

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ  
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA  
(Mestrado)

AILTON RIBEIRO DE OLIVEIRA

Conjugação topológica de fluxos

Maringá-PR

2011

AILTON RIBEIRO DE OLIVEIRA

## Conjugação topológica de fluxos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana

Maringá

2011

# Conjugação topológica de fluxos

**Ailton Ribeiro de Oliveira**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio - UEM .....  
(Orientador)

Prof. Dr. Alexandre José Santana - UEM .....  
(Co-orientador)

Prof. Dr. Pedro José Catuogno - UNICAMP .....

Prof. Dr. Marcos André Verdi - UEM .....

Maringá

Fevereiro - 2011

Aos meus pais, João e Ana,

e ao meu sobrinho Eduardo.

“Se não puder se destacar pelo  
talento, vença pelo esforço. ”

Dave Weinbaum.

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por me dar condições para concluir mais um fato marcante na minha vida.

Aos meus pais, João e Ana, pela excelente educação que me deram. À minha tia Gercina que ajudou a me criar. Ao meu irmão pelas brincadeiras, pelo companheirismo e por me dar a graça de ser tio. Ao meu sobrinho pelo simples fato de existir. À toda minha família pelo apoio, amor e força. Aos meus grandes amigos Alex, Vantuir, Renato e Luiz Carlos, companheiros de cidade, diversão e trapalhadas.

A todos os meus amigos, em especial, aos meus companheiros de turma: Anderson, César, Claudinha, Ewerton, Fausto, Fernanda, Hélio, Marcia, Marisa, Otávio, Thiago e Vanderléa. E, também, aos outros amigos do mestrado e do doutorado, à galera do futebol e aos meus parceiros de república.

Aos meus orientadores Osvaldo e Alexandre pelos esclarecimentos, paciência, atenção e disponibilidade para me atender. A todos os meus professores, em particular, aos professores (e funcionários também!) do departamento de matemática da Unesp de Presidente Prudente e da Uem.

À Capes, pelo apoio financeiro. E, também, a todas as pessoas que não mencionei, mas que de uma forma ou de outra contribuíram para a conclusão desse trabalho.

# Resumo

Neste trabalho apresentamos alguns resultados relacionados com conjugação e equivalência topológica para equações diferenciais lineares do tipo  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . E, posteriormente, generalizá-los para equações diferenciais afins do tipo  $\dot{x} = Ax + a$ , onde  $(A, a) \in gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . Como resultados principais, mostraremos que, se  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas, os fluxos associados a  $\dot{x} = Ax$  (ou  $\dot{x} = Ax + a$ ) e  $\dot{x} = Bx$  (ou  $\dot{x} = Bx + b$ ) são topologicamente conjugados se, e somente se, os subespaços estáveis de  $A$  e  $B$  têm as mesmas dimensões. Também, estudaremos conjugação e equivalência topológica no toro  $n$ -dimensional. Neste caso, verificamos que a conjugação (equivalência) topológica de dois campos vetoriais não nulos no toro, induzidos por  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , depende da existência de um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n$  invariante tal que  $A(X) = Y$  ( $A(X) = \alpha Y$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ). No caso em que  $X, Y \in \mathbb{Z}^n$ , a conjugação depende do máximo divisor comum das entradas de  $X$  e  $Y$ .

**Palavras chave:** Conjugação topológica, matrizes hiperbólicas, equações diferenciais afins, campos vetoriais no toro.

# Abstract

In this work we present some results related to topological conjugacy and equivalence for linear differential equations type  $\dot{x} = Ax$ , where  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  and  $x \in \mathbb{R}^d$ . And posteriorly we generalize them to affine differential equations of type  $\dot{x} = Ax + a$ , where  $(A, a) \in gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  and  $x \in \mathbb{R}^d$ . As main results we show that if  $A$  and  $B$  are hyperbolic matrices the associated flows with  $\dot{x} = Ax$  (or  $\dot{x} = Ax + a$ ) and  $\dot{x} = Bx$  (or  $\dot{x} = Bx + b$ ) are topologically conjugate if and only if the stable subspaces  $A$  and  $B$  have the same dimensions. Also, we study topological conjugacy and equivalence in the torus  $n$ -dimensional. In this case, we found that the topological conjugacy (equivalence) of two nonvanishing vector fields on the torus induced by  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , depends on the existence of an isomorphism  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{Z}^n$  invariant such that  $A(X) = Y$  ( $A(X) = \alpha Y$ , for some  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ). In the case where  $X, Y \in \mathbb{Z}^n$ , the conjugacy depends on the greatest common divisor of the entries of  $X$  and  $Y$ .

**Key words:** Topological conjugacy, hyperbolic matrices, affine differential equations, vector fields in the torus.



---

---

# SUMÁRIO

---

<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>13</b>
1.1 Álgebra linear . . . . .	13
1.2 Equações diferenciais lineares . . . . .	17
1.2.1 Retrato de fase . . . . .	20
1.2.2 Soluções de $\dot{x} = Ax$ . . . . .	25
<b>2 Estabilidade e sistemas dinâmicos</b>	<b>29</b>
2.1 Espaços de Lyapunov . . . . .	29
2.2 Sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}^d$ . . . . .	45
<b>3 Conjugação e equivalência de fluxos lineares no espaço euclidiano</b>	<b>48</b>
3.1 Conjugação e equivalência de fluxos lineares . . . . .	48
3.2 Conjugação e equivalência topológica de fluxos lineares . . . . .	54
<b>4 Estabilidade e conjugação topológica para equações diferenciais afins</b>	<b>71</b>
4.1 Equações diferenciais afins . . . . .	71
4.2 Conjugação para equações diferenciais afins . . . . .	77
<b>5 Conjugação e equivalência topológica no toro <math>n</math>-dimensional</b>	<b>89</b>
5.1 Conjugação e equivalência topológica . . . . .	90
5.2 Conjugação topológica de fluxos racionais no toro . . . . .	99

---

# INTRODUÇÃO

---

Os primórdios da teoria dos sistemas dinâmicos (ou fluxos) podem ser identificados já no século XVI, nos trabalhos de mecânica celeste escritos por Johannes Kepler. As contribuições de Isaac Newton à modelagem matemática através da formalização da mecânica clássica abriram espaço para uma sofisticação crescente do aparato matemático que modela fenômenos mecânicos, culminando nos trabalhos de Lagrange e Hamilton, que definiram a teoria da mecânica clássica num contexto matemático, que essencialmente é o mesmo estudado até hoje.

As décadas de 1960 e 1970 marcaram o renascimento do estudo dos sistemas dinâmicos como uma nova área de investigação, com caracter próprio, que por ser inovador deu origem a agitação das polêmicas nos meios científicos. O impulso inovador foi propiciado pelo desenvolvimento acelerado dos meios computacionais.

Surgiu uma geração de investigadores que usavam os seus computadores como autênticos laboratórios para explorar equações e descobrir novos fenômenos. Os matemáticos tradicionais criticaram a sua falta de rigor científico, por não existir uma teoria sólida que explicasse os resultados obtidos. Grande parte desses resultados encontravam-se no domínio da física. Mas, para muitos físicos, essa nova disciplina era vista como uma simples implementação computacional de conhecimentos antigos e já bem estabelecidos, sem nenhuma inovação do ponto de vista físico.

Assim, os pioneiros da nova era dos sistemas dinâmicos foram confrontados com rejeições de publicação em revistas de renome, e avaliações negativas. Mas, por outro lado, a sua atividade despertou um interesse que foi aumentando exponencialmente e foi uma lufada de ar fresco para a comunidade científica, já que os seus métodos adaptavam facilmente à realidade atual do trabalho científico.

O matemático francês Henri Poincaré é considerado um dos criadores da teoria moderna dos sistemas dinâmicos, tendo introduzido muito dos aspectos do estudo qualitativo das equações diferenciais que permitiram estudar propriedades assintóticas das soluções (ou da maior parte das soluções) de uma equação diferencial, como estabilidade e periodicidade, sem ser necessário resolver explicitamente a equação diferencial. Tal abordagem pode ser encontrada na sua obra prima *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, publicada em três volumes entre 1892 e 1899. Considera-se que o primeiro livro publicado na área de sistemas dinâmicos é a obra *Dynamical Systems*, escrito pelo matemático George Birkhoff, e publicada em 1927.

Estamos interessados em analisar quando dois sistemas dinâmicos (fluxos) têm o mesmo comportamento, ou seja, quando dois sistemas são indistinguíveis do ponto de vista geométrico. Esta idéia é formalizada através de conjugação topológica.

Agora, vamos detalhar o que faremos nesse trabalho. Revisaremos a forma canônica de Jordan e alguns conceitos de equações diferenciais. Definiremos equações diferenciais linear e afim. Além disso, mostraremos que as soluções dessas equações existem e são únicas. Falaremos um pouco sobre estabilidade. Observaremos que a solução de uma equação linear (afim) é um fluxo linear (afim). Depois trataremos da comparação de dois fluxos lineares (afins) que é o grande objetivo desse trabalho. E, ainda, mostraremos a relação entre fluxos linear e afim. Por fim, definiremos fluxos no toro  $n$ -dimensional, como fluxos inteiros e racionais, e daremos condições para que esses fluxos sejam conjugados.

A motivação desse trabalho vem do fato que podemos encontrar sistemas dinâmicos que modelem várias situações do nosso cotidiano, situações estas que envolvem os circuitos RLC, o pêndulo, operações bancárias, crescimento econômico, modelo de Newton, modelo de Euler, questões relativas à biologia, como a análise da proliferação de uma bactéria, etc. Se o leitor tiver interesse em saber como um sistema dinâmico realmente modela uma situação do dia-a-dia, basta ver [14].

O trabalho está organizado da seguinte maneira: no capítulo 1 abordamos um conceito importante de álgebra linear, a forma Canônica de Jordan. Também abordamos algumas noções básicas de equações diferenciais, como exponencial de matriz e retrato de fase. Fizemos

ainda, a descrição geométrica de algumas curvas em  $\mathbb{R}^2$ .

No capítulo 2 apresentamos os expoentes de Lyapunov, os espaços de Lyapunov e mostramos que o espaço euclidiano pode ser decomposto em três subespaços: estável, central e instável. Definimos sistema dinâmico e falamos em estabilidade, ponto fixo e órbita de um fluxo.

No capítulo 3 caracterizamos conjugação e equivalência de fluxos lineares e mostramos a relação entre dinâmica e álgebra linear. Falamos em  $C^k$ -conjugação ( $C^k$ -equivalência), para  $k \geq 1$ . Entretanto, veremos que  $C^0$ -conjugação ( $C^0$ -equivalência) é mais interessante e, por isso, vamos expor vários resultados sobre esse último caso. Além disso, comentamos um pouco sobre hiperbolicidade, que será usado nos principais resultados desse trabalho. Usamos como base os trabalhos [1] e [2].

No capítulo 4 generalizamos os resultados obtidos no capítulo anterior, para equações diferenciais afins. Discutimos propriedades básicas de equações diferenciais afins via forma canônica de Jordan e suas propriedades de estabilidade em relação a seus autovalores. Mostramos que fluxo afim é soma de um fluxo linear mais uma parte afim. Falamos em expoente e espaço de Lyapunov. Observamos a importância dos pontos fixos no contexto afim, pois é a partir deles que podemos relacionar fluxos afins e linear. E, caracterizamos conjugação topológica de fluxos afins, donde o principal resultado, relaciona conjugação topológica com os subespaços estáveis das matrizes associadas aos sistemas afins. Daí, concluímos que a parte afim não influencia na conjugação dos fluxos afins.

No capítulo 5 estudamos conjugação e equivalência topológica de fluxos no toro  $n$ -dimensional. Definimos aplicação afim e fluxos afim equivalentes. Mostramos que as conjugações (equivalências) topológica e afim são equivalentes. Verificamos que a conjugação (equivalência) topológica de dois campos vetoriais não nulos, induzidos por  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , depende da existência de um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = Y$ . Quando  $X, Y \in \mathbb{Z}^n$ , a conjugação depende do máximo divisor comum das entradas de  $X$  e  $Y$  e, assim, podemos analisar o caso em que  $X, Y \in \mathbb{Q}^n$ .

---

# Preliminares

---

Neste capítulo faremos uma revisão dos conceitos que serão utilizados ao longo desse trabalho. Faremos uma pequena revisão de álgebra linear, em especial, da forma canônica de Jordan.

Além disso, trataremos aqui de uma das principais ferramentas desse trabalho: a exponencial de uma matriz. Os fluxos tratados nessa dissertação serão definidos a partir dessa exponencial.

Ainda esboçaremos alguns retratos de fase de uma equação diferencial, dando uma idéia do comportamento global das soluções da equação em questão. Por simplicidade e por uma melhor visualização, trabalharemos em  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.1 Álgebra linear

Nesta seção faremos uma revisão da forma canônica de Jordan. Para isso vamos discutir um pouco os conceitos básicos de operadores lineares diagonalizáveis e nilpotentes. Implicitamente, revisaremos autovalores e autovetores.

A partir de agora,  $V$  será um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo  $F$  e  $L(V)$  o conjunto dos operadores lineares de  $V$ .

Chamamos de polinômio minimal de  $T$  o único polinômio unitário  $p$  que gera o ideal formado pelos polinômios  $g$  em  $F[X]$  tais que  $g(T) = 0$ .

Dizemos que  $T \in L(V)$  é diagonalizável se  $V$  possui uma base formada por autovetores de  $T$ . Além disso,  $T$  é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de  $T$  tem a forma  $p = (x - c_1) \cdots (x - c_k)$ , onde  $c_1, \dots, c_k$  são elementos distintos de  $F$ .

Seja  $T \in L(V)$ . Então, existe um polinômio  $f$  de grau  $n$  tal que  $f(T) = 0$ . Essa é a idéia principal do teorema a seguir.

**Teorema 1.1** (Teorema de Cayley-Hamilton). *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $F$ ,  $T \in L(V)$  e  $f$  o polinômio característico de  $T$ . Então,  $f(T) = 0$ .*

Dizemos que um subespaço vetorial  $W$  de  $V$  é  $T$ -invariante se  $T(W) \subset W$ . Quando  $V$  tem dimensão finita, a invariância de  $W$  sob  $T$  admite uma interpretação simples por meio de matrizes.

Suponhamos que tomemos uma base ordenada  $\beta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $V$  tal que  $\beta' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$  seja uma base ordenada de  $W$ . Seja  $A = [T]_{\beta}^{\beta}$ . Então,

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^n A_{ij}\alpha_i.$$

Como  $W$  é invariante sob  $T$ , o vetor  $T\alpha_j$  pertence a  $W$  para  $j \leq r$ . Isto significa que

$$T\alpha_j = \sum_{i=1}^r A_{ij}\alpha_i, \quad j \leq r.$$

Em outras palavras,  $A_{ij} = 0$  se  $j \leq r$  e  $i > r$ . Esquemáticamente,  $A$  é da seguinte forma em blocos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \left( \begin{array}{c|c|c} B & C & \\ \hline 0 & D & \end{array} \right),$$

onde  $B$  é uma  $r \times r$  matriz,  $C$  é uma  $r \times (n - r)$  matriz e  $D$  é uma  $(n - r) \times (n - r)$  matriz.

Generalizando, sejam  $W_1, \dots, W_k$  subespaços  $T$ -invariantes de  $V$  tais que  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ . Tomando  $\beta_i$  uma base ordenada de  $W_i$  e  $\beta$  a base ordenada formada pela união das  $\beta_i$ , então  $A$  é da forma em blocos

$$[T]_{\beta}^{\beta} = \left( \begin{array}{c|c|c|c} A_1 & 0 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & A_2 & 0 & \cdots \\ \hline 0 & 0 & A_3 & \cdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array} \right),$$

onde  $A_i$  é a  $d_i \times d_i$  matriz ( $d_i = \dim W_i$ ) e os símbolos 0 são blocos retangulares de vários tamanhos constituídos de escalares nulos.

Seja  $N$  um operador linear sobre um espaço vetorial  $V$ . Dizemos que  $N$  é nilpotente se existe um inteiro positivo  $r$  tal que  $N^r = 0$ .

**Teorema 1.2** (Teorema da decomposição primária). *Sejam  $V$  um espaço vetorial de dimensão finita sobre  $F$  e  $T \in L(V)$ . Seja  $p$  o polinômio minimal de  $T$  e suponhamos que  $p = p_1^{r_1} \cdots p_k^{r_k}$ , onde os  $p_i$  são polinômios mônicos irredutíveis sobre  $F$  e os  $r_i$  são inteiros positivos. Seja  $W_i$  o espaço nulo de  $p_i(T)^{r_i}$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Então,*

1.  $V = W_1 \oplus \cdots \oplus W_k$
2. cada  $W_i$  é invariante por  $T$
3. se  $T_i$  é o operador induzido sobre  $W_i$  por  $T$ , então o polinômio minimal por  $T$  é  $p_i^{r_i}$ .

Sejam  $V$  um espaço vetorial sobre  $F$ ,  $T \in L(V)$  e  $\alpha \in V$ . O subespaço  $T$ -cíclico gerado por  $\alpha$ , denotado por  $Z(\alpha, T)$ , é o menor subespaço  $T$ -invariante de  $V$  que contém  $\alpha$ . Um subespaço  $W$  de  $V$  é  $T$ -cíclico se  $W = Z(\alpha, T)$ , para algum  $\alpha$  de  $V$ .

O conjunto de todos os polinômios  $g$  sobre  $F$  tal que  $g(T)\alpha = 0$ , para  $\alpha \in V$ , é o ideal  $M(\alpha, T)$  em  $F[X]$ . Chamamos de  $T$ -anulador de  $\alpha$  o ideal  $M(\alpha, T)$ , bem como o único polinômio unitário  $p_\alpha$  que gera este ideal.

Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial  $V$  tal que  $W$  é invariante sob um operador linear  $T \in L(V)$  e suponha que  $f(T)\beta$  está em  $W$ . Se existe um vetor  $\gamma$  em  $W$  tal que  $f(T)\beta = f(T)\gamma$ , dizemos que  $W$  é  $T$ -admissível. Se  $V$  tiver dimensão finita, então existe um subespaço  $W'$  invariante sob  $T$  tal que  $V = W' \oplus W$ .

**Teorema 1.3** (Teorema da decomposição cíclica). *Seja  $T$  um operador linear sobre um espaço vetorial  $V$  de dimensão finita e seja  $W_0$  um subespaço próprio  $T$ -admissível de  $V$ . Então, existem vetores não-nulos  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  em  $V$  com respectivos  $T$ -anuladores  $p_1, \dots, p_r$  tais que*

1.  $V = W_0 \oplus Z(\alpha_1; T) \oplus \cdots \oplus Z(\alpha_r; T)$ ;
2.  $p_k$  divide  $p_{k-1}$ ,  $k = 2, \dots, r$ .

Além disso, o inteiro  $r$  e os anuladores  $p_1, \dots, p_r$  são determinados de modo único por (1), (2) e pelo fato de nenhum  $\alpha_k$  ser nulo.

Suponhamos agora, que  $T$  seja um operador linear sobre  $V$  e que o polinômio característico de  $T$  se decomponha sobre  $F$  como segue

$$f = (x - c_1)^{d_1} \dots (x - c_k)^{d_k},$$

onde  $c_1, \dots, c_k$  são elementos distintos em  $F$  e  $d_i \geq 1$ . Então, o polinômio minimal de  $T$  será

$$f = (x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k},$$

onde  $1 \leq r_i \leq d_i$ . Se  $W_i$  é o núcleo de  $(T - c_i I)^{r_i}$ , então o teorema da decomposição primária nos diz que  $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$  e que o operador  $T_i$ , induzido sobre  $W_i$  por  $T$ , possui polinômio minimal igual a  $(x - c_i)^{r_i}$ . Seja  $N_i$  o operador linear sobre  $W_i$  definido por  $N_i = T_i - c_i I$ . Então,  $N_i$  é nilpotente e seu polinômio minimal é  $x^{r_i}$ . Sobre  $W_i$ ,  $T$  age como  $N_i$  mais o escalar  $c_i$  vezes o operador idêntico. Suponhamos que tomemos uma base do subespaço  $W_i$  correspondente à decomposição cíclica do operador nilpotente  $N_i$ . Então, a matriz de  $T_i$  em relação a esta base ordenada será a soma direta das matrizes

$$\begin{pmatrix} c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & c & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c \end{pmatrix}$$

cada uma com  $c = c_i$ . Além disso, as dimensões destas matrizes diminuem quando se lê da esquerda para a direita. Uma matriz da forma acima é dita uma matriz elementar de Jordan com autovalor  $c$ . Reunindo todas as bases dos  $W_i$  obtemos uma base de  $V$ . Descrevamos a matriz  $A$  de  $T$  em relação a esta base ordenada,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_k \end{pmatrix}.$$



Note que a matriz  $A$  é a soma direta das matrizes  $A_1, \dots, A_k$ . Cada  $A_i$  é da forma

$$A_i = \begin{pmatrix} J_1^{(i)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2^{(i)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{n_i}^{(i)} \end{pmatrix}$$

onde cada  $J_j^{(i)}$  é uma matriz elementar de Jordan com autovalor  $c_i$ . Além disso, dentro de cada  $A_i$ , as dimensões das matrizes  $J_j^{(i)}$  diminuem à medida que  $j$  aumenta. Diremos que uma  $n \times n$  matriz  $A$  que satisfaz todas as condições descritas anteriormente (para certos escalares distintos  $c_1, \dots, c_k$ ) está sob a forma de Jordan, que denotaremos por  $J_A^{\mathbb{R}}$ .

Mais detalhes, podem ser vistos na referência [11].

## 1.2 Equações diferenciais lineares

Nesta seção, abordaremos um dos conceitos centrais da teoria de equações lineares, o de exponencial de uma matriz. Ver [12]. A idéia inicial é a de estender a expressão da solução  $x(t) = e^{at}x_0$  da equação escalar  $\dot{x} = ax$  a uma expressão da solução,  $x(t) = e^{At}x_0$ , da equação vetorial  $\dot{x} = Ax$ .

O espaço  $gl(d, \mathbb{R})$  das matrizes  $d \times d$  com entradas reais é um espaço vetorial real. Os espaços euclidianos não são, em geral, álgebras vetoriais, mas a presença de um produto no espaço de matrizes  $gl(d, \mathbb{R})$ , que é linearmente isomorfo a  $\mathbb{R}^{d^2}$ , faz desse particular espaço vetorial uma álgebra vetorial.

Como em todo espaço vetorial, temos muitas normas à nossa disposição no espaço  $gl(d, \mathbb{R})$  mas, para os nossos propósitos, a norma mais conveniente é a norma do operador definida por

$$\|A\| = \sup_{|x| \leq 1} |Ax| = \sup_{|x|=1} |Ax|,$$

para  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Aqui,  $|\cdot|$  é a norma euclidiana de  $\mathbb{R}^d$ . Essa norma trabalha muito bem em parceria com o produto de matrizes, pois vale a propriedade fundamental

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \tag{1.1}$$

da norma de operador. Escrevendo

$$A^0 = I, \quad A^1 = A \quad \text{e} \quad A^{m+1} = A^m A$$

para as potências  $A^m$  de  $gl(d, \mathbb{R})$ , por indução resulta

$$\|A^m\| \leq \|A\|^m, \quad \text{para cada } m \in \mathbb{N}.$$

A propriedade 1.1 da norma de operador em  $gl(d, \mathbb{R})$ , faz de  $gl(d, \mathbb{R})$  uma álgebra vetorial normada.

Agora, podemos definir a matriz exponencial de uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  por

$$e^A = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots + \frac{1}{j!}A^j + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}A^j \in Gl(d, \mathbb{R}),$$

onde  $Gl(d, \mathbb{R})$  é o conjunto das matrizes inversíveis  $d \times d$  com entradas reais e  $I \in gl(d, \mathbb{R})$  é a matriz identidade.

A razão principal para considerar a norma  $\|\cdot\|$  em  $gl(d, \mathbb{R})$  é: poder usar a propriedade 1.1 para provar facilmente a convergência da exponencial. Segue que a série da exponencial também converge na norma euclidiana (ou em qualquer outra norma) de  $gl(d, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{d^2}$ .

Uma equação diferencial linear (com coeficientes constantes) é uma equação do tipo  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Uma função diferenciável  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que satisfaz a equação  $\dot{x}(t) = Ax(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é chamada de solução de  $\dot{x} = Ax$ .

O problema de valor inicial para uma equação diferenciável linear  $\dot{x} = Ax$ , consiste em encontrar, para um dado valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , a solução de  $x(\cdot, x_0)$  que satisfaz  $x(0, x_0) = x_0$ .

Para cada matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  as soluções de  $\dot{x} = Ax$  formam um subespaço vetorial  $d$ -dimensional do espaço vetorial

$$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d; f \text{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

O seguinte resultado é clássico na teoria. Somente o mencionaremos para efeito de esclarecimento em relação à notação utilizada.

**Teorema 1.4.** *Para cada problema de valor inicial dado por  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , ou seja,  $\dot{x} = Ax$  com  $x(0, x_0) = x_0$ , a solução  $x(\cdot, x_0)$  é única e dada por  $x(t, x_0) = e^{At}x_0$ .*

**Demonstração:**  $e^{At}x_0$  satisfaz (em  $\mathbb{R}^d$ ):

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{A(t+h)} - e^{At}}{h} x_0 \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{At}e^{Ah} - e^{At}}{h} x_0 \\ &= e^{At} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{e^{Ah} - I}{h} \right) x_0 \\ &= e^{At} Ax_0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}(e^{At}x_0) = e^{At} Ax_0.$$

Logo,  $e^{At}x_0$  é uma solução do problema de valor inicial. Para ver que a solução é única, seja  $x(t)$  uma dada solução do problema de valor inicial e consideremos  $y(t) = e^{-At}x(t)$ .

Então,

$$\begin{aligned}\dot{y}(t) &= \left( \frac{d}{dt} e^{-At} \right) x(t) + e^{-At} \dot{x}(t) \\ &= -Ae^{-At}x(t) + e^{-At} Ax(t) \\ &= e^{-At}(-A + A)x(t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Portanto,  $y(t)$  é uma constante. Como  $y(0) = x_0 = x(0)$ , então  $y(t) = x(t)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

□

**Observação 1.5.** Se  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  é uma base de  $\mathbb{R}^d$ , então as funções

$$x(\cdot, v_1), x(\cdot, v_2), \dots, x(\cdot, v_d)$$

formam uma base do espaço solução  $\text{sol}(A)$ . A função matricial

$$X(\cdot) = [x(\cdot, v_1), x(\cdot, v_2), \dots, x(\cdot, v_d)]^T$$

é chamada de matriz fundamental de  $\dot{x} = Ax$  e ela satisfaz  $\dot{X}(t) = AX(t)$ .

Seja  $v$  autovetor associado ao autovalor  $\lambda$ . A proposição abaixo dá as condições necessárias para que  $e^{\lambda t}v$  seja solução de  $\dot{x} = Ax$ .

**Proposição 1.6.** *Seja  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . A curva  $e^{\lambda t}v$  é uma solução (real) de  $\dot{x} = Ax$  se, e somente se,  $\lambda$  é um autovalor (real) de  $A$  com autovetor (real)  $v$ .*

### 1.2.1 Retrato de fase

Faremos agora, a descrição geométrica do comportamento das soluções de  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(2, \mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ . Observe que cada solução  $x = (x_1, x_2) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $\dot{x} = Ax$  pode ser identificada com uma curva parametrizada no plano. Esboçando algumas dessas curvas parametrizadas definidas por soluções da equação no plano, obtemos o retrato de fase da equação diferencial, cujo objetivo é dar uma idéia do comportamento global da totalidade das soluções da equação, com diferentes condições iniciais.

**Observação 1.7.** *Nesta seção, apesar de expor as soluções de  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(2, \mathbb{R})$  e  $x \in \mathbb{R}^2$ , estamos interessados apenas na geometria das equações diferenciais. As fórmulas das soluções de  $\dot{x} = Ax$  serão tratadas na próxima seção.*

Dividimos a descrição geométrica do comportamento das soluções de  $\dot{x} = Ax$  em três casos.

1. O polinômio característico da matriz  $A$  tem duas raízes reais distintas  $\lambda_1 < \lambda_2$ . Neste caso, o sistema linear  $\dot{x} = Ax$  é conjugado ao sistema linear diagonal

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} y,$$

através de uma mudança de coordenadas linear. A solução desse sistema diagonal, de condição inicial  $y(0) = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ , é

$$y(t) = (y_1 e^{\lambda_1 t}, y_2 e^{\lambda_2 t}).$$

Segue que as soluções de  $\dot{x} = Ax$  são combinações lineares de  $y(t)$ .

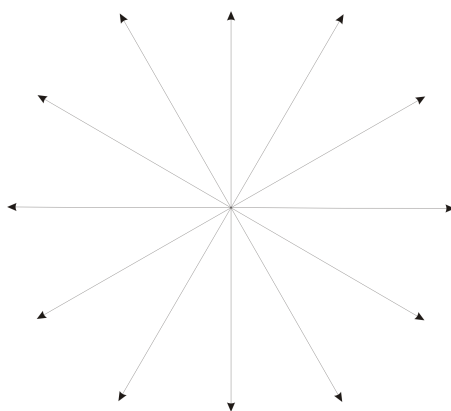


Figura 1.1:

- (a)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e ambos os autovalores negativos.

O retrato de fase nesse caso é dado pela figura 1.1.

- (b)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  e ambos os autovalores positivos.

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.1, mas trocando o sentido das setas.

- (c)  $\lambda_1$  é negativo e  $\lambda_2$  é positivo.

Quando  $\lambda_1 = -\lambda_2$ , o retrato de fase é dado pela figura 1.2. Agora, no caso geral, o retrato de fase é dado pela figura 1.3.

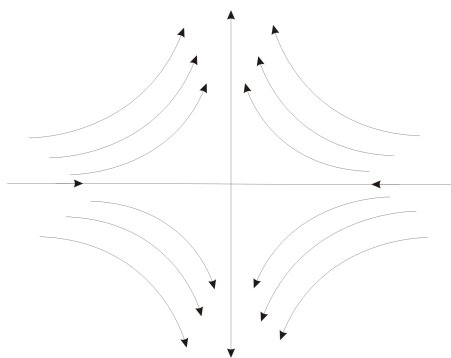


Figura 1.2:

- (d)  $\lambda_1$  é negativo e  $\lambda_2 = 0$ .

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.4.

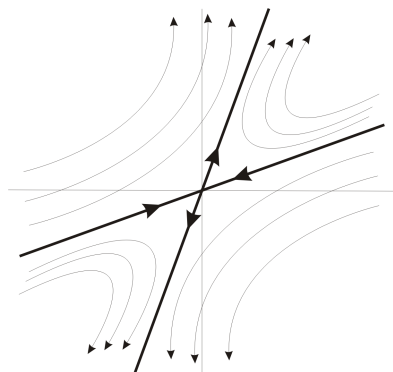


Figura 1.3:

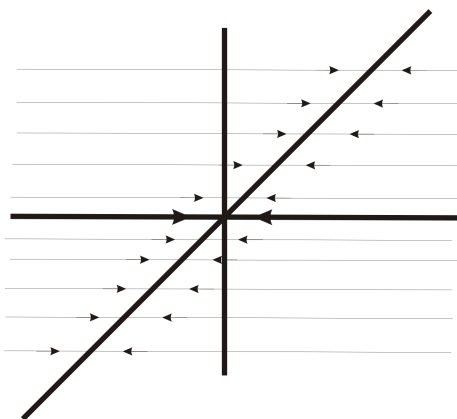


Figura 1.4:

(e)  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2$  é positivo.

O retrato de fase é como o anterior, com os eixos trocados e o sentido das setas invertido.

2. O polinômio característico da matriz  $A$  tem duas raízes reais e iguais  $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$ : ou  $A = \lambda I$  é um múltiplo da identidade ou não é. Começemos pela primeira possibilidade, em que a solução com a condição inicial  $x(0) = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$  é dada por

$$x(t) = (x_1 e^{\lambda t}, x_2 e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} (x_1, x_2) = e^{\lambda t} x(0).$$

(a)  $\lambda$  é negativo

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.1.

(b)  $\lambda$  é positivo

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.1, mas trocando o sentido das setas.

(c)  $\lambda = 0$

Nesse caso,  $A = 0 \in gl(2, \mathbb{R})$  é a matriz nula e todas as soluções são constantes.

Para esboçar o retrato de fase nesse caso, basta pintar uns pontinhos no plano.

A segunda opção de forma canônica de Jordan, no caso de autovalores iguais, é o sistema linear  $\dot{x} = Ax$  ser conjugado ao sistema linear não diagonal

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} y,$$

através de uma mudança de coordenadas linear. A solução desta equação diferencial, com condição inicial  $y_0 = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  é:

$$y(t) = (y_1 e^{\lambda t}, [ty_1 + y_2] e^{\lambda t}).$$

(a)  $\lambda$  é negativo

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.1.

(b)  $\lambda$  é positivo

O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.1, mas trocando o sentido das setas.

(c)  $\lambda = 0$

Nesse caso degenerado,  $A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  e as soluções do sistema associado à matriz são dadas simplesmente pelas soluções constantes  $y(t) = (0, y_2)$ , para  $y_1 = 0$ , e pelas retas verticais  $y(t) = (y_1, ty_1 + y_2)$ , para  $y_1 \neq 0$ ; nesse caso, as retas verticais são percorridas para baixo com  $y_1 < 0$  e para cima com  $y_1 > 0$ . Com uma mudança de coordenadas linear obtemos o retrato de fase de  $\dot{x} = Ax$ .

3. Se o polinômio característico da matriz  $A$  tem dois autovalores complexos conjugados  $\lambda_1 = a + bi$  e  $\lambda_2 = a - bi$ , com  $b \neq 0$ , então, com uma mudança de coordenadas linear,

o sistema é equivalente a

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} y.$$

As soluções dessa equação linear é

$$y(t) = re^{at}(\cos b(t - \theta), -\sin b(t - \theta)).$$

(a)  $a < 0$ . O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.5.

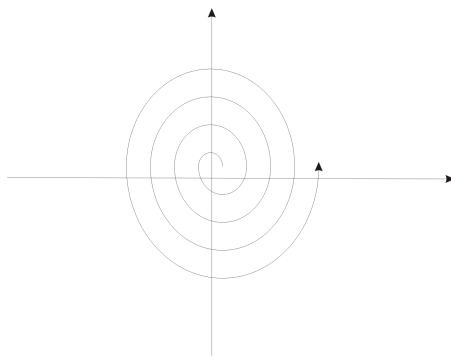


Figura 1.5:

(b)  $a > 0$ . O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.6.

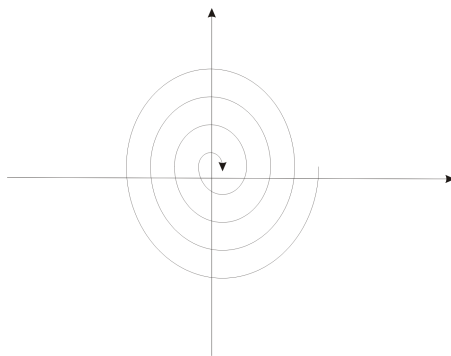


Figura 1.6:

(c)  $a = 0$ . O retrato de fase nesse caso é como o da figura 1.7.



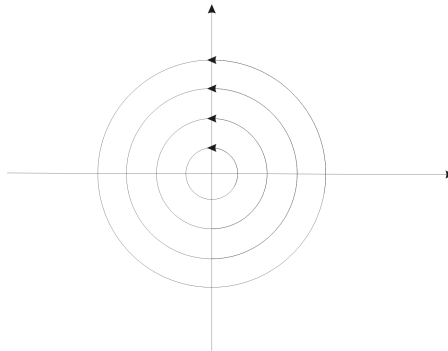


Figura 1.7:

### 1.2.2 Soluções de $\dot{x} = Ax$

Conforme vimos na seção anterior, a chave para obter explicitamente as soluções da equação diferencial  $\dot{x} = Ax$  são os autovalores, autovetores e a forma de Jordan real da matriz  $A$ . Nesta seção vamos explorar mais detalhadamente esta relação. Começamos introduzindo um conceito que é a base para o estudo dos subespaços estáveis e instáveis, que veremos mais à frente.

Denotaremos os autovalores distintos de  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  por  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r$ .

**Definição 1.8.** Chamaremos de  $E(A, \mu_k)$  ou  $E(\mu_k)$ , pertencentes a  $\mathbb{R}^d$ , as versões reais dos autoespaços generalizados ( $k = 1, 2, \dots, r \leq d$ ).

**Exemplo 1.9.** Seja  $A \in gl(4, \mathbb{R})$  possuindo  $\mu_1 = 1 + 2i$ ,  $\mu_2 = 1 - 2i$ ,  $\mu_3 = -2 + i$  e  $\mu_4 = -2 - i$  como autovalores. Então:

$$\begin{cases} E(1 \pm 2i) = Ker(A^2 - 2A + 5I) \\ E(-2 \pm i) = Ker(A^2 + 4A - 5I) \end{cases}$$

**Teorema 1.10.** Seja  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  com autovalores distintos  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r \in \mathbb{C}$  e correspondentes multiplicidades  $n_k = \alpha(\mu_k)$ ,  $k = 1, \dots, r$ . Se  $E(\mu_k)$  é o autoespaço real generalizado correspondente, então  $\dim E(\mu_k) = n_k$  e  $\bigoplus_{k=1}^r E(\mu_k) = \mathbb{R}^d$ , isto é, toda matriz da forma acima tem um conjunto de autovetores generalizados reais que forma uma base de  $\mathbb{R}^d$ .

**Observação 1.11.** Se  $A = T^{-1}J_A^{\mathbb{R}}T$  então  $e^{At} = T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}t}T$ , isto é, para calcular a exponencial de matrizes é suficiente conhecer a exponencial da matriz na sua forma de Jordan.

**Observação 1.12.** *Seja  $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$  uma base de autovetores generalizados reais de  $A$ . Se  $x_0 = \sum_{i=1}^d \alpha_i v_i$ , então  $x(t, x_0) = \sum_{i=1}^d \alpha_i x(t, v_i)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, as soluções de  $\dot{x} = Ax$  podem ser encontradas calculando as soluções para os blocos de Jordan de  $A$ .*

**Observação 1.13.** *Cada subespaço  $E(\mu_k)$  é invariante para a equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , isto é, se  $x_0 \in E(\mu_k)$  então  $e^{At}x_0 \in E(\mu_k)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

*De fato, seja  $x_0 \in E(\mu_k)$ , ou seja, existe  $\lambda$  e  $k \in \mathbb{N}$  tais que  $(A - \lambda I)^k(x_0) = 0$ . Temos, por definição, que*

$$e^{At} = I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \dots .$$

*Assim,  $Ae^{At} = e^{At}A$ . Logo,*

$$(A - \lambda I)^k e^{At}(x_0) = e^{At}(A - \lambda I)^k(x_0) = 0.$$

*Portanto,  $E(\mu_k)$  é invariante para a equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ .*

É possível encontrar fórmulas para as soluções  $x(t, x_0)$  de  $\dot{x} = Ax$  e é isso que vamos fazer agora.

**Exemplo 1.14.** *Sejam  $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$ ,  $\dots$ ,  $e_d = (0, 0, \dots, 1)$  a base canônica de  $\mathbb{R}^d$ , então  $x(\cdot, e_1)$ ,  $x(\cdot, e_2)$ ,  $\dots$ ,  $x(\cdot, e_d)$  é uma base do espaço solução de  $A$ . Com efeito, se  $x \in \mathbb{R}^d$ , temos que  $x = b_1 e_1 + \dots + b_d e_d$  para  $b_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, d$ . Então:*

$$e^{At}x = e^{At}(b_1 e_1 + \dots + b_d e_d) = e^{At}(b_1 e_1) + \dots + e^{At}(b_d e_d) = b_1 e^{At}(e_1) + \dots + b_d e^{At}(e_d),$$

*donde segue o resultado.*

**Exemplo 1.15.** *Seja  $A = \text{diag}(a_1, \dots, a_d)$  uma matriz diagonal. Então a base canônica de  $\mathbb{R}^d$  consiste dos autovetores de  $A$ . Além disso, a solução da equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  com valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  é dada por:*

$$e^{At}x_0 = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} & & & \\ & e^{a_2 t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_d t} \end{pmatrix} x_0.$$

**Exemplo 1.16.** *Seja  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  diagonalizável, isto é, existem uma matriz  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$  e uma matriz diagonal  $D \in gl(d, \mathbb{R})$  com  $A = T^{-1}DT$ . A solução da equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , com valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , é dada por  $x(t, x_0) = e^{At}x_0 = T^{-1}e^{Dt}Tx_0$ , onde  $e^{Dt}$  é dada como no exemplo anterior.*

**Exemplo 1.17.** *Seja  $B = \begin{pmatrix} \lambda & -\delta \\ \delta & \lambda \end{pmatrix}$  o bloco de Jordan real associado ao autovalor complexo  $\mu = \lambda \pm \delta i$  da matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Se  $y_0 \in E(\mu)$  (autoespaço real de  $\mu$ ), então a solução  $y(t, y_0)$  de  $\dot{y} = By$  é dada por:*

$$y(t, y_0) = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \cos \delta t & -\sin \delta t \\ \sin \delta t & \cos \delta t \end{pmatrix} y_0.$$

**Exemplo 1.18.** *Seja  $B$  um bloco de Jordan de dimensão  $n$  associado ao autovalor real  $\mu$  de uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Então, para*

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 1 & & & \\ & \mu & 1 & & \\ & & \mu & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & \mu \end{pmatrix}, \text{ tem-se } e^{Bt} = e^{\mu t} \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & 1 & t & \ddots & \vdots \\ & & 1 & \ddots & \frac{t^2}{2!} \\ & & & \ddots & t \\ & & & & 1 \end{pmatrix}.$$

*Em outras palavras, para  $y_0 = [y_1, \dots, y_n]^T \in E(A, \mu)$  a  $j$ -ésima componente da solução de  $\dot{y} = By$  é*

$$y_j(t, y_0) = e^{\mu t} \sum_{k=j}^n \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} y_k \quad (1 \leq j \leq n). \quad (1.2)$$

**Exemplo 1.19.** *Seja  $B$  um bloco de Jordan de dimensão  $n = 2m$  associado ao autovalor complexo  $\mu = \lambda + i\delta$  de uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Então, considerando*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & -\delta \\ \delta & \lambda \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \cos \delta t & -\sin \delta t \\ \sin \delta t & \cos \delta t \end{pmatrix},$$

com

$$B = \begin{pmatrix} D & I & & & \\ & D & I & & \\ & & D & \ddots & \\ & & & \ddots & I \\ & & & & D \end{pmatrix}, \text{ tem-se } e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \hat{D} & t\hat{D} & \frac{t^2}{2!}\hat{D} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\hat{D} \\ & \hat{D} & t\hat{D} & \cdots & \vdots \\ & & \hat{D} & \cdots & \frac{t^2}{2!}\hat{D} \\ & & & \ddots & t\hat{D} \\ & & & & \hat{D} \end{pmatrix}.$$

Para  $y_0 = [y_1, z_1, \dots, y_m, z_m]^T \in E(A, \mu)$  a  $j$ -ésima componente,  $j = 1, \dots, m$ , da solução de  $\dot{y} = By$  é

$$\begin{aligned} y_j(t, y_0) &= e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (y_k \cos \delta t - z_k \sin \delta t); \\ z_j(t, y_0) &= e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (z_k \sin \delta t + y_k \cos \delta t). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Para uma melhor visualização, vamos abordar o caso particular em que  $m = 2$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} y_1(t, y_0) &= e^{\lambda t} [(y_1 \cos \delta t - z_1 \sin \delta t) + t(y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t)] \\ &= e^{\lambda t} [f_1^y(t) + tg_1^y(t)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1(t, y_0) &= e^{\lambda t} [(y_1 \cos \delta t + z_1 \sin \delta t) + t(y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t)] \\ &= e^{\lambda t} [f_1^z(t) + tg_1^z(t)], \end{aligned}$$

$$y_2(t, y_0) = e^{\lambda t} [(y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t)] = e^{\lambda t} [f_2^y(t)],$$

$$z_2(t, y_0) = e^{\lambda t} [(y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t)] = e^{\lambda t} [f_2^z(t)],$$

onde  $f_1^y(t) = y_1 \cos \delta t - z_1 \sin \delta t$ ,  $tg_1^y(t) = t(y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t)$ ,  $f_1^z(t) = y_1 \cos \delta t + z_1 \sin \delta t$ ,  $tg_1^z(t) = t(y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t)$ ,  $f_2^y(t) = y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t$  e  $f_2^z(t) = y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t$ .

# Estabilidade e sistemas dinâmicos

Neste capítulo introduziremos os conceitos de expoentes e espaços de Lyapunov, e mostraremos a relação entre eles. Mostraremos, também, que o espaço euclidiano pode ser decomposto em três subespaços: estável, central e instável relativos a uma equação diferencial linear.

Definiremos e daremos alguns exemplos do principal conceito dessa dissertação: fluxo ou sistema dinâmico em  $\mathbb{R}^d$ . Falaremos sobre ponto fixo e órbita de um fluxo. Além disso, discutiremos um pouco sobre estabilidade.

## 2.1 Espaços de Lyapunov

Nesta seção definimos os expoentes de Lyapunov, os espaços de Lyapunov e os subespaços estável, central e instável que são fundamentos básicos desse trabalho. Além disso, caracterizamos a estabilidade de pontos fixos. Começamos definindo os expoentes de Lyapunov.

**Definição 2.1.** *Seja  $x(\cdot, x_0)$  uma solução da equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ . O expoente de Lyapunov de  $x_0 \neq 0$  é definido como*

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\|,$$

onde  $\|\cdot\|$  é a norma usual de  $\mathbb{R}^d$ .

**Exemplo 2.2.** *Considere a equação diferencial linear  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  e seja  $\epsilon$  uma constante real, onde*

$$A = \epsilon \begin{pmatrix} \cos \ln t & \sin \ln t \\ \sin \ln t & \cos \ln t \end{pmatrix}.$$

Uma solução para esse sistema, com condição inicial  $x_0 = (x_1, x_2)$ , é dada por

$$x(t, x_0) = \begin{pmatrix} e^{\epsilon t \sin \ln t} & e^{\epsilon t \cos \ln t} \\ e^{\epsilon t \sin \ln t} & -e^{\epsilon t \cos \ln t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$x(t, x_0) = (e^{\epsilon t \sin \ln t} x_1 + e^{\epsilon t \cos \ln t} x_2, e^{\epsilon t \sin \ln t} x_1 - e^{\epsilon t \cos \ln t} x_2).$$

Agora, vamos calcular o expoente de Lyapunov de  $(x_1, 0)$ .

$$\lambda(x_1, 0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{\epsilon t \sin \ln t}\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \epsilon \sin \ln t = \epsilon.$$

Analogamente, se mostra que  $\lambda(0, x_2) = \epsilon$ .

O espaço de Lyapunov de um autovalor, que definiremos agora, é muito importante nessa teoria pois é a partir dele que introduziremos os conceitos de subespaços estável, central e instável que são usados repetidamente nesse trabalho.

**Definição 2.3.** *Sejam  $\mu_k = \lambda_k + i\delta_k, k = 1, \dots, r$ , os autovalores distintos de  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Ordenando as partes reais dos autovalores por  $\lambda_1 < \dots < \lambda_l, 1 \leq l \leq r \leq d$ , definimos o espaço de Lyapunov de  $\lambda_j$  como  $L(\lambda_j) = \bigoplus E(\mu_k)$ , onde a soma direta é tomada sobre todos os autoespaços generalizados reais associados aos autovalores que tem parte real igual a  $\lambda_j$ .*

Note que  $\bigoplus_{j=1}^l L(\lambda_j) = \mathbb{R}^d$ .

**Definição 2.4.** *Os subespaços estável, central e instável associados a uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  são definidos, respectivamente, por:*

1.  $L^- = \bigoplus \{L(\lambda_j); \lambda_j < 0\}$
2.  $L^0 = \bigoplus \{L(\lambda_j); \lambda_j = 0\}$
3.  $L^+ = \bigoplus \{L(\lambda_j); \lambda_j > 0\}$ .

**Observação 2.5.** *Concluimos a partir das duas definições anteriores que  $\mathbb{R}^d = L^+ \oplus L^0 \oplus L^-$ .*

Agora, daremos vários exemplos com o intuito de esclarecer os conceitos de subespaços estável, central e instável.

**Exemplo 2.6.** *Seja  $A \in gl(5, \mathbb{R})$  possuindo*

$$\mu_1 = -2 + i, \mu_2 = -2 - i, \mu_3 = 1 + 3i, \mu_4 = 1 - 3i \text{ e } \mu_5 = 0$$

*como autovalores. Neste caso, temos que*

$$E(-2 \pm i) \oplus E(1 \pm 3i) \oplus E(0) = \mathbb{R}^5.$$

*Entretanto, como*

$$E(-2 \pm i) = Ker(A^2 + 4A + 5I),$$

$$E(1 \pm 3i) = Ker(A^2 - 2A + 10I),$$

$$E(0) = Ker(T),$$

*então*

$$Ker(A^2 + 4A + 5I) \oplus Ker(A^2 - 2A + 10I) \oplus Ker(T) = \mathbb{R}^5.$$

*Como  $-2, 0$  e  $1$  são as partes reais dos autovalores de  $A$ , chegamos aos seguintes espaços de Lyapunov:*

$$L(-2) = E(-2 \pm i) = Ker(A^2 + 4A + 5I) = L^-$$

$$L(1) = E(1 \pm 3i) = Ker(A^2 - 2A + 10I) = L^+ .$$

$$L(0) = E(0) = Ker(T) = L^0$$

*Note que  $L(-2) \oplus L(1) \oplus L(0) = \mathbb{R}^5$ , que é igual a  $L^- \oplus L^0 \oplus L^+ = \mathbb{R}^5$ .*

**Exemplo 2.7.** *Seja  $A \in gl(7, \mathbb{R})$  possuindo*

$$\mu_1 = 2 + i, \mu_2 = 2 - i, \mu_3 = 4i, \mu_4 = -4i, \mu_5 = 2 + 2i, \mu_6 = 2 - 2i \text{ e } \mu_7 = 3$$

*como autovalores. Então, o espaço de Lyapunov de 2 é*

$$L(2) = E(2 \pm i) \oplus E(2 \pm 2i) = Ker(A^2 - 4A + 5I) \oplus Ker(A^2 - 4A + 8I),$$

*o espaço de Lyapunov de 0 é*

$$L(0) = E(\pm 4i) = Ker(A^2 + 16I)$$

*e o espaço de Lyapunov de 3 é*

$$L(3) = E(3) = Ker(T - 3I).$$

Como

$$E(2 \pm i) \oplus E(2 \pm 2i) \oplus E(\pm 4i) \oplus E(3) = \mathbb{R}^7,$$

concluimos que

$$L(2) \oplus L(0) \oplus L(3) = \mathbb{R}^7.$$

Portanto,

$$L^+ = L(2) \oplus L(3) = \text{Ker}(A^2 - 4A + 5I) \oplus \text{Ker}(A^2 - 4A + 8I) \oplus \text{Ker}(T - 3I)$$

$$L^0 = L(0) = \text{Ker}(A^2 + 16I).$$

Observe que neste caso o subespaço estável é nulo ( $L^- = 0$ ), pois nenhum autovalor de  $A$  possui parte real menor que 0.

**Exemplo 2.8.** Seja  $A \in g(d, \mathbb{R})$  satisfazendo:

$$\text{se } \mu = \lambda + \delta i \text{ é autovalor de } A \text{ então } \lambda \neq 0.$$

Daí,  $L^0 = \{L(\lambda_j); \lambda_j = 0\} = \emptyset$ . Portanto,  $\mathbb{R}^d = L^- \oplus L^+$ .

Veremos mais a frente, que uma matriz nessas condições é chamada de hiperbólica.

Os próximos três exemplos ilustram as idéias de subespaços estáveis e instáveis, onde por simplicidade, e por uma melhor visualização, trabalharemos em  $\mathbb{R}^3$ . Ver [9].

**Exemplo 2.9.** Suponha que  $A \in gl(3, \mathbb{R})$  possua 3 autovalores reais, distintos  $\lambda_1, \lambda_2 < 0$  e  $\lambda_3 > 0$ . Então  $A$  possui 3 autovetores linearmente independentes  $e_1, e_2$  e  $e_3$  correspondentes a  $\lambda_1, \lambda_2$  e  $\lambda_3$ , respectivamente. Se formarmos a matriz  $[T]_{3 \times 3}$  tomando nas colunas os autovetores  $e_1, e_2$  e  $e_3$ , ou seja,

$$T = \begin{pmatrix} & & \\ e_1 & e_2 & e_3 \\ & & \end{pmatrix} \text{ então, temos } B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} = T^{-1}AT,$$

para alguma matriz inversível  $T \in gl(3, \mathbb{R})$ . A solução de  $\dot{y} = Ay$ , onde  $y(0, y_0) = y_0$ , é dada por  $y(t) = e^{At}y_0 = e^{(TBT^{-1})t}y_0$ . Logo,

$$y(t) = Te^{Bt}T^{-1}y_0 = T \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0.$$



Temos que  $L^-$  é o subespaço gerado por  $e_1$  e  $e_2$ , e  $L^+$  é o subespaço gerado por  $e_3$  (figura 2.1).

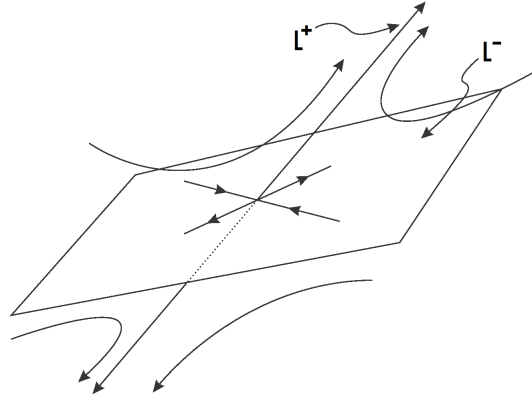


Figura 2.1:

Vamos, agora, encontrar o expoente de Lyapunov de  $e_1$ .

$$\begin{aligned}\lambda(e_1) &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{At}e_1\| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{\lambda_1 t}e_1\| \\ &= \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln(e^{\lambda_1 t}) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} t\lambda_1 \\ &= \lambda_1,\end{aligned}$$

pois,  $e^{At}e_1 = e^{\lambda_1 t}e_1$  (proposição 1.6),  $\|e^{\lambda_1 t}e_1\| = e^{\lambda_1 t}$ ,  $A(e_1) = \lambda_1 e_1$  e, assim,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(At)^n}{n!} e_1 &= e_1 + Ate_1 + \frac{A^2 t^2}{2} e_1 + \cdots + \frac{A^n t^n}{n!} e_1 + \cdots \\ &= e_1 + t\lambda_1 e_1 + \frac{t^2 \lambda_1^2}{2} e_1 + \cdots + \frac{t^n \lambda_1^n}{n!} e_1 + \cdots \\ &= e^{\lambda_1 t} e_1.\end{aligned}$$

Observe que, fazendo cálculos análogos, chegamos que os expoentes de Lyapunov de  $e_2$  e  $e_3$  são iguais a  $e^{\lambda_2 t}$  e  $e^{\lambda_3 t}$ , respectivamente.

**Exemplo 2.10.** Suponha agora que  $A \in gl(3, \mathbb{R})$  possua dois autovalores complexos  $\mu_1 = \alpha + \beta i$  e  $\mu_2 = \alpha - \beta i$ , com  $\alpha < 0$  e  $\beta \neq 0$ , e um autovalor real  $\lambda > 0$ . Então  $A$  possui 3 autovetores generalizados reais  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , que podem ser usados como as colunas de uma

matriz  $T$  em ordem, para transformar  $A$  como segue:

$$B = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = T^{-1}AT,$$

para alguma matriz inversível  $T \in gl(3, \mathbb{R})$ . Assim, a solução de  $\dot{y} = Ay$  é:

$$y(t) = Te^{Bt}T^{-1}y_0 = T \begin{pmatrix} e^{\alpha t} \cos \beta t & -e^{\alpha t} \sin \beta t & 0 \\ e^{\alpha t} \sin \beta t & e^{\alpha t} \cos \beta t & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0.$$

Neste caso, também temos que  $L^-$  é o subespaço gerado por  $e_1$  e  $e_2$ , e  $L^+$  é o subespaço gerado por  $e_3$  (figura 2.2).

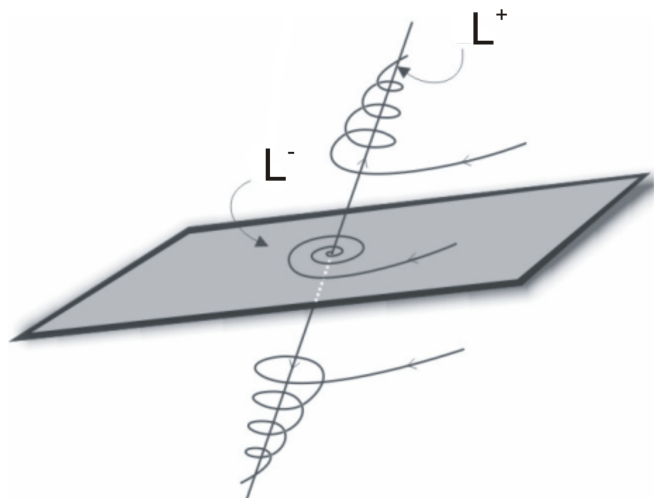


Figura 2.2:

**Exemplo 2.11.** Suponha que  $A \in gl(3, \mathbb{R})$  tem 2 autovalores reais repetidos,  $\lambda < 0$ , e um autovalor distinto  $\gamma > 0$  tais que existam autovetores generalizados,  $e_1$ ,  $e_2$  e  $e_3$ , que podem ser usados para formar as colunas de uma matriz  $T$  tal que  $A$  é transformada da seguinte maneira:

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = T^{-1}AT.$$

Daí, a solução de  $\dot{y} = Ay$  é:

$$y(t) = Te^{Bt}T^{-1}y_0 = T \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{\gamma t} \end{pmatrix} T^{-1}y_0,$$

para alguma matriz inversível  $T \in gl(3, \mathbb{R})$ . Novamente temos que  $L^-$  é o subespaço gerado por  $e_1$  e  $e_2$ , e  $L^+$  é o subespaço gerado por  $e_3$  (figura 2.3).

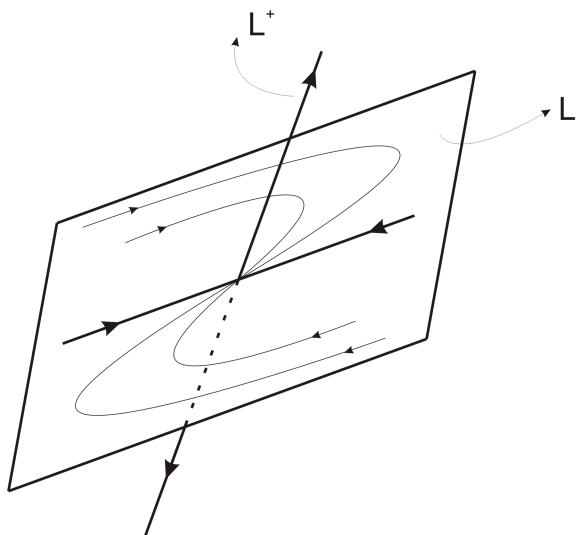


Figura 2.3:

O teorema a seguir mostra a relação entre os expoentes de Lyapunov de  $\dot{x} = Ax$  e as partes reais dos autovalores de  $A$ .

**Teorema 2.12.** *O expoente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  de uma solução  $x(\cdot, x_0)$  de  $\dot{x} = Ax$ , (com  $x_0 \neq 0$ ) satisfaz*

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\| = \lambda_j$$

se, e somente se,  $x_0 \in L(\lambda_j)$ . Logo, associados a uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  tem-se exatamente  $l$  expoentes de Lyapunov, que são as partes reais distintas dos autovalores de  $A$ .

**Demonstração:** Recordemos que dada uma matriz  $A$  existe uma matriz  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$  tal que  $A = TJ_A^{\mathbb{R}}T$ . Assim, podemos considerar  $A$  na sua forma de Jordan. Então, as afirmações do teorema seguem das fórmulas das soluções 1.2 e 1.3.

Vamos dar uma idéia da demonstração para blocos  $2 \times 2$ .

Suponhamos que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ . Para blocos de Jordan correspondentes a pares de autovalores complexos de  $A$ , temos que a  $j$ -ésima componente,  $j = 1, \dots, m$ , da solução de  $\dot{y} = By$  é

$$y_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (y_k \cos \delta t - z_k \sin \delta t)$$

e

$$z_j(t, x_0) = e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (z_k \sin \delta t + y_k \cos \delta t),$$

onde  $x_0 = [y_1, z_1, \dots, y_m, z_m]^T \in E(A, \mu)$ .

Considere as soluções

$$y_1(t, x_0), z_1(t, x_0), y_2(t, x_0), z_2(t, x_0), \dots, y_m(t, x_0), z_m(t, x_0).$$

Então,

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0)\| &= \|y_1(t, x_0)^2 + z_1(t, x_0)^2 + y_2(t, x_0)^2 + z_2(t, x_0)^2 + \dots + y_m(t, x_0)^2 + z_m(t, x_0)^2\| = \\ &= \sqrt{(e^{\lambda t}(f_1^y + tg_1^y))^2 + (e^{\lambda t}(f_1^z + tg_1^z))^2 + \dots + (e^{\lambda t}(f_m^y + tg_m^y))^2 + (e^{\lambda t}(f_m^z + tg_m^z))^2} = \\ &= \sqrt{(e^{\lambda t})^2 f(t)}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\| = \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2 f(t)} = \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2} + \frac{1}{t} \ln \sqrt{f(t)}.$$

Mas,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{f(t)} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{\lambda t})^2} = \lambda$$

Reciprocamente, suponhamos que o expoente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  de uma solução  $x(\cdot, x_0)$ , (com  $x_0 \neq 0$ ) satisfaz

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0)\| = \lambda_j.$$

Presisamos mostrar que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ . Seja  $B$  a matriz formada pelos blocos de Jordan reais associados aos pares de autovalores complexos,  $\mu_1 = \lambda_1 \pm \delta_1 i, \dots, \mu_r = \lambda_r \pm \delta_r i$  com

$\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ , isto é,

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\delta_1 & & & \\ \delta_1 & \lambda_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \lambda_r & -\delta_r \\ & & & \delta_r & \lambda_r \end{pmatrix}$$

Assim, temos

$$e^{Bt} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \cos \delta_1 t & -e^{\lambda_1 t} \sin \delta_1 t & & & \\ e^{\lambda_1 t} \sin \delta_1 t & e^{\lambda_1 t} \cos \delta_1 t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & e^{\lambda_r t} \cos \delta_r t & -e^{\lambda_r t} \sin \delta_r t \\ & & & e^{\lambda_r t} \sin \delta_r t & e^{\lambda_r t} \cos \delta_r t \end{pmatrix}.$$

Daí,

$$e^{Bt} x_0 = [e^{\lambda_1 t} (x_1 \cos \delta_1 t - x_2 \sin \delta_1 t), x_1 \sin \delta_1 t + x_2 \cos \delta_1 t], \dots \\ \dots, e^{\lambda_r t} (x_{d-1} \cos \delta_r t - x_d \sin \delta_r t), x_{d-1} \sin \delta_r t + x_d \cos \delta_r t],$$

onde  $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ .

Sabemos que

$$\mathbb{R}^d = L(\lambda_1) \oplus L(\lambda_2) \oplus \dots \oplus L(\lambda_r)$$

e, para todo  $y \in \mathbb{R}^d$ , temos que

$$y = (y_1, \dots, y_r), \text{ onde } y_j \in L(\lambda_j), j = 1, \dots, r.$$

Mas, como nesse caso,  $L(\lambda_j)$  tem dimensão 2, podemos escrever,  $y_1 = (x_1, x_2), \dots, y_r = (x_{d-1}, x_d)$ , ou melhor,

$$y = (x_1, x_2, \dots, x_{d-1}, x_d).$$

Logo, se

$$x_0 = (x_1, \dots, x_d) \text{ e } x_1 = \dots = x_{j-2} = x_{j+1} = \dots = x_d = 0,$$

temos que  $x_0 \in L(\lambda_j)$ . É isso que vamos mostrar agora.

$$\begin{aligned}
\lambda(x_0) &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{Bt} x_0\| \\
&= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_1 t}(a_{1,2}) + \cdots + e^{2\lambda_j t}(a_{j-1,j}) + \cdots + e^{2\lambda_r t}(a_{d-1,d})}}{t} \\
&= \lambda_j
\end{aligned}$$

onde  $1 \leq j \leq d$ ,  $a_{1,2} = x_1^2 + x_2^2, \dots$ ,  $a_{j-1,j} = x_{j-1}^2 + x_j^2, \dots$ ,  $a_{d-1,d} = x_{d-1}^2 + x_d^2$ .

Colocando  $e^{2\lambda_j t}$  em evidência, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t}(e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}))}}{t} &= \lambda_j \\
\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \sqrt{e^{2\lambda_j t} \sqrt{e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d})}}}{t} &= \lambda_j \\
\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \left( \ln \sqrt{e^{2\lambda_j t}} + \ln \sqrt{E} \right) &= \lambda_j,
\end{aligned}$$

onde

$$E = e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}).$$

Segue que

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{2\lambda_j t}} + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{E} = \lambda_j,$$

ou seja,

$$\lambda_j + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{E} = \lambda_j$$

Assim,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{E} = 0,$$

isto é,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{\ln \sqrt{(e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}))}}{t} = 0$$

Suponha que  $a_{l-1,l} = x_{l-1}^2 + x_l^2 > 0$  para  $j+1 \leq l \leq d$  e  $1 < q \leq r$ , então

$$e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}) \geq e^{(2\lambda_q-2\lambda_j)t}(a_{l-1,l})$$

Mas,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{(2\lambda_1-2\lambda_j)t}(a_{1,2}) + \cdots + (a_{j-1,j}) + \cdots + e^{(2\lambda_r-2\lambda_j)t}(a_{d-1,d}))} \geq$$

$$\geq \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} (a_{l-1,l})}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} (a_{l-1,l})} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \left( \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} + \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln e^{(\lambda_q - \lambda_j)t} + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \\ &= \lambda_q - \lambda_j > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{(e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t} (a_{1,2}) + \dots + (a_{j-1,j}) + \dots + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t} (a_{d-1,d}))}}{t} > 0$$

o que é absurdo e, assim,  $a_{l-1,l} = 0$  para  $l = j + 1, \dots, d$ , donde  $x_{j+1} = \dots = x_d = 0$ .

Suponha que  $a_{l-1,l} = x_{l-1}^2 + x_l^2 > 0$ , para  $1 \leq l \leq j - 2$  e  $1 \leq q < j$ , então

$$e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t} (a_{1,2}) + \dots + (a_{j-1,j}) + \dots + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t} (a_{d-1,d}) \geq e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} (a_{l-1,l}).$$

Mas,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t} (a_{1,2}) + \dots + (a_{j-1,j}) + \dots + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t} (a_{d-1,d}))} &\leq \\ &\leq \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} (a_{l-1,l})} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t} (a_{l-1,l})} &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln \left( \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \left( \ln \sqrt{e^{(2\lambda_q - 2\lambda_j)t}} + \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \right) \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{1}{t} \ln e^{(\lambda_q - \lambda_j)t} + \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{(a_{l-1,l})} \\ &= \lambda_q - \lambda_j < 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\ln \sqrt{(e^{(2\lambda_1 - 2\lambda_j)t} (a_{1,2}) + \dots + (a_{j-1,j}) + \dots + e^{(2\lambda_r - 2\lambda_j)t} (a_{d-1,d}))}}{t} < 0$$

o que é absurdo e, assim,  $a_{l-1,l} = 0$  para  $l = 1, \dots, j-2$ , donde  $x_1 = \dots = x_{j-2} = 0$ .

Portanto,

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{e^{2\lambda_1 t}(a_{1,2}) + \dots + e^{2\lambda_j t}(a_{j-1,j}) + \dots + e^{2\lambda_r t}(a_{d-1,d})} = \lambda_j.$$

Segue que  $x_1 = \dots = x_{j-2} = x_{j+1} = \dots = x_d = 0$ , ou seja,  $x_0 \in L(\lambda_j)$ .  $\square$

Usando o conceito de expoente de Lyapunov e o teorema 2.12 podemos descrever o comportamento assintótico de equações diferenciais lineares  $\dot{x} = Ax$  quando o tempo tende para o infinito. Por definição, a solução com expoente de Lyapunov negativo tende à origem quando o tempo tende para o infinito, e uma solução com expoente de Lyapunov positivo torna-se ilimitada quando o tempo tende para o infinito.

Considere que  $N(x, \epsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d; \|y - x\| < \epsilon\}$ .

**Definição 2.13.** *Seja  $e_0 \in \mathbb{R}^d$  um ponto fixo de uma solução  $x(t, x_0)$  da equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ , isto é,  $x(t, e_0) = e_0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Então,  $e_0$  é chamado de:*

1. *estável, se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x(t, x_0) \in N(e_0, \epsilon)$ , para todo  $t \geq 0$ , sempre que  $x_0 \in N(e_0, \delta)$ ;*
2. *assintoticamente estável, se é estável e existe  $\gamma > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) = e_0$ , sempre que  $x_0 \in N(e_0, \gamma)$ ;*
3. *exponencialmente estável, se é assintoticamente estável e existem  $\alpha, \beta, \eta > 0$  tais que, para todo  $x_0 \in N(e_0, \eta)$ , a solução satisfaz  $\|x(t, x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
4. *instável, se não é estável.*

**Observação 2.14.** *Na verdade, a definição acima vale para qualquer ponto fixo da equação  $\dot{x} = f(x)$ , onde  $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é lipschitziana.*

Note que  $x(t, 0) = e^{At}.0 = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim, a origem é um ponto fixo de  $\dot{x} = Ax$  e, conseqüentemente, pode ser analisada em relação a estabilidade.

A caracterização de estabilidade assintótica e exponencial da origem de  $\dot{x} = Ax$  em termos dos autovalores de  $A$  é mostrada na proposição a seguir.



**Proposição 2.15.** *Para a equação  $\dot{x} = Ax$  em  $\mathbb{R}^d$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. a origem é assintoticamente estável
2. a origem é exponencialmente estável
3. todos os expoentes de Lyapunov (partes reais dos autovalores) são negativos
4. o subespaço estável  $L^-$  satisfaz  $L^- = \mathbb{R}^d$ .

**Demonstração:** Mostraremos primeiro que estabilidade assintótica e exponencial da origem em uma vizinhança  $N(0, \gamma)$ , implica estabilidade assintótica e exponencial para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . De fato, suponha que a origem tem estabilidade exponencial em  $N(0, \gamma)$ . Então, para  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , o ponto

$$x_1 := \frac{\gamma x_0}{2\|x_0\|} \in N(0, \gamma),$$

e, assim,

$$\|\varphi(t, x_0)\| = \|e^{At}x_0\| = \left\| \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \frac{e^{At}\gamma x_0}{2\|x_0\|} \right\| = \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \|\varphi(t, x_1)\| \leq \frac{2\|x_0\|}{\gamma} \alpha \|x_1\| e^{-\beta t} = \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}.$$

Analogamente se mostra para estabilidade assintótica.

Agora, vamos provar as equivalências.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Pela definição de assintoticamente estável.

(3)  $\Leftrightarrow$  (4) Sabemos que  $\mathbb{R}^d = L^- \oplus L^0 \oplus L^+$ . Então,

$$\mathbb{R}^d = L^- \Leftrightarrow L^0 = \emptyset \text{ e } L^+ = \emptyset \Leftrightarrow \text{ todos os expoentes de Lyapunov de } A \text{ são negativos.}$$

(1)  $\Rightarrow$  (3) e (2)  $\Rightarrow$  (3) Note que se a origem é assintoticamente ou exponencialmente estável,  $e^{At}x_0$  tende a 0 quando  $t$  tende a  $+\infty$ .

Suponha que um dos expoentes de Lyapunov não é negativo. Assim, um dos autovalores, digamos  $\mu$ , tem parte real não-negativa.

a) Seja  $\mu$  real positivo, isto é,  $\mu = \lambda$ , onde  $\lambda \in \mathbb{R}_+$ . Se  $v$  é o autovetor associado a  $\mu$ , então a solução correspondente a esse autovetor é dada por  $e^{At}v = e^{\lambda t}v$ . Além disso, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $e^{\lambda t}v \rightarrow \infty$  para  $\lambda > 0$ , e  $e^{\lambda t}v = v$  (ponto fixo) para  $\lambda = 0$ . Logo,

a solução correspondente ao autovetor  $v$ , não tende para a origem quando  $t$  tende para o infinito.

b) Seja  $\mu = \lambda + \delta i$  com  $\lambda \geq 0$  e  $\delta \neq 0$ . Vamos demonstrar esse caso para um bloco de Jordan relacionado ao par  $\mu = \lambda \pm \delta i$ . Daí, a solução é dada por

$$e^{At}x_0 = e^{\lambda t}(\cos(\delta t)x_1 - \sin(\delta t)x_2, \sin(\delta t)x_1 + \cos(\delta t)x_2),$$

onde  $x_0 = (x_1, x_2)$ . Daí, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $e^{At}x_0 \rightarrow \infty$  para  $\lambda > 0$ , e

$$e^{At}x_0 = (\cos(\delta t)x_1 - \sin(\delta t)x_2, \sin(\delta t)x_1 + \cos(\delta t)x_2)$$

(rotação de  $x_0$ ) para  $\lambda = 0$ . Portanto, nesse caso, também temos que a solução não tende para a origem quando  $t$  tende para o infinito, donde segue o resultado.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Suponha, por absurdo, que a origem não é exponencialmente estável, ou seja, ou a origem não é assintoticamente estável ou para todos  $\alpha, \beta, \eta > 0$  existe um  $x_0 \in N(0, \eta)$  tal que  $\|e^{At}x_0\| > \alpha\|x_0\|e^{-\beta t}$ , para  $t \geq 0$ . Mas, assim,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At}x_0\| > \lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha\|x_0\|e^{-\beta t} = 0,$$

donde,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At}x_0\| > 0$ , o que é um absurdo, pois se todos os expoentes de Lyapunov são negativos temos que  $L^- = \mathbb{R}^d$  e, assim,  $e^{At}x_0$  converge a 0 quando  $t$  tende a  $+\infty$ , isto é,  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|e^{At}x_0\| = 0$ .  $\square$

Vamos dar um exemplo em que a origem é estável mas não é assintoticamente estável.

**Exemplo 2.16.** Considere a aplicação  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\Phi(t, (x, y)) = (x \cos t - y \sin t, y \cos t + x \sin t)$ . O retrato de fase dessa aplicação é dado pela figura 1.7. Note que para todo  $\epsilon > 0$ , é possível encontrar  $\delta > 0$  tal que  $\Phi(t, (x, y)) \in N(0, \epsilon)$ , para todo  $t \geq 0$ , sempre que  $(x, y) \in N(0, \delta)$ . Entretanto,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi(t, (x, y)) \neq 0$ .

Portanto, a origem é estável mas não é assintoticamente estável.

A proposição a seguir mostra que há uma relação entre os expoentes de Lyapunov e o fato da origem ser estável.

**Proposição 2.17.** *A origem  $0 \in \mathbb{R}^d$  é estável para  $\dot{x} = Ax$  se, e somente se, os expoentes de Lyapunov são não-positivos e os autovalores com parte real nula têm um conjunto completo de autovetores, isto é,  $L^0$  é gerado por autovetores (reais).*

**Demonstração:** Primeiramente, mostraremos que se a origem é estável, então os expoentes de Lyapunov são não-negativos. Suponhamos que  $\lambda(x_0) > 0$  para algum  $x_0 \neq 0$ . Neste caso, como

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{At}x_0\| > 0,$$

então  $\|e^{At}x_0\|$  é ilimitado, isto é,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = +\infty$ . Assim, a origem não é estável. Com efeito, para todo  $\delta > 0$ , se escolhermos  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tal que  $0 < \|\alpha x_0\| < \delta$ , ainda teremos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}\alpha x_0\| = |\alpha| \lim_{t \rightarrow \infty} \|e^{At}x_0\| = +\infty.$$

Portanto, se a origem é estável todos os expoentes de Lyapunov são não positivos.

Mostraremos agora, que se a origem é estável então  $L^0$  possui um conjunto completo de autovetores reais. Suponhamos, por absurdo, que isto não ocorra. Daí, temos dois casos a analisar.

a) Quando todos os autovalores de  $A$  são reais. Assim, algum bloco de Jordan de  $A$  terá a forma

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, consideremos  $y_B = (0, \dots, 0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ . Então, a solução correspondente é dada por  $e^{At}y_B = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}$  e tende para o infinito, quando  $t \rightarrow \infty$ , mostrando que a origem não é estável.

b) Quando  $A$  possui pelo menos um par de autovalores complexos. Então, algum bloco de Jordan de  $A$  terá a forma:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & I & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & I \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, consideremos  $y_B = (0, 0, \dots, 0, 0, 0, 0, \dots, 1, 1, 0, 0, \dots, 0, 0)$ . Então

$$y(t, y_B) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\cos \delta t - \sin \delta t) \longrightarrow \infty, \text{ quando } t \longrightarrow \infty$$

$$z(t, y_B) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} (\cos \delta t + \sin \delta t) \longrightarrow \infty, \text{ quando } t \longrightarrow \infty,$$

também mostrando que a origem não é estável.

Portanto,  $L^0$  possui um conjunto completo de autovetores reais.

Reciprocamente, suponha que os expoentes de Lyapunov são não positivos e que os autovalores com partes reais nulas têm um conjunto completo de autovetores reais. Mostremos que a origem é estável.

Quando os expoentes de Lyapunov são negativos, a proposição anterior garante que o resultado é válido. Assim, precisamos mostrar a afirmação quando o 0 é o expoente de Lyapunov.

Pela definição de expoente de Lyapunov, temos que

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{At} x_0\| = 0.$$

Então,  $\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|e^{At} x_0\| = 0$  e, assim,  $x_0 \in L^0$ . Daí, como  $L^0$  é gerado por autovetores,  $x_0 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$ , onde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^d$  e  $v_1, \dots, v_n$  são autovetores reais. Logo, para todo  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \epsilon$  tal que, para

$$\|x_0\| = \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| < \delta,$$

temos que

$$\begin{aligned} \|e^{At} x_0\| &= \|\alpha_1 e^{At} v_1 + \dots + \alpha_n e^{At} v_n\| \\ &= \|\alpha_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + \dots + \alpha_n e^{\lambda_n t} v_n\| \\ &= \|\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n\| \\ &< \delta = \epsilon, \end{aligned}$$

pois  $e^{At} v_i = e^{\lambda_i t} v_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) (solução correspondente ao autovetor  $v_i$ ) e  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$  (em  $L^0$  as partes reais dos autovalores são nulas). Portanto, a origem é estável.

□

## 2.2 Sistemas dinâmicos em $\mathbb{R}^d$

Nesta seção olharemos para a equação diferencial  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , do ponto de vista dos sistemas dinâmicos ou fluxos lineares em  $\mathbb{R}^d$ . Introduziremos os sistemas dinâmicos lineares e daremos alguns exemplos para esclarecer esse conceito.

**Definição 2.18.** *Um fluxo ou sistema dinâmico topológico sobre um espaço métrico  $M$  é definido como uma aplicação contínua  $\Phi : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M$  com as propriedades:*

1.  $\Phi(0, x) = x$ , para todo  $x \in M$ ;
2.  $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ , para todos  $s, t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in M$ .

**Definição 2.19.** *Para cada  $x \in M$ , o conjunto  $\{\Phi(t, x); t \in \mathbb{R}\}$  é chamado de órbita (ou trajetória) do sistema dinâmico  $\Phi$  através de  $x$ .*

Para cada  $t \in \mathbb{R}$  definimos a aplicação  $\varphi_t = \Phi(t, \cdot) : M \longrightarrow M$ . Usando essas aplicações, as propriedades 1 e 2 acima podem ser reescritas como:

1.  $\varphi_0 = id_M$  (aplicação identidade de  $M$ );
2.  $\varphi_{s+t} = \varphi_s \circ \varphi_t$ , para todos  $s, t \in \mathbb{R}$ .

**Proposição 2.20.** *A aplicação  $\varphi_t$  possui inversa dada por  $(\varphi_t)^{-1} = \varphi_{-t}$ . Além disso,  $\varphi_t : M \longrightarrow M$  é um homeomorfismo, isto é, uma aplicação bijetora, contínua e com inversa contínua.*

Mostraremos alguns exemplos de sistemas dinâmicos e veremos que exemplos canônicos são dados pelas soluções de equações diferenciais.

**Exemplo 2.21.** *Seja  $M = \mathbb{R}^d$  e consideremos a aplicação  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  definida por  $\Phi(t, x_1, x_2, \dots, x_d) = (t + x_1, t + x_2, \dots, t + x_d)$ . Logo,  $\Phi$  é um sistema dinâmico topológico sobre  $\mathbb{R}^d$ .*

**Exemplo 2.22.** *Sejam  $M = \mathbb{R}^2$  e  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação dada por  $\Phi(t, x, y) = (x \cos t - y \sin t, y \cos t + x \sin t)$ . Assim,  $\Phi$  é um sistema dinâmico sobre  $\mathbb{R}^2$ .*

**Exemplo 2.23.** *Sejam  $M$  uma variedade diferenciável  $C^\infty$  e  $X$  um campo vetorial  $C^\infty$  sobre  $M$ . A equação diferenciável  $\dot{x} = X(x)$  tem uma única solução  $x(t, x_0)$ , satisfazendo, para todo  $x_0 \in M$ ,  $x(0, x_0) = x_0$ . Então:  $\Phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$  definida por  $\Phi(t, x_0) = x(t, x_0)$ , define um sistema dinâmico sobre  $M$ .*

**Exemplo 2.24.** *As soluções de  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , formam um sistema dinâmico com o espaço  $M = \mathbb{R}^d$ . Aqui:  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  é dado por  $\Phi(t, x_0) = x(t, x_0) = e^{At}x_0$ .*

**Definição 2.25.** *Um ponto fixo (ou equilíbrio) de um sistema dinâmico  $\Phi$  é um ponto  $x \in M$  com a propriedade  $\Phi(t, x) = x$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .*

**Definição 2.26.** *Uma órbita  $\{\Phi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$  de um sistema dinâmico  $\Phi$  é dita periódica, se existe  $T \in \mathbb{R}_+^*$  tal que  $\Phi(T + s, x) = \Phi(s, x)$ , para todo  $s \in \mathbb{R}$ .*

O ínfimo de

$$\{T \in \mathbb{R}_+^*; \Phi(T + s, x) = \Phi(s, x)\}$$

é o período da órbita  $\{\Phi(t, x), t \in \mathbb{R}\}$ .

Note que uma órbita de período 0 é um ponto fixo.

As duas próximas proposições caracterizam os pontos fixos dos sistemas dinâmicos dados nos exemplos 2.23 e 2.24.

**Proposição 2.27.** *Um ponto  $x_0 \in M$  é um ponto fixo de um sistema dinâmico  $\Phi$  associado à equação diferencial  $\dot{x} = X(x)$  se, e somente se,  $X(x_0) = 0$ .*

**Demonstração:** Seja  $x_0 \in M$  um ponto fixo de  $\Phi$ , ou seja,  $\Phi(t, x_0) = x_0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Como  $\Phi(t, x_0) = x(t, x_0) = x_0$ , obtemos:  $0 = x'(t, x_0) = X(x(t, x_0)) = X(x_0)$ . Daí,  $X(x_0) = 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $X(x_0) = 0$ . Então,  $\dot{x}_0 = X(x_0) = 0$ . Assim,  $x'(t, x_0) = 0$ , isto é,  $x(t, x_0) = c$ , onde  $c$  é uma constante real. Mas, como  $x(0, x_0) = x_0$ , tem-se  $x(t, x_0) = x_0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Proposição 2.28.** *Um ponto  $x_0 \in \mathbb{R}^d$  é um ponto fixo de um sistema dinâmico  $\Phi$  associado à equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$  se, e somente se,  $x_0 \in \ker A$ .*

**Demonstração:** Suponha que  $x_0$  seja um ponto fixo do sistema dinâmico  $\dot{x} = Ax$ , isto é,  $\Phi(t, x_0) = e^{At}x_0 = x_0$ . Derivando em relação a  $t$ :  $Ae^{At}x_0 = 0$ . Como  $e^{At}x_0 = x_0$ , temos que  $Ax_0 = 0$ , ou seja,  $x_0 \in \ker A$ .

Reciprocamente, seja  $x_0 \in \ker A$ . Daí,  $Ax_0 = 0$  e  $e^{At}(Ax_0) = 0$ . Assim,  $e^{At}x_0 = c$ , onde  $c$  é uma constante real. Como,  $e^{A0}x_0 = x_0$ , temos que  $e^{At}x_0 = x_0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .  $\square$

**Observação 2.29.** *Note que se uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  é inversível, então o 0 é o único ponto fixo dos sistemas dinâmicos associados à equação diferencial linear  $\dot{x} = Ax$ .*

*De fato, seja  $\Phi$  um ponto fixo associado à  $\dot{x} = Ax$ . Sabemos que o 0 é um ponto fixo de  $\Phi$ . Precisamos mostrar que ele é único. Seja  $e_0$  um outro ponto fixo de  $\Phi$ . Assim, pela proposição acima,  $A(e_0) = 0$ . Logo, como  $A$  é inversível, temos que  $e_0 = 0$ .*

---

# Conjugação e equivalência de fluxos lineares no espaço euclidiano

---

Uma primeira idéia importante na teoria dos sistemas dinâmicos consiste da comparação de dois sistemas, isto é, quando podemos dizer que dois sistemas têm o mesmo comportamento? Esta idéia é formalizada através de conjugações e equivalências que definiremos neste capítulo.

Caracterizaremos, primeiro,  $C^k$ -conjugação e  $C^k$ -equivalência, para  $k \geq 1$ . Nesse caso, a aplicação de conjugação (de equivalência) é um difeomorfismo. Depois, veremos que é mais interessante quando essa aplicação de conjugação é apenas um homeomorfismo, que é o caso da  $C^0$ -conjugação e  $C^0$ -equivalência. Mostraremos alguns resultados sobre estes últimos casos.

Além disso, falaremos um pouco sobre as matrizes hiperbólicas, que serão usadas nos principais resultados desse trabalho.

## 3.1 Conjugação e equivalência de fluxos lineares

Nesta seção definiremos conjugação e equivalência, mostraremos que conjugação topológica é uma relação de equivalência e daremos condições para que dois fluxos sejam  $C^k$ -conjugados ou  $C^k$ -equivalentes, para  $k \geq 1$ .

Denotaremos o espaço dos campos vetoriais sobre uma variedade  $M$  por  $\mathcal{X}(M)$ .

**Definição 3.1.** *Dois campos vetoriais  $X, Y \in \mathcal{X}(M)$  são:*



1.  $C^k$ -equivalentes ( $k \geq 1$ ), se existe um difeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h$  leva órbitas de  $\varphi(t, x)$  (de  $X$ ) em órbitas de  $\psi(t, y)$  (de  $Y$ ) preservando a orientação, isto é, se acontece uma das afirmações (e, portanto, as duas):
  - (a) para cada  $x \in M$  existe uma aplicação parametrizada contínua,  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , estritamente crescente, tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(\tau_x(t), h(x))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
  - (b) para todo  $x \in M$  e  $\delta > 0$ , existe  $\epsilon > 0$  tal que, para todo  $t \in (0, \delta)$ , temos  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t', h(x))$ , para algum  $t' \in (0, \epsilon)$ .
2.  $C^k$ -conjugados ( $k \geq 1$ ), se existe um difeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ , para todo  $x \in M$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
3.  $C^0$ -conjugados, se existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(t, h(x))$ , para todo  $x \in M$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ ;
4.  $C^0$ -equivalentes, se existe um homeomorfismo  $h : M \rightarrow M$  tal que, para cada  $x \in M$ , existe uma aplicação parametrizada contínua,  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , estritamente crescente, tal que  $h(\varphi(t, x)) = \psi(\tau_x(t), h(x))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Observação 3.2.** Note que no caso de conjugação,  $h$  leva órbitas de  $\varphi(t, x)$  (de  $X$ ) em órbitas de  $\psi(t, y)$  (de  $Y$ ) preservando o tempo.

**Observação 3.3.** Usualmente,  $C^0$ -equivalência é chamada de equivalência topológica e  $C^0$ -conjugação de conjugação topológica ou simplesmente conjugação.

**Observação 3.4.** Se os fluxos  $\phi$  e  $\psi$  são  $C^k$ -conjugados então eles são  $C^k$ -equivalentes. Basta tomar  $\tau_x(t) = t$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

**Observação 3.5.** Se dois fluxos são  $C^k$ -conjugados ( $C^k$ -equivalentes) então seus campos vetoriais são  $C^k$ -conjugados ( $C^k$ -equivalentes). Isto acontece porque os fluxos são descritos em termos de seus campos vetoriais.

Note que  $X$  é topologicamente conjugado a  $X$ , pois  $Id_M$  é um homeomorfismo e  $Id_M(\Phi(t, x)) = \Phi(t, Id_M(x))$ , para todo  $x \in M$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Agora, se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  então  $Y$  é topologicamente conjugado a  $X$ . Com efeito, sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  os fluxos associados a  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Suponhamos que exista um homeomorfismo  $h$  tal que

$$h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x)), \text{ para todo } x \in M \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Dado  $y \in M$  existe um único  $x \in M$  tal que  $h(x) = y$ . Logo,

$$h^{-1}(\Psi(t, y)) = h^{-1}(\Psi(t, h(x))) = h^{-1}(h(\Phi(t, x))) = \Phi(t, x) = \Phi(t, h^{-1}(y)).$$

Logo,  $Y$  é topologicamente conjugado a  $X$ .

Agora, se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  e  $Y$  é topologicamente conjugado a  $Z$  então  $X$  é topologicamente conjugado a  $Z$ . De fato, sejam  $\Phi, \Psi$  e  $\Lambda$  os fluxos associados a  $X, Y$  e  $Z$ , respectivamente. Por hipótese, existem homeomorfismos  $h_1$  e  $h_2$  tais que

$$h_1(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h_1(x)) \text{ e } h_2(\Psi(t, x)) = \Lambda(t, h_2(x)).$$

Tomemos  $h = h_2 \circ h_1$  e mostremos que  $h$  é uma conjugação topológica entre  $X$  e  $Z$ . Como composta de homeomorfismos é homeomorfismo,  $h$  é um homeomorfismo. Além disso,  $h$  satisfaz a propriedade de conjugação:

$$\begin{aligned} h(\Phi(t, x)) &= h_2(h_1(\Phi(t, x))) = h_2(\Psi(t, h_1(x))) \\ &= \Lambda(t, h_2(h_1(x))) = \Lambda(t, h_2 \circ h_1(x)) \\ &= \Lambda(t, h(x)). \end{aligned}$$

Portanto,  $X$  é topologicamente conjugado a  $Z$ .

Acabamos de mostrar que conjugação topológica é uma relação de equivalência. Representaremos a classe de conjugação de um campo vetorial  $X$  por  $\langle X \rangle$ .

Agora, vamos fazer uma discussão sobre ponto fixo que será usada nas demonstrações de alguns importantes teoremas desse trabalho.

Afirmção: A aplicação de conjugação leva ponto fixo em ponto fixo.

De fato, vamos supor que  $\Phi_1$  é topologicamente conjugado a  $\Phi_2$  via  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , ou seja,  $h$  é um homeomorfismo tal que

$$h(\Phi_1(t, x)) = \Phi_2(t, h(x)).$$

Seja  $x_i$  ponto fixo de  $\Phi_i$ . Daí,  $h(x_1) = h(\Phi_1(t, x_1)) = \Phi_2(t, h(x_1))$ . Como  $h$  é homeomorfismo e  $x_1$  é um ponto, temos que a órbita  $\Phi_2(t, h(x_1))$  deve ser um ponto, ou seja,  $\Phi_2(t, h(x_1)) = x_3$  para todo  $t$ . Assim  $x_3$  é um ponto fixo. Portanto, a aplicação de conjugação leva ponto fixo em ponto fixo.

Agora analisemos este fato no contexto de estabilidade.

Suponha que  $x_i$  é o único ponto fixo para  $\Phi_i$ , e mais suponha que ele é ponto estável. Daí  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_1(t, x) = x_1$  para  $x$  próximo de  $x_1$ . Assim,

$$h(x_1) = h(\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_1(t, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(\Phi_1(t, x)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_2(t, h(x)).$$

Então,  $h(x_1)$  é ponto fixo e estável de  $\Phi_2$ . Por unicidade,  $h(x_1) = x_2$ .

A definição a seguir dá um nome para uma conjugação topológica, na qual a aplicação de conjugação é linear.

**Definição 3.6.** *Sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  fluxos topologicamente conjugados. Então, existe um homeomorfismo  $h$  tal que  $h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x))$ , para todo  $x \in M$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ . Se  $h$  for linear, dizemos que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados. Da mesma forma, definimos fluxos linearmente equivalentes.*

Para fluxos lineares  $\dot{x} = Ax$ , conjugação e equivalência podem ser caracterizadas diretamente em termos da matriz  $A$ . Com o teorema abaixo, podemos encontrar vários exemplos de fluxos  $C^k$ -conjugados. A partir de agora, começamos a perceber a relação entre dinâmica e álgebra linear.

**Teorema 3.7.** *Considere dois fluxos lineares  $\Phi$  (associado com  $\dot{x} = Ax$ ) e  $\Psi$  (associado com  $\dot{x} = Bx$ ) em  $\mathbb{R}^d$ . Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

1.  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados para  $k \geq 1$ ;
2.  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados;
3.  $A$  e  $B$  são matrizes semelhantes, isto é,  $A = TBT^{-1}$ , para alguma  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

**Demonstração:** (2)  $\Rightarrow$  (1) Suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados. Então, existe uma aplicação linear de conjugação que satisfaz  $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in M$ . Daí, o resultado segue.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Note que:

$$A = TBT^{-1} \Leftrightarrow e^{At} = Te^{Bt}T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}e^{At} = e^{Bt}T^{-1}.$$

Considere a aplicação  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por  $h(x) = T^{-1}(x)$ . Então,  $h$  é homeomorfismo e

$$h(e^{At}x) = T^{-1}(e^{At}x) = e^{Bt}(T^{-1}x) = e^{Bt}(h(x)).$$

Portanto, os fluxos são  $C^k$ -conjugados.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Como existe uma aplicação de conjugação e ela é linear, por hipótese, temos, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , que  $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$ . Derivando em relação a  $x$  (aplicando a regra da cadeia), encontramos  $Dh|_{(e^{At}x)}e^{At} = e^{Bt}Dh(x)$ . Considerando  $T^{-1} := Dh(0)$  e observando que  $h$  é linear e um difeomorfismo, temos que

$$T^{-1}e^{At} = Dh(0)e^{At} = e^{Bt}Dh(0) = e^{Bt}T^{-1}.$$

Logo,  $A = TBT^{-1}$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2) Suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados. Assim, existe uma aplicação de conjugação  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $h(e^{At}x) = e^{Bt}(h(x))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $t > 0$ . Pela equivalência anterior ((2)  $\Rightarrow$  (3)), temos que  $T^{-1}A = BT^{-1}$ , onde  $T^{-1} := Dh(0)$ . Como  $h$  é um difeomorfismo,  $Dh(0)$  é invertível e, portanto, define uma conjugação linear.

(1)  $\Rightarrow$  (3) Usando a demonstração anterior ((1)  $\Rightarrow$  (2)), temos  $T^{-1}A = BT^{-1}$ , onde  $T^{-1}$  é invertível. Logo,  $A = TBT^{-1}$ , ou seja,  $A$  e  $B$  são semelhantes.  $\square$

**Observação 3.8.** *Note que se os fluxos  $\Phi$  (associado com  $\dot{x} = Ax$ ) e  $\Psi$  (associado com  $\dot{x} = Bx$ ) em  $\mathbb{R}^d$  são  $C^k$ -conjugados, para  $k \geq 1$ , ou linearmente conjugados, então, pelo item (3) do teorema anterior,  $A$  e  $B$  têm os mesmos autovalores.*

O próximo resultado é semelhante ao teorema anterior e mostra uma caracterização de  $C^k$ -equivalência.

**Teorema 3.9.** *Considere dois fluxos lineares  $\Phi$  (associado com  $\dot{x} = Ax$ ) e  $\Psi$  (associado com  $\dot{x} = Bx$ ) em  $\mathbb{R}^d$ . Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

1.  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -equivalentes para  $k \geq 1$ ;
2.  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente equivalentes;
3.  $A = \alpha TBT^{-1}$ , para algum número real positivo  $\alpha$  e para alguma  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

**Demonstração:** (2)  $\Rightarrow$  (1) Suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente equivalentes. Assim, existe uma aplicação linear de equivalência que satisfaz  $h(e^{At}x) = e^{B\tau_x(t)}(h(x))$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in M$ . Logo, o resultado segue.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Note que:

$$A = \alpha TBT^{-1} \Leftrightarrow e^{At} = Te^{\alpha Bt}T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}e^{At} = e^{\alpha Bt}T^{-1}.$$

Considere a aplicação  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por  $h(x) = T^{-1}(x)$ . Tomando a aplicação  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tau_x(t) = \alpha t$ , temos que

$$h(e^{At}x) = T^{-1}(e^{At}x) = e^{\alpha Bt}T^{-1}x = e^{B\tau_x(t)}T^{-1}x = e^{B\tau_x(t)}(h(x)).$$

Logo,  $h$  é uma aplicação de equivalência.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Como existe uma aplicação linear de equivalência (por hipótese), temos, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , que  $h(e^{At}x) = e^{B\tau_x(t)}(h(x))$ . Derivando em relação a  $x$  (aplicando a regra da cadeia), temos  $Dh|_{(e^{At}x)}e^{At} = e^{B\tau_x(t)}Dh(x)$ . Aplicando em  $x = 0$ , chegamos a  $Dh(0)e^{At} = e^{B\tau_x(t)}Dh(0)$ . Observando que  $h$  é linear e um difeomorfismo, concluímos, considerando  $T^{-1} := Dh(0)$ , que  $T^{-1}e^{At} = e^{B\tau_x(t)}T^{-1}$ . Tome, agora,  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $\tau_x(t) = \alpha t$ . Daí,  $T^{-1}e^{At} = e^{B\alpha t}T^{-1}$  e, assim,  $A = \alpha TBT^{-1}$ .

(1)  $\Rightarrow$  (2) Suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -equivalentes. Assim, existe uma aplicação de equivalência  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $h(e^{At}x) = e^{B\tau_x(t)}(h(x))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $t > 0$ . Pela equivalência anterior ((2)  $\Rightarrow$  (3)), temos que  $T^{-1}A = BT^{-1}$ , onde  $T^{-1} := Dh(0)$ . Como  $h$  é um difeomorfismo,  $Dh(0)$  é invertível e, portanto, define uma equivalência linear.

(1)  $\Rightarrow$  (3) Usando a demonstração anterior ((i)  $\Rightarrow$  (ii)), temos  $T^{-1}A = \alpha BT^{-1}$ , onde  $T^{-1}$  é invertível. Logo,  $A = T\alpha BT^{-1}$ , ou melhor,  $A = \alpha TBT^{-1}$ .  $\square$

**Observação 3.10.** *Note que se os fluxos  $\Phi$  (associado com  $\dot{x} = Ax$ ) e  $\Psi$  (associado com  $\dot{x} = Bx$ ) em  $\mathbb{R}^d$  são  $C^k$ -equivalentes, para  $k \geq 1$ , ou linearmente conjugados, então, pelo item (3) do teorema anterior, os autovalores de  $A$  e  $B$  se diferem por uma constante.*

**Corolário 3.11.** *Um fluxo linear associado a uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  é  $C^k$ -conjugado (e, portanto,  $C^k$ -equivalente), para todo  $k \geq 0$ , ao sistema dinâmico associado à forma de Jordan de  $A$ ,  $J_A^{\mathbb{R}}$ .*

**Demonstração:** Como  $A$  e  $J_A^{\mathbb{R}}$  são semelhantes, isto é,  $A = TJ_A^{\mathbb{R}}T^{-1}$ , para alguma  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ , o resultado segue.  $\square$

## 3.2 Conjugação e equivalência topológica de fluxos lineares

Nesta seção falaremos sobre  $C^0$ -conjugação e  $C^0$ -equivalência, ou melhor, conjugação e equivalência topológica.

Os teoremas 3.7 e 3.9 esclarecem a estrutura de duas matrizes que dão origem a fluxos conjugados ou equivalentes por  $C^k$ -difeomorfismo com  $k \geq 1$ . Para homeomorfismo, isto é, para  $k = 0$ , a situação é bastante diferente. Para expor os resultados correspondentes nesse caso, precisamos do conceito de hiperbolicidade.

**Definição 3.12.** *Uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  é hiperbólica se não possui autovalores sobre o eixo imaginário, ou seja, se todo autovalor de  $A$  tem parte real não nula.*

**Exemplo 3.13.** *Considere  $A \in gl(2, \mathbb{R})$ , onde:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

*O polinômio característico de  $A$  é  $p(x) = x^2 + 2x + 2$  e, assim, os únicos autovalores de  $A$  são:  $-1 + i$  e  $-1 - i$ . Como os dois autovalores de  $A$  têm parte real não nula, concluímos que  $A$  é hiperbólica.*

Observe que toda matriz hiperbólica é inversível. Assim, pela observação 2.29, a origem é o único ponto fixo de um fluxo hiperbólico, isto é, de um fluxo associado à  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A$  é uma matriz hiperbólica.

Agora, daremos um exemplo de fluxos que não são topologicamente conjugados.

**Exemplo 3.14.** *Sejam  $A$  uma matriz hiperbólica e  $B$  uma matriz não inversível. Então, os fluxos associados a  $A$  e  $B$ ,  $\Phi$  e  $\Psi$ , respectivamente, não são topologicamente conjugados.*

*De fato, como  $B$  não é inversível, pelo teorema do núcleo e da imagem da álgebra linear, temos que  $B$  não é injetora. Assim, existe um  $x_0 \neq 0$  tal que  $B(x_0) = 0$ . Pela proposição 2.28,  $x_0$  é um ponto fixo de  $\dot{x} = Bx$ . Contudo, como  $A$  é hiperbólica,  $0$  não é autovalor de  $A$  e, assim,  $A$  é inversível. Segue que  $0$  é o único ponto fixo de  $\dot{x} = Ax$ . Logo,  $\Phi$  e  $\Psi$  não são conjugados, pois se existisse uma tal conjugação entre eles,  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$ , teriam o mesmo número de pontos fixos.*

A proposição a seguir mostra a existência de uma norma adaptada para uma matriz  $A$ .

**Proposição 3.15.** *Para  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ , as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *existem uma norma  $\|\cdot\|_*$  sobre  $\mathbb{R}^d$  e  $a > 0$  tal que, para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , tem-se  $\|e^{At}x\|_* \leq e^{-at}\|x\|_*$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
2. *para toda norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\mathbb{R}^d$ , existem constantes positivas  $a$  e  $c$  tais que  $\|e^{At}x\| \leq ce^{-at}\|x\|$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
3. *para todo autovalor  $\mu$  de  $A$  tem-se  $Re(\mu) < 0$ .*

**Demonstração:** (1)  $\Rightarrow$  (2) Como duas normas quaisquer em  $\mathbb{R}^d$  são equivalentes, existem constantes  $c_1, c_2 > 0$ , tais que  $c_1\|x\| \leq \|x\|_* \leq c_2\|x\|$ . Assim, para  $t \geq 0$ ,

$$\|e^{At}x\| \leq \frac{1}{c_1}\|e^{At}x\|_* \leq \frac{1}{c_1}e^{-at}\|x\|_* \leq \frac{c_2}{c_1}e^{-at}\|x\|.$$

Tomando,  $c = \frac{c_2}{c_1}$ , o resultado segue.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Seja  $b \in (0, a)$ . Então, pela hipótese, temos, para  $t \geq 0$ , que

$$\|e^{At}x\| \leq ce^{-at}\|x\| = ce^{(b-a)t}e^{-bt}\|x\|.$$

Assim, existe  $\tau > 0$ , tal que  $ce^{(b-a)t} < 1$ , para todo  $t \geq \tau$ . Daí,

$$\|e^{At}x\| \leq e^{-bt}\|x\|. \quad (3.1)$$

Então, para  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\|x\|_* := \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x\|ds,$$

define uma norma. De fato:

$$\|x\|_* = 0 \Leftrightarrow e^{bs}\|e^{As}x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Em relação à desigualdade triangular, observe que

$$\begin{aligned} \|x + y\|_* &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}(x + y)\|ds = \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x + e^{As}y\|ds \\ &\leq e^{bs} \int_0^\tau (\|e^{As}x\| + \|e^{As}y\|) ds = \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x\| + \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}y\|ds \\ &= \|x\|_* + \|y\|_*. \end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned} \|\alpha x\|_* &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}(\alpha x)\|ds = \int_0^\tau e^{bs}\|\alpha e^{As}x\|ds \\ &= \int_0^\tau e^{bs}|\alpha| \|e^{As}x\|ds = |\alpha| \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}x\|ds \\ &= |\alpha| \|x\|_*. \end{aligned}$$

Logo,  $\|x\|_*$  é uma norma sobre  $\mathbb{R}^d$ .

Para  $t \geq 0$ , escrevendo  $t = n\tau + T$  com  $0 \leq T < \tau$ , chegamos a

$$\begin{aligned} \|e^{At}x\|_* &= \int_0^\tau e^{bs}\|e^{As}e^{At}x\|ds \\ &= \int_0^{\tau-T} e^{bs}\|e^{An\tau}e^{A(T+s)}x\|ds + \int_{\tau-T}^\tau e^{bs}\|e^{A(n+1)\tau}e^{A(T-\tau+s)}x\|ds. \end{aligned}$$

Tomando  $\sigma := T + s$  e aplicando o teorema de mudança de variáveis, temos que

$$\int_0^{\tau-T} e^{bs}\|e^{An\tau}e^{A(T+s)}x\|ds = \int_T^\tau e^{(\sigma-T)}\|e^{An\tau}e^{A\sigma}x\|d\sigma.$$



Agora, tomando  $\sigma := T - \tau + s$  e aplicando novamente o teorema de mudança de variáveis, obtemos

$$\int_{\tau-T}^{\tau} e^{bs} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A(T-\tau+s)} x\| ds = \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma.$$

Logo,

$$\|e^{At} x\|_* = \int_T^{\tau} e^{(\sigma-T)} \|e^{An\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma + \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma.$$

Assim, pela desigualdade 3.1, temos:

$$\begin{aligned} \|e^{At} x\|_* &= \int_T^{\tau} e^{(\sigma-T)} \|e^{An\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma + \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau)} \|e^{A(n+1)\tau} e^{A\sigma} x\| d\sigma \leq \\ &\leq \int_T^{\tau} e^{(\sigma-T-n\tau)} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma + \int_0^T e^{b(\sigma-T+\tau-(n+1)\tau)} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma = \\ &= e^{-bt} \int_0^{\tau} e^{b\sigma} \|e^{A\sigma} x\| d\sigma = e^{-bt} \|x\|_*. \end{aligned}$$

(2)  $\Rightarrow$  (3) Suponhamos, por absurdo, que exista um autovalor  $\mu = \lambda + i\delta$  com  $\lambda \geq 0$ .

Assim, para um bloco de Jordan relacionado ao par  $\mu = \lambda \pm \delta i$ , a solução é dada por

$$e^{At} x_0 = e^{\lambda t} (\cos(\delta t) x_1 - \sin(\delta t) x_2, \sin(\delta t) x_1 + \cos(\delta t) x_2),$$

onde  $x_0 = (x_1, x_2)$ . Daí, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $e^{At} x_0 \rightarrow \infty$  para  $\lambda > 0$ , e

$$e^{At} x_0 = (\cos(\delta t) x_1 - \sin(\delta t) x_2, \sin(\delta t) x_1 + \cos(\delta t) x_2)$$

(rotação de  $x_0$ ) para  $\lambda = 0$ . Portanto, nesse caso, também temos que a solução não tende para a origem quando  $t$  tende para o infinito, o que contraria (2).  $\square$

**Definição 3.16.** *Uma norma que satisfaz o item (1) da proposição 3.15, é chamada de norma adaptada para  $A$ .*

Qualquer norma em  $\mathbb{R}^d$  é contínua:

**Lema 3.17.** *Se  $\|\cdot\|_A$  é uma norma qualquer em  $\mathbb{R}^d$ , então essa norma é contínua em  $\mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:** Seja  $\|\cdot\|$  a norma usual de  $\mathbb{R}^d$ . Como duas normas quaisquer em  $\mathbb{R}^d$  são equivalentes, temos:

$$c\|x - a\|_A \leq \|x - a\| < \delta, \text{ para } c \in \mathbb{R}_+^*,$$

ou seja,

$$c\|x - a\|_A < \frac{\delta}{c} \quad \text{e} \quad \|\|x\|_A - \|a\|_A\| \leq d\|\|x\|_A - \|a\|_A\|_A, \quad \text{para } d \in \mathbb{R}_+^*.$$

Assim, para todo  $\epsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{c\epsilon}{d}$ , com  $x \in \mathbb{R}^d$  e  $\|x - a\| < \delta$ , então

$$\|\|x\|_A - \|a\|_A\| \leq d\|\|x\|_A - \|a\|_A\|_A \leq d\|x - a\|_A < \frac{d\delta}{c} = \epsilon.$$

□

O lema a seguir mostra que qualquer trajetória  $e^{At}x$ , num caso particular, intercepta a esfera em um único ponto.

**Lema 3.18.** *Sejam  $\|\cdot\|_A$  uma norma tal que  $\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A$ , para  $t \geq 0$  e  $\|e^{At}x\|_A \geq e^{at}\|x\|_A$ , para  $t \leq 0$ , onde  $a > 0$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ . Considere a aplicação  $f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_x(t) = \|e^{At}x\|_A$ . Então, existe um único tempo  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e^{At}x\|_A = 1$ .*

**Demonstração:** Aplicando o limite com  $t$  tendendo ao infinito, obtemos que  $e^{-at}\|x\|_A$  tende a 0. A partir da desigualdade  $\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A$ , concluímos que  $\|e^{At}x\|_A$  tende a 0.

Considere agora, a outra desigualdade  $\|e^{At}x\|_A \geq e^{at}\|x\|_A$ . Quando  $t$  tende para o infinito,  $e^{at}\|x\|_A$  tende ao infinito e, conseqüentemente,  $\|e^{At}x\|_A$  também tende ao infinito.

Logo, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\|e^{At}x\|_A = 1$ .

Resta provar a unicidade de  $t$ .

Suponha que  $\|e^{At_1}x\|_A = \|e^{At_2}x\|_A = 1$  e considere, sem perda de generalidade, que  $t_2 \geq t_1$ . Daí,

$$\|e^{-At_1}e^{At_1}x\|_A = \|e^{-At_1}e^{At_2}x\|_A,$$

isto é,  $\|e^{A(t_2-t_1)}x\|_A = \|x\|_A$ . Agora,

$$\|e^{A(t_2-t_1)}x\|_A \leq e^{-a(t_2-t_1)}\|x\|_A$$

com  $a > 0$ . Assim,  $\|x\|_A \leq e^{-a(t_2-t_1)}\|x\|_A$ , donde  $1 \leq e^{-a(t_2-t_1)}$ . Mas, como  $-a < 0$  e  $t_2 - t_1 \geq 0$ , temos que  $-a(t_2 - t_1) \leq 0$ , ou seja,  $e^{-a(t_2-t_1)} \leq 1$ . Logo,  $1 \leq e^{-a(t_2-t_1)} \leq 1$  e, conseqüentemente,  $e^{-a(t_2-t_1)} = 1$ , ou melhor,  $t_2 = t_1$ . □

O seguinte teorema relaciona conjugação topológica com as partes reais dos autovalores de  $A$  e de  $B$ , ou melhor, com os subespaços estáveis de  $A$  e de  $B$ .

**Teorema 3.19.** *Sejam  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$ . Se todos os autovalores de  $A$  e de  $B$  têm partes reais negativas, então os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:** Sejam  $\|\cdot\|_A$  e  $\|\cdot\|_B$  normas adaptadas das matrizes  $A$  e  $B$ , respectivamente. Então, existem constantes positivas  $a$  e  $b$  tais que

$$\|e^{At}x\|_A \leq e^{-at}\|x\|_A \quad \text{e}$$

$$\|e^{Bt}x\|_B \leq e^{-bt}\|x\|_B,$$

para  $t \geq 0$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ .

Aplicando a inequação acima para  $e^{At}$  e  $-t$ , temos, para  $t \leq 0$ , que

$$\|e^{At}x\|_A \geq e^{a|t|}\|x\|_A \quad \text{e}$$

$$\|e^{Bt}x\|_B \geq e^{b|t|}\|x\|_B.$$

Assim,

$$\|x\|_A = \|e^{-At}e^{At}x\|_A \leq e^{at}\|e^{At}x\|_A \quad \text{e}$$

$$\|x\|_B = \|e^{-Bt}e^{Bt}x\|_B \leq e^{bt}\|e^{Bt}x\|_B.$$

Considere as esferas unitárias

$$S_A = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_A = 1\} \quad \text{e} \quad S_B = \{x \in \mathbb{R}^d; \|x\|_B = 1\},$$

como os domínios fundamentais dos fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , ou seja,  $S_A$  e  $S_B$  contêm exatamente um ponto da órbita de  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ .

Defina a aplicação entre as esferas  $S_A$  e  $S_B$ ,  $h_0 : S_A \rightarrow S_B$  definida por  $h_0(x) = \frac{x}{\|x\|_B}$ , para todo  $x \in S_A$ . A inversa de  $h_0$  é dada por  $h_0^{-1} : S_B \rightarrow S_A$  definida por  $h_0^{-1}(y) = \frac{y}{\|y\|_A}$ .

Note que  $h_0$  e  $h_0^{-1}$  são contínuas.

Com efeito, pelo lema 3.17,  $\|x\|_A$  e  $\|x\|_B$  são contínuas em  $\mathbb{R}^d$  e, assim,  $\frac{x}{\|x\|_A}$  e  $\frac{x}{\|x\|_B}$  são contínuas por serem quocientes de funções contínuas. Logo,  $h_0$  e  $h_0^{-1}$  são contínuas.

Agora, como  $h_0$  é bijetora, contínua com inversa contínua, concluímos que  $h_0$  é um homeomorfismo.

Considere agora,  $\tau_A(x)$  e  $\tau_B(x)$  como sendo os únicos tempos onde as trajetórias  $e^{At}x$  e  $e^{Bt}x$  cruzam as esferas  $S_A$  e  $S_B$ , respectivamente.

Para estender  $h_0$  para todo o  $\mathbb{R}^d$ , observe que (pelo lema anterior) existe, para todo  $x \neq 0$ , um único tempo  $\tau_A(x) \in \mathbb{R}$  com  $\|e^{A\tau_A(x)}x\|_A = 1$ . Daí,  $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$ , pois  $e^{-A\tau_A(e^{At}x)}e^{A\tau_A(x)}x = e^{At}x$ . Analogamente, para  $\tau_B(x)$ .

Além disso, a aplicação  $x \mapsto \tau(x)$  é contínua.

De fato, seja  $x \in \mathbb{R}^d$  e considere uma sequência  $(x_n)$  em  $\mathbb{R}^d$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Pela propriedade de  $\|x\|_A$  temos que

$$\|e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x)\|_A \leq e^{-a(\tau(x_n)-\tau(x))}\|x_n - x\|_A \leq \|x_n - x\|_A,$$

pois  $a > 0$ ,  $\tau(x_n) - \tau(x) \geq 0$  e, assim,

$$e^{-a(\tau(x_n)-\tau(x))} \leq 1.$$

Como  $\|x_n - x\|_A \rightarrow 0$  então

$$e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}\|x_n - x\|_A \rightarrow 0 \implies e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x) \rightarrow 0.$$

Logo,

$$e^{A\tau(x)}(e^{A(\tau(x_n)-\tau(x))}(x_n - x)) \rightarrow 0 \implies e^{A\tau(x_n)}(x_n - x) \rightarrow 0,$$

donde

$$e^{A\tau(x_n)}(x_n) - e^{A\tau(x_n)}(x) \rightarrow 0.$$

Mas, assim,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A\tau(x_n)}(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{A\tau(x_n)}(x)) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x_n)\|_A = \lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A.$$

Como  $\|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = 1$  para todo  $n$ , temos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = 1$ . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|e^{A\tau(x_n)}(x)\|_A = \|e^{\lim_{n \rightarrow \infty} A\tau(x_n)}(x)\|_A = 1,$$

ou seja,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau(x_n) = \tau(x)$ .

Portanto,  $x \mapsto \tau(x)$  é contínua.

Agora, defina  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  por:

$$h(x) = \begin{cases} e^{-B\tau_A(x)} h_0(e^{A\tau_A(x)} x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Então,  $h$  é uma conjugação, pois, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ ,

$$\begin{aligned} h(e^{At}x) &= e^{-B\tau_A(e^{At}x)} h_0(e^{A\tau_A(e^{At}x)} e^{At}x) \\ &= e^{-B[\tau_A(x)-t]} h_0(e^{A[\tau_A(x)-t]} e^{At}x) \\ &= e^{Bt} e^{-B\tau_A(x)} h_0(e^{A\tau_A(x)} x) \\ &= e^{Bt} h(x). \end{aligned}$$

A aplicação  $h$  é contínua em  $x \neq 0$ , pois  $e^{At}$ ,  $e^{Bt}$  e  $\tau(x)$  são contínuas.

Para verificar a continuidade em  $x = 0$ , considere uma sequência  $(x_j)$  em  $\mathbb{R}^d$  tal que  $x_j \rightarrow 0$ . Mostremos que

$$h(x_j) \rightarrow h(0) = 0.$$

Se  $\tau_j$  é o tempo tal que  $\|e^{A\tau_j} x_j\|_A = 1$ , então  $\tau_j := \tau(x_j) \rightarrow -\infty$ .

De fato, considere que  $\tau_j \geq 0$ . Assim,

$$1 = \|e^{A\tau_j} x_j\|_A \leq e^{-a\tau_j} \|x_j\|_A \rightarrow 0,$$

o que é absurdo.

Considere, agora,  $\tau_j \leq 0$ . Como vimos, para cada  $x \neq 0$ , a trajetória  $e^{At}$  cruza uma vez  $S_A$ , então para cada  $j$  existe um único  $\tau_j \in \mathbb{R}_-$  e um único  $y_j \in S_A$  tal que  $e^{A\tau_j} x_j = y_j$ .

Suponha que  $|\tau_j| < M$ , para qualquer  $j$  e  $M \in \mathbb{R}$ . Pelo teorema de Bolzano Weierstrass, existe uma subsequência  $\tau_{j_i}$  convergindo para  $t \in \mathbb{R}$ .

A sequência  $\tau_{j_i}$  está no compacto  $S_A$ , logo existe uma subsequência  $y_{j_{i_m}}$  tal que

$$y_{j_{i_m}} \rightarrow y_0, \quad y_0 \in S_A.$$

Portanto,  $e^{A\tau_{j_{i_m}}} x_{j_{i_m}} = x_{j_{i_m}}$ .

Assim, quando  $m$  tende ao infinito, temos,

$$\tau_{ji_m} \longrightarrow t, \quad x_{ji_m} \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad y_{ji_m} \longrightarrow y_0.$$

Logo,

$$e^{At}0 = y_0 \implies y_0 = 0,$$

o que é absurdo.

Portanto,  $\tau_j \longrightarrow -\infty$  quando  $x_j \longrightarrow 0$ .

Seja  $y_j := h_0(e^{A\tau_j}x_j)$ . Assim,

$$\|y_j\|_B = \|h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B = \frac{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B}{\|e^{A\tau_j}x_j\|_B} = 1$$

e, por isso,

$$\|h(x_j)\|_B = \|e^{-B\tau_j}h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B \leq \|e^{B\tau_j}\|_B \|h_0(e^{A\tau_j}x_j)\|_B = \|e^{-B\tau_j}\| \leq e^{-b|\tau_j|} \longrightarrow 0,$$

para  $j \longrightarrow \infty$ .

Segue que  $\|h(x_j)\|_B$  converge para zero, ou seja,  $h(x_j)$  converge para zero quando  $x_j$  converge para zero e, assim,  $h$  é contínua em  $x = 0$ .

Além disso, a aplicação  $h$  é invertível, com inversa

$$h^{-1}(x) = \begin{cases} e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Com efeito, considere que

$$\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) = \tau_B(h_0(e^{\tau_A(x)}x)) + \tau_A(x) = \tau_A(x),$$

pois  $\tau_B(e^{Bt}x) = \tau_B(x) - t$  e  $h_0(e^{\tau_A(x)}x) \in S_B$ . Então,

$$\begin{aligned} (h^{-1} \circ h)(x) &= h^{-1}(h(x)) \\ &= h^{-1}(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) \\ &= e^{-A\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x))}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x))}e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) \\ &= e^{-A\tau_A(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_A(x)}e^{-B\tau_A(x)}h_0(e^{A\tau_A(x)}x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Considere, também, que

$$\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) = \tau_A(h_0^{-1}(e^{\tau_B(x)}x)) + \tau_B(x) = \tau_B(x),$$

pois  $\tau_A(e^{At}x) = \tau_A(x) - t$  e  $h_0^{-1}(e^{\tau_B(x)}x) \in S_A$ . Assim,

$$\begin{aligned} (h \circ h^{-1})(x) &= h(h^{-1}(x)) \\ &= h(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) \\ &= e^{-B\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x))}h_0(e^{A\tau_A(e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x))}e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) \\ &= e^{-B\tau_B(x)}h_0(e^{A\tau_B(x)}e^{-A\tau_B(x)}h_0^{-1}(e^{B\tau_B(x)}x)) \\ &= x. \end{aligned}$$

Logo,  $h$  é um homeomorfismo e, assim,  $A$  e  $B$  são topologicamente conjugados.  $\square$

**Observação 3.20.** *Observe que se todos os autovalores de  $A$  e  $B$  têm partes reais positivas, então os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  também são topologicamente conjugados.*

*De fato, como todos os autovalores de  $-A$  e  $-B$  têm partes reais negativas, então, pelo teorema anterior,  $e^{-A(-t)}$  e  $e^{-B(-t)}$  são topologicamente conjugados. Logo,  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.*

**Exemplo 3.21.** *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

*Note que as matrizes  $A$  e  $B$  possuem  $\mu_1 = -1 + 4i$  e  $\mu_2 = -1 - 4i$ ,  $\gamma_1 = -7 + 2i$  e  $\gamma_2 = -7 - 2i$  como autovalores, respectivamente. Como os dois autovalores de  $A$  e  $B$  têm partes reais negativas, os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$  são topologicamente conjugados.*

Agora, apresentaremos um outro resultado da teoria de conjugação topológica.

**Proposição 3.22.** *O produto direto de sistemas topologicamente conjugados é topologicamente conjugado.*

**Demonstração:** Considere os sistemas de equações diferenciais lineares,  $\dot{x}_1 = A_1x_1$ ,  $\dot{x}_2 = A_2x_2$ ,  $\dot{x}_1 = B_1x_1$  e  $\dot{x}_2 = B_2x_2$ , onde  $A_1, B_1 \in gl(d_1, \mathbb{R})$  e  $A_2, B_2 \in gl(d_2, \mathbb{R})$ .

Suponha que os fluxos  $e^{A_1t}$  e  $e^{B_1t}$  são topologicamente conjugados, isto é, existe um homeomorfismo  $h_1 : \mathbb{R}^{d_1} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1}$  satisfazendo:  $h_1(e^{A_1t}x_1) = e^{B_1t}h_1(x_1)$ .

Suponha, agora, que os fluxos  $e^{A_2t}$  e  $e^{B_2t}$  também são topologicamente conjugados, ou seja, existe  $h_2 : \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}^{d_2}$  um homeomorfismo que satisfaz:  $h_2(e^{A_2t}x_2) = e^{B_2t}h_2(x_2)$ .

Logo, definimos uma conjugação topológica  $h : \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$  por  $h(x_1, x_2) = (h_1(x_1), h_2(x_2))$ . De fato,  $h$  é um homeomorfismo porque suas funções coordenadas,  $h_1$  e  $h_2$ , são homeomorfismos. Além disso,  $h$  satisfaz a condição de conjugação:

$$\begin{aligned} h(e^{A_1t}x_1, e^{A_2t}x_2) &= (h_1(e^{A_1t}x_1), h_2(e^{A_2t}x_2)) \\ &= (e^{B_1t}h_1(x_1), e^{B_2t}h_2(x_2)) \\ &= (e^{B_1t}, e^{B_2t})(h_1(x_1), h_2(x_2)) \\ &= (e^{B_1t}, e^{B_2t})h(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $h$  é uma conjugação topológica e, conseqüentemente,  $(\dot{x}_1 = A_1x_1, \dot{x}_2 = A_2x_2)$  e  $(\dot{x}_1 = B_1x_1, \dot{x}_2 = B_2x_2)$ , são topologicamente conjugados.  $\square$

Enunciaremos o teorema mais importante deste capítulo. Esse resultado caracteriza conjugação topológica de fluxos lineares.

**Teorema 3.23.** *Se  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas, então seus fluxos lineares associados,  $\Phi$  e  $\Psi$ , em  $\mathbb{R}^d$  são topologicamente equivalentes (e topologicamente conjugados) se, e somente se, as dimensões dos subespaços estáveis (e, portanto, as dimensões dos subespaços instáveis) de  $A$  e  $B$  coincidem.*

**Demonstração:** Se  $A$  e  $B$  são hiperbólicas, então  $A$  e  $B$  não têm autovalores com parte real nula. Assim, podemos decompor  $\mathbb{R}^d$  como:

$$\mathbb{R}^d = L_A^- \oplus L_A^+ \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^d = L_B^- \oplus L_B^+,$$

onde  $L_A^+$  e  $L_A^-$  ( $L_B^+$  e  $L_B^-$ ) denotam, respectivamente, os subespaços instáveis e estáveis de  $A$



(de  $B$ ). Denote as projeções naturais por:

$$\begin{aligned} \pi_A^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^- & \pi_A^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^+ \\ x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^- & x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_B^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^- & \pi_B^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^+ \\ x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^- & x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^+ \end{aligned}$$

Os subespaços  $L_A^+$ ,  $L_A^-$ ,  $L_B^+$  e  $L_B^-$  são invariantes por  $A$  e  $B$ , respectivamente. Considere as equações diferenciais lineares:

$$\dot{x} = A|_{L_A^+}x \quad \text{e} \quad \dot{x} = A|_{L_A^-}x \quad (3.2)$$

$$\dot{x} = B|_{L_B^+}x \quad \text{e} \quad \dot{x} = B|_{L_B^-}x. \quad (3.3)$$

Note que as soluções de  $\dot{x} = Ax$  podem ser escritas unicamente como soma das soluções das equações 3.2 e que as soluções de  $\dot{x} = Bx$  podem ser escritas unicamente como soma das soluções das equações 3.3.

Como os subespaços estáveis e instáveis têm a mesma dimensão, pelo teorema 3.19, existem as equivalências topológicas  $h^-$  e  $h^+$ , isto é, existem homeomorfismos

$$h^- : L_A^- \longrightarrow L_B^- \text{ tal que } h^-(e^{At}x) = e^{\tau_x(t)}h^-(x), \text{ onde } x \in L_A^-;$$

$$h^+ : L_A^+ \longrightarrow L_B^+ \text{ tal que } h^+(e^{At}x) = e^{\tau_x(t)}h^+(x), \text{ onde } x \in L_A^+,$$

onde  $\tau_x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação contínua.

Logo, definimos uma equivalência topológica  $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ , de  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , por

$$h(x) = h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x)).$$

$h$  é bijetora e sua inversa  $h^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  é dada por

$$h^{-1}(x) = (h^-)^{-1}(\pi_B^-(x)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x)).$$

Com efeito, considerando que  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ , temos que

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ h(x) &= h^{-1}(h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= h^{-1}(h^-(\pi_A^-(x_A^- \oplus x_A^+)) + h^+(\pi_A^+(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^{-1}(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+)) \\
&= (h^-)^{-1}(\pi_B^-(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+))) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+))) \\
&= (h^-)^{-1}(h^-(x_A^-)) + (h^+)^{-1}(h^+(x_A^+)) \\
&= x_A^- + x_A^+ \\
&= x,
\end{aligned}$$

e, considerando agora que  $x = x_B^- \oplus x_B^+$ , temos que

$$\begin{aligned}
h \circ h^{-1}(x) &= h((h^-)^{-1}(\pi_B^-(x)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x))) \\
&= h((h^-)^{-1}(\pi_B^-(x_B^- \oplus x_B^+)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x_B^- \oplus x_B^+))) \\
&= h((h^-)^{-1}(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+)) \\
&= h^-(\pi_A^-(h^-(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+))) + h^+(\pi_A^+((h^-)^{-1}(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+))) \\
&= h^-((h^-)^{-1}(x_B^-)) + h^+((h^+)^{-1}(x_B^+)) \\
&= x_B^- + x_B^+ \\
&= x.
\end{aligned}$$

Assim,  $h$  e  $h^{-1}$  são contínuas, pois  $h^-$ ,  $h^+$ ,  $(h^-)^{-1}$  e  $(h^+)^{-1}$  são contínuas e soma de funções contínuas é contínua. Segue que  $h$  é um homeomorfismo.

Além disso, sabendo que  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ ,  $h$  satisfaz a condição de equivalência

$$\begin{aligned}
h(e^{At}x) &= h^-(\pi_A^-(e^{At}x)) + h^+(\pi_A^+(e^{At}x)) \\
&= h^-(\pi_A^-(e^{At}(x_A^- \oplus x_A^+))) + h^+(\pi_A^+(e^{At}(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^-(\pi_A^-(e^{At}x_A^- \oplus e^{At}x_A^+)) + h^+(\pi_A^+(e^{At}x_A^- \oplus e^{At}x_A^+)) \\
&= h^-(e^{At}x_A^-) + h^+(e^{At}x_A^+) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(x_A^-) + e^{B\tau_x(t)}h^+(x_A^+) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(\pi_A^-(x_A^- \oplus x_A^+)) + e^{B\tau_x(t)}h^+(\pi_A^+(x_A^- \oplus x_A^+)) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h^-(\pi_A^-(x)) + e^{B\tau_x(t)}h^+(\pi_A^+(x)) \\
&= e^{B\tau_x(t)}(h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= e^{B\tau_x(t)}h(x).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, suponha que os fluxos lineares  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{R}^d$  são topologicamente conjugados. Assim, existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que  $h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x)$ , ou melhor, existe um homeomorfismo

$$h : L_A^- + L_A^+ \rightarrow L_B^- + L_B^+$$

tal que

$$h(e^{At}(x_A^- + x_A^+)) = e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+),$$

pois  $A$  e  $B$  são hiperbólicas.

Note que o 0 é o único ponto fixo de  $\Phi$  e  $\Psi$ , pois  $A$  e  $B$  são hiperbólicas. Como a aplicação de conjugação leva ponto fixo em ponto fixo, temos que  $h(0) = 0$ .

Considere  $x_A^- \in L_A^-$ . Então, quando  $t \rightarrow +\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^- \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(e^{At}x_A^-) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}h(x_A^-) = e^{\lim_{t \rightarrow +\infty} Bt}h(x_A^-) = 0,$$

o que implica que  $h(x_A^-) \in L_B^-$ , ou seja,  $h(L_A^-) \subset L_B^-$ .

Considere, agora,  $x_A^+ \in L_A^+$ . Então, quando  $t \rightarrow -\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^+ \rightarrow 0.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h(e^{At}x_A^-) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{Bt}h(x_A^-) = e^{\lim_{t \rightarrow -\infty} Bt}h(x_A^-) = 0,$$

o que implica que  $h(x_A^+) \in L_B^+$ , ou seja,  $h(L_A^+) \subset L_B^+$ .

Chamaremos de  $h_1$  e  $h_2$  as restrições de  $h$  aos subespaços  $L_A^-$  e  $L_A^+$ , respectivamente, isto é:

$$h_1 = h|_{L_A^-} : L_A^- \longrightarrow L_B^-;$$

$$h_2 = h|_{L_A^+} : L_A^+ \longrightarrow L_B^+.$$

Seja  $x_B^- \in L_B^-$ . Como  $h$  é sobrejetora, existe  $x_A^- + x_A^+ \in L_A^- + L_A^+$  tal que  $h(x_A^- + x_A^+) = x_B^-$ .

Mas,  $e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) = e^{Bt}x_B^-$  e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}x_B^- = 0,$$

isto é,

$$e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) = h(e^{At}x_A^- + e^{At}x_A^+).$$

Segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h(e^{At}x_A^- + e^{At}x_A^+) = 0 \implies x_A^+ = 0,$$

pois,  $e^{At}x_A^- \rightarrow 0$  e  $e^{At}x_A^+ \rightarrow +\infty$ , quando  $t \rightarrow +\infty$ .

Logo, para todo  $x_B^- \in L_B^-$ , existe  $x_A^- \in L_A^-$  tal que  $h_1(x_A^-) = h(x_A^- + 0) = x_B^-$ , ou seja,  $h_1$  é sobrejetora. Além disso,  $h_1$  também é injetora. De fato,

$$h_1(x_1) = h_1(x_2) \implies h_1(x_1 + 0) = h_1(x_2 + 0) \implies h(x_1 + 0) = h(x_2 + 0) \implies x_1 = x_2.$$

Assim,  $h_1$  é bijetora.

Analogamente, se mostra que  $h_2$  é bijetora.

Portanto, as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis de  $A$  e  $B$  coincidem.  $\square$

**Exemplo 3.24.** *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Note que a matriz  $A$  possui  $\mu_1 = -3 + i$ ,  $\mu_2 = -3 - i$ ,  $\mu_3 = 2 + 5i$  e  $\mu_4 = 2 - 5i$  como autovalores, e que a matriz  $B$  possui  $\gamma_1 = -7 + 2i$ ,  $\gamma_2 = -7 - 2i$ ,  $\gamma_3 = 4 + i$  e  $\gamma_4 = 4 - i$  como autovalores. Como todo autovalor (de  $A$  e  $B$ ) tem parte real não nula,  $A$  e  $B$  são matrizes hiperbólicas. Além disso,  $L_A^- = L(-3) = 2$ ,  $L_A^+ = L(2) = 2$ ,  $L_B^- = L(-7) = 2$  e  $L_B^+ = L(4) = 2$ .

Portanto, as dimensões dos subespaços estáveis (instáveis) de  $A$  e  $B$  são iguais e, então, pelo teorema acima, os fluxos  $e^{At}$  e  $e^{Bt}$ , associados aos sistemas lineares  $\dot{x} = Ax$  e  $\dot{x} = Bx$ , respectivamente, são topologicamente conjugados.

**Proposição 3.25.** *Seja a equação diferencial  $\dot{x} = Ax$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  é hiperbólica. Se  $B \in gl(d, \mathbb{R})$  tem entradas suficientemente próximas das entradas de  $A$ , então  $B \in gl(d, \mathbb{R})$  é hiperbólica e  $\dot{x} = Bx$  induz um fluxo  $e^{Bt}$  tal que  $\dim L_A^- = \dim L_B^-$  e  $\dim L_A^+ = \dim L_B^+$ .*

**Demonstração:** Como por hipótese,  $B$  está suficientemente próxima de  $A$ , então o polinômio característico de  $B$ ,  $p_B$ , está suficientemente próximo do polinômio característico de  $A$ ,  $p_A$ .

Sendo, assim, as raízes dos polinômios  $p_A$  e  $p_B$  (autovalores de  $A$  e de  $B$ ) também estão suficientemente próximas uma das outras.

Daí, concluímos que o número de autovalores com parte real positiva de  $A$  e  $B$  são os mesmos. Analogamente,  $A$  e  $B$  têm o mesmo número de autovalores com parte real negativa.

Portanto,  $\dim L_A^- = \dim L_B^-$  e  $\dim L_A^+ = \dim L_B^+$ . □

**Proposição 3.26.** *Uma matriz  $A$  é hiperbólica se, e somente se, é estruturalmente estável em  $gl(d, \mathbb{R})$ , isto é, existe uma vizinhança  $U \subset gl(d, \mathbb{R})$  de  $A$  tal que todo  $B \in U$  é topologicamente equivalente a  $A$ .*

**Demonstração:** Uma matriz  $A$  é hiperbólica se todo autovalor de  $A$  tem parte real não-nula. Os autovalores de uma matriz  $B$  numa  $\epsilon$ -vizinhança de  $A$ , diferem dos autovalores de  $A$  por termos que dependem de  $\epsilon$ . Assim, tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno, podemos afirmar que os autovalores de  $B$  estão próximos o bastante dos autovalores de  $A$ , pois suas partes reais são não-nulas. Assim,  $A$  e  $B$  tem o mesmo número,  $n_s(n_u)$ , de autovalores com

partes reais negativas (positivas). Daí, as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis de  $A$  e  $B$  coincidem. Logo,  $A$  e  $B$  são topologicamente equivalentes e, conseqüentemente,  $A$  é estruturalmente estável.

Reciprocamente, suponhamos que a matriz  $A$  não seja hiperbólica. Então,  $A$  tem pelo menos um autovalor com parte real nula. Contudo,  $B = A + \epsilon I$  é hiperbólica para quase todo  $\epsilon \neq 0$  e pode ser tomada arbitrariamente próxima de  $A$  (tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno). Assim, a matriz não hiperbólica  $A$  não é estruturalmente estável. Portanto, uma matriz estruturalmente estável é hiperbólica.  $\square$

O conjunto das matrizes hiperbólicas (aqui denotaremos por  $H(d, \mathbb{R}^d)$ ) em  $gl(d, \mathbb{R})$  é muito grande. Este é o significado do próximo resultado.

**Proposição 3.27.** *O conjunto das matrizes hiperbólicas é aberto e denso em  $gl(d, \mathbb{R})$ .*

**Demonstração:** Cada matriz  $A$  está em uma  $\epsilon$ -vizinhança,  $N_\epsilon(A)$ . Como  $N_\epsilon(A)$  é aberto, cada um de seus elementos deve ser estruturalmente estável, isto é,  $N_\epsilon(A) \subseteq H(d, \mathbb{R}^d)$ . Portanto,  $H(d, \mathbb{R}^d)$  é aberto, pois é união de conjuntos abertos.

$H(d, \mathbb{R}^d)$  é denso em  $gl(d, \mathbb{R})$ . De fato, suponha  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  com  $A \notin H(d, \mathbb{R}^d)$ . Então, existe uma matriz  $B = A + \epsilon I$  que é hiperbólica para quase todo  $\epsilon \neq 0$  e pode ser tomada arbitrariamente próxima de  $A$ , tomando  $\epsilon$  suficientemente pequeno. Assim, todo elemento de  $gl(d, \mathbb{R})$  está arbitrariamente próximo dos elementos de  $H(d, \mathbb{R}^d)$ . Portanto,  $H(d, \mathbb{R}^d)$  é um subconjunto denso de  $gl(d, \mathbb{R})$ .  $\square$

Como um possível trabalho, podemos analisar os resultados descritos neste capítulo, trocando o  $\mathbb{R}^n$  por um grupo de Lie, em especial, por um grupo de Lie nilpotente.

---

# Estabilidade e conjugação topológica para equações diferenciais afins

---

Neste capítulo estamos interessados em observar os resultados obtidos no contexto linear, e generalizá-los para equações diferenciais afins. Assim, também queremos comparar sistemas afins e saber em que condições dois sistemas têm o mesmo comportamento. Utilizamos basicamente o trabalho de Santana e Coloniuss em [3].

Definiremos fluxo afim, que é soma de um fluxo linear mais uma parte afim. Falaremos em expoente de Lyapunov, relacionando-o com os espaços de Lyapunov. Introduziremos pontos fixos e os caracterizaremos com respeito a estabilidade. Observaremos a importância deles no contexto afim, pois é a partir deles que podemos relacionar fluxos afim e linear.

E, por último, mostraremos alguns resultados sobre conjugação topológica. O principal resultado relaciona conjugação topológica com os subespaços estáveis das matrizes associadas aos sistemas afins. Daí, concluiremos que a parte afim não influencia na conjugação dos fluxos afins.

## 4.1 Equações diferenciais afins

Nesta seção falaremos um pouco sobre equação diferencial afim. Além disso, definiremos ponto fixo e mostraremos alguns resultados que o envolve. Dentre os principais, estão a relação entre fluxos afim e linear, e a definição de estabilidade.

Uma equação diferencial afim é uma equação do tipo  $\dot{x}(t) = Ax(t) + a$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$

e  $a \in \mathbb{R}^d$ . Uma função diferenciável  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ , que satisfaz a equação  $\dot{x}(t) = Ax(t) + a$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , é chamada de solução de  $\dot{x} = Ax + a$ .

O problema de valor inicial para uma equação diferencial afim  $\dot{x}(t) = Ax(t) + a$ , consiste em encontrar, para um dado valor inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , uma solução  $x(\cdot, x_0)$  tal que  $x(0, x_0) = x_0$ .

**Teorema 4.1.** *Para cada problema de valor inicial dado por  $\dot{x} = Ax + a$  com  $x(0, x_0) = x_0$ , onde  $(A, a) \in gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  e  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , a solução  $x(\cdot, x_0)$  é única e dada por*

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads.$$

**Demonstração:** Considere o sistema  $\dot{x} = Ax + a$  com  $x(0, x_0) = x_0$ . Multiplicando a equação  $\dot{x} = Ax + a$  à esquerda por  $e^{-As}$ , obtemos

$$\frac{d}{ds}[e^{-As}x(s)] = e^{-As}\frac{d}{ds}x(s) - Ae^{-As}x(s) = e^{-As}a,$$

para cada  $t = s \in \mathbb{R}$ .

Integrando de 0 a  $t$ , temos

$$\int_0^t \frac{d}{ds}[e^{-As}x(s)]ds = \int_0^t e^{-As}ads \implies e^{-As}x(s)\Big|_0^t = \int_0^t e^{-As}ads.$$

Assim,

$$e^{-At}x(t) = x_0 + \int_0^t e^{-As}ads.$$

Multiplicando, novamente à esquerda por  $e^{At}$ , concluímos que

$$x(t, x_0) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads.$$

Para mostrar a unicidade, sejam  $y$  e  $z$  duas soluções do sistema  $\dot{x} = Ax + a$ , com mesmo ponto inicial  $x_0$  ou seja,

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + a \quad \text{e} \quad \frac{d}{dt}z(t) = Az(t) + a,$$

onde  $y(0) = x_0 = z(0)$ . Tome  $w(t) = y(t) - z(t)$ . Então,

$$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{dt}(y - z)(t) = A\frac{d}{dt}y(t) + a - A\frac{d}{dt}z(t) - a = A\frac{d}{dt}w(t)$$

e, assim,  $w(t)$  é solução do sistema  $\dot{w}(t) = Aw(t)$ . Contudo, como  $w(0) = y(0) - z(0) = x_0 - x_0 = 0$ , e o sistema  $\dot{w}(t) = Aw(t)$  tem solução única,  $w(t) = 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Logo,  $y = z$ . □



**Observação 4.2.** Note que, para  $A = T^{-1}J_A^{\mathbb{R}}T$  e  $a \in \mathbb{R}^d$ , tem-se

$$\begin{aligned} e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)}ads &= T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}t}T + \int_0^t T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}t}T \cdot T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}(-s)}Tads \\ &= T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}t}T + \int_0^t T^{-1}e^{J_A^{\mathbb{R}}(t-s)}Tads. \end{aligned}$$

Vamos ilustrar o resultado acima olhando para o seguinte exemplo.

**Exemplo 4.3.** Seja  $B$  um bloco de Jordan de dimensão  $n = 2m$  associado ao autovalor complexo  $\mu = \lambda + i\delta$  de uma matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Então, considerando

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & -\delta \\ \delta & \lambda \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \hat{D} = \begin{pmatrix} \cos \delta t & -\sin \delta t \\ \sin \delta t & \cos \delta t \end{pmatrix},$$

com

$$B = \begin{pmatrix} D & I & & & \\ & D & I & & \\ & & D & \ddots & \\ & & & \ddots & I \\ & & & & D \end{pmatrix}, \quad \text{tem-se } e^{Bt} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} \hat{D} & t\hat{D} & \frac{t^2}{2!}\hat{D} & \cdots & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\hat{D} \\ & \hat{D} & t\hat{D} & \ddots & \vdots \\ & & \hat{D} & \ddots & \frac{t^2}{2!}\hat{D} \\ & & & \ddots & t\hat{D} \\ & & & & \hat{D} \end{pmatrix}.$$

Mais explicitamente, considere a solução  $y(t, y_0)$ , de  $\dot{y}(t) = By(t) + b$ ,  $y(0) = y_0$ , onde  $y_0 = [y_1, z_1, \dots, y_m, z_m]^T \in E(A, \mu)$  e  $b = [a_1, b_1, \dots, a_m, b_m]^T$ .

Então, para  $j = 1, \dots, m$ , a  $j$ -ésima componente é dada por:

$$\begin{aligned} y_j(t, y_0) &= e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (y_k \cos \delta t - z_k \sin \delta t) \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \sum_{k=j}^m \frac{(t-s)^{k-j}}{(k-j)!} [a_k \cos \delta(t-s) - b_k \sin \delta(t-s)] ds; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_j(t, y_0) &= e^{\lambda t} \sum_{k=j}^m \frac{t^{k-j}}{(k-j)!} (y_k \cos \delta t + z_k \sin \delta t) \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} \sum_{k=j}^m \frac{(t-s)^{k-j}}{(k-j)!} [a_k \cos \delta(t-s) + b_k \sin \delta(t-s)] ds. \end{aligned}$$

Para uma melhor visualização, vamos abordar o caso particular em que  $m = 2$ . Neste caso,

$$\begin{aligned} y_1(t, y_0) &= e^{\lambda t} [y_1 \cos \delta t - z_1 \sin \delta t] + t(y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t) \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_1 \cos \delta(t-s) - b_1 \sin \delta(t-s)] ds \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_2 \cos \delta(t-s) - b_2 \sin \delta(t-s)] ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1(t, y_0) &= e^{\lambda t} [y_1 \cos \delta t + z_1 \sin \delta t] + t[y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t] \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_1 \cos \delta(t-s) + b_1 \sin \delta(t-s)] ds \\ &+ \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_2 \cos \delta(t-s) + b_2 \sin \delta(t-s)] ds \end{aligned}$$

$$y_2(t, y_0) = e^{\lambda t} [y_2 \cos \delta t - z_2 \sin \delta t] + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_2 \cos \delta(t-s) - b_2 \sin \delta(t-s)] ds$$

$$z_2(t, y_0) = e^{\lambda t} [y_2 \cos \delta t + z_2 \sin \delta t] + \int_0^t e^{\lambda(t-s)} [a_2 \cos \delta(t-s) + b_2 \sin \delta(t-s)] ds.$$

Para analisar propriedades de estabilidade para a equação  $\dot{x} = Ax + a$ , precisamos do seguinte conceito.

**Definição 4.4.** Um ponto  $e_0 \in \mathbb{R}^d$  é um ponto fixo da equação diferencial afim  $\dot{x} = Ax + a$ , se

$$x(t, e_0) = e^{At} e_0 + \int_0^t e^{A(t-s)} a ds = e_0,$$

para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

Recordando um resultado de equação diferencial linear: se todo autovalor de  $A$  tem parte real negativa, então toda solução tende para 0 quando  $t \rightarrow \infty$ . A seguinte proposição dá um resultado análogo para equações diferenciais afins.

**Proposição 4.5.** Suponha que  $A$  é estável, isto é,  $Re(\mu) < 0$ , para todo  $\mu \in \sigma(A)$ . Então,

1. existe um único ponto fixo para  $\dot{x} = Ax + a$ ;

2. quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $x(t, x_0) \rightarrow e_0$ , para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ .

**Demonstração:** (1) Suponha que  $\dot{x} = Ax + a$  possui dois pontos fixos  $e_0$  e  $e_1$ , isto é,  $x(t, e_0) = e_0$  e  $x(t, e_1) = e_1$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Assim,

$$x(t, e_0) = e^{At}e_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads = e_0$$

$$x(t, e_1) = e^{At}e_1 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads = e_1.$$

Logo,

$$x(t, e_0) - x(t, e_1) = e^{At}(e_0 - e_1) = e_0 - e_1.$$

Quando  $t \rightarrow \infty$ ,  $e^{At}(e_0 - e_1) \rightarrow 0$ , isto é,  $e_0 - e_1 = 0$ , donde  $e_0 = e_1$ .

(2) Como  $0 \notin \sigma(A)$ , a matriz  $A$  é invertível e a equação  $0 = Ae_0 + a$  tem uma única solução  $e_0 = -A^{-1}a$ . Como  $e_0 = e^{At}e_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads$ , temos, para todo  $x_0 \in \mathbb{R}^d$ , que

$$\begin{aligned} \|x(t, x_0) - e_0\| &= \|e^{At}x_0 + e^{At}e_0 + \int_0^t e^{A(t-s)}ads\| \\ &= \|e^{At}(x_0 - e_0)\| \rightarrow 0, \end{aligned}$$

quando  $t$  tende para o infinito.

Portanto, quando  $t \rightarrow \infty$ , temos que  $x(t, x_0) \rightarrow e_0$ . □

A partir de agora, discutiremos quão rápido as soluções se aproximam do equilíbrio e definiremos expoentes de Lyapunov, que mede a taxa do crescimento exponencial das soluções.

**Definição 4.6.** *Seja  $x(\cdot, x_0)$  uma solução da equação diferencial afim  $\dot{x} = Ax + a$ . Suponha que  $A$  é invertível e, portanto,  $A$  tem um único ponto fixo  $e_0$ . O expoente de Lyapunov de  $x_0$  é definido como*

$$\lambda(x_0) = \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0) - e_0\|.$$

Com o próximo lema, alguns dos nossos resultados em equação diferencial afim serão consequências imediatas dos resultados correspondentes no contexto linear.

**Lema 4.7.** *Seja  $x(t, x_0), t \in \mathbb{R}$ , solução do sistema  $\dot{x} = Ax + a$  e  $e_0$  seu ponto fixo. Então,  $x(t, x_0) - e_0, t \in \mathbb{R}$  é uma solução de  $\dot{x} = Ax$ , isto é,  $\frac{d}{dt}[x(t, x_0) - e_0] = A[x(t, x_0) - e_0]$ .*

**Demonstração:** Note que  $\frac{d}{dt}[x(t, x_0 - e_0)] = Ax(t, x_0) + a$ , pois  $x(t, x_0)$  é solução do sistema  $\dot{x} = Ax + a$  e  $\frac{d}{dt}(e_0) = 0$ . Por outro lado,  $0 = Ae_0 + a$ . Então,  $a = -Ae_0$ . Segue que,

$$Ax(t, x_0) + a = Ax(t, x_0) - Ae_0 = A[x(t, x_0) - e_0].$$

Portanto,  $\frac{d}{dt}[x(t, x_0) - e_0] = A[x(t, x_0) - e_0]$ . □

O expoente de Lyapunov é determinado pela estrutura de Jordan da matriz  $A$ , como é visto no teorema a seguir.

**Teorema 4.8.** *Suponha que  $A$  é invertível e denote por  $e_0$  seu único ponto fixo. Então, o expoente de Lyapunov  $\lambda(x_0)$  de uma solução  $x(\cdot, x_0)$ , de  $\dot{x} = Ax + a$ , satisfaz*

$$\lambda(x_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{t} \ln \|x(t, x_0) - e_0\| = \lambda_j$$

se, e somente se,  $x_0 - e_0 \in L(\lambda_j)$ .

**Demonstração:** Como, pelo lema anterior,  $x(t, x_0) - e_0$  é uma solução de  $\dot{x} = Ax$ , a afirmação do teorema segue do teorema 2.12. □

Como no caso de equação diferencial linear, o próximo resultado caracteriza estabilidade assintótica e exponencial em termos dos autovalores de  $A$ .

**Teorema 4.9.** *Para uma equação diferencial afim  $\dot{x} = Ax + a$  em  $\mathbb{R}^d$ , as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. o ponto fixo  $e_0 \in \mathbb{R}^d$  é assintoticamente estável;
2. o ponto fixo  $e_0 \in \mathbb{R}^d$  é exponencialmente estável;
3. todos os expoentes de Lyapunov são negativos;
4. O subespaço  $L^-$  satisfaz  $L^- = \mathbb{R}^d$ .

**Demonstração:** Seja  $x(t, x_0)$  uma solução do sistema  $\dot{x} = Ax + a$ . Pelo lema 4.7,  $x(t, x_0) - e_0$  é uma solução do sistema linear  $\dot{x} = Ax$ , onde  $x_0 - e_0$  é o valor inicial da solução  $x(t, x_0) - e_0$ .

Sabemos que a origem é um ponto fixo da equação  $\dot{x} = Ax$ . Além disso, considere a solução  $x(t, x_0) - e_0$ . Observe, pela definição 2.13, que:

1. a origem é estável, se para todo  $\epsilon > 0$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $x(t, x_0) - e_0 \in N(0, \epsilon)$ , para todo  $t \geq 0$ , sempre que  $x_0 - e_0 \in N(0, \delta)$ , isto é equivalente a dizer que  $e_0$  é estável.
2. a origem é assintoticamente estável, se é estável e existe  $\gamma > 0$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, x_0) - e_0 = 0$ , sempre que  $x_0 - e_0 \in N(0, \gamma)$ , ou seja,  $e_0$  é assintoticamente estável.
3. a origem é exponencialmente estável, se é assintoticamente estável e existem  $\alpha, \beta, \eta > 0$  tais que, para todo  $x_0 - e_0 \in N(0, \eta)$ , a solução satisfaz  $\|x(t, x_0) - e_0\| \leq \alpha \|x_0 - e_0\| e^{-\beta t}$ , para todo  $t \geq 0$ , que é mesmo que dizer que  $e_0$  é assintoticamente estável.

Logo, este teorema é uma consequência imediata do teorema 2.15, que é o teorema correspondente para equações diferenciais lineares.  $\square$

## 4.2 Conjugação para equações diferenciais afins

Nesta seção estudaremos a equação diferencial afim  $\dot{x} = Ax + a$ , com  $(A, a) \in gl(d, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ , do ponto de vista dos sistemas dinâmicos ou fluxos em  $\mathbb{R}^d$ . E, também, analisaremos as condições para que dois sistemas afins sejam  $C^k$ -conjugados. Primeiro introduziremos o fluxo afim associado a esta equação diferencial.

**Lema 4.10.** *Para  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a \in \mathbb{R}^d$ , as soluções de  $\dot{x} = Ax + a$  formam um sistema dinâmico contínuo em  $\mathbb{R}^d$ .*

**Demonstração:** A aplicação  $\Phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  definida por

$$\Phi(t, x) = x(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)} a ds,$$

tem a seguinte propriedade:

$$\Phi(0, x) = e^{A \cdot 0}x + \int_0^0 e^{A(0-s)} a ds = x,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$ . Além disso,  $\Phi(u+t, x) = \Phi(u, \Phi(t, x))$ , para todo  $u, t \in \mathbb{R}$  e  $x \in \mathbb{R}^d$ . De fato,

$$\Phi(u, \Phi(t, x)) = e^{A(u+t)}x + \int_0^t e^{A(u+t-s)}ads + \int_0^u e^{A(u-v)}adv.$$

Vamos agora, mudar a variável  $v$  para a variável  $s$  na integral  $\int_0^u e^{A(u-v)}adv$ , da seguinte forma: chamamos  $t-s = -v$ , ou seja,  $s = t+v$ . Assim,  $ds = dv$  e,

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } s = t \text{ temos que } v = 0 \\ \text{se } s = u+t \text{ temos que } v = u \end{array} \right\} \implies \int_t^{u+t} e^{A(u+t-s)}ads = \int_0^u e^{A(u-v)}adv.$$

Como  $e^{Ax}$  é integrável para todo  $x$ , concluímos que

$$\begin{aligned} \Phi(u, \Phi(t, x)) &= e^{A(u+t)}x + \int_0^t e^{A(u+t-s)}ads + \int_t^{u+t} e^{A(u+t-s)}ads \\ &= e^{A(u+t)}x + \int_0^{u+t} e^{A(u+t-s)}ads \\ &= \Phi(u+t, x). \end{aligned}$$

Portanto,  $\Phi$  é um sistema dinâmico. □

Note que um fluxo afim

$$\Phi(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads,$$

é escrito como soma de um fluxo linear:  $\Omega(t, x) = e^{At}x$  mais uma parte afim:  $\int_0^t e^{A(t-s)}ads$ .

A caracterização de  $C^k$ -conjugação de fluxos afins é dada pela proposição a seguir.

**Proposição 4.11.** *Considere dois fluxos afins  $\Phi$  (associado com  $\dot{x} = Ax + a$ ) e  $\Psi$  (associado com  $\dot{x} = Bx + b$ ) em  $\mathbb{R}^d$ , onde  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{R}^d$ . Assuma que  $A$  e  $B$  são invertíveis e, portanto, existem únicos pontos fixos  $e_A$  e  $e_B$ , respectivamente. Então, as afirmações a seguir são equivalentes:*

1.  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados para  $k \geq 1$ ;
2.  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados;
3.  $A$  e  $B$  são afim semelhantes, isto é,  $A = TBT^{-1}$  e  $Ta = b$ , para alguma  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ .

**Demonstração:** Note que os fluxos são dados por:

$$\Phi(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \quad e \quad \Psi(t, x) = e^{Bt}x + \int_0^t e^{B(t-s)}bds.$$

Agora, vamos mostrar as equivalências.

(1)  $\Rightarrow$  (2) Seja  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  uma  $C^k$ -conjugação,  $k \geq 1$ . Assim,

$$h \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = e^{Bt}h(x) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e para todo  $t > 0$ . Derivando em relação a  $x$ , temos

$$Dh \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) e^{At} = e^{Bt}Dh(x).$$

Calculando em  $x = e_0$ , com  $T^{-1} := Dh(e_0)$ , obtemos:

$$T^{-1}e^{At} = e^{Bt}T^{-1}, \text{ para todo } t \in \mathbb{R}.$$

Derivando, agora, em relação a  $t$  e aplicando em  $t = 0$ , temos:  $T^{-1}A = BT^{-1}$ . Como  $h$  é um difeomorfismo,  $T^{-1} := Dh(0)$  é invertível e, portanto, define uma conjugação linear.

(2)  $\Rightarrow$  (1) Suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são linearmente conjugados. Então, existe uma aplicação de conjugação  $h$  que satisfaz

$$h \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = e^{Bt}h(x) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds,$$

para todo  $x \in \mathbb{R}$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Daí, o resultado segue.

(3)  $\Rightarrow$  (2) Observe que

$$A = TBT^{-1} \Leftrightarrow e^{At} = Te^{Bt}T^{-1} \Leftrightarrow T^{-1}e^{At} = e^{Bt}T^{-1}.$$

Assim, definimos uma aplicação  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  por  $h(x) = T^{-1}(x)$ . Então, a propriedade de conjugação segue de:

$$\begin{aligned} h(\Phi(t, x)) &= h \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = T^{-1} \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) \\ &= T^{-1}e^{At}x + T^{-1} \int_0^t e^{A(t-s)}ads = e^{Bt}T^{-1}x + \int_0^t T^{-1}e^{A(t-s)}ads \\ &= e^{Bt}T^{-1}x + \int_0^t e^{B(t-s)}T^{-1}ads = e^{Bt}h(x) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds \\ &= \Psi(t, h(x)). \end{aligned}$$

Portanto, os fluxos  $\Phi$  e  $\Psi$  são  $C^k$ -conjugados.

(2)  $\Rightarrow$  (3) Mostraremos primeiro que  $A = TBT^{-1}$ .

Como existe uma aplicação de conjugação e ela é linear, por hipótese, temos, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , que

$$h \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = e^{Bt}h(x) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds.$$

Derivando em relação a  $x$ , encontramos

$$Dh \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) e^{At} = e^{Bt}Dh(x).$$

Considerando  $T^{-1} := Dh(0)$  e observando que  $h$  é linear e um difeomorfismo, temos que

$$T^{-1}e^{At} = Dh(0)e^{At} = e^{Bt}Dh(0) = e^{Bt}T^{-1}. \quad (4.1)$$

Logo,  $A = TBT^{-1}$ .

Agora, vamos mostrar que  $Ta = b$ , para alguma  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ . Sabemos que

$$T^{-1} \left( e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = e^{Bt}T^{-1}x + \int_0^t e^{B(t-s)}bds.$$

Usando 4.1, temos, para todo  $t \in \mathbb{R}$ , que

$$T^{-1} \int_0^t e^{A(t-s)}ads = e^{Bt}T^{-1}x - T^{-1}e^{At}x + \int_0^t e^{B(t-s)}bds = \int_0^t e^{B(t-s)}bds.$$

Então, usando 4.1 novamente, encontra-se para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} e^{Bt} \int_0^t e^{-Bs}bds &= \int_0^t e^{B(t-s)}bds \\ &= T^{-1} \int_0^t e^{A(t-s)}ads = T^{-1}e^{At} \int_0^t e^{-As}ads \\ &= e^{Bt}T^{-1} \int_0^t e^{-As}ads = e^{Bt} \int_0^t T^{-1}e^{-As}ads \\ &= e^{Bt} \int_0^t e^{-Bs}T^{-1}ads. \end{aligned}$$

Assim, para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{Bt} \int_0^t e^{-Bs}bds = e^{Bt} \int_0^t e^{-Bs}T^{-1}ads, \text{ donde } e^{-Bt}b = e^{-Bt}T^{-1}a.$$



Portanto,  $T^{-1}a = b$ .

□

Usando a proposição acima, podemos relacionar os fluxos afins associados a uma matriz  $A$  e sua forma de Jordan.

**Corolário 4.12.** *Considere  $\dot{x} = Ax + a$ , com  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a \in \mathbb{R}^d$ , e seja  $\Phi$  o fluxo associado a esse sistema. Além disso, assuma que  $A$  é invertível. Se  $\Psi$  é o fluxo associado ao sistema*

$$\dot{x} = J_A^{\mathbb{R}}x + T^{-1}a,$$

onde  $A = TJ_A^{\mathbb{R}}T^{-1}$ , com  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ , então existe uma conjugação linear  $h$  de  $\Phi$  a  $\Psi$ .

**Demonstração:** Como  $A$  e  $J_A^{\mathbb{R}}$  são semelhantes, isto é,  $A = TJ_A^{\mathbb{R}}T^{-1}$  para  $T \in Gl(d, \mathbb{R})$ , e  $T(T^{-1}a) = a$ , segue, pela proposição anterior, que existe uma conjugação linear  $h$  de  $\Phi$  a  $\Psi$ . □

Para o caso afim também existe uma norma adaptada para a matriz  $A \in gl(d, \mathbb{R})$ . Este é o significado da próxima proposição.

**Proposição 4.13.** *Seja  $\Phi$  o sistema dinâmico associado a  $\dot{x} = Ax + a$ , onde  $A \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a \in \mathbb{R}^d$ . Assumindo que  $A$  é invertível, então existe um único ponto fixo  $e_0 = -A^{-1}a$  e as seguintes propriedades são equivalentes:*

1. *existem uma norma  $\|\cdot\|_*$  sobre  $\mathbb{R}^d$  e  $\alpha > 0$  tais que, para todo  $x \in \mathbb{R}^d$ , tem-se  $\|\Phi(t, x) - e_0\|_* \leq e^{-\alpha t}\|x - e_0\|_*$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
2. *para toda norma  $\|\cdot\|$  sobre  $\mathbb{R}^d$ , existem  $\alpha > 0$  e  $c > 0$  com  $\|\Phi(t, x) - e_0\| \leq ce^{-\alpha t}\|x - e_0\|$ , para todo  $t \geq 0$ ;*
3. *para todo autovalor  $\mu$  de  $A$  tem-se  $Re(\mu) < 0$ .*

**Demonstração:** Como a matriz  $A$  é inversível, a equação  $0 = Ae_0 + a$  tem única solução dada por  $e_0 = -A^{-1}a$ .

O item (1) implica (2), pois todas as normas sobre  $\mathbb{R}^d$  são equivalentes. Os itens (2) e (3) são equivalentes pelo teorema 4.9. Falta mostrar que (2) implica (1). Sabemos que

$\Phi(t, x_0) - e_0$  é uma solução de  $\dot{x} = Ax$  com valor inicial  $x(0, x_0) = x_0 - e_0$ . Assim, a proposição 3.15 mostra que existe uma norma  $\|\cdot\|_*$  sobre  $\mathbb{R}^d$  satisfazendo (1).  $\square$

No resultado a seguir, mostraremos a existência de conjugação topológica para sistemas afins estáveis. Como no caso linear, esse resultado relaciona conjugação topológica e as partes reais dos autovalores das matrizes  $A$  e  $B$ .

**Teorema 4.14.** *Considere os sistemas dinâmicos  $\Phi$  e  $\Psi$  associados aos sistemas  $\dot{x} = Ax + a$  e  $\dot{x} = Bx + b$ , respectivamente, onde  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{R}^d$ . Se todos os autovalores de  $A$  e  $B$  têm partes reais negativas, então os fluxos  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados.*

**Demonstração:** Note que os fluxos são dados por:

$$\Phi(t, x) = e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \quad e \quad \Psi(t, x) = e^{Bt}x + \int_0^t e^{B(t-s)}bds.$$

Como todos os autovalores de  $A$  e  $B$  têm partes reais negativas, então, pela proposição 3.19, existe um homeomorfismo  $h$  tal que

$$h(e^{At}x) = e^{Bt}h(x), \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \text{ e todo } x \in \mathbb{R}^d.$$

Além disso, pela proposição 4.5, existem únicos pontos fixos,  $e_A$  e  $e_B$ , respectivamente, de  $\dot{x} = Ax + a$  e  $\dot{x} = Bx + b$ .

Agora, pelo lema 4.7, temos que

$$\Phi(t, x) - e_A \text{ é uma solução de } \dot{x} = Ax + a \text{ com valor inicial } x - e_A,$$

$$\Psi(t, x) - e_B \text{ é uma solução de } \dot{x} = Bx + b \text{ com valor inicial } x - e_B.$$

Segue que

$$\Phi(t, x) - e_A = e^{At}(x - e_A) \text{ e } \Psi(t, x) - e_B = e^{Bt}(x - e_B).$$

A propriedade da conjugação de  $h$  implica que

$$h(e^{At}(x - e_A)) = e^{Bt}h(x - e_A) = e^{Bt}(h(x - e_A) + e_B - e_B).$$

Logo,

$$h(\Phi(t, x) - e_A) = \Psi(t, h(x - e_A) + e_B) - e_B.$$

Defina  $H : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  por  $H(x) = h(x - e_A) + e_B$ .

(i)  $H$  satisfaz a propriedade de conjugação.

De fato,

$$\begin{aligned} H(\Phi(t, x)) &= h(\Phi(t, x) - e_A) + e_B \\ &= \Psi(t, h(x - e_A) + e_B) - e_B + e_B \\ &= \Psi(t, H(x)). \end{aligned}$$

(ii)  $H$  é homeomorfismo.

Com efeito, como  $h$  é homeomorfismo e  $H(x) = h(x - e_A) + e_B$ , segue que  $H$  é homeomorfismo.

Portanto,  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados.  $\square$

**Exemplo 4.15.** *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -2 \\ 2 & -7 \end{pmatrix},$$

as matrizes hiperbólicas dadas no exemplo 3.21. Como os dois autovalores de  $A$  e  $B$  têm partes reais negativas, os fluxos

$$e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} a ds \quad e \quad e^{Bt} + \int_0^t e^{B(t-s)} b ds$$

são topologicamente conjugados.

Agora, apresentaremos o resultado mais importante dessa seção. Com este resultado podemos garantir que, para equações diferenciais afins, relacionadas a matrizes hiperbólicas, com os subespaços estáveis tendo as mesmas dimensões, os fluxos associados a essas equações são topologicamente conjugados.

**Teorema 4.16.** *Considere os sistemas dinâmicos  $\Phi$  e  $\Psi$  associados aos sistemas  $\dot{x} = Ax + a$  e  $\dot{x} = Bx + b$ , respectivamente, onde  $A, B \in gl(d, \mathbb{R})$  e  $a, b \in \mathbb{R}^d$ . Suponha que  $A$  e  $B$  são hiperbólicas. Então,  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados se, e somente se, as dimensões dos subespaços estáveis (e, portanto, a dimensão dos subespaços instáveis) de  $A$  e  $B$  coincidem.*

**Demonstração:** Se  $A$  e  $B$  são hiperbólicas, então  $A$  e  $B$  não têm autovalores com parte real nula. Assim, podemos decompor  $\mathbb{R}^d$  como:

$$\mathbb{R}^d = L_A^- \oplus L_A^+ \quad \text{e} \quad \mathbb{R}^d = L_B^- \oplus L_B^+,$$

onde  $L_A^+$  e  $L_A^-$  ( $L_B^+$  e  $L_B^-$ ) denotam, respectivamente, os subespaços instáveis e estáveis de  $A$  (de  $B$ ). Denote as projeções naturais por:

$$\begin{aligned} \pi_A^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^- & \pi_A^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_A^+ \\ x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^- & x_A = x_A^- \oplus x_A^+ &\longmapsto x_A^+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_B^- : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^- & \pi_B^+ : \mathbb{R}^d &\longrightarrow L_B^+ \\ x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^- & x_B = x_B^- \oplus x_B^+ &\longmapsto x_B^+ \end{aligned}$$

Os subespaços  $L_A^+$ ,  $L_A^-$ ,  $L_B^+$  e  $L_B^-$  são invariantes por  $A$  e  $B$ , respectivamente. Considere as equações diferenciais afins:

$$\dot{x} = A|_{L_A^+} x + \pi_A^+ a \quad \text{e} \quad \dot{x} = A|_{L_A^-} x + \pi_A^- a \quad (4.2)$$

$$\dot{x} = B|_{L_B^+} x + \pi_B^+ b \quad \text{e} \quad \dot{x} = B|_{L_B^-} x + \pi_B^- b \quad (4.3)$$

Note que as soluções de  $\dot{x} = Ax + a$  podem ser escritas unicamente como soma das soluções das equações 4.2 e que as soluções de  $\dot{x} = Bx + b$  podem ser escritas unicamente como soma das soluções das equações 4.3.

Como os subespaços estáveis e instáveis têm a mesma dimensão, pelo teorema 4.14, existem as conjugações topológicas  $h^-$  e  $h^+$ , isto é, existem homeomorfismos

$$h^- : L_A^- \longrightarrow L_B^-, \text{ tal que } h^-(\Phi(t, x_A^-)) = \Psi(t, h^-(x_A^-)), \text{ para } x_A^- \in L_A^-$$

$$h^+ : L_A^+ \longrightarrow L_B^+, \text{ tal que } h^+(\Phi(t, x_A^+)) = \Psi(t, h^+(x_A^+)), \text{ para } x_A^+ \in L_A^+.$$

Logo, definimos uma conjugação topológica  $h : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ , de  $\Phi$  e  $\Psi$ , por

$$h(x) = h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x)).$$

$h$  é bijetora e sua inversa  $h^{-1} : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$  é dada por

$$h^{-1}(x) = (h^-)^{-1}(\pi_B^-(x)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x)).$$

Com efeito, considerando  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ , temos que

$$\begin{aligned}
h^{-1} \circ h(x) &= h^{-1}(h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= h^{-1}(h^-(\pi_A^-(x_A^- \oplus x_A^+)) + h^+(\pi_A^+(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^{-1}(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+)) \\
&= (h^-)^{-1}(\pi_B^-(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+))) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(h^-(x_A^-) + h^+(x_A^+))) \\
&= (h^-)^{-1}(h^-(x_A^-)) + (h^+)^{-1}(h^+(x_A^+)) \\
&= x_A^- + x_A^+ \\
&= x
\end{aligned}$$

e, considerando agora,  $x = x_B^- \oplus x_B^+$ , temos que

$$\begin{aligned}
h \circ h^{-1}(x) &= h((h^-)^{-1}(\pi_B^-(x)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x))) \\
&= h((h^-)^{-1}(\pi_B^-(x_B^- \oplus x_B^+)) + (h^+)^{-1}(\pi_B^+(x_B^- \oplus x_B^+))) \\
&= h((h^-)^{-1}(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+)) \\
&= h^-(\pi_A^-(h^-(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+))) + h^+(\pi_A^+((h^-)^{-1}(x_B^-) + (h^+)^{-1}(x_B^+))) \\
&= h^-((h^-)^{-1}(x_B^-)) + h^+((h^+)^{-1}(x_B^+)) \\
&= x_B^- + x_B^+ \\
&= x.
\end{aligned}$$

Assim,  $h$  e  $h^{-1}$  são contínuas, pois  $h^-$ ,  $h^+$ ,  $(h^-)^{-1}$  e  $(h^+)^{-1}$  são contínuas e soma de funções contínuas é contínua. Segue que  $h$  é um homeomorfismo.

Além disso, sabendo que  $x = x_A^- \oplus x_A^+$ ,  $h$  satisfaz a condição de conjugação

$$\begin{aligned}
h(\Phi(t, x)) &= h^-(\pi_A^-(\Phi(t, x))) + h^+(\pi_A^+(\Phi(t, x))) \\
&= h^-(\pi_A^-(\Phi(t, x_A^- \oplus x_A^+))) + h^+(\pi_A^+(\Phi(t, x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= h^-(\pi_A^-(\Phi(t, x_A^-) \oplus \Phi(t, x_A^+))) + h^+(\pi_A^+(\Phi(t, x_A^-) \oplus \Phi(t, x_A^+))) \\
&= h^-(\Phi(t, x_A^-)) + h^+(\Phi(t, x_A^+)) \\
&= \Psi(t, h^-(x_A^-)) + \Psi(t, h^+(x_A^+)) \\
&= \Psi(t, h^-(\pi_A^-(x_A^- \oplus x_A^+))) + \Psi(t, h^+(\pi_A^+(x_A^- \oplus x_A^+))) \\
&= \Psi(t, h^-(\pi_A^-(x))) + \Psi(t, h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= \Psi(t, h^-(\pi_A^-(x)) + h^+(\pi_A^+(x))) \\
&= \Psi(t, h(x)).
\end{aligned}$$

Para mostrar a recíproca, suponhamos que os fluxos afins  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{R}^d$  são topologicamente conjugados. Assim, existe um homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  tal que

$$h\left(e^{At}x + \int_0^t e^{A(t-s)}ads\right) = e^{Bt}h(x) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds,$$

ou melhor, existe um homeomorfismo

$$h : L_A^- + L_A^+ \rightarrow L_B^- + L_B^+$$

tal que

$$h\left(e^{At}(x_A^- + x_A^+) + \int_0^t e^{A(t-s)}ads\right) = e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds,$$

pois  $A$  e  $B$  são hiperbólicas.

Considere  $x_A^- \in L_A^-$ . Então, quando  $t \rightarrow +\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^- + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \rightarrow e_A.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} h\left(e^{At}x_A^- + \int_0^t e^{A(t-s)}ads\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{Bt}h(x_A^-) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds = e_B,$$

o que implica que  $h(x_A^-) \in L_B^-$ , ou seja,  $h(L_A^-) \subset L_B^-$ .

Considere, agora,  $x_A^+ \in L_A^+$ . Então, quando  $t \rightarrow -\infty$  temos que

$$e^{At}x_A^+ + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \longrightarrow e_A.$$

Logo,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} h \left( e^{At}x_A^- + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^{Bt}h(x_A^-) + \int_0^t e^{A(t-s)}ads = e_B,$$

o que implica que  $h(x_A^+) \in L_B^+$ , ou seja,  $h(L_A^+) \subset L_B^+$ .

Chamaremos de  $h_1$  e  $h_2$  as restrições de  $h$  aos subespaços  $L_A^-$  e  $L_A^+$ , respectivamente, isto é:

$$h_1 = h|_{L_A^-} : L_A^- \longrightarrow L_B^-$$

$$h_2 = h|_{L_A^+} : L_A^+ \longrightarrow L_B^+.$$

Seja  $x_B \in L_B^-$ . Como  $h$  é sobrejetora, existe  $x_A^- + x_A^+ \in L_A^- + L_A^+$  tal que  $h(x_A^- + x_A^+) = x_B^-$ .

Mas,

$$e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds = e^{Bt}x_B^- + \int_0^t e^{B(t-s)}bds$$

e

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left( e^{Bt}x_B^- + \int_0^t e^{B(t-s)}bds \right) = e_B,$$

isto é,

$$e^{Bt}h(x_A^- + x_A^+) + \int_0^t e^{B(t-s)}bds = h(e^{At}x_A^- + e^{At}x_A^+) + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \longrightarrow e_B.$$

Segue que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( h(e^{At}x_A^- + e^{At}x_A^+) + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \right) = e_A \implies x_A^+ = 0,$$

pois

$$e^{At}x_A^- + \int_0^t e^{A(t-s)}ads \rightarrow e_A \text{ e } e^{At}x_A^+ \rightarrow +\infty, \text{ quando } t \rightarrow +\infty.$$

Logo, para todo  $x_B^- \in L_B^-$ , existe  $x_A^- \in L_A^-$  tal que  $h_1(x_A^-) = h(x_A^- + 0) = x_B^-$ , ou seja,  $h_1$  é sobrejetora.

Além disso,  $h_1$  também é injetora. De fato,

$$h_1(x_1) = h_1(x_2) \implies h(x_1 + 0) = h(x_2 + 0) \implies x_1 = x_2.$$

Assim,  $h_1$  é bijetora.

Analogamente, se mostra que  $h_2$  é bijetora.

Portanto, as dimensões dos subespaços estáveis e instáveis de  $A$  e  $B$  coincidem.  $\square$

O teorema acima mostra que a parte afim de um fluxo não influencia na conjugação topológica desses fluxos, ou seja, conjugação topológica de fluxos afins é uma consequência da conjugação topológica de fluxos lineares, como é visto no exemplo a seguir.

**Exemplo 4.17.** *Sejam*

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -7 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

as matrizes hiperbólicas dadas no exemplo 3.24. Como as dimensões dos subespaços estáveis (instáveis) de  $A$  e  $B$  são iguais, então, pelo teorema acima, os fluxos associados aos sistemas afins  $\dot{x} = Ax + a$  e  $\dot{x} = Bx + b$ ,

$$e^{At} + \int_0^t e^{A(t-s)} a ds \quad e \quad e^{Bt} + \int_0^t e^{B(t-s)} b ds,$$

respectivamente, são topologicamente conjugados.

Uma generalização natural da teoria descrita neste capítulo pode ser vista nos sistemas de controle. Mas, podemos pensar em desenvolver esses resultados substituindo o  $\mathbb{R}^n$  por um grupo de Lie.



# Conjugação e equivalência topológica no toro $n$ -dimensional

O espaço quociente  $T^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  é o toro  $n$ -dimensional. Se  $n = 1$ , obtemos o círculo  $S^1$  e, em geral,  $\mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$  é homeomorfo ao produto cartesiano,  $S^1 \times \dots \times S^1$ , de  $n$  cópias do círculo. Além disso, o toro é localmente homeomorfo ao espaço euclidiano, conexo por caminhos e compacto.

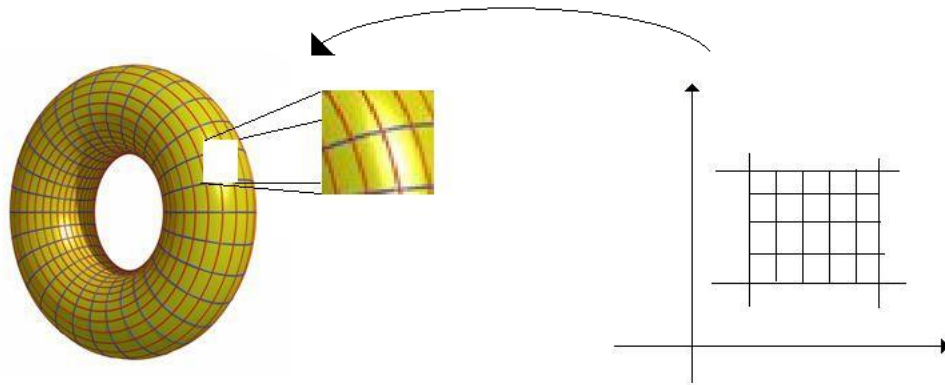


Figura 5.1:

Sabemos que dois fluxos  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $\mathbb{R}^n$  são topologicamente conjugados se existe um homeomorfismo  $h$  tal que  $h(\Phi(t, x)) = \Psi(t, h(x))$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Uma questão que surge é: quando dois fluxos no toro  $n$ -dimensional são topologicamente conjugados (equivalentes)? É isto que trataremos neste capítulo. Utilizamos principalmente as referências [10] e [13].

## 5.1 Conjugação e equivalência topológica

Nesta seção vamos estudar conjugação e equivalência topológica no toro  $n$ -dimensional. Para isso, começaremos definindo aplicação afim e, conseqüentemente, fluxos afim equivalentes. Mostraremos que, no toro  $n$ -dimensional, equivalência (conjugação) topológica e equivalência (conjugação) afim são a mesma coisa.

Para a sequêcia desse trabalho, considere  $[x] = x + \mathbb{Z}^n \in T^n$  e  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  a aplicação de recobrimento dada por  $\pi(x) = [x]$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Definição 5.1.** *Seja  $\mathbb{Z}^n$  o subgrupo discreto de  $\mathbb{R}^n$  e  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  um subgrupo a um parâmetro. Dizemos que  $\Phi : \mathbb{R} \times T^n \rightarrow T^n$  dado por  $\Phi(t, [x]) = [\phi(t, x)]$  é o fluxo induzido por  $\phi$ .*

**Definição 5.2.** *Seja  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  um isomorfismo tal que  $\mathbb{Z}^n$  é  $A$ -invariante, isto é,  $A(x) \in \mathbb{Z}^n$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$ . Se  $a \in \mathbb{R}$ , podemos considerar a aplicação induzida  $\overline{aA} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  definida por  $\overline{aA}([x]) = [aA(x)]$ . Esta aplicação é denominada aplicação afim no toro  $n$ -dimensional.*

**Definição 5.3.** *Dois fluxos no toro  $T^n$  são afim equivalentes (afim conjugados) se eles forem topologicamente equivalentes (topologicamente conjugados) por uma aplicação afim.*

**Exemplo 5.4.** *Sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  os fluxos induzidos pelos subgrupos a um parâmetro,  $\phi$  e  $a\phi a^{-1}$ , com  $a \in \mathbb{R}$ . A aplicação afim  $\bar{a} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  definida por  $\bar{a}([x]) = [ax]$  é uma conjugação afim (e, por isso, uma equivalência afim) de  $\Phi$  e  $\Psi$ .*

Com efeito, como  $\Phi$  e  $\Psi$  são os fluxos induzidos por  $\phi$  e  $a\phi a^{-1}$ , temos que  $\Phi(t, [x]) = [\phi(t, x)]$  e  $\Psi(t, [x]) = [a\phi(t, x)a^{-1}]$ .  $\bar{a}$  satisfaz a propriedade de conjugação, pois

$$\bar{a}(\Phi(t, [x])) = \bar{a}([\phi(t, x)]) = [a\phi(t, x)] = [a\phi(t, ax)a^{-1}] = \Psi(t, \bar{a}([x])).$$

Além disso,  $\bar{a}$  tem inversa  $(\bar{a})^{-1} : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$  dada por  $(\bar{a})^{-1}([x]) = [a^{-1}x]$ .

Por outro lado,  $\bar{a}$  e  $(\bar{a})^{-1}$  são contínuas e, assim, são homeomorfismos. Logo,  $\bar{a}$  é, de fato, uma conjugação entre  $\Phi$  e  $\Psi$ .

Uma primeira pergunta natural, é saber quando fluxos induzidos em  $T^n$ , por fluxos lineares em  $\mathbb{R}^n$ , são topologicamente equivalentes. Mais precisamente, sejam  $v, v' \in \mathbb{R}^n$  vetores não

nulos e considere os fluxos  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $T^n$  definidos, respectivamente, por  $\Phi(t, [x]) = [tv + x]$  e  $\Psi(t, [x]) = [tv' + x]$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

**Lema 5.5.** *Considere a aplicação quociente  $\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow T^n$  e seja um homeomorfismo  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , o levantamento de  $h : T^n \rightarrow T^n$ , tal que  $H(0) = 0$  e  $h\pi(0) = \pi(0)$ . Então,  $H$ , restrito a  $\mathbb{Z}^n$ , é um homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos.*

**Demonstração:** Precisamos mostrar que  $H$ , restrito a  $\mathbb{Z}^n$ , satisfaz

$$(a) \ H(m_1 + m_2) = H(m_1) + H(m_2), \text{ para todo } m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^n$$

$$(b) \ H(\alpha m) = \alpha H(m), \text{ para todo } m \in \mathbb{Z}^n \text{ e todo } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Para qualquer  $n \in \mathbb{Z}^n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$ , defina as aplicações:  $H_1, H_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dadas por  $H_1(x) = H(x + n)$  e  $H_2(x) = H(x) + H(n)$ .

Note que estas aplicações são homeomorfismos, pois  $H$  é um homeomorfismo. Além disso,

$$H_1(0) = H(n), \quad H_2(0) = H(0) + H(n) = H(n) \quad \text{e}$$

$$\pi(H_1(x)) = \pi(H(x + n)) = h(\pi(x + n)) = h(\pi(x)).$$

Assim,  $H_1$  é um levantamento de  $h$  com  $H_1(0) = H(n)$ .

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} \pi(H_2(x)) &= \pi(H(x) + H(n)) = \pi(H(x)) + \pi(H(n)) \\ &= h(\pi(x)) + h(\pi(n)) = h(\pi(x)) + h(\pi(0)) \\ &= h(\pi(x)) + \pi(0) = h(\pi(x)), \end{aligned}$$

isto acontece porque  $\pi(n) = \pi(0)$  e estamos supondo que  $h(\pi(0)) = \pi(0)$  é o elemento neutro do grupo  $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ . Logo, tanto  $H_1$  e  $H_2$  são levantamentos de  $h$  com mesmo ponto inicial. Daí, pela unicidade do levantamento,  $H_1 = H_2$ , isto é,  $H(x + m) = H(x) + H(m)$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Facilmente se prova que  $H(\alpha m) = \alpha H(m)$ , para  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .

Portanto,  $H|_{\mathbb{Z}^n}$  é um homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos. □

**Lema 5.6.** *Sejam  $H$  o levantamento contínuo de  $h : T^n \rightarrow T^n$  e  $\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma parametrização contínua estritamente crescente. Além disso, para  $v$  e  $v'$  em  $\mathbb{R}^n$ , sejam  $\Phi : (t, [x]) \mapsto [tv + x]$  e  $\Psi : (t, [x]) \mapsto [tv' + x]$  fluxos em  $T^n$  induzidos pelos fluxos  $\phi : t \mapsto tv$  e  $\psi : t \mapsto tv'$  em  $\mathbb{R}^n$ . Então,  $H(\phi(t, x)) = \psi(\tau_x(t), H(x))$ .*

**Demonstração:** Observe que, para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ ,

$$\begin{aligned} \pi(H(\phi(t, x))) &= h(\pi(\phi(t, x))) = h(\Phi(t, \pi(x))) \\ &= \Psi(\tau_x(t), h(\pi(x))) = \Psi(\tau_x(t), \pi(H(x))) \\ &= \pi(\psi(\tau_x(t), H(x))). \end{aligned}$$

Assim,  $H(\phi(t, x)) - \psi(\tau_x(t), H(x)) \in \mathbb{Z}^n$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Mas, como  $H(\phi(t, x)) - \psi(\tau_x(t), H(x))$  é uma função contínua,  $H(\phi(t, x)) - \psi(\tau_x(t), H(x))$  é constante e igual a 0, pois  $H(\phi(0, x)) - \psi(0, H(x)) = 0$ .

Logo, podemos concluir que  $H(\phi(t, x)) = \psi(\tau_x(t), H(x))$ . □

**Exemplo 5.7.** *Sejam  $x, v \in \mathbb{R}^2$  e  $r$  a reta  $\{tv + x : t \in \mathbb{R}\}$ . Vamos mostrar que nem sempre é possível encontrar dois pontos distintos  $m, n \in \mathbb{Z}$  tais que  $(m, n)$  pertence à  $r$ .*

*Sejam  $v = (1, 1)$ ,  $t = (t, t)$  e  $x = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ . Suponha que  $(m, n)$  pertence à  $r$ , ou seja,*

$$(t, t) + (1, 1) \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = (m, n) \implies (t, t) + \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = (m, n).$$

*Daí,*

$$\left(t + \frac{1}{2}, t + \frac{3}{5}\right) = (m, n).$$

*E, assim,*

$$\left. \begin{array}{l} t + \frac{1}{2} = m \\ t + \frac{3}{5} = n \end{array} \right\} \implies m - n = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} = -\frac{1}{10} \implies m - n = -\frac{1}{10},$$

*o que é absurdo.*

Agora, podemos enunciar o seguinte resultado:

**Teorema 5.8.** *Para  $v$  e  $v'$  vetores não nulos de  $\mathbb{R}^n$ , sejam  $\Phi : (t, [x]) \mapsto [tv + x]$  e  $\Psi : (t, [x]) \mapsto [tv' + x]$  fluxos em  $T^n$ , induzidos pelos fluxos  $\phi : t \mapsto tv$  e  $\psi : t \mapsto tv'$  em  $\mathbb{R}^n$ , respectivamente. Então,  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados se, e somente se, existem  $A \in Gl(n, \mathbb{Z})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tais que  $A(v) = \alpha v'$ .*

**Demonstração:**

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{H} & \mathbb{R}^n \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T^n & \xrightarrow{h} & T^n \end{array}$$

Sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  topologicamente equivalentes por uma aplicação  $h$ . Assim,  $h : T^n \rightarrow T^n$  é um homeomorfismo que satisfaz, para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$h(\Phi(t, [x])) = \Psi(\tau_x(t), h([x])).$$

Seja o homeomorfismo  $h$  satisfazendo  $h\pi(0) = \pi(0)$ . Então, pela teoria topológica, existe um único levantamento contínuo  $H$  com  $H(0) = 0$  tal que o diagrama acima comuta. Da mesma maneira, se mostra que  $H^{-1}$  é o levantamento contínuo de  $h^{-1}$ . Logo,  $H$  é um homeomorfismo e  $h \circ \pi = \pi \circ H$ .

Como  $\pi(x + n) = [x + n] = [x] = \pi(x)$ , para todo  $x \in \mathbb{Z}^n$  e todo  $n \in \mathbb{Z}^n$ , temos que  $\mathbb{Z}^n$  é  $H$ -invariante. De fato, seja  $n \in \mathbb{Z}^n$ , então

$$\pi(H(n)) = h(\pi(n)) = h(\pi(0)) = \pi(0) \implies H(n) \in \mathbb{Z}^n.$$

Afirmamos que  $A := H|_{\mathbb{Z}^n}$  é inversível. Isto segue, pois  $H^{-1}$  é o levantamento de  $h^{-1}$  e deixa  $\mathbb{Z}^n$  invariante. Assim,

$$A^{-1} = (H)^{-1}|_{\mathbb{Z}^n} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n,$$

e satisfaz  $AA^{-1} = A^{-1}A = Id$ .

Conforme vimos,  $\mathbb{Z}^n$  é  $H$ -invariante e, assim,  $H$  restrito a  $\mathbb{Z}^n$ , é uma bijeção.

Pelo lema 5.5,  $H$ , restrito a  $\mathbb{Z}^n$ , é um homomorfismo de  $\mathbb{Z}$ -módulos. Em particular, tomando  $x \in \mathbb{Z}^n$ , obtemos que  $H|_{\mathbb{Z}^n} : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  é um homomorfismo de grupos e, como  $H$  é bijetora,  $H|_{\mathbb{Z}^n}$  é então um isomorfismo.

Suponha que  $H(1, 0, \dots, 0) = (a_{11}, \dots, a_{n1}), \dots$ , e  $H(0, \dots, 0, 1) = (a_{1n}, \dots, a_{nn})$ , para  $a_{ij} \in \mathbb{Z}$ , onde  $1 \leq i, j \leq n$ . Então,

$$\begin{aligned} H(x_1, \dots, x_n) &= H(x_1(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n(0, \dots, 0, 1)) \\ &= x_1 H(1, 0, \dots, 0) + \dots + x_n H(0, \dots, 0, 1) \\ &= x_1(a_{11}, \dots, a_{n1}) + \dots + x_n(a_{1n}, \dots, a_{nn}) \\ &= (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como  $H|_{\mathbb{Z}^n}$  é isomorfismo,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in Gl(n, \mathbb{Z}).$$

Agora, pelo lema 5.6,

$$H(\phi(t, x)) = \psi(\tau_x(t), H(x)),$$

isto é,  $H$  satisfaz a propriedade de equivalência topológica.

Falta mostrar que  $Av = \alpha v$ .

Sabemos que  $H(tv + x) = tv' + H(x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Daí,  $A^{-1}H(tv + x) = tA^{-1}(v') + A^{-1}H(x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Isto significa que  $A^{-1}H$  leva a reta  $tv + x$  na reta  $tA^{-1}(v') + A^{-1}H(x) = A^{-1}(tv' + H(x))$ .

Digamos que existam  $m, n \in \mathbb{Z}^n$  distintos tais que  $m$  e  $n$  pertencem à reta  $\{tv + x : t \in \mathbb{R}\}$ . Como  $A^{-1}H|_{\mathbb{Z}^n} = Id|_{\mathbb{Z}^n}$ , então  $A^{-1}H(m) = m$  e  $A^{-1}H(n) = n$ . Portanto, as retas  $tv = x$  e  $A^{-1}(tv' + H(x))$  contêm os dois pontos  $m$  e  $n$  em comum e, conseqüentemente, essas retas  $tv = x$  e  $A^{-1}(tv' + H(x))$  são iguais. Logo, os vetores diretores dessas retas,  $v$  e  $A^{-1}v$ , são paralelos, donde existe um  $\alpha > 0$  tal que

$$v = \alpha A^{-1}(v') \implies A(v) = \alpha v'.$$

De acordo com o exemplo 5.7, nem sempre é possível encontrar dois pontos  $m, n \in \mathbb{Z}^n$  distintos tais que  $m$  e  $n$  pertencem à reta  $\{tv + x : t \in \mathbb{R}\}$ . Neste caso, vamos fazer o seguinte, note que  $A^{-1}H$  deixa  $\mathbb{Z}^n$  invariante e, portanto, induz uma aplicação contínua  $A^{-1}H : T^n \rightarrow T^n$  definida por  $A^{-1}H([x]) = [A^{-1}H(x)]$ . Temos que  $A^{-1}H(tv + x) = tA^{-1}(v') + A^{-1}H(x)$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$  e todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Em particular, para  $x = -v$ . Observe que,  $tv - v = v(t - 1) = (t - 1)v$ . Assim,

$$A^{-1}H((t - 1)v) = A^{-1}H(tv - v) = tA^{-1}(v') + A^{-1}H(-v).$$

Para  $t = 1$ , temos que  $(t - 1)v = 0$  e, como  $H$  e  $A^{-1}$  levam 0 em 0, então 0 é ponto da reta  $tv - v$  e da reta  $tA^{-1}(v') + A^{-1}H(-v)$ . Precisamos encontrar outro ponto com coordenadas inteiras que pertença a essas duas retas. Para isto, construímos uma sequência  $r_n$  de pontos de  $\mathbb{Z}^n$  tal que  $[r_n] \rightarrow [v]$  no espaço projetivo. Assim, pela continuidade de  $A^{-1}H$ ,

$$A^{-1}H[r_n] = [A^{-1}Hr_n] = [r_n] \rightarrow [A^{-1}H(v)],$$

mostrando que  $[A^{-1}H(v)] = [v]$ . Mas, então,  $v$  e  $A^{-1}(v')$  são vetores diretores da mesma reta. Sendo assim, são paralelos, ou seja, existe  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tal que  $v = \alpha A^{-1}(v')$ , ou ainda,  $A(v) = \alpha v'$ .

Reciprocamente, suponha que existem  $A \in Gl(n, \mathbb{Z})$  e  $\alpha \in \mathbb{R}^*$  tais que  $A(v) = \alpha v'$ . Considere a aplicação  $h : T^n \rightarrow T^n$  definida por  $h([x]) = [A(x)]$ .  $h$  está bem definida e tem inversa  $h^{-1} : T^n \rightarrow T^n$  dada por  $h^{-1}([x]) = [A^{-1}(x)]$ . Além disso, a continuidade de  $h$  e  $h^{-1}$  seguem da continuidade da aplicação  $A$  e da aplicação quociente. Logo,  $h$  é um homeomorfismo.

Resta mostrarmos que  $h$  satisfaz a propriedade de equivalência.

$$\begin{aligned} h(\Phi(t, [x])) &= [A\Phi(t, [x])] = [A(tv + x)] \\ &= [A(tv) + A(x)] = [\alpha t + A(x)] = [\alpha t + h([x])] \\ &= \Psi(\alpha t, h([x])), \end{aligned}$$

Tomando  $\tau_x(t) = \alpha t$ , temos que

$$h(\Phi(t, [x])) = \Psi(\tau_x(t), h([x])).$$

Portanto,  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente conjugados. □

**Observação 5.9.** *Note que a partir das afirmações do teorema, podemos concluir que, em  $T^n$ , fluxos topologicamente equivalentes (topologicamente conjugados) são afim equivalentes (afim conjugados) e vice-versa.*

*De fato, suponha que  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente equivalentes por uma aplicação  $h : T^n \rightarrow T^n$ . Então,  $h$  é um homeomorfismo e satisfaz, para todo  $x \in \mathbb{R}^d$  e todo  $t \in \mathbb{R}$ ,*

$$h(\Phi(t, [x])) = \Psi(\tau_x(t), h([x])).$$

*Assim, pela demonstração do teorema acima, existe um único levantamento contínuo  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $h \circ \pi = \pi \circ H$ , isto é,  $h([x]) = [H(x)]$ . Como  $H$  é um isomorfismo e  $\mathbb{Z}^n$  é  $H$ -invariante, concluímos que  $h$  é uma aplicação afim. Portanto,  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $T^n$  são topologicamente equivalentes por uma aplicação afim.*

*Reciprocamente, se  $\Phi$  e  $\Psi$  em  $T^n$  são topologicamente equivalentes por uma aplicação afim, então  $\Phi$  e  $\Psi$  são topologicamente equivalentes.*

A proposição a seguir, dá uma condição para que dois campos quaisquer no toro sejam topologicamente equivalentes.

Daqui em diante, quando nos referirmos a campos vetoriais topologicamente conjugados (equivalentes),  $X$  e  $Y$ , estamos dizendo que  $X$  é topologicamente conjugado (equivalente) a  $Y$ .

**Proposição 5.10.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos vetoriais não-nulos em  $T^n$ . Assim,  $X$  é topologicamente equivalente a  $Y$  se, e somente se, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = \alpha Y$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{Z}$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes no toro  $n$ -dimensional. Então, existem um homeomorfismo  $h : T^n \rightarrow T^n$  e uma aplicação  $\tau_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfazendo

$$h(e^{tX}([x])) = e^{\tau_x(t)Y} h([x]), \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^n \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$



Pela observação 5.9, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $h([x]) = [Ax]$ . Além disso,  $h(e^{tX}([X])) = e^{\tau_x(t)Y}h([X])$ . Mas,

$$h(e^{tX}([X])) = [A(e^{tX}X)] = [A(tX + X)] = [tA(X) + A(X)]$$

e

$$e^{\tau_x(t)Y}h([X]) = e^{\tau_x(t)Y}[A(X)] = [e^{\tau_x(t)Y}A(X)] = [\tau_x(t)Y + A(X)].$$

Logo,

$$h(e^{tX}([X])) = e^{\tau_x(t)Y}h([X]) \text{ implica que } [tA(X) + A(X)] = [\tau_x(t)Y + A(X)]$$

e, assim,

$$tA(X) + A(X) - \tau_x(t)Y - A(X) \in \mathbb{Z}^n,$$

donde  $t(A(X) - \alpha Y) \in \mathbb{Z}^n$ . Tomando  $\tau_x(t) = \alpha t$ , obtemos

$$tA(X) + A(X) - \alpha tY - A(X) \in \mathbb{Z}^n, \text{ ou seja, } t(A(X) - \alpha Y) \in \mathbb{Z}^n.$$

Segue que  $t(A(X) - \alpha Y) \in \mathbb{Z}^n$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ , e daí concluímos que  $A(X) - \alpha Y = 0$ , donde  $A(X) = \alpha Y$ .

Reciprocamente, defina  $h : T^n \rightarrow T^n$  por  $h([x]) = [A(x)]$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Afirmção:  $h$  está bem definida.

De fato, sejam  $[x], [x'] \in T^n$ . Então,

$$[x] = [x'] \Rightarrow x - x' \in \mathbb{Z}^n.$$

Segue que

$$A(x - x') \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow A(x) + \mathbb{Z}^n = A(x') + \mathbb{Z}^n.$$

Logo,

$$[A(x)] = [A(x')] \Rightarrow h([x]) = h([x']).$$

Vamos mostrar que  $h$  é bijetora.

Suponha que  $h([x_1]) = h([x_2])$ , para  $[x_1], [x_2] \in T^n$ . Assim,

$$[A(x_1)] = [A(x_2)] \Rightarrow A(x_1) - A(x_2) \in \mathbb{Z}^n \Rightarrow A(x_1 - x_2) \in \mathbb{Z}^n.$$

Como  $A : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^n$  é um isomorfismo, segue que  $x_1 - x_2 \in \mathbb{Z}^n$ , e daí,  $[x_1] = [x_2]$ . Isto mostra que  $h$  é injetora.

Seja  $[x] \in T^n$ . Daí, existe  $[A^{-1}(x)] \in T^n$  tal que

$$h([A^{-1}(x)]) = [A(A^{-1}(x))] = [x].$$

Logo,  $h$  é sobrejetora.

A continuidade de  $h$  e  $h^{-1}$  são consequências da continuidade da aplicação  $A$  e da aplicação quociente.

Resta verificar que  $h$  satisfaz a propriedade de equivalência.

Para isto, sejam  $\Phi$  e  $\Psi$  os fluxos induzidos em  $T^n$  por  $X$  e  $Y$ , respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} h(\Phi(t, x)) &= h(e^{tX}([x])) = h(e^{tX}[x]) \\ &= [A(e^{tX}x)] = [A(x + tX)] \\ &= [A(X) + tA(X)] = [A(x) + \alpha tY] \\ &= [e^{\alpha tY}A(X)] = e^{\alpha tY}[A(X)] \\ &= e^{\alpha tY}h([x]). \end{aligned}$$

Tomando  $\tau_x(t) = \alpha t$ , concluímos que

$$h(\Phi(t, x)) = e^{\tau_x(t)Y}h([x]) = \Psi(\tau_x(t), h(x)).$$

□

**Corolário 5.11.** *Sejam  $X$  e  $Y$  dois campos vetoriais não nulos em  $T^n$ . Assim,  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  se, e somente se, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = Y$ .*

**Demonstração:** A demonstração é análoga à demonstração da proposição acima, mas tomando  $\tau_x(t) = t$ . □

**Exemplo 5.12.** *Sejam  $X = (1, 4, -2)$  e  $Y = (2 - 3, -14)$  campos vetoriais em  $T^3$ . Note que*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

*é invertível (e, portanto,  $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  é um isomorfismo),  $\mathbb{Z}^3$  é  $A$ -invariante e satisfaz  $A(X) = Y$ . Portanto, pelo corolário 5.11,  $X$  e  $Y$  são topologicamente conjugados.*

## 5.2 Conjugação topológica de fluxos racionais no toro

Conforme mostramos, a conjugação (equivalência) topológica de dois campos vetoriais não nulos, induzidos por  $X, Y \in \mathbb{R}^n$ , depende da existência de um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = Y$  ( $A(X) = \alpha Y$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{Z}$ ). Vamos agora, analisar condições sobre os quais dois campos racionais no toro são conjugados (equivalentes). Antes porém, vamos nos ater a situação em que  $X$  e  $Y$  possuem coordenadas inteiras. Neste caso, veremos que a conjugação depende do máximo divisor comum das entradas de  $X$  e  $Y$ .

Se o campo vetorial  $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ , dizemos que  $X$  é um campo vetorial inteiro. Agora, se o campo vetorial  $Y = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n) \in \mathbb{Q}^n$ , dizemos que  $Y$  é um campo vetorial racional.

**Proposição 5.13.** *Sejam  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  campos vetoriais inteiros em  $T^n$ . Se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$ , então  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n)$  divide  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$ .*

**Demonstração:** Se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$ , pelo corolário 5.11, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = Y$ . Escrevendo a matriz  $A$  em relação à base canônica  $\beta$ , obtemos a matriz

$$[A]_{\beta} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

com entradas inteiras. Então,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

e, assim,

$$\begin{cases} \text{mdc}(x_1, \dots, x_n) | y_1 \\ \vdots \\ \text{mdc}(x_1, \dots, x_n) | y_n \end{cases}$$

Logo,  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n)$  divide  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$ .  $\square$

**Observação 5.14.** *A recíproca da proposição acima é válida para  $n = 2$ .*

*Suponhamos que  $D := \text{mdc}(x_1, x_2)$  divide  $\text{mdc}(y_1, y_2)$ . Daí,  $D$  divide  $y_1$  e  $D$  divide  $y_2$  e, assim, chegamos a duas equações diofantinas, dadas por*

$$ax_1 + bx_2 = y_1 \tag{5.1}$$

$$cx_1 + dx_2 = y_2, \tag{5.2}$$

para  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , donde

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Se  $\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ , segue que  $A$  é inversível e temos o resultado. Caso contrário,

ou seja,  $\det(A) = 0$ , tomemos as soluções gerais  $\left(a + \frac{x_2 t}{D}, b - \frac{x_1 t}{D}\right)$  e  $\left(c + \frac{x_2 \gamma}{D}, d - \frac{x_1 \gamma}{D}\right)$ , para todos  $t, \gamma \in \mathbb{Z}$ , das equações diofantinas 5.1 e 5.2, respectivamente. Então, temos o

sistema  $B(X) = Y$ , isto é,

$$\begin{pmatrix} a + \frac{x_2 t}{D} & b - \frac{x_1 t}{D} \\ c + \frac{x_2 \gamma}{D} & d - \frac{x_1 \gamma}{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Precisamos mostrar que  $B$  é inversível, ou seja,  $\det(B) \neq 0$ . Assim,

$$\begin{aligned} \det(B) &= \det(A) + \left( \frac{cx_1 + dx_2}{D} \right) t - \left( \frac{ax_1 + bx_2}{D} \right) \gamma \\ &= \det(A) + \frac{y_2 t - y_1 \gamma}{D} \\ &= \frac{y_2 t - y_1 \gamma}{D}. \end{aligned}$$

Como  $y_1$  e  $y_2$  são fixos e diferentes de 0, é possível encontrar  $t, \gamma \in \mathbb{Z}$  tais que  $B$  seja inversível. Portanto, como  $B: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  é um isomorfismo,  $\mathbb{Z}^2$  é  $B$ -invariante e  $B(X) = Y$ , concluímos que  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$ .

Provavelmente seja possível generalizar esse resultado para o caso  $n \times n$ . Nossa dificuldade em responder essa pergunta está no cálculo de determinantes de ordem  $n$  e na escolha de soluções gerais de equações diofantinas que facilite o cálculo desse determinante.

Daremos alguns exemplos de conjugação de campos vetoriais inteiros. Note que esses exemplos seguem da observação acima.

**Exemplo 5.15.**  $\langle 1, 1 \rangle = \langle -1, -1 \rangle \neq \langle n, n \rangle$ , para todo  $n \neq \pm 1$ .

**Exemplo 5.16.** Se  $m, n \in \mathbb{Z}$  e  $\text{mdc}(n, m) = 1$ , então  $\langle n, m \rangle = \langle 1, 1 \rangle$ .

**Exemplo 5.17.** Se  $m, n \in \mathbb{Z}$ , então  $\langle n, m \rangle = \langle \text{mdc}(n, m), \text{mdc}(n, m) \rangle$ .

O resultado a seguir é uma consequência imediata da proposição 5.13.

**Corolário 5.18.** Sejam  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  campos vetoriais inteiros em  $T^n$ . Se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  e  $Y$  é topologicamente conjugado a  $X$ , então  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n) = \text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$ .

**Demonstração:** Pela proposição 5.13,  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$  se  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n)$  divide  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$  e  $Y$  é topologicamente conjugado a  $X$  se  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$  divide

$mdc(x_1, \dots, x_n)$ , donde segue o resultado.  $\square$

O seguinte lema mostra que, no toro, campos vetoriais topologicamente equivalentes, continuam sendo topologicamente equivalentes se multiplicarmos eles por uma constante.

**Lema 5.19.** *Em  $T^n$ ,  $X$  é topologicamente equivalente a  $Y$  se, e somente se,  $kX$  é topologicamente equivalente a  $kY$ , para todo  $k \in \mathbb{R}$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $X$  é topologicamente equivalente a  $Y$ . Então, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(X) = \alpha Y$ . Seja  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ . Então,  $A$  também satisfaz o seguinte sistema:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} kx_1 \\ \vdots \\ kx_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} ky_1 \\ \vdots \\ ky_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $A(kX) = \alpha kY$  e, conseqüentemente,  $kX$  é topologicamente equivalente a  $kY$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $kX$  é topologicamente equivalente a  $kY$ . Então, existe um isomorfismo  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $B$ -invariante tal que  $B(kX) = \alpha kY$ . Seja  $B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$ . Segue que  $B$  satisfaz o sistema abaixo

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, existe um isomorfismo  $B : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , com  $\mathbb{Z}^n$   $B$ -invariante tal que  $B(X) = \alpha Y$  e, conseqüentemente,  $X$  é topologicamente equivalente a  $Y$ .  $\square$

**Observação 5.20.** *Note que o resultado anterior também é válido para campos vetoriais topologicamente conjugados.*

Para analisar quando dois campos vetoriais racionais no toro são topologicamente conjugados, primeiro usaremos o lema anterior para transformar os campos vetoriais racionais em campos vetoriais inteiros e depois utilizaremos a proposição 5.13.

**Proposição 5.21.** *Sejam  $X = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n)$ ,  $Y = (c_1/d_1, \dots, c_n/d_n)$  campos vetoriais racionais,  $k = b_1 \cdots b_n \cdot d_1 \cdots d_n \in \mathbb{Z}$ ,  $kX = (x_1, \dots, x_n)$  e  $kY = (y_1, \dots, y_n)$ . Se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$ , então  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n)$  divide  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$ .*

**Demonstração:** Se  $X$  é topologicamente conjugado a  $Y$ , pelo lema anterior,  $kX$  é topologicamente conjugado a  $kY$ . Agora, note que,  $kX$  e  $kY$  são campos vetoriais inteiros. Logo, pela proposição 5.13,  $\text{mdc}(x_1, \dots, x_n)$  divide  $\text{mdc}(y_1, \dots, y_n)$ .  $\square$

A partir da teoria descrita nessa seção, obtemos os seguintes resultados:

**Proposição 5.22.** *Em  $T^n$ , dois campos inteiros não nulos são topologicamente equivalentes.*

**Demonstração:** Sejam  $X = (x_1, \dots, x_n)$  e  $Y = (y_1, \dots, y_n)$  dois campos inteiros em  $T^n$  e seja  $M = \text{mmc}(x_1, \dots, x_n)$ . Note que

$$\begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & & & \\ & \frac{y_2}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{y_n}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

e, assim,

$$\begin{pmatrix} M \frac{y_1}{x_1} & & & \\ & M \frac{y_2}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \frac{y_n}{x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Tomando

$$A = \begin{pmatrix} M \frac{y_1}{x_1} & & & \\ & M \frac{y_2}{x_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & M \frac{y_n}{x_n} \end{pmatrix} \quad \text{e } \alpha = M,$$

temos que  $A \in Gl(n, \mathbb{Z})$  e  $\alpha \in \mathbb{Z}$ . Logo, existe um isomorfismo  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  com  $\mathbb{Z}^n$   $A$ -invariante tal que  $AX = \alpha Y$ . Portanto,  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes.  $\square$

**Corolário 5.23.** *Em  $T^n$ , dois campos vetoriais racionais não nulos  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes.*

**Demonstração:** Considere os campos racionais

$$X = (a_1/b_1, \dots, a_n/b_n) \in \mathbb{Q}^n \text{ e } Y = (c_1/d_1, \dots, c_n/d_n) \in \mathbb{Q}^n,$$

e seja  $k = b_1 \cdots b_n \cdot d_1 \cdots d_n \in \mathbb{Z}$ . Assim,  $kX = (x_1, \dots, x_n)$  e  $kY = (y_1, \dots, y_n)$  são campos inteiros. Pela proposição anterior,  $kX$  é topologicamente equivalente a  $kY$ . Segue, pelo lema 5.19, que  $X$  e  $Y$  são topologicamente equivalentes.  $\square$

Como trabalho futuro podemos analisar os fluxos irracionais, saber quando que dois fluxos irracionais são conjugados, saber quando que um fluxo irracional e um fluxo racional são conjugados, etc. Podemos também generalizar os resultados descritos para grupo de Lie e seu reticulado. Porém, alguns resultados já foram generalizados em [13].



---

---

## BIBLIOGRAFIA

---

- [1] Colonus, F.; *Dynamics and Linear Algebra, Notes of the IMA (Institute of Mathematics and Its Applications) PI Summer Program for Graduate Students: Linear Algebra and Applications*, Iowa State University, Ames, Iowa (June 30-July 25, 2008).
- [2] Ayala, V. and Colonus, F. and Kliemann, W.; *Dynamical characterization of the Lyapunov form of matrices*, Linear algebra its applications 402 (2005) 272-290.
- [3] Colonus, F. and Santana, A. J.; *Stability and topological conjugacy for affine differential equations*, Boletim da Sociedade Paranaense de Matemática Essays(3s.) v. 26 1-2 (2008): 141-151.
- [4] Arnold, V. I.; *Ordinary differential equations*, Springer-Verlag Berlim Heidelberg 1992.
- [5] Hirsch, M. W. and Smale, S.; *Differential equations, dynamical systems and linear algebra*, Academic Press, Inc., San Diego, Califórnia, 1974.
- [6] Robinson, C.; *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Boca Raton, CRC Press, Florida, 1995.
- [7] Perko, L.; *Differential equations and dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, Inc. 1991.
- [8] Arrowsmith, D. K. and Place, C. M.; *An introduction to dynamical systems*, Cambridge University Press, 1990.
- [9] Wiggins, S.; *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1990, 2003.

- 
- [10] Irwin, M. C.; *Smooth dynamical systems*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2001.
- [11] Hoffman, K. and Kunze, R.; *Álgebra linear*, Editora Polígono S. A., São Paulo, SP, 1971.
- [12] Doering, C. I. and Lopes, A. O.; *Equações diferenciais ordinárias*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 2007.
- [13] Benardete D.; *Topological equivalence of flows on homogeneous spaces, and divergence of one-parameter subgroups of Lie groups*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, RJ, 2007.
- [14] Scheinerman E. R.; *Invitation to dynamical systems*, Department of mathematical Sciences, The Johns Hopkins University, 1996.

---

# ÍNDICE

---

- $T$ -anulador, 15  
Órbita, 45  
Órbita periódica, 46
- Aplicação afim, 90
- Campo vetorial inteiro, 99  
Campo vetorial racional, 99
- Equação diferencial afim, 71  
Equação diferencial linear, 18
- Espaço de Lyapunov, 30  
Expoente de Lyapunov, 29, 75  
Exponencial de matriz, 18
- Fluxo, 45  
Fluxo induzido, 90  
Fluxos  $C^k$ -conjugados, 48  
Fluxos  $C^k$ -equivalentes, 48  
Fluxos afim conjugados, 90  
Fluxos afim equivalentes, 90  
Fluxos linearmente conjugados, 51  
Fluxos topologicamente conjugados, 48  
Fluxos topologicamente equivalentes, 48  
Forma de Jordan, 17
- Matriz hiperbólica, 54
- Norma adaptada, 57
- Operador diagonalizável, 13  
Operador nilpotente, 14
- Polinômio minimal, 13
- Ponto assintoticamente estável, 40  
Ponto estável, 40  
Ponto exponencialmente estável, 40  
Ponto fixo, 46, 74
- Retrato de fase, 20
- Sistema dinâmico, 45  
Subespaço  $T$ -admissível, 15  
Subespaço  $T$ -cíclico, 15  
Subespaço  $T$ -invariante, 14  
Subespaço central, 30  
Subespaço estável, 30  
Subespaço instável, 30
- Teorema da decomposição cíclica, 15  
Teorema da decomposição primária, 15  
Teorema de Cayley-Hamilton, 14