UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

ALISSON YOUNIO DE SOUZA FRANCO

Estabilização de uma Equação KdV Generalizada Definida num Intervalo Limitado

Maringá
2014

ALISSON YOUNIO DE SOUZA FRANCO

Estabilização de uma Equação KdV Generalizada Definida num Intervalo Limitado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria N. Domingos Cavalcanti

Maringá

2014

Estabilização de uma Equação KdV Generalizada Definida num Intervalo Limitado

ALISSON YOUNIO DE SOUZA FRANCO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Profª. Drª. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM - PR
(Orientadora)

Prof. Dr. Ademir Fernando Pazoto
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ - RJ

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM - PR

À minha família e aos meus amigos.

Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus, que me deu forças e coragem para trilhar este caminho.

Agradeço aos meus pais, que nunca mediram esforços por mim. À toda a minha família: avós, tias, tios, primos, primas, padrinho e tio Samir, madrinha e tia Edivânia, muito obrigado por fazerem parte da minha vida.

A todos os meus amigos, que também constituem minha família. Obrigado por me proporcionarem preciosos momentos ao lado de vocês, e também por nunca me pertirem esquecer das preciosidades escondidas na simplicidade da vida.

Agradeço, de maneira especial, aos amigos Amanda, Fabrício e Giovana, que sempre me ensinaram muito.

À toda comunidade paroquial Cristo Sacerdote que, de alguma forma, me apoiou intensamente.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática, que contribuíram para minha formação. De maneira especial, agradeço à Professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, que com paciência, sabedoria e incentivo, me orienta não apenas na matemática, mas na vida.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e que, de alguma maneira, fazem parte da minha vida. Muito obrigado!

"Queira possuir a sabedoria mais do que a luz, pois o esplendor que ela irradia não se apaga."

Sabedoria 7, 10.

Resumo

Neste trabalho, estudamos a existência, unicidade e estabilidade exponencial da equação de Korteweg-de Vries generalizada definida num intervalo limitado $I = (0, L)$, na presença de um termo dissipativo localizado. Mais precisamente, consideramos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases}$$

onde $b \equiv b(x) \in L^2(I)$ é uma função não-negativa, com suporte ω contido num subconjunto de I, e $a \equiv a(\mu)$ é uma função regular satisfazendo a condição de crescimento dada por

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1 + |x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x-y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$.

Palavras-chave: Equação KdV Generalizada, Propriedade de Continuação Única, Estimativa de Carleman.

Abstract

In this work, we proved the existence, uniqueness and exponential stability to the following generalized Korteweg-de Vries equation posed on a finite interval $I = (0, L)$, with a localized damping. More precisely, we consider the problem

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases}$$

where $b \equiv b(x) \in L^2(I)$ is a nonnegative function, with its support ω being a subset I, and the function $a \equiv a(\mu)$ is a smooth function satisfying the growth condition

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1 + |x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x - y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

with $1 \leq p < 2$.

Keywords: Generalized Korteweg-de Vries Equation, Unique Continuation Property, Carleman Estimate.

Sumário

Introdução

O presente trabalho tem por objetivo apresentar de maneira detalhada alguns resultados demonstrados por Lionel Rosier e Bing-Yu Zhang no artigo “Global Stabilization of the Generalized Korteweg-de Vries Equation Posed on a Finite Domain” publicado no periódico SIAM Journal Control and Optimization em 2006, conforme referência [26].

Neste trabalho estudamos a equação de Korteweg-de Vries generalizada (KdV generalizada) definida no intervalo limitado $I = (0, L)$, na presença de um mecanismo dissipativo localizado, dada por

$$u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, \quad (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \tag{0.1}$$

satisfazendo às condições de fronteira homogêneas

$$u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, \quad t \in (0,\infty), \tag{0.2}$$

e a condição inicial

$$u(x,0) = \phi(x), \quad x \in (0,L), \tag{0.3}$$

onde $b \equiv b(x) \in L^2(I)$ é uma função não-negativa cujo suporte ω é um subconjunto de I e a função $a \equiv a(\mu)$ é uma função regular satisfazendo a seguinte condição de crescimento

$$a(0) = 0, \quad |a(\mu)| \leq K(1 + |\mu|^p), \quad |a'(\mu)| \leq K(1 + |\mu|^{p-1}), \quad \forall \mu \in \mathbb{R}, \tag{0.4}$$

sendo $1 \leq p < 2$.

Estudamos a boa colocação do problema de valor inicial e de fronteira (0.1)-(0.3) nos espaços de Sobolev $L^2(I)$ e $H^3(I)$, ou seja, estudamos existência, unicidade e persistência das soluções correspondentes ao dado inicial ϕ. Além disso, provamos que o sistema (0.1)-(0.3) é uniformemente localmente exponencialmente estável em $L^2(I)$, isto é, para cada $r > 0$ existem duas constantes $C > 0$ e $\nu > 0$, dependentes de $r > 0$, tal que para qualquer $\phi \in L^2(I)$ com $||\phi||_{L^2(I)} < r$ e para qualquer solução $u = u(x,t)$ de (0.1)-(0.3), temos que

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq C||\phi||^2_{L^2(I)} e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{0.5}$$

Quando $a(\mu) = \mu$ e $b \equiv 0$, (0.1) é a célebre equação KdV

$$u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \tag{0.6}$$

que foi obtida por Deiderik Korteweg e Gustav de Vries [13] em 1895, como o modelo para a propagação de ondas superficiais ao longo de um canal. Esta equação tem sido estudada intensamente por matemáticos e físicos desde 1960.

O estudo do problema de valor inicial e de fronteira associado à equação KdV definida num intervalo limitado começou com Bubnov [6], que investigou o seguinte problema de fronteira

$$\begin{cases} u_t + uu_x + u_{xxx} = f(x,t), \quad u(x,0) = 0, \\ \alpha_1 u_{xx}(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) + \alpha_3 u(0,t) = 0, \\ \beta_1 u_{xx}(1,t) + \beta_2 u_x(1,t) + \beta_3 u(0,t) = 0, \\ \xi_1 u_x(1,t) + \xi_2 u(1,t) = 0 \end{cases} \tag{0.7}$$

definido no intervalo $(0,1)$ onde $\alpha_j, \beta_j, \xi_i \in \mathbb{R}$, $j = 1,2,3$, $i = 1,2$ são constantes.

Em [3], Bona, Sun e Zhang estudaram o seguinte problema de fronteira não homogêneo para a equação KdV definida no intervalo $(0,1)$

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, \quad u(x,0) = \phi(x), \\ u(0,t) = h_1(t),\ u(1,t) = h_2(t),\ u_x(1,t) = h_3(t). \end{cases} \tag{0.8}$$

Foi provado em [3] a boa colocação do problema (0.8) no espaço $H^s(0,1)$ para $s \geq 0$ com $h_j \in H_{loc}^{\frac{s+1}{3}}(\mathbb{R}_+)$, $j = 1, 2$ e $h_3 \in H_{loc}^{\frac{s}{3}}(\mathbb{R}_+)$.

Para a equação de KdV definida no intervalo limitado $(0, L)$, com condições de fronteira homogêneas, dada por

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases} \tag{0.9}$$

vemos que toda solução regular de (0.9) satisfaz

$$\frac{d}{dt}\int_0^L |u(x,t)|^2 dx = -|u_x(0,t)|^2. \tag{0.10}$$

A expressão (0.10) nos leva a crer que toda solução de (0.9) deve decair para zero quando $t \to \infty$. Contudo, isto não é sempre verdade. Em [25], Rosier descobriu que se o comprimento L do intervalo $I = (0, L)$ pertencer ao conjunto

$$\mathcal{E} = \left\{ \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sqrt{k^2 + kl + l^2},\ \text{onde } k \text{ e } l \text{ são inteiros positivos} \right\},$$

então o sistema linear associado ao problema (0.9) possui uma solução com norma constante no espaço $L^2(I)$. Portanto, é razoável dizer que nem toda solução de (0.9) decai para zero quando $t \to \infty$. Se o comprimento L do intervalo I não pertence ao conjunto $\mathcal{E}$, foi demonstrado em [18] por Perla Menzala, Vasconcellos e Zuazua que existem $\delta > 0$ e $\gamma > 0$ tal que se $\phi \in L^2(I)$ tal que se $||\phi||_{L^2(I)} \leq \delta$ então

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} \leq C||\phi||_{L^2(I)} e^{-\gamma t}, \quad \forall t \geq 0,$$

onde C é uma constante que depende somente de $||\phi||_{L^2(I)}$.

De modo a lidar com o caso em que $L \in \mathcal{E}$ e obter soluções de (0.9) que decaiam para zero quando $t \to \infty$, Perla Menzala, Vasconcellos e Zuazua [18] introduziram um termo de “damping” $b(x)u$ na equação do problema (0.9) e obtiveram o seguinte sistema

$$\begin{cases} u_t + u_x + uu_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{0.11}$$

Aqui, $b \in L^\infty(I)$ é uma função não-negativa e satisfaz $b(x) \geq b_0 > 0$ quase sempre num subconjunto ω não vazio e aberto de I. Perla Menzala, Vasconcellos e Zuazua [18] provaram o seguinte resultado

Teorema 0.1. *Dado $\phi \in L^2(I)$, o PVIF (0.11) admite uma única solução $u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(I)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(I))$. Além disso, se*

$$\omega \text{ contém dois subconjuntos da forma } (0,\delta) \text{ e } (L-\delta, L) \text{ para algum } \delta > 0 \tag{0.12}$$

então, para quaisquer $L > 0$ e $N > 0$, existem $C > 0$ e $\mu > 0$ tal que para qualquer $\phi \in L^2(I)$ com $||\phi||_{L^2(I)} \leq N$, a correspondente solução u de (0.11) satisfaz

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} \leq C||\phi||_{L^2(I)} e^{-\mu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{0.13}$$

Posteriormente, Pazoto [21] provou que o Teorema 0.1 ainda é válido quando consideramos ω apenas um aberto contido em $(0,L)$, descartando, então, a hipótese sobre ω dada por (0.12).

O trabalho de Perla Menzala, Vasconcellos e Zuazua motivou o artigo de Rosier e Zhang [26]. Estes últimos provaram resultados de boa colocação estabelecidos em [3] para a equação KdV generalizada. Os autores também provaram a estabilidade exponencial da solução de (0.1)-(0.3) quando ω é um subconjunto aberto de $(0,L)$. Tal resultado de estabilidade foi provado a partir de uma Propriedade de Continuação Única para a equação KdV generalizada, que por sua vez, foi obtida por meio de uma Estimativa de Carleman, provada por Rosier em [24].

Este texto foi baseado no artigo de Rosier e Zhang [26], e além das hipóteses dadas em (0.4) sobre a função a, que são as mesmas dadas em [26], neste trabalho adicionamos as hipóteses

$$a'(0) = 0, \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x - y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

O trabalho que segue está organizado da seguinte maneira: No primeiro capítulo, apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o trabalho; no segundo capítulo, provaremos a existência e unicidade de solução local e global para os problemas forte e fraco; no terceiro capítulo, estabeleceremos taxa de decaimento para a energia associada ao sistema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde o suporte de φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

em que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

Definimos como distribuição sobre Ω a todo funcional linear e contínuo em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|,\ \text{para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$

uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [16].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u. Se $\liminf\limits_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u \leq \liminf_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [16].

Proposição 1.1.1. *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [16].

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p\,, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [4].

Proposição 1.1.3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [16].

Proposição 1.1.4. (Desigualdade de Hölder) - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Segue como corolário da Proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.1.4.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Além dos resultados acima, temos que:

i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Se (f_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 1.3. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ com $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. Então existe uma única $u \in L^q(\Omega)$, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [4].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.5. *Seja $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, então existe uma única $u \in L^\infty(\Omega)$ tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [4].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω, onde T_u é a distribuição definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [7].

Deste Lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.6. *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [7].

Lema 1.1.2. (Lema de Gronwall) - *Sejam $f \in C([0,T])$ e $z \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.3. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [15].

Teorema 1.4. (Teorema da Média) - *Seja $f : (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [11].

1.1.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m}\int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}},\ \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|D^\alpha u(x)|,\ \text{para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Proposição 1.1.7. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [7].

Teorema 1.5. (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [7].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

A seguinte desigualdade será útil e pode ser encontrada em [4].

Proposição 1.1.8. *Sejam $1 \leq q \leq p \leq \infty$ e inteiros $m > n$. Então*

$$||u||_{L^p(\Omega)} \leq C||u||^{1-a}_{L^q(\Omega)}||u||^a_{W^{1,m}(\Omega)}, \quad \forall u \in W^{1,m}(\Omega),$$

onde

$$a = \frac{\dfrac{1}{q} - \dfrac{1}{p}}{\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}},$$

para alguma constante $C > 0$.

Como consequência da desigualdade anterior, temos o seguinte

Corolário 1.1.8.1. *Existe uma constante* $C > 0$ *tal que para todo* $w \in H^1(I)$, *vale*

$$||w||_{L^\infty(I)} \leq C||w||_{L^2(I)} + C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}||w_x||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: De fato, pela Proposição anterior, existe $C > 0$ satisfazendo

$$||w||_{L^\infty(I)} \leq C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} \left(||w||_{L^2(I)}^2 + ||w_x||_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \forall w \in H^1(I),$$

e com isso, resulta

$$\begin{aligned} ||w||_{L^\infty(I)} &\leq C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} \left(||w||_{L^2(I)}^2 + ||w_x||_{L^2(I)}^2\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} \left(||w||_{L^2(I)} + ||w_x||_{L^2(I)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} \left(||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}} + ||w_x||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= C||w||_{L^2(I)} + C||w||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}||w_x||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}, \quad \forall w \in H^1(I). \end{aligned}$$

□

Proposição 1.1.9. *Para toda* $u \in H_0^1(I)$, *vale*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq 2^{\frac{1}{2}}||u||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}||u_x||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}.$$

Demonstração: De fato, dados $0 < x \leq L$ e $u \in H_0^1(I)$, temos

$$u^2(x) = u^2(x) - u^2(0) = \int_0^x \frac{d}{dt}u^2(t)dt = \int_0^x 2u(t)u_x(t)dt \leq 2||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)},$$

donde resulta o desejado. □

1.2 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (a, b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das (classes de) funções mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, limitadas quase sempre em (a, b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \inf \left\{ c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s. \right\}.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [28].

Proposição 1.2.1. *Sejam $m = 0, 1, \ldots$; $1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Então:*

i) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

ii) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a, b; X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

iii) $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ é contínua.

iv) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t))_X dt.$$

v) $L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

vi) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais $\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b;X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a,b) tal que *supp* (φ_ν) e *supp* (φ) estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a,b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a,b;X)$.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

A noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ é a seguinte: seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida como um único elemento deste espaço que satisfaz

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

Agora se $f \in L^p(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função de $L^p(a,b;X)$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ que a cada f associa $\tilde{f}$, é linear e contínua, e ainda é injetora. Portanto, identificando $\tilde{f}$ com f obtemos

$$L^p(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X).$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde χ_K denota a função característica de K.

Representamos por $W^{m,p}(a,b;X)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(a,b;X)$, tais que para todo $j \leq m$, $u^{(j)}$ pertence a $L^p(a,b;X)$, sendo $u^{(j)}$ a derivada no sentido das distribuições de ordem j, acima definido. Tal espaço munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{j=0}^{m} \int_\Omega |u^{(j)}(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{j=0}^{m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u^{(j)}(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Escrevemos $H^m(a,b;X) = W^{m,2}(a,b;X)$.

Proposição 1.2.2. *Seja $u \in W^{1,p}(a,b;X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então, $u \in C([a,b];X)$.*

Teorema 1.6. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*
i) A cada função $v \in L^q(a,b;X')$ corresponde um único funcional $\overline{v} \in Y'$, onde $Y = L^p(a,b;X)$, dado por

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ *corresponde exatamente uma única função* $v \in L^q(a,b;X')$ *dada por (1.1). Além disso*

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

ii) O espaço de Banach $L^p(a,b;X)$ *é reflexivo e separável.*

Demonstração: Ver [28].

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a,b;X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico entre os dois espaços. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\|_{Y'} = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}; \quad \forall u \in Y; \quad \forall v \in Y'.$$

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X), v' \in L^2(a,b;X), \quad v(a) = v(b) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t), v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t), v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.2.3. *Seja* $u \in L^2(a,b;X)$. *Então existe um único* $f \in H^{-1}(a,b;X)$ *que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [19].

Da Proposição anterior podemos identificar f com u'. De posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b;X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.

Lema 1.2.1. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b;X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X);$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [19].

Lema 1.2.2. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [28].

Definição 1.2.1. *Num espaço de Banach X, um subconjunto $Y \subset X$ é denominado relativamente compacto quando $\overline{Y}$ é compacto.*

Teorema 1.7. *Sejam X, Y e B espaços de Banach tais que $X \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$.*
i) Se F é um conjunto limitado em $L^p(0,T;X)$, com $1 \leq p < \infty$, e $\{f_t; f \in F\}$ é limitada em $L^1(0,T;Y)$ então F é relativamente compacto em $L^p(0,T;B)$;
ii) Se F é limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\{f_t; f \in F\}$ é limitado em $L^r(0,T;Y)$, com $r > 1$, então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Demonstração: Ver [27].

A seguir, enunciaremos um resultado sobre a existência e continuidade de uma aplicação denominada *aplicação traço de ordem j*. Tal resultado, bem como a teoria envolvida, podem ser encontrados em [19].

Consideremos Ω um aberto regular de $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ; j, k, e m números inteiros não negativos e $T > 0$.

Teorema 1.8. *Existe uma aplicação*

$$\widetilde{\gamma}_j : \quad H^{-k}(0,T;H^m(\Omega)) \;\to\; H^{-k}\left(0,T;H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \tag{1.2}$$

linear, contínua sobrejetora, que admite inversa à direita linear e contínua.

1.3 Topologia Fraca - $\sigma(E,E')$ e Topologia Fraco $*$ - $\sigma(E',E)$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.3.1. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E,E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f, $f \in E'$.*

Notação: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E,E^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.3.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

ii) Se $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$*em E.*

iii) Se $x_n \rightharpoonup x$*em E, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$*em E e* $f_n \to f$ *em E', então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.3.2. *A topologia fraco $*$, também designada por $\sigma(E',E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.3.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E', *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E', *então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

iv) *Se* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.3.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.3.2. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.9. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F. Então, T é contínuo em E, munido da topologia fraca $\sigma(E, E')$, em F, munido da topologia fraca $\sigma(F, F')$. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [4].

1.4 O Adjunto de um operador linear não limitado

Sejam X e Y espaços de Banach e $A : D(A) \subset X \to Y$ um operador linear não limitado com domínio denso. Definamos o conjunto

$$D(A^*) = \{v \in Y'; \quad \exists c \geq 0 \text{ tal que } |\langle v, Au\rangle| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A)\}.$$

Para cada $v \in D(A^*)$, definimos a aplicação $g_v : D(A) \subset X \to \mathbb{R}$ dada por

$$g_v(u) = \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A),$$

que satisfaz

$$|g_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in D(A).$$

Observe que g_v é um operador linear limitado, com domínio denso. Então existe uma única extensão linear limitada $f_v : X \to \mathbb{R}$ de g_v, que satisfaz

$$|f_v(u)| \leq c||u||_X, \quad \forall u \in X.$$

Assim, definimos

$$\begin{array}{rccc} A^* : & D(A^*) \subset Y' & \to & X' \\ & v & \mapsto & A^*v = f_v \end{array} \tag{1.3}$$

que é denominado o operador adjunto de A. Como f_v estende g_v, então eles coincidem em $D(A)$ e com (1.3) resulta a relação de adjunção:

$$\langle A^* v, u\rangle = \langle v, Au\rangle, \quad \forall u \in D(A), \forall v \in D(A^*).$$

Um resultado que será utilizado, sobre adjunto de um operador linear não limitado, é o seguinte:

Teorema 1.10. *O adjunto de um operador é um operador fechado.*

Demonstração: Ver [8].

Maiores detalhes sobre operadores não limitados podem ser encontrados em [8] ou [4].

1.5 C_0 - Semigrupos

Durante esta seção, X denotará um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X em X. Uma família de operadores $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominada um Semigrupo de Operadores Lineares quando satisfaz:

i) $S(0) = I$, onde I denota o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \in \mathbb{R}_+$.

O semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado de classe C_0, ou C_0-semigrupo, quando satisfaz:

iii) $\lim\limits_{t\to 0_+} ||S(t)x - x||_X = 0, \quad \forall x \in X$.

Proposição 1.5.1. *Se $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um C_0-semigrupo, então $t \mapsto ||S(t)||_X$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Demonstração: Ver [22].

Resulta, da Proposição anterior, que existem $M \geq 1$ e $\omega \geq 0$ tais que

$$||S(t)||_X \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

No caso em que $\omega = 0$ e $M = 1$, o semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é denominado C_0-**semigrupo de contrações**.

Definição 1.5.1. *O operador A definido por*

$$D(A) = \left\{x \in X; \quad \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}x \quad existe\right\};$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h) - I}{h}x, \quad \forall x \in D(A),$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Proposição 1.5.2. *$D(A)$ é um subespaço vetorial de X e A é um operador linear.*

Demonstração: Ver [10].

Proposição 1.5.3. *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um semigrupo de classe C_0 e A seu gerador infinitesimal.*

i) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$, $\quad \forall t \geq 0$ e

$$\frac{d}{dt}S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax; \tag{1.4}$$

ii) Se $x \in D(A)$ então

$$S(t)x - S(s)x = \int_s^t AS(\tau)xd\tau = \int_s^t S(\tau)Axd\tau; \tag{1.5}$$

iii) Se $x \in X$, então $\int_0^t S(\tau)xd\tau \in D(A)$ e

$$S(t)x - x = A\int_0^t S(\tau)xd\tau. \tag{1.6}$$

iv) Para todo $x \in X$,

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau = S(t)x. \tag{1.7}$$

Demonstração: Ver [22].

Proposição 1.5.4. *i) O gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X;*

ii) Um operador linear A, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um C_0-semigrupo .

Demonstração: Ver [22].

Definição 1.5.2. *i) Diz-se que um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo se, para alguma aplicação dualidade j,*

$$Re\langle j(x), Ax\rangle \leq 0 \quad \forall x \in D(A). \tag{1.8}$$

No caso em que X é um espaço de Hilbert, equivalentemente, $A : D(A) \subset X \to X$ é dissipativo quando

$$(Ax, x)_X \leq 0, \quad \forall x \in D(A);$$

ii) Diz-se que A é m-dissipativo se for dissipativo e $Im(I\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$;
iii) Diz-se que A é acretivo (m-acretivo) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).

Teorema 1.11 (Lumer-Phillips). *Um operador A é gerador de um C_0-semigrupo de contrações se, e somente se, A é m-dissipativo e densamente definido.*

Demonstração: Ver [10].

Corolário 1.11.1. *Seja A um operador linear fechado densamente definido. Se A e seu adjunto A^* são dissipativos, então A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações.*

Demonstração: Ver [22].

1.6 O Problema de Cauchy Abstrato

No decorrer desta seção X denotará um espaço de Banach e $A : D(A) \subset X \to X$ um operador linear.

1.6.1 O Caso Homogêneo

Consideremos o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.9}$$

Definição 1.6.1. *Seja A gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Dado $u_0 \in X$, a aplicação $u \in C([0,\infty), X)$, que satisfaz (1.9) e é dada por $u = S(\cdot)u_0$ é denominada solução mild do problema (1.9).*

Definição 1.6.2. *Seja A gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Dado $u_0 \in D(A)$, a aplicação $u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$, que satisfaz (1.9) é denominada solução do problema (1.9).*

Teorema 1.12. *Se A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, então para cada $u_0 \in D(A)$, (1.9) tem uma única solução que é dada por $u = S(\cdot)u_0$.*

Demonstração: Ver [22].

Observemos que, quando $u_0 \in D(A)$, o problema (1.9) é resolvido em $C([0,\infty), X)$. O caso em que $u_0 \in X$ será discutido na próxima seção.

1.6.2 O Caso Não-Homogêneo

Consideremos $f : [0,\infty) \to X$ e o problema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t) + f(t), \quad t \in (0, \infty), \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Definição 1.6.3. *Sejam A o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $u_0 \in X$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$. A aplicação $u \in C([0,\infty), X)$ dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

é denominada solução mild do problema (1.10).

Definição 1.6.4. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Dado $u_0 \in D(A)$, a aplicação $u \in C([0,\infty); D(A)) \cap C^1((0,\infty); X)$ que satisfaz (1.10) é denominada solução (clássica) de (1.10).*

Proposição 1.6.1. *Sejam A o gerador infinitesimal do C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; X)$. Então para todo $u_0 \in X$ o problema (1.10) admite, no máximo, uma solução que é dada por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \tag{1.11}$$

Demonstração: Ver [22].

Teorema 1.13. *Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $f \in L^1(0,T;X)$ e $v : [0,T] \to X$ dada por*

$$v(t) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds. \tag{1.12}$$

O Problema de Valor Inicial (1.10) tem solução $u : [0,T) \to X$ para cada $u_0 \in D(A)$ se uma das seguintes condições é satisfeita:

i) v é continuamente diferenciável;

ii) $v(t) \in D(A)$ para todo $t \in (0,T)$ e Av é contínua em $(0,T)$.

Reciprocamente, se (1.10) tem solução $u : [0,T) \to X$ para algum $u_0 \in D(A)$ então v satisfaz i) e ii).

Demonstração: Ver [22].

Corolário 1.13.1. *Sejam A o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ e $f \in L^1(0,T;X)$. Se $f(s) \in D(A)$ para todo $s \in (0,T)$ e $Af \in L^1(0,T;X)$ então para todo $u_0 \in D(A)$ o PVI (1.10) tem solução em $[0,T)$.*

Demonstração: Ver [22].

Observemos que, quando $u_0 \in D(A)$, o problema (1.10) é resolvido em $C([0,\infty),X)$. Para o caso em que $u_0 \in X$, temos o seguinte resultado

Teorema 1.14. *Sejam $T > 0$, A um operador densamente definido, A^* o operador adjunto de A, $f \in L^1(0,T;X)$, e $u_0 \in X$. O problema (1.10) tem uma única solução mild $u \in C([0,T];X)$ que satisfaz*

i) $\langle u(t), v\rangle_{X,X'}$ *é absolutamente contínua em $[0,T]$ para todo $v \in D(A^*)$;*

ii) $\dfrac{d}{dt}\langle u(t), v\rangle_{X,X'} = \langle u(t), A^*v\rangle_{X,X'} + \langle f(t), v\rangle_{X,X'}$, *para quase todo $t \in [0,T]$ e para todo $v \in D(A^*)$;*

iii) $u(0) = u_0$

se, e somente se, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo definido em X.

Demonstração: Ver [2].

O Teorema 1.14 também é válido para a solução mild do problema (1.9), desde que consideremos $f \equiv 0$.

1.7 O Teorema de Holmgren

Dado um operador diferencial de ordem m,

$$P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$$

com coeficientes constantes, a parte principal do operador $P(D)$ é dada por

$$P_m(D) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha D^\alpha.$$

Uma superfície $\phi(x) = \phi(x_0)$ com $\phi \in C^1(\Omega)$, onde Ω é um aberto de $\mathbb{R}^n$, e com $\nabla\phi(x_0) \neq 0$, é denominada superfície característica em x_0 com respeito ao operador diferencial P de ordem m se $P_m(\nabla\phi(x_0)) = 0$.

Teorema 1.15 (Holmgren). *Sejam $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ dois abertos convexos do $\mathbb{R}^n$ tais que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ e seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes, tal que todo plano π característico de P(D) que verifica $\pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfaz também $\pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Então, qualquer solução $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em $\mathcal{O}_1$, verifica $u = 0$ em $\mathcal{O}_2$.*

Demonstração: Ver [12].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

Vamos estudar, neste capítulo, a existência global de solução da equação generalizada de Korteweg-de Vries no intervalo limitado da reta $I = (0, L)$ com dissipação localizada, dada pelo seguinte problema de valor inicial e de fronteira (PVIF) não linear

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L) \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $T > 0$ é dado, $b \equiv b(x) \in L^2(I)$ é uma função não negativa, cujo suporte ω é um subconjunto de I e a função $a \equiv a(\mu)$ é uma função de classe $C^1(\mathbb{R})$, satisfazendo a seguinte condição de crescimento

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1 + |x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x - y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$.

2.2 O Caso Linear Homogêneo

Consideremos, inicialmente, o problema linear abaixo com condições de fronteira homogêneas e sem forças externas atuando no domínio

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.2}$$

Seja $A : D(A) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ o operador linear definido por

$$Af = -f_x - f_{xxx}$$

cujo domínio é

$$D(A) = \{f \in H^3(I); f(0) = f(L) = f_x(L) = 0\}.$$

A formulação abstrata de (2.2) é

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt}(t) = Au(t), \quad t \in (0,\infty), \\ u(0) = \phi. \end{cases} \tag{2.3}$$

Nosso intuito é provar que o problema acima possui solução utilizando o Corolário 1.11.1.

Notemos que $C_0^\infty(I) \subset D(A) \subset L^2(I)$ com $\overline{C_0^\infty(I)}^{L^2(I)} = L^2(I)$, donde resulta que $D(A)$ é denso em $L^2(I)$. Faz sentido, então, considerarmos o operador adjunto de A, $A^* : D(A^*) \subset L^2(I) \to L^2(I)$.

De modo a obtermos o operador adjunto, lembremos que este é dado por

$$D(A^*) = \{g \in L^2(I); \exists! u \in L^2(I) \text{ tal que } (Af, g)_{L^2(I)} = (f, u)_{L^2(I)}, \quad \forall f \in D(A)\}$$

e

$$
\begin{aligned}
A^* : D(A^*) \subset L^2(I) &\longrightarrow L^2(I) \\
g &\longmapsto u, \qquad \text{onde } u = A^* g.
\end{aligned}
$$

Lembremos também que A e A^* satisfazem a relação de adjunção

$$(Af, g) = (-f_x - f_{xxx}, g) = (f, A^* g), \quad \forall f \in D(A).$$

Note que

$$
\begin{aligned}
(Af, g)_{L^2(I)} &= \int_0^L (Af) g dx \\
&= -\int_0^L f_x g dx - \int_0^L f_{xxx} g dx \\
&= -\left[fg \Big|_0^L - \int_0^L f g_x dx \right] - \left[f_{xx} g \Big|_0^L - \int_0^L f_{xx} g_x dx \right] \\
&= \int_0^L f g_x dx - f_{xx}(L) g(L) + f_{xx}(0) g(0) + \left[f_x g_x \Big|_0^L - \int_0^L f_x g_{xx} dx \right] \\
&= \int_0^L f g_x dx - f_{xx}(L) g(L) + f_{xx}(0) g(0) - f_x(0) g_x(0) - \left[f g_{xx} \Big|_0^L - \int_0^L f g_{xxx} dx \right] \\
&= \int_0^L f g_x dx + \int_0^L f g_{xxx} dx - f_{xx}(L) g(L) + f_{xx}(0) g(0) - f_x(0) g_x(0) \\
&= (f, g_x + g_{xxx})_{L^2(I)} - f_{xx}(L) g(L) + f_{xx}(0) g(0) - f_x(0) g_x(0), \quad \forall f \in D(A).
\end{aligned}
$$

Portanto, observadas as condições satisfeitas pela função $f \in D(A)$, concluímos que g satisfaz

i) $g \in H^3(I)$;

ii) $g(0) = g(L) = g_x(0) = 0$;

iii) $A^* g = g_x + g_{xxx}$.

Logo $D(A^*) = \{g \in H^3(I); g(0) = g(L) = g_x(0) = 0\}$ e $A^* g = g_x + g_{xxx}$.

Agora, provemos que A e A^* são dissipativos. Com efeito, sejam $f \in D(A)$ e

$g \in D(A^*)$, temos

$$\begin{aligned}
(Af,f)_{L^2(I)} &= -\int_0^L f_{xxx} f dx - \int_0^L f_x f dx \\
&= -\left[f_{xx} f \Big|_0^L - \int_0^L f_{xx} f_x dx \right] - \frac{1}{2} f^2 \Big|_0^L \\
&= \int_0^L f_{xx} f_x dx = \frac{1}{2} f_x^2 \Big|_0^L = -\frac{1}{2}[f_x(0)]^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(A^*g,g)_{L^2(I)} &= \int_0^L g_x g dx + \int_0^L g_{xxx} g dx \\
&= \frac{1}{2} g \Big|_0^L + \left[g_{xx} g \Big|_0^L - \int_0^L g_{xx} g dx \right] \\
&= -\int_0^L g_{xx} g_x dx = -\frac{1}{2} g_x^2 \Big|_0^L = -\frac{1}{2}[g_x(L)]^2 \leq 0,
\end{aligned}$$

o que mostra o desejado.

Por fim, provemos que A é fechado utilizando o Teorema 1.10. Provaremos que $A = A^{**}$. De modo a não sobrecarregar a notação, escrevamos $A^* = B$ e provemos que $B^* = A$. Observemos que $B^* : D(B^*) \subset L^2(I) \to L^2(I)$ existe, pois $D(B)$ é denso em $L^2(I)$. Temos

$$D(B^*) = \{ f \in L^2(I); \exists! u \in L^2(I) \text{ tal que } (Bg,f)_{L^2(I)} = (g,u)_{L^2(I)}, \quad \forall g \in D(B) \}$$

e

$$\begin{aligned}
B^* : D(B^*) \subset L^2(I) &\longrightarrow L^2(I) \\
f &\longmapsto u, \qquad \text{onde } u = A^* f.
\end{aligned}$$

Lembremos que B e B^* satisfazem a relação de adjunção

$$(Bg,f) = (g_x + g_{xxx}, f) = (g, B^* f), \quad \forall g \in D(B).$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
(Bg,f)_{L^2(I)} &= \int_0^L (Bg) f dx \\
&= \int_0^L g_x f dx + \int_0^L g_{xxx} f dx \\
&= \left[gf\Big|_0^L - \int_0^L g f_x dx \right] + \left[g_{xx} f\Big|_0^L - \int_0^L g_{xx} f_x dx \right] \\
&= -\int_0^L g f_x dx + g_{xx}(L) f(L) - g_{xx}(0) f(0) - \left[g_x f_x\Big|_0^L - \int_0^L g_x f_{xx} dx \right] \\
&= -\int_0^L g f_x dx + g_{xx}(L) f(L) - g_{xx}(0) f(0) - g_x(L) f_x(L) + \left[g f_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L g f_{xxx} \right] \\
&= -\int_0^L g f_x dx - \int_0^L g f_{xxx} dx + g_{xx}(L) f(L) - g_{xx}(0) f(0) - g_x(L) f_x(L) \\
&= (g, -f_x - f_{xxx})_{L^2(I)} + g_{xx}(L) f(L) - g_{xx}(0) f(0) - g_x(L) f_x(L), \quad \forall g \in D(B),
\end{aligned}
$$

e ainda, observadas as condições satisfeitas pela função $g \in D(B)$, concluímos que f satisfaz

i) $f \in H^3(I)$;

ii) $f(0) = f(L) = f_x(L) = 0$;

iii) $B^* f = -f_x - f_{xxx}$.

Logo $D(B^*) = \{g \in H^3(I); g(0) = g(L) = g_x(0) = 0\}$ e $B^* f = -f_x - f_{xxx}$. Portanto, $A = A^{**}$, e pelo Teorema 1.10 resulta o desejado. Por meio do Corolário 1.11.1, obtemos que A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{W(t)\}_{t \geq 0}$, em $L^2(I)$.

Conforme visto na seção 1.6.1, quando $\phi \in L^2(I)$, a aplicação $W(\cdot)\phi \in C([0,\infty), L^2(I))$ é solução mild de (2.3). Além disso, sendo $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ semigrupo de contrações, segue $W(\cdot)\phi \in C_b([0,\infty), L^2(I))$. Quando $\phi \in D(A)$, temos $W(\cdot)\phi \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1((0,\infty), L^2(I))$ e neste caso, $W(\cdot)\phi$ é a solução de (2.3).

Lema 2.2.1. *Para qualquer $\phi \in L^2(I)$, $u(t) = W(t)\phi$ satisfaz*

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + \int_0^t u_x^2(0,\tau) d\tau \leq ||\phi||^2_{L^2(I)}, \tag{2.4}$$

$$\int_0^L xu^2(x,t)dx + 3\int_0^t \int_0^L u_x^2(x,\tau)dxd\tau \leq (L+t)\int_0^L \phi^2(x)dx, \tag{2.5}$$

para todo $t \geq 0$, *onde* $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ *é o semigrupo de contrações gerado pelo operador* A *de (2.3). Além disso,* $u_x \in C_b([0,L];L^2(\mathbb{R}_+))$ *e existe uma constante* $C>0$ *tal que*

$$\sup_{x\in I} ||u_x(x,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C||\phi||_{L^2(I)}. \tag{2.6}$$

Demonstração: Dado $\phi \in D(A)$, sabemos que $u(\cdot) = W(\cdot)\phi : [0,\infty) \to L^2(I)$ é a solução do problema abstrato (2.3), e portanto, resolve o problema

$$\begin{cases} u_\tau + u_x + u_{xxx} = 0, & (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty) \\ u(0,\tau) = u(L,\tau) = u_x(L,\tau) = 0, & \tau \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in I, \end{cases} \tag{2.7}$$

onde a equação é verifica quase sempre.

Fixemos $t \geq 0$ arbitrário.

Multiplicando a primeira equação de (2.7) por u obtemos

$$uu_\tau + uu_x + uu_{xxx} = 0.$$

Integrando em $(0,t)\times(0,L)$ temos

$$\int_0^t \int_0^L uu_\tau dxd\tau + \int_0^t \int_0^L uu_x dxd\tau \int_0^t \int_0^L uu_{xxx} dxd\tau = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^L uu_\tau dx d\tau &= \int_0^L\int_0^t uu_\tau d\tau dx\\
&= \int_0^L\int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(u^2)d\tau dx\\
&= \frac{1}{2}\int_0^L [u^2(x,t)-u^2(x,0)]dx\\
&= \frac{1}{2}||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} - \frac{1}{2}||\phi||^2_{L^2(I)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^L uu_x dx d\tau &= \int_0^t\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u^2)dx d\tau\\
&= \int_0^t \frac{1}{2}[u^2(L,\tau)-u^2(0,\tau)]d\tau = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t\int_0^L uu_{xxx} dx d\tau &= \int_0^t \left[uu_{xx}\Big|_0^L - \int_0^L u_{xx}u_x \right] d\tau\\
&= -\int_0^t\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dx}(u_x^2)dx d\tau\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^t [u_x^2(L,\tau)-u_x^2(0,\tau)]d\tau\\
&= \frac{1}{2}\int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} - \frac{1}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau = 0,$$

o que implica

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + \int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau = ||\phi||^2_{L^2(I)}.$$

Para obter (2.5), multipliquemos a primeira equação de (2.7) por $2xu$ e, em seguida, integremos em $(0,t)\times(0,L)$. Assim, obtemos

$$\int_0^t\int_0^L 2xuu_\tau dx d\tau + \int_0^t\int_0^L 2xuu_x dx d\tau \int_0^t\int_0^L 2xuu_{xxx} dx d\tau = 0.$$

No entanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^l 2xuu_\tau dx d\tau &= \int_0^L 2x \int_0^t uu_\tau d\tau dx \\
&= \int_0^L 2x \int_0^t \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(u^2) d\tau dx \\
&= \int_0^L x[u^2(x,t) - u^2(x,0)]dx \\
&= \int_0^L xu^2(x,t)dx - \int_0^L x\phi^2(x)dx;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L 2xuu_x dx d\tau &= \int_0^t 2\left[\frac{1}{2}u^2 x\Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{2}u^2 dx\right] d\tau \\
&= -\int_0^t \int_0^L u^2 dx d\tau;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t \int_0^L 2xuu_{xxx} dx d\tau &= \int_0^t 2\left[u_{xx}ux\Big|_0^L - \int_0^L u_{xx}(u + xu_x)dx\right] d\tau \\
&= -2\int_0^t \left[u_x u\Big|_0^L - \int_0^L u_x^2 dx + \frac{1}{2}(u_x^2)x\Big|_0^L - \int_0^L \frac{1}{2}(u_x^2)dx\right] d\tau \\
&= 3\int_0^t \int_0^L u_x^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^L xu^2(x,t)dx - \int_0^L x\phi^2(x)dx - \int_0^t \int_0^L u^2 dx d\tau + 3\int_0^t \int_0^L u_x^2 dx d\tau = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\int_0^L xu^2(x,t)dx + 3\int_0^t \int_0^L u_x^2 dx d\tau &= \textstyle\int_0^L x\phi^2(x)dx + \int_0^t \int_0^L u^2 dx d\tau \\
&\leq L\int_0^L \phi^2(x)dx + \int_0^t \int_0^L u^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

De (2.4), obtemos

$$\int_0^t ||u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} d\tau \leq t\int_0^L \phi^2(x)dx.$$

Concluímos, então,

$$\int_0^L xu^2(x,t)dx + 3\int_0^t\int_0^L u_x^2 dxd\tau \leq (L+t)\int_0^L \phi^2(x)dx.$$

Ficam, então, provados (2.4) e (2.5) quando $\phi \in D(A)$. Por densidade, estendamos estas desigualdades. Com efeito, sejam, então, $\phi \in L^2(I)$ e $\{\phi_n\} \subset D(A)$ tais que $\phi_n \to \phi$ em $L^2(I)$ e consideremos $u(t) = W(t)\phi$ e $u_n = W(t)\phi_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall t \geq 0$. Temos

$$\{u_n\} \subset C([0,t]; D(A)) \cap C^1([0,t]; L^2(I)),$$

e

$$\|u_n(\tau) - u(\tau)\|_{L^2(I)} = \|W(\tau)\phi_n - W(\tau)\phi\|_{L^2(I)} \leq \|\phi_n - \phi\|_{L^2(I)} \quad \forall \tau \in [0,t]. \tag{2.8}$$

Logo, $u_n \to u$ em $L^\infty(0,t; L^2(I))$.

Como $\{\phi_n\} \subset D(A)$, então $\{u_n\}$ satisfaz (2.4) e (2.5), ou seja, para cada $n \in \mathbb{N}$, u_n verifica

$$\int_0^t \|u_n(\cdot,\tau)\|^2_{L^2(I)} d\tau \leq \int_0^t ||\phi_n||^2_{L^2(I)} d\tau \leq (L+t)\|\phi_n\|^2_{L^2(I)}$$

e

$$\int_0^t ||u_{n,x}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} d\tau \leq (L+t)||\phi_n||^2_{L^2(I)},$$

donde

$$||u_n||^2_{L^2(0,t;H^1(I))} = \int_0^t ||u_n(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} + ||u_{n,x}(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} d\tau \leq 2(L+t)||\phi_n||^2_{L^2(I)}.$$

Sendo $\{\phi_n\}$ é limitada em $L^2(I)$, resulta que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(0,t;H^1(I))$. Então existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ de $\{u_n\}$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup v_1$ em $L^2(0,t;H^1(I))$, para algum $v_1 \in L^2(0,t;H^1(I))$. Mas de (2.8) decorre que $u_n \to u$ em $L^\infty(0,t;L^2(I))$. Valem as imersões $L^\infty(0,t;L^2(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;L^2(I))$ e $L^2(0,t;H^1(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;L^2(I))$, donde resultam as convergências $u_{n_k} \rightharpoonup v_1$ em $L^2(0,t;L^2(I))$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Portanto, da unicidade do limite em $L^2(0,t;L^2(I))$ vem que $u = v_1$ e $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;H^1(I))$.

Por outro lado, da limitação de $\{u_{n_k}\}$ em $L^2(0,t;H^1(I))$, segue que $\{u_{n_k,x}\}$ é limitada em $L^2(0,t;L^2(I))$. Então existe $v_2 \in L^2(0,t;L^2(I))$ tal que $u_{n_k,x} \rightharpoonup v_2$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Considerando a identificação $L^2(Q_t) \equiv L^2(0,t;L^2(0,L))$, onde $Q_t = (0,t) \times (0,L)$, temos $L^2(Q_t) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_t)$, e então

$$u_{n_k} \to u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q_t),$$

$$u_{n_k} \to v_2 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q_t).$$

Como o operador derivação é um operador contínuo em $\mathcal{D}'(Q_t)$ segue que $u_{n_k,x} \to u_x$ em $\mathcal{D}'(Q_t)$, e portanto, $u_x = v_2 \in L^2(0,t;L^2(I))$ e então $u_{n_k,x} \rightharpoonup u_x$ em $L^2(0,t;L^2(I))$.

Das desigualdades

$$\int_0^L |u_n(x,\tau)|^2 x dx \leq L \int_0^L |u_n(x,\tau)|^2 dx \leq L||\phi_n||^2_{L^2(I)}, \quad \forall \tau \in [0,t]\,,$$

definindo $g_n(x,\tau) = u_n(x,\tau)\sqrt{x}$, para todo $x \in (0,L)$ e $\tau \in (0,t)$, segue que $\{g_n(\cdot,\tau)\}$ é limitada em $L^2(0,L)$, para todo $\tau \in (0,t)$. Como esta limitação não depende de τ, então $\{g_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,t;L^2(I))$, e então, existe $v_3 \in L^\infty(0,t;L^2(I))$ tal que $g_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} v_3$ em $L^\infty(0,t;L^2(I))$. Provemos que $g = v_3$ quase sempre, onde $g(x,\tau) = u(x,\tau)\sqrt{x}, \quad x \in (0,L), \tau \in (0,t)$. De fato, da imersão $L^\infty(0,t;L^2(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;L^2(I))$ obtemos $g_{n_k} \rightharpoonup v_3$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Como $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;L^2(I))$, vem que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^t \int_0^L \left[u_{n_k}(x,\tau)\sqrt{x} - u(x,\tau)\sqrt{x} \right] w(x,\tau) dx d\tau \right| \\
&\leq \sqrt{L} \left| \int_0^t \int_0^L \left[u_{n_k}(x,\tau) - u(x,\tau) \right] w(x,\tau) dx d\tau \right| \to 0, \quad \forall w \in L^2(0,t;L^2(I)),
\end{aligned}$$

donde concluímos que $g_{n_k} \rightharpoonup g$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Mas $L^\infty(0,t;L^2(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;L^2(I))$ implica $g_{n_k} \rightharpoonup v_3$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Logo, pela unicidade do limite, $v_3 = g$ quase sempre e $g_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} g$ em $L^\infty(0,t;L^2(I))$.

Observe ainda, que $C([0,t]\,;H^3(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;H^3(I)) \equiv H^3(0,L;L^2(0,t))$. Assim,

$u_{n,x} \in H^2(0,L;L^2(0,t)) \hookrightarrow C([0,L]\,;L^2(0,t))$, donde $u_{n,x}(0,\cdot) \in L^2(0,t)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por (2.4) segue que $||u_{n,x}(0,\cdot)||^2_{L^2(0,t)} \leq ||\phi_n||^2_{L^2(I)}$, e então, $\{u_{n,x}(0,\cdot)\}$ é limitada em $L^2(0,t)$. Agora, provemos que $u_{n_k,x}(0,\cdot) \rightharpoonup u_x(0,\cdot)$ em $L^2(0,t)$. Lembremos que $u \in L^2(0,t;H^1(I)) \equiv H^1(0,L;L^2(0,t)) \hookrightarrow C([0,L];L^2(0,t))$, logo, $u(0,\cdot) \in L^2(0,t) \hookrightarrow H^{-1}(0,t)$. Então, pela aplicação traço dada em (1.2), temos $u_x(0,\cdot) \in H^{-1}(0,t)$. Como $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;H^1(I))$ então $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $H^{-1}(0,t;H^1(I))$. Pela continuidade da aplicação traço (1.2), segue que $u_{n_k,x}(0,\cdot) \to u_x(0,\cdot)$ em $H^{-1}(0,t)$. Por outro lado, $\{u_{n,x}(0,\cdot)\}$ é limitada em $L^2(0,t)$, donde existe $v_4 \in L^2(0,t)$ tal que $u_{n_k,x}(0,\cdot) \rightharpoonup v_4$ em $L^2(0,t)$, e portanto, $u_{n_k,x}(0,\cdot) \to v_4$ em $H^{-1}(0,t)$. Pela unicidade do limite, $v_4 = u_x(0,\cdot) \in L^2(0,t)$ e $u_{n_k,x}(0,\cdot) \rightharpoonup u_x(0,\cdot)$ em $L^2(0,t)$.

Temos as seguintes convergências:

$$\phi_n \to \phi \quad \text{em } L^2(I), \tag{2.9}$$

$$u_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em } L^\infty(0,t;L^2(I)), \tag{2.10}$$

$$u_{n_k,x} \rightharpoonup u_x \quad \text{em } L^2(0,t;L^2(I)), \tag{2.11}$$

$$g_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} g \quad \text{em } L^\infty(0,t;L^2(I)), \tag{2.12}$$

$$u_{n_k,x}(0,\cdot) \rightharpoonup u_x(0,\cdot) \quad \text{em } L^2(0,t). \tag{2.13}$$

Obtemos, então, por (2.9), (2.10) e (2.13),

$$\begin{aligned}
&||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + ||u_x(0,\cdot)||_{L^2(0,t)} - ||\phi||^2_{L^2(I)} \\
&\leq \liminf_{k\longrightarrow\infty}\{||u_{n_k}(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + ||u_{n_k,x}(0,\cdot)||_{L^2(0,t)} - ||\phi_n||^2_{L^2(I)}\} = 0
\end{aligned}$$

e por (2.11) e (2.12),

$$\begin{aligned}
&\int_0^L xu^2(x,t)dx + 3\int_0^t\int_0^L u_x^2(x,\tau)dxd\tau = ||g(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + 3||u_x||^2_{L^2(0,t;L^2(I))} \\
&\leq \liminf_{k\longrightarrow\infty}\{||g_{n_k}(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + 3||u_{n_k,x}||^2_{L^2(0,t;L^2(I))}\} \qquad . \\
&\leq (L+t)\liminf_{k\longrightarrow\infty}||\phi_n||^2_{L^2(I)} = (L+t)||\phi||^2_{L^2(I)},
\end{aligned}$$

A demonstração de (2.6) pode ser encontrada em [3].

□

2.3 O Caso Linear Não-Homogêneo

Agora, consideremos o problema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} u_\tau + u_x + u_{xxx} = f, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty) \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & \tau \in (0,\infty), \\ u(x,0) = 0, & x \in (0,L), \end{cases} \tag{2.14}$$

Em termos do operador A já definido, a formulação abstrata de (2.14) é dada por

$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau}(\tau) = Au(\tau) + f(\tau), \quad \forall \tau \in (0,\infty) \\ u(0) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Pela teoria de semigrupos apresentada na seção 1.6.2, para toda $f \in {L^1}_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(I))$, a função

$$u(\tau) = \int_0^\tau W(\tau - s) f(s) ds \tag{2.16}$$

pertence a $C([0,\infty); L^2(I))$ e é, por definição, solução mild de (2.15). Além disso, se, para cada $t > 0$, $f(\tau) \in D(A)$, para todo $0 < \tau < t$ e $Af \in L^1(0,t; L^2(I))$, então (2.16) é solução de (2.15) sobre $[0,t)$, ou seja, $u \in C([0,t), D(A)) \cap C^1((0,t); L^2(I))$ e satisfaz (2.15) em $[0,t)$. No caso em que (2.15) tem solução, ela também é dada por (2.16), e portanto, é única.

Lema 2.3.1. *Para toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(I))$, a solução mild u de (2.14) satisfaz:*

$$||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} + ||u_x(0,\cdot)||_{L^2(0,t)} \leq 2||f||_{L^1(0,t;L^2(I))} \tag{2.17}$$

e

$$\int_0^L u^2(x,t)dx + \int_0^t \int_0^L u_x^2(x,\tau) dx d\tau \leq 2(L+t)||f||^2_{L^1(0,t;L^2(I))}, \tag{2.18}$$

para todo $t \geq 0$. *Além disso,* $u_x \in C_b([0,L]; L^2(\mathbb{R}_+))$ *e existe uma constante* $C > 0$ *tal que*

$$\sup_{x\in I} ||u_x(x,\cdot)||_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq C||f||_{L^1(0,T;L^2(I))}. \tag{2.19}$$

Demonstração: Consideremos $t > 0$ e, inicialmente, suponhamos que u seja solução de (2.14). Multiplicando a primeira equação de (2.14) por $2u$ e integrando em $(0,t)\times(0,L)$ temos

$$2\int_0^t\int_0^L uu_\tau dxd\tau + 2\int_0^t\int_0^L uu_x dxd\tau + 2\int_0^t\int_0^L uu_{xxx}dxd\tau = 2\int_0^t\int_0^L fudxd\tau.$$

Utilizando integração por partes, como no Lema 2.2.1, resulta que

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + \int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau &= 2\int_0^t\int_0^L fudxd\tau \\ &\leq 2\int_0^t ||f(\cdot,\tau)||_{L^2(I)}||u(\cdot,\tau)||_{L^2(I)}d\tau. \end{aligned}$$

Mas com (2.16) e o fato de que $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações,

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,\tau)||_{L^2(I)} &= \left|\left|\int_0^\tau W(\tau-s)f(s)ds\right|\right|_{L^2(I)} \\ &\leq \int_0^\tau ||W(\tau-s)f(s)||_{L^2(I)} \\ &\leq \int_0^\tau ||f(s)||_{L^2(I)}ds, \quad \forall \tau \in [0,t], \end{aligned}$$

e então, $\sup\limits_{0\leq\tau\leq t} ||u(\cdot,\tau)||_{L^2(I)} \leq ||f||_{L^1(0,t;L^2(I))}$. Logo,

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + \int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau \leq 2||f||^2_{L^1(0,t;L^2(I))}, \tag{2.20}$$

donde obtemos (2.17) quando u é solução.

Agora, multiplicando a primeira equação de (2.14) por $2xu$ e integrando em $(0,t)\times(0,L)$ obtemos

$$\int_0^t\int_0^L 2xuu_\tau dxd\tau + \int_0^t\int_0^L 2xuu_x dxd\tau \int_0^t\int_0^L 2xuu_{xxx}dxd\tau = \int_0^t\int_0^L 2xfudxd\tau.$$

Novamente, integrando por partes como no Lema 2.2.1 e utilizando as desigualdadeds de Hölder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_0^L xu^2(x,t)dx + 3\int_0^t\int_0^L u_x^2 dxd\tau\\
&= \int_0^t\int_0^L u^2 dxd\tau + \int_0^t\int_0^L 2xufdxd\tau\\
&\leq \int_0^t\int_0^L u^2 dxd\tau + 2L\int_0^t ||u(\cdot,\tau)||_{L^2(I)}||f(\cdot,\tau)||_{L^2(I)}d\tau\\
&\leq t\sup_{0\leq\tau\leq t}||u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} + 2L\sup_{0\leq\tau\leq t}||u(\cdot,\tau)||_{L^2(I)}||f||_{L^1(0,t;L^2(I))}\\
&\leq t\sup_{0\leq\tau\leq t}||u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} + L\sup_{0\leq\tau\leq t}||u(\cdot,\tau)||^2_{L^2(I)} + L||f||^2_{L^1(0,t;L^2(I))}\\
&\leq 2(t+L)||f||^2_{L^1(0,t;L^2(I))},
\end{aligned}$$

donde obtemos (2.18), quando u é solução. Logo, o resultado está provado quando u é solução.

Agora, suponhamos que u seja solução mild de (2.14). Então, para $f\in L^1(0,t;L^2(I))$, seja $\{g_n\}\subset C_0^\infty((0,t)\times(0,L))$ com $g_n\to f$ em $L^1(0,t;L^2(I))$. Sejam ainda

$$u(\tau) = \int_0^\tau W(\tau-s)f(s)ds, \quad \forall\tau\in[0,t],$$

$$u_n(\tau) = \int_0^\tau W(\tau-s)g_n(s)ds, \quad \forall\tau\in[0,t].$$

Temos $u\in C([0,t);L^2(I)), u_n\in C^1(0,t;L^2(I))\cap C([0,t);D(A)), \quad \forall n\in\mathbb{N}$, e

$$||u_n(\cdot,t)||_{L^2(I)} + ||u_{n,x}(0,\cdot)||_{L^2(0,t)} \leq 2||g_n||_{L^1(0,t;L^2(I))}, \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Observe que $u_n(\tau)\in H^3(I)$, para todo $\tau\in[0,t)$ e $u_n\in C(0,t;H^3(I))\hookrightarrow L^2(0,t;H^3(I))\equiv H^3(0,L;L^2(0,t))$. Assim, $u_{n,x}\in H^2(0,L;L^2(0,t))\hookrightarrow C([0,L];L^2(0,t))$, donde $u_{n,x}(0,\cdot)\in$

$L^2(0,t), \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Para cada $\tau \in [0,t)$, temos

$$\begin{aligned} ||u_n(\tau) - u(\tau)||_{L^2(I)} &= \left|\left| \int_0^\tau W(\tau - s)[f(s) - g_n(s)]ds \right|\right|_{L^2(I)} \\ &\leq \int_0^\tau ||f(s) - g_n(s)||_{L^2(I)} ds \\ &\leq ||f - g_n||_{L^1(0,t;L^2(I))}, \end{aligned}$$

donde $u_n \to u$ em $L^\infty(0,t;L^2(I))$. Desta convergência, obtemos que $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(0,t;L^2(I))$. Por (2.18) resulta que $\{u_{n,x}\}$ também é limitada em $L^2(0,t;L^2(I))$. Logo, $\{u_n\}$ é limitada em $L^2(0,t;H^1(I))$, e daí, existe uma subsequência $\{u_{n_k}\}$ tal que $u_{n_k} \rightharpoonup w$ em $L^2(0,t;H^1(I))$ para algum $w \in L^2(0,t;H^1(I))$. Pela imersão $L^2(0,t;H^1(I)) \hookrightarrow L^2(0,t;L^2(I))$ obtemos $u_{n_k} \rightharpoonup w$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Como $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;L^2(I))$ e $u_{n_k} \rightharpoonup w$ em $L^2(0,t;L^2(I))$, segue que $u = w$. Com isso, e sabendo, por (2.17), que $\{u_{n_k,x}(0,\cdot)\}$ é limitada em $L^2(0,t)$, segue que $u_{n_k,x}(0,\cdot) \rightharpoonup u_x(0,\cdot)$ em $L^2(0,t)$. Então,

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} + ||u_x(0,\cdot)||_{L^2(0,t)} &\leq \liminf_{k\to\infty} \{||u_{n_k}(\cdot,t)||_{L^2(I)} + ||u_{n_k,x}(0,\cdot)||_{L^2(0,t)}\} \\ &\leq 2 \lim_{k\to\infty} ||g_n||_{L^1(0,t;L^2(I))} = 2||f||_{L^1(0,t;L^2(I))}. \end{aligned}$$

Definamos $h_n(x,\tau) = u_n(x,\tau)\sqrt{x}$ e $h(x,\tau) = u(x,\tau)\sqrt{x}$ para $0 \leq x \leq L$ e $0 \leq \tau \leq t$. Temos

$$||h_{n_k}(\cdot,t) - h(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} = \int_0^L |u_{n_k}(x,t) - u(x,t)|^2 x dx \leq L||u_{n_k}(\cdot,t) - u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \to 0.$$

Já vimos que $u_{n_k} \rightharpoonup u$ em $L^2(0,t;L^2(I))$, e como $\{u_{n_k,x}\}$ é limitada em $L^2(0,t;L^2(I))$, existe $v \in L^2(0,t;L^2(I))$ tal que $u_{n_k,x} \rightharpoonup v$ em $L^2(0,t;L^2(I))$. Entretanto, como $L^2(0,t;L^2(I)) \equiv L^2(Q_t)$, $Q_t = (0,t) \times (0,L)$ e $L^2(Q_t) \hookrightarrow \mathcal{D}'(Q_t)$, com a continuidade do operador derivada, resulta que $v = u_x$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^L xu^2(x,t)dx + \int_0^t \int_0^L dxd\tau &= ||h(t)||^2_{L^2(I)} + ||u_x||^2_{L^2(0,t;L^2(I))} \\ &\leq \liminf_{k\to\infty} \{||g_{n_k}(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} + ||u_{n_k,x}||^2_{L^2(0,t;L^2(I))}\} \\ &\leq 2(L+t) \lim_{k\to\infty} ||g_{n_k}||^2_{L^1(0,t;L^2(I))} = 2(L+t)||f||^2_{L^1(0,t;L^2(I))}.\end{aligned}$$

A demonstração de (2.19) pode ser encontrada em [3].

□

2.4 Estimativas à Priori

Agora, considerando $T > 0$, definamos

$$Y_{0,T} = \{v \in C([0,T]\,; L^2(I)) \cap L^2(0,T; H^1(I)); v_x \in C([0,L]\,; L^2(0,T))\}$$

que munido da norma

$$||v||_{Y_{0,T}} = \left(||v||^2_{C([0,T];L^2(I))} + ||v||^2_{L^2(0,T;H^1(I)} + ||v_x||^2_{C([0,L];L^2(0,T))}\right)^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Banach.

Definimos também

$$Y_{3,T} = \{v \in C([0,T]\,; H^3(I)) \cap L^2(0,T; H^4(I)); v_x \in C([0,L]\,; L^2(0,T))\}$$

que munido da norma

$$||v||_{Y_{3,T}} = \left(||v||^2_{C([0,T];H^3(I))} + ||v||^2_{L^2(0,T;H^4(I)} + ||v_x||^2_{C([0,L];L^2(0,T))}\right)^{\frac{1}{2}},$$

também é um espaço de Banach.

Lema 2.4.1. *Seja $a \in C^0(\mathbb{R})$ satisfazendo $|a(\mu)| \leq K(1+|\mu|^p)$, $\forall \mu \in \mathbb{R}$, para algum $K > 0$*

e com $1 \leq p < 2$. *Então existe* $C > 0$ *tal que para quaisquer* $T > 0$ *e* $u, v \in Y_{0,T}$, *vale*

$$\int_0^T ||a(u(\cdot,t))v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt \leq CT^{\frac{2-p}{4}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + CT^{\frac{1}{2}}(1+||u||^p_{Y_{0,T}})||v||_{Y_{0,T}}.$$

Demonstração: Sejam $u, v \in Y_{0,T}$ e $1 \leq p < 2$. Note que

$$|a(u(x,t))| \leq K(|u(x,t)|^p + 1) \leq K(||u(\cdot,t)||^p_{L^\infty(I)} + 1),$$

o que implica

$$\left(\int_0^L |a(u(x,t))v_x(x,t)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq K\left(||u(\cdot,t)||^p_{L^\infty(I)} + 1\right)||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}$$

e com

$$\begin{aligned} ||u(\cdot,t)||^p_{L^\infty(I)} &\leq C_1\left(||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} + ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)}||u_x(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)}\right)^p \\ &\leq 2^p C_1\left(||u(\cdot,t)||^p_{L^2(I)} + ||u(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||u_x(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}\right), \end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é a constante obtida pelo Corolário 1.1.8.1, resulta que

$$\begin{aligned} ||a(u(\cdot,t))v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} &\leq K||u(\cdot,t)||^p_{L^\infty(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} + k||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} \\ &\leq 2^p KC_1||u(\cdot,t)||^p_{L^2(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} \\ &+ 2^p KC_1||u(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||u_x(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} + K||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}. \end{aligned}$$

Temos

$$\sup_{0\leq t\leq T}||u(\cdot,t)||_{L^2(I)} = ||u||_{C([0,T];L^2(I))} \leq ||u||_{Y_{0,T}}; \tag{2.22}$$

$$\left(\int_0^T ||u_x(\cdot,t)||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}} = ||u_x||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq ||u||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq ||u||_{Y_{0,T}}; \tag{2.23}$$

$$\left(\int_0^T ||v_x(\cdot,t)||^{\frac{4}{4-p}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{4-p}{4}} \leq T^{\frac{2-p}{4}}\left(\int_0^T ||v_x(\cdot,t)||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{2-p}{4}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq T^{\frac{2-p}{4}}||v||_{Y_{0,T}}. \tag{2.24}$$

Com a desigualdade de Hölder, (2.22) e (2.23), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u(\cdot,t)||^p_{L^2(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt &\leq ||u||^p_{C([0,T];L^2(I))}\int_0^T ||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt \\ &\leq ||u||^p_{C([0,T];L^2(I))}T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))} \\ &\leq T^{\frac{1}{2}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}};\end{aligned}$$

Com a desigualdade de Hölder, (2.22),(2.23) e (2.24), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||u_x(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} &\leq ||u||^{\frac{p}{2}}_{C([0,T];L^2(I))}\int_0^T ||u_x(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt \\ &\leq ||u||^{\frac{p}{2}}_{Y_{0,T}}\left(\int_0^T ||u_x(\cdot,t)||^{\frac{p}{2}\cdot\frac{4}{p}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p}{4}} \\ &\quad\times\left(\int_0^T ||v_x(\cdot,t)||^{\frac{4}{4-p}}_{L^2(I)}\right)^{\frac{4-p}{4}} \\ &\leq T^{\frac{2-p}{4}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}};\end{aligned}$$

Com a desigualdade de Hölder e (2.23), obtemos

$$\int_0^T ||v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq T^{\frac{1}{2}}||v||_{Y_{0,T}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T ||a(u(\cdot,t))v_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt &\leq 2^pKC_1T^{\frac{1}{2}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + 2^pKC_1T^{\frac{2-p}{4}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} \\ &+ KT^{\frac{1}{2}}||v||_{Y_{0,T}} \\ &\leq CT^{\frac{2-p}{4}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + CT^{\frac{1}{2}}\left(1+||u||^p_{Y_{0,T}}\right)||v||_{Y_{0,T}},\end{aligned}$$

onde $C = \max\{4KC_1, K\}$.

$\square$

Lema 2.4.2. *Existe uma constante $C > 0$, que depende apenas de L, tal que para todo $T > 0$, $1 \leq p < 2$, $b \in L^2(I)$ e $u, v, w \in Y_{0,T}$, vale:*

$$\int_0^T ||bu||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{1}{2}}||b||_{L^2(I)}||u||_{Y_{0,T}}, \tag{2.25}$$

$$\int_0^T ||uw_x||_{L^2(I)}dt \leq CT^{\frac{1}{4}}||u||_{Y_{0,T}}||w||_{Y_{0,T}}, \tag{2.26}$$

$$\int_0^T ||u|w|^{p-1}w_x||_{L^2(I)}dt \leq CT^{\frac{2-p}{4}}||u||_{Y_{0,T}}||w||_{Y_{0,T}}^p, \tag{2.27}$$

$$\int_0^T ||u|v|^{p-1}w_x||_{L^2(I)}dt \leq CT^{\frac{2-p}{4}}||u||_{Y_{0,T}}||w||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}}^{p-1}. \tag{2.28}$$

Demonstração: Provemos (2.25). Utilizando a desigualdade de Hölder e (2.23), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||bu||_{L^2(I)}dt &\leq \int_0^T ||u(\cdot,t)||_{C([0,L])}||b||_{L^2(I)}dt \\
&= ||b||_{L^2(I)}\int_0^T ||u(\cdot,t)||_{C([0,L])}dt \leq ||b||_{L^2(I)}T^{\frac{1}{2}}||u||_{L^2(0,T;C([0,L]))} \\
&\leq C_L T^{\frac{1}{2}}||b||_{L^2(I)}||u||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq C_L T^{\frac{1}{2}}||b||_{L^2(I)}||u||_{Y_{0,T}},
\end{aligned}$$

onde C_L é a constante da imersão $H^1(0,L) \hookrightarrow C([0,L])$.

Provemos (2.26). Sendo $C_1 > 0$ a constante obtida pelo Corolário 1.1.8.1, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||uw_x||_{L^2(I)}dt &\leq \int_0^T \left(||u(\cdot,t)||_{L^\infty(I)}||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}\right)dt \\
&\leq C_1 \underbrace{\int_0^T ||u(\cdot,t)||_{L^2(I)}||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt}_{=I_1} \\
&+ C_1 \underbrace{\int_0^T ||u(\cdot,t)||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}||u_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}^{\frac{1}{2}}||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)}dt}_{=I_2}.
\end{aligned}$$

Vamos estimar as integrais I_1 e I_2. Utilizando a desigualdade de Hölder e (2.22)

temos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^T ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\
&\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];L^2(I))} \int_0^T ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\
&\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} \left(\int_0^T ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}.4}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T ||w_x(\cdot,t)||^{\frac{4}{3}}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{3}{4}} \\
&= ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} ||u||^{\frac{1}{2}}_{L^2(0,T;L^2(I))} T^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T ||w_x(\cdot,t)||^{2}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como

$$||u||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq ||u||_{Y_{0,T}} \tag{2.29}$$

e com (2.23) resulta

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} T^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T ||w_x(\cdot,t)||^{2}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{4}} ||w||_{Y_{0,T}} ||u||_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Novamente, pela desigualdade de Hölder e as desigualdades (2.22) e (2.23),

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^T ||u(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||u_x(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\
&\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{C([0,T];L^2(I))} \int_0^T ||u_x(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}}_{L^2(I)} ||w_x(\cdot,t)||_{L^2(I)} dt \\
&\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} \left(\int_0^T ||u_x(\cdot,t)||^{\frac{1}{2}.4}_{L^2(I)} \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T ||w_x(\cdot,t)||^{\frac{4}{3}}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} ||u||^{\frac{1}{2}}_{Y_{0,T}} T^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^T ||w_x(\cdot,t)||^{2}_{L^2(I)} dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq T^{\frac{1}{4}} ||w||_{Y_{0,T}} ||u||_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_0^T ||uw_x||_{L^2(I)} dt \leq C_1 T^{\frac{1}{4}} ||w||_{Y_{0,T}} ||u||_{Y_{0,T}}.$$

Observe que (2.27) é um caso particular de (2.28), assim, vamos provar esta última desigualdade. Quando $p = 1$, (2.28) reduz-se a (2.26). Seja, então, $1 < p < 2$. Temos

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u|v|^{p-1}w_x||_{L^2(I)}dt &\leq \int_0^T ||u||_{L^\infty(I)}||v||^{p-1}_{L^\infty(I)}||w_x||_{L^2(I)}dt \\ &\leq \left(\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(I)}||v||^{2p-2}_{L^\infty(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||w_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(I)}||v||^{2p-2}_{L^\infty(I)}\right)^{\frac{1}{2}}||w||_{Y_{0,T}}.\end{aligned}$$

Logo, basta provar que

$$\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(I)}||v||^{2p-2}_{L^\infty(I)}dt \leq 4C_1^4T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}}.$$

Pelo Corolário 1.1.8.1, temos

$$\begin{aligned}&||u||^2_{L^\infty(I)}||v||^{2p-2}_{L^\infty(I)} \\ &\leq C_1^4\Big(||u||^2_{L^2(I)} + ||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)}\Big)\Big(||v||^{2p-2}_{L^2(I)} + ||v||^{p-1}_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}\Big) \\ &= C_1^4\Big(||u||^2_{L^2(I)}||v||^{2p-2}_{L^2(I)} + ||u||^2_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)} + ||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)}||v||^{2p-2}_{L^2(I)} \\ &\qquad + ||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}\Big).\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, (2.22) e (2.29),

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u||^2_{L^2(I)}||v||^{2p-2}_{L^2(I)}dt &\leq ||u||_{C([0,T];L^2(I))}||v||^{p-1}_{C([0,T];L^2(I))}\int_0^T ||u||_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}dt \\ &\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}\left(\int_0^T ||u||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||v||^{p-1.\frac{2}{p-1}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p-1}{2}} \\ &\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}||u||_{L^2(0,T;L^2(I))}||v||^{p-1}_{L^2(0,T;L^2(I))} \\ &\leq T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}}.\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, (2.22), (2.23) e (2.29),

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||u||^2_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}dt &\leq ||u||_{C([0,T];L^2(I))}||v||^{p-1}_{C[0,T];L^2(I)}\int_0^T ||u||_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}dt \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}\left(\int_0^T ||u||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||v_x||^{p-1.\frac{2}{p-1}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p-1}{2}} \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}||u||_{L^2(0,T;L^2(I))}||v_x||^{p-1}_{L^2(0,T;L^2(I))} \\
&\leq T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, (2.22), (2.23) e (2.29),

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)}||v||^{2p-2}_{L^2(I)}dt &\leq ||u||_{C([0,T];L^2(I))}||v||^{p-1}_{C[0,T];L^2(I)}\int_0^T ||u_x||_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}dt \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}\left(\int_0^T ||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^T ||v||^{p-1.\frac{2}{p-1}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p-1}{2}} \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}||u_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}||v||^{p-1}_{L^2(0,T;L^2(I))} \\
&\leq T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, (2.22) e (2.23),

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||u||_{L^2(I)}||u_x||_{L^2(I)}||v||^{p-1}_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}dt &\leq ||u||_{C([0,T];L^2(I))}||v||^{p-1}_{C[0,T];L^2(I)}\int_0^T ||u_x||_{L^2(I)}||v_x||^{p-1}_{L^2(I)}dt \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}\left(\int_0^T ||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \times\left(\int_0^T ||v_x||^{p-1.\frac{2}{p-1}}_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p-1}{2}} \\
&\leq ||u||_{Y_{0,T}}||v||^{p-1}_{Y_{0,T}}T^{\frac{2-p}{2}}||u_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}||v||^{p-1}_{L^2(0,T;L^2(I))} \\
&\leq T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T ||u||^2_{L^\infty(I)}||v||^{2p-2}_{L^\infty(I)}dt \leq 4C_1^4T^{\frac{2-p}{2}}||u||^2_{Y_{0,T}}||v||^{2p-2}_{Y_{0,T}},$$

como queríamos.

Tomando $C = \max\{C_L, C_1, 2C_1^2\}$, obtemos o desejado. □

Lema 2.4.3. *Dados $\theta > 0$ e $L > 0$, vale*

$$||W(\cdot)\phi||_{Y_{0,\theta}} \leq \left(1 + \frac{L+4\theta}{3} + C^2\right)^{\frac{1}{2}} ||\phi||_{L^2(I)}, \quad \forall \phi \in L^2(I) \tag{2.30}$$

e

$$\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau) f(\tau) d\tau\right|\right|_{Y_{0,\theta}} \leq \left(4 + 2L + 6\theta + C^2\right)^{\frac{1}{2}} ||f||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}, \quad \forall f \in L^1(0,\theta; L^2(I)), \tag{2.31}$$

onde $C > 0$ é o máximo das constantes que aparecem em (2.6) e (2.19).

Demonstração: Seja $\phi \in L^2(I)$ dado. Lembrando que $W(\cdot)\phi : [0,\theta] \to L^2(I)$ é solução mild do problema (2.2) para $0 \leq t \leq \theta$, resulta que $W(\cdot)\phi \in C([0,\theta]; L^2(I))$ e $||W(\cdot)\phi||_{C([0,\theta];L^2(I))} \leq ||\phi||_{L^2(I)}$, posto que $\{W(t)\}_{t\geq 0}$ é semigrupo de contrações. Por (2.4) obtemos $||W(\cdot)\phi||_{L^2(0,\theta;L^2(I))} \leq \theta||\phi||^2_{L^2(I)}$ e utilizando (2.5) segue que

$$3\int_0^\theta \int_0^L (W(\cdot)\phi)_x^2 dxdt \leq (L+\theta)\int_0^L \phi^2(x)dx,$$

e daí,

$$||(W(\cdot)\phi)_x||^2_{L^2(0,\theta;L^2(I))} \leq \frac{L+\theta}{3}||\phi||^2_{L^2(I)}.$$

Logo,

$$||W(\cdot)\phi||^2_{L^2(0,\theta;H^1(I))} \leq \frac{L+4\theta}{3}||\phi||^2_{L^2(I)}.$$

A derivada $(W(\cdot)\phi)_x$ é estimada em $C([0,L]; L^2(0,\theta))$ por meio de (2.6), o qual nos fornece $||(W(\cdot)\phi)_x||_{C([0,L];L^2(0,\theta))} \leq C||\phi||_{L^2(I)}$, onde $C > 0$ é o máximo entre as constantes de (2.6) e (2.19). Concluímos, assim, que $W(\cdot)\phi \in Y_{0,\theta}$ e

$$||W(\cdot)\phi||_{Y_{0,\theta}} \leq \left(1 + \frac{L+4\theta}{3} + C^2\right)^{\frac{1}{2}} ||\phi||_{L^2(I)}.$$

Agora, seja $f \in L^1(0,\theta; L^2(I))$ dada. Lembrando da definição de solução mild do problema (2.14) para $0 \leq t \leq \theta$, resulta que $\int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau) f(\tau) d\tau \in C([0,\theta]; L^2(I))$ e, por

(2.17),

$$\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{C([0,\theta];L^2(I))} \leq 2||f||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}.$$

Por (2.17) também obtemos

$$\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|^2_{L^2(0,\theta;L^2(I))} \leq 4\theta||f||^2_{L^1(0,\theta;L^2(I))},$$

e através de (2.18), vemos que

$$\left|\left|\left(\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right)_x\right|\right|^2_{L^2(0,\theta;L^2(I))} \leq 2(L+\theta)||f||^2_{L^1(0,\theta;L^2(I))},$$

logo,

$$\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|^2_{L^2(0,\theta;H^1(I))} \leq (2L+4\theta)||f||^2_{L^1(0,\theta;L^2(I))}.$$

Finalmente, com (2.19) observamos que

$$\left|\left|\left(\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right)_x\right|\right|_{C([0,L];L^2(0,\theta))} \leq C||f||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}.$$

Assim, $\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau \in Y_{0,\theta}$ e

$$\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)f(\tau)d\tau\right|\right|_{Y_{0,\theta}} \leq \left(4+2L+6\theta+C^2\right)^{\frac{1}{2}}||f||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}.$$

$\square$

Lema 2.4.4. *Sejam $T>0$ e $a \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$|a(\mu)| \leq K(1+|\mu|^p), \quad |a'(\mu)| \leq K(1+|\mu|^{p-1}), \quad \forall \mu \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$. Então para quaisquer $u, v \in Y_{3,T}$ com $u_t, v_t \in Y_{0,T}$, temos $a(u)v_x \in$

$W^{1,1}(0,T;L^2(I))$, *e existe* $C>0$ *tal que*

$$||a(u)v_x||_{W^{1,1}(0,T;L^2(I))} \leq CT^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + C||u||_{Y_{3,T}}^{p-1}T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}}$$
$$+CT^{\frac{2-p}{4}}||u||_{Y_{0,T}}^{p}||v_t||_{Y_{0,T}} + CT^{\frac{1}{2}}||v_t||_{Y_{0,T}}||u||_{Y_{0,T}}^{p} + CT^{\frac{1}{2}}||v_t||_{Y_{0,T}}. \qquad (2.32)$$

Demonstração: Temos

$$|a(u(x,t))| \leq K(1+||u(t)||_{L^\infty(I)}^p)$$

e

$$||u(t)||_{L^\infty(I)}^p \leq 2^pC_1(||u(t)||_{L^2(I)}^p + ||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}).$$

logo,

$$||a(u)v_x||_{L^2(I)} \leq 2^pKC_1||u(t)||_{L^2(I)}^p||v_x(t)||_{L^2(I)} + 2^pKC_1||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||v_x(t)||_{L^2(I)}$$
$$+K||v_x(t)||_{L^2(I)},$$

onde C_1 é a constante do Lema 1.1.8.

Escrevamos $C_2 = (2^pC_1+1)K > 0$. Assim como nos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, obtemos as seguintes estimativas

$$\int_0^T ||u(t)||_{L^2(I)}^p||v_x(t)||_{L^2(I)}dt \leq ||u||_{C([0,T];L^2(I))}^p T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))};$$

$$\int_0^T ||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||v_x(t)||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{2-p}{4}}||u||_{C([0,T];L^2(I))}^{\frac{p}{2}}||u_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}^{\frac{p}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))};$$

$$\int_0^T ||v_x(t)||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))},$$

donde concluímos

$$\int_0^T ||a(u(t))v_x(t)||_{L^2(I)}dt \leq C_2||u||_{C([0,T];L^2(I))}^p T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))} + C_2T^{\frac{1}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}$$
$$+C_2T^{\frac{2-p}{4}}||u||_{C([0,T];L^2(I))}^{\frac{p}{2}}||u_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}^{\frac{p}{2}}||v_x||_{L^2(0,T;L^2(I))}$$

o que nos mostra que $a(u)v_x \in L^1(0,T;L^2(I))$.

Provemos que $\dfrac{d}{dt}[a(u)v_x] = a'(u)u_tv_x + a(u)v_{tx} \in L^1(0,T;L^2(I))$.

Temos

$$|a'(u(x,t))| \leq K(1 + ||u(t)||_{L^\infty(I)}^{p-1})$$

e

$$||u(t)||_{L^\infty(I)}^{p-1} \leq 2^pC_1(||u(t)||_{L^2(I)}^{p-1} + ||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}),$$

logo,

$$\begin{aligned}||a'(u)u_tv_x||_{L^2(I)} \leq K||u_t(t)v_x(t)||_{L^2(I)} + 2^pKC_1||u(t)||_{L^2(I)}^{p-1}||u_t(t)v_x(t)||_{L^2(I)} \\ +2^pKC_1||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}||u_t(t)v_x(t)||_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

Procedendo como nos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T ||a'(u)u_tv_x||_{L^2(I)}dt &\leq C_2\int_0^T ||u_tv_x||_{L^2(I)}dt + C_2\int_0^T ||u(t)||_{L^2(I)}^{p-1}||u_t(t)v_x(t)||_{L^2(I)}dt \\ &+ C_2\int_0^T ||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p-1}{2}}||u_t(t)v_x(t)||_{L^2(I)}dt \\ &\leq C_2T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + C_2||u||_{C([0,T];L^2(I))}^{p-1}\int_0^T ||u_tv_x||_{L^2(I)}dt \\ &+ C_2||u||_{C([0,T];L^2(I))}^{\frac{p-1}{2}}||u_x||_{C([0,T];L^2(I))}^{\frac{p-1}{2}}\int_0^T ||u_tv_x||_{L^2(I)}dt \\ &\leq C_2T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + 2C_2||u||_{Y_{3,T}}^{p-1}T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}},\end{aligned}$$

o que mostra que $a'(u)u_tv_x \in L^1(0,T;L^2(I))$.

Observe que, como $v_t \in Y_{0,T}$, resulta do Lema 2.4.1 que $a(u)v_{tx} \in L^1(0,T;L^2(I))$ e também a seguinte estimativa

$$\int_0^T ||a(u)v_{tx}||_{L^2(I)}dt \leq C_3T^{\frac{2-p}{4}}||u||_{Y_{0,T}}^p||v_t||_{Y_{0,T}} + C_3T^{\frac{1}{2}}(1 + ||u||_{Y_{0,T}}^p)||v_t||_{Y_{0,T}},$$

onde $C_3 > 0$ é a constante do referido Lema.

Portanto, $a(u)v_x \in W^{1,1}(0,T;L^2(I))$ e

$$||a(u)v_x||_{W^{1,1}(0,T;L^2(I))} \leq C_2 T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}} + 2C_2||u||^{p-1}_{Y_{3,T}} T^{\frac{1}{4}}||u_t||_{Y_{0,T}}||v||_{Y_{0,T}}$$
$$+C_3 T^{\frac{2-p}{4}}||u||^p_{Y_{0,T}}||v_t||_{Y_{0,T}} + C_3 T^{\frac{1}{2}}||v_t||_{Y_{0,T}}||u||^p_{Y_{0,T}} + C_3 T^{\frac{1}{2}}||v_t||^p_{Y_{0,T}}.$$

□

Lema 2.4.5. *Sejam $b \in H^1(I)$ e $u \in Y_{3,T}$ com $u_t \in Y_{0,T}$. Então $bu \in W^{1,1}(0,T;L^2(I))$ e existe $C = C(L) > 0$ tal que*

$$||bu||_{W^{1,1}(0,T;L^2(I))} \leq CT^{\frac{1}{2}}||b||_{H^1(I)}(||u||_{Y_{3,T}} + ||u_t||_{Y_{0,T}}). \tag{2.33}$$

Demonstração: Seja $C = C(L) > 0$ a constante da imersão $H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$. Então

$$\int_0^T ||bu(t)||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{1}{2}}||b||_{L^\infty(I)}||u||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq CT^{\frac{1}{2}}||b||_{H^1(I)}||u||_{Y_{0,T}}$$

e

$$\int_0^T ||bu_t(t)||_{L^2(I)}dt \leq T^{\frac{1}{2}}||b||_{L^\infty(I)}||u_t||_{L^2(0,T;L^2(I))} \leq CT^{\frac{1}{2}}||b||_{H^1(I)}||u_t||_{Y_{0,T}}$$

donde resulta (2.33), com $[bu]_t = bu_t$ e $||u||_{Y_{0,T}} \leq ||u||_{Y_{3,t}}$ □

2.5 Solução Forte

Definição 2.5.1. *Dizemos que u é solução global forte do problema (2.1) quando $u \in Y_{3,T}$ e u satisfaz (2.1) para todo $T > 0$.*

Dizemos que u é solução local forte do problema (2.1) quando existe $T_0 > 0$ tal que $u \in Y_{3,T_0}$ e u satisfaz (2.1) em $[0, T_0]$.

O seguinte resultado será utilizado para a demonstração da existência de solução local.

Proposição 2.5.1. *Seja $T > 0$. Para cada $\phi \in D(A)$ e $f \in W^{1,1}(0,T;L^2(I))$ o problema*

$$\begin{cases} u_t + u_x + u_{xxx} + f = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases}$$

admite uma única solução u com regularidade $Y_{3,T}$ e $u_t \in Y_{0,T}$.

Mais ainda, valem as seguintes estimativas:

$$||u||_{Y_{3,T}} \leq C\{||\phi||_{H^3(I)} + ||f||_{W^{1,1}(0,T;L^2(I))}\} \tag{2.34}$$

e

$$||u_t||_{Y_{0,T}} \leq C\{||\phi||_{H^3(I)} + ||f||_{W^{1,1}(0,T;L^2(I))}\} \tag{2.35}$$

para alguma constante $C > 0$.

Demonstração: Ver [3].

Antes de estabelecermos a existência de solução forte de (2.1), a saber

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + bu = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases}$$

com $\phi \in D(A)$, $b \in H^1(I)$ na classe $u \in Y_{3,T}$, para cada $T > 0$, lembremos que $Af = -f_x - f_{xxx}$ com $D(A) = \{f \in H^3(I);\ f(0) = f(L) = f_x(L) = 0\}$.

Observe que, derivando formalmente a equação acima com relação a variável t, temos que $v = u_t$ é solução do seguinte problema linear não-homogêneo

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} = -\dfrac{d}{dt}[a(u)u_x + bu], & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = v_0(x), & x \in (0,L), \end{cases}$$

onde

$$v_0 = -\phi_x - a(\phi)\phi_x - \phi_{xxx} - b\phi \in L^2(I).$$

Teorema 2.1. *Sejam $a \in C^1(\mathbb{R})$ e $K > 0$ uma constante tal que*

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \le K(1 + |x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \le K|x - y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \le p < 2$, $b \in H^1(I)$ e $\phi \in D(A)$. Então existe $\theta > 0$ tal que o problema (2.1) tem uma única solução local forte na classe $u \in Y_{3,\theta}$ com $u_t \in Y_{0,\theta}$.

Demonstração: Sejam $\phi \in D(A)$ e $T > 0$ dados e $r > 0$ e $0 < \theta < T$ números a serem determinados.

Consideremos o espaço

$$\mathcal{V}_{3,\theta} = Y_{3,\theta} \times Y_{0,\theta}$$

munido da norma

$$||(u, v)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} = ||u||_{Y_{3,\theta}} + ||v||_{Y_{0,\theta}}. \quad \forall (u, v) \in \mathcal{V}_{3,\theta}.$$

Consideremos também o subespaço de $\mathcal{V}_{3,\theta}$ dado por

$$\mathcal{A}_{3,\theta} = \{(u, u_t) \in \mathcal{V}_{3,\theta}\}.$$

Este subespaço é fechado em $\mathcal{V}_{3,\theta}$. De fato, sejam $\{w_n\} \subset \mathcal{A}_{3,\theta}$ uma sequência e $w \in \mathcal{V}_{3,\theta}$ tal que $w_n \to w$ em $\mathcal{V}_{3,\theta}$. Então, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $u_n \in Y_{3,\theta}$ com $u_{n,t} \in Y_{0,\theta}$ tal que $w_n = (u_n, u_{n,t})$ e também existem $u \in Y_{3,\theta}$ e $v \in Y_{0,\theta}$ tal que $w = (u, v)$. Pela definição da norma em $\mathcal{V}_{3,\theta}$, obtemos que $u_n \to u$ em $Y_{3,\theta}$ e $u_{n,t} \to v$ em $Y_{0,\theta}$. Mas $u_n \to u$ em $Y_{3,\theta}$ implica que $u_{n,t} \to u_t$ no sentido distribucional. Como $u_{n,t} \to v$ em $Y_{0,\theta}$ também implica na convergência $u_{n,t} \to v$ no sentido distribucional, e pela unicidade do limite, resulta $v = u_t \in Y_{0,\theta}$, e portanto, $w \in \mathcal{A}_{3,\theta}$.

Para cada $(u, u_t) \in \mathcal{A}_{3,\theta}$, temos $a(u)u_x + bu \in W^{1,1}(0, \theta, L^2(I))$. Decorre que existe um único $v \in Y_{3,\theta}$ com $w = v_t \in Y_{0,\theta}$ tal que v e v_t são soluções dos respectivos problemas

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} + f = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\theta), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0, & t \in (0,\theta), \\ v(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L), \end{cases} \tag{2.36}$$

e

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + f_t = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\theta), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & t \in (0,\theta), \\ w(x,0) = w_0(x), & x \in (0,L), \end{cases} \tag{2.37}$$

onde $f = a(u)u_x + bu$ e $w_0 = -\phi_{xxx} - \phi_x - a(\phi)\phi_x - b\phi \in L^2(I)$.

Assim, fica bem definida a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Gamma: & \mathcal{A}_{3,\theta} & \to & \mathcal{A}_{3,\theta} \\ & (u,u_t) & \mapsto & \Gamma(u,u_t) = (v,v_t). \end{array}$$

que associa cada $(u,u_t) \in \mathcal{A}_{3,\theta}$ a v e v_t, as respectivas soluções dos problemas lineares (2.36) e (2.37).

Provemos que para escolhas adequadas de $\theta > 0$ e $r > 0$, Γ é uma contração de $S_{\theta,r}$ em si mesmo, onde

$$S_{\theta,r} = \{(u,u_t) \in \mathcal{A}_{3,\theta};\ ||u||_{Y_{3,\theta}} + ||u_t||_{Y_{0,\theta}} \leq r\}.$$

Observe que

$$\begin{aligned} ||\Gamma(u,u_t)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} &= ||v||_{Y_{3,\theta}} + ||v_t||_{Y_{0,\theta}} \\ &\leq 2C_1\{||\phi||_{H^3(I)} + ||a(u)u_x + bu||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2((I))}\} \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} ||a(u)u_x||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))} + ||bu||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))} &\leq (1 + ||b||_{H^1(I)})C_2\{2\theta^{\frac{1}{2}}||(u,u_t)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} + \theta^{\frac{1}{4}}||(u,u_t)||^2_{\mathcal{V}_{3,\theta}} \\ &+ (\theta^{\frac{1}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{2-p}{4}})||(u,u_t)||^{p+1}_{\mathcal{V}_{3,\theta}}\}, \end{aligned}$$

com $C_2 > 0$ sendo o máximo entre as constantes dos Lemas 2.4.4 e 2.4.5 e $C_1 > 0$, a constante da Proposição 2.5.1. Escrevendo $M = 2(C_1 + C_1 C_2)(1 + ||b||_{H^1(I)})$ temos

$$||\Gamma(u, u_t)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} \leq \{2\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} r + (\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} + \theta^{\frac{2-p}{4}}) r^p\} M ||(u, u_t)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} + M ||\phi||_{H^3(I)}. \quad (2.38)$$

Observamos, então, que se escolhermos $r = 2M||\phi||_{H^3(I)}$ e $0 < \theta < T$ de modo que

$$\{2\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} r + (\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} + \theta^{\frac{2-p}{4}}) r^p\} M \leq \frac{1}{2}$$

resultará que $||\Gamma(u, u_t)||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} \leq r$, e assim, $\Gamma(S_{\theta,r}) \subset S_{\theta,r}$.

Agora, vamos verificar para qual escolha de $0 < \theta < T$ a função Γ é uma contração em $S_{\theta,r}$. Sejam $u_1, u_2 \in S_{\theta,r}$ e $\Gamma(u_i, u_{i,t}) = (v_i, v_{i,t})$, $i = 1, 2$. Pela linearidade dos problemas (2.36) e (2.37), observamos que se $\Gamma(u_1, u_{1,t}) - \Gamma(u_2, u_{2,t}) = (v, v_t)$ então v e $w = v_t$ são as respectivas soluções dos problemas não homogêneos (2.36) e (2.37), com

$$f = a(u_1)u_{1,x} + bu_1 - a(u_2)u_{2,x} - bu_2$$

e dado inicial nulo.

Pela Proposição 2.5.1,

$$\begin{aligned} ||\Gamma(u_1, u_{1,t}) - \Gamma(u_2, u_{2,t})||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} &= ||v_1 - v_2||_{Y_{3,\theta}} + ||v_{1,t} - v_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} \\ &\leq C_1(||a(u_1)u_{1,x} - a(u_2)u_{2,x}||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))} + ||bu_1 - bu_2||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))}). \end{aligned}$$

Vamos estimar cada termo da última soma.

i)Estimativa para $||a(u_1)u_{1,x} - a(u_2)u_{2,x}||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))}$

Temos

$$\begin{aligned} ||a(u_1)u_{1,x} - a(u_2)u_{2,x}||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))} &\leq \underbrace{||a(u_1)u_{1,x} - a(u_2)u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_3} \\ &+ \underbrace{||a(u_1)u_{1,xt} - a(u_2)u_{2,xt}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_4} \\ &+ |\underbrace{|a'(u_1)u_{1,t}u_{1,x} - a'(u_2)u_{2,t}u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_5}. \end{aligned}$$

Observe que

$$I_3 \leq \underbrace{||a(u_1)(u_{1,x} - u_{2,x})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{3.1}} + \underbrace{||(a(u_1) - a(u_2))u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{3.2}}.$$

Pelo Lema 2.4.1,

$$I_{3.1} \leq C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^p_{Y_{0,\theta}}||u_1 - u_2||_{Y_{0,\theta}} + C\theta^{\frac{1}{2}}(1 + ||u_1||^p_{Y_{0,\theta}})||u_1 - u_2||_{Y_{0,\theta}}.$$

Para estimarmos $I_{3.2}$ observemos que, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\xi(x,t)$ entre $v(x,t)$ e $w(x,t)$ tal que

$$|a(v(x,t)) - a(w(x,t))| = |a'(\xi(x,t))||v(x,t) - w(x,t)|,$$

onde $|\xi(x,t)| \leq |v(x,t)| + |\nu(x,t)||w(x,t)|$ com $|\nu(x,t)| \leq 1$, e portanto,

$$\begin{aligned} |a(v(x,t)) - a(w(x,t))| &= |a'(\xi(x,t))||v(x,t) - w(x,t)| \\ &\leq K\left(1 + |\xi(x,t)|^{p-1}\right)|v(x,t) - w(x,t)| \\ &\leq K\left(1 + |v(x,t)|^{p-1} + |\nu(x,t)|^{p-1}|w(x,t)|^{p-1}|w(x,t)|^{p-1}\right)|v(x,t) - w(x,t)| \\ &\leq K\left(1 + |v(x,t)|^{p-1} + |w(x,t)|^{p-1}\right)|v(x,t) - w(x,t)|, \end{aligned}$$

e então, pelo Lema 2.4.2, resulta

$$\begin{aligned} I_{3.2} &\leq ||C(1+|u_1|^{p-1}+|u_2|^{p-1})|u_1-u_2|u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\ &\leq C|||u_1-u_2|u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} + C|||u_1|^{p-1}|u_1-u_2|u_{2,x}|||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\ &+ C|||u_2|^{p-1}|u_1-u_2|u_{2,x}|||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\ &\leq C\theta^{\frac{1}{4}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}||u_2||_{Y_{0,\theta}} + C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}||u_2||_{Y_{0,\theta}} \\ &+ C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_2||^{p}_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}. \end{aligned}$$

O termo I_4 é estimado pela seguinte desigualdade

$$I_4 \leq \underbrace{||a(u_1)(u_{1,xt}-u_{2,xt})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{4.1}} + \underbrace{||(a(u_1)-a(u_2))u_{2,xt}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{4.2}}.$$

Utilizando o Lema 2.4.1, temos

$$I_{4.1} \leq C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^{p}_{Y_{0,\theta}}||u_{1,t}-u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} + C\theta^{\frac{1}{2}}(1+||u_1||^{p}_{Y_{0,\theta}})||u_{1,t}-u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}.$$

Pelo mesmo argumento utilizado para estimar $I_{3.2}$, temos

$$\begin{aligned} I_{4.2} &\leq C\theta^{\frac{1}{4}}||u_1-u_2|||_{Y_{0,\theta}}||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} + C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} \\ &+ C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_2||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}. \end{aligned}$$

Vamos estimar I_5. Para isso, podemos supor, sem perda de generalidade, que $||u_2||_{Y_{3,\theta}} \leq ||u_1||_{Y_{3,\theta}}$. Somando e subtraindo os termos $a'(u_1)u_{1,t}u_{2,x}$ e $a'(u_1)u_{2,t}u_{2,x}$ em I_5. obtemos

$$\begin{aligned} I_5 &\leq \underbrace{||a'(u_1)u_{1,t}(u_{1,x}-u_{2,x})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.1}} + \underbrace{||a'(u_1)u_{2,x}(u_{1,t}-u_{2,t})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.2}} \\ &+ \underbrace{||(a'(u_1)-a'(u_2))u_{2,t}u_{2,x}||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.3}}. \end{aligned}$$

Temos

$$
\begin{aligned}
I_{5.1} &\leq ||C(1+|u_1|^{p-1})u_{1,t}(u_1-u_2)_x||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\
&\leq C\underbrace{||u_{1,t}(u_1-u_2)_x||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.1.1}} + C\underbrace{|||u_1|^{p-1}u_{1,t}(u_1-u_2)_x||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.1.2}}.
\end{aligned}
$$

Pelo Lema 2.4.2 obtemos

$$
I_{5.1.1} \leq C\theta^{\frac{1}{4}}||u_{1,t}||_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}
$$

e

$$
I_{5.1.2} \leq C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}||u_{1,t}||_{Y_{0,\theta}}||u_1-u_2||_{Y_{0,\theta}}.
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
I_{5.2} &\leq ||C(1+|u_1|^{p-1})u_{2,x}(u_1-u_2)_t||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\
&\leq C\underbrace{||u_{2,x}(u_{1,t}-u_{2,t})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.2.1}} + C\underbrace{|||u_1|^{p-1}u_{2,x}(u_{1,t}-u_{2,t})||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}}_{=I_{5.2.2}}
\end{aligned}
$$

e, novamente, pelo Lema 2.4.2 obtemos

$$
I_{5.2.1} \leq C\theta^{\frac{1}{4}}||u_2||_{Y_{0,\theta}}||u_{1,t}-u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}
$$

e

$$
I_{5.2.2} \leq C\theta^{\frac{2-p}{4}}||u_1||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}||u_2||_{Y_{0,\theta}}||u_{1,t}-u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}.
$$

Para estimarmos $I_{5.3}$, inicialmente observemos que $Y_{3,\theta} \hookrightarrow L^\infty(0,\theta;L^\infty(I))$, e assim,

$$
\begin{aligned}
\int_0^L |a'(u_1)-a'(u_2)|^2|u_{2,t}|^2|u_{2,x}|^2dx &\leq \int_0^L |u_1-u_2|^{2(p-1)}|u_{2,t}|^2|u_{2,x}|^2dx \\
&\leq ||u_1-u_2||^{2(p-1)}_{Y_{3,\theta}}||u_2||^2_{Y_{3,\theta}}||u_{2,t}(t)||^2_{L^2(I)} \\
&\leq ||u_1-u_2||^{2(p-1)}_{L^\infty(I)}||u_2||^2_{Y_{3,\theta}}||u_{2,t}||^2_{C([0,T];L^2(I))} \\
&\leq ||u_1-u_2||^{2(p-1)}_{L^\infty(I)}||u_2||^2_{Y_{3,\theta}}||u_{2,t}||^2_{Y_{0,\theta}}
\end{aligned}
$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} I_{5.3} &\leq \theta ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p-1} ||u_2||_{Y_{3,\theta}} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} \\ &= \theta \frac{||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p}}{||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}} ||u_2||_{Y_{3,\theta}} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}. \end{aligned}$$

Note que

$$2||u_1||_{Y_{3,\theta}} ||u_2||_{3,\theta} \leq (||u_1||_{Y_{3,\theta}} - ||u_2||_{Y_{3,\theta}})^2 \leq ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}^2,$$

o que implica

$$\frac{1}{||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}} \leq \frac{1}{\sqrt{2} ||u_1||_{Y_{3,\theta}}^{\frac{1}{2}} ||u_2||_{Y_{3,\theta}}^{\frac{1}{2}}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} I_{5.3} &\leq \frac{\theta}{\sqrt{2}} ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p} \frac{||u_2||_{Y_{3,\theta}}^{\frac{1}{2}}}{||u_1||_{Y_{3,\theta}}^{\frac{1}{2}}} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} \\ &\leq \frac{\theta}{\sqrt{2}} ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} \\ &\leq \frac{\theta}{\sqrt{2}} C (||u_1||_{Y_{3,\theta}}^{p-1} + ||u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p-1}) ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}} \\ &\leq C\theta ||u_1||_{Y_{3,\theta}}^{p-1} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}} + C\theta ||u_2||_{Y_{3,\theta}}^{p-1} ||u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}} ||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}}. \end{aligned}$$

ii) Estimativa para $||bu_1 - bu_2||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))}$

Pelo Lema 2.4.5, obtemos

$$||bu_1 - bu_2||_{W^{1,1}(0,\theta;L^2(I))} \leq C\theta^{\frac{1}{2}} ||b||_{H^1(I)} (||u_1 - u_2||_{Y_{3,\theta}} + ||u_{1,t} - u_{2,t}||_{Y_{0,\theta}}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} ||\Gamma(u_1, u_{1,t}) - \Gamma(u_2, u_{2,t})||_{\mathcal{V}_{3,\theta}} \leq C_1 C\{ (\theta + \theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{2-p}{4}}) r^p + \theta^{\frac{1}{4}} r + \theta^{\frac{1}{2}} ||b||_{H^1(I)} \} \\ \times ||(u_1, u_{1,t}) - (u_2, u_{2,t})||_{\mathcal{V}_{3,\theta}}, \end{aligned} \tag{2.39}$$

onde $C > 0$ é uma constante que depende apenas de p, K e L.

Observando (2.38) e (2.39) concluímos que se escolhermos $r = 2M||\phi||_{H^3(I)}$ e $0 < \theta < T$ satisfazendo

$$\begin{gathered}
\{2\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} r + (\theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{1}{4}} + \theta^{\frac{2-p}{4}}) r^p\} M < \frac{1}{2} \\
C\{(\theta + \theta^{\frac{1}{2}} + \theta^{\frac{2-p}{4}}) r^p + \theta^{\frac{1}{4}} r + \theta^{\frac{1}{2}} ||b||_{H^1(I)}\} < \frac{1}{2}
\end{gathered}$$

então $\Gamma(S_{\theta,r}) \subset S_{\theta,r}$ e Γ é uma contração. Então, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $u \in S_{\theta,r}$ tal que $\Gamma(u) = u$, isto é, existe um único $(u, u_t) \in \mathcal{V}_{3,\theta}$ satisfazendo

$$\begin{cases}
u_t + u_x + u_{xxx} + a(u)u_x + bu = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\theta), \\
u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\theta), \\
u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L),
\end{cases}$$

e

$$\begin{cases}
w_t + w_x + w_{xxx} + f_t = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\theta), \\
w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & t \in (0,\theta), \\
w(x,0) = w_0(x), & x \in (0,L),
\end{cases}$$

com $w = u_t$ e $w_0 = -\phi_{xxx} - \phi_x - a(\phi)\phi_x - b\phi$. Assim, obtemos a existência e unicidade da solução forte local para o problema (2.1). □

Sabemos que o problema (2.1) tem uma única solução local forte, ou seja, existem u e $T > 0$ tal que $u \in Y_{3,T}$ e u satisfaz (2.1) em $[0, T]$. O tempo maximal, denotado por T_{max}, é o maior tempo no qual a solução local u pode ser estendida, isto é, é o maior $T > 0$ tal que $u \in Y_{3,T}$ e satisfaz (2.1). Provaremos, posteriormente, que soluções locais fracas admitem uma única extensão para todo $T \in [0, T_{max})$. De maneira análoga prova-se que soluções locais fortes admitem uma única extensão. Também de maneira análoga ao caso da solução fraca, prova-se a existência da solução global forte.

Agora, provemos a unicidade de solução global forte para o problema (2.1).

Primeiramente, consideremos $T > 0$ arbitrariamente fixado e $u, v \in Y_{3,T}$ soluções de (2.1) com os respectivos dados iniciais $\phi, \psi \in D(A)$. Temos

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u(x,0) = \phi(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.40}$$

e

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} + b(x)v = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ v(x,0) = \psi(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.41}$$

Subtraindo (2.41) de (2.40) e escrevendo $w = u - v$ obtemos

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + b(x)w + a(u)w_x + (a(u) - a(v))v_x = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,T), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ w(x,0) = w_0(x) = \phi(x) - \psi(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.42}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.42) por $(1+x)w$ e integrando em $(0,L)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^L (1+x)ww_t dx + \int_0^L (1+x)ww_x dx + \int_0^L (1+x)ww_{xxx} dx + \int_0^L (1+x)b(x)w^2 dx \\ + \int_0^L (1+x)a(u)ww_x dx + \int_0^L (1+x)(a(u)-a(v))v_x w dx = 0. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Integrando por partes cada termo de (2.43) como no Lema 2.5.2 obtemos

$$\int_0^L (1+x)ww_t dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (1+x)w^2 dx;$$

$$\int_0^L ww_x dx = 0;$$

$$\int_0^L xww_x dx = -\frac{1}{2}\int_0^L w^2 dx;$$

$$\int_0^L ww_{xxx}dx = \frac{1}{2}w_x^2(0,t);$$
$$\int_0^L xww_{xxx}dx = \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2dx.$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(1+x)w^2dx - \frac{1}{2}\int_0^L w^2dx + \frac{1}{2}w_x^2(0,t) + \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2dx + \int_0^L(1+x)b(x)w^2dx$$
$$= -\int_0^L [a(u)w_xw + (a(u)-a(v))v_xw]dx.$$

Como $|a(\mu)| \leq K(1+|\mu|^p)$ e $|a'(\mu)| \leq K(1+|\mu|^{p-1})$ para todo $\mu \in \mathbb{R}$, temos

$$|a(u(x,t))| \leq K(1+|u(x,t)|^p) \leq K(1+||u(t)||^p_{L^\infty(I)},$$

e com

$$\begin{aligned}|a(u(x,t))-a(v(x,t))| &\leq K(1+|u(x,t)|^{p-1}+|v(x,t)|^{p-1})|w(x,t)| \\ &\leq K(1+||u(t)||^{p-1}_{H^1(I)}+||v(t)||^{p-1}_{H^1(I)})|w(x,t)|\end{aligned}$$

decorre

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(1+x)w^2dx - \frac{1}{2}\int_0^L w^2dx + \frac{1}{2}w_x^2(0,t) + \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2dx$$

$$\leq \int_0^L(1+x)|a(u)||w_x||w|dx + \int_0^L(1+x)|a(u)-a(v)||v_x||w|dx$$

$$\leq K(1+||u(t)||^p_{L^\infty(I)})\int_0^L(1+x)|w_x||w|dx + K(1+||u(t)||^{p-1}_{H^1(I)}+||v(t)||^{p-1}_{H^1(I)})\int_0^L(1+x)|v_x||w|^2dx$$

$$\leq K(1+||u(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I))}||u_x(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)})(\int_0^L w_x^2dx)^{\frac{1}{2}}(\int_0^L(1+x)^2w^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$+K(1+||u(t)||^{p-1}_{H^1(I)}+||v(t)||^{p-1}_{H^1(I)})||v(t)||_{H^1(I)}\int_0^L(1+x)w^2dx,$$

e portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(1+x)w^2dx+\frac{3}{2}\int_0^L w_x^2\leq\frac{1}{2}\int_0^L w^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L w_x^2dx+K(1+||u(t)||_{H^1(I)}^{p-1}+||v(t)||_{H^1(I)}^{p-1})$$
$$\times||v(t)||_{H^1(I)}\int_0^L(1+x)w^2dx+\frac{K^2}{2}(1+||u(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}}||u_x(t)||_{L^2(I)}^{\frac{p}{2}})^2\int_0^L(1+x)^2w^2dx,$$

donde obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(1+x)w^2dx+\int_0^L w_x^2\leq\left\{\frac{1}{2}+\frac{K^2}{2}(1+||u||_{C([0,T];L^2(I))}^p||u_x(t)||_{L^2(I)}^p)(1+L)\right.$$
$$\left.+K(1+||u(t)||_{H^1(I)}^{p-1}+||v(t)||_{H^1(I)}^{p-1})||v(t)||_{H^1(I)}\right\}\int_0^L(1+x)w^2dx. \quad (2.44)$$

Escrevendo

$$m(s)=\frac{1}{2}+\frac{K^2}{2}(1+||u||_{C([0,T];L^2(I))}^p||u_x(s)||_{L^2(I)}^p)(1+L)+K(1+||u(s)||_{H^1(I)}^{p-1}$$
$$+||v(s)||_{H^1(I)}^{p-1})||v(s)||_{H^1(I)}$$

vemos que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L(1+x)w^2dx+\int_0^L\leq m(t)\int_0^L(1+x)w^2dx.$$

Integrando ambos os membros da desigualdade acima em $(0,t)$, para $t\leq T$ e majorando, segue

$$\frac{1}{2}\int_0^L(1+x)w^2(x,t)dx+\int_0^t\int_0^L w_x^2(x,s)dxds$$
$$\leq\int_0^t\left[(2m(s))\frac{1}{2}\int_0^L(1+x)w^2(x,s)dx+(2m(s))\int_0^s\int_0^L w_x^2(x,\tau)d\tau\right]ds+\frac{1}{2}\int_0^L(1+x)w_0^2dx.$$

Pelo Lema de Gronwall 1.1.2 resulta

$$\int_0^L(1+x)w^2(x,t)dx+\int_0^t\int_0^L w_x^2(x,s)dxds\leq\left[\int_0^L(1+x)w_0^2dx\right]e^{\int_0^t z(s)dx} \quad (2.45)$$

onde $z(s) = 2m(s)$, ou seja,

$$\int_0^L (1+x)|u(x,t)-v(x,t)|^2dx+\int_0^t \int_0^L |u_x(x,s)-v_x(x,s)|^2dxds \leq \left[\int_0^L (1+x)|\phi(x)-\psi(x)|^2dx\right]e^{\int_0^t z(s)dx}. \tag{2.46}$$

Em particular, para dados iguais, ou seja, $\phi = \psi$, temos $w_0 = 0$, e então, de (2.46) resulta

$$\int_0^L (1+x)w^2(x,t)dx + \int_0^t \int_0^L w_x^2(x,s)dxds \leq 0,$$

logo, $w(x,t) = 0$ para quase todo $(x,t) \in (0,L) \times (0,T)$, o que prova a unicidade da solução global forte.

Proposição 2.5.2. *Sejam $a \in C^1(\mathbb{R})$ satisfazendo*

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1+|x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x-y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$, $b \in H^1(I)$, $\phi \in D(A)$, $T' > 0$ dado e $u \in Y_{3,T'}$ a solução de (2.1) em $[0,T')$. Então existe uma constante C_p tal que

$$||u(\cdot,T)||^2_{L^2(I)} + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L b(x)u^2(x,t)dxdt = ||\phi||^2_{L^2(I)} \tag{2.47}$$

e

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \leq \frac{L+(2K+1)T}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + C_pT||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)} \tag{2.48}$$

para todo $0 \leq T \leq T'$.

Demonstração: Provemos (2.47). Multiplicando (2.1) por u e integrando em $(0,L)$ obtemos

$$\int_0^L uu_tdx + \int_0^L uu_xdx + \int_0^L a(u)uu_xdx + \int_0^L uu_{xxx}dx + \int_0^L b(x)u^2dx = 0$$

com

$$\int_0^L uu_tdx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2dx,$$

$$\int_0^L uu_x dx = 0,$$

$$\int_0^L uu_{xxx} dx = \frac{1}{2}u_x^2(0,t),$$

com $t \in (0,T)$.

Para calcular $\int_0^L a(u)uu_x dx$, observemos que

$$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} a(\tau)d\tau = \int_0^{u(x)} a_x(\tau)d\tau + a(u(x))u_x(x) - a(0)0 = a(u(x))u_x(x)$$

e também

$$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} F(\tau)d\tau = \int_0^{u(x)} F_x(\tau)d\tau + F(u(x))u_x(x) - F(0)0 = F(u(x))u_x(x),$$

onde $F(\tau) = \int_0^{\tau} a(s)ds$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^L a(u)u_x u dx &= \int_0^L \left(\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} a(\tau)d\tau\right) u dx \\
&= \left(\int_0^{u(x)} a(\tau)d\tau\right) u\Big|_0^L - \int_0^L \left(\int_0^{u(x)} a(\tau)d\tau u_x\right) dx \\
&= -\int_0^L F(u(x))u_x(x)dx = -\int_0^L \left(\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} F(\tau)d\tau\right) dx \\
&= -\left(\int_0^{u(x)} F(\tau)d\tau\right)\Big|_0^L = 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L u^2 dx + \frac{1}{2}u_x^2(0,t) + \int_0^L b(x)u^2 dxdt = 0, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.49}$$

Integrando (2.49) de 0 a T, segue

$$\frac{1}{2}||u(\cdot,T)||^2_{L^2(I)} + \frac{1}{2}\int_0^T u_x^2(0,t)dt + \int_0^T\int_0^L b(x)u^2(x,t)dxdt - \frac{1}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} = 0,$$

donde resulta (2.47).

Agora, provemos (2.48). Para isso, multipliquemos a primeira equação de (2.1) por xu e integremos em $(0,T)\times(0,L)$. Assim, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L xuu_t dxdt + \int_0^T\int_0^L xuu_x dxdt + \int_0^T\int_0^L a(u)uu_x xdxdt + \int_0^T\int_0^L xuu_{xxx}dxdt \\ + \int_0^T\int_0^L b(x)xu^2 dxdt = 0\end{aligned}$$

com

$$\int_0^T\int_0^L xuu_t dxdt = \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,T)xdx - \frac{1}{2}\int_0^L \phi^2(x)xdx,$$

$$\int_0^T\int_0^L xuu_x dxdt = -\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt,$$

$$\int_0^T\int_0^L xuu_{xxx} dxdt = \frac{3}{2}\int_0^T u_x^2 dxdt.$$

Para calcular $\int_0^T\int_0^L a(u)uu_x xdxdt$, observemos que

$$\frac{d}{dx}\int_0^{u(x)} a(\tau)\tau d\tau = \int_0^{u(x)} a_x(\tau)\tau d\tau + a(u(x))u(x)u_x(x) - a(0)0 = a(u(x))u(x)u_x(x),$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\tilde{F}(u(x)) = a(u(x))u(x)u_x(x)$$

onde $\tilde{F}(s) = \int_0^s a(\tau)\tau d\tau$. Logo,

$$\int_0^L a(u)uu_x xdx = \int_0^L \left(\frac{d}{dx}\tilde{F}(u(x))\right)xdx = \tilde{F}(u(x))x\Big|_0^L - \int_0^L \tilde{F}(u(x))dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,T)xdx - \frac{1}{2}\int_0^L \phi^2(x)xdx - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L u_x^2 dxdt \\ - \int_0^T\int_0^L \tilde{F}(u(x))dxdt + \int_0^T\int_0^L xb(x)u^2 dxdt = 0,\end{aligned}$$

e como $||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq ||\phi||^2_{L^2(I)}$ para todo $t \geq 0$ então vale

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L u_x^2 dxdt &\leq \frac{1}{2}\int_0^L u^2(x,T)xdx + \frac{3}{2}\int_0^T\int_0^L u_x^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L xb(x)u^2 dxdt \\
&= \frac{1}{2}\int_0^L \phi^2(x)xdx + \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T\int_0^L \tilde{F}(u(x))dxdt \\
&\leq \frac{L}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + \frac{T}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + \int_0^T\int_0^L \tilde{F}(u(x))dx \\
&= \frac{T+L}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + \int_0^T\int_0^L \tilde{F}(u(x))dx. \qquad (2.50)
\end{aligned}$$

Temos

$$|\tilde{F}(s)| = \left|\int_0^s ra(r)dr\right| \leq K\left(\frac{s^2}{2} + \frac{|s|^{p+2}}{p+2}\right),$$

pois se $s > 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^s ra(r)dr\right| \leq \int_0^s |r||a(r)|dr \leq K\int_0^s |r|dr + K\int_0^s |r|^{p+1}dr = K\int_0^s rdr + K\int_0^s r^{p+1}dr \\
= K\left(\frac{s^2}{2} + \frac{s^{p+2}}{p+2}\right)
\end{aligned}$$

e se $s < 0$,

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^s ra(r)dr\right| = \left|-\int_s^0 ra(r)dr\right| = \left|\int_s^0 ra(r)dr\right| \leq \int_s^0 |r||a(r)|dr \leq K\int_0^s |r|dr + K\int_0^s |r|^{p+1}dr \\
= -K\int_0^s rdr + K(-1)^{p+1}\int_s^0 r^{p+1}dr = K\frac{s^2}{2} + K(-1)^{p+2}\frac{s^{p+2}}{p+2} = K\left(\frac{s^2}{2} + \frac{|s|^{p+2}}{p+2}\right).
\end{aligned}$$

Portanto, com a desigualdade de Hölder e a desigualdade dada pela Proposição 1.1.9, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_0^L|\tilde{F}(u(x))|dxdt &\leq \frac{K}{2}\int_0^T\int_0^L u^2dxdt+\frac{K}{p+2}\int_0^T\int_0^L|u|^{p+2}dxdt\\
&\leq \frac{KT}{2}||\phi||^2_{L^2(I)}+\frac{K}{p+2}\int_0^T||u||^2_{L^2(I)}||u||^p_{L^\infty(I)}dt\\
&\leq \frac{KT}{2}||\phi||^2_{L^2(I)}+\frac{2^{\frac{p}{2}}K}{p+2}\int_0^T||u||^{2+\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||u_x||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}dt\\
&\leq \frac{KT}{2}||\phi||^2_{L^2(I)}+\frac{2^{\frac{p}{2}}K}{p+2}||\phi||^{2+\frac{p}{2}}_{L^2(I)}\int_0^T||u_x||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}dt\\
&\leq \frac{KT}{2}||\phi||^2_{L^2(I)}+\frac{2^{\frac{p}{2}}K}{p+2}||\phi||^{2+\frac{p}{2}}_{L^2(I)}T^{\frac{4-p}{4}}\left(\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p}{4}}.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}
\frac{2^{\frac{p}{2}}K}{p+2}||\phi||^{2+\frac{p}{2}}_{L^2(I)}T^{\frac{4-p}{4}}\left(\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p}{4}} &= \frac{2^{\frac{p}{2}}K}{p+2}||\phi||^{2+\frac{p}{2}}_{L^2(I)}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{4}}T^{\frac{4-p}{4}}\left(\left(\frac{2}{p}\right)\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)^{\frac{p}{4}}\\
&\leq \frac{4-p}{4}\frac{2^{\frac{2p}{4-p}}K^{\frac{4}{4-p}}}{(2+p)^{\frac{4}{4-p}}}||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)}T\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{4-p}}+\frac{p}{4}\left(\frac{2}{p}\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt\right)\\
&= \frac{4-p}{4}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{4-p}}\frac{2^{\frac{2p}{4-p}}K^{\frac{4}{4-p}}}{(2+p)^{\frac{4}{4-p}}}T||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)}+\frac{1}{2}\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt.
\end{aligned}$$

Escrevendo

$$C_p=\frac{4-p}{4}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{p}{4-p}}\frac{2^{\frac{2p}{4-p}}K^{\frac{4}{4-p}}}{(2+p)^{\frac{4}{4-p}}},$$

temos

$$\int_0^T\int_0^L|\tilde{F}(u(x))|dxdt\leq\frac{1}{2}\int_0^T||u_x||^2_{L^2(I)}dt+C_pT||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)}+\frac{KT}{2}||\phi||^2_{L^2(I)}. \tag{2.51}$$

Combinando (2.50) e (2.51) obtemos a desigualdade desejada. $\square$

2.6 Solução Fraca

Definição 2.6.1. *Dizemos que u é solução global fraca do problema (2.1) quando $u \in Y_{0,T}$ e u satisfaz*

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau, \quad \forall t \in [0,T],$$

para todo $T > 0$.

Dizemos que u é solução local fraca do problema (2.1) quando existe $T_0 > 0$ tal que $u \in Y_{0,T_0}$ e u satisfaz

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau, \quad \forall t \in [0,T_0].$$

Teorema 2.2. *Sejam $a \in C^1(\mathbb{R})$ e $K > 0$ uma constante tal que*

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1+|x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x-y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$, $b \in L^2(I)$ e $\phi \in L^2(I)$. Então existe $\theta > 0$ tal que o problema (2.1) tem uma única solução local fraca $u \in Y_{0,\theta}$.

Demonstração: Provaremos que a aplicação $\Gamma : Y_{0,\theta} \to Y_{0,\theta}$ dada por

$$\Gamma(v)(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)]d\tau.$$

é uma contração para algum $\theta > 0$ suficientemente pequeno, a ser determinado. Consideremos $T > 0$ arbitrariamente fixado e

$$C_3 = \left(1 + \frac{L+4T}{3} + C^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad C_4 = (4 + 2L + 6T + C^2)^{\frac{1}{2}}, \quad C_5 = \max\{C_1, C_2\},$$

onde C é a constante do Lema 2.4.3, C_1 é a constante do Lema 2.4.1 e C_2 é a constante do Lema 2.4.2.

Primeiramente, provemos que Γ está bem definida. De fato, para cada $t \in [0,\theta]$,

$v(t) \in H^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)$ e com $b \in L^2(I)$, concluímos $bv(t) \in L^2(I)$; como $|a(v(t))| \leq K(1 + |v(t)|^p)$ com $v(t) \in L^\infty(I)$, então $a(v(t)) \in L^\infty(I)$, e sabendo que $v_x \in C([0,L]; L^2(0,\theta)) \hookrightarrow L^2(0,\theta; L^2(I))$, obtemos $v_x(t) \in L^2(I)$, logo, $a(v(t))v_x(t) \in L^2(I)$. Também, pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2,

$$\int_0^\theta ||a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)||_{L^2(I)} d\tau \leq \int_0^\theta ||a(v(\tau))v_x(\tau)||_{L^2(I)} d\tau + \int_0^T ||bv(\tau)||_{L^2(I)} d\tau$$

$$\leq C_5 \theta^{\frac{2-p}{4}} ||v||^{p+1}_{Y_{0,\theta}} + C_5 \theta^{\frac{1}{2}} (1 + ||v||^p_{Y_{0,\theta}}) ||v||_{Y_{0,\theta}} + C_5 \theta^{\frac{1}{2} ||b||_{L^2(I)}} ||v||_{Y_{0,\theta}} < \infty, \quad (2.52)$$

o que prova que $a(v)v_x + bv \in L^1(0,\theta; L^2(I))$. Pelo Lema anterior resulta

$$\int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)] d\tau \in Y_{0,\theta}.$$

Como $\phi \in L^2(I)$, pelo Lema anterior segue que $W(\cdot)\phi \in Y_{0,\theta}$, e assim concluímos que Γ está bem definida.

Observe que

$$||\Gamma(v) - \Gamma(w)||_{Y_{0,\theta}} = \left|\left| \int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau)[a(v)(v_x - w_x) + (a(v) - a(w))w_x + b(v - w) d\tau] \right|\right|_{Y_{0,\theta}}$$

$$\leq C_4 \int_0^\theta ||a(v)(v_x - w_x)||_{L^2(I)} + ||(a(v) - a(w))w_x||_{L^2(I)} + ||b(v - w)||_{L^2(I)} d\tau. \quad (2.53)$$

Utilizando o Lema 2.4.1, vemos que

$$\int_0^\theta ||a(v)(v_x - w_x)||_{L^2(I)} d\tau \leq C_5 \theta^{\frac{2-p}{4}} ||v||^p_{Y_{0,\theta}} ||v - w||_{Y_{0,\theta}} + C_5 \theta^{\frac{1}{2}} (1 + ||v||^p_{Y_{0,\theta}}) ||v - w||_{Y_{0,\theta}}. \quad (2.54)$$

Lembremos que

$$|a(v(x,t)) - a(w(x,t))| \leq K \left(1 + |v(x,t)|^{p-1} + |w(x,t)|^{p-1}\right) |v(x,t) - w(x,t)|,$$

e com isso,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\theta ||(a(v)-a(w))w_x||_{L^2(I)}d\tau \leq K\int_0^\theta ||(1+|v|^{p-1}+|w|^{p-1})(v-w)w_x||_{L^2(I)}d\tau \\
&\leq K\int_0^\theta ||(v-w)w_x||_{L^2(I)}+|||v|^{p-1}(v-w)w_x||_{L^2(I)}+|||w|^{p-1}(v-w)w_x||_{L^2(I)}d\tau \\
&\leq C_5K\theta^{\frac{1}{4}}||v-w||_{Y_{0,\theta}}||w||_{Y_{0,\theta}}+C_5K\theta^{\frac{2-p}{4}}||v-w||_{Y_{0,\theta}}||w||_{Y_{0,\theta}}||v||^{p-1}_{Y_{0,\theta}} \\
&+C_5K\theta^{\frac{2-p}{4}}||v-w||_{Y_{0,\theta}}||w||^{p}_{Y_{0,\theta}}. \qquad (2.55)
\end{aligned}
$$

Por fim, com (2.25), temos

$$\int_0^\theta ||b(v-w)||_{L^2(I)}d\tau \leq C_5\theta^{\frac{1}{2}}||b||_{L^2(I)}||v-w||_{Y_{0,\theta}}. \qquad (2.56)$$

Combinando (2.54), (2.55), (2.56) em (2.53), obtemos

$$
\begin{aligned}
||\Gamma(v)-\Gamma(w)||_{Y_{0,T}} &\leq C_4C_5(K+1)\theta^{\frac{2-p}{4}}\left(||v||^p_{Y_{0,\theta}}+||w||^p_{Y_{0,\theta}}+||w||_{Y_{0,\theta}}||v||^{p-1}_{Y_{0,\theta}}\right)||v-w||_{Y_{0,\theta}} \\
&+ C_4C_5(K+1)\theta^{\frac{1}{4}}||w||_{Y_{0,\theta}}||v-w||_{Y_{0,\theta}} \\
&+ C_4C_5(K+1)\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})||v-w||_{Y_{0,\theta}} \\
&+ C_4C_5(K+1)\theta^{\frac{1}{2}}||v||^p_{Y_{0,\theta}}||v-w||_{Y_{0,\theta}}. \qquad (2.57)
\end{aligned}
$$

Agora, provemos que Γ é contração numa bola $S_{\theta,r}=\{v\in Y_{0,\theta}; ||v||_{Y_{0,\theta}}\leq r\}$ de $Y_{0,\theta}$, cujo raio será determinado.

Note que, com (2.30), (2.31) e (2.52) temos

$$
\begin{aligned}
||\Gamma(v)||_{Y_{0,\theta}} &\leq ||W(\cdot)\phi||_{Y_{0,\theta}}+\left|\left|\int_0^\cdot W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{0,\theta}} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4||a(v)v_x+bv||_{L^1(0,\theta;L^2(I))} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4C_5\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})||v||^p_{Y_{0,\theta}}+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{0,\theta}} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4C_5\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})r^p+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{0,\theta}}, \qquad (2.58)
\end{aligned}
$$

para qualquer $v \in S_{\theta,r}$. Também, por (2.57), resulta

$$||\Gamma(v) - \Gamma(w)||_{Y_{0,\theta}} \leq C_4C_5(K+1)[(3\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{4}}r + \theta^{\frac{1}{2}}(1 + ||b||_{L^2(I)})]||v - w||_{Y_{0,\theta}}, \tag{2.59}$$

para quaisquer $v, w \in S_{\theta,r}$.

Escolhendo $0 < \theta < T$ que satisfaça

$$C_4C_5(K+1)\left[(3\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{4}}r + \theta^{\frac{1}{2}}(1 + ||b||_{L^2(I)})\right] < \frac{1}{2}. \tag{2.60}$$

e $r = 2C_3||\phi||_{L^2(I)}$, decorre de (2.58) que $\Gamma(S_{\theta,r}) \subset S_{\theta,r}$ e de (2.59) decorre que Γ é contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach segue que existe um único $u \in S_{\theta,r}$ tal que $\Gamma(u) = u$, o que prova a existência e unicidade de solução local fraca. $\square$

Nosso objetivo, agora, é provar que a solução local fraca do problema (2.1) é solução global fraca, ou seja, provaremos que $T_{max} = \infty$. Primeiramente, devemos mostrar que tal solução local fraca u pode ser estendida até um intervalo maximal. Para isso, precisamos provar que (2.47) e (2.48) sejam válidas para solução local fraca, e para tal prova, é necessário aproximar a solução local fraca por soluções fortes. Vamos então, provar tal aproximação.

Proposição 2.6.1. *Sejam $\phi \in L^2(I)$ dado e $T > 0$ tal que $u \in Y_{0,T}$ é a única solução local fraca de (2.1). Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset Y_{3,T}$ de soluções fortes de (2.1) com $u_n \to u$ em $Y_{0,T}$.*

Demonstração: Lembrando que $D(A)$ é denso em $L^2(I)$ segue que existe $\{\phi_n\} \subset D(A)$ tal que

$$\phi_n \to \phi \quad \text{em} \quad L^2(I). \tag{2.61}$$

Também, como $H^1(I)$ é denso em $L^2(I)$ segue que existe $\{b_n\} \subset H^1(I)$ tal que

$$b_n \to b \quad \text{em} \quad L^2(I). \tag{2.62}$$

Seja $u_n \in Y_{3,T}$ a única solução de (2.1) com dado inicial ϕ_n e damping b_n, para cada $n \in \mathbb{N}$. Inicialmente, provemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];L^2(I)) \cap L^2(0,T;H^1(I))$.

Temos

$$\begin{cases} u_{n,t} + u_{n,x} + a(u_n)u_{n,x} + u_{n,xxx} + b_n(x)u_n = 0, & (x,t) \in (0,L)\times(0,T), \\ u_n(0,t) = u_n(L,t) = u_{n,x}(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u_n(x,0) = \phi_n(x), & x \in I. \end{cases} \tag{2.63}$$

e

$$\begin{cases} u_{m,t} + u_{m,x} + a(u_m)u_{m,x} + u_{m,xxx} + b_m(x)u_m = 0, & (x,t) \in (0,L)\times(0,T), \\ u_m(0,t) = u_m(L,t) = u_{m,x}(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ u_m(x,0) = \phi_m(x), & x \in I. \end{cases} \tag{2.64}$$

Subtraindo (2.64) de (2.63) e escrevendo $w = u_n - u_m$ obtemos

$$\begin{cases} w_t + w_x + w_{xxx} + (b_n(x)u_n - b_m(x)u_m) + (a(u_n)u_{n,x} - a(u_m)u_{m,x}) = 0, & (x,t) \in (0,L)\times(0,T), \\ w(0,t) = w(L,t) = w_x(L,t) = 0, & t \in (0,T), \\ w(x,0) = \phi_n(x) - \phi_m(x), & x \in (0,L). \end{cases} \tag{2.65}$$

Multiplicando a primeira equação de (2.65) por $(1+x)w$ e integrando em $(0,L)$ segue

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^L (1+x)w^2dx - \frac{1}{2}\int_0^L w^2dx + \frac{1}{2}w_x^2(0,t) + \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2dx + \underbrace{\int_0^L (b_n - b_m)u_m(1+x)wdx}_{=I_6}$$
$$+ \underbrace{\int_0^L \frac{d}{dx}[F(u_n) - F(u_m)](1+x)wdx}_{=I_7} = 0,$$

onde $F(u(x)) = \displaystyle\int_0^{u(x)} a(\xi)d\xi$.

Estimando I_6 obtemos

$$\begin{aligned} I_6 &\leq \int_0^L |b_n - b_m||u_m|(1+x)|w|dx \\ &\leq \frac{1}{2}||b_n - b_m||^2_{L^2(I)} + \frac{C}{2}(1+L)||u_m(t)||^2_{H^1(I)} \int_0^L (1+x)|w|^2 dx. \end{aligned}$$

Integrando I_7 por partes, obtemos

$$I_7 = -\int_0^L [F(u_n) - F(u_m)](1+x)w_x dx - \int_0^L [F(u_n) - F(u_m)]w dx.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_m(x,t) \leq u_n(x,t)$ e então

$$F(u_n) - F(u_m) = \int_{u_n}^{u_m} a(\xi)d\xi,$$

o que implica

$$|F(u_n) - F(u_m)| \leq K \int_{u_n}^{u_m} (1 + |\xi|^p)d\xi.$$

Como $u_n \leq \xi \leq u_m$ então $\xi \leq \max\{|u_n|, |u_m|\}$, e daí, $|\xi| \leq |u_n| + |u_m|$,

$$|F(u_n) - F(u_m)| \leq C_p \int_{u_m}^{u_n} (1 + |u_n|^p + |u_m|^p)d\xi \leq C_p(1 + |u_n|^p + |u_m|^p)w.$$

Assim,

$$I_7 \leq \int_0^L C_p(1 + |u_n|^p + |u_m|^p)|w|(1+x)w_x dx + \int_0^L C_p(1 + |u_n|^p + |u_m|^p)(1+x)|w|^2 dx.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \quad \frac{d}{dt}\int_0^L (1+x)w^2 dx + \frac{1}{2}w_x^2(0,t) + \frac{3}{2}\int_0^L w_x^2 dx$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_0^L w^2 dx + \frac{1}{2}||b_n - b_m||^2_{L^2(I)} + \frac{C}{2}(1+L)||u_m(t)||^2_{H^1(I)} \int_0^L (1+x)|w|^2 dx$$

$$+\frac{C_p^2}{2}(1+||u_n(t)||^{2p}_{L^\infty(I)}+||u_m(t)||^{2p}_{L^\infty(I)})(1+L)\int_0^L(1+x)|w|^2dx+\frac{1}{2}\int_0^L|w_x|^2dx$$

$$+C_p(1+||u_n(t)||^p_{H^1(I)}+||u_m(t)||^p_{H^1(I)})\int_0^L(1+x)|w|^2dx.$$

Definindo

$$m(s)=\frac{1}{2}+\frac{C}{2}(1+L)||u_m(s)||^2_{H^1(I)}+\frac{C_p^2}{2}(1+||u_n(s)||^{2p}_{L^\infty(I)}+||u_m(s)||^{2p}_{L^\infty(I)})(1+L)$$
$$+C_p(1+||u_n(s)||^p_{L^\infty(I)}+||u_m(s)||^p_{L^\infty(I)})$$

e integrando de 0 à $t\le T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\int_0^L(1+x)w^2(t)dx+\int_0^t\int_0^L w_x^2dx\le\frac{1}{2}\{\int_0^L(1+x)|\phi_n-\phi_m|^2dx+T||b_n-b_m||^2_{L^2(I)}\}$$
$$+\int_0^t m(s)\int_0^L(1+x)|w|^2dxdt.$$

Observe que $\int_0^T m(s)ds\le C(p,T,L)||\phi_m||_{L^2(I)}$ por (2.47) e (2.48), para algum $C=C(p,T,L)>0$. Como $\{\phi_m\}$ é convergente em $L^2(I)$ segue que $\int_0^T m(s)ds<\infty$. Então, pelo Lema de Gronwall 1.1.2 resulta

$$\frac{1}{2}\int_0^L(1+x)w^2(t)dx+\int_0^t\int_0^L w_x^2dx\le\frac{1}{2}\left\{\int_0^L(1+x)|\phi_n-\phi_m|^2dx+T||b_n-b_m||^2_{L^2(I)}\right\}e^{\int_0^T m(s)ds}.$$

Assim, obtemos que $\{u_n\}$ é uma sequência de Cauchy em $C([0,T];L^2(I))\cap L^2(0,T;H^1(I))$. Então existe um único $v\in C([0,T];L^2(I))\cap L^2(0,T;H^1(I))$ tal que

$$u_n\to v\quad\text{em}\quad C([0,T];L^2(I))\cap L^2(0,T;H^1(I)).\tag{2.66}$$

Observe que $a(v(t))v_x(t)$, $bv(t)\in L^2(I)$ para todo $t\in(0,T)$. Também, procedendo como nos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, obtemos

$$\int_0^T||a(v(t))v_x(t)||_{L^2(I)}\le K\int_0^T(1+||v(t)||^p_{L^\infty(I)})||v_x(t)||_{L^2(I)}dt$$
$$\le KT^{\frac{1}{2}}||v||_{L^2(0,T;H^1(I))}+KT^{\frac{1}{2}}||v||_{L^2(0,T;H^1(I))}||v||^p_{C([0,T];L^2(I))}+T^{\frac{2-p}{4}}||v||^{\frac{p}{2}+1}_{L^2(0,T;H^1(I))}||v||^{\frac{p}{2}}_{C([0,T];L^2(I))}<\infty$$

e

$$\int_0^T ||bv(t)||_{L^2(I)}dt \leq ||b||_{L^2(I)}T^{\frac{1}{2}}||v||_{L^2(0,T;H^1(I))} < \infty,$$

donde $a(v)v_x + bv \in L^1(0,T;L^2(I))$. Pelo Lema 2.4.3 resulta

$$\left|\left| \int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau)[a(v)v_x + bv]d\tau \right|\right|_{Y_{0,T}} \leq \left(4 + 2L + 6T + C^2\right)^{\frac{1}{2}} ||a(v)v_x + bv||_{L^1(0,T;L^2(I))}.$$

Definamos $\eta \in C([0,T];L^2(I)) \cap L^2(0,T;H^1(I))$ dada por

$$\eta(t) = v(t) - \int_0^t W(t-\tau)[a(v)v_x + bv]d\tau$$

e provemos que $W(\cdot)\phi_n \to \eta$ em $C([0,T];L^2(I))$.

Inicialmente, provemos que $a(u_n)u_{n,x} \to a(v)v_x$ em $L^1(0,T;L^2(I))$.

Temos

$$\int_0^T ||a(v)v_x - a(u_n)u_{n,x}||_{L^2(I)} \leq \underbrace{\int_0^T ||a(v)(v_x - u_{n,x})||_{L^2(I)}}_{=I_8} + \underbrace{\int_0^T ||(a(v) - a(u_n))u_{n,x}||_{L^2(I)}}_{=I_9}.$$

Provemos que $I_8 \to 0$ e $I_9 \to 0$.

Desde que

$$|a(v(x,t))| \leq K(1 + K||v(t)||^p_{L^\infty(I)}), \quad \forall (x,t) \in (0,L) \times (0,T)$$

com

$$||v(t)||^p_{L^\infty(I)} \leq 2^p C(||v(t)||^p_{L^2(I)} + ||v(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)})$$

resulta

$$||a(v(t))(v_x(t) - u_{n,x}(t))||_{L^2(I)} \leq K||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} + K||v(t)||^p_{L^2(I)}||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)}$$
$$+K||v(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)}||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)}.$$

Mas

$$\int_0^T ||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} dt \leq T^{\frac{1}{2}} ||v_x - u_{n,x}||_{L^2(0,T;L^2(I))} \to 0,$$

$$\int_0^T ||v(t)||^p_{L^2(I)} ||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} \leq ||v||^p_{C([0,T];L^2(I))} T^{\frac{1}{2}} ||v_x - u_{n,x}||_{L^2(0,T;L^2(I))} \to 0,$$

$$\begin{aligned}\int_0^T ||v(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)} ||v_x(t)||^{\frac{p}{2}}_{L^2(I)} & \; ||v_x(t) - u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} \leq \\ & ||v||^{\frac{p}{2}}_{C([0,T];L^2(I))} ||v_x||^{\frac{p}{2}}_{L^2(0,T;L^2(I))} ||v_x - u_{n,x}||_{L^2(0,T;L^2(I))} T^{\frac{2-p}{4}} \to 0,\end{aligned}$$

donde conluímos que $I_8 \to 0$.

Lembrando que

$$|a(v(x,t)) - a(u_n(x,t))| \leq (1 + |v(x,t)|^{p-1} + |u_n(x,t|^{p-1})|v(x,t) - u_n(x,t)|,$$

e portanto,

$$\begin{aligned}||(a(v(t)) - a(u_n(t)))u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} \leq ||&|v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} + |||v(t)|^{p-1}|v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} \\ & + |||u_n(t)|^{p-1}|v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)}.\end{aligned}$$

Utilizando majorações análogas às que foram utilizadas para provar (2.26) concluímos que

$$\int_0^T |||v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} \to 0,$$

e com majorações análogas às que foram utilizadas para provar (2.27) também temos

$$\int_0^T |||v(t)|^{p-1}|v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} dt \to 0$$

e

$$\int_0^T |||u_n(t)|^{p-1}|v(t) - u_n(t)|u_{n,x}(t)||_{L^2(I)} dt \to 0.$$

Portanto, $I_9 \to 0$, e assim $a(u_n)u_{n,x} \to a(v)v_x$ em $L^1(0,T;L^2(I))$. Temos ainda que $b_n u_n \to bv$

em $L^1(0,T;L^2(I))$ pois

$$\begin{aligned}\int_0^T ||b_n u_n(t) - bv(t)||_{L^2(I)}dt &\leq \int_0^T ||b_n u_n(t) - bu_n(t)||_{L^2(I)} + ||b(u_n(t) - v(t))||_{L^2(I)}dt \\ &\leq ||b_n - b||_{L^2(I)} T^{\frac{1}{2}} ||u_n||_{L^2(0,T;H^1(I))} + ||b||_{L^2(I)} ||u_n - v||_{L^2(0,T;H^1(I))} \to 0.\end{aligned}$$

Com isso,

$$a(u_n)u_{n,x} + b_n u_n \to a(v)v_x + bv \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2(I)). \tag{2.67}$$

Consequentemente, pelo Lema 2.4.3 e com a definição de norma em $Y_{0,T}$,

$$\left|\left| \int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau)[a(u_n)u_{n,x} + b_n u_n - a(v)v_x - bv]d\tau \right|\right|_{C([0,T];L^2(I))} \to 0 \tag{2.68}$$

Combinando (2.66) e (2.68) em

$$\begin{aligned}||W(\cdot)\phi_n - \eta||_{C([0,T];L^2(I))} \leq &\left|\left| \int_0^{\cdot} W(\cdot - \tau)[a(u_n)u_{n,x} + b_n u_n - a(v)v_x - bv]d\tau \right|\right|_{C([0,T];L^2(I))} \\ &+ ||u_n - v||_{C([0,T];L^2(I))}\end{aligned}$$

e pela unicidade do limite em $C([0,T];L^2(I))$ concluímos que $\eta = W(\cdot)\phi$ quase sempre em $(0,L) \times (0,T)$.

Então $v \in Y_{0,T}$ e

$$v(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(v)v_x + bv]d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Vemos, com isso, que v é solução local fraca de (2.1) em $(0,T)$ com dado inicial $\phi \in L^2(I)$. Pela unicidade de solução local fraca resulta $u = v$ quase sempre em $(0,L)\times(0,T)$.

As convergências (2.61) e (2.67), combinadas com as desigualdades (2.30) e (2.31), nos fornecem que $u_n \to u$ em $Y_{0,T}$. □

Agora, provemos que (2.47) e (2.48) valem para soluções locais fracas.

Proposição 2.6.2. *Sejam $\phi \in L^2(I)$ dado e $T' > 0$ tal que $u \in Y_{0,T'}$ seja a única solução local fraca de (2.1) em $(0, T')$. Então*

$$||u(\cdot, T)||^2_{L^2(I)} + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L b(x)u^2(x,t)dxdt = ||\phi||^2_{L^2(I)} \tag{2.69}$$

e

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \leq \frac{L + (2K+1)T}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + C_p T||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)} \tag{2.70}$$

para todo $0 \leq T \leq T'$.

Demonstração: Pelo Lema anterior sabemos que existem $\{\phi_n\} \subset D(A)$, $\{b_n\} \subset H^1(I)$ e $\{u_n\} \subset Y_{3,T'}$ tais que

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad Y_{0,T'}, \tag{2.71}$$

$$b_n \to b \quad \text{em} \quad L^2(I), \tag{2.72}$$

$$\phi_n \to \phi \quad \text{em} \quad L^2(I), \tag{2.73}$$

onde u_n é a solução forte de (2.1) com dado inicial ϕ_n e damping b_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Primeiramente, provemos que

$$b_n u_n^2 \to bu^2 \quad \text{em} \quad L^1(0, T'; L^1(I)). \tag{2.74}$$

De fato, temos

$$||b_n u_n^2(t) - bu^2(t)||_{L^1(I)} \leq ||b_n u_n^2(t) - bu_n^2(t)||_{L^1(I)} + ||bu_n^2(t) - bu^2(t)||_{L^1(I)}, \quad \forall t \in [0, T'].$$

Mas

$$||b_n u_n^2(t) - bu_n^2(t)||_{L^1(I)} \leq C_L||u_n(t)||^2_{H^1(I)}||b_n - b||_{L^2(I)}$$

e

$$\begin{aligned}
||bu_n^2(t) - bu^2(t)||_{L^1(I)} &= \int_0^L |b(x)||u_n(x,t) - u(x,t)||u_n(x,t) + u(x,t)|dx \\
&\leq C_L||u_n(t) - u(t)||_{H^1(I)}\left(\int_0^L |b(x)||u_n(x,t)|dx + \int_0^L |b(x)||u(x,t)|dx\right), \\
&\leq C_L||u_n(t) - u(t)||_{H^1(I)}||b||_{L^2(I)}(||u_n||^2_{C([0,T'];L^2(I))} + ||u||^2_{C([0,T'];L^2(I))})
\end{aligned}$$

onde $C_L = C(L) > 0$.

Resulta, então, que

$$\begin{aligned}
||b_n u_n^2 - bu^2||_{L^1(0,T';L^1(I))} &\leq C_L||b_n - b||_{L^2(I)}||u_n||_{L^2(0,T';H^1(I))} \\
&+ C_L T'^{\frac{1}{2}}||u_n - u||_{L^2(0,T';H^1(I))}||b||_{L^2(I)}||u_n||^2_{C([0,T'];L^2(I))} \\
&+ C_L T'^{\frac{1}{2}}||u_n - u||_{L^2(0,T';H^1(I))}||b||_{L^2(I)}||u||^2_{C([0,T'];L^2(I))}.
\end{aligned}$$

Combinando esta última desigualdade com as convergências (2.71) e (2.72) obtemos (2.74).

Das desigualdades

$$\begin{aligned}
||u(T) - u_n(T)||_{L^2(I)} &\leq ||u - u_n||_{C([0,T];L^2(I))}, && \forall T \in [0,T'], \\
||u_x(0) - u_{n,x}(0)||_{L^2(0,T)} &\leq ||u_x - u_{n,x}||_{C([0,L];L^2(0,T))}, && \forall T \in [0,T'],
\end{aligned}$$

e das convergências (2.71), (2.73) e (2.74) obtemos as desigualdades desejadas. □

Agora, consideremos $0 < T < T_{max} \leq \infty$. e provemos que a solução local fraca de (2.1) pode ser estendida até o intervalo $[0,T]$. Sejam

$$C_3 = \left(1 + \frac{L+4T}{3} + C^2\right)^{\frac{1}{2}}, \;\; C_4 = (4 + 2L + 6T + C^2)^{\frac{1}{2}}, \;\; C_5 = \max\{C_1, C_2\},$$

onde C é a constante do Lema 2.4.3, C_1 é a constante do Lema 2.4.1 e C_2 é a constante do Lema 2.4.2.

Sejam também $r = 2C_3||\phi||_{L^2(I)}$ e $\theta = \dfrac{T}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$ de modo que

$$C_4C_5(K+1)\left[(3\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})r^p+\theta^{\frac{1}{4}}r+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]<\frac{1}{2}. \tag{2.75}$$

Definamos $S_{\theta,r}=\{v\in Y_{0,\theta};||v||_{Y_{0,\theta}}\leq r\}$ e $\Gamma_1:Y_{0,\theta}\to Y_{0,\theta}$ dada por

$$\Gamma_1(v)(t)=W(t)\phi-\int_0^t W(t-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)]dt.$$

A prova de que Γ_1 está bem definida é idêntica à prova de que Γ está bem definida, no Teorema 2.2. Também, como em (2.58) e (2.59), obtemos

$$\begin{aligned}
||\Gamma_1(v)||_{Y_{0,\theta}} &\leq ||W(\cdot)\phi||_{Y_{0,\theta}}+\left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{0,\theta}}\\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4||a(v)v_x+bv||_{L^1(0,\theta;L^2(I))}\\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4C_5\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})||v||^p_{Y_{0,\theta}}+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{0,\theta}}\\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)}+C_4C_5\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})r^p+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{0,\theta}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
||\Gamma_1(v)-\Gamma_1(w)||_{Y_{0,\theta}} &= \left|\left|\int_0^{\cdot} W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)-a(w(\tau))w_x(\tau)-bw(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{0,\theta}}\\
&\leq C_4C_5(K+1)[(3\theta^{\frac{2-p}{4}}+\theta^{\frac{1}{2}})r^p+\theta^{\frac{1}{4}}r+\theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})]||v-w||_{Y_{0,\theta}},
\end{aligned}$$

para quaisquer $v,w\in S_{\theta,r}$.

Lembrando que $r=2C_3||\phi||_{L^2(I)}$ e θ satisfaz (2.75), das desigualdades acima decorre que $\Gamma_1(S_{\theta,r})\subset S_{\theta,r}$ e que Γ_1 é contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach decorre que existe um único $u_1\in S_{\theta,r}$ tal que $\Gamma_1(u_1)=u_1$, que também satisfaz $\sup\limits_{0\leq t\leq\theta}||u_1(t)||_{L^2(I)}\leq ||\phi||_{L^2(I)}$.

Agora, definamos

$$Y_{\theta,2\theta}=\{v\in C([\theta,2\theta];L^2(I))\cap L^2(\theta,2\theta;H^1(I));v_x\in C([0,L];L^2(\theta,2\theta))\},$$

$$S_{2\theta,r}=\{v\in Y_{\theta,2\theta};||v||_{Y_{\theta,2\theta\leq r}}\},$$

e consideremos a aplicação $\Gamma_2 : Y_{\theta,2\theta} \to Y_{\theta,2\theta}$ dada por

$$\Gamma_2(v)(t) = W(t-\theta)u_1(\theta) - \int_\theta^t W(t-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)]dt.$$

Observe que os Lemas 2.4.1 e 2.4.2 foram provados quando o tempo varia no intervalo $[0,\theta]$. Eles podem ser provados em intervalos da forma $[(j-1)\theta, j\theta]$, com j inteiro. O mesmo argumento é válido para o Lema 2.4.3. Como as desigualdades (2.58) e (2.59) foram provadas a partir de tais Lemas, decorre que desigualdades análogas valem para Γ_2. Assim, desigualdades análogas às de (2.58) para Γ_2 são

$$\begin{aligned}
||\Gamma_2(v)||_{Y_{\theta,2\theta}} &\leq ||W(\cdot-\theta)u_1(\theta)||_{Y_{\theta,2\theta}} + \left|\left|\int_\theta^\cdot W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{\theta,2\theta}} \\
&\leq C_3||u_1(\theta)||_{L^2(I)} + C_4||a(v)v_x + bv||_{L^1(\theta,2\theta;L^2(I))} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)} + C_4C_5(K+1)\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})||v||^p_{Y_{\theta,2\theta}} + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{\theta,2\theta}} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)} + C_4C_5(K+1)\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{\theta,2\theta}},
\end{aligned}$$

e as desigualdades análogas às de (2.59) para Γ_2 são

$$\begin{aligned}
||\Gamma_2(v) - \Gamma_2(w)||_{Y_{\theta,2\theta}} &= \left|\left|\int_\theta^\cdot W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau) - a(w(\tau))w_x(\tau) - bw(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{\theta,2\theta}} \\
&\leq C_4C_5(K+1)[(3\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{4}}r + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})]||v-w||_{Y_{\theta,2\theta}},
\end{aligned}$$

para quaisquer $v, w \in S_{2\theta,r}$.

Desde que $r = 2C_3||\phi||_{L^2(I)}$ e θ satisfaz (2.75), das desigualdades acima decorre que $\Gamma_2(S_{2\theta,r}) \subset S_{2\theta,r}$ e Γ_2 é contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe um único $u_2 \in S_{2\theta,r}$ tal que $\Gamma_2(u_2) = u_2$, que também satisfaz $\sup\limits_{\theta \leq t \leq 2\theta} ||u_2(t)||_{L^2(I)} \leq ||u_1(\theta)||_{L^2(I)}$.

Prosseguindo com o mesmo raciocínio, definimos

$$Y_{(n-1)\theta,n\theta} = \{v \in C([(n-1)\theta, n\theta]\,; L^2(I)) \cap L^2((n-1)\theta, n\theta; H^1(I)); v_x \in C([0,L]\,; L^2((n-1)\theta, n\theta))\},$$

$$S_{n\theta,r} = \{v \in Y_{(n-1)\theta,n\theta}; ||v||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} \leq r\},$$

e consideramos a aplicação $\Gamma_n : Y_{(n-1)\theta,n\theta} \to Y_{(n-1)\theta,n\theta}$ dada por

$$\Gamma_n(v)(t) = W(t-(n-1)\theta)u_{n-1}((n-1)\theta) - \int_{(n-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau) + bv(\tau)]dt.$$

Novamente, temos

$$\begin{aligned}
||\Gamma_n(v)||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} &\leq ||W(\cdot-(n-1)\theta)u_{n-1}((n-1)\theta)||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} \\
&+ \left|\left|\int_{(n-1)\theta}^{\cdot} W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} \\
&\leq C_3||u_{n-1}((n-1)\theta)||_{L^2(I)} + C_4||a(v)v_x + bv||_{L^1((n-1)\theta,n\theta;L^2(I))} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)} + C_4C_5(K+1)\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})||v||^p_{Y_{0,n\theta}} + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} \\
&\leq C_3||\phi||_{L^2(I)} + C_4C_5(K+1)\left[(\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})\right]||v||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}},
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
||\Gamma_n(v)-\Gamma_n(w)||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} &= \left|\left|\int_{(n-1)\theta}^{\cdot} W(\cdot-\tau)[a(v(\tau))v_x(\tau)+bv(\tau)-a(w(\tau))w_x(\tau)-bw(\tau)]d\tau\right|\right|_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}} \\
&\leq C_4C_5(K+1)[(3\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{2}})r^p + \theta^{\frac{1}{4}}r + \theta^{\frac{1}{2}}(1+||b||_{L^2(I)})]||v-w||_{Y_{(n-1)\theta,n\theta}},
\end{aligned}$$

para quaisquer $v, w \in S_{n\theta,r}$. Sabendo que $r = 2C_3||\phi||_{L^2(I)}$ e θ satisfaz (2.75), das desigualdades acima decorre que $\Gamma_n(S_{n\theta,r}) \subset S_{n\theta,r}$ e Γ_n é contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe um único $u_n \in S_{n\theta,r}$ tal que $\Gamma_n(u_n) = u_n$, que também satisfaz $\sup_{(n-1)\theta\leq t\leq n\theta} ||u_n(t)||_{L^2(I)} \leq ||u_{n-1}(\theta)||_{L^2(I)}$.

Consideremos $u \in Y_{0,T}$ definida por

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & se \quad 0 \leq t \leq \theta, \\ u_2(t) & se \quad \theta \leq t \leq 2\theta, \\ \vdots & \\ u_n(t) & se \quad (n-1)\theta \leq t \leq n\theta, \end{cases}$$

Provemos que tal função satisfaz

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]dt, \quad \forall (j-1)\theta \leq t \leq j\theta,$$

para cada $j = 1, ..., n$. Tal prova será feita por indução sobre j. De fato, quando $j = 1$ não há o quê provar, pois para $0 \leq t \leq \theta$ temos

$$u_1(t) = W(t)\phi - \int_0^t [a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau,$$

e então

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t [a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau.$$

Suponhamos para cada $j = 2, ..., n-1$ o desejado seja verdadeiro, ou seja,

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t [a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau, \quad \forall (j-1)\theta \leq t \leq j\theta,$$

para cada $j = 2, ..., n-1$. Agora, seja $t \in [(n-1)\theta, n\theta]$ dado e provemos que

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t [a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau.$$

Pela definição da função u, sabemos que

$$u(t) = u_n(t) = W(t-(n-1)\theta)u_{n-1}((n-1)\theta) - \int_{(n-1)\theta}^t W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]dt, \quad (2.76)$$

e da hipótese de indução sabemos também

$$u((n-1)\theta) = W((n-1)\theta)\phi - \int_0^{(n-1)\theta} W((n-1)\theta - \tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau,$$

ou seja,

$$u_{n-1}((n-1)\theta) = W((n-1)\theta)\phi - \int_0^{(n-1)\theta} W((n-1)\theta - \tau)[a(u(\tau))u_x(\tau) + bu(\tau)]d\tau. \quad (2.77)$$

Substituindo (2.77) em (2.76) resulta

$$\begin{aligned} u(t) &= W(t-(n-1)\theta)\left[W((n-1)\theta)\phi - \int_0^{(n-1)\theta} W((n-1)\theta-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau)+bu(\tau)]d\tau\right] \\ &- \int_{(n-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau)+bu(\tau)]d\tau \end{aligned}$$

donde segue o desejado. Com isso, concluímos que u é uma extensão da solução local fraca do problema (2.1) com dado inicial $\phi \in L^2(I)$ e $u \in Y_{0,T}$.

Sabemos que a solução local fraca é única. Provemos que sua extensão também o é.

Proposição 2.6.3. *Sejam $\phi \in L^2(I)$ e $T \in [0, T_{max})$ dados. Se $u, v \in Y_{0,T}$ são extensões da solução local fraca de (2.1) com dado inicial ϕ, então $u = v$.*

Demonstração: Como u e v são soluções fracas de (2.1) então

$$u(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(u)u_x + bu]d\tau, \quad \forall t \in [0,T],$$

e

$$v(t) = W(t)\phi - \int_0^t W(t-\tau)[a(v)v_x + bv]d\tau, \quad \forall t \in [0,T].$$

Consideremos $\theta = \dfrac{T}{n}$ com $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo

$$C_4C_5(K+1)[(3\theta^{\frac{2-p}{4}} + \theta^{\frac{1}{4}})r^p + \theta^{\frac{1}{4}}r + \theta^{\frac{1}{2}}(1_{|}|b||_{L^2(I)})] < \frac{1}{2}$$

onde $r = 2C_3||\phi||_{L^2(I)}$. Consideremos $k \in \{1, ..., n\}$ arbitrariamente fixado. Note que

$$\begin{aligned} u(t) &= W(t-(k-1)\theta)\left[W((k-1)\theta)\phi - \int_0^{(k-1)\theta} W((k-1)\theta-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau)+bu(\tau)]d\tau\right] \\ &- \int_{(k-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(u(\tau))u_x(\tau)+bu(\tau)]d\tau \\ &= W(t-(k-1)\theta)u_{k-1}((k-1)\theta) - \int_{(k-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(u)u_x+bu]d\tau \end{aligned}$$

e, da mesma forma, temos

$$v(t) = W(t-(k-1)\theta)v_{k-1}((k-1)\theta) - \int_{(k-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(v)v_x + bv]d\tau,$$

em $[(k-1)\theta, k\theta]$, onde u_{k-1} e v_{k-1} são as respectivas restrições de u e v em $[(k-1)\theta, k\theta]$.

Pela unicidade do ponto fixo da aplicação $\Gamma_k : Y_{(k-1)\theta,k\theta} \to Y_{(k-1)\theta,k\theta}$ dada por

$$\Gamma_k(w)(t) = W(t-(k-1)\theta)w_{k-1}((k-1)\theta) - \int_{(k-1)\theta}^{t} W(t-\tau)[a(w(\tau))w_x(\tau) + bw(\tau)]dt$$

segue que $u = v$ em $Y_{(k-1)\theta,k\theta}$. Pela arbitrariedade de k, concluímos que $u = v$. □

As Proposições 2.6.1 e 2.6.2 também são válidas para a extensão da solução local fraca de (2.1) e o enunciado de tais resultados segue abaixo. As demonstrações de tais resultados são idênticas às demonstrações das Proposições referidas, utilizando a unicidade da extensão da solução fraca.

Proposição 2.6.4. *Sejam $\phi \in L^2(I)$, $T \in [0, T_{max})$ dados e $u \in Y_{0,T}$ a extensão da solução local de (2.1) com dado inicial $\phi \in L^2(I)$. Então existe uma sequência $\{u_n\} \subset Y_{3,T}$ de soluções fortes de (2.1) com $u_n \to u$ em $Y_{0,T}$.*

Proposição 2.6.5. *Sejam $\phi \in L^2(I)$ e $T' \in [0, T_{max})$ dados e $u \in Y_{0,T'}$ a extensão da solução fraca de (2.1) em $(0, T')$. Então*

$$||u(\cdot, T)||^2_{L^2(I)} + \int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L b(x)u^2(x,t)dxdt = ||\phi||^2_{L^2(I)}$$

e

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \le \frac{L + (2K+1)T}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + C_p T ||\phi||_{L^2(I)}^{\frac{8+2p}{4-p}}$$

para todo $0 \le T \le T'$.

Para provarmos que a solução local fraca é solução global fraca, precisamos do seguinte resultado de "blow-up":

Proposição 2.6.6. *Sejam $\phi \in L^2(I)$ e $u \in Y_{0,T}$, para todo $T < T_{max}$, a respectiva solução* *local fraca do problema (2.1) em seu intervalo maximal de definição. Então uma, e apenas uma, das alternativas é válida:*

i) $T_{max} = \infty$;

ii) $T_{max} < \infty$ *e, neste caso,* $\lim\limits_{t \to T_{max}} ||u(t)||_{L^2(I)} = \infty$.

Demonstração: Suponhamos que $T_{max} < \infty$ e $\lim\limits_{t \to T_{max}} ||u(t)||_{L^2(I)} < \infty$. Consideremos uma sequência $\{t_j\} \subset [0, T_{max})$ com $t_j \to T_{max}$ e fixemos $0 < T < T_{max}$. Observe que para todo $j \in \mathbb{N}$ temos $u(t_j) \in L^2(I)$. Seja $v_j \in Y_{0,T}$ a solução fraca do problema (2.1) com dado inicial $u(t_j)$. Então $u_j \in Y_{0,t_j+T}$ dada por

$$u_j(t) = \begin{cases} u(t), & 0 \leq t \leq t_j, \\ v_j(t - t_j), & t_j \leq t \leq t_j + T, \end{cases}$$

é solução de (2.1) com dado inicial $\phi \in L^2(I)$. Considerando j suficientemente grande, de modo que $T_{max} < t_j + T$, obtemos $u_j \in Y_{0,t_j+T}$ solução de (2.1), o que contraria a definição de T_{max}. Portanto, resulta que $T_{max} = \infty$. □

Pela Proposição 2.6.5 observamos que $||u(t)||_{L^2(I)} \leq ||\phi||_{L^2(I)} < \infty$, para todo $t \in [0, T_{max})$, e pelo resultado de blow-up acima segue que $T_{max} = \infty$, o que prova que a solução local fraca é solução global fraca.

A unicidade da solução global fraca segue da unicidade da extensão da solução local fraca.

Observações: i) Nos Teoremas 2.1 e 2.2 observamos que há um ganho de regularidade para a solução com relação a regularidade do dado inicial. De fato, observamos que se $\phi \in L^2(I)$ então a solução correspondente u pertence à classe $L^2(0, T; H^1(I))$. Se $\phi \in H^3(I)$ então a solução correspondente u pertence à classe $L^2(0, T; H^4(I))$. Tal ganho de regularidade apresenta um efeito regularizante Kato do problema (2.1).

ii) Definindo a energia de (2.1) por

$$E(t) = \int_0^L u(x,t)dx, \quad 0 \leq t \leq T,$$

de (2.49) resulta

$$\frac{d}{dt}E(t) = -u_x^2(0,t) - 2\int_0^L bu^2(x,t)dx \leq 0, \quad 0 \leq t \leq T,$$

donde concluímos que a energia associada a (2.1) é decrescente em $(0,T)$. Por (2.47) concluímos que

$$E(t) - E(0) = -\int_0^t u_x^2(0,\tau)d\tau - 2\int_0^t \int_0^L bu^2 \leq 0,$$

donde $E(t) \leq E(0)$, para todo $0 \leq t \leq T$.

Capítulo 3

Estabilidade Exponencial

Antes de enunciarmos o resultado principal deste capítulo, introduziremos primeiramente um sentido de estabilidade para a equação (2.1).

O sistema (2.1) é denominado uniformemente localmente exponencialmente estável em $L^2(I)$ se para cada $r > 0$ existem constantes $C > 0$ e $\nu > 0$, tal que para todo $\phi \in L^2(I)$ com $||\phi||_{L^2(I)} < r$ e para toda solução u de (2.1), temos

$$||u(\cdot,t)||^2_{L^2(I)} \leq C||\phi||^2_{L^2(I)}e^{-\nu t}, \quad \forall t \geq 0. \tag{3.1}$$

Quando a constante $\nu > 0$ que aparece em (3.1) não depende de $r > 0$, (2.1) é denominado uniformemente globalmente exponencialmente estável em $L^2(I)$.

Nosso intuito é provar que o sistema (2.1) é uniformemente localmente exponencialmente estável em $L^2(I)$, onde $I = (0, L)$. O resultado de estabilidade é o seguinte:

Teorema 3.1. *Suponhamos que $a \in C^1(\mathbb{R})$, verifique as seguintes hipóteses:*

$$a(0) = a'(0) = 0, \quad |a(x)| \leq K(1 + |x|^p), \quad |a'(x) - a'(y)| \leq K|x - y|^{p-1}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

com $1 \leq p < 2$ e $b \in L^2(I)$. Então (2.1) é uniformemente localmente exponencialmente estável em $L^2(I)$.

Provemos, inicialmente, a Propriedade de Continuação Única da Equação KdV Generalizada apresentada no Lema 3.1.2 a seguir.

3.1 Propriedade de Continuação Única

O seguinte Lema é uma estimativa de Carleman, cuja demonstração pode ser encontrada em [24] e que é de fundamental importância para a demonstração do Lema 3.1.2.

Lema 3.1.1. *Sejam $T > 0$ e $l > 0$. Então existem uma função regular positiva ψ definida em $[0, l]$ e duas constantes $C > 0$ e $s_0 > 0$ tal que para qualquer*

$$q \in L^2(0, T; H^3(0, l)) \cap H^1(0, T; L^2(0, l)) \tag{3.2}$$

satisfazendo

$$q(0, t) = q(l, t) = q_x(l, t) = q_{xx}(l, t) = 0$$

e para qualquer $s \geq s_0$, temos

$$\int_0^T \int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T-t)^5}|q|^2 + \frac{s^3}{t^3(T-t)^3}|q_x|^2 + \frac{s}{t(T-t)}|q_{xx}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dxdt \\ \leq C \int_0^T \int_0^l |q_t + q_{xxx} + q_x|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T-t)}\right) dxdt. \tag{3.3}$$

Lema 3.1.2. *Sejam $T > 0$ e $l > 0$. Se $v \in L^\infty(0, T; H^1(0, l))$ resolve*

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, T), \\ v(0, t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0, T), \\ v \equiv 0 & \text{em } (l', l) \times (0, T) \end{cases} \tag{3.4}$$

com $a \in C^0(\mathbb{R})$ e $0 < l' < l$, então $v \equiv 0$ em $(0, l) \times (0, T)$.

Demonstração: Nosso objetivo é utilizar o Lema 3.1.1, mas $v \notin L^2(0, T; H^3(0, l)) \cap H^1(0, T; L^2(0, l))$. Então, vamos aproximar v por funções regulares. Seja $0 < T' < T$ arbitrariamente fixado. Como $v \in L^\infty(0, T'; H^1(0, l))$ resolve (3.4), das condições de bordo deste problema resulta que $v \in L^\infty(0, T'; H_0^1(0, l))$.

Sejam $u = u(x,t)$ uma função e $h > 0$, definamos

$$u^{[h]}(x,t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} u(x,s)ds.$$

Observemos que, de acordo com [26], se $u \in L^p(0,T;V)$ com $1 \leq p \leq +\infty$ e V é um espaço de Banach, então $u^{[h]} \in W^{1,p}(0,T-h;V)$, para h suficientemente pequeno e $u^{[h]} \to u$ em $L^p(0,T';V)$. Logo, para $h > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{array}{ll} v^{[h]} & \in W^{1,\infty}(0,T';H_0^1(0,l)), \\ [a(v)v_x]^{[h]} & \in W^{1,\infty}(0,T';L^2(0,l)), \\ v_x^{[h]} & \in W^{1,\infty}(0,T';L^2(0,l)), \\ v_t^{[h]} & \in L^\infty(0,T';H_0^1(0,l)). \end{array}$$

Sendo v solução de (3.4), temos

$$v_t + v_x + v_{xxx} + a(v)v_x = 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T';H^{-2}(0,l))$$

e, portanto,

$$\frac{1}{h}\int_t^{t+h} \langle v_t(s)+v_x(s)+v_{xxx}(s)+a(v(s))v_x(s),\varphi\rangle_{H^{-2}(0,l)\times H_0^2(0,l)}ds = 0, \quad \forall\varphi \in H_0^2(0,l),\ t \in [0,T']$$

donde resulta

$$v_t^{[h]} + v_x^{[h]} + v_{xxx}^{[h]} + (a(v)v_x)^{[h]} = 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T';H^{-2}(0,l)).$$

Assim, $v_{xxx}^{[h]} \in L^\infty(0,T';L^2(0,l))$ e $v^{[h]} \in L^\infty(0,T';H^3(0,l))$. Dessa forma, $v^{[h]} \in L^2(0,T';H^3(0,l)) \cap H^1(0,T';L^2(0,l))$.

Note que $v^{[h]}$ resolve

$$\begin{cases} v_t^{[h]} + v_x^{[h]} + [a(v)v_x]^{[h]} + v_{xxx}^{[h]} = 0, & \text{em } (0,l)\times(0,T),\\ v^{[h]}(0,t) = 0, & \text{para quase todo } t\in(0,T),\\ v^{[h]} \equiv 0, & \text{em } (l',l)\times(0,T), \end{cases}$$

e, portanto,

$$v^{[h]}(0,t) = v^{[h]}(l,t) = v_x^{[h]}(l,t) = v_{xx}^{[h]}(l,t) = 0.$$

Pelo Lema 3.1.1 existem $C_1 > 0$ e $s_0 > 0$ tal que, para todo $s \geq s_0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T'}\int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T'-t)^5}|v^{[h]}|^2 + \frac{s^3}{t^3(T'-t)^3}|v_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T'-t)}|v_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt\\
&\leq C_1 \int_0^{T'}\int_0^l |v_t^{[h]} + v_{xxx}^{[h]} + v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt\\
&\leq 2C_1 \underbrace{\int_0^{T'}\int_0^l |a(v)v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt}_{=I_{10}}\\
&+2C_1 \underbrace{\int_0^{T'}\int_0^l |[a(v)v_x]^{[h]} - a(v)v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt}_{=I_{11}}
\end{aligned}$$

Como $a(v) \in L^\infty(0,T';L^\infty(0,l))$, existe uma constante $C_2 > 0$ independente de $h > 0$ tal que

$$I_{10} \leq C_2 \int_0^{T'}\int_0^l |v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt,$$

resultando que para todo $s \geq s_0$,

$$\begin{aligned}
&\int_0^{T'}\int_0^l \left\{ \frac{s^5}{t^5(T'-t)^5}|v^{[h]}|^2 + \left(\frac{s^3}{t^3(T'-t)^3} - C_2\right)|v_x^{[h]}|^2 + \frac{s}{t(T'-t)}|v_{xx}^{[h]}|^2 \right\} \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt\\
&\leq 2C_1 \int_0^{T'}\int_0^l |[a(v)v_x]^{[h]} - a(v)v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s\psi(x)}{t(T'-t)}\right) dxdt.
\end{aligned}$$

Fixemos $s_1 \geq s_0$ de modo que

$$\exp\left(-\frac{2s_1\psi(x)}{t(T'-t)}\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad \frac{s_1^3}{(T')^6} - C_2 > 0.$$

Desta forma, como $\frac{1}{t}, \frac{1}{T'-t} > \frac{1}{T'}$ segue que $\frac{s_1^3}{t^3(T'-t)^3} - C_2 > \frac{s_1^3}{(T')^6} - C_2$ e, portanto, segue que

$$\frac{s_1^3}{t^3(T'-t)^3} - C_2 > 0.$$

Provemos que $I_{11} \to 0$ quando $h \to 0$. Para isso, basta provarmos que

$$[a(v)v_x]^{[h]} \to a(v)v_x \quad \text{em} \quad L^2(0,T';L^2(0,l)) \tag{3.5}$$

e

$$a(v)v_x^{[h]} \to a(v)v_x \quad \text{em} \quad L^2(0,T';L^2(0,l)), \tag{3.6}$$

pois

$$\int_0^{T'}\int_0^l |[a(v)v_x]^{[h]} - a(v)v_x^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s_1\psi(x)}{t(T'-t)}\right)dxdt \le \int_0^{T'}\int_0^l |[a(v)v_x]^{[h]} - a(v)v_x^{[h]}|^2 dxdt.$$

Como $a(v)v_x \in L^2(0,T';L^2(0,l))$, já sabemos que (3.5) ocorre quando $h \to 0$. A convergência (3.6) também ocorre pois $v_x^{[h]} \to v_x$ em $L^2(0,T';L^2(0,l))$ quando $h \to 0$ e $a(v) \in L^\infty(0,T';L^\infty(0,l))$. Portanto, quando $h \to 0$, o termo

$$\int_0^{T'}\int_0^l \left\{\frac{s_1^5}{t^5(T'-t)^5}|v^{[h]}|^2 + \left(\frac{s_1^3}{t^3(T'-t)^3} - C_2\right)|v_x^{[h]}|^2 + \frac{s_1}{t(T'-t)}|v_{xx}^{[h]}|^2\right\} \exp\left(-\frac{2s_1\psi(x)}{t(T'-t)}\right)dxdt$$

tende a zero, e como

$$\frac{1}{(T')^{10}} \le \frac{1}{t^5(T'-t)^5},$$

concluímos que

$$\int_0^{T'}\int_0^l |v^{[h]}|^2 \exp\left(-\frac{2s_1\psi(x)}{t(T'-t)}\right)dxdt$$

tende a zero quando $h \to 0$. Escrevendo $f(x,t) = \exp\left(-\frac{s_1\psi(x)}{t(T'-t)}\right)$, definida em $(0,l) \times (0,T')$, temos que $v^{[h]}f \to 0$ em $L^2(0,T';L^2(0,l))$ e, portanto, $v^{[h]}f \to 0$ em quase todo ponto de $(0,l)\times(0,T')$. Como $f(x,t) \neq 0$ para todo $(x,t) \in (0,l)\times(0,T')$, segue que $v^{[h]} \to 0$ quase sempre. Como a sucessão $\{v^{[h]}\}$ é limitada em $L^2(0,T';L^2(0,l))$, pelo Lema de Lions 1.1.3 resulta $v^{[h]} \rightharpoonup 0$ em $L^2(0,T';L^2(0,l))$. Por outro lado, $v^{[h]} \to v$ em $L^2(0,T';L^2(0,l)$.

Pela unicidade do limite decorre $v \equiv 0$ em $(0, l) \times (0, T')$. Pela arbitrariedade de $T' > 0$, o resultado segue. $\square$

O seguinte Lema é uma consequência imediata do Lema anterior e apresenta a Propriedade de Continuação Única desejada.

Lema 3.1.3. *Sejam $T > 0$, $L > 0$ e $\omega \subset (0, L)$ um subconjunto aberto não vazio. Se $v \in L^\infty(0, T; H^1(0, L))$ resolve*

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} = 0 & \textit{em } (0, L) \times (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & \textit{para quase todo } t \in (0, T), \\ v \equiv 0 & \textit{em } \omega \times (0, T) \end{cases}$$

com $a \in C^0(\mathbb{R})$, então $v \equiv 0$ em $(0, L) \times (0, T)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor $\omega = (l_1, l_2)$, onde $0 \leq l_1 < l_2 \leq L$. Definamos $l = \dfrac{l_1 + l_2}{2}$.

Temos

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0, l) \times (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0, T), \\ v \equiv 0 & \text{em } (l_1, l) \times (0, T) \end{cases}$$

e pelo Lema anterior, resulta $v \equiv 0$ em $(0, l) \times (0, T)$. Também

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (l, L) \times (0, T), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0, T), \\ v \equiv 0 & \text{em } (l, l_2) \times (0, T). \end{cases}$$

Fazendo a mudança de variáveis $u(x, t) = v(L - x, T - t)$, vemos que u é solução do problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} = 0 & \text{em } (0, L-l) \times (0,T), \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0,T), \\ u \equiv 0 & \text{em } (L-l_2, L-l) \times (0,T). \end{cases}$$

Novamente, pelo Lema anterior temos $u \equiv 0$ em $(0, L-l) \times (0,T)$, ou seja, $v \equiv 0$ em $(l, L) \times (0,T)$, o que conclui a demonstração.

□

3.2 Prova do Teorema 3.1

Quando u é solução de (2.1) com dado inicial $\phi \in L^2(I)$, pelo Lema 2.5.2 existe uma constante C_p, que depende apenas de p, tal que para todo $T > 0$,

$$||u(\cdot,T)||^2_{L^2(I)} = ||\phi||^2_{L^2(I)} - \int_0^T u_x^2(0,t)dt - 2\int_0^T \int_0^L b(x)u^2(x,t)dxdt \tag{3.7}$$

e

$$\int_0^T \int_0^L u_x^2 dxdt \leq \frac{L + (2K+1)T}{2}||\phi||^2_{L^2(I)} + C_p T||\phi||^{\frac{8+2p}{4-p}}_{L^2(I)}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, multiplicando (2.1) por $(T-t)u$ e integrando por partes, obtemos

$$T||\phi||^2_{L^2(I)} = \int_0^T \int_0^L u^2 dxdt + \int_0^T (T-t)u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L (T-t)bu^2. \tag{3.9}$$

O Teorema 3.1 fica provado se a seguinda afirmação for provada

Afirmação 1: Dados $T > 0$ e $r > 0$ existe uma constante $C_1 = C_1(r,T)$ tal que para toda solução $u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(I)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(I))$ de (2.1) com dado inicial $\phi \in L^2(I)$

satisfazendo $||\phi||_{L^2(I)} < r$ temos

$$||\phi||^2_{L^2(I)} \leq C_1\bigg(\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T\int_0^L bu^2 dxdt\bigg). \tag{3.10}$$

De fato, se a Afirmação 1 é verdadeira, então

$$-\frac{1}{C_1}||\phi||^2_{L^2(I)} \geq -\int_0^T u_x^2(0,t)dt - 2\int_0^T\int_0^L bu^2 dxdt$$

e de (3.7) decorre

$$||u(\cdot,T)||^2_{L^2(I)} - ||\phi||^2_{L^2(I)} \leq -\frac{1}{C_1}||\phi||^2_{L^2(I)},$$

ou seja,

$$E(T) - E(0) \leq -\frac{1}{C_1}E(0),$$

onde $E(t)$ é a energia associada a (2.1). Logo,

$$E(T) \leq \frac{C_1 - 1}{C_1}E(0).$$

Para $u_0 \in L^2(I)$ dado, sabemos que o problema

$$\begin{cases} u_t + u_x + a(u)u_x + u_{xxx} + b(x)u = 0, & (x,t) \in (0,L)\times(0,\infty),\\ u(0,t) = u(L,t) = u_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty),\\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,L) \end{cases}$$

possui uma única solução $u(t)$ na classe $u \in C^0([0,\infty); L^2(I)) \cap L^2_{loc}([0,+\infty); H^1(I))$. Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} S: & [0,\infty) & \to & \mathcal{L}(L^2(I))\\ & t & \mapsto & S(t) \end{array}$$

dada por $S(t)u_0 = u(t)$. Esta aplicação satisfaz as seguintes propriedades de semigrupo: $S(0) = I, S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t,s \in \mathbb{R}_+$.

Considerando o problema

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(v)v_x + v_{xxx} + b(x)v = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ v(x,0) = u(s)(x), & x \in (0,L) \end{cases}$$

vemos que sua única solução é $v(t) = u(t+s)$, para $s > 0$ dado.

Denotando por $E(t,u)$ e $E(t,v)$ as energias associadas a u e v, respectivamente, e tomando $u_0 = \phi$, temos

$$E(t,u) = E(t) \quad \text{e} \quad E(t,v) = E(t+s), \quad \forall t \geq 0.$$

Analogamente ao que fizemos para $E(T)$, obtemos para $E(T,v)$ a seguinte estimativa

$$E(T,v) \leq \frac{C_1 - 1}{C_1} E(0,v),$$

ou seja,

$$E(T+s) \leq \frac{C_1 - 1}{C_1} E(s).$$

Agora, provemos por indução que dado $n \in \mathbb{N}$, vale

$$E(nT+s) \leq \left(\frac{C_1 - 1}{C_1} \right)^n E(s).$$

De fato, para $n = 1$ já temos $E(T+s) \leq \dfrac{C_1 - 1}{C_1} E(s)$. Suponhamos que o desejado seja válido para n. Então

$$\begin{aligned} E((n+1)T+s) &= E(T+(nT+s)) \\ &\leq \frac{C_1-1}{C_1}E(nT+s) \\ &\leq \frac{C_1-1}{C_1}\left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^n E(s) \\ &= \left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^{n+1} E(s), \end{aligned}$$

provando o desejado para $n+1$.

Dado $t \geq 0$, existem $0 \leq s < T$ e $n \in \mathbb{N}$ tal que $t = nT + s$, e como a energia é decrescente em $[0,T]$, então $E(r) \leq E(0)$, e com isso, resulta

$$\begin{aligned} E(t) = E(nT+s) &\leq \left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^n E(s) \\ &\leq \left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^n E(0) \\ &= \left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^{\frac{t}{T}-\frac{r}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{C_1-1}{C_1}\right)^{\frac{t}{T}-1} E(0) \\ &= \left(\frac{C_1}{C_1-1}\right)\left(\frac{C_1}{C_1-1}\right)^{-\frac{t}{T}} E(0) \\ &= \frac{C_1}{C_1-1}e^{-\frac{t}{T}ln(\frac{C_1}{C_1-1})}E(0). \end{aligned}$$

Escrevendo $C = \dfrac{C_1-1}{C_1}$ e $\nu = \dfrac{1}{T}\ln\dfrac{C_1}{C_1-1}$ segue o Teorema.

Por sua vez, para provarmos a Afirmação 1, basta provarmos a seguinte

Afirmação 2: Dados $T > 0$ e $r > 0$, existe uma constante $C_2 = C_2(r,T) > 0$ tal que para toda solução $u \in C(\mathbb{R}_+; L^2(I)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(I))$ de (2.1) com $||u(\cdot,0)||_{L^2(I)} < r$

vale

$$\int_0^T \int_0^L u^2 dxdt \leq C_2 \bigg(\int_0^T u_x^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L bu^2 dxdt \bigg). \tag{3.11}$$

Com efeito, se a Afirmação 2 é verdadeira, combinando (3.9) com (3.11) temos

$$||\phi||^2_{L^2(I)} \leq \frac{2}{T}(C_2+T)\bigg(\int_0^T u_x^2(0,t)dt + \int_0^T \int_0^L bu^2 dxdt \bigg).$$

Vamos, então, à prova da Afirmação 2.

Demonstração da Afirmação 2: Sejam $T > 0$ e $r > 0$ dados. Suponhamos, por absurdo, que a Afirmação 2 não seja verdadeira. Então existe uma sucessão $\{u_n\} \subset C(\mathbb{R}_+; L^2(I)) \cap L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; H^1(I))$ de soluções de (2.1) satisfazendo

$$||u_n(\cdot,0)||_{L^2(I)} < r \tag{3.12}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{||u_n||^2_{L^2(0,T;L^2(I))}}{\displaystyle\int_0^T u_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L bu_n^2 dxdt} = +\infty \tag{3.13}$$

Definamos $\lambda_n = ||u_n||_{L^2(0,T;L^2(I))}$. Observe que $\lambda_n \neq 0$ para uma infinidade de índices $n \in \mathbb{N}$, e sendo assim, podemos definir

$$v_n(x,t) = \frac{u_n(x,t)}{\lambda_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por (3.12) e (3.7) aplicado a u_n resulta que $\{\lambda_n\}$ é uma sequência limitada. Assim, existe $\lambda \geq 0$ e alguma subsequência de $\{\lambda_n\}$, que será também denotada por $\{\lambda_n\}$, tal que $\lambda_n \to \lambda$ em $\mathbb{R}$.

Desde que u_n é solução de (2.1), segue que v_n é solução de

$$\begin{cases} v_{n,t} + v_{n,x} + a(\lambda_n v_n)v_{n,x} + v_{n,xxx} + b(x)v_n = 0, & (x,t) \in (0,L) \times (0,\infty), \\ v_n(0,t) = v_n(L,t) = v_{n,x}(L,t) = 0, & t \in (0,\infty), \\ v_n(x,0) = \dfrac{u_n(x,0)}{\lambda_n}, & x \in (0,L) \end{cases} \tag{3.14}$$

com

$$||v_n||_{L^2(0,T;L^2(I))} = 1. \tag{3.15}$$

Multiplicando o numerador e o denominador de (3.13) por $\dfrac{1}{\lambda_n^2}$, para cada $n \in \mathbb{N}$, vemos que (3.13) vale para $\{v_n\}$, e com (3.15) concluímos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T v_{n,x}^2(0,t)dt + 2\int_0^T \int_0^L bv_n^2 dxdt = 0. \tag{3.16}$$

De (3.16) e (3.9) aplicado a $\{v_n\}$, observamos que $\{v_n(\cdot,0)\}$ é limitada em $L^2(I)$.

Aplicando (3.8) a $\{v_n\}$, segue que $\{v_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(I))$ e também $\{v_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(I))$, por (3.7).

Provemos que $\{a(\lambda_n v_n)v_{n,x}\}$ e $\{v_{n,t}\}$ são limitadas em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$. Definamos $G_n(v_n) = \displaystyle\int_0^{v_n} a(\lambda_n \xi)d\xi$, para cada $n \in \mathbb{N}$.

Lema 3.2.1. *$\{G_n(v_n)\}$ é limitada em $L^2((0,T) \times I)$.*

Demonstração: De fato, como

$$|a(\mu)| \leq K(1 + |\mu|^p), \quad \forall \in \mathbb{R},$$

então, para todo $n \in \mathbb{N}$ temos:

i) Se $s > 0$, temos

$$\begin{aligned}|G_n(s)| = \left|\int_0^s a(\lambda_n\mu)d\mu\right| \leq \int_0^s |a(\lambda_n\mu)|d\mu \leq K\int_0^s (1+|\lambda_n\mu|^p)d\mu \leq K'\int_0^s (1+|\mu|^p)d\mu \\ = K'\left(|s| + \frac{|s|^{p+1}}{p+1}\right);\end{aligned}$$

ii) Se $s < 0$, temos

$$\begin{aligned}|G_n(s)| = \left|\int_0^s a(\lambda_n\mu)d\mu\right| = \left|-\int_s^0 a(\lambda_n\mu)d\mu\right| = \left|\int_s^0 a(\lambda_n\mu)d\mu\right| \leq \int_s^0 |a(\lambda_n\mu)|d\mu \leq K\int_s^0 (1+|\lambda_n\mu|^p)d\mu \\ \leq K'\int_s^0 (1+|\mu|^p)d\mu \leq K'\int_s^0 (1+(-\mu)^p)d\mu \leq K'\left(|s| + \frac{|s|^{p+1}}{p+1}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|G_n(s)| \leq K'\left(|s| + \frac{|s|^{p+1}}{p+1}\right) \leq C_3|s|(1+|s|^p) \leq C_3|s|(1+|s|)^p \leq C_3(1+|s|)(1+|s|)^p \\ = C_3(1+|s|)^{p+1} \leq C_3(1+|s|^{p+1})\end{aligned}$$

e então

$$|G_n(s)|^2 \leq C_3(1+|s|^{2(p+1)}), \quad \forall s \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

para alguma constante positiva C_3 que depende apenas de K, K' e p. Donde,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_0^L |G_n(v_n)|^2 dxdt &\leq C_4\left(TL + \int_0^T\int_0^L |v_n|^{2(p+1)}dxdt\right) \\ &\leq C_4\left(TL + \int_0^T ||v_n||^2_{L^2(I)}||v_n||^{2(p+1)-2}_{L^\infty(I)}dt\right) \\ &\leq C_4\left(TL + \int_0^T ||v_n||^2_{L^2(I))}||v_n||^{\frac{2(p-1)+2}{2}}_{L^2(I)}||v_{n,x}||^{\frac{2(p-1)+2}{2}}_{L^2(I)}dt\right) \\ &\leq C_4\left(TL + \int_0^T ||v_n||^{\frac{2(p+1)}{2}+1}_{L^2(I)}||v_{n,x}||^{\frac{2(p+1)}{2}-1}_{L^2(I)}dt\right) \\ &\leq C_4\left(TL + ||v_n(\cdot,0)||^{p+2}_{L^2(I)}\int_0^T ||v_{n,x}||^p_{L^2(I)}dt\right).\end{aligned}$$

Como $p < 2$ então

$$\int_0^T \int_0^L |G_n(v_n)|^2 dxdt \leq C_5\left(TL + ||v_n(\cdot,0)||_{L^2(I)}^{p+2} \int_0^T (1 + ||v_{n,x}||_{L^2(I)}^2)dt\right),$$

onde $C_4 > 0$ e $C_5 > 0$ dependem de p, L e T.

Com a desigualdade acima, (3.8) aplicado a v_n e do fato que $\{v_n(\cdot,0)\}$ é limitada em $L^2(I)$, o resultado segue. $\square$

Lema 3.2.2. *$\{a(\lambda_n v_n)v_{n,x}\}$ e $\{v_{n,t}\}$ são limitadas em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$.*

Demonstração: Sendo $\{G_n(v_n)\}$ limitada em $L^2(0,T;L^2(I))$, resulta que $\{(G_n(v_n))_x\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-1}(I))$, e portanto, limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$. Mas $(G_n(\lambda_n v_n))_x = a(\lambda_n v_n)v_{n,x}$.

Agora, como

$$\begin{aligned}
|\langle v_{n,xxx}, \varphi\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)}| &= \int_0^L v_{n,x}\varphi_{xx}(x)dx \\
&\leq ||v_{n,x}||_{L^2(I)}||\varphi_{xx}||_{L^2(I)} \\
&\leq ||v_{n,x}||_{L^2(I)}||\varphi||_{H_0^2(I)}
\end{aligned}$$

resuta que

$$\begin{aligned}
||v_{n,xxx}||_{L^2(0,T;H^{-2}(I))} &= \left(\int_0^T ||v_{n,xxx}||_{H^{-2}(I)}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\int_0^T ||v_n||_{H_0^1(I)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||v_n||_{L^2(0,T;H_0^1(I))},
\end{aligned}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\{v_{n,xxx}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$. Já sabemos que $\{v_{n,x}\}$ e $\{bv_n\}$ são limitadas em $L^2(0,T;L^2(I))$. Assim,

$$v_{n,t} = -(v_{n,x} + a(\lambda_n v_n)v_{n,x} + v_{n,xxx} + bv_n) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^{-2}(I)).$$

$\square$

Sabendo que $\{v_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(I))$, $\{v_{n,t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$

e $H_0^1(I) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(I) \hookrightarrow H^{-2}(I)$, pelo Teorema 1.7, resulta que alguma subsequência de $\{v_n\}$, que será denotada ainda por $\{v_n\}$, converge em $L^2(0,T;L^2(I))$. Também, como $\{v_n\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(I))$, $\{v_{n,t}\}$ é limitada em $L^2(0,T;H^{-2}(I))$ e $L^2(I) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{-1}(I) \hookrightarrow H^{-2}(I)$, pelo Teorema 1.7 resulta que $\{v_n\}$ possui alguma subsequência de mesmo nome convergente, em $C([0,T];H^{-1}(I))$. Portanto, existe v tal que

$$v_n \to v \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(I)), \tag{3.17}$$

$$v_n \to v \quad \text{em } C([0,T];H^{-1}(I)). \tag{3.18}$$

Observe que de (3.17) resulta que $||v||_{L^2(0,T;L^2(I))} = 1$.

Além disso, como temos

$$\begin{aligned} &\{v_{n,t}\} && \text{limitada em } L^2(0,T;H^{-2}(I)); \\ &\{v_{n,xxx}\} && \text{limitada em } L^2(0,T;H^{-2}(I)); \\ &\{v_{n,x}\} && \text{limitada em } L^2(0,T;L^2(I)), \end{aligned}$$

resulta que

$$\begin{aligned} v_{n,t} &\rightharpoonup v_t && \text{em } L^2(0,T;H^{-2}(I)); \\ v_{n,xxx} &\rightharpoonup v_{xxx} && \text{em } L^2(0,T;H^{-2}(I)); \\ v_{n,x} &\rightharpoonup v_x && \text{em } L^2(0,T;L^2(I)). \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_0^T \langle v_{n,t}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt \to \int_0^T \langle v_t(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt, \tag{3.19}$$

$$\int_0^T \langle v_{n,xxx}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt \to \int_0^T \langle v_{xxx}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt, \tag{3.20}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in H_0^2(I)$, e

$$\int_0^T (v_{n,x}(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)} dt \to \int_0^T (v_x(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)} dt, \text{ para todo } \theta \in \mathcal{D}(0,T), \varphi \in L^2(I). \tag{3.21}$$

Agora, observando que $G_n(v_n) \to G(v)$ quase sempre em $(0,L) \times (0,T)$, onde $G(v) = \displaystyle\int_0^v a(\lambda\xi) d\xi$, com o fato de $\{G_n(v_n)\}$ ser limitada em $L^2(0,T;L^2(I))$, pelo Lema de Lions 1.1.3 segue que $G_n(v_n) \rightharpoonup G(v)$ em $L^2(0,T;L^2(I))$, donde resulta $a(\lambda_n v_n)v_{n,x} \rightharpoonup a(\lambda v)v_x$ em $L^2(0,T;H^{-1}(I))$, e assim,

$$\int_0^T \langle a(\lambda_n v_n)v_{n,x}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt \to \int_0^T \langle a(\lambda v)v_x(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt, \tag{3.22}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in H_0^2(I)$.

Temos $\{\sqrt{b}v_n\} \subset L^2(0,T;L^2(I))$ e $\sqrt{b}v_n \to 0$ em $L^2(0,T;L^2(I))$, por (3.16). Considerando uma subsequência de mesmo nome de $\{\sqrt{b}v_n\}$, temos $\sqrt{b}v_n \to 0$ quase sempre em $I \times (0,T)$, e daí observamos que $bv_n \to 0$ em quase todo ponto. Sendo $\{v_n\}$ limitada em $L^2(0,T;L^\infty(I))$, resulta que $\{bv_n\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(I))$ e pelo Lema de Lions 1.1.3 concluímos que $bv_n \rightharpoonup 0$ em $L^2(0,T;L^2(I))$. Então

$$\int_0^T (bv_n(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)} dt \to \int_0^T (bv(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)} dt = 0, \tag{3.23}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in L^2(I)$.

Compondo (3.14) com $\varphi\theta$ na dualidade $H^{-2}(I) \times H_0^2(I)$, onde $\varphi \in H_0^2(I)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando em $(0,T)$, temos

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle v_{n,t}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt + \int_0^T \langle v_{n,xxx}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt + \int_0^T (v_{n,x}(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)} dt \\ + \int_0^T \langle a(\lambda_n v_n(t))v_{n,x}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt + \int_0^T \langle bv_n(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)} dt = 0, \\ \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in H_0^2(I). \end{aligned}$$

Passando ao limite na igualdade acima, com (3.19)-(3.23), obtemos

$$\int_0^T \langle v_t(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)}dt + \int_0^T \langle v_{xxx}(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)}dt + \int_0^T (v_x(t), \varphi\theta(t))_{L^2(I)}dt$$
$$+ \int_0^T \langle a(\lambda v(t))v_x(t), \varphi\theta(t)\rangle_{H^{-2}(I)\times H_0^2(I)}dt = 0, \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in H_0^2(I).$$

Em particular, quando $\varphi \in \mathcal{D}(I)$,

$$\langle v_t, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle v_{xxx}, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle v_x, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} + \langle a(\lambda v)v_x, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

ou seja,

$$\langle v_t + v_{xxx} + v_x + a(\lambda v)v_x, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q)\times\mathcal{D}(Q)} = 0, \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(I).$$

Como o conjunto $\{\varphi\theta; \varphi \in \mathcal{D}(I), \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é total em $\mathcal{D}(Q)$, decorre

$$v_t + v_{xxx} + v_x + a(\lambda v)v_x = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q).$$

Vimos que $bv_n \to 0$ quase sempre em $(0,L)\times(0,T)$, mas como também $bv_n \to bv$ quase sempre em $(0,L)\times(0,T)$, resulta $bv = 0$ quase sempre em $(0,L)\times(0,T)$. Sendo $\omega \subset (0,L)$ o suporte de b, concluímos que $v \equiv 0$ em $\omega\times(0,T)$. Assim, v satisfaz

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(\lambda v)v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0,T), \\ v \equiv 0 & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

No caso em que $\lambda = 0$, obtemos $a(\lambda v) = 0$, e portanto, a equação acima torna-se a equação linear KdV

$$\begin{cases} v_t + v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0,L)\times(0,T), \\ v(0,t) = v(L,t) = v_x(L,t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (0,T), \\ v \equiv 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Pelo Teorema de Holmgren 1.15 decorre que $v \equiv 0$ em $(0,L)\times(0,T)$, o que contraria $||v||_{L^2(0,T;L^2(I))} = 1$, e nesta situação, a Afirmação fica demonstrada.

Agora, consideremos $\lambda > 0$.

Desejamos utilizar o Lema 3.1.3 para concluir $v \equiv 0$, mas v não possui regularidade necessária para isso. Assim, recorremos ao seguinte Lema.

Lema 3.2.3. *Sejam $0 < t_1 < t_2 < T$. Existe um subintervalo $(t_1', t_2') \subset (t_1, t_2)$, onde $v \in L^\infty(t_1', t_2'; H^1(I))$.*

Demonstração: Sabemos que existe $C > 0$ tal que $||v_n||_{L^2(0,T;H^1(I))} \leq C$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_1 < \tau_n < \dfrac{t_1+t_2}{2}$ satisfazendo $||v_n(\tau_n)||_{H^1(I)} \leq C$, com $\tau_n \to \tau$, para algum $t_1 \leq \tau \leq \dfrac{t_1+t_2}{2}$. Utilizando (3.18), obtemos

$$v_n(\tau_n + \cdot) \to v(\tau + \cdot) \quad \text{em} \quad C([0,\varepsilon], H^{-1}(I)),$$

para todo $\varepsilon < \dfrac{t_2-t_1}{2}$. Note que para ε suficientemente pequeno,

$$||v_n(\tau_n + \cdot)||_{L^\infty(0,\varepsilon;H^1(I))} \leq C.$$

Com as imersões $C([0,\varepsilon]; H^{-1}(I)) \hookrightarrow L^\infty(0,\varepsilon;H^{-1}(I))$ e $L^\infty(0,\varepsilon;H^1(I)) \hookrightarrow L^\infty(0,\varepsilon;H^{-1}(I))$, concluímos

$$v_n(\tau_n + \cdot) \overset{*}{\rightharpoonup} v(\tau + \cdot) \quad \text{em} \quad L^\infty(0,\varepsilon;H^1(I)),$$

e portanto, $v \in L^\infty(\tau, \tau+\varepsilon; H^1(I))$, donde resulta o desejado. $\square$

Agora, sejam $0 < t_1 < T$ e $t_1 < t_2 < T$. Pelo Lema anterior existe um subintervalo

$(t'_1, t'_2) \subset (t_1, t_2)$ onde $v \in L^\infty(t'_1, t'_2; H^1(I))$. Como v satisfaz

$$\begin{cases} v_t + v_x + a(\lambda v)v_x + v_{xxx} = 0 & \text{em } (0, L) \times (t'_1, t'_2), \\ v(0, t) = v(L, t) = 0 & \text{para quase todo } t \in (t'_1, t'_2), \\ v \equiv 0 & \text{em } \omega \times (t'_1, t'_2), \end{cases}$$

pelo Lema 3.1.3 resulta que $v \equiv 0$ em $(0, L) \times (t'_1, t'_2)$. Tomando t_2 arbitrariamente próximo de t_1, com $v \in C([0, T]; H^{-1}(I))$ segue que $v(\cdot, t_1) = 0$. Portanto, $v \equiv 0$, o que contraria $||v||_{L^2(0,T;L^2(I))} = 1$.

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, London, 1975.

[2] BALL, J. M. **Strongly Continuous Semigroups, Weak Solutions, and the Variation of Constants Formula**. Proceedings of the American Mathematical Society, v. 63, p. 370-373, 1977.

[3] BONA, J. L.; SUN, S.M.; ZHANG, B.-Y. **A Nonhomogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation Posed on a Finite Domain**, Comm. Partial Diff. Eq., v. 28, p. 1391-1436, 2003.

[4] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications**. Paris: Masson, 1987.

[5] BRÉZIS, H. **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[6] BUBNOV, B. A. **Generalized Boundary Valeu Problems for the Korteweg-de Vries Equation in Bounded Domain**. Differential Equation, 15, p. 17-21, 1979.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: Eduem, 2011.

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V.; RODRIGUES, J. H. **Global well-posedness and exponential decay rates for a KdV-**

Burgers equation with indefinite damping. Annales de l Institut Henri Poincaré. Analyse non Linéaire, 2013.

[10] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, 2 ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[11] GOMES, A. M. **Semigrupos Não Lineares e Equações Diferenciais nos Espaços de Banach**. 2 ed. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2003.

[12] HÖRMANDER, L. **Linear Partial Differential Operators**. Springer Verlag, 1969.

[13] KORTEWEG, D. J.; de VRIES, G. **On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a New Type of Long Stationary Waves**. Philos. Mag., v. 39, p. 422-443, 1895.

[14] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Problèmes aux Limites non Homogènes**. Applications, Dunod, Paris, 1968 Vol. I.

[15] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[16] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A Integral de Lebesgue**, 6 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, IM, 2008.

[17] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M. **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[18] MENZALA, G. P.; VASCONCELOS, C. F.; ZUAZUA, E. **Stabilization of the Korteweg-de Vries Equation with Localized Damping**. Quart. Appl. Math, v. 60, p. 111-129, 2002.

[19] MILLA MIRANDA, M. **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[20] MORREY, C. B.; PROTTER, M. H. **A First Course in Real Analysis**. Springer Verlag, 1991.

[21] PAZOTO, A. F. **Unique Continuation and Decay for the Korteweg-de Vries Equation with Lozalized Damping**. ESAIM Control Optim Calc. Var., v. 11, p. 473-486, 2005.

[22] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. Springer Verlag, 1983.

[23] RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais,** Série de Textos de Pós-Graduação, Petrópolis - RJ: LNCC, 2004.

[24] ROSIER, L. **Control of the Surface of a Fluid by a Wavemaker**, ESAIM Control Optim. Calc. Var, v. 10, p. 346-380, 2004.

[25] ROSIER, L. **Exact Boundary Controllability for the Korteweg-de Vries Equation on a Bounded Domain**. ESAIM Control. Optim. Calc. Var., v. 2, p. 33-55, 1997.

[26] ROSIER, L.; ZHANG, B.-Y. **Global Stabilization of the Generalized Korteweg-de Vries Equation Posed on a Finite Domain**. SIAM J. Control Optim, v. 45, p. 927-956, 2006.

[27] SIMON, J. **Compact Sets in the Space** $L^p(0,T;B)$. Ann. Mat. Pura Appl. 4, p. 65-96, 1987.

[28] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications** V. 2A: Linear Monotone Operators. Springer Verlag, 1992.