c \otimes dy)^x(x \otimes dy) = (c \otimes y)^x(c \otimes d)^{yx}(x \otimes y)(x \otimes d)^y \\ &= (c \otimes y)(c \otimes d)(x \otimes y)(x \otimes d) = (c \otimes d)(x \otimes d)(c \otimes y)(x \otimes y) \end{aligned}$$

e, além disso, $[g_1, g_2] \otimes h_1 = g_1 \otimes [h_1, h_2] = 1$, para todos $g_1, g_2 \in G$ e $h_1, h_2 \in H$. Assim, $c \otimes d = x \otimes d = c \otimes y = 1$. Portanto, $g \otimes h = x \otimes y$. Uma vez que G e H agem trivialmente sobre $G \otimes H$, a aplicação θ é $\mathbb{Z}$-bilinear.

Consideremos A um $\mathbb{Z}$-módulo e $f : G^{ab} \times H^{ab} \to A$ uma função $\mathbb{Z}$-bilinear. É fácil ver que a aplicação $f' : G \times H \to A$ definida por $(g, h)f' = (\overline{g}, \overline{h})f$ é uma biderivação. Consequentemente, f' determina o único homomorfismo $\widetilde{f} : G \otimes H \to A$ tal que $(\overline{g}, \overline{h})f = (g, h)f' = (g \otimes h)\widetilde{f}$. Portanto, pela unicidade do produto tensorial de módulos, temos $G \otimes H \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} H^{ab}$. □

A seguir exemplificaremos o teorema anterior calculando o produto tensorial $S_3 \otimes D_8$ quando S_3 e D_8 agem trivialmente um sobre o outro.

Exemplo 3.11. Sejam S_3 o grupo simétrico de ordem 6 e D_8 o grupo diedral de ordem 8 e suponhamos que eles agem trivialmente um sobre o outro. Sabemos pelo resultado anterior que o produto tensorial $S_3 \otimes D_8$ é isomorfo a $S_3^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} D_8^{ab}$. Mas, $S_3^{ab} \cong \mathbb{Z}_2$ e $D_8^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Portanto, pela Proposição 1.35

$$S_3 \otimes D_8 \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2.$$

Observação 3.12. *Se G é um grupo abeliano, a ação por conjugação de G sobre si mesmo é trivial; desta forma, do Teorema 3.10 segue que $G \otimes G \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} G$.*

Vimos como fica o produto tensorial não abeliano quando os grupos envolvidos agem trivialmente sobre o outro. Agora, veremos o que acontece quando um dos grupos é abeliano e age trivialmente sobre o outro.

Teorema 3.13. (D. Guin, [12]) *Sejam A e G dois grupos com A abeliano e G A-trivial. Então,*

$$A \otimes G \cong A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G.$$

Demonstração. A fim de evitar confusão, denotaremos o elemento $a \otimes (g-1) \in A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G$ por $a \otimes' (g-1)$. Em $A \otimes G$ consideraremos A um grupo multiplicativo e, em $A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G$, aditivo. Observemos que, como G é A-trivial, pela Proposição 3.9 item (b), a aplicação $\lambda' : A \otimes G \to G$ definida por $(a \otimes g)\lambda' = g^{-a}g = 1$ é um módulo cruzado. Assim, para todos $a, a_1 \in A$ e $g, g_1 \in G$

$$(a \otimes g)^{-1}(a_1 \otimes g_1)(a \otimes g) = (a_1 \otimes g_1)^{(a\otimes g)\lambda'} = (a_1 \otimes g_1)^{g^{-a}g} = a_1 \otimes g_1.$$

Logo, $A \otimes G$ é um grupo abeliano. Seja

$$\begin{aligned} \phi : A \times G &\rightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G \\ a \otimes g &\mapsto a \otimes' (g-1). \end{aligned}$$

Então, ϕ é uma biderivação. De fato, para todos $a \in A$ e $g_1, g_2 \in G$, temos

$$\begin{aligned} (a, g_1g_2)\phi &= a \otimes' (g_1g_2 - 1) = (a \otimes' [(g_1-1)g_2 + (g_2-1)] \\ &= (a \otimes' (g_1-1)g_2) + (a \otimes' (g_2-1)) = (a \otimes' g_2(g_1-1)^{g_2}) + (a \otimes' (g_2-1)) \\ &= (a^{g_2} \otimes' (g_1^{g_2}-1)) + (a \otimes' (g_2-1)) = (a^{g_2}, g_1^{g_2})\phi + (a, g_2)\phi \\ &= (a, g_2)\phi + (a^{g_2}, g_1^{g_2})\phi \end{aligned}$$

Também se $a, b \in A$ e $g \in G$

$$\begin{aligned}
(ab, g)\phi &= (a+b) \otimes^{'} (g-1) = (a \otimes^{'} (g-1)) + (b \otimes^{'} (g-1)) \\
&= (a^b \otimes^{'} (g-1)^b) + (b \otimes^{'} (g-1)) = (a^b \otimes (g-1)^b) + (b \otimes (g-1)) \\
&= (a^b, g^b)\phi + (b, g)\phi,
\end{aligned}$$

desde que A é abeliano e G é A-trivial. Logo, existe um homomorfismo φ de $A \otimes G$ em $A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G$ tal que $(a \otimes g)\varphi = a \otimes^{'} (g-1)$. Veremos que a aplicação definida abaixo é a inversa de φ

$$\begin{aligned}
\varphi^{'} : A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G &\rightarrow A \otimes G \\
a \otimes^{'} \sum_{g \in G} x_g g &\mapsto \prod_{g \in G} (a \otimes g)^{x_g}.
\end{aligned}$$

Inicialmente, mostraremos que φ' é consistente com as três relações definidoras de $A \otimes_{\mathbb{Z}G} I_G$.

(1) Para todos $a, b \in A$ e $u = \sum_{g \in G} x_g g \in I_G$, temos

$$\begin{aligned}
((a+b) \otimes' u)\varphi' &= \prod_{g \in G} (ab \otimes g)^{x_g} = \prod_{g \in G} [(a^b \otimes g^b)(b \otimes g)]^{x_g} = \prod_{g \in G} [(a \otimes g)(b \otimes g)]^{x_g} \\
&= \prod_{g \in G} (a \otimes g)^{x_g} \prod_{g \in G} (b \otimes g)^{x_g} = (a \otimes' u)\varphi' (b \otimes' u)\varphi'
\end{aligned}$$

(2) Análogo ao item (1).

(3) Sejam $a \in A$, $u = \sum_{g \in G} x_g g \in I_G$ e $r = \sum_{g_1 \in G} y_{g_1} g_1 \in \mathbb{Z}G$. Então

$$\begin{aligned}
(ar \otimes' u)\varphi' &= \left(\sum_{g_1 \in G} y_{g_1} a^{g_1} \otimes' \sum_{g \in G} x_g g \right) \varphi' = \prod_{g \in G} \left(\prod_{g_1 \in G} (a^{g_1})^{y_{g_1}} \otimes g \right)^{x_g} \\
&= \prod_{g \in G} \left(\prod_{g_1 \in G} a^{g_1} \otimes g \right)^{x_g y_{g_1}} = \prod_{g_1 \in G} \prod_{g \in G} [(a \otimes g^{g_1^{-1}})^{g_1}]^{x_g y_{g_1}} \\
&= \prod_{g_1 \in G} \prod_{g \in G} [(a \otimes g_1)^{-1} (a \otimes g_1 g)]^{x_g y_{g_1}} \qquad \text{(por (3.8) e Proposição 3.7)} \\
&= \prod_{g_1 \in G} (a \otimes g_1)^{-y_{g_1} \sum x_g} \prod_{g_1 \in G} \prod_{g \in G} (a \otimes g_1 g)^{x_g y_{g_1}} \\
&= \prod_{g_1 \in G} \prod_{g \in G} (a \otimes g_1 g)^{x_g y_{g_1}} \qquad \text{(pois } \sum_{g \in G} x_g = 0\text{)} \\
&= \prod_{g_2 \in G} (a \otimes g_2)^{z_{g_2}},
\end{aligned}$$

onde $z_{g_2} = \sum_{g_1 g = g_2} y_{g_1} x_g$. Mas, como $ru = \sum z_{g_2} g_2$ temos a seguinte igualdade

$$(a \otimes' ru)\varphi' = \prod_{g_2 \in G} (a \otimes g_2) z_{g_2} = (ar \otimes' u)\varphi',$$

donde segue que φ' é um homomorfismo. Além disso, desde que $u = \sum_{g \in G} x_g g \in I_G$, $\sum_{g \in G} x_g = 0$. Assim, $u = \sum_{g \in G} x_g g - \sum_{g \in G} x_g 1 = \sum_{g \in G} x_g (g-1)$. Logo, para todo $a \in A$ e $u \in I_G$, temos

$$(a \otimes' u)\varphi'\varphi = \prod (a \otimes g)^{x_g} \varphi = \sum_{g \in G} x_g (a \otimes' (g-1)) = a \otimes' \sum_{g \in G} x_g (g-1) = a \otimes' u,$$

ou seja, $\varphi'\varphi = Id$. Claramente $\varphi\varphi' = Id$ e, portanto, φ é um isomorfismo. □

Como consequência dos Teoremas 3.13 e 2.10 obtemos o seguinte resultado:

Corolário 3.14. *Sejam A e G dois grupos com A abeliano e G A-trivial. Então, o núcleo do módulo cruzado $\lambda : A \otimes G \to A$ é isomorfo a $H_1(G, A)$.*

3.2 O Quadrado Tensorial Não Abeliano de um Grupo

Nesta seção passaremos a estudar o quadrado tensorial não abeliano de grupos e teremos por objetivo apresentar alguns resultados de R. Brown, D. L. Johnson e E. F. Robertson [3].

Seja G um grupo que atua sobre si mesmo por conjugação. Definindo a função comutador $G \times G \to G$ por $(g, h) \mapsto [g, h]$, claramente, vemos que ela induz um homomorfismo $\kappa : G \otimes G \to G$ de forma que $(g \otimes h)\kappa = [g, h]$ para todo $g, h \in G$. Denotaremos o núcleo de κ por $J_2(G)$. São consequências imediatas da Proposição 3.9 que $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$ e que G age trivialmente sobre $J_2(G)$.

Um resultado técnico será dado abaixo.

Lema 3.15. *Vale que $cg \otimes cg = g \otimes g$ e $gc \otimes gc = g \otimes g$ para todos $g \in G$ e $c \in G'$.*

Demonstração. Suponhamos que $g \in G$ e $c = [x, y] \in G'$. Sabendo que $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$ e que G age trivialmente sobre $J_2(G)$, temos

$$\begin{aligned}
[x,y]g \otimes [x,y]g &= ([x,y] \otimes g)^g ([x,y] \otimes [x,y])^{g^2} (g \otimes g)(g \otimes [x,y])^g \quad \text{(por (3.1) e (3.2))} \\
&= (g \otimes g)(([x,y] \otimes g)(g \otimes [x,y]))^g \\
&= (g \otimes g)[(x \otimes y)^{-1}(x \otimes y)^g (x \otimes y)^{-g}(x \otimes y)]^g \quad \text{(pela Proposição 3.7(c) e (d))} \\
&= g \otimes g.
\end{aligned}$$

Agora, se c é um produto de comutadores, isto é, $c = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]$, então por indução, obtemos

$$cg \otimes cg = [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]g \otimes [x_1, y_1] \dots [x_n, y_n]g = g \otimes g.$$

Analogamente, provamos que $gc \otimes gc = g \otimes g$. □

A seguir vamos definir o funtor quadrático de Whitehead, denotado por Γ.

Definição 3.16. Dado um grupo abeliano (aditivo) A, $\Gamma(A)$ é o grupo gerado por todos os símbolos γa com $a \in A$ sujeito às seguintes relações:

$$\gamma(-a) = \gamma(a) \tag{3.10}$$

$$\gamma(a+b+c) + \gamma a + \gamma b + \gamma c = \gamma(a+b) + \gamma(b+c) + \gamma(a+c) \tag{3.11}$$

para todos os elementos $a, b, c \in A$.

Segue de (3.11) com $a = b = c = 0$ que $\gamma 0$ é o elemento neutro de $\Gamma(A)$. Com isso, fazendo $c = 0$ em (3.11), temos

$$\gamma a + \gamma b = \gamma b + \gamma a,$$

ou seja, $\Gamma(A)$ é um grupo abeliano.

A seguir veremos que existe um homomorfismo de $\Gamma(G^{ab})$ no quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$.

Proposição 3.17. *Existe um homomorfismo $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$ tal que $(\gamma \overline{g})\psi = g \otimes g$ onde $\overline{g}$ denota a classe de g módulo G'.*

Demonstração. Sejam $X = \{\gamma\overline{g}; g \in G\}$ e $\varphi : X \to G \otimes G$ a aplicação definida por $(\gamma\overline{g})\varphi = g \otimes g$. Primeiramente, veriquemos que φ está bem definida. Dados $g_1, g_2 \in G$ tais que $\overline{g_1} = \overline{g_2}$, então $g_1 = cg_2$ para algum $c \in G'$. Assim, segue do resultado anterior que

$$(\gamma\overline{g_1})\varphi = g_1 \otimes g_1 = cg_2 \otimes cg_2 = g_2 \otimes g_2 = (\gamma\overline{g_2});$$

logo φ está bem definida.

Agora, mostraremos que φ é consistente com as relações definidoras (3.10) e (3.11) de $\Gamma(G^{ab})$. Temos, pela Proposição 3.7 item (a) e do fato que G age trivialmente sobre $J_2(G)$, que para todo $g \in G$

$$(\gamma(\overline{g^{-1}}))\varphi = g^{-1} \otimes g^{-1} = (g^{-1} \otimes g^{-1})^g = (g \otimes g^{-1})^{-1} = (g \otimes g)^{g^{-1}} = g \otimes g = (\gamma(\overline{g}))\varphi,$$

o que mostra a consistência de φ com a relação (3.10).

Além disso, usando os fatos que $g \otimes g \in J_2(G)$, para todo $g \in G$, $J_2(G)$ é central em $G \otimes G$ e G-trivial, obtemos

$$\begin{aligned}
(\gamma(\overline{abc}))\varphi(\gamma\overline{a})\varphi(\gamma\overline{b})\varphi(\gamma\overline{c})\varphi &= ((ab)c \otimes ab(c))(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\
&= (ab \otimes (ab)c)^c(c \otimes a(bc))(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\
&= (ab \otimes c)^c(ab \otimes ab)^{c^2}(c \otimes bc)(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a)(b \otimes b)(c \otimes c) \\
&= (a \otimes c)^{bc}(b \otimes c)^c(ab \otimes ab)(c \otimes c)(c \otimes b)^c(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a)(b \otimes b) \\
&\quad (c \otimes c) \\
&= (ab \otimes ab)(a \otimes c)^{bc}(b \otimes c)^c(b \otimes b)^{c^2}(c \otimes c)(c \otimes b)^c(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a) \\
&\quad (c \otimes c) \\
&= (ab \otimes ab)(a \otimes c)^{bc}(bc \otimes bc)(c \otimes a)^{bc}(a \otimes a)(c \otimes c) \\
&= (ab \otimes ab)(bc \otimes bc)[(a \otimes c)^c(a \otimes a)^{c^2}(c \otimes c)(c \otimes a)^c]^{b^c} \\
&= (ab \otimes ab)(bc \otimes bc)(ac \otimes ac) \\
&= (\gamma\overline{ab})\varphi(\gamma\overline{bc})\varphi(\gamma\overline{ac})\varphi.
\end{aligned}$$

Portanto, existe um homomorfismo $\psi : \Gamma(G^{ab}) \to G \otimes G$ estendendo φ. $\square$

Como $Im(\psi) \subseteq J_2(G)$ e $J_2(G)$ é um subgrupo central de $G \otimes G$, $Im(\psi)$ é um subgrupo normal de $G \otimes G$. Daí, o grupo quociente $G \otimes G/Im(\psi)$ faz sentido, o qual será chamado *quadrado exterior não abeliano* de G e denotado por $G \wedge G$. Da Proposição 1.14 segue que existe um homomorfismo $\kappa' : G \wedge G \to G'$ tal que $\rho\kappa' = \kappa$ onde $\rho : G \otimes G \to G \wedge G$ é a projeção natural. Em [18], C. Miller mostrou que o núcleo de κ' é isomorfo ao multiplicador de Schur $M(G)$. Desta forma, se o grupo G é abeliano, então $Nuc(\kappa') = G \wedge G$ e, assim, $M(G) \cong G \wedge G$.

Consideremos $i : J_2(G) \to G \otimes G$ a aplicação inclusão e $\beta = i\rho\alpha^{-1}$ onde α é o isomorfismo de $M(G)$ sobre $Nuc(\kappa')$. A função β é sobrejetiva. Com efeito, seja $y \in M(G)$. Então, existe $x \in Nuc(\kappa')$ tal que $y = x\alpha^{-1}$. Agora, como $x \in Nuc(\kappa') \subset G \wedge G$, existe $\hat{x} \in G \otimes G$ de forma que $x = \hat{x}\rho$. Disso segue que $1 = x\kappa' = \hat{x}\rho\kappa'$, ou seja, $\hat{x} \in Nuc(\kappa) = Im(i) = J_2(G)$. Logo,

$$y = x\alpha^{-1} = \hat{x}\rho\alpha^{-1} = \hat{x}i\rho\alpha^{-1} = \hat{x}\beta.$$

Com isso, temos o diagrama comutativo (I) com linhas exatas e extensões centrais como colunas

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 1 & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\Gamma(G^{ab}) & \xrightarrow{\psi} & J_2(G) & \xrightarrow{\beta} & M(G) & \to & 1 \\
=\downarrow & & i\downarrow & & \downarrow\alpha & & \\
\Gamma(G^{ab}) & \xrightarrow{\psi} & G \otimes G & \xrightarrow{\rho} & G \wedge G & \to & 1 \\
 & & k\downarrow & & \downarrow k' & & \\
 & & G' & \overrightarrow{=} & G' & & \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 1 & & 1 & &
\end{array} \qquad \text{(I)}$$

É bem conhecido que o multiplicador de Schur de um grupo finito é finito (Veja, por exemplo [16], pág. 14). Em [34] J. H. C. Whitehead mostrou que se A é um grupo abeliano finito, então $\Gamma(A)$ também é finito. Dessa forma, se G é um grupo finito, então G', $\Gamma(G^{ab})$ e $M(G)$ são finitos. Assim, da segunda coluna do diagrama (I) segue a finitude de $G \wedge G$ e, com isso, da segunda linha do mesmo diagrama concluimos que $G \otimes G$ é finito. No final da próxima seção, no Teorema 3.30, veremos que isso é mais geral, isto é, o produto tensorial não abelianos de grupos finitos é finito.

3.3 O Grupo $\eta(G, H)$

O objetivo desta seção é definir o grupo $\eta(G, H)$, onde G e H são grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Também apresentaremos algumas propriedades de tal grupo e a sua relação com o produto tensorial não abeliano $G \otimes H$. Esta seção é de fundamental importância para as seções posteriores.

Sejam G e H dois grupos agindo compativelmente um sobre o outro e H^{φ} uma cópia de H, isomorfo por $\varphi : H \to H^{\varphi}$ tal que $h \mapsto h^{\varphi}$, para todo $h \in H$. Então, definimos o grupo

$$\eta(G, H) := \langle G, H^{\varphi} \mid [g, h^{\varphi}]^{g_1} = [g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}],\ [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}} = [g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}],\ \forall g, g_1 \in G \text{ e } h, h_1 \in H\rangle.$$

Com isso queremos dizer que $\eta(G, H) = \dfrac{G * H^{\varphi}}{\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}}$, onde

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{g_1}[g^{g_1}, (h^{g_1})^{\varphi}]^{-1},\ [g, h^{\varphi}]^{h_1^{\varphi}}[g^{h_1}, (h^{h_1})^{\varphi}]^{-1} \mid g, g_1 \in G,\ h, h_1 \in H\}.$$

Quando $G = H$ e as ações são por conjugação, $\eta(G, G)$ é o grupo

$$\nu(G) := \langle G, G^{\varphi} \mid [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3} = [g_1^{g_3}, (g_2^{g_3})^{\varphi}] = [g_1, g_2^{\varphi}]^{g_3^{\varphi}},\ \forall g_1, g_2, g_3 \in G\rangle$$

o qual foi definido por N. R. Rocco em [26]. Neste trabalho ele mostrou que existe uma relação entre o subgrupo comutador $[G, G^{\varphi}]$ de $\nu(G)$ e o quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$. Esta relação é dada no seguinte resultado: $[G, G^{\varphi}] \cong G \otimes G$.

Nesta seção G e H denotam grupos que agem compativelmente um sobre o outro. A seguir daremos um exemplo do grupo $\eta(G, H)$.

Exemplo 3.18. Consideremos dois grupos G e H com apresentações $G = \langle a|a^3\rangle$ e $H = \langle b|b^2\rangle$, respectivamente. Suponhamos que H é G-trivial e que H age sobre G da seguinte forma: $a^b = a^{-1}(= a^2)$. Pela definição acima:

$$\begin{aligned}\eta(G, H) = \langle\ & a, b^{\varphi} \mid a^3 = 1,\ (b^{\varphi})^2 = 1,\ [a, b^{\varphi}]^a = [a, b^{\varphi}],\ [a, b^{\varphi}]^{a^2} = [a, b^{\varphi}],\ [a, b^{\varphi}]^{b^{\varphi}} = [a^2, b^{\varphi}],\\ & [a^2, b^{\varphi}]^a = [a^2, b^{\varphi}],\ [a^2, b^{\varphi}]^{a^2} = [a^2, b^{\varphi}],\ [a^2, b^{\varphi}]^{b^{\varphi}} = [a, b^{\varphi}]\rangle.\end{aligned}$$

Agora, reparemos que

$$[a^2, b^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}]^a[a, b^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}][a, b^{\varphi}] = [a, b^{\varphi}]^2$$

e, assim,

$$1 = [1, b^\varphi] = [a^3, b^\varphi] = [a^2, b^\varphi]^a [a, b^\varphi] = [a^2, b^\varphi][a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^2 [a, b^\varphi] = [a, b^\varphi]^3,$$

donde segue que, $[a, b^\varphi]^{-1} = [a^2, b^\varphi]$. Logo,

$$\eta(G, H) = \langle a, b^\varphi \mid a^3 = 1,\ (b^\varphi)^2 = 1,\ [a, b^\varphi]^a = [a, b^\varphi],\ [a, b^\varphi]^{b^\varphi} = [a, b^\varphi]^{-1} \rangle.$$

Sejam $V = \langle x, y \mid x^3,\ y^3,\ [x, y] \rangle$ ($\cong C_3 \times C_3$) e α o automorfismo de V dado por $x \mapsto xy$ e $y \mapsto y^{-1}$. Agora, consideremos o produto semidireto $< \alpha > \ltimes V$. Não é difícil ver que a aplicação θ definida por $a \mapsto (1_{Aut(V)}, x)$, $b^\varphi \mapsto (\alpha, 1_V)$ é consistente com as relações definidoras de $\eta(G, H)$. Assim, θ determina um homomorfismo $\theta_1 : \eta(G, H) \to < \alpha > \ltimes V$. A aplicação $\theta_2 :< \alpha > \ltimes V \to \eta(G, H)$ dada por $(\alpha^\varepsilon, x^i y^j) \mapsto a^i [a, b^\varphi]^j (b^\varphi)^\varepsilon$, para todos $i, j \in \{0, 1, 2\}$ e $\varepsilon \in \{0, 1\}$ é um homomorfismo de grupos. Além disso, $\theta_1\theta_2 = 1_{\eta(G,H)}$ e $\theta_2\theta_1 = 1_{<\alpha>\ltimes V}$, donde segue que $\eta(G, H)$ é isomorfo a $< \alpha > \ltimes V$.

Observação 3.19. *Sejam $\theta : G \to \eta(G, H)$ e $\vartheta : H \to \eta(G, H)$ homomorfismos canônicos. Estes homomorfismos são injetores. De fato, mostraremos a injetividade de θ, a de ϑ é análoga. Suponhamos que $G = \langle X|R \rangle$ e $H^\varphi = \langle Y|S \rangle$ são apresentações de G e H, respectivamente, e consideremos a aplicação $\rho : X \cup Y \to G$ definida por:*

$$(a)\rho = \begin{cases} a, & se \quad a \in X \\ 1, & se \quad a \in Y \end{cases}$$

Claramente, ρ é consistente com as relações definidoras de $G * H^\varphi$ e $(X \cup Y)\rho$ gera G. Logo, estende-se a um epimorfismo $\rho_1 : G * H^\varphi \to G$. Temos que $\langle R \rangle^{G*H^\varphi} \subseteq Nuc(\rho_1)$, uma vez que, $([g, h^\varphi]^{g_1} [g^{g_1}, (h^{g_1})^\varphi]^{-1})\rho_1 = 1$ e $([g, h^\varphi]^{h_1^\varphi} [g^{h_1}, (h^{h_1})^\varphi]^{-1})\rho_1 = 1$. Assim, ρ_1 induz um homomorfismo $\theta' : \eta(G, H^\varphi) \to G$ e é claro que $\theta\theta' = Id$. Portanto, θ é injetora. Com isso, podemos identificar G e H^φ com suas imagens em $\eta(G, H)$.

Definição 3.20. Um subgrupo M de G será chamado de H-*subgrupo* se $m^h \in M$, para todos $m \in M$ e $h \in H$.

Proposição 3.21. *Sejam M, N subgrupos normais de G e H, respectivamente. Se M é um H-subgrupo de G e N um G-subgrupo de H, então:*

(i) $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$;

(ii) $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$, *para todos* $i, j \geq 1$;

(iii) $[M_i, (N_j)^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$, *para todos* $i, j \geq 0$.

Demonstração. **(i)** Segue das relações definidoras de $\eta(G,H)$ que $[m, n^{\varphi}]^g = [m^g, (n^g)^{\varphi}]$, para todos $m \in M$, $n \in N$ e $g \in G$. Agora, como $M \trianglelefteq G$ e N é um G-subgrupo de H, então G normaliza $[M, N^{\varphi}]$. Usando a outra relação definidora de $\eta(G,H)$ provamos que H^{φ} também normaliza $[M, N^{\varphi}]$, donde seque que $[M, N^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$.

(ii) Como $\gamma_i(M)$ char M e $M \trianglelefteq G$, então $\gamma_i(M) \triangleleft G$. Para $i = 1$, temos que $\gamma_1(M) = M$; logo $\gamma_1(M)$ é um H-subgrupo de G. Agora, suponhamos que $\gamma_{i-1}(M)$ é um H-subgrupo de G. Então, dado $x = [x_{i-1}, m] \in \gamma_i(M)$, com $x_{i-1} \in \gamma_{i-1}(M)$ e $m \in M$, temos $x^h = [x_{i-1}, m]^h = [x_{i-1}^h, m^h] \in [\gamma_{i-1}(M), M] = \gamma_i(M)$, para todo $h \in H$. Analogamente, $\gamma_j(N)$ é um G-subgrupo de H. Portanto, pelo item anterior, $[\gamma_i(M), (\gamma_j(N))^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$.

(iii) Análogo ao item anterior. $\square$

Denotaremos o subgrupo normal $[G, H^{\varphi}]$ de $\eta(G,H)$ por $\tau(G,H)$. Observamos que o grupo $\eta(G,H)$ pode ser descrito da seguinte forma: $\eta(G,H) = \tau(G,H)GH^{\varphi}$. Isso segue do fato que $G \cup H^{\varphi}$ gera $\eta(G,H)$, $\tau(G,H) \triangleleft \eta(G,H)$ e $h^{\varphi}g = [g^{-1}, h^{-\varphi}]^{-1}gh^{\varphi}$, para todos $g \in G$ e $h \in H$.

A seguir apresentaremos um importante resultado que mostra a existência de um isomorfismo entre o subgrupo $\tau(G,H)$ de $\eta(G,H)$ e o produto tensorial não abeliano de grupos $G \otimes H$.

Teorema 3.22. *Existe um isomorfismo* $\alpha : \tau(G,H) \to G \otimes H$ *dado por* $([g, h^{\varphi}])\alpha = g \otimes h$, *para todos* $g \in G$ *e* $h \in H$.

Demonstração. Consideremos o produto livre $G * H^{\varphi}$. Segue da Proposicao 1.18 que o subgrupo $[G, H^{\varphi}]$ de $G * H^{\varphi}$ é livre, livremente gerado pelos comutadores $[g, h^{\varphi}]$, onde $g \in G \backslash \{1\}, h^{\varphi} \in H^{\varphi} \backslash \{1\}$. Sejam

$$R = \{[g, h^{\varphi}]^{-x}[g^x, (h^x)^{\varphi}],\ [g, h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y, (h^y)^{\varphi}] \mid g, x \in G \backslash \{1\},\ h, y \in H \backslash \{1\}\}$$

e S o conjunto

$$\{[gg_1,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}][g_1,h^{\varphi}],\ [g,(hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g,h_1^{\varphi}][g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}]\}\mid g,g_1,\in G\backslash\{1\},h,h_1,\in H\backslash\{1\}.$$

Como $[G,H^{\varphi}]$ é um subgrupo normal de $G*H^{\varphi}, R, S$ são subconjuntos de $[G,H^{\varphi}]$. Por definição, $\eta(G,H)=(G*H^{\varphi})/\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}$.

Afirmação (1): $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}\trianglelefteq G*H^{\varphi}$.

Com efeito, sejam $s=[gg_1,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}][g_1,h^{\varphi}]$ um elemento de S e $x\in G$. Então, pelas identidades de comutadores, temos

$$\begin{aligned}
s^x &= [gg_1,h^{\varphi}]^{-x}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^x[g_1,h^{\varphi}]^x\\
&= ([(gg_1)x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})^{-1}([g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1})([g_1x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})\\
&= ([x,h^{\varphi}][gg_1x,h^{\varphi}]^{-1})([g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1})[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}]\cdot\\
&\cdot\ [g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[gg_1x,h^{\varphi}][gg_1x,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}]([g_1x,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})\\
&= ((s_1)^{-[g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[gg_1x,h^{\varphi}]}s_2)^{[x,h^{\varphi}]},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
s_1 &= [g^{g_1}x,(h^{g_1})^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}][x,(h^{g_1})^{\varphi}],\\
s_2 &= [gg_1x,h^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1x},(h^{g_1x})^{\varphi}][g_1x,h^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Logo, $s^x\in\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$. Para $y\in H$, notemos que

$$(g^y)^{g_1^y}=g^{g_1y}\ \text{ e }\ (h^y)^{g_1^y}=h^{g_1y}. \tag{3.12}$$

Aplicando as identidades de comutadores, novamente, obtemos:

$$\begin{aligned}
s^{y^{\varphi}} &= [gg_1,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^{g_1},(h^{g_1})^{\varphi}]^{y^{\varphi}}[g_1,h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}\\
&= ([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}])([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])([g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
&\overset{(3.12)}{=} ([gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}])[g^yg_1^y,(h^y)^{\varphi}][g^yg_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}]\cdot\\
&\cdot\ [g_1^y,(h^y)^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1y},(h^{g_1y})^{\varphi}]^{-1}([g^{g_1},y^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}])\cdot\\
&\cdot\ [g_1^y,(h^y)^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}([g_1,y^{\varphi}]^{-1}[g_1,(hy)^{\varphi}])\\
&= s_3s_4[g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}s_5^{-1}[g_1^y,(h^y)^{\varphi}]s_6^{-1},
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} s_3 &= [gg_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[gg_1,y^{\varphi}]g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}], \\ s_4 &= [g^y g_1^y,(h^y)^{\varphi}]^{-1}[(g^y)^{g_1^y},((h^y)^{g_1^y})^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}], \\ s_5 &= [g^{g_1},(h^{g_1}y)^{\varphi}]^{-1}[g^{g_1},y^{\varphi}][g^{g_1 y},(h^{g_1 y})^{\varphi}], \\ s_6 &= [g_1,(hy)^{\varphi}]^{-1}[g_1,y^{\varphi}][g_1^y,(h^y)^{\varphi}]. \end{aligned}$$

Isto implica que $s^{y^{\varphi}} \in \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$. Analogamente, verifica-se que o conjugado de um elemento em S do tipo $[g,(hh_1)^{\varphi}]^{-1}[g,h_1^{\varphi}][g^{h_1},(h^{h_1})^{\varphi}]$ por um elemento em $G*H^{\varphi}$ está em $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$, donde concluímos que $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G*H^{\varphi}$.

Afirmação (2): Consideremos

$$r=[g,h^{\varphi}]^{-x}[g^x,(h^x)^{\varphi}] \ \text{ e } \ r'=[g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y,(h^y)^{\varphi}]$$

elementos do conjunto R. Então,

$$\begin{aligned} r &= [g,h^{\varphi}]^{-x}[g^x,(h^x)^{\varphi}] = ([gx,h^{\varphi}][x,h^{\varphi}]^{-1})^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}] \\ &= [x,h^{\varphi}][gx,h^{\varphi}]^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}] = [x,h^{\varphi}]s[x,h^{\varphi}]^{-1}, \end{aligned}$$

sendo $s=[gx,h^{\varphi}]^{-1}[g^x,(h^x)^{\varphi}][x,h^{\varphi}] \in S$. Também,

$$\begin{aligned} r' &= [g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}[g^y,(h^y)^{\varphi}] = ([g,y^{\varphi}]^{-1}[g,(hy)^{\varphi}])^{-1}[g^y,(h^y)^{\varphi}] \\ &= [g,(hy)^{\varphi}]^{-1}[g,y^{\varphi}][g^y,(h^y)^{\varphi}] = s' \in S. \end{aligned}$$

Assim, $R \subseteq \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$ e $S \subseteq \langle R\rangle^{G*H^{\varphi}}$. Como $\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]} \trianglelefteq G*H^{\varphi}$, temos $\langle R\rangle^{G*H^{\varphi}} = \langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]}$, concluindo a prova da Afirmação (2).

Das afirmações (1) e (2) segue que $\eta(G,H)=(G*H^{\varphi})/(\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]})$ e, consequentemente, $\tau(G,H)=([G,H^{\varphi}])/(\langle S\rangle^{[G,H^{\varphi}]})$. Com isso, o homomorfismo γ do grupo livre $[G,H^{\varphi}]$ sobre $G\otimes H$ tal que $([g,h^{\varphi}])\gamma = g\otimes h$ induz um epimorfismo $\alpha:\tau(G,H)\to G\otimes H$. Por outro lado, a aplicação $\beta: G\otimes H \to \tau(G,H)$ definida sobre os geradores por $(g\otimes h)\beta=[g,h^{\varphi}]$ estende-se a um epimorfismo de $G\otimes H$ sobre $\tau(G,H)$. Além disso, $\alpha\beta = 1_{\tau(G,H)}$ e $\beta\alpha = 1_{G\otimes H}$, o que conclui a prova. □

Observação 3.23. Vimos no teorema anterior que existe um isomorfismo entre os grupos $\tau(G,H)$ e $G\otimes H$. Mas, se tomarmos $J\leq G$ e $K\leq H$, nem sempre o seguinte isomorfismo ocorre $[J, K^{\varphi}] \cong J \otimes K$. Por exemplo, consideremos o grupo diedral de ordem 8, $D_8 = \{I, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \beta, \beta\alpha, \beta\alpha^2, \beta\alpha^3\}$, onde $\alpha^4 = 1$, $\beta^2 = 1$ e $\alpha^i\beta = \beta\alpha^{4-i}$, para $i = 1, 2, 3$. Em $\eta(D_8, D_8)$ temos $[\alpha^2, (\alpha^2)^{\varphi}] = [\alpha, \alpha^{\varphi}]^4 = [\alpha^4, \alpha^{\varphi}] = 1$ e, assim, $[\langle\alpha^2\rangle, \langle\alpha^2\rangle^{\varphi}] = \{1\}$. Por outro lado, $\langle\alpha^2\rangle \otimes \langle\alpha^2\rangle \cong \langle\alpha^2\rangle \otimes_{\mathbb{Z}} \langle\alpha^2\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_2$. Entretanto, se J e K são subgrupos normais de um grupo G, então o subgrupo $[J, K^{\varphi}]$ de $\eta(G, G)$ é uma imagem epimórfica do produto tensorial não abeliano de grupos $J \otimes K$, onde as ações consideradas neste produto tensorial são por conjugação. De fato, seja $X = \{j \otimes k \mid j \in J \text{ e } k \in K\}$ e definamos a aplicação $\theta : X \to [J, K^{\varphi}]$ pondo $(j \otimes k)\theta = [j, k^{\varphi}]$. Claramente, θ é consistente com as relações definidoras de $J \otimes K$; logo, pelo Teste da Substituição, existe um epimorfismo $\theta' : J \otimes K \to [J, K^{\varphi}]$.

Observamos que existe uma outra construção de grupo isomorfa a $\eta(G, H)$ devida a E. Ellis e F. Leonard e que também contém uma cópia isomórfica de $G \otimes H$. O leitor interessado em ver os detalhes pode consultar [8].

Nas duas proposições seguintes, estaremos apresentando diversas relações que serão de grande utilidade para a sequência deste trabalho.

A demonstração da proposição a seguir será omitida, uma vez que ela é uma consequência do Teorema 3.22 e Proposições 3.7 e 3.9.

Proposição 3.24. **(i)** *Para todos $g, x \in G$ e $h, y \in H$, temos:*

(a) $[g, h^{\varphi}]^{[x, y^{\varphi}]} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-1}x^y} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-x}y)^{\varphi}}$;

(b) $[g, h^{\varphi}]^{[x, y^{\varphi}]^{-1}} = [g, h^{\varphi}]^{x^{-y}x} = [g, h^{\varphi}]^{(y^{-1}y^x)^{\varphi}}$;

(c) $[g^{-1}g^h, y^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-1}[g, h^{\varphi}]^{y^{\varphi}}$;

(d) $[x, (h^{-g}h)^{\varphi}] = [g, h^{\varphi}]^{-x}[g, h^{\varphi}]$;

(e) $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]] = [g^{-1}g^h, (y^{-x}y)^{\varphi}]$;

(f) $[[g, h^{\varphi}], [x, y^{\varphi}]^{-1}] = [g^{-1}g^h, (y^{-1}y^x)^{\varphi}]$.

(ii) *Existem homomorfismo de grupos $\lambda : \tau(G, H) \to G$ e $\mu : \tau(G, H) \to H$ tais que $([g, h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^h$ e $([g, h^{\varphi}])\mu = h^{-g}h$;*

(iii) $[(t)\lambda, ((t_1)\mu)^{\varphi}] = [t, t_1]$, *para todos $t, t_1 \in \tau(G, H)$.*

O subgrupo $\langle g^{-1}g^h \mid g \in G,\ h \in H\rangle$ de G será denotado por $[G, H]$. Agora, notemos que, se G e H são grupos agindo compativelmente um sobre o outro, então $[G, H] = Im(\lambda)$ e $[H, G] = Im(\mu)$, onde λ e μ são os homomorfismos da proposição anterior.

Quando $G = H$ em $\eta(G, H)$ e as ações são todas por conjugação, obtemos as relações abaixo:

Proposição 3.25. (N. R. Rocco, [26]) *São válidas as seguintes relações em $\nu(G)$:*

(a) $[x, y^{\varphi}]^{[z, w^{\varphi}]} = [x, y^{\varphi}]^{[z,w]}$, *para todos* $x, y, z, w \in G$;

(b) $[x, y^{\varphi}, z] = [x, y, z^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}, z^{\varphi}]$ *e* $[x^{\varphi}, y, z] = [x^{\varphi}, y, z^{\varphi}] = [x^{\varphi}, y^{\varphi}, z]$, *para todos* $x, y, z \in G$;

(c) $[x, x^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, *para todo* $x \in G$;

(d) $[xy, (xy)^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}][x, x^{\varphi}][y, y^{\varphi}]$, *para todos* $x, y \in G$;

(e) $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}]$ *é central em* $\nu(G)$, *para todos* $x, y \in G$;

(f) $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = [y, x^{\varphi}][x, y^{\varphi}]$, *para todos* $x, y \in G$;

(g) $[cx, (cx)^{\varphi}] = [x, x^{\varphi}]$ *e* $[xc, (xc)^{\varphi}] = [x, x^{\varphi}]$, *para todos* $x \in G$ *e* $c \in G'$. *Em particular,* $[c, c^{\varphi}] = 1$, *para todo* $c \in G'$.

(h) Se $y \in G'$, *então* $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = 1$, *para todo* $x \in G$;

Demonstração. **(a)** Pela definição de $\nu(G)$ segue:

$$\begin{aligned}
[x, y^{\varphi}]^{[z, w^{\varphi}]} &= [x, y^{\varphi}]^{z^{-1}w^{-\varphi}zw^{\varphi}} = [x^{z^{-1}}, (y^{z^{-1}})^{\varphi}]^{w^{\varphi}zw^{\varphi}} \\
&= [x^{z^{-1}w^{-1}zw}, (y^{z^{-1}w^{-1}zw})^{\varphi}] = [x^{[z,w]}, (y^{[z,w]})^{\varphi}] \\
&= [x, y^{\varphi},]^{[z,w]}.
\end{aligned}$$

(b) Usando $[x, y] = x^{-1}x^y$ e algumas relações de comutadores, obtemos:

$$\begin{aligned}
[x, y, z^\varphi] &= [x^{-1}x^y, z^\varphi] = [x^{-1}, z^\varphi]^{x^y}[x^y, z^\varphi] = [x^{-1}, z^\varphi]^{y^{-1}xy}[x, (z^{y^{-1}})^\varphi]^y \\
&= [x^{-1}, z^\varphi]^{xx^{-1}y^{-1}xy}[x, (yzy^{-1})^\varphi]^y = [x, z^\varphi]^{-x^{-1}y^{-1}xy}[x, (yzy^{-1})^\varphi]^y \\
&= [x, z^\varphi]^{-[x,y]}[x, (y^{-1})^\varphi]^y[x, (yz)^\varphi] = [x, z^\varphi]^{-[x,y]}[x, y^\varphi]^{-1}[x, z^\varphi][x, y^\varphi]^z \\
&\overset{(a)}{=} [x, z^\varphi]^{-[x,y^\varphi]}[x, y^\varphi]^{-1}[x, z^\varphi][x, y^\varphi]^z = [x, y^\varphi]^{-1}[x, z^\varphi]^{-1}[x, z^\varphi][x, y^\varphi]^z \\
&= [x, y^\varphi]^{-1}[x, y^\varphi]^z \\
&= [x, y^\varphi, z].
\end{aligned}$$

Agora, observemos que:

$$\begin{aligned}
[x, y^\varphi, z] &= [x, y^\varphi]^{-1}[x, y^\varphi]^z = [x, y^\varphi]^{-1}[x^z, (y^z)^\varphi] = [x, y^\varphi]^{-1}[x, y^\varphi]^{z^\varphi} \\
&= [x, y^\varphi, z^\varphi].
\end{aligned}$$

Logo, $[x, y, z^\varphi] = [x, y^\varphi, z] = [x, y^\varphi, z^\varphi]$, para todos $x, y, z \in G$. De forma análoga, prova-se que $[x^\varphi, y, z] = [x^\varphi, y, z^\varphi] = [x^\varphi, y^\varphi, z]$, para todos $x, y, z \in G$.

(c) Segue de (b) que $[x, x^\varphi, y] = [x, x, y^\varphi] = [1, y^\varphi] = 1$, para todos $x, y \in G$. Além disso,

$$[x, x^\varphi, y^\varphi] = [x, x^\varphi]^{-1}[x, x^\varphi]^{y^\varphi} = [x, x^\varphi]^{-1}[x, x^\varphi]^y = [x, x^\varphi, y] = 1.$$

Portanto, $[x, x^\varphi]$ é central em $\nu(G)$, para todo $x \in G$.

(d) Para todos $x, y \in G$, temos

$$\begin{aligned}
[xy, (xy)^\varphi] &= [x, (xy)^\varphi]^y[y, (xy)^\varphi] \\
&= [x, y^\varphi]^y[x, x^\varphi]^{y^\varphi y}[y, y^\varphi][y, x^\varphi]^{y^\varphi} \\
&= [x, y^\varphi]^y[x, x^\varphi][y, y^\varphi][y, x^\varphi]^{y^\varphi},
\end{aligned}$$

pois, como $[x, x^\varphi]$ em central em $\nu(G)$, então $[x, x^\varphi]^{y^\varphi y} = [x, x^\varphi]$. Daí, novamente por (c) podemos escrever

$$[xy, (xy)^\varphi] = [x, y^\varphi]^y[y, x^\varphi]^{y^\varphi}[x, x^\varphi][y, y^\varphi], \tag{3.13}$$

ou ainda,

$$[xy, (xy^\varphi)][y, y^\varphi]^{-1}[x, x^\varphi]^{-1} = [x, y^\varphi]^y[y, x^\varphi]^{y^\varphi}.$$

Agora, reparemos que o primeiro membro da igualdade acima é central em $\nu(G)$, consequentemente o segundo membro também o é. Assim, usando a definição de $\nu(G)$, obtemos

$$[x, y^{\varphi}]^{y}[y, x^{\varphi}]^{y^{\varphi}} = [x, y^{\varphi}]^{y^{\varphi}}[y, x^{\varphi}]^{y^{\varphi}} = ([x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}])^{y^{\varphi}}; \tag{3.14}$$

logo,

$$\begin{aligned}
[x, y^{\varphi}]^{y}[y, x^{\varphi}]^{y^{\varphi}} &= [x, y^{\varphi}]^{y}[y, x^{\varphi}]^{y^{\varphi}}(y^{\varphi}y^{-\varphi}) = y^{\varphi}[x, y^{\varphi}]^{y}[y, x^{\varphi}]^{y^{\varphi}}y^{-\varphi} \\
&\overset{(3.14)}{=} y^{\varphi}([x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}])^{y^{\varphi}}y^{-\varphi} = y^{\varphi}y^{-\varphi}([x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}])y^{\varphi}y^{-\varphi} \\
&= [x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}].
\end{aligned}$$

Substituindo em (3.13), chegamos $[xy, (xy)^{\varphi}] = [x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}][x, x^{\varphi}][y, y^{\varphi}]$.

(e) Do item (d) segue que

$$[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = [xy, (xy)^{\varphi}][y, y^{\varphi}]^{-1}[x, x^{\varphi}]^{-1}. \tag{3.15}$$

Portanto, pelo item (c), $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}]$ pertence ao centro de $\nu(G)$.

(f) Segue diretamente de (e)

(g) Basta utilizarmos o Lema 3.15 e o Teorema 3.22. Em particular, tomando $x = 1$, $[c, c^{\varphi}] = 1$, para todo $c \in G'$.

(h) Seja y um elemento de G'. Então, aplicando o item (g) em (3.15) temos:

$$[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = [x, x^{\varphi}][y, y^{\varphi}]^{-1}[x, x^{\varphi}]^{-1}.$$

Portanto, pelo item (c), $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = 1$, para todo $x \in G$.

□

Proposição 3.26. ([22]) *Sejam $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ homomorfismos de grupos e suponhamos que A e B agem compativelmente um sobre o outro e que α e β preservam as ações. Então:*

(i) Existe um homomorfismo $\gamma : \eta(G, H) \to \eta(A, B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$ e $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$;

(ii) Se α e β são sobrejetoras, então γ também é e

(1) $Nuc(\gamma) = \langle Nuc(\alpha), (Nuc(\beta))^{\varphi}\rangle [Nuc(\alpha), H^{\varphi}][G, (Nuc(\beta))^{\varphi}]$;

(2) Se γ' é a restrição de γ a $\tau(G,H)$, então a sequência de grupos abaixo é exata

$$1 \longrightarrow [Nuc(\alpha), H^{\varphi}][G, (Nuc(\beta))^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G,H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A,B) \longrightarrow 1.$$

Demonstração. **(i)** Suponhamos que $\alpha : G \to A$ e $\beta : H \to B$ são homomorfismos que preservam as ações. Reparemos que α e β induzem um homomorfismos $\sigma : G * H^{\varphi} \to \eta(G,H)$ tal que $g \mapsto g\alpha$ e $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Desde que $\eta(G,H) = (G * H^{\varphi})/(\langle R\rangle)^{G*H^{\varphi}}$ onde $R = \{[g,h^{\varphi}]^{-x}\cdot[g^x,(h^x)^{\varphi}], [g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}\cdot[g^y,(h^y)^{\varphi}] \mid g,x \in G \text{ e } h,y \in H\}$, é suficiente mostrarmos que $R \subseteq Nuc(\sigma)$. Temos

$$\begin{aligned}
([g^x,(h^x)^{\varphi}])\sigma &= [(g^x)\alpha, ((h^x)\beta)^{\psi}] \\
&= [(g\alpha)^{x\alpha}, ((h\beta)^{x\alpha})^{\psi}] \qquad \text{(pois } \beta \text{ preserva a ação)} \\
&= [g\alpha, (h\beta)^{\psi}]^{x\alpha} \qquad \text{(pelas relações definidoras de } \eta(G,H)) \\
&= ([g,h^{\varphi}]^x)\sigma,
\end{aligned}$$

para todos $g,x \in G$ e $h \in H$. Então, $[g,h^{\varphi}]^{-x}\cdot[g^x,(h^x)^{\varphi}] \in Nuc(\sigma)$. Analogamente, $[g,h^{\varphi}]^{-y^{\varphi}}\cdot[g^y,(h^y)^{\varphi}] \in Nuc(\sigma)$ para todos $g \in G$ e $h,y \in H$. Logo, $R \subseteq Nuc(\sigma)$ e, portanto, σ induz um homomorfismo $\gamma : \eta(G,H) \to \eta(A,B)$ tal que $g \mapsto g\alpha$ e $h^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$.

(ii) Obviamente γ é sobrejetora, já que α e β são sobrejetoras.

(1) Escrevendo $M = Nuc(\alpha)$ e $N = Nuc(\beta)$, é fácil ver que $K = \langle M, N^{\varphi}\rangle[M,H^{\varphi}][G,N^{\varphi}]$ está no núcleo de γ. Além disso, M é um H-subgrupo normal de G, pois se $m \in M$ e $h \in H$, então $(m^h)\alpha = (m\alpha)^{h\beta} = 1^{h\beta} = 1$. Da mesma forma, N é um G-subgrupo normal de H. Então, $K \trianglelefteq \eta(G,H)$. Logo, γ induz um epimorfismo $\overline{\gamma} : \frac{\eta(G,H)}{K} \to \eta(A,B)$ tal que $Kg \mapsto g\alpha$ e $Kh^{\varphi} \mapsto (h\beta)^{\psi}$. Agora, vamos mostrar que $\overline{\gamma}$ admite um homomorfismo inverso. Uma vez que α e β são sobrejetoras, para cada $a \in A$ e $b \in B$ existem $g_a \in G$ e $h_b \in H$ tais que $(g_a)\alpha = a$ e $(h_b)\beta = b$. Dessa forma, definimos a aplicação $\theta : A \cup B^{\psi} \to \frac{\eta(G,H)}{K}$ pondo $a \mapsto Kg_a$ e $b^{\psi} \mapsto Kh_b^{\varphi}$. Essa aplicação está bem definida. Com efeito, se $g_{a_1}, g_{a_2} \in G$ são tais que $(g_{a_1})\alpha = (g_{a_2})\alpha = a$, então, $(g_{a_1}g_{a_2}^{-1})\alpha = 1_A$; logo $g_{a_1}g_{a_2}^{-1} \in Nuc(\alpha) \subseteq K$. Analogamente, se $(h_{b_1})\beta = (h_{b_2})\beta = b$, então $Kh_{b_1}^{\varphi} = Kh_{b_2}^{\varphi}$, uma vez que $N = Nuc(\beta) \subseteq K$. As restrições de θ a A e a B são ambos homomorfismos, de maneira que existe um único homomorfismo θ^*

do produto livre $A * B$ a $\frac{\eta(G,H)}{K}$ estendendo θ. Como

$$((g_a)^{g_{a_1}}\alpha) = a^{a_1} \quad \text{e} \quad ((h_b)^{g_{a_1}})\beta = (h_b\beta)^{(g_{a_1})\alpha} = b^{a_1},$$

temos

$$\begin{aligned} ([a,b^{\psi}]^{a_1}[a^{a_1},(b^{a_1})^{\psi}]^{-1})\theta^* &= ([a,b^{\psi}]^{a_1})\theta^*([a^{a_1},(b^{a_1})^{\psi}]^{-1}))\theta^* \\ &= [Kg_a, Kh_b^{\varphi}]^{Kg_{a_1}}[K(g_a)^{g_{a_1}}, K((h_b)^{g_{a_1}})^{\varphi}]^{-1} = 1_{\frac{\eta(G,H)}{K}}. \end{aligned}$$

De forma análoga mostra-se que $([a,b^{\psi}]^{b_1^{\psi}}[a^{b_1},(b^{b_1})^{\psi}]^{-1})\theta^* = 1$. Portanto, θ^* induz um homomorfismo

$$\overline{\theta} : \eta(A,B) \to \frac{\eta(G,H)}{K}$$

tal que $a \mapsto Kg_a$ e $b^{\psi} \mapsto Kh_b^{\psi}$. Claramente, $\overline{\theta}\overline{\gamma} = 1_{\frac{\eta(G,H)}{K}}$ e $\overline{\gamma}\overline{\theta} = 1_{\frac{\eta(G,H)}{K}}$. Para finalizar, provemos que se $K \subseteq Nuc(\gamma)$ e $\overline{\gamma} : \eta(G,H)/K \to \eta(A,B)$ é um homomorfismo induzido por γ que possui inverso, então $K = Nuc(\gamma)$. Com efeito, suponhamos que $Nuc(\gamma) \nsubseteq K$. Então, existe $x \in Nuc(\gamma)$ tal que $x \notin K$. Daí, $Kx \neq K$ e aplicando $\overline{\gamma}$, obtemos $(Kx)\overline{\gamma} \neq 1$. Assim, $1 \neq (Kx)\overline{\gamma} = x\gamma$ o que é um absurdo, pois $x \in Nuc(\gamma)$. Portanto, $K = Nuc(\gamma)$.

(2) Seja γ' a restrição de γ a $\tau(G,H)$. Uma vez que α e β são sobrejetoras, γ' é um epimorfismo de $\tau(G,H)$ em $\tau(A,B)$ de forma que $[g,h^{\varphi}] \mapsto [g\alpha,(h\beta)^{\varphi}]$ para todos $g \in G$ e $h \in H$. Desde que $L = [M,H^{\varphi}][G,N^{\varphi}] \subseteq Nuc(\gamma')$ e é normal em $[G,H^{\varphi}]$, γ' induz um epimorfismo $\overline{\gamma'}$ de $\frac{[G,H^{\varphi}]}{L}$ sobre $\tau(A,B)$. Como em (1), mostramos que existe um homomorfismo

$$\upsilon : \tau(G,H) \to \frac{\tau(G,H)}{L}$$

tal que $[a,b^{\psi}] \mapsto L[g_a,h_b^{\psi}]$, onde $g_a \in G$ e $h_b \in h$ são tais que $(g_a)\alpha = a$ e $(h_b)\beta = b$. Temos que $\overline{\gamma'}$ é um isomorfismo. Portanto, a sequência abaixo é exata

$$1 \to [Nuc(\alpha),H^{\varphi}][G,(Nuc(\beta))^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G,H) \xrightarrow{\gamma'} \tau(A,B) \to 1.$$

$\square$

Para terminar esta seção discutiremos sobre a seguinte questão: dados dois grupos G e H finitos, um agindo compativelmente sobre o outro, então será que o produto tensorial $G \otimes H$ é finito? Este problema foi resolvido por G. J. Ellis [9] em 1987 que mostrou que o produto tensorial não abeliano de grupos finitos é finito utilizando argumentos de homologia de grupos. Daí surgiu outra questão: será que podemos demonstrar este fato usando somente ferramentas da Teoria de Grupos? Então, após 23 anos, V. Z. Thomas [33] responde essa pergunta. A resposta dele é afirmativa e apresentaremos tal demonstração. Mas, para isto, precisaremos de alguns resultados preliminares, bem como alguns já vistos.

Teorema 3.27 (Dietzmann, cf. [24], pág.44)**.** *Seja $C = \{H_1, H_2, \ldots, H_t\}$ um conjunto de subgrupos de um grupo G e suponhamos que C possua a seguinte propriedade: se $H_i, H_j \in C$, então $H_i^{h_j} \in C$ onde $h_j \in H_j$. Com isso, se $J = \langle H_1 \cup \ldots \cup H_t \rangle$, então $J = H_1 H_2 \ldots H_t$.*

Um subconjunto X de um grupo G é *normal* quando $x^g \in X$, para todos $x \in X$, $g \in G$.

Corolário 3.28. *Sejam G um grupo e X um subconjunto normal finito cujos elementos possuem ordem finita. Então, $H = \langle X \rangle$ é um subgrupo finito de G.*

Demonstração. Seja $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ um subconjunto normal finito de G, onde x_i possui ordem finita, $i = 1, \ldots, n$. Sejam $H_1 = \langle x_1 \rangle, H_2 = \langle x_2 \rangle, \ldots, H_n = \langle x_n \rangle$. Então, o subgrupo $H = \langle H_1 \cup \ldots \cup H_n \rangle$ é igual ao subgrupo gerado por X. Além disso, como X é um subconjunto normal de G, $\langle x_i \rangle^{x_j} = \langle x_i^{x_j} \rangle = \langle x_l \rangle$, para algum $l \in \{1, \ldots, n\}$. Assim, segue do lema anterior que $H = \langle x_1 \rangle \cdots \langle x_n \rangle$. Agora, como todo x_i possui ordem finita, existem no máximo $|x_1| \ldots |x_n| = \prod_{i=1}^{n} |x_i|$ elementos em H, consequentemente, H é finito. $\square$

Lema 3.29. *Sejam G e H grupos agindo compativelmente um sobre o outro. Se G e H são finitos, então $\langle G \rangle^{\eta(G,H)}$ e $\langle H^{\varphi} \rangle^{\eta(G,H)}$ são finitos.*

Demonstração. Consideremos o conjunto $S = \{h^{\varphi}, (h^{\varphi})^g \mid h \in H,\ g \in G\}$. Vamos mostrar que S é um subconjunto normal de $\eta(G, H)$. Para todos $g, x \in G$ e $h, y \in H$, temos

$$(h^{\varphi})^g \in S, \quad (h^{\varphi})^{y^{\varphi}} = (h^y)^{\varphi} \in S, \quad ((h^{\varphi})^g)^x = (h^{\varphi})^{gx} \in S.$$

Agora, para verificarmos que $((h^{\varphi})^g)^{y^{\varphi}} \in S$, reparemos

$$((h^{\varphi})^g)^{y^{\varphi}} = (g^{-1} h^{\varphi} g)^{y^{\varphi}} = (g^{-1})^{y^{\varphi}} (h^y)^{\varphi} g^{y^{\varphi}} = ((h^y)^{\varphi})^{(g^{y^{\varphi}})}.$$

Mas, $[g, h^{-\varphi}]^{y^{\varphi}} = [g^y, (h^{-y})^{\varphi}]$, daí, segue que $[g^{y^{\varphi}}, (h^{-y})^{\varphi}] = [g^y, (h^{-y})^{\varphi}]$. Então,

$$g^{-y^{\varphi}} (h^y)^{\varphi} g^{y^{\varphi}} (h^{-y})^{\varphi} = g^{-y} (h^y)^{\varphi} g^y (h^{-y})^{\varphi};$$

logo, $((h^y)^\varphi)^{(g^{y^\varphi})} = ((h^y)^\varphi)^{g^y} = ((h_1)^\varphi)^{g_1}$ com $g_1 = g^y \in G$ e $h_1 = h^y \in H$. Portanto,

$$((h^\varphi)^g)^{h^\varphi} = ((h_1)^\varphi)^{g_1} \in S.$$

Daí, como $\eta(G, H) = \langle G, H^\varphi \rangle$, temos que S é um subconjunto normal de $\eta(G, H)$. Além disso, todos os elementos de S possuem ordem finita pois H^φ é um subgrupo finito de $\eta(G, H)$ e a ordem é preservada pela conjugação. Então, pelo Corolário 3.28, o conjunto S gera um subgrupo normal finito de $\eta(G, H)$ que contém H^φ. Portanto, o fecho normal de H^φ em $\eta(G, H)$ é finito. Analogamente, mostra-se que o fecho normal de G em $\eta(G, H)$ é finito.

□

Teorema 3.30. *Se G e H são grupos finitos agindo compativelmente um sobre o outro, então $G \otimes H$ é finito.*

Demonstração. Pelo Lema 3.29, $\langle G \rangle^{\eta(G,H)}$ e $\langle H^\varphi \rangle^{\eta(G,H)}$ são finitos. Então, $\langle G \rangle^{\eta(G,H)} \cap \langle H^\varphi \rangle^{\eta(G,H)}$ é finito. Mas, $\tau(G, H) \subseteq \langle G \rangle^{\eta(G,H)} \cap \langle H^\varphi \rangle^{\eta(G,H)}$, uma vez que $\tau(G, H) = \langle [g, h^\varphi] \mid g \in G \text{ e } h \in H \rangle$ e $[g, h^\varphi] = g^{-1}g^{h^\varphi} = (h^{-\varphi})^g h^\varphi$. Portanto, $G \otimes H$ também é finito.

□

3.4 Séries Central Inferior e Derivada de $G \otimes H$

Inicialmente, apresentaremos alguns resultados que fornecem propriedades dos subgrupos $[G, H]$ e $[H, G]$ de G e H, respectivamente.

Proposição 3.31. *(i) $[G, H]$ é um H-subgrupo normal de G e $[H, G]$ é um G-subgrupo normal de H.*

(ii) Para todo $i \geq 1$ e $j \geq 0$, $\gamma([G, H])$ e $[G, H]_j$ são H-subgrupos normais de G e $\gamma_i([H, G])$ e $[H, G]_j$ são G-subgrupos normais de H.

(iii) $[G, H]_i = (\tau(G, H)_i)\lambda$ e $[H, G]_i = (\tau(G, H)_i)\mu$.

(iv) $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$ e $h^{(t)\lambda} = h^{(t)\mu}$, para todos $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G, H)$.

Demonstração. **(i)** Pela compatibilidade das ações, para todos $g, x \in G$ e $h \in H$, temos

$$(g^{-1}g^h)^x = (g^{-1})^x g^{hx} = (g^x)^{-1} g^{xx^{-1}(hx)} = (g^x)^{-1}(g^x)^{x^{-1}hx} = (g^x)^{-1}(g^x)^{h^x};$$

logo, $[G, H]$ é um subgrupo normal de G. Ainda, para todos $g \in G$ e $h, y \in H$,

$$(g^{-1}g^h)^y = (g^{-1})^y g^{hy} = (g^y)^{-1} g^{yy^{-1}(hy)} = (g^y)^{-1}(g^y)^{y^{-1}hy} = (g^y)^{-1}(g^y)^{h^y}.$$

Portanto, $[G, H]$ é um H-subgrupo de G. De forma análoga prova-se que $[H, G]$ é um G-subgrupo normal de H.

(ii) Desde que $\gamma_i([G, H])$ é um subgrupo característico de $[G, H]$ e $[G, H]$ é um H-subgrupo normal de G, temos que $\gamma_i([G, H])$ é um H-subgrupo normal de G. Da mesma maneira obtemos os outros casos.

(iii) Segue diretamente das definições de λ e de μ.

(iv) Provaremos que $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$, para todos $g \in G$, $h \in H$ e $t \in \tau(G, H)$. Analogamente prova-se a outra igualdade.

Para todos $g, x \in G$ e $y \in H$, temos

$$g^{x^{-1}y^{-1}xy} = (g^{x^{-1}y^{-1}x})^y = (g^{y^{-x}})^y = g^{y^{-x}y},$$

pela compatibilidade das ações. Agora,

$$\begin{aligned} g^{x^{-1}y^{-1}xy} &= (xgx^{-1})^{y^{-1}xy} = (x^{y^{-1}} g^{y^{-1}} x^{-y^{-1}})^{xy} = (x^{-1}x^{y^{-1}} g^{y^{-1}} x^{-y^{-1}} x)^y \\ &= x^{-y}xgx^{-1}x^y = g^{x^{-1}x^y}. \end{aligned}$$

Assim, $g^{([x,y^\varphi])\lambda} = g^{([x,y^\varphi])\mu}$ para todos $g, x \in G$ e $y \in H$. Portanto, $g^{(t)\lambda} = g^{(t)\mu}$, para todos $g \in G$ e $t \in \tau(G, H)$, uma vez que, $\tau(G, H)$ é gerado pelo conjunto $\{[x, y^\varphi] \mid x \in G \text{ e } y \in H\}$ e λ, μ são homomorfismos. $\square$

De acordo com o Teorema 3.22, o grupo $G \otimes H$ é isomorfo a $\tau(G, H) = [G, H^\varphi]$. Isso permite considerarmos $G \otimes H$ como um subgrupo comutador de $\eta(G, H)$ e utilizar as propriedades já conhecidas de comutadores. Esta técnica foi usada para obter uma descrição das séries central inferior e derivada de $G \otimes H$.

Teorema 3.32. ([22])

(i) Para $i \geq 2$, o i-ésimo termo da série central descendente de $\tau(G,H)$ é dado por

$$\gamma_i(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}].$$

(ii) Para $i \geq 1$, o i-ésimo termo da série derivada de $\tau(G,H)$ é dado por

$$\tau(G,H)_i = [[G,H]_{i-1}, [H,G]^{\varphi}_{i-1}].$$

Demonstração. Reparemos que, pela Proposição 3.24 item (i)-(a), se $[G,H] = 1$, então $[g,h^{\varphi}]^{[x,y^{\varphi}]} = [g,h^{\varphi}]^{x^{-1}x^{y}} = [g,h^{\varphi}]$, para todos $g,x \in G$ e $h,y \in H$. Logo, $\tau(G,H)$ é um grupo abeliano e, assim, $[H,G]$ também o é, uma vez que $[H,G] = Im(\mu)$. Dessa forma, podemos assumir que $[G,H]$ é não trivial.

(i) Procederemos por indução sobre $i \geq 2$. Para todos $u,v \in \tau(G,H)$, $[u,v] = [u\lambda,(v\mu)\varphi]$, pela Proposição 3.24. Como $[G,H] = Im(\lambda)$ e $[H,G] = Im(\mu)$, temos

$$\gamma_2(\tau(G,H)) = [\gamma_1([G,H]), [H,G]^{\varphi}].$$

Agora, seja $i \geq 2$ e suponhamos que

$$\gamma_i(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}].$$

Então, $\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_{i-1}([G,H]), [H,G]^{\varphi}, \tau(G,H)]$. Daí, pela Proposição 1.2 item (ii)

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = \langle [x,(v\mu)^{\varphi},t]^{z} \mid x \in \gamma_{i-1}(G,H), v,t \in \tau(G,H) \text{ e } z \in [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] \rangle .$$

Mas, pelas Proposições 3.24 item (iii) e 3.31 item (iv),

$$[x,(v\mu)^{\varphi},t] = [[x,(v\mu)^{\varphi}]\lambda,(t\mu)^{\varphi}] = [x^{-1}x^{v\mu},(t\mu)^{\varphi}] = [x^{-1}x^{v\lambda},(t\mu)^{\varphi}].$$

Pela Proposição 3.31 itens (i) e (ii), $[H,G]^{\varphi}$ é um G-subgrupo normal de H e $\gamma_i([G,H])$ é um H-subgrupo normal de G. Assim, segue da Proposição 3.21 (i) que $[\gamma_i[G,H],[H,G]^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G,H)$; logo $[x,(v\mu)^{\varphi},t]^{z} \in [\gamma_i[G,H],[H,G]^{\varphi}]$, para todos $x \in \gamma_{i-1}([G,H]), v,t \in \tau(G,H)$ e $z \in [\gamma_{i-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$. Portanto,

$$\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) \subseteq [\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}].$$

Por outro lado,

$$[\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = \langle [[x, v\lambda], (t\mu)^{\varphi}]^g \mid x \in \gamma_{i-1}([G,H]), v, t \in \tau(G,H) \text{ e } g \in \gamma_i([G,H]) \rangle \,.$$

Uma vez que

$$[[x, v\lambda], (t\mu)^{\varphi}]^g = [x^{-1}x^{v\lambda}, (t\mu)^{\varphi}]^g = [x, (v\mu)^{\varphi}, t]^g \in \gamma_{i+1}(\tau(G,H)),$$

para todos $x \in \gamma_{i-1}([G,H]), v, t \in \tau(G,H)$ e $g \in \gamma_i(\tau(G,H))$, a inclusão $[\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}] \subseteq \gamma_{i+1}(\tau(G,H))$ é verificada. Portanto, $\gamma_{i+1}(\tau(G,H)) = [\gamma_i([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$.

(ii) Para $i = 1$, temos $\tau(G,H)_i = [[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}]$. Suponhamos $i \geq 1$ e

$$\tau(G,H)_i = [[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}].$$

Então,

$$\tau(G,H)_{i+1} = [\tau(G,H)_i, \tau(G,H)_i] = [[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}][[G,H]_{i-1},[H,G]^{\varphi}_{i-1}].$$

Daí, pela Proposição 1.2, temos

$$\tau(G,H)_{i+1} = [X,X]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i},$$

onde $X = \{[g,h^{\varphi}] \mid g \in [G,H]_{i-1} \text{ e } h \in [H,G]_{i-1}\}$. Agora, do item (iii) da Proposição 3.31 vemos que

$$[[G,H]_i,[H,G]^{\varphi}_i] = [(\tau(G,H)_i)\lambda, (\tau(G,H)_i\mu)^{\varphi}].$$

Assim,

$$[[G,H]_i,[H,G]^{\varphi}_i] = [Y,Y_1]^{(\tau(G,H)_i)\lambda(\tau(G,H)_i\mu)^{\varphi}},$$

onde $Y = \{[t,u]\lambda \mid t,u \in \tau(G,H)_{i-1}\}$ e $Y_1 = \{([t,u]\mu)^{\varphi} \mid t,u \in \tau(G,H)_{i-1}\}$.

Sejam $g, g_1 \in [G,H]_{i-1}$ e $h, h_1 \in [H,G]_{i-1}$. Então, segue da Proposição 3.31 item (iii) que existem $t, t_1, u, u_1 \in \tau(G,H)_{i-1}$ tais que $g = (t)\lambda, g_1 = (t_1)\lambda, h = (u)\mu$ e $h_1 = (u_1)\mu$. Logo, pelas Proposições 3.24 item (i)-(e) e 3.31 item (i), temos

$$\begin{aligned} [[g,h^{\varphi}],[g_1,h_1^{\varphi}]] &= [g^{-1}g^h, (h_1^{-g_1}h_1)^{\varphi}] = [((t)\lambda)^{-1}((t)\lambda)^{(u)\mu}, (((u_1)\mu)^{-(t_1)\lambda}((u_1)\mu)^{\varphi})] \\ &= [((t)\lambda)^{-1}((t)\lambda)^{(u)\lambda}, (((u_1)\mu)^{-(t_1)\mu}(u_1\mu)^{\varphi})] = [[t,u]\lambda, ([t_1,u_1]\mu)^{\varphi}], \end{aligned}$$

donde segue que $[X, X] = [Y, Y_1]$. Do fato de $[[G, H]_i, [G, H]_i^{\varphi}] \trianglelefteq \eta(G, H)$ (Proposição (3.31) item (ii) e Proposição 3.21), segue que

$$\tau(G, H)_{i+1} = [X, X]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i} = [Y, Y_1]^{\tau(G,H)_i \tau(G,H)_i} \subseteq [[G, H]_i, [G, H]_i^{\varphi}].$$

A inclusão contrária é mostrado da mesma forma. Portanto, $\tau(G, H)_{i+1} = [[G, H]_i, [G, H]_i^{\varphi}]$, o que conclui a prova. □

Consequências importantes do teorema anterior são: se $[G, H]$ é nilpotente (respectivamente solúvel), então $G \otimes H$ é nilpotente e $cl(G \otimes H) \leq cl([G, H]) + 1$ (respectivamente solúvel e $l(G \otimes H) \leq l(([G, H]) + 1)$.

A descrição das séries central inferior e derivada de $\tau(G, H)$, dada no teorema anterior, permitiu estabelecer cotas para a classe de nilpotência de $G \otimes H$ e para o comprimento derivado de $G \otimes H$. Estes resultados serão apresentados nos itens (i) e (ii) do Teorema 3.34 e vêm para generalizar o teorema seguinte, que foi provado em [3] por R. Brown, D. L. Johnson e E. F. Robertson.

Teorema 3.33. *(i) Se G é um grupo nilpotente, então $G \otimes G$ também o é. Além disso,*

$$cl(G') \leq cl(G \otimes G) \leq cl(G') + 1;$$

(ii) Se G é um grupo solúvel, então $G \otimes G$ também é solúvel e $l(G) - 1 \leq l(G \otimes G) \leq l(G)$.

É relevante citar que um resultado semelhante ao que vem logo a seguir foi obtido por Visscher em [32], porém sem a descrição das séries, que posteriormente foram publicadas em [22] por Nakaoka.

Teorema 3.34. *(i) Se $[G, H]$ é nilpotente de classe c, então $G \otimes H$ é nilpotente de classe c ou $c + 1$.*

(ii) Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado l, então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l ou $l + 1$.

Demonstração. **(i)** Como $\tau(G, H) \cong G \otimes H$, se mostrarmos o resultado para $\tau(G, H)$, então teremos a validade do mesmo para $G \otimes H$. Suponhamos que $[G, H]$ é nilpotente de classe

c. Então, do Teorema 3.32 item (i), vem que $\gamma_{c+2}(\tau(G,H)) = [\gamma_{c+1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = \{1\}$. Logo, $\tau(G,H)$ é nilpotente de classe no máximo $c+1$. Mostraremos que a classe de $\tau(G,H)$ não pode ser inferior a c. De fato, sejam $M = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}]$ e α a restrição do homomorfismo λ a M. Obviamente, $Im(\alpha) = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]]$. Mas,

$$\begin{aligned}
[\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]] &= \langle g^{-1}g^{h} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]), h \in [H,G]\rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\mu} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]), t \in \tau(G,H)\rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\lambda} \mid g \in \gamma_{c-1}([G,H]), t \in \tau(G,H)\rangle \quad \text{(pelo Teorema 3.31)} \\
&= \gamma_c([G,H]).
\end{aligned}$$

Agora sendo c a classe de nilpotência de $[G,H]$, temos $\gamma_c([G,H]) \neq \{1\}$ e, portanto, $Im(\alpha) \neq \{1\}$. Consequentemente, $M \neq \{1\}$. Daí, pelo Teorema 3.32 item (i),

$$\gamma_c(\tau(G,H)) = [\gamma_{c-1}([G,H]),[H,G]^{\varphi}] = M \neq \{1\};$$

donde concluímos que $cl(\tau(G,H)) \geq c$.

(ii) Se $[G,H]$ é solúvel de comprimento derivado l, então pelo Teorema 3.32 item (ii), $\tau(G,H)_{l+1} = [[G,H]_l,[H,G]^{\varphi}_l] = \{1\}$, ou seja, $\tau(G,H)$ é solúvel de comprimento derivado de no máximo $l+1$. A seguir mostraremos que o comprimento não pode ser inferior a l. Consideremos $N = [[G,H]_{l-2},[H,G]^{\varphi}_{l-2}]$ e β a restrição do homomorfismo λ a N. Obviamente, $Im(\beta) = [[G,H]_{l-2},[H,G]_{l-2}]$. Além disso,

$$\begin{aligned}
[[G,H]_{l-2},[H,G]_{l-2}] &= \langle g^{-1}g^{h} \mid g \in [G,H]_{l-2}, h \in [H,G]_{l-2}\rangle \\
&= \langle g^{-1}g^{(t)\mu} \mid g \in [G,H]_{l-2}, t \in \tau(H,G)_{l-2}\rangle \\
&= [G,H]_{l-1}.
\end{aligned}$$

Uma vez que o comprimento derivado de $[G,H]$ é l, $[G,H]_{l-1} \neq \{1\}$. Portanto, $Im(\beta) \neq \{1\}$. Assim, $N \neq \{1\}$ e, portanto, pelo Teorema 3.32 item (ii), temos

$$\tau(G,H)_{l-1} = [[G,H]_{l-2},[H,G]^{\varphi}_{l-2}] = N \neq \{1\},$$

ou seja, $l(\tau(G,H)) \geq l$. $\square$

Os dois problemas abaixo foram propostos no ano de 1987 por Brown, Johnson e Robertson em [3]:

(1) Existe alguma caracterização de grupos nilpotentes G de forma que $cl(G \otimes G) = cl(G') + 1$ e de grupos nilpotentes G de modo que $cl(G \otimes G) = cl(G')$?

(2) Agora, e de grupos solúveis G, existe alguma caracterização tal que $l(G \otimes G) = l(G)$ ou mesmo $l(G \otimes G) = l(G) - 1$?

Algumas respostas para esses problemas foram apresentadas. Por exemplo, em 1993, M. Bacon e L. C. Kappe [1] provaram:

Teorema 3.35. *Se G é um grupo nilpotente de classe 2, então $G \otimes G$ é abeliano.*

Demonstração. Pela Proposição 3.7 item (b),

$$(x \otimes y)^{-1}(x_1 \otimes y_1)(x \otimes y) = \left(x_1^{[x,y]} \otimes y_1^{[x,y]}\right)$$

para todos $x, x_1, y, y_1 \in G$. Agora, como G é nilpotente de classe 2, G' é central em G. Assim, $x_1^{[x,y]} \otimes y_1^{[x,y]} = x_1 \otimes y_1$, de modo que $[x \otimes y, x_1 \otimes y_1] = 1$. Portanto, $G \otimes G$ é abeliano. □

A seguir encontra-se uma contribuição para o Problema **(2)** dada no ano de 2000 em [22].

Teorema 3.36. *Sejam G e H subgrupos normais de um grupo M tais que as ações de G sobre H e de H sobre G provém da conjugação em M. Então,*

(i) $[c, c^{\varphi}] = 1$, *para todo* $c \in [G, H]$;

(ii) Se $[G, H]$ é solúvel de comprimento derivado $l \geq 1$ e $[G, H]_{l-1}$ é cíclico, então $G \otimes H$ é solúvel de comprimento derivado l.

Demonstração. **(i)** Suponhamos que $c \in [G, H]$. Então, c é da forma $c = [g_1, h_1] \cdots [g_n, h_n]$, onde $g_1, \ldots, g_n \in G$ e $h_1, \ldots, h_n \in H$. Como as ações de G sobre H e de H sobre G são por conjugação em M, temos

$$c = (t)\lambda \;\; \text{e} \;\; c = (t)\mu$$

onde $t = [g_1, h_1^{\varphi}] \cdots [g_n, h_n^{\varphi}]$ $(\in \tau(G, H))$. Dessa forma, segue da Proposição 3.24 item (iii) que $[c, c^{\varphi}] = [(t)\lambda, ((t)\mu)^{\varphi}] = [t, t] = 1$.

(ii) Suponhamos que $[G,H]$ é solúvel de comprimento derivado $l \geq 1$ e que $[G,H]_{l-1} = \langle x \rangle$. Se provarmos que o subgrupo $[[G,H]_{l-1}, [H,G]^{\varphi}_{l-1}]$ de $\tau(G,H)$ é trivial, então pelos Teoremas 3.34 e 3.32, obteremos o resultado. Mas, para isto, basta repararmos que

$$[[G,H]_{l-1}, [H,G]^{\varphi}_{l-1}] = \langle [x^i, (x^j)^{\varphi}] \mid i,j \in \mathbb{Z} \rangle$$

e $[x^i, (x^j)^{\varphi}] = [x, x^{\varphi}]^{ij} = 1$, para todos $i,j \in \mathbb{Z}$ (por (i)). □

Como consequência do Teorema 3.36, temos o resultado:

Corolário 3.37. *Se G é solúvel de comprimento derivado $l \geq 2$ com G_{l-1} cíclico, então $G \otimes G$ é solúvel de comprimento derivado $l-1$.*

Demonstração. Se G é solúvel de comprimento derivado $l \geq 2$. Então,

$$G = G_0 \geq G' = G_1 \geq (G')' = G_2 \geq \dots G_l = \{1\}$$

é uma série derivada de comprimento $l \geq 2$. Assim,

$$G' = G_1 = H_0 \geq (G')' = G_2 = H_1 \geq \dots H_k = G_l = \{1\}$$

é a série derivada de G' de comprimento $k = l-1 \geq 1$. Agora, como $H_{k-1} = G_{l-1}$ é cíclico por hipótese, então aplicando o Teorema 3.36 item (ii), temos que o quadrado tensorial $G \otimes G$ é solúvel de comprimento derivado $k = l-1$. □

A seguir apresentaremos dois exemplos de grupos solúveis G tais que $l(G \otimes G) = l(G)$. Com isso, podemos observar que nem sempre $l(G \otimes G) = l(G) - 1$ quando G é um grupo solúvel.

Exemplo 3.38. *Seja G um grupo abeliano não trivial. Então, $G \otimes G \cong G \otimes_{\mathbb{Z}} G$ que é abeliano não trivial.*

Exemplo 3.39. *O grupo alternado denotado por A_4 é solúvel de comprimento derivado 2 e $l(A_4 \otimes A_4) = 2$, pois $A_4 \otimes A_4 \cong Q_8 \times \mathbb{Z}_3$, de acordo com [3].*

Capítulo 4

Alguns Limitantes para $\mid G \otimes G \mid$

Neste capítulo abordaremos alguns resultados que estabelecem limitantes para o quadrado tensorial não abeliano de grupos, particularmente para p-grupos finitos, grupos solúveis finitos e metabelianos finitos.

4.1 Quadrado tensorial não abeliano de um p-grupo finito

Sejam G um p-grupo finito d-gerado de ordem p^n e p^m a ordem de G/G'. Em 1991, N. R. Rocco [26] mostrou que a ordem do quadrado tensorial não abeliano de G é no máximo p^{nm}. Mais tarde, em 1998, esse limitante foi melhorado por G. Ellis e A. McDermott [10], que mostraram que $\mid G \otimes G \mid \leq p^{nd}$. A seguir, trataremos de um limitante ainda melhor que foi obtido por S.H. Jafari [13] em 2012. Para isso, necessitaremos do seguinte resultado.

Lema 4.1. *Se N é um subgrupo central de um grupo G, então a seguinte sequência de grupos é exata:*

$$1 \longrightarrow [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G, G) \longrightarrow \tau(G/N, G/N) \longrightarrow 1.$$

Em particular, se $N \subseteq G'$, então a sequência

$$1 \longrightarrow [N, G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G, G) \longrightarrow \tau(G/N, G/N) \longrightarrow 1 \tag{4.1}$$

é exata.

Demonstração. Consideremos o epimorfismo canônico $\pi : G \to \frac{G}{N}$. Pela Proposição 3.26, π induz um epimorfismo $\gamma : \eta(G, G) \to \eta(G/N, G/N)$. Além disso, se γ' é a restrição de γ a

$\tau(G, G)$, a sequência de grupos abaixo é exata

$$1 \longrightarrow [N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G, G) \xrightarrow{\gamma'} \tau(G/N, G/N) \longrightarrow 1. \tag{4.2}$$

Agora, observemos que se $N \subseteq G'$, então

$$[N, G^{\varphi}][G, N^{\varphi}] = [N, G^{\varphi}]. \tag{4.3}$$

Com efeito, caso $N \subseteq G'$, pela Proposição 3.25 item (h), $[g, n^{\varphi}] = [n, g^{\varphi}]^{-1}$ para todos $n \in N$ e $g \in G$, ou seja, $[G, N^{\varphi}] \subseteq [N, G^{\varphi}]$, Logo, (4.3) ocorre. Portanto, segue de (4.2) que a sequência

$$1 \to [N, G^{\varphi}] \to \tau(G, G) \to \tau(G/N, G/N) \to 1$$

é exata. □

Teorema 4.2. (S.H. Jafari, [13]) *Seja G um p-grupo finito d-gerado de ordem p^n com G/G' de ordem p^m e expoente p^e. Então,*

$$|G \otimes G| \leq p^{(n-e)d+m} \tag{4.4}$$

Demonstração. Procederemos por indução sobre n. Se $n = 1$, então G tem ordem p primo; logo, G é abeliano. Além disso, o abelianizado de G possui ordem igual a p, donde segue que $G^{ab} \cong \mathbb{Z}_p$. Assim, $G \otimes G \cong \mathbb{Z}_p \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}_p$. Portanto, visto que o expoente de G é p, temos $p = |G \otimes G| \leq p = p^{(n-n)d+1}$, o que mostra o resultado para $n = 1$.

Suponhamos que para todo p-grupo cuja ordem é menor que p^n a desigualdade dada em (4.4) ocorra. Dividiremos em dois casos: $m = n$ e $m < n$.

- Se $m = n$, então $|G'| = 1$. Ou seja, G é abeliano; logo

  $$G \cong \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_2}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}},$$

  onde $0 \leq n_1 \leq n_2 \leq \ldots \leq n_d, n_1 + n_2 + \cdots + n_d = n$ e $d \leq n$.

Assim, pela Proposição 1.35,

$$\begin{aligned}
G \otimes G &\cong (\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \\
&\cong [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_1}}] \times \\
&\quad \times \cdots \times [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}}] \times \\
&\quad \times [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \otimes_{Z} \mathbb{Z}_{p^{n_d}}]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cong [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_{p^{n_1}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_1}})(\mathbb{Z}_{p^{n_d}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_1}})] \times \\
&\quad \times \cdots \times [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}}) \times (\mathbb{Z}_{p^{n_d}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}})] \times \\
&\quad \times [(\mathbb{Z}_{p^{n_1}}) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_d}}) \times (\mathbb{Z}_{p^{n_d}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_{p^{n_d}})] \\
&\cong [\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_1}}] \times \cdots \times [\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}}] \times \\
&\quad \times [\mathbb{Z}_{p^{n_1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-2}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}} \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}] \\
&\cong (\mathbb{Z}_{p^{n_1}})^{2d-1} \times \cdots \times (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-2}}})^5 \times (\mathbb{Z}_{p^{n_{d-1}}})^3 \times \mathbb{Z}_{p^{n_d}}.
\end{aligned}
$$

Agora, caso $d = 1$, teremos $|G \otimes G| = p^n = p^{(n-n)1+n}$.

Para $d \geq 2$, temos

$$
\begin{aligned}
|G \otimes G| &= p^{n_d+3n_{d-1}+5n_{d-2}+\cdots+(2d-1)n_1} \\
&= p^{(n_d+n_{d-1}+n_{d-2}+\cdots+n_1)+(2n_{d-1}+4n_{d-2}+\cdots+(2d-2)n_1)} \\
&= p^{n+2(n_{d-1}+2n_{d-2}+\cdots+(d-1)n_1)} \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Mas,

$$
n_{d-1} + 2n_{d-2} + \cdots + (d-1)n_1 = \sum_{i=1}^{d-1}(d-i)n_i \leq \frac{d}{2}\sum_{i=1}^{d-1} n_i. \qquad (4.6)
$$

Com efeito, para provarmos (4.6) dividiremos em dois casos:

1°Caso : Se d for ímpar, então podemos escrever $d = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{Z}^+$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)n_i &= \sum_{i=1}^{2k}(2k+1-i)\,n_i \\
&= (2k+1-1)\,n_1 + (2k+1-2)\,n_2 + \cdots + (2k+1-k)\,n_k + \\
&+ (2k+1-(k+1))\,n_{k+1} + \cdots + (2k+1-(2k-1))\,n_{2k-1} + \\
&+ (2k+1-2k)\,n_{2k} \\
&= (2k)\,n_1 + (2k-1)\,n_2 + \cdots + (k+1)\,n_k + (k)\,n_{k+1} + \cdots + 2n_{2k-1} + 1n_{2k} \\
&= \left[\left(k+\frac{1}{2}\right) + \left(k-\frac{1}{2}\right)\right] n_1 + \left[\left(k+\frac{1}{2}\right) + \left(k-\frac{3}{2}\right)\right] n_2 + \cdots + \\
&+ \left[\left(k+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right] n_k + (k)\,n_{k+1} + \cdots + 2n_{2k-1} + 1n_{2k} \\
&= \left(k+\frac{1}{2}\right) n_1 + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_2 + \cdots + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_k + \left(kn_{k+1} + \frac{1}{2}n_k\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(2n_{2k-1} + \left(k-\frac{3}{2}\right) n_2\right) + \left(1n_{2k} + \left(k-\frac{1}{2}\right) n_1\right) \\
&\leq \left(k+\frac{1}{2}\right) n_1 + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_2 + \cdots + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_k + \left(kn_{k+1} + \frac{1}{2}n_{k+1}\right) + \\
&\quad + \cdots + \left(2n_{2k-1} + \left(k-\frac{3}{2}\right) n_{2k-1}\right) + \left(1n_{2k} + \left(k-\frac{1}{2}\right) n_{2k}\right) \\
&= \left(k+\frac{1}{2}\right) n_1 + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_2 + \cdots + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_k + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_{k+1} + \\
&\quad + \cdots + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_{2k-1} + \left(k+\frac{1}{2}\right) n_{2k} \\
&= \left(k+\frac{1}{2}\right) \sum_{i=1}^{2k} n_i = \frac{2k+1}{2} \sum_{i=1}^{2k} n_i = \frac{d}{2} \sum_{i=1}^{d-1} n_i.
\end{aligned}
$$

2ºCaso : Se $d = 2k$ para algum $k \in \mathbb{Z}^+$, ou seja, d é um número par, então

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{d-1}(d-i)n_i &= \sum_{i=1}^{2k-1}(2k-i)\,n_i \\
&= (2k-1)\,n_1 + (2k-2)\,n_2 + \cdots + (2k-(k-1))\,n_{k-1} + \\
&+ (2k-k)\,n_k + (2k-(k+1))\,n_{k+1} + \cdots + (2k-(2k-2))\,n_{2k-2} \\
&+ (2k-(2k-1))\,n_{2k-1} \\
&= (2k-1)\,n_1 + (2k-2)\,n_2 + \cdots + (k+1)\,n_{k-1} + kn_k + \\
&+ (k-1)\,n_{k+1} + \cdots + 2n_{2k-2} + 1n_{2k-1} \\
&= (k+(k-1))\,n_1 + (k+(k-2))\,n_2 + \cdots + (k+1)\,n_{k-1} + \\
&+ kn_k + (k-1)\,n_{k+1} + \cdots + 2n_{2k-2} + 1n_{2k-1} \\
&= kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_{k-1} + kn_k + (1n_{k-1} + (k-1)\,n_{k+1}) + \\
&\quad + \cdots + ((k-2)\,n_2 + 2n_{2k-2}) + ((k-1)\,n_1 + 1n_{2k-1}) \\
&\leq kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_{k-1} + kn_k + (1n_{k+1} + (k-1)\,n_{k+1}) + \\
&\quad + \cdots + ((k-2)\,n_{2k-2} + 2n_{2k-2}) + ((k-1)\,n_{2k-1} + 1n_{2k-1}) \\
&= kn_1 + kn_2 + \cdots + kn_{k-1} + kn_k + kn_{k+1} + \cdots + kn_{2k-2} + kn_{2k-1} \\
&= k\sum_{i=1}^{2k-1} n_i = \frac{2k}{2} = \frac{d}{2}\sum_{i=1}^{d-1} n_i.
\end{aligned}$$

Logo (4.6) é satisfeito. Assim, aplicando (4.6) em (4.5), obtemos

$$|G \otimes G| \;\leq\; p^{n+2\left[\frac{d}{2}(n_1+\cdots+n_{d-1})\right]} = p^{n+d(n-n_d)} = p^{n+d(n-e)} = p^{(n-e)d+n}.$$

- Primeiramente, observamos que se $m < n$, então o subgrupo derivado de G é não trivial. Daí, pela Proposição 1.9 item (4), $G^{'} \cap Z(G) \neq 1$; logo existe um subgrupo , digamos N, de ordem p que está contido em $G^{'} \cap Z(G)$. Afirmamos que $G^{ab} \cong (G/N)^{ab}$. De fato, temos $\dfrac{G/N}{G'/N} \cong \dfrac{G}{G'}$ o que implica $\left(\dfrac{G}{N}\right)^{'} \subseteq \dfrac{G^{'}}{N}$. Por outro lado, seja $([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])N$ um elemento de $\dfrac{G^{'}}{N}$. Como $N \trianglelefteq G$, temos

$$\begin{aligned}
([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])N &= [x_1, y_1]N \ldots [x_n, y_n]N = (x_1^{-1}x_1^{y_1})N \ldots (x_n^{-1}x_n^{y_n})N \\
&= [x_1N, y_1N] \ldots [x_nN, y_nN],
\end{aligned}$$

o que mostra que $([x_1, y_1], \ldots, [x_n, y_n])N \in \left(\dfrac{G}{N}\right)'$. Assim, $(G/N)' = G'/N$ e, portanto,

$$\left(\frac{G}{N}\right)^{ab} = \frac{G/N}{G'/N} \cong \frac{G}{G'} = G^{ab}.$$

Além disso, como G é d-gerado, $G^{ab} \cong C_{p^{\alpha_1}} \times \ldots \times C_{p^{\alpha_r}}$ com $r \leq d$ e $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{N}$. Sendo N central em G, os grupos G e N agem trivialmente um sobre o outro e, daí, o Teorema 3.10 nos fornece

$$N \otimes G \cong N \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \cong C_p \otimes_{\mathbb{Z}} (C_{p^{\alpha_1}} \times \ldots C_{p^{\alpha_r}}) \cong C_p \times \cdots \times C_p \cong (C_p)^r. \tag{4.7}$$

Agora, usando a sequência exata de grupos (4.1), temos

$$|\tau(G, G)| = |\tau(G/N, G/N)||[N, G^{\varphi}]|.$$

Agora, do fato de $[N, G^{\varphi}]$ ser uma imagem epimórfica de $N \otimes G$ (Observação 3.23), segue

$$|G \otimes G| \leq \left|\frac{G}{N} \otimes \frac{G}{N}\right| |N \otimes G|.$$

Finalmente, aplicando a hipótese de indução para G/N e (4.7), obtemos

$$\begin{aligned} |G \otimes G| &\leq \left|\frac{G}{N} \otimes \frac{G}{N}\right| |N \otimes G| = p^{(n-1-e)d+m+r} \\ &\leq p^{(n-1-e)d+m+d} = p^{(n-e)d+m}, \end{aligned}$$

completando a prova.

□

Exemplo 4.3. *O limitante dado no Teorema 4.2 é atingido. De fato, consideremos o grupo dos quatérnios de ordem* 8*. Este é um* 2*-grupo finito* 2*-gerado de ordem* 2^3*, cujo abelianizado* Q_8^{ab} *possui ordem* 4 *e expoente* 2*. Então, pelo Teorema 4.2,* $| Q_8 \otimes Q_8 | \leq 2^{(3-1)2+2} = 2^6$*. Além disso, conforme [3, Proposição 13],* $Q_8 \otimes Q_8 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4$*. Com isso,* $| Q_8 \otimes Q_8 | = 2^6$ *e, portanto, o limite do Teorema 4.2 é atingido.*

Ainda assim existem grupos para os quais a ordem do quadrado tensorial não abeliano não atinge o limitante do Teorema 4.2, como veremos no exemplo abaixo:

Exemplo 4.4. *Consideremos o grupo diedral de ordem* 8*. Analogamente ao exemplo anterior, temos que* $| D_8 \otimes D_8 | \leq 2^6$*. Mas, conforme [3, Proposição 14],* $D_8 \otimes D_8 \cong (\mathbb{Z}_2)^3 \times \mathbb{Z}_4$*; logo,* $| D_8 \otimes D_8 | = 2^5$*.*

4.2 Quadrado tensorial não abeliano de um grupo solúvel finito

Nesta seção, apresentaremos um limite para a ordem do quadrado tensorial não abeliano de um grupo solúvel finito, determinado em [22] por I. N. Nakaoka e finalizaremos a seção com exemplos de quadrados tensoriais cujas ordens atingem este limite.

Para estarmos aptos a dar este limite serão necessário alguns lemas técnicos.

Seja G um grupo. O produto tensorial não abeliano $G_i \otimes G_j$ está definido para todos $i.j \geq 0$, uma vez que, a conjugação em G induz ações compatíveis de G_i sobre G_j e de G_j sobre G_i, para todos $i, j \geq 0$.

Lema 4.5. *Sejam G um grupo finito e $i, j \geq 0$ com $i > j$. Então:*

(i) Existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G_i, G_i^{\varphi}][G_{i+1}, G_j^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G_i, G_j) \longrightarrow \tau\left(G_i^{ab}, \frac{G_j}{G_i}\right) \longrightarrow 1,$$

onde $[G_i, G_i^{\varphi}]$ e $[G_{i+1}, G_j^{\varphi}]$ são subgrupos de $\tau(G_i, G_j)$;

(ii) $|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i||G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I(\frac{G_j}{G_i})||G_{i+1} \otimes G_j|$.

Demonstração. **(i)** Sejam $i, j \geq 0$ com $i > j$ e definamos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \theta : \dfrac{G_j}{G_i} & \to & Aut\left(\dfrac{G_i}{G_{i+1}}\right) \\ G_i h & \mapsto & \theta_h \end{array}$$

onde θ_h é o automorfismo de $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ tal que $(G_{i+1}g)\theta_h = G_{i+1}g^h$. A aplicação θ está bem definida. De fato, se $h, h_1 \in G_j$ são tais que $G_i h = G_i h_1$, então $h_1 = ch$ para algum $c \in G_i$. Assim, para todo $g \in G_i$, temos

$$\begin{aligned} (G_{i+1}g)\theta_{h_1} &= G_{i+1}(g^{h_1}) = G_{i+1}(g^{ch}) = G_{i+1}(g^h g^{-h} g^{ch}) = G_{i+1}(g^h [g, c]^h) \\ &= G_{i+1}(g^h) = (G_{i+1}g)\theta_h. \end{aligned}$$

Obviamente, θ é um homomorfismo de grupos. Com isso, temos uma ação de $\dfrac{G_j}{G_i}$ sobre $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ dada por $(G_{i+1}g)^{G_i h} = G_{i+1}(g^h)$ para todos $g \in G_i$ e $h \in G_j$. Reparemos que, para todos

$g \in G_i$ e $h \in G_j$, temos

$$(G_i h)^{G_{i+1}g} = G_i h^g = G_i(hh^{-1}h^g) = G_i(h[h,g]) = G_i h,$$

ou seja, a conjugação em G induz uma ação trivial de $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ sobre $\dfrac{G_j}{G_i}$. Como $\dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ é um grupo abeliano agindo trivialmente sobre $\dfrac{G_j}{G_i}$, essas ações são compatíveis. Consideremos os seguintes epimorfimos canônicos: $\alpha : G_i \to \dfrac{G_i}{G_{i+1}}$ e $\beta : G_j \to \dfrac{G_j}{G_i}$. Temos que essas aplicações preservam as ações pois, para todos $g \in G_i$ e $h \in G_j$,

$$(g^h)\alpha = G_{i+1}(g^h) = (G_{i+1}g)^{G_i h} = (g\alpha)^{h\beta}$$

e

$$(h^g)\beta = G_i(h^g) = G_i h = (G_i h)^{G_{i+1}g} = (h\beta)^{g\alpha}.$$

Então, segue da Proposição 3.26 que existe um epimorfismo

$$\gamma : \eta(G_i, G_j) \to \eta\left(\frac{G_i}{G_{i+1}}, \frac{G_j}{G_i}\right)$$

tal que $g\gamma = g\alpha$ e $(h^\varphi)\gamma = (h\beta)^\psi$ com $g \in G_i$ e $h \in G_j$. Além disso, se γ' é a restrição de γ a $\tau(G_i, G_j)$, então a sequência de grupos abaixo é exata

$$1 \longrightarrow [G_i, G_i^\varphi][G_{i+1}, G_j^\varphi] \longrightarrow \tau(G_i, G_j) \longrightarrow \tau\left(G_i^{ab}, \frac{G_j}{G_i}\right) \longrightarrow 1.$$

(ii) Pela Observação 3.23, os subgrupos $[G_i, G_i^\varphi]$ e $[G_{i+1}, G_j^\varphi]$ são imagens epimórficas de $G_i \otimes G_i$ e $G_{i+1} \otimes G_j$, respectivamente. Então, pelo item (i) e Proposição 3.22, temos

$$|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i||G_{i+1} \otimes G_j||G_i^{ab} \otimes \frac{G_j}{G_i}|.$$

Sendo G_i^{ab} um grupo abeliano que age trivialmente sobre $\dfrac{G_j}{G_i}$, segue da Proposição 3.13 que

$$G_i^{ab} \otimes \frac{G_j}{G_i} \cong G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I_{\left(\frac{G_j}{G_i}\right)},$$

donde, concluímos a prova.

$\square$

Outro lema técnico é dado abaixo.

Lema 4.6. *Sejam G um grupo finito e $i \geq 0$. Então:*

(i) Existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, G_i^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G,H) \longrightarrow \tau(G_i^{ab}, G_i^{ab}) \longrightarrow 1,$$

onde $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}] \leq \tau(G_i, G_i)$;

(ii) $|G_i \otimes G_i| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_i|$.

Demonstração. **(i)** Consideremos o epimorfismo canônico $\pi : G_i \to G_i^{ab}$. Pela Proposição 3.26, π induz um epimorfismo $\gamma : \eta(G_i, G_i) \to \eta(G_i^{ab}, G_i^{ab})$. Ainda mais, se γ' é a restrição de γ a $\tau(G_i, G_i)$, então a sequência de grupos abaixo é exata

$$1 \longrightarrow [G_{i+1}, G_i^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G_i, G_i) \xrightarrow{\gamma'} \tau(G_i^{ab}, G_i^{ab}) \longrightarrow 1.$$

Se mostrarmos que $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \subseteq [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$, então $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}][G_i, G_{i+1}^{\varphi}] = [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$ e, portanto, teremos o desejado. Sejam $x \in G_i$ e $y \in G_{i+1} = [G_i, G_i] = (G_i)'$. Então, pela Proposição 3.25 item (h), $[x, y^{\varphi}][y, x^{\varphi}] = 1$; assim $[x, y^{\varphi}] = [y, x^{\varphi}]^{-1}$, para todos $x \in G_i$ e $y \in G_{i+1}$. Logo, $[G_i, G_{i+1}^{\varphi}] \subseteq [G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$.

(ii) Como $[G_{i+1}, G_i^{\varphi}]$ é imagem epimórfica de $G_{i+1} \otimes G_i$ e $G_i^{ab} \otimes G_i^{ab} \cong G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}$ (conforme Teorema 3.10), temos

$$|G_i \otimes G_i| = |\tau(G_i, G_i)| \leq |G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}||G_{i+1} \otimes G_i|.$$

□

Agora estamos prontos para apresentar um limitante superior para $|\, G \otimes G \,|$ quando G é um grupo solúvel finito.

Teorema 4.7. ([22]) *Se G é um grupo solúvel finito de comprimento derivado l, então,*

$$\begin{aligned} |G \otimes G| \;\; &\leq \;\; \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \prod_{i=1}^{l-1} \left(\left|G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab}\right|^{2^{i-1}} \cdot \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G}{G_i}\right]} I_{\left(\frac{G}{G_i}\right)} \right| \right) \\ &\cdot \; \prod_{i=1}^{l-2} \prod_{k=i+1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_i}{G_k}\right]} I_{\left(\frac{G_i}{G_k}\right)} \right|^{2^{i-1}}. \end{aligned}$$

Demonstração. Pelo Lema 4.5 item (ii), para $i > j$, temos

$$|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i| \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I_{\left(\frac{G_j}{G_i}\right)} \right| |G_{i+1} \otimes G_j| \, .$$

Aplicando novamente o Lema (4.5) item (ii) em $|G_{i+1} \otimes G_j|$, obtemos

$$|G_i \otimes G_j| \leq |G_i \otimes G_i| \, |G_{i+1} \otimes G_{i+1}| \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_i}\right]} I_{\left(\frac{G_j}{G_i}\right)} \right| \left| G_{i+1}^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_{i+1}}\right]} I_{\left(\frac{G_j}{G_{i+1}}\right)} \right|$$

Assim, usando repetidas vezes o Lema 4.5 item (ii) e considerando que $G_l = 1$, teremos que se $i > j$, então

$$|G_i \otimes G_j| \leq \prod_{k=i}^{l-1} |G_k \otimes G_k| \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_k}\right]} I_{\left(\frac{G_j}{G_k}\right)} \right| . \tag{4.8}$$

Seja i um inteiro, $0 \leq i \leq l-1$. Pelo Lema 4.6 item (ii), $|G_i \otimes G_i| \leq \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab} \right| |G_{i+1} \otimes G_i|$ e, daí, por (4.8), temos

$$|G_i \otimes G_i| \leq \left| G_i^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_i^{ab} \right| |G_{i+1} \otimes G_{i+1}| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=i+1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}\left[\frac{G_j}{G_k}\right]} I_{\left(\frac{G_i}{G_k}\right)} \right| . \tag{4.9}$$

Agora, fazendo $i = 0$ na expressão acima,

$$|G \otimes G| \leq \left| G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \right| |G_1 \otimes G_1| \, |G_2 \otimes G_2| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G}{G_k}]} I_{\left(\frac{G}{G_k}\right)} \right| . \tag{4.10}$$

Usando a expressão (4.9) com $i = 1$, obtemos

$$|G_1 \otimes G_1| \leq \left| G_1^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_1^{ab} \right| |G_2 \otimes G_2| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=2}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G_1}{G_k}]} I_{\left(\frac{G_1}{G_k}\right)} \right| .$$

Assim, de (4.10) segue a desigualdade abaixo:

$$\begin{aligned}
|G \otimes G| \;&\leq\; \left| G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \right| \left(\left| G_1^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_1^{ab} \right| |G_2 \otimes G_2| \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=2}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G_1}{G_k}]} I_{\left(\frac{G_1}{G_k}\right)} \right| \right) \cdot \\
&\cdot \;\; |G_2 \otimes G_2| \cdot |G_{l-1} \otimes G_{l-1}| \prod_{k=1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G}{G_k}]} I_{\left(\frac{G}{G_k}\right)} \right| \\
&= \;\; \left| G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \right| \left| G_1^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G_1^{ab} \right| |G_2 \otimes_{\mathbb{Z}} G_2|^2 \cdots |G_{l-1} \otimes G_{l-1}|^2 \prod_{k=1}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G}{G_k}]} I_{\left(\frac{G}{G_k}\right)} \right| \cdot \\
&\cdot \;\; \prod_{k=2}^{l-1} \left| G_k^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}[\frac{G_1}{G_k}]} I_{\left(\frac{G_1}{G_k}\right)} \right|
\end{aligned}$$

Realizando este processo repetidas vezes, obtemos o limite desejado. $\square$

O limite encontrado no teorema anterior foi melhorado quando G é um grupo solúvel de comprimento derivado 2.

Teorema 4.8. *([22]) Seja G um grupo metabeliano finito. Então*

$$|G \otimes G| \quad \textit{divide} \quad \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \wedge G'| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{\left(G^{ab}\right)}\right|,$$

onde $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. Quando $[G', G] = 1$, temos

$$|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|.$$

Demonstração. Primeiramente, provaremos o caso $[G', G] = 1$. Suponhamos G um grupo finito tal que $l(G) = 2$ e $[G', G] = 1$. Então, $(G')^{ab} \cong G'$, G é G'-trivial e G' é G-trivial. Assim, pelo Teorema 3.10, $G' \otimes G \cong (G')^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Logo, pelo Lema 4.6 item (ii) com $i = 0$, temos

$$|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right|.$$

Agora, seja G um grupo metabeliano finito qualquer. Fazendo $i = 0$ no Lema 4.6, obtemos uma sequência exata,

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G, G) \longrightarrow \tau(G^{ab}, G^{ab}) \longrightarrow 1,$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G, G)$. Assim,

$$|\tau(G, G)| = \left|\tau(G^{ab}, G^{ab})\right| |[G', G^{\varphi}]|. \tag{4.11}$$

É claro que a correspondência $[x, g^{\varphi}] \mapsto [x, g^{\varphi}]$, $x \in G'$ e $g \in G$, estende-se a um epimorfismo, $\alpha : \tau(G', G) \to [G', G^{\varphi}]$. Como $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G, G)$, segue da Proposição 3.36 que $[x, x^{\varphi}] = 1$, para todo $x \in G' = [G, G]$. Logo, o subgrupo $S = \langle [x, x^{\varphi}] \mid x \in G' \rangle$ de $\tau(G', G)$ está contido no núcleo de α. Além disso, $S \trianglelefteq \tau(G', G)$ pois $[x, x^{\varphi}]^{[g', g^{\varphi}]} = [x, x^{\varphi}]^{(g')^{-1}(g')^{g}} = [x, x^{\varphi}]$. Dessa forma, α induz um epimorfismo

$$\beta : \frac{\tau(G', G)}{S} \to [G', G^{\varphi}]$$

e, assim,

$$|[G', G^{\varphi}]|\, a = \left|\frac{\tau(G', G)}{S}\right| \tag{4.12}$$

onde $a = |Nuc(\beta)|$. Agora, pelo Lema 4.5 (com $i = 1$ e $j = 0$), existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G', (G')^{\varphi}] \xrightarrow{inc} \tau(G', G) \xrightarrow{\gamma'} \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1,$$

sendo $[G', (G')^{\varphi}] \leq \tau(G', G)$ e γ' é o homomorfismo tal que $([x, g^{\varphi}])\gamma' = [x, (G'g)^{\psi}]$, para todos $x \in G'$ e $g \in G$. Temos que, $S \subseteq Nuc(\gamma')$ e $S \subseteq [G', (G')^{\varphi}]$, pois para $x_1, \ldots, x_n \in G'$ e $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n \in \{1, -1\}$

$$([x_1, x_1^{\varphi}]^{\varepsilon_1} \ldots [x_n, x_n^{\varphi}]^{\varepsilon_n})\gamma' = [x_1, (G'x_1)^{\psi}]^{\varepsilon_1} \cdots [x_n, (G'x_n)^{\psi}]^{\varepsilon_n} = [x_1, G'1]^{\varepsilon_1} \cdots [x_n, G'1]^{\varepsilon_n} = 1$$

e $S \subseteq [G', (G')^{\varphi}]$, pela própria definição de S.

Com isso, segue que a sequência abaixo é exata:

$$\frac{[G', (G')^{\varphi}]}{S} \xrightarrow{\upsilon} \frac{\tau(G', G)}{S} \xrightarrow{\mu} \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1$$

onde υ e μ são os homomorfismos induzidos por inc e γ', respectivamente. Portanto,

$$\left|\frac{\tau(G', G)}{S}\right| = \left|\tau(G', G^{ab})\right| |Im(\upsilon)| = \frac{1}{b} \left|\tau(G', G^{ab})\right| \left|\frac{[G', (G')^{\varphi}]}{S}\right| \tag{4.13}$$

onde $b =| Nuc(\upsilon) |$ Consideremos $X = \{x \otimes y \mid x, y \in G'\}$. A aplicação,

$$\begin{aligned} \theta_1 : X &\rightarrow \frac{\tau(G', G)}{S} \\ x \otimes y &\mapsto S[x, y^{\varphi}] \end{aligned}$$

é consistente com as relações definidoras de $G' \otimes G'$. Além disso, $x \otimes x \in Nuc(\theta_1)$ para todo $x \in G'$. Assim, θ_1 induz um homomorfismo $\theta : G' \wedge G' \rightarrow \dfrac{\tau(G', G)}{S}$ tal que $Im(\theta) = \dfrac{[G', (G')^{\varphi}]}{S}$. Logo,

$$|G' \wedge G'| = \left|\frac{[G', (G')^{\varphi}]}{S}\right| c \tag{4.14}$$

onde $c = |Nuc(\beta)|$. Como $l(G) = 2$, G' é abeliano e, então, pela Proposição 3.10, $G' \otimes G' \cong G' \otimes_{\mathbb{Z}} G'$, logo, o grupo $G' \wedge G'$ é o quadrado exterior (usual) do $\mathbb{Z}$-módulo G'. Agora, de (4.11), (4.12), (4.13) e (4.14), temos

$$\begin{aligned} |\tau(G, G)| &\overset{(4.11)}{=} \left|\tau(G^{ab}, G^{ab})\right| |[G', G^{\varphi}]| \\ &\overset{(4.12)}{=} \frac{1}{a} \left|\tau(G^{ab}, G^{ab})\right| \left|\frac{\tau(G', G)}{S}\right| \\ &\overset{(4.13)}{=} \frac{1}{a}\frac{1}{b} \left|\tau(G^{ab}, G^{ab})\right| \left|\tau(G', G^{ab})\right| \left|\frac{[G', (G')^{\varphi}]}{S}\right| \\ &\overset{(4.14)}{=} \frac{1}{a}\frac{1}{b}\frac{1}{c} \left|\tau(G^{ab}, G^{ab})\right| \left|\tau(G', G^{ab})\right| |G' \wedge G'|, \end{aligned}$$

ou seja, $|\tau(G,G)|$ divide $\left|\tau(G^{ab},G^{ab})\right| |G' \wedge G'| \left|\tau(G',G^{ab})\right|$.

Finalmente, das Proposições 3.22 e 3.13, obtemos

$$|G \otimes G| \quad \text{divide} \quad \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| |G' \wedge G'| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{(G^{ab})}\right|.$$

□

Observação 4.9. *Se G é um grupo metabeliano finito com G' cíclico, então $G' \wedge G'$ é trivial. De fato, suponhamos que $G' = \langle x \rangle$. Sabemos que $G' \wedge G' = \dfrac{G' \otimes G'}{Im(\psi)}$, onde $Im(\psi)$ é gerado pelo conjunto $X = \{g' \otimes g' \mid g' \in G'\}$. Mas, notemos que dado $g \otimes h \in G' \otimes G'$, então g e h são da forma $g = x^k$ e $h = x^l$, com $k, l \in \mathbb{Z}$ e, daí, $g \otimes h = x^k \otimes x^l = (x \otimes x)^{kl}$, ou seja, $G' \otimes G'$ também é gerado por X. Portanto, $G' \wedge G'$ é trivial. Assim, pelo resultado anterior,*

$$|G \otimes G| \quad \textit{divide} \quad \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{(G^{ab})}\right|.$$

A seguir veremos um exemplo de um grupo cuja ordem do quadrado tensorial não abeliano atinge o limitante superior dado no Teorema 4.8.

Exemplo 4.10. *Seja $G = Q_8$ o grupo dos quatérnios. Temos $[G', G] = 1$, $G' \cong \mathbb{Z}_2$ e $G^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Assim,*

$$\begin{aligned} G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} &\cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \\ &\cong ((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2) \times ((\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \otimes \mathbb{Z}_2) \\ &\cong (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \\ &\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2; \end{aligned}$$

logo, $\left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| = 2^4$. Além disso,

$$G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab} \cong \mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,$$

consequentemente, $\left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| = 2^2$. Assim, aplicando o Teorema 4.8, obtemos

$$|G \otimes G| \leq \left|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| \left|G' \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}\right| = 2^4 2^2 = 2^6.$$

Mais ainda, este limite é atingido, pois, conforme [3, Proposição 13],

$$Q_8 \otimes Q_8 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_4.$$

Portanto, $|Q_8 \otimes Q_8| = 2^2 2^4 = 2^6$.

Notemos que o homomorfismo $\lambda : \tau(G,G) \to G'$, definido por $([g,h^{\varphi}])\lambda = g^{-1}g^h$ é sobrejetor. Dessa forma, se G é finito, então $|G'|$ divide $|\tau(G,G)|$. Este fato, juntamente com o Teorema 4.8, será usado no próximo exemplo para calcularmos o quadrado tensorial não abeliano de um produto semidireto de $\mathbb{Z}_p$ pelo grupo de Klein.

Exemplo 4.11. Seja $\mathbb{Z}_p = \langle x \mid x^p \rangle$, com p primo diferente de 2 e $K = \langle a, b \mid a^2, b^2, [a,b] \rangle$. A ação de K sobre $\mathbb{Z}_p$ é dada por: $x^a = x^{-1}$ e $x^b = x^{-1}$. Com esta ação formamos o produto semidireto $G = K \ltimes \mathbb{Z}_p$. Com isso, $G' = \mathbb{Z}_p$ e $G^{ab} \cong K$ e, daí, G é solúvel de comprimento derivado 2 com $G_1 = G' = \mathbb{Z}_p$ cíclico, donde segue, do Corolario 3.37 que $\tau(G,G)$ é solúvel de comprimento derivado igual a 1. Logo, $\tau(G,G)$ é abeliano.

Pelo Teorems 3.16, $G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{G^{ab}} \cong \tau(G', G^{ab}) \cong \tau(\mathbb{Z}_p, K)$, onde $\mathbb{Z}_p$ age trivialmente sobre K e a ação de K sobre $\mathbb{Z}_p$ é a dada anteriormente. Dessa forma, $\tau(\mathbb{Z}_p, K) \cong \mathbb{Z}_p$ (Exemplo 3.2). Daí, pelo Teorema 4.8, temos que $|\tau(G,G)|$ divide $p.2^4$, uma vez que $G^{ab} \otimes G^{ab} \cong (\mathbb{Z}_2)^4$ e $G' \wedge G' = 1$. Agora, pelo Lema 4.6, existe uma sequência exata

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G,G) \longrightarrow \tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \longrightarrow 1, \tag{4.15}$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G,G)$ e $\tau\left(G^{ab}, G^{ab}\right) \cong G^{ab} \otimes G^{ab}$. Assim, $|[G', G^{\varphi}]|$ divide p. Por outro lado, $p = |G'|$ divide $|\tau(G,G)|$ donde obtemos o seguinte isomorfismo $[G', G^{\varphi}] \cong \mathbb{Z}_p$.

Portanto, de (4.15) e sabendo que $\tau(G,G)$ é abeliano, $\text{mdc}(2,p) = 1$, pela Proposição 1.36, concluímos que

$$G \otimes G \cong \tau(G,G) \cong \mathbb{Z}_p \times (\mathbb{Z}_p)^4.$$

Finalizamos esse trabalho com a descrição do quadrado tensorial não abeliano de um grupo finito $G \otimes G$, onde o subgrupo derivado G' é cíclico e $mdc(|G'|, |G^{ab}|) = 1$.

Teorema 4.12. *([21]) Se G é um grupo finito cujo subgrupo derivado G' é cíclico e $\mid G' \mid$ e $\mid G/G' \mid$ são relativamente primos, então*

$$G \otimes G \cong G' \times ((G/G') \otimes_{\mathbb{Z}} (G/G')).$$

Demonstração. Usando o Lema 4.6 obtemos a seguinte sequência exata:

$$1 \longrightarrow [G', G^{\varphi}] \longrightarrow \tau(G,G) \longrightarrow \tau(G^{ab}, G^{ab}) \longrightarrow 1, \tag{4.16}$$

onde $[G', G^{\varphi}] \leq \tau(G, G)$. Como G' é cíclico, segue do Corolário 3.37 que $G \otimes G \cong \tau(G, G)$ é solúvel de comprimento 1, consequentemente, $G \otimes G$ é abeliano. Uma vez que $\tau(G^{ab}, G^{ab}) \cong G^{ab} \otimes G^{ab}$ e G^{ab} é abeliano, $\tau(G^{ab}, G^{ab}) \cong G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}$. Dessa forma, se $[G', G^{\varphi}] \cong G'$ usando a sequência exata dada em (4.16) e o fato que $\text{mdc}(\mid G' \mid, \mid G^{ab} \mid) = 1$ seguirá da Proposiçao 1.36 o resultado desejado. Então, para finalizarmos a prova vamos mostrar que $[G', G^{\varphi}] \cong G'$.

A conjugação em G induz ações de G sobre G' e de G' sobre G. Seja G^{ψ} uma cópia isomórfica de G pelo isomorfismo $\psi : G \to G^{\psi}$ e consideremos o grupo $\tau(G', G)$ como um subgrupo de $\eta(G', G)$. É claro que a correspondência $[x, g^{\psi}] \mapsto [x, g^{\varphi}]$, com $x \in G'$ e $g \in G$, induz um epimorfismo α de $\tau(G', G)$ sobre $[G', G^{\varphi}]$ $(\leq \tau(G, G))$. O subgrupo $S = \langle [x, x^{\psi}] \mid x \in G' \rangle$ é normal em $\tau(G', G)$ e está contido no núcleo de α, já que, em $\tau(G, G)$, tem-se que $[x, x^{\varphi}] = 1$, para todo $x \in G'$, pelo Teorema 3.36. Assim, α induz um epimorfismo

$$\beta : \frac{\tau(G', G)}{S} \to [G', G^{\varphi}]. \tag{4.17}$$

Consideremos o grupo $\tau(G', G^{ab})$ onde G^{ab} é G'-trivial e a ação de G^{ab} sobre G' é induzida por G através do epimorfismo natural, isto é, $c^{G'g} = c^g$ onde $c \in G'$ e $g \in G$. Como visto no Teorema 3.13 o grupo $G' \otimes G^{ab}$ é abeliano. Pelo Lema 4.5 existe uma sequência exata:

$$1 \longrightarrow [G', (G')^{\psi}] \xrightarrow{inc} \tau(G', G) \xrightarrow{\gamma'} \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1, \tag{4.18}$$

onde $[G', (G')^{\psi}] \leq \tau(G', G)$ e γ' é o homomorfismo dado por $([x, g^{\psi}])\gamma' = [x, (G'g)^{\phi}]$, para todos $x \in G'$ e $g \in G$. Observemos que $S \subseteq Nuc(\gamma')$ e $S \subseteq [G', (G')^{\psi}]$. Assim, (4.18) induz a sequência exata abaixo:

$$\frac{[G', (G')^{\psi}]}{S} \longrightarrow \frac{\tau(G', G)}{S} \longrightarrow \tau(G', G^{ab}) \longrightarrow 1. \tag{4.19}$$

Seja $X = \{x \otimes y \mid x, y \in G'\}$. Definimos a aplicação $\theta' : X \to \tau(G', G)/S$ por $(x \otimes y)\theta' = S[x, y^{\psi}]$. É fácil ver que essa aplicação é consistente com as relações definidoras do quadrado tensorial $G' \otimes G'$. Logo, θ' estende-se a um homomorfismo $\theta : G' \otimes G' \to \tau(G', G)/S$. Como $x \otimes x \in Nuc(\theta)$, para todo $x \in G'$, então θ induz um homomorfismo $\theta_1 : G' \wedge G' \to \tau(G', G)/S$ tal que $Im(\theta_1) = [G', (G')^{\psi}]/S$. Agora, como G' é cíclico, pela Observação 4.9 $G' \wedge G' = 1$. Assim, $[G', (G')^{\psi}]/S = 1$ e, daí, por (4.19) e (4.17), existe um epimorfismo

$$\beta_1 : \tau(G', G^{ab}) \to [G', G^{\varphi}]. \tag{4.20}$$

Pelo Corolário 3.14 temos um homomorfismo

$$\lambda : G' \otimes G^{ab} \to G', \tag{4.21}$$

tal que $Nuc(\lambda) \cong H_1(G^{ab}, G')$. É fácil ver que $c^n \otimes G'g = (c \otimes G'g)^n$, para todos $c \in G'$, $G'g \in G^{ab}$ e $n \in \mathbb{N}$ pois, como G^{ab} é G'-trivial a seguinte igualdade é válida $c^2 \otimes G'g = (c \otimes G'g)(c \otimes G'g) = (c \otimes G'g)^2$; assim, indutivamente, obtemos a igualdade acima. Logo, se $|G'| = l$, então $(c \otimes G'g)^l = 1$ para todos $c \in G'$ e $g \in G$. Daí, como o grupo $G' \otimes G^{ab}$ é abeliano, o expoente de $G' \otimes G^{ab}$ divide $\mid G' \mid$. Pelo Teorema 6.5.8 em [31], o expoente de $H_1(G^{ab}, G')$ divide $\mid G^{ab} \mid$. Daí, como mdc$(\mid G' \mid, \mid G^{ab} \mid) = 1$, segue que $H_1(G^{ab}, G') = 0$. Assim, λ é um monomorfismo e pelo epimorfismo (4.20),

$$\mid [G', G^{\varphi}] \mid \leq \mid \tau(G', G^{ab}) \mid \leq \mid G' \mid . \tag{4.22}$$

Por outro lado, $\mid G' \mid$ divide $\mid \tau(G, G) \mid$, uma vez que a aplicação definida por $[g, h^{\varphi}] \mapsto [g, h]$ com $g, h \in G$, induz um epimorfismo de $\tau(G, G)$ em G'. Agora de (4.16), temos

$$\mid \tau(G, G) \mid = \mid \tau(G^{ab}, G^{ab}) \mid\mid [G', G^{\varphi}] \mid .$$

Logo, $\mid G' \mid$ divide $\tau(G^{ab}, G^{ab}) \mid\mid [G', G^{\varphi}] \mid$. Agora, mdc$(\mid G' \mid, \mid \tau(G^{ab}, G^{ab}) \mid) = 1$ implica que $\mid G' \mid$ divide $\mid [G', G^{\varphi}] \mid$ e, consequentemente, $\mid G' \mid \leq \mid [G', G^{\varphi}] \mid$. Portanto, de (4.22), $\mid G' \mid = \mid [G', G^{\varphi}] \mid$.

Para finalizarmos, reparemos que como β_1 é sobrejetora, então $\mid [G', G^{\varphi}] \mid \leq \mid \tau(G', G^{ab}) \mid$, ou seja, $\mid G' \mid \leq \mid \tau(G', G^{ab}) \mid$. Assim, além do fato de λ ser injetora temos também a sobrejetividade da aplicação λ; logo $\tau(G', G^{ab}) \cong G'$. Portanto, de (4.20) existe um epimorfismo de G' em $[G', G^{\varphi}]$ e, como $|G'| = |[G', G^{\varphi}]|$, conclui-se que $G' \cong [G', G^{\varphi}]$.

$\square$

Exemplo 4.13. Consideremos o grupo simétrico de ordem 6, S_3. Sabemos que $S_3' \cong \mathbb{Z}_3$ e $S_3^{ab} \cong \mathbb{Z}_2$; logo, pelo Teorema 4.12,

$$S_3 \otimes S_3 \cong \mathbb{Z}_3 \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_6.$$

Pelo exemplo anterior, $S_3 \otimes S_3$ é abeliano, porém é sabido que S_3 não é nilpotente; com isso, a recíproca do Teorema 3.35 não é verdadeira.

Exemplo 4.14. *Observemos que se n é ímpar, o subgrupo derivado do grupo diedral D_{2n} é isomorfo a $\mathbb{Z}_n$ e $(D_{2n})^{ab}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$. Assim, aplicando o Teorema 4.12,*

$$D_{2n} \otimes D_{2n} \cong \mathbb{Z}_n \times (\mathbb{Z}_2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2 \cong \mathbb{Z}_{2n},$$

o que está de acordo com [3, Proposição 14].

Seja G um grupo nas condições do Teorema 4.12. Vimos na demonstração desse resultado que $\tau(G', G^{ab}) \cong G'$. Além disso, pelo Teorema 3.13, $G' \otimes G^{ab}$ é isomorfo a $G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{(G^{ab})}$; logo, concluímos que G' é isomorfo a $G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{(G^{ab})}$. Assim, segue do Teorema 4.12 que a ordem do quadrado tensorial não abeliano $G \otimes G$ é igual a $|G^{ab} \otimes_{\mathbb{Z}} G^{ab}||G' \otimes_{\mathbb{Z}G^{ab}} I_{(G^{ab})}|$. Agora, como G' é cíclico, $G' \wedge G'$ é trivial. Portanto, podemos perceber que $|G \otimes G|$ atinge o limitante superior dado pelo Teorema 4.8.

Referências

[1] BACON, M., KAPPE, L.C., *The non-abelian tensor square of a 2-generator p-group of class 2*, Archiv der mathematik vol. 61 (1993), 506-516.

[2] BACON, M., KAPPE, L.C., MORSE, R.F, *On the nonabelian tensor square of a 2-Engel group*, Arch. Math. (1997), 353-364.

[3] BROWN, R., JOHNSON, D.L., ROBERTSON, E.F., *Some computation of non-abelian tensor products of groups*, J. Algebra 111 (1987), 177-202.

[4] BROWN, R., LODAY, J.L., *Excision homotopique en basse dimension*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 298 (1984), 353-356.

[5] BROWN, R., LODAY, J.L., *Van Kampen theorems for diagrams of spaces*, Topology 26 (1987), 311-335.

[6] DENNIS, R.K., *In search of new homology functors having a close relationship to K-theory*, Preprint, Cornell University, Ithaca, NY 1976.

[7] DIETZMANN, A.P., *On p-groups*, Dokl. Akad. Nank, SSSR 15 (1937), 71-76

[8] ELLIS, G., LEONARD, F., *Computing Schur Multipliers and Tensor Products of Finite Groups*, Proc. Royal Irish Acad. 95A (1995), 137-147.

[9] ELLIS, G., *The Non-Abelian Tensor Product of finite Groups is finite*, J. Pure Appl. Algebra 111 (1987), 203-205.

[10] ELLIS, G., MCDERMOTT, A., *Tensor products of prime-power groups*, J. Pure Appl. Algebra 132(2) (1998), 119-128.

[11] GOLDHABER, J.K., EHRLICH, G., *Algebra*, Macmillan Company, Toronto, 1970.

[12] GUIN, D., *Cohomologie et homologie non-abeliennes des groupes*, J. Pure Appl. Algebra 50 (1988), 109-138.

[13] JAFARI, S.H., *A Bound on the Order of Non-abelian Tensor Square of a Prime-Power Group*, Comm. Algebra 40 (2012), 528-530.

[14] JACONSON, N., *Basic Algebra II*, 2nd ed., W. H. Freeman and Company, San Francisco , 1989.

[15] JOHNSON, D.L., *Topics in the Theory of Group Presentations*, Cambridge University Press, 1980.

[16] KARPILOVSKY, G., *The Schur Multiplier*, Oxford Universty Press, New York, 1987.

[17] KAPPE, L.C., *Nonabelian tensor products of groups: the commutator connection*, Proc. Groups St. Andrews 1997 at Bath, London Math. Soc. Lecture Notes 261 (1999) , 447-454.

[18] MILLER, C., *the second homology of a group*, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), 588-595.

[19] NAKAOKA, I.N., *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos*, Dissertação de Mestrado, IMECC-UNICAMP (1994).

[20] NAKAOKA, I.N., *Sobre o Produto Tensorial não Abeliano de Grupos Solúveis*, Tese de Doutorado, IMECC-UNICAMP (1998).

[21] NAKAOKA, I.N., ROCCO, N.R., *Nilpotent Action on Non-Abelian Tensor Products of Groups*, Matemática Contemporânea 21 (2001), 223-238.

[22] NAKAOKA, I.N., *Non-abelian tensor products of solvable groups*, J. Groups Theory 3 (2000), 157-167.

[23] ROBINSON, D.J.S., *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[24] ROBINSON, D.J.S., *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Parts 1 , Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[25] ROCCO, N. R., *Métodos de Lie em Teoria dos Grupos*, In: Said Najati Sidki; Noraí Romeu Rocco. (Org.). ATAS DA IX ESCOLA DE ÁLGEBRA - VOL. 2. BRASÍLIA: SBM, 1987, v. 2, p. 129-213.

[26] ROCCO, N.R, *On a Construction Related to the Non-abelian Tensor Square of a Groups*, Bol. Soc. Bras. Mat. 22 (1991), 63-79.

[27] NORTHCOTT, D.G *Lessons on Rings Modules and Multiplicities*, Cambridge University Press, London 1968.

[28] ROTMAN, J.J., *An Introduction to the Theory of Groups*, 4nd ed., Springer-Verlag, New York, 1994.

[29] ROTMAN, J.J., *An Introduction to Homological Algebra*, 2nd ed., Spring-Verlag, New York, 2009.

[30] HILTON, P.J., STAMMBACH, U., *A Course in Homological Algebra*, 2nd ed., Spring-Verlag, New York, 1997.

[31] WEIBEL, A.C., *An Introduction to Homological Algebra*, Cambridge University Press, London, 1997.

[32] VISSCHER, M.P, *On the Nilporency Class and Solvability Lenght of Nonabelian Tensor Products of Groups*, Arch. Math. 73 (1999), 161-171.

[33] THOMAS, V.Z., *The Non-abelian Tensor Product of finite Groups is Finite: A Homology-free Proof*, J. Glasgow. Math. 52 (2010), 473-477.

[34] WHITEHEAD, J.H.C., *A certain exact sequence*, Ann. of Math 52 (1950), 51-110.