UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

AMANDA ANGÉLICA FELTRIN NUNES

Decaimento Exponencial para uma Classe de Operadores Parabólicos que podem Degenerar

Maringá - PR

2014

AMANDA ANGÉLICA FELTRIN NUNES

Decaimento Exponencial para uma Classe de Operadores Parabólicos que podem Degenerar

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti.

Maringá - PR

2014

À minha família.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus por ter me dado força para superar os obstáculos desta caminhada.

Aos meus pais que são meus exemplos de vida e nunca mediram esforços para que esse sonho fosse alcançado. Aos meus irmãos pelo carinho dedicado a mim, principalmente nas horas em que mais precisei. Às minhas avós pelas orações e mimos. A toda minha família pelo incentivo dado e por sempre torcerem por mim.

Aos meus amigos de longe que torceram e mandaram positividade e aos de perto pelo estímulo, companheirismo e união, em especial, ao Alisson, Fabrício, Giovana, André e Djeison. Sem vocês certamente essa caminhada seria mais árdua.

A todos os meus professores que com muito amor, sabedoria e dedicação souberam dignamente compartilhar o seu conhecimento. Em especial, ao meu orientador, Marcelo Moreira Cavalcanti pela sabedoria, paciência e incentivo que foram essenciais para a elaboração e conclusão deste trabalho, bem como ao Flávio Falcão pela compreensão, paciência, estímulo e sugestões que foram de grande valia para a elaboração e conclusão do mesmo.

À Capes pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível a dedição exclusiva aos estudos.

Enfim, a todos que acreditaram em mim. Meu muito obrigada.

Amanda Angélica Feltrin Nunes

“ Tudo posso naquele que me fortalece.”

Filipenses 4:13

Resumo

Neste trabalho provamos a existência e unicidade de solução regular e fraca, bem como o decaimento exponencial para a energia associada à seguinte classe de problemas parabólicos:

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{em } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases}$$

onde o dado inicial $u_0 \in L^2(0,1)$, $a(x) = x^\alpha$, com $0 \leq \alpha < 2$, $x \in [0,1]$. A função $b \in L^\infty(0,1)$ é tal que $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in (0,\epsilon)$, com $\epsilon > 0$. O termo $b(\cdot)g(u)$ representa um amortecimento localizado o qual foi acrescentado com o propósito de gerar dissipação para obtermos o decaimento exponencial, sendo que este termo pode ser linear ou não.

Palavras-chave: Classe de problemas parabólicos, solução regular, solução fraca, decaimento exponencial.

Abstract

In this work we proved the existence and uniqueness of weak and regular solutions, and the exponential decay for the energy associated to the following class of parabolic problems:

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{in } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{in } \mathbb{R}_+ \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{for } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{for } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases}$$

where the initial data $u_0 \in L^2(0,1)$, $a(x) = x^\alpha$, with $0 \leq \alpha < 2$, $x \in [0,1]$. The function $b \in L^\infty(0,1)$ is such that $b(x) > b_0 > 0$ for all $x \in (0,\epsilon)$, with $\epsilon > 0$. The term $b(\cdot)g(u)$ represents a localized damping which was added to obtain the exponential decay, and this term may be linear or not.

Key words: Class of parabolic problems, regular solution, weak solution, exponentical decay.

Sumário

Introdução **9**

1 Preliminares **11**

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais 11

1.1.1 Noção de Derivada Fraca 11

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$ 13

1.1.3 Espaços de Sobolev 15

1.2 Topologias Fraca e Fraca $*$ 16

1.3 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais 19

1.4 Teorema de Carathéodory 21

1.5 Mais alguns resultados 22

1.6 Uma breve revisão sobre Semigrupos Lineares 24

1.6.1 C_0-Semigrupos de Operadores Lineares 24

1.6.2 Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-Semigrupos 26

1.6.3 Problema de Cauchy abstrato 27

2 Operadores Parabólicos que podem Degenerar **28**

2.1 O Espaço $H_a^1(0,1)$ 28

2.2 O Operador $Au = (au_x)_x$ 49

3 O Problema Linear **57**

3.1 Existência e Unicidade de Solução Regular 57

3.1.1 Existência e Unicidade de Solução via Faedo - Galerkin 57

3.1.2 Existência e Unicidade de Solução via Teoria de Semigrupos Lineares . 71

3.2 Existência e Unicidade de Solução Fraca 72

3.3 Cálculo da Energia 78

3.4 Decaimento Exponencial 81

4 O Problema Não-Linear **91**

4.1 Existência e Unicidade de Soluções Clássicas 91

4.2 Existência e Unicidade de Soluções Generalizadas como limite de Soluções Clássicas 97

4.3 Decaimento Exponencial 98

Referências Bibliográficas **99**

Introdução

Muitos fenômenos que ocorrem na Ótica, Eletricidade, Ondulatória, Magnetismo, Mecânica, Fluídos, Biologia, dentre outros ramos da Ciência podem ser descritos através de uma equação diferencial parcial. Essas podem ser classificadas em: equações parabólicas, elípticas e hiperbólicas.

Dentre as equações parabólicas podemos ainda citar as degeneradas e as não degeneradas. Estamos interessados naquelas que podem degenerar. Problemas dessa natureza foram estudados, por exemplo, em [5], onde foram provadas estimativas de Carleman para uma classe de problemas parabólicos com intuito de se estudar a Teoria de Controle.

Outra área de interesse quando se estuda equações diferencias parciais é o comportamento assintótico da energia associada ao problema. Nessa direção, a fim de exibir taxas de decaimento da energia, acrescenta-se mecanismos de amortecimento que forneçam o decaimento da energia para zero sob taxas específicas, dentre as quais é de especial interesse a taxa exponencial. Em se tratando de comportamento assintótico para problemas parabólicos podendo degenerar, não existem muitos resultados, podemos citar, por exemplo, [4].

O propósito desta dissertação é estudar o decaimento exponencial da energia associada à seguinte classe de problemas parabólicos que podem degenerar:

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{em } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{1}$$

sendo o dado inicial $u_0 \in L^2(0,1)$, $a(x) = x^\alpha$, com $0 \leq \alpha < 2$, $x \in [0,1]$. A função $b \in L^\infty(0,1)$ é tal que $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in (0,\epsilon)$ com $\epsilon > 0$. O termo $b(\cdot)g(u)$ representa um amortecimento localizado o qual foi acrescentado com o propósito de gerar dissipação para obtermos o decaimento exponencial, sendo que este termo pode ser linear ou não. Tal classe de problemas é a abordada em [5], no entanto, no presente trabalho o objetivo é estudar decaimento exponencial e não estimativas de Carleman.

Este trabalho é organizado da seguinte forma:

No capítulo 1, apresentaremos resultados preliminares que serão essenciais ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes. Embora, não tenhamos feito as demonstrações de tais resultados, deixamos indicadas as referências bibliográficas onde podem ser encontradas suas demonstrações.

No capítulo 2, apresentaremos a Classe de Operadores Parabólicos que podem degenerar e estudaremos as propriedades dessa classe de operadores, bem como definiremos e estudaremos as propriedades pertinentes ao espaço onde se encontra a solução do problema (1).

No capítulo 3, estudaremos a existência e unicidade de solução do problema linear. Para a obtenção da solução regular ou solução forte utilizamos dois métodos, a saber, o método de Faedo-Galerkin e o método via Teoria de Semigrupos Lineares. A opção por se estudar a existência e unicidade via dois métodos distintos foi com o intuito de poder conhecer os prós e contras presentes em ambos os métodos. Provaremos também a existência e unicidade da solução fraca, para tal utilizaremos aproximação por densidade das soluções regulares. Por fim, provaremos o decaimento exponencial para o caso geral, isto é, $0 \leq \alpha < 2$, considerando o termo de amortecimento linear. Para isto adaptamos um método introduzido por Cavalcanti & Oquendo em [9]. Antes, porém, calcularemos a energia associada à solução regular do problema, uma vez que, a energia associada à solução fraca é obtida como limite da energia associada à solução regular.

No capítulo 4, trataremos a existência e unicidade de soluções clássicas e soluções generalizadas, bem como o decaimento exponencial para a classe de problemas parabólicos com o termo de amortecimento não linear. Sendo que a solução clássica foi obtida utilizando a Teoria de Operadores Maximais Monótonos e a solução generalizada como limite da solução clássica.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enunciaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. No entanto, por serem resultados usuais, omitiremos assim as suas demonstrações, as quais podem ser encontradas em nossas referências.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes.

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos

$\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K$ para todo $\nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando a sequência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada distribucional, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \operatorname{ess} |u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue): *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, para todo $\nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [14] $\square$

Proposição 1.2. (Desigualdade de Hölder): *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$*. Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [14] $\square$

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Proposição 1.3. (Desigualdade de Minkowski): *Se* $u, v \in L^p(\Omega)$ *então*

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)},$$

onde $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver [14] $\square$

Definição 1.4. *Uma função* $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é dita absolutamente contínua quando para cada* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para toda coleção finita* $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots, (a_n, b_n)$ *de subintervalos de* $[a,b]$ *dois a dois disjuntos satisfazendo a condição*

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta$$

tem-se, necessariamente,

$$\sum_{k=1}^{n} |u(b_k) - u(a_k)| < \epsilon.$$

Teorema 1.5. *A derivada* u *de uma função* v*, absolutamente contínua em* $[a,b]$*, é integrável em* $[a,b]$ *e para cada* $x \in [a,b]$ *tem-se:*

$$v(x) = \int_a^x u(t)dt + v(a).$$

Em outras palavras, toda função absolutamente contínua é uma integral indefinida de sua derivada.

Demonstração: Ver [14] □

Como consequência do teorema acima temos o seguinte resultado.

Corolário 1.6. *Uma função v é integral indefinida de sua derivada se e só se v é absolutamente contínua. Em outros termos, uma primitiva v de u é uma integral indefinida de u se e só se v é absolutamente contínua.*

Demonstração: Ver [14] □

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence a $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por isto define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Teorema 1.7. (Desigualdade de Poincaré): *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado. Suponha que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ para algum $1 \leq p < n$. Então temos a estimativa*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\|Du\|_{L^q(\Omega)}$$

para cada $q \in [1, p^*]$. A constante $c > 0$ depende somente de p, q, n e $|\Omega|$ e p^* é o conjugado de Sobolev de p e é dado por $p^* = \frac{np}{n-p}$.

Demonstração: Ver [11] □

Teorema 1.8. (Teorema de Rellich Kondrachov): *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

Se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*)$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty)$,

Se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [8] □

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

1.2 Topologias Fraca e Fraca $*$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes acerca de topologia fraca e fraca $*$ que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Definição 1.9. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.10. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [7] □

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.11. *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.12. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Demonstração: Ver [7] □

Lema 1.13. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } E.$$

Demonstração: Ver [7] □

Lema 1.14. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [7] □

Os resultados que seguem estão relacionados com função convexa e função semicontínua inferiormente. Dessa forma, antes de enuncia-los relembremos tais conceitos.

Definição 1.15. *Sejam E um espaço vetorial e C um subconjunto convexo de E. Dizemos que $\varphi : C \to (-\infty, +\infty]$ é uma função convexa sobre C se*

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y), \text{ para todo } x, y \in C \text{ e } t \in [0,1].$$

Sejam E um espaço topológico e $f : E \to [-\infty, +\infty]$.

Definição 1.16. *Dizemos que f é semicontínua inferiormente (s.c.i) no ponto $x_0 \in E$ se para todo $\epsilon > 0$ existe uma vizinhança de $x_0, V(x_0)$ tal que:*

$$f(x) > f(x_0) - \epsilon, \text{ para todo } x \in V(x_0).$$

Dizemos que f é s.c.i. em $F \subset E$ se f é s.c.i. em cada ponto de F.

Teorema 1.17. *Sejam E um espaço de Banach e $C \subset E$ um conjunto convexo. Então, C é fracamente fechado em $\sigma(E, E')$ se, e somente se, é fortemente fechado.*

Demonstração: Ver [7] □

Como consequência do teorema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 1.18. *Seja $\varphi : E \to (-\infty, +\infty]$ uma função convexa semicontínua inferiormente na topologia forte. Então, φ é semicontínua inferiormente na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Em particular, se $x_n \rightharpoonup x$ temos que $\varphi(x) \leq \lim_n inf \varphi(x_n)$.*

Demonstração: Ver [7] □

Observação 1.19. *A função $\varphi(x) = \|x\|$ é convexa e semicontínua inferiormente na topologia forte (pois é contínua na topologia forte). Logo, é semicontínua na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Em particular, como já vimos, se $x_n \rightharpoonup x$ temos que $\|x\| \leq \lim_n inf \|x_n\|$.*

1.3 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o qual é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Para cada $t \in [0, T]$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x, t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Seja X um espaço de Banach, $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, ou seja, as funções $u : (a, b) \to X$ tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, as funções $u : (a, b) \to X$ limitadas quase sempre em (a, b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a, b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots,$ consiste de todas as funções contínuas $u : [a, b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a, b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^m \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [19]

Proposição 1.20. *Sejam $m = 0, 1, \ldots,$ e $1 \leq p < +\infty$, X e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a, b; X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) O conjunto de todas as funções degrau é denso em $L^p(a, b; X)$.

(d) $C([a,b];X)$ *é denso em* $L^p(a,b;X)$ *e a imersão* $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ *é contínua.*

(e) Se X *é um espaço de Hilbert com produto escalar* $(.,.)_X$*, então* $L^2(a,b;X)$ *é também um espaço de Hilbert com produto escalar*

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t))_X dt.$$

(f) $L^p(a,b;X)$ *é separável, se* X *for separável e* $1 \leq p < +\infty$.

(g) Se $X \hookrightarrow Y$*, então* $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$*,* $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. Temos a seguinte noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$. Seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, para todo $\theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida com um único elemento deste espaço a qual satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$, definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

a função $f \mapsto \tilde{f}$ de $L^2(a,b;X) \to \mathcal{D}'(a,b;X)$ é linear e contínua, e ainda é injetora e desta forma identificamos $\tilde{f}$ com f e obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X).$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $u\chi_{_K}$ pertence a $L^1(a,b;X)$, onde $\chi_{_K}$ denota a função característica de K.

1.4 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no capítulo 2. O Teorema nos fornece a existência de solução local para um problema de Cauchy em um intervalo $[0,t]$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Dizemos que $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.21. (Teorema de Carathéodory): *Seja $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x = x(t)$ de (1.1) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Corolário 1.22. *Sejam $\Omega = [0,T) \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f:\Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x = x(t)$ é uma solução de (1.1) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

1.5 Mais alguns resultados

Nesta seção colecionaremos alguns resultados clássicos os quais serão úteis para estudarmos o problema proposto nesta dissertação.

Se chama base Hilbertiana, ou simplesmente base, de um espaço de Hilbert H a toda sucessão $\{e_n\}$ de elementos de H, tais que:

(i) $\|e_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}, (e_m, e_n)_H = 0$ para todo $m, n; m \neq n$.

(ii) O espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H.

De posse à esta afirmação temos o

Teorema 1.23. *Todo espaço de Hilbert sepáravel admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração: Ver [3] □

A seguir alguns resultados sobre espaço separável, os quais podem ser encontrados em [7].

(i) Seja E um espaço métrico separável e F um subconjunto de E. Então F é separável.

(ii) Seja E um espaço de Banach. Se E' é separável, então E é separável.

Teorema 1.24. ***(Teorema de Riesz)****: Todo funcional linear limitado sobre um espaço de Hilbert H pode ser representado em termos do produto interno, a saber,*

$$\langle f, x \rangle = (x, z)$$

onde z depende de f, é unicamente determinado por f e tem a norma

$$\|z\|_H = \|f\|_{H'}.$$

Demonstração: Ver [12] □

Teorema 1.25. **(2^a Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach)***: Sejam E um espaço vetorial normado, $A, B \subset E$ subconjuntos convexos, disjuntos e não vazios. Se A for fechado e B for compacto, então existe um hiperplano fechado que separa A e B no sentido estrito.*

Demonstração: Ver [7] □

Como consequência do teorema enunciado acima temos um importante resultado acerca de densidade.

Corolário 1.26. (Corolário da 2^a Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach): *Sejam E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E. Se para toda forma $f \in E'$ tal que $\langle f, x\rangle = 0$ para todo $x \in F$ se tem $f \equiv 0$ (isto é, $\langle f, x\rangle = 0$ para todo $x \in E$), então F é denso em E (ou seja, $\overline{F} = E$).*

Demonstração: Ver [7] □

Lema 1.27. (Lema de Gronwall para Integrais): *Se, para $t_0 \le t \le t_1; \Phi(t) \ge 0$ e $\Psi(t) \ge 0$ são funções contínuas tais que a desigualdade*

$$\Phi(t) \le K + L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)\Phi(s)ds$$

se mantenha em $t_0 < t < t_1$, com K e L sendo constantes positivas, então

$$\Phi(t) \le Ke^{(L\int_{t_0}^{t} \Psi(s)ds)}$$

sendo $t_0 \le t \le t_1$.

Demonstração: Ver [18] □

Lema 1.28. ***(Desigualdade do tipo Hardy)***

(i) *Seja $0 \le \alpha^* < 1$ Então, para toda função z localmente absolutamente contínua sobre $(0,1)$ satisfazendo*

$$z(x) \to 0 \text{ quando } x \to 0^+$$

e

$$\int_0^1 x^{\alpha^*} z_x^2(x)dx < +\infty$$

a desigualdade se verifica

$$\int_0^1 x^{\alpha^*-2} z^2(x)dx \le \frac{4}{(1-\alpha^*)^2}\int_0^1 x^{\alpha^*} z_x^2(x)dx. \tag{1.2}$$

(ii) *Seja $1 < \alpha^* < 2$. Então a desigualdade (1.2) acima ainda se verifica para toda função localmente absolutamente contínua sobre $(0,1)$ satisfazendo*

$$z(x) \to 0 \text{ quando } x \to 1^-$$

e

$$\int_0^1 x^{\alpha^*} z_x^2(x)dx < +\infty$$

Note que (1.2) é falso para $\alpha^* = 1$.

Demonstração: Ver [17] □

1.6 Uma breve revisão sobre Semigrupos Lineares

Nesta seção relembraremos alguns conceitos e resultados provenientes da teoria geral de semigrupos lineares. Iniciaremos com várias definições gerais e, em seguida, enunciaremos os resultados que nos interessam ao longo desta dissertação. Tais resultados serão esboçados conforme os trabalhos de Brézis [2], Liu & Zheng [13], Pazy [15] e Zheng [20]. Para uma referência em português, ver também Muñoz Rivera [16].

1.6.1 C_0-Semigrupos de Operadores Lineares

Nesta seção $(X, ||\cdot||_X)$ sempre mencionará um espaço de Banach, $(H, ||\cdot||_H, (\cdot,\cdot)_H)$ um espaço de Hilbert e $(\mathcal{L}(X,X), ||\cdot||)$ o espaço dos operadores lineares e contínuos em X.

Definição 1.29. *Uma família $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ de operadores lineares e limitados definida sobre um espaço de Banach X é chamada de semigrupo de operadores lineares limitados (ou simplesmente semigrupo) quando*

(i) $S(0) = I : X \to X$ *(Operador Identidade em X).*

(ii) $S(t+s) = S(t)S(s)$, *para cada* $t, s \geq 0$.

Ainda, dizemos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de classe C_0 (ou simplesmente C_0-semigrupo) se além dos itens acima tivermos que *(iii)* $\lim_{t\to 0} S(t)x = x$, *para todo* $x \in X$.

Definição 1.30. *Um operador A é chamado de gerador infinitesimal de um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ quando A é definido como*

$$D(A) = \left\{ x \in X \mid \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \quad \textit{existe} \right\}$$

e para cada $x \in D(A)$ temos

$$Ax = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}.$$

As vezes diz-se também que o semigrupo $S(t)$ é gerado por A. Durante o presente trabalho, quando for conveniente representaremos $S(t) = e^{At}$. Note também que o domínio $D(A)$ do operador A pode ser reescrito como

$$D(A) = \left\{ x \in X \;\middle|\; Ax \in X \right\}.$$

Definição 1.31. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado de uniformemente limitado se existe uma constante $M \geq 1$ tal que*

$$||S(t)|| \leq M, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Quando $M = 1$, diremos também que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é um semigrupo de contrações.

Definição 1.32. *Um semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ é chamado exponencialmente estável se existem constantes $\alpha > 0$ e $M \geq 1$ tais que*

$$||S(t)|| \leq Me^{-\alpha t}, \quad \forall\ t \geq 0.$$

Definição 1.33. *Seja A um operador linear (não necessariamente limitado) definido sobre um espaço de Banach X. O conjunto resolvente, denotado por $\rho(A)$, é definido como*

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \;\middle|\; \lambda I - A \quad \textit{é invertível e} \quad (\lambda I - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X, X) \right\}.$$

O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} \backslash \rho(A)$ é chamado de espectro de A.

Definição 1.34. *Seja A um operador linear definido sobre um espaço de Hilbert H com domínio $D(A) \subseteq H$. Dizemos que A é um operador dissipativo quando*

$$Re(Ax, x)_H \leq 0, \quad \forall\ x \in D(A).$$

1.6.2 Caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-Semigrupos

Agora vamos apresentar os resultados relacionados a um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo $S(t) = e^{At}$ definido sobre espaços de Banach ou Hilbert.

Teorema 1.35 (Hille-Yosida)**.** *Um operador linear (não limitado) A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se, e somente se,*

(a) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$.*

(b) *O conjunto resolvente $\rho(A)$ de A contém $\mathbb{R}^+$ e para cada $\lambda > 0$*

$$||(\lambda I - A)^{-1}|| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

A seguir veremos o Teorema de Lumer-Phillips que nos fornece a caracterização dos geradores infinitesimais de C_0-semigrupos de contrações sobre espaços de Hilbert. O mesmo resultado vale em espaços de Banach; porém, neste trabalho, precisaremos apenas do resultado sobre espaços de Hilbert.

Teorema 1.36 (Lumer-Phillips)**.** *Seja A um operador linear com domínio $D(A)$ denso em um espaço de Hilbert H. Temos:*

(a) *Se A é dissipativo e existe um número $\lambda > 0$ tal que $\mathcal{I}m(\lambda I - A) = H$, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

(b) *Se A é o gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H, então $\mathcal{I}m(\lambda I - A) = H$ para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo.*

Uma fundamental consequência do Teorema de Lumer-Phillips que usaremos mais adiante é a seguinte:

Corolário 1.37. *Seja A um operador linear fechado e densamente definido. Se A e A^* são dissipativos, então A é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em H.*

O próximo resultado é sobre perturbação de operadores e será útil para demonstrarmos que o operador $\mathcal{A}$ que definiremos no capítulo 2 é de fato um C_0-semigrupo de contrações.

Corolário 1.38. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. Se B é dissipativo e satisfaz $D(B) \supset D(A)$ e*

$$\|Bx\| \leq \gamma\|Ax\| + \beta\|x\| \text{ para todo } x \in D(A)$$

onde $0 \leq \gamma < 1$ e $\beta \geq 0$. Então $A + B$ é gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações.

Teorema 1.39. ***(Teorema de Prüss)*** *Seja $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ um C_0 semigrupo de contrações definido num espaço de Hilbert H. Então, $S(t)$ é exponencialmente estável se, e somente se, $\{i\beta; \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \subseteq \rho(A)$ e $\|(i\beta I - A)^{-1}\| \leq c$, onde A é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.*

1.6.3 Problema de Cauchy abstrato

Como é bem conhecido, a teoria geral de semigrupos nos permite estudar problemas de valor inicial para equações de evolução abstratas do tipo

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}U(t) = AU(t), \quad t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

onde A é um operador linear com domínio $D(A) \subset X$, sendo X um espaço de Banach (ou Hilbert).

Definição 1.40. *Uma solução do problema de Cauchy (1.3) é uma função $U : [0, +\infty) \to X$ tal que $U(t)$ é contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável com $U(t) \in D(A)$ para $t > 0$ e satisfaz (1.3) em $[0, +\infty)$ quase sempre.*

O resultado a seguir é um clássico da literatura e pode ser encontrado em Brézis [2, Capítulo 7], Pazy [15, Capítulo 4] ou Zheng [20, Capítulo 2]. Observamos ainda que em [2, 20] os autores usam uma linguagem de operadores m-acretivos com respeito ao operador A.

Teorema 1.41. *Seja A um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $S(t) := e^{At}$ em X. Se $U_0 \in D(A)$, então o problema de Cauchy abstrato (1.3) possui uma única solução U em $D(A)$ dada por*

$$U(t) = S(t)U_0 := e^{At}U_0, \qquad \forall\ t \geq 0,$$

tal que

$$U \in C\left([0, +\infty), D(A)\right) \cap C^1\left([0, +\infty), X\right).$$

Capítulo 2

Operadores Parabólicos que podem Degenerar

Neste Capítulo analisaremos as propriedades da classe de operadores parabólicos que podem degenerar, bem como definiremos e estudaremos as propriedades do espaço $H_a^1(0,1)$, espaço este no qual se encontra a solução do problema,

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{em } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \\ \text{e } \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \le \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \le \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases}$$

sendo o dado inicial $u_0 \in L^2(0,1)$, $a(x) = x^\alpha$, com $0 \le \alpha < 2$, $x \in [0,1]$. A função $b \in L^\infty(0,1)$ é tal que $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in (0,\epsilon)$, com $\epsilon > 0$. O termo $b(\cdot)g(u)$ representa um amortecimento localizado o qual foi acrescentado com o propósito de gerar dissipação para obtermos o decaimento exponencial, sendo que este termo pode ser linear ou não.

2.1 O Espaço $H_a^1(0,1)$

Definição 2.1. *Para $0 \le \alpha < 1$, definimos o espaço $H_a^1(0,1)$ por*

$$H_a^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1); u \text{ é absol. cont. em } [0,1],\ \sqrt{a}u_x \in L^2(0,1) \text{ e } u(0) = u(1) = 0\},$$

e para $1 \le \alpha < 2$,

$$H_a^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1); u \text{ é local. absol. cont. em } (0,1],\ \sqrt{a}u_x \in L^2(0,1) \text{ e } u(1) = 0\}.$$

Proposição 2.2. *O espaço $H^1_a(0,1)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno definido por*

$$(u,v)_{H^1_a(0,1)} = \int_0^1 (uv + a(x)u_x v_x)dx.$$

Demonstração: Não é difícil verificar que a função bilinear $(.,.)_{H^1_a(0,1)}$ acima define um produto interno. A norma proveniente deste produto interno é dada por

$$||u||_{H^1_a(0,1)} = \left(\int_0^1 (|u|^2 + |\sqrt{a(x)}u_x|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

a qual por simplicidade denotaremos por $||u||_a$.

Mostremos que o espaço $H^1_a(0,1)$ munido desta norma é completo.

De fato, seja $\{u_\mu\} \subset H^1_a(0,1)$ uma sequência de Cauchy, então

$$||u_\mu - u_\nu||^2_a \to 0 \quad \text{em} \quad H^1_a(0,1), \text{ para } \mu,\nu \geq n_0, \ n_0 \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||u_\mu - u_\nu||^2_2 + ||\sqrt{a}u_{\mu x} - \sqrt{a}u_{\nu x}||^2_2 &= \int_0^1 \left[|u_\mu - u_\nu|^2 + |\sqrt{a}u_{\mu x} - \sqrt{a}u_{\nu x}|^2\right] dx \\ &= ||u_\mu - u_\nu||^2_a \to 0 \quad \text{para} \quad \mu,\nu \geq n_0, n_0 \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

donde segue que $\{u_\mu\}$ e $\{\sqrt{a}u_{\mu x}\}$ são sequências de Cauchy em $L^2(0,1)$. Logo, existem $u, v \in L^2(0,1)$ tais que

$$u_\mu \to u \quad \text{e} \quad \sqrt{a}u_{\mu x} \to v \text{ em } L^2(0,1).$$

Da imersão de $L^2(0,1)$ em $\mathcal{D}'(0,1)$, e pelas convergências acima temos que:

$$u_{\mu x} \to u_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,1) \tag{2.1}$$

e

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \to v \text{ em } \mathcal{D}'(0,1).$$

Por outro lado, como $\sqrt{a} \in C^\infty([0,1])$ e vale (2.1) tem-se que

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \to \sqrt{a}u_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,1).$$

Logo, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,1)$ decorre que $v = \sqrt{a}u_x$. Portanto, segue que $(u_\mu) \subset H^1_a(0,1)$ é tal que

$$u_\mu \to u \qquad \text{e} \qquad \sqrt{a}u_{\mu x} \to \sqrt{a}u_x \text{ em } L^2(0,1), \tag{2.2}$$

o que mostra que $u, \sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$.

Resta-nos provar que para $0 \leq \alpha < 1$, u é absolutamente contínua em $[0,1]$ e $u(0) = u(1) = 0$, enquanto que para o caso $1 \leq \alpha < 2$, u é localmente absolutamente contínua em $(0,1]$ e $u(1) = 0$. Para este fim dividiremos a demonstração em dois casos.

<u>Primeiro caso</u>: $0 \leq \alpha < 1$.

A fim de provarmos que $u(0) = u(1) = 0$ provaremos inicialmente que $u_x \in L^1(0,1)$. Seja $\epsilon > 0$, então

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Logo,

$$\int_0^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx = \frac{1}{1-\alpha}. \tag{2.3}$$

De (2.2), (2.3), desigualdade de Hölder e lembrando que $\sqrt{a(x)} = x^{\frac{\alpha}{2}}$ vem que $u_x \in L^1(0,1)$, pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_x| dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 |x^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} u_x| dx &\leq \left(\int_0^1 |x^{\frac{\alpha}{2}} u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\sqrt{a}u_x\|_2 \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Como $L^2(0,1)$ está imerso em $L^1(0,1)$ temos que $u \in L^1(0,1)$, e consequentemente, $u \in W^{1,1}(0,1)$. Dessa imersão e de (2.4) seguem, respectivamente, as seguintes desigualdades:

$$||u||_1 \leq c_1 ||u||_2 \Rightarrow ||u||_1^2 \leq c_1 ||u||_2^2$$

e

$$||u_x||_1 \leq c_2 ||\sqrt{a}u_x||_2 \Rightarrow ||u_x||_1^2 \leq c_2 ||\sqrt{a}u_x||_2^2$$

Tomando $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$ e utilizando a propriedade $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$, obtemos

$$\frac{1}{2}(||u||_1 + ||u_x||_1)^2 \leq ||u||_1^2 + ||u_x||_1^2 \leq c_3 \left(\int_0^1 |u|^2 dx + \int_0^1 |\sqrt{a}u_x|^2 dx\right) = c_3 ||u||_a^2,$$

donde segue que $||u||_{W^{1,1}(0,1)} \leq c||u||_a$.

Observe que utilizando os mesmos cálculos de (2.4) decorre que

$$||u_{\mu x}||_1 \leq c||\sqrt{a}u_{\mu x}||_2$$

e assim de (2.2) vem que

$$u_{\mu x} \to u_x \text{ em } L^1(0,1).$$

Ainda de (2.2) e da convergência acima tem-se que

$$u_\mu \to u \text{ em } W^{1,1}(0,1)$$

e portanto, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov segue que

$$u_\mu \to u \text{ em } C^0([0,1]).$$

Logo, $u_\mu(0) \to u(0)$ e $u_\mu(1) \to u(1)$. Como $u_\mu \in H_a^1(0,1)$ tem-se que $u_\mu(0) = u_\mu(1) = 0$ donde resulta

$$u(0) = u(1) = 0.$$

Para concluir a prova para o primeiro caso resta-nos provar que u é absolutamente contínua em $[0,1]$. De fato, como $u(x) = \int_b^x u_x(t)dt + u(b)$ então u é absolutamente contínua, em virtude do Corolário 1.6.

<u>Segundo caso</u>: $1 \leq \alpha < 2$.

Provaremos que $u(1)=0$. Para tal, mostraremos inicialmente que $u_x \in L^1(\delta,1)$ para $0 < \delta < 1$ o que nos permite concluir que $u \in W^{1,1}(\delta,1)$ e, consequentemente, segue o desejado via o teorema de Rellich Kondrachov. Note que neste caso não é necessário que $u \in W^{1,1}(0,1)$ e sim que $u \in W^{1,1}(\delta,1)$, uma vez que não estamos interessados na condição de bordo $u(0) = 0$. Com o intuito de provar que $u_x \in L^1(\delta,1)$ vamos novamente dividir este caso em dois outros casos, a saber, $\alpha = 1$ e $1 < \alpha < 2$.

Para $\alpha = 1$, temos que

$$\int_\delta^1 (x^{-\frac{1}{2}})^2 dx = \int_\delta^1 x^{-1} dx = ln(1) - ln(\delta) = -ln(\delta) > 0,$$

já que $ln(\delta) < 0$, pois $\delta \in (0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_\delta^1 |u_x|dx &= \int_\delta^1 |x^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} u_x| dx \\ &\leq \left(\int_\delta^1 |x^{\frac{1}{2}} u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\delta^1 (x^{-\frac{1}{2}})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= ||\sqrt{a} u_x||_2 \sqrt{-ln(\delta)}, \qquad (2.5)\end{aligned}$$

o que implica que $u_x \in L^1(\delta,1)$ e consequentemente $u \in W^{1,1}(\delta,1)$ posto que $u \in L^1(\delta,1)$.

Além disso, do fato que $L^2(\delta,1)$ está imerso em $L^1(\delta,1)$ e da desigualdade acima segue, respectivamente,

$$||u||_{L^1(\delta,1)} \leq c_4 ||u||_{L^2(\delta,1)} \Rightarrow ||u||^2_{L^1(\delta,1)} \leq c_4 ||u||^2_{L^2(\delta,1)}$$

e

$$||u_x||_{L^1(\delta,1)} \leq c_5 ||\sqrt{a} u_x||_{L^2(\delta,1)} \Rightarrow ||u_x||^2_{L^1(\delta,1)} \leq c_5 ||\sqrt{a} u_x||^2_{L^2(\delta,1)}.$$

Tomando $c_6 = \max\{c_4, c_5\}$ e utilizando a propriedade $\frac{1}{2}(a+b)^2 \leq a^2 + b^2$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(||u||_{L^1(\delta,1)} + ||u_x||_{L^1(\delta,1)}\right)^2 &\leq ||u||^2_{L^1(\delta,1)} + ||u_x||^2_{L^1(\delta,1)} \\ &\leq c_6(||u||^2_{L^2(\delta,1)} + ||\sqrt{a} u_x||^2_{L^2(\delta,1)}) \\ &= c_6 ||u||^2_{H^1_a(\delta,1)},\end{aligned}$$

donde segue que $||u||_{W^{1,1}(\delta,1)} \leq \tilde{c} ||u||_{H^1_a(\delta,1)}$.

Analogamente ao feito em (2.5) obtemos

$$||u_{\mu x}||_{L^1(\delta,1)} \leq \tilde{c} ||x^{\frac{\alpha}{2}} u_{\mu x}||_{L^2(\delta,1)}$$

e novamente de (2.2) segue que

$$u_{\mu x} \to u_x \text{ em } L^1(\delta,1).$$

De (2.2) e da convergência acima vem que

$$u_\mu \to u \text{ em } W^{1,1}(\delta,1)$$

e portanto, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, concluímos que

$$u_\mu \to u \text{ em } C^0([\delta,1]),$$

e consequentemente, $u_\mu(1) \to u(1)$.

Como $u_\mu \in H_a^1(0,1)$ então $u_\mu(1) = 0$ e portanto $u(1) = 0$.

Para $1 < \alpha < 2$ temos que

$$\int_\delta^1 (x^{-\frac{\alpha}{2}})^2 dx = \int_\delta^1 x^{-\alpha} dx = \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\delta^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}\left(1 - \delta^{1-\alpha}\right) > 0$$

posto que $\frac{1}{1-\alpha} < 0$ e $1 - \delta^{1-\alpha} < 0$, para tal basta observar que $1 < \alpha < 2$ e $\delta^{1-\alpha} > 1$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_\delta^1 |u_x| dx &= \int_\delta^1 |x^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} u_x| dx \\
&\leq \left(\int_\delta^1 |x^{\frac{\alpha}{2}} u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\delta^1 (x^{-\frac{\alpha}{2}})^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= ||\sqrt{a} u_x||_{L^2(\delta,1)} \sqrt{\frac{1}{1-\alpha}(1 - \delta^{1-\alpha})},
\end{aligned}$$

o que implica que $u_x \in L^1(\delta, 1)$ e ainda $u \in W^{1,1}(\delta, 1)$, uma vez que $u \in L^1(\delta, 1)$.

Daqui em diante prosseguimos exatamente como no caso anterior e concluímos o desejado.

Resta-nos provar que u é localmente absolutamente contínua em $(0, 1]$ para concluir a prova para o segundo caso e consequentemente a proposição. Como $u, u_x \in L^1(\delta, 1)$ então u é absolutamente contínua em $[\delta, 1]$, ou ainda, u é localmente absolutamente contínua em $(0, 1]$, já que o $\delta > 0$ tomado é qualquer. $\square$

A seguir enunciamos e provamos um lema técnico, cuja demonstração é longa. No entanto, este resultado é necessário para a demonstração de uma importante Proposição posterior, onde estamos interessados em garantir que $C_0^\infty(0, 1)$ é denso em $H_a^1(0, 1)$.

Lema 2.3. *Seja $u \in H_a^1(0, 1)$. Dado $\epsilon > 0$, existem $\delta > 0, f \in C^1([\delta, 1 - \delta])$ e uma extensão de f, $G \in C^1([0, 1])$, satisfazendo a seguinte desigualdade:*

$$\int_0^1 (|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2) dx < \epsilon + c\left(\int_0^{2\delta} (|u|^2 + a(x)|u_x|^2) dx + \int_{1-2\delta}^1 (|u|^2 + a(x)|u_x|^2) dx\right), \quad (2.6)$$

para alguma constante $c > 0$.

Demonstração: Assumindo que existe $f \in C^1([\delta, 1 - \delta])$, mostraremos que podemos construir uma extensão de f, G, da seguinte forma:

Seja $0 < \delta < \frac{1}{4}$ e consideremos o intervalo $(0, \delta)$. Fixemos $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = -1$.

Note que λ_1 e λ_2 existem, uma vez que, são expressos em função de μ_1 e μ_2 da seguinte forma

$$\lambda_2 = \frac{-1 - \mu_1}{\mu_2 - \mu_1} < 0$$

e daí $\lambda_1 > 0$.

Agora, definamos para $x \in [0, \delta]$,

$$h(x) = \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) + \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x)).$$

Observe que h está bem definida pois f está bem definida, uma vez que,

$$\delta \leq \delta + \mu_i(\delta - x) \leq \delta + \mu_i\delta = \delta(1 + \mu_i) < 2\delta < 1 - \delta; \qquad i = 1, 2. \tag{2.7}$$

assim,

$$h(\delta) = \lambda_1 f(\delta) + \lambda_2 f(\delta) = f(\delta)$$

$$h_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))$$

e

$$h_x(\delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta) = f_x(\delta).$$

De maneira análoga para $x \in [1 - \delta, 1]$, definamos:

$$g(x) = \lambda_1 f(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x)) + \lambda_2 f(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x))$$

uma vez que,

$$\delta < 1 - 2\delta < 1 - \delta - \mu_i\delta < 1 - \delta + \mu_i(1 - \delta - x) < 1 - \delta; \qquad i = 1, 2. \tag{2.8}$$

Então,

$$g(1 - \delta) = \lambda_1 f(1 - \delta) + \lambda_2 f(1 - \delta) = f(1 - \delta)$$

$$g_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x))$$

e

$$g_x(1 - \delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1 - \delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(1 - \delta) = f_x(1 - \delta).$$

Desta forma, construímos uma extensão G para f em $C^1([0,1])$ dada por:

$$G(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq \delta \\ f(x), & \delta \leq x \leq 1-\delta \\ g(x), & 1-\delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Nosso objetivo é mostrar que existindo f, sua extensão G satisfaz (2.6). Antes de continuarmos, notemos que dado $\epsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx &= \int_0^\delta \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx \\ &+ \int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + a(x)|u_x - f_x|^2\right) dx \\ &+ \int_{1-\delta}^1 \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx \\ &\leq \epsilon_0 + \int_0^\delta \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx \\ &+ \int_{1-\delta}^1 \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx \qquad (2.9) \end{aligned}$$

onde $\epsilon_0 > 0$ existe em virtude da densidade de $C^1([\delta, 1-\delta])$ em $H^1(\delta, 1-\delta)$ e do fato que $1 \leq \frac{1}{(1-\delta)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha}$, $0 \leq \alpha < 2$ e $x \in [\delta, 1-\delta]$, como explicamos melhor a seguir.

Com efeito, seja $u \in H^1_a(0,1)$, então $u \in L^2(0,1)$ e $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$. Considere $0 < \delta < \frac{1}{4}$, então

$$u \in L^2(\delta, 1-\delta) \text{ e } \sqrt{a}u_x \in L^2(\delta, 1-\delta),$$

e daí,

$$u_x = \frac{\sqrt{a}u_x}{\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a}u_x}{C} \in L^2(\delta, 1-\delta),$$

onde

$$\frac{1}{C} = \min_{x \in [\delta, 1-\delta]} \sqrt{a(x)} > 0.$$

Logo, $u \in H^1(\delta, 1-\delta)$.

Da densidade de $C^1([\delta, 1-\delta])$ em $H^1(\delta, 1-\delta)$, decorre que dado $\epsilon_0 > 0$ existe $f \in C^1([\delta, 1-\delta])$ tal que

$$\int_\delta^{1-\delta} (|u-f|^2 + |u_x - f_x|^2) dx < \epsilon_0.$$

Como $a(x) = x^\alpha$, $x \in [\delta, 1-\delta]$ e $0 \leq \alpha < 2$, obtemos

$$1 \leq \frac{1}{(1-\delta)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + a(x)|u_x - f_x|^2\right) dx &\leq \int_\delta^{1-\delta} |u-f|^2 dx + \frac{1}{(1-\delta)^\alpha}\int_\delta^{1-\delta} a(x)|u_x - f_x|^2 dx \\
&\leq \int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + |u_x - f_x|^2\right) dx \\
&< \epsilon_0.
\end{aligned}$$

É interessante observar que o ϵ_0 será posteriormente escolhido em função do ϵ dado.

Agora que já garantimos a existência de f, vamos estimar os quatro termos que compõem o lado direito da desigualdade (2.9). Comecemos estimando o termo

$$\int_0^\delta |u-G|^2 dx.$$

Notemos que para $x \in (0,\delta)$ temos:

$$\begin{aligned}
|u(x) - G(x)| &= |u(x) - h(x)| \\
&= |u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&= |(\lambda_1 + \lambda_2)u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&\leq |\lambda_1 u(x) - \lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_2 u(x) - \lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))|
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
|u(x) - G(x)|^2 \leq 2^2 \Big\{ & \lambda_1^2 |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\
& + \lambda_1^2 |u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\
& + \lambda_2^2 |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \\
& + \lambda_2^2 |u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 a δ a desigualdade acima, temos:

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta |u(x) - G(x)|^2 dx &\leq 4\Big\{ \lambda_1^2 \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_1^2 \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2 \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2 \int_0^\delta |u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \Big\} \\
&= 4(\lambda_1^2 I_1 + \lambda_1^2 I_2 + \lambda_2^2 I_3 + \lambda_2^2 I_4) \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

onde,

$$I_i = \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_k(\delta - x))|^2 dx; \qquad k = 1 \text{ para } i = 1 \text{ e } k = 2 \text{ para } i = 3.$$

$$I_j = \int_0^\delta |u(\delta+\mu_k(\delta-x)) - f(\delta+\mu_k(\delta-x))|^2 dx; \qquad k = 1 \text{ para } j = 2 \text{ e } k = 2 \text{ para } j = 4.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = \delta + \mu_1(\delta - x)$ na integral I_2 e utilizando (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} I_2 &= -\int_{\delta+\mu_1\delta}^{\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\delta}^{\delta+\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi \\ &< \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lambda_1^2 I_2 < \lambda_1^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}. \tag{2.11}$$

Fazendo I_4 de forma análoga ao realizado em I_2 obtemos,

$$\lambda_2^2 I_4 < \lambda_2^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_2}. \tag{2.12}$$

Observe que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\ &\leq 2\left\{ \int_0^\delta |u(x)|^2 dx + \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável anterior e usando (2.7) segue que

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx &= -\int_{\delta+\mu_1\delta}^{\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\delta}^{\delta+\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi \\ &= \tfrac{1}{\mu_1} \int_{\delta}^{\delta+\mu_1\delta} |u(\xi)|^2 d\xi \\ &< \tfrac{1}{\mu_1} \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

logo

$$\lambda_1^2 I_1 \leq 2\lambda_1^2 \left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx. \tag{2.13}$$

Fazendo I_3 de maneira análoga ao realizado em I_1 obtemos

$$\lambda_2^2 I_3 \leq 2\lambda_2^2 \left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)\int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx. \tag{2.14}$$

Substituindo (2.11) - (2.14) em (2.10), segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} |u(x)-G(x)|^2 dx &\leq 4\left\{2\lambda_1^2\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\int_0^{2\delta}|u(x)|^2dx + \lambda_1^2\epsilon_0\frac{1}{\mu_1}\right.\\
&+ \left. 2\lambda_2^2\left(1+\frac{1}{\mu_2}\right)\int_0^{2\delta}|u(x)|^2dx + \lambda_2^2\epsilon_0\frac{1}{\mu_2}\right\} \qquad (2.15)\\
&= 4\epsilon_0\left(\frac{\lambda_1^2}{\mu_1}+\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) + 8\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{\lambda_1^2}{\mu_1}+\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right)\int_0^{2\delta}|u(x)|^2dx.
\end{aligned}$$

Estimemos, agora, o termo

$$\int_{1-\delta}^{1} |u-G|^2 dx.$$

Note que

$$\begin{aligned}
|u(x)-G(x)| &= |u(x)-g(x)|\\
&= |u(x)-\lambda_1 f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) + \lambda_2 f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|\\
&= |(\lambda_1+\lambda_2)u(x)-\lambda_1 f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) + \lambda_2 f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|\\
&\leq |\lambda_1 u(x) - \lambda_1 u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|\\
&+ |\lambda_1 u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - \lambda_1 f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|\\
&+ |\lambda_2 u(x) - \lambda_2 u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|\\
&+ |\lambda_2 u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x)) - \lambda_2 f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|
\end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned}
|u(x)-G(x)|^2 \leq 4\Big\{ &\lambda_1^2|u(x)-u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2\\
&+\lambda_1^2|u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2\\
&+\lambda_2^2|u(x)-u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2\\
&+\lambda_2^2|u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x)) - f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2 \Big\}.
\end{aligned}$$

Integrando a desigualdade acima de $1-\delta$ a 1 obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{1-\delta}^{1} |u(x)-G(x)|^2dx &\leq 4\left\{\lambda_1^2\int_{1-\delta}^1 |u(x)-u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2dx\right.\\
&+ \lambda_1^2\int_{1-\delta}^1 |u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2dx\\
&+ \lambda_2^2\int_{1-\delta}^1 |u(x)-u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2dx \qquad (2.16)\\
&+ \left.\lambda_2^2\int_{1-\delta}^1 |u(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x)) - f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2dx\right\}\\
&= 4(\lambda_1^2 J_1 + \lambda_1^2 J_2 + \lambda_2^2 J_3 + \lambda_2^2 J_4),
\end{aligned}$$

onde

$$J_i = \int_{1-\delta}^{1} |u(x) - u(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x))|^2 dx; \quad k=1 \text{ para } i=1 \text{ e } k=2 \text{ para } i=3.$$

$$J_j = \int_{1-\delta}^{1} |u(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x)) - f(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x))|^2 dx; \quad k=1 \text{ para } j=2 \text{ e } k=2 \text{ para } j=4.$$

Fazendo a mudança de variável $\xi = 1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)$ na integral J_2 e por (2.8) chegamos que

$$\begin{aligned} J_2 &= -\int_{1-\delta}^{1-\delta-\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)-f(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)-f(\xi)|^2 d\xi \\ &< \frac{\epsilon_0}{\mu_1}, \end{aligned}$$

e ainda

$$\lambda_1^2 J_2 < \lambda_1^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}. \tag{2.17}$$

De maneira análoga para J_4 obtemos

$$\lambda_2^2 J_4 < \lambda_2^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_2}. \tag{2.18}$$

Observe que

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{1-\delta}^{1} |u(x) - u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx \\ &\leq 2\left\{ \int_{1-\delta}^{1} |u(x)|^2 dx + \int_{1-\delta}^{1} |u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx \right\}. \end{aligned}$$

Agora, pela mesma mudança de variável anterior e por (2.8) segue que

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta}^{1} |u(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx &= -\int_{1-\delta}^{1-\delta-\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi = \int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{1-2\delta}^{1} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \int_{1-2\delta}^{1} \frac{1}{\mu_1}|u(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 2\left\{ \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 + \int_{1-2\delta}^{1} \frac{1}{\mu_1}|u(x)|^2 dx \right\} \\ &= 2\left\{ \left(1+\frac{1}{\mu_1}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx \right\} \end{aligned}$$

e daí,

$$\lambda_1^2 J_1 \leq 2\lambda_1^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx. \tag{2.19}$$

Da mesma forma ao já realizado anteriormente vem que

$$\lambda_2^2 J_3 \leq 2\lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.17) - (2.20) em (2.16), obtemos

$$\int_{1-\delta}^{1} |u(x) - G(x)|^2 dx \leq 4\epsilon_0 \left(\frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) + 8\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx. \tag{2.21}$$

Agora, analisemos os termos que envolvem a derivada, ou seja,

$$\int_0^{\delta} a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx.$$

Para obtermos uma desigualdade semelhante à apresentada em (2.10) usaremos o fato que $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = -1$. Comecemos analisando o seguinte termo:

$$\int_0^{\delta} a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|u_x(x) - G_x(x)| &= |u_x(x) - h_x(x)| \\
&= |u_x(x) + \lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) + \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&= |(\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2)u_x(x) - \lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&\leq |\lambda_1\mu_1 u_x(x) - \lambda_1\mu_1 u_x(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_1\mu_1 u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_2\mu_2 u_x(x) - \lambda_2\mu_2 u_x(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\
&\quad + |\lambda_2\mu_2 u_x(\delta + \mu_2(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|,
\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}
|u_x(x) - G_x(x)|^2 \leq 4\Big\{ &\lambda_1^2\mu_1|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\
&+\lambda_1^2\mu_1|u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\
&+\lambda_2^2\mu_2|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \\
&+\lambda_2^2\mu_2|u_x(\delta + \mu_2(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \Big\},
\end{aligned}$$

uma vez que $\lambda_i^2\mu_i^2 < \lambda_i^2\mu_i$ para $i = 1, 2$, posto que $0 < \mu_i < 1$ para $i = 1, 2$.

Multiplicando a desigualdade acima por $a(x)$ e integrando o resultado de 0 a

δ, tem-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx &\leq 4\Big\{ \lambda_1^2\mu_1 \int_0^\delta a(x)|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_1^2\mu_1 \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2\mu_2 \int_0^\delta a(x)|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2\mu_2 \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \Big\} \\
&= 4\{\lambda_1^2\mu_1 K_1 + \lambda_1^2\mu_1 K_2 + \lambda_2^2\mu_2 K_3 + \lambda_2^2\mu_2 K_4\} \qquad (2.22)
\end{aligned}$$

onde,

$$K_i = \int_0^\delta a(x)|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_k(\delta - x))|^2 dx; \quad k = 1 \text{ para } i = 1 \text{ e } k = 2 \text{ para } i = 3.$$

$$K_j = \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta+\mu_k(\delta-x))-f_x(\delta+\mu_k(\delta-x))|^2 dx; \ k = 1 \text{ para } j = 2 \text{ e } k = 2 \text{ para } j = 4.$$

Usando aqui a mesma mudança de variável já utilizada, vem que

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta |u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx &= \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u_x(x) - f_x(x)|^2 dx
\end{aligned}$$

então,

$$K_2 = \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} \frac{a(x)}{\mu_1}|u_x(x) - f_x(x)|^2 dx$$

assim

$$\mu_1\lambda_1^2 K_2 = \frac{\mu_1\lambda_1^2}{\mu_1}\int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} a(x)|u_x(x) - f_x(x)|^2 dx < \lambda_1^2\epsilon_0. \qquad (2.23)$$

Da mesma forma, obtemos que

$$K_4 = \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} \frac{a(x)}{\mu_2}|u_x(x) - f_x(x)|^2 dx$$

e daí,

$$\mu_1\lambda_2^2 K_4 < \lambda_2^2\epsilon_0. \qquad (2.24)$$

Utilizando, também, a mudança de variável anteriormente definida, bem como a desigualdade (2.7), temos

$$\int_0^\delta |u_x(x) - u_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \leq 2\left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right)\int_0^{2\delta} |u_x(x)|^2 dx.$$

Assim,

$$K_1 \leq 2\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx,$$

o que implica que

$$\mu_1\lambda_1^2 K_1 \leq 2(\lambda_1^2\mu_1+\lambda_1^2)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{2.25}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$\mu_2\lambda_2^2 K_3 \leq 2(\lambda_2^2\mu_2+\lambda_2^2)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.23) - (2.26) em (2.22), tem-se

$$\int_0^{\delta} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2dx \leq 4\epsilon_0(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+8\left(\lambda_1^2\mu_1+\lambda_1^2+\lambda_2^2\mu_2+\lambda_2^2\right)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx \tag{2.27}$$

Estimemos agora

$$\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2dx.$$

Procedendo de maneira análoga à realizada anteriormente, mas somando e subtraindo o termo $\lambda_i\mu_i u_x(1-\delta+\mu_i(1-\delta-x))$, em vez de $\lambda_i\mu_i u_x(\delta+\mu_i(\delta-x))$ para $i=1,2$ obtemos

$$\begin{aligned} |u_x(x)-G_x(x)| \ &\leq |\lambda_1\mu_1u_x(x)-\lambda_1\mu_1u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))| \\ &+|\lambda_1\mu_1u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))-\lambda_1\mu_1f_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))| \\ &+|\lambda_2\mu_2u_x(x)-\lambda_2\mu_2u_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))| \\ &+|\lambda_2\mu_2u_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))-\lambda_2\mu_2f_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|. \end{aligned}$$

Elevando cada termo da desigualdade acima ao quadrado, multiplicando o resultado por $a(x)$ e integrando de $1-\delta$ a 1 e levando em consideração o fato que $\mu_1^2 \leq \mu_1$ e $\mu_2^2 \leq \mu_2$, temos

$$\begin{aligned} \int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2dx \quad &\leq \quad 4\Big\{\ \lambda_1^2\mu_1\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x)-u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2dx \\ &+ \quad \lambda_1^2\mu_1\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) \\ &\quad -f_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2dx \\ &+ \quad \lambda_2^2\mu_2\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x)-u_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2dx \\ &+ \quad \lambda_2^2\mu_2\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x)) \\ &\quad -f_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))|^2dx\ \Big\} \\ &= \quad 4\{\lambda_1^2\mu_1M_1+\lambda_1^2\mu_1M_2+\lambda_2^2\mu_2M_3+\lambda_2^2\mu_2M_4\} \end{aligned} \tag{2.28}$$

onde,

$$M_i = \int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x) - u_x(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x))|^2 dx; \quad k = 1 \text{ para } i = 1 \text{ e } k = 2 \text{ para } i = 3.$$

$$M_j = \int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x)) - f_x(1-\delta+\mu_k(1-\delta-x))|^2 dx; \quad k = 1 \text{ para } j = 2 \text{ e } k = 2 \text{ para}$$

$j = 4$.

Utilizando a mudança de variável $\xi = 1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)$, temos

$$\begin{aligned}\int_{1-\delta}^{1} |u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - f_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx &= -\int_{1-\delta}^{1-\delta-\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi \\ &= \frac{1}{\mu_1}\int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} |u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi.\end{aligned}$$

Então,

$$M_2 = \frac{1}{\mu_1}\int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} a(x)|u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi$$

assim,

$$\begin{aligned}\mu_1\lambda_1^2 M_2 &= \frac{\mu_1\lambda_1^2}{\mu_1}\int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} a(x)|u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi \\ &< \lambda_1^2\epsilon_0. \end{aligned} \tag{2.29}$$

De maneira análoga obtém-se

$$\mu_2\lambda_2^2 M_4 < \lambda_2^2\epsilon_0. \tag{2.30}$$

Observe que

$$\int_{1-\delta}^{1} |u_x(x) - u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx \le 2\left\{\int_{1-\delta}^{1} |u_x(x)|^2 dx + \int_{1-\delta}^{1} |u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx\right\}.$$

Mas, utilizando a mudança de variável anterior, temos:

$$\int_{1-\delta}^{1} |u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx \le \int_{1-2\delta}^{1} \frac{1}{\mu_1}|u_x(x)|^2 dx.$$

Logo,

$$\int_{1-\delta}^{1} |u_x(x) - u_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x))|^2 dx \le 2\left\{\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\int_{1-2\delta}^{1} |u_x(x)|^2 dx\right\}.$$

E daí,

$$M_1 \le 2\left\{\left(1+\frac{1}{\mu_1}\right)\int_{1-2\delta}^{1} a(x)|u_x(x)|^2 dx\right\}$$

donde segue que

$$\lambda_1^2\mu_1 M_1 \leq 2(\mu_1\lambda_1^2+\lambda_1^2)\int_{1-2\delta}^{1} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{2.31}$$

De maneira análoga, obtemos:

$$\lambda_2^2\mu_2 M_3 \leq 2(\mu_2\lambda_2^2+\lambda_2^2)\int_{1-2\delta}^{1} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{2.32}$$

Substituindo (2.29) - (2.32) em (2.28) temos que

$$\int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2dx \leq 4\epsilon_0(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+8(\mu_1\lambda_1^2+\lambda_1^2+\mu_2\lambda_2^2+\lambda_2^2)\int_{1-2\delta}^{1} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{2.33}$$

Portanto, substituindo (2.15), (2.21), (2.27) e (2.33) em (2.9) e definindo

$$c=\max\left\{8\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{\lambda_1^2}{\mu_1}+\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right), 8\left(\lambda_1^2\mu_1+\lambda_1^2+\lambda_2^2\mu_2+\lambda_2^2\right)\right\}=8\left(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\frac{\lambda_1^2}{\mu_1}+\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right)$$

e também,

$$\epsilon_0=\frac{\epsilon}{1+8\left(\dfrac{\lambda_1^2}{\mu_1}+\dfrac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right)+8(\lambda_1^2+\lambda_2^2)},$$

fica provada a estimativa (2.6) e isto conclui a demonstração do Lema.

Observe que a igualdade referente ao máximo que determina a constante c acima é verificada pois, $0<\mu_1<1$ então $\frac{1}{\mu_1}>\mu_1$ donde segue que $\frac{\lambda_1^2}{\mu_1}>\lambda_1^2\mu_1$, da mesma forma obtemos $\frac{\lambda_2^2}{\mu_2}>\lambda_2^2\mu_2$. $\square$

Como já mencionado anteriormente, tendo provado o Lema, estamos aptos a demonstrar a seguinte Proposição.

Proposição 2.4. *O espaço $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$, ou seja,*

$$\overline{C_0^\infty(0,1)}^{H_a^1(0,1)}=H_a^1(0,1).$$

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $C^1([0,1])$ é denso em $H_a^1(0,1)$. Para tal basta procedermos conforme feito na página 35 e assim dado $u\in H_a^1(0,1)$ temos que $u\in H^1(\delta,1-\delta)$ onde $0<\delta<\frac{1}{4}$ e também existe uma função $f\in C^1([\delta,1-\delta])$ tal que $\displaystyle\int_{\delta}^{1-\delta}(|u-f|^2+a(x)|u_x-f_x|^2)dx<\epsilon_0$, conforme mostramos durante a demonstração do Lema anterior.

Também pelo Lema 2.3 temos que dado $\epsilon > 0$, existe uma extensão G de f em $C^1([0,1])$, satisfazendo:

$$\int_0^1 (|u-G|^2+a(x)|u_x-G_x|^2)dx < \epsilon + c\left(\int_0^{2\delta}(|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx + \int_{1-2\delta}^1 (|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx\right), \tag{2.34}$$

para alguma constante $c > 0$.

Observe que

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{2\delta}(|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx + \int_{1-2\delta}^1 (|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx\right) = 0. \tag{2.35}$$

De (2.34) e de (2.35) resulta que $C^1([0,1])$ é denso em $H_a^1(0,1)$.

Para concluirmos a prova, usaremos o Corolário 1.26, da 2^a Forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, o qual nos diz que se F é subespaço de E e para toda forma $f \in F'$ tal que $\langle f, x\rangle = 0$ para todo $x \in F$ se tem $f \equiv 0$ então F é denso em E. Em nosso caso, consideraremos $F = C_0^\infty(0,1)$ e $E = H_a^1(0,1)$.

Seja $\omega \in [H_a^1(0,1)]'$, pelo Teorema da Representação de Riesz existe uma única $h \in H_a^1(0,1)$ tal que

$$\langle \omega, \varphi\rangle = (h,\varphi)_{H_a^1(0,1)}, \quad \forall \varphi \in H_a^1(0,1) \text{ e } \|h\|_a = \|\omega\|_{a'},$$

onde a' representará, de agora em diante, a norma em $(H_a^1(0,1))'$.

Tome $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ de modo que $(h,\varphi)_{H_a^1(0,1)} = 0$, ou seja,

$$\int_0^1 (h\varphi + a(x)h_x\varphi_x)dx = 0,$$

donde resulta que, $-(ah_x)_x + h = 0$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Mais ainda, como $h \in H_a^1(0,1)$ segue que

$$-(ah_x)_x + h = 0 \text{ em } H_a^1(0,1). \tag{2.36}$$

e daí concluímos que $ah_x \in H^1(0,1)$.

Da densidade de $C^1([0,1])$ em $H_a^1(0,1)$, temos que existe

$$g_n \in C^1([0,1]), \text{ tal que } g_n \longrightarrow h \text{ em } H_a^1(0,1). \tag{2.37}$$

Agora, compondo (2.36) com g_n tem-se

$$0 = (h - (ah_x)_x, g_n).$$

Integrando por partes a igualdade acima, obtemos

$$0 = -ah_x g_n \Big|_0^1 + \int_0^1 (ah_x g_{nx} + hg_n)dx. \tag{2.38}$$

Observe que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (ah_x g_{nx} + hg_n)dx = \int_0^1 (ah_x^2 + h^2)dx.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \|a(\cdot)h_x g_{nx} + hg_n - a(\cdot)h_x^2 - h^2\|_1 &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |a(x)h_x g_{nx} + hg_n - a(x)h_x^2 - h^2|dx \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (|\sqrt{a(x)}h_x(\sqrt{a(x)}g_{nx} - \sqrt{a(x)}h_x)| + |h(g_n - h)|)dx \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} (\|\sqrt{a(\cdot)}h_x\|_2 \|\sqrt{a(\cdot)}g_{nx} - \sqrt{a(\cdot)}h_x\|_2 + \|h\|_2\|g_n - h\|_2) = 0
\end{aligned}$$

pois $g_n \to h$ em $L^2(0,1)$ e $\sqrt{a(\cdot)}g_{nx} \to \sqrt{a(\cdot)}h_x$ em $L^2(0,1)$ em virtude de (2.37).

Também temos que $ah_x g_n \to ah_x h$ em $L^1(0,1)$. Com efeito:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \|ah_x g_n - ah_x h\|_1 &= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |ah_x g_n - ah_x h|dx \\
&= \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 |ah_x(g_n - h)|dx \\
&\leq \lim_{n\to+\infty} (\|ah_x\|_2\|g_n - h\|_2)dx \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.39}$$

uma vez que, $g_n \to h$ em $L^2(0,1)$ em virtude de (2.37).

Agora, dividiremos a demonstração em dois casos, para estudar o termo de bordo.

<u>Primeiro caso:</u> $0 \leq \alpha < 1$.

Neste caso temos a seguinte cadeia de imersões:

$$H_a^1(0,1) \hookrightarrow W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$$

De (2.37) e das imersões segue que

$$g_n \to h \text{ em } C^0([0,1])$$

assim $g_n(0) \to h(0) = 0$ e $g_n(1) \to h(1) = 0$. Como $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$ para $0 \leq \alpha < 1$ então $(ah_x)(0)$ e $(ah_x)(1)$ ficam bem definidas, assim

$$(ah_x h)(0) = 0 = (ah_x h)(1).$$

Tomando o limite quando $n \to +\infty$ em (2.38) tem-se

$$0 = \int_0^1 (ah_x^2 + h^2)dx = (h,h)_{H_a^1(0,1)} = \|h\|_a^2.$$

Logo, $h \equiv 0$ e daí segue que $\omega \equiv 0$.

Segundo caso: $1 \leq \alpha < 2$

De (2.39) temos que $ah_x g_n \to ah_x h$ em $L^1(0,1)$. Temos também, $(ah_x)g_{nx} \to (ah_x)h_x$ em $L^1(0,1)$. De fato:

$$\begin{aligned}\int_0^1 |ah_x(g_{nx} - h_x)|dx &= \int_0^1 |\sqrt{a}h_x||\sqrt{a}g_{nx} - \sqrt{a}h_x|dx \\ &\leq \|\sqrt{a}h_x\|_2\|\sqrt{a}g_{nx} - \sqrt{a}h_x\|_2 \\ &\to 0\end{aligned}$$

posto que, $\sqrt{a}g_{nx} \to \sqrt{a}h_x$ em $L^2(0,1)$ por (2.37).

Desta forma,

$$((ah_x)g_n)_x = (ah_x)_x g_n + (ah_x)g_{nx} \to (ah_x)_x h + (ah_x)h_x = ((ah_x)h)_x$$

em $L^1(0,1)$.

Tomando o limite em (2.38) quando $n \to +\infty$, obtemos:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} \left(-(ah_x g_n)|_0^1 + \int_0^1 (ah_x g_{nx} + hg_n)dx \right). \tag{2.40}$$

Como estamos no caso $1 \leq \alpha < 2$ não sabemos o que acontece com $h_x(0)$. Assim, dado $0 < x < 1$ devemos analisar a situação limite, ou seja,

$$ah_x g_n|_0^1 = \lim_{x\to 0}(ah_x g_n)|_x^1 = (ah_x g_n)(1) - \lim_{x\to 0}(ah_x g_n)(x).$$

Mas, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$(ah_x g_n)(x) \to 0 \text{ quando } x \to 0. \tag{2.41}$$

De fato, suponha por absurdo que

$$x^\alpha (h_x g_n)(x) \to l \text{ quando } x \to 0 \text{ e } l \neq 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então

$$x^\alpha |(h_x g_n)(x)| + |l| \leq |x^\alpha |(h_x g_n)(x)| - |l|| \leq |x^\alpha (h_x g_n)(x) - l| < \epsilon.$$

Donde, para ϵ suficientemente pequeno segue que:

$$x^\alpha |h_x g_n|^2 > \frac{(|l| - \epsilon)^2}{x^\alpha}. \tag{2.42}$$

Neste momento, dividiremos a demonstração em dois casos, a saber, $\alpha = 1$ e $1 < \alpha < 2$.

Para $\alpha = 1$ temos de (2.42),

$$x|h_x g_n|^2 > \frac{(|l| - \epsilon)^2}{x}.$$

Integrando a desigualdade acima no intervalo (η, δ), com $0 < \eta < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}
\int_\eta^\delta x|h_x g_n|^2 dx &> (|l| - \epsilon)^2 \int_\eta^\delta \frac{1}{x} dx \\
&= (|l| - \epsilon)^2 ln(x)|_\eta^\delta \\
&= (|l| - \epsilon)^2 (ln(\delta) - ln(\eta)).
\end{aligned}$$

Fazendo $\eta \to 0$ temos que $ln(\eta) \to +\infty$ e daí $(|l| - \epsilon)^2 (ln(\delta) - ln(\eta)) \to +\infty$. Então, $x h_x g_n \notin L^2(0,1)$ o que é uma contradição, pois $x h_x g_n \in L^2(0,1)$. Com efeito, temos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 |x h_x g_n|^2 dx &= \int_0^1 |x^{\frac{1}{2}} h_x x^{\frac{1}{2}} g_n|^2 dx \\
&= \int_0^1 |x^{\frac{1}{2}} h_x|^2 |x^{\frac{1}{2}} g_n|^2 dx \\
&= \int_0^1 |\sqrt{a} h_x|^2 a |g_n|^2 dx \\
&\leq \|a\|_\infty \int_0^1 |\sqrt{a} h_x|^2 |g_n|^2 dx \\
&\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |g_n(x)| \|a\|_\infty \int_0^1 |\sqrt{a} h_x|^2 < \infty.
\end{aligned}$$

Para o caso $1 < \alpha < 2$ temos de (2.42) que:

$$x^\alpha |h_x g_n|^2 > \frac{(|l| - \epsilon)^2}{x^\alpha}.$$

Integrando a desigualdade acima no intervalo (η, δ), com $0 < \eta < \delta$, temos:

$$\begin{aligned}\int_\eta^\delta x^\alpha |h_x g_n|^2 dx &> (|l| - \epsilon)^2 \int_\eta^\delta \frac{1}{x^\alpha} dx \\ &= (|l| - \epsilon)^2 \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\eta^\delta \\ &= (|l| - \epsilon)^2 \left[\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right].\end{aligned}$$

Fazendo $\eta \to 0$ temos que $\frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha} \to +\infty$ e daí $(|l| - \epsilon)^2 \left[\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{\eta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] \to +\infty$. Então, $x^{\frac{\alpha}{2}} h_x g_n \notin L^2(0,1)$ o que é uma contradição, pois $x^{\frac{\alpha}{2}} h_x g_n \in L^2(0,1)$, como pode-se provar de modo análogo ao que já foi feito. Logo, para qualquer $1 \leq \alpha < 2$ temos que (2.41) é satisfeita.

Portanto podemos reescrever (2.40) da seguinte forma:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} (-a h_x g_n(1)) + \int_0^1 (a h_x^2 + h^2) dx. \tag{2.43}$$

Mas $(a h_x g_n)(1)$ converge para $(a h_x h)(1)$. Assim, de (2.43), da convergência anterior e do fato que $(a h_x h)(1) = (a h_x)(1) h(1) = 0$ segue que

$$0 = \int_0^1 (a h_x^2 + h^2) dx = (h, h)_{H_a^1} = ||h||_a.$$

Logo, $h \equiv 0$ donde se conclui que $\omega \equiv 0$ como desejávamos provar. □

2.2 O Operador $Au = (au_x)_x$

Sejam V e H espaços de Hilbert tais que V tem imersão contínua e densa em H e $b(u, v)$ uma forma bilinear e contínua em $V \times V$. Definamos o operador

$$\begin{array}{rccc} A: & D(A) & \to & H \\ & u & \mapsto & Au \end{array}$$

dado por

$$(Au, v) = b(u, v); \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in V$$

onde

$$D(A) := \{u \in V;\ \text{existe } f \in H \text{ que verifica } b(u, v) = (f, v),\ \forall v \in V\}.$$

Em nosso caso, consideraremos $V = H_a^1(0,1)$ e $H = L^2(0,1)$ e denotemos por M o seguinte conjunto

$$M := \{u \in H_a^1(0,1); au_x \in H^1(0,1)\}$$

e por $b(u,v)$ a forma bilinear

$$\begin{array}{llcl} b(.,.): & H_a^1(0,1) \times H_a^1(0,1) & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & b(u,v) \end{array}$$

dada por

$$b(u,v) = -\int_0^1 a(x)u_x(x)v_x(x)dx.$$

Como $H_a^1(0,1)$ e $L^2(0,1)$ são espaços de Hilbert tais que $H_a^1(0,1)$ tem imersão contínua e densa em $L^2(0,1)$ e $b(u,v)$ é uma forma bilinear e contínua, mostraremos que neste contexto

$$D(A) = M \text{ e } Au = (au_x)_x.$$

Inicialmente, provaremos a primeira afirmação, isto é, que $D(A) = M$. Seja $u \in D(A)$ então $u \in H_a^1(0,1)$ e existe $f \in L^2(0,1)$ que verifica

$$(f,v) = b(u,v) = -\int_0^1 a(x)u_x(x)v_x(x)dx, \quad \forall v \in H_a^1(0,1).$$

Tomando $v = \varphi \in C_0^\infty(0,1)$ na igualdade acima, temos que

$$\langle (au_x)_x, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,1),$$

ou seja,

$$(au_x)_x = f \text{ em } \mathcal{D}'(0,1).$$

Como $f \in L^2(0,1)$ segue que $(au_x)_x \in L^2(0,1)$ e, portanto, $u \in M$. Para isto basta observar que $au_x \in L^2(0,1)$, de fato,

$$\int_0^1 |a|^2|u_x(x)|^2dx \le \|a\|_\infty \int_0^1 |a||u_x(x)|^2dx < \infty,$$

pois $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$, uma vez que, $u \in H_a^1(0,1)$.

Reciprocamente, seja $u \in M$. Então, $u \in H_a^1(0,1)$ e $(au_x)_x \in L^2(0,1)$, donde

$$((au_x)_x, \varphi) = b(u,\varphi), \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Da densidade de $C_0^\infty(0,1)$ em $H_a^1(0,1)$ e da continuidade da forma bilinear $b(u,v)$, decorre que

$$((au_x)_x, v) = b(u,v),\ \forall\, v \in H_a^1(0,1). \tag{2.44}$$

Logo, $u \in D(A)$ e portanto, $D(A) = M$.

De (2.44) segue que

$$Au = (au_x)_x.$$

Dessa forma, fica provado que

$$\begin{cases} \forall u \in D(A); Au = (au_x)_x \\ \\ D(A) := M. \end{cases}$$

No entanto, quando $1 \leq \alpha < 2$ podemos obter uma melhor caracterização para o $D(A)$, da seguinte forma:

$$\begin{cases} \forall u \in D(A); Au = (au_x)_x \\ \\ D(A) = M \\ \qquad\quad = \{u \in L^2(0,1); u \text{ local. absol. contínua em } (0,1], au \in H_0^1(0,1), au_x \in H^1(0,1) \\ \qquad\quad\ \text{e } (au_x)(0) = 0\} \end{cases} \tag{2.45}$$

Para provar (2.45) basta mostrarmos que $D(A) = \{u \in L^2(0,1); u$ local. absol. contínua em $(0,1], au \in H_0^1(0,1), au_x \in H^1(0,1)$ e $(au_x)(0) = 0\}$, posto que já provamos que $D(A) = M$ e $Au = (au_x)_x$ para $0 \leq \alpha < 2$.

Dessa maneira, para verificar que $\{u \in L^2(0,1);\ u$ local. absol. contínua em $(0,1], au \in H_0^1(0,1), au_x \in H^1(0,1)$ e $(au_x)(0) = 0\} \subset D(A)$, é suficiente provar que $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$ e $u(1) = 0$, posto que as demais condições temos por hipótese.

Que $u(1) = 0$ vem do fato de $0 = (au)(1) = a(1)u(1) = 1u(1) = u(1)$. Provemos, agora, que $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$, para tal usaremos a desigualdade do tipo Hardy para $0 \leq \alpha^* < 1$.

A fim de utilizarmos a desigualdade acima mencionada, seja $z = au_x$ então, por hipótese, temos que $au_x \in H^1(0,1)$ e assim $(au_x)_x \in L^2(0,1) \hookrightarrow L^1(0,1)$. Dessa forma, podemos escrever

$$au_x(x) = \int_b^x (au_x)_x(t)dt + au_x(b)$$

donde segue que au_x é localmente absolutamente contínua em $(0,1)$.

Também, temos por hipótese que $(au_x)(0)=0$ o que nos dá,

$$\begin{aligned} z(x) = au_x(x) &\rightarrow 0 \\ x &\rightarrow 0^+ \end{aligned}$$

Ainda, pelo fato de $au_x \in H^1(0,1)$ segue que

$$\int_0^1 x^{\alpha^*}(au_x)_x^2 dx \leq \max_{x\in[0,1]} x^{\alpha^*} \int_0^1 (au_x)_x^2 dx < +\infty.$$

Agora, observe que para $1 \leq \alpha < 2$, podemos escolher $0 < \alpha^* < 2-\alpha \leq 1$, donde obtemos que

$$\alpha^* < 2-\alpha \Rightarrow \alpha^* - 2 < -\alpha \Rightarrow \alpha < 2-\alpha^*.$$

Assim, como $0 < x < 1$, temos que:

$$x^{2-\alpha^*} < x^{\alpha} \Rightarrow x^{-\alpha} < x^{\alpha^*-2}.$$

Disto segue que:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (x^{\frac{\alpha}{2}} u_x)^2 dx &= \int_0^1 x^{\alpha} u_x^2 dx = \int_0^1 x^{-\alpha} x^{2\alpha} u_x^2 dx = \int_0^1 x^{-\alpha}(x^{\alpha} u_x)^2 dx \\ &= \int_0^1 x^{-\alpha} z^2 dx < \int_0^1 x^{\alpha^*-2} z^2 dx < +\infty \end{aligned}$$

o que prova que $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$.

Para provar a outra inclusão, isto é, que $D(A) \subset \{u \in L^2(0,1); u$ local. absol. contínua em $(0,1], au \in H_0^1(0,1), au_x \in H^1(0,1)$ e $(au_x)(0)=0\}$ observe que basta mostrarmos que $au \in H_0^1(0,1)$ e $(au_x)(0)=0$ posto que as demais condições decorrem do fato de $u \in D(A)$.

Como $a(x)=x^{\alpha}$ é limitada em $[0,1]$, temos que o $\sup ess_{x\in[0,1]} a(x) < +\infty$ e como $u \in H_a^1(0,1)$ segue que $au \in L^2(0,1)$. Também $a_x(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ e $1 \leq \alpha < 2$, então $\sup ess_{x\in[0,1]} a_x(x) < +\infty$ e daí $a_x u \in L^2(0,1)$.

Como $au_x \in L^2(0,1)$, obtemos

$$(au)_x = a_x u + au_x \in L^2(0,1),$$

ou seja,

$$au \in H^1(0,1).$$

Logo, para mostrar que $au \in H_0^1(0,1)$ resta verificar que $au \in H^1(0,1)$ possui suporte compacto contido em $(0,1)$, em outras palavras, verificar que $(au)(1) = 0$ e $(au)(0) = 0$.

Da imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$ e do fato que $u(1) = 0$, obtemos $(au)(1) = 0$.

Para provar que $(au)(0) = 0$ afirmamos que

$$(au)(x) = x^\alpha u(x) \to 0 \text{ quando } x \to 0.$$

Usando exatamente os mesmos argumentos que em (2.41) concluímos esse resultado.

Do exposto, segue que:

$$D(A) = \{u \in L^2(0,1); u \text{ local. absol. contínua em } (0,1], au \in H_0^1(0,1),$$
$$au_x \in H^1(0,1) \text{ e } (au_x)(0) = 0\}$$

e portanto (2.45) se verifica.

Em ambos os casos segue o seguinte resultado.

Proposição 2.5. *O operador $A : D(A) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$, tem domínio denso, é dissipativo, auto-adjunto e fechado.*

Demonstração:

(i) Domínio denso

Temos as seguintes inclusões

$$C_0^\infty(0,1) \subset D(A) \subset H_a^1(0,1).$$

Tomando o fecho em $L^2(0,1)$ tem-se:

$$\overline{C_0^\infty(0,1)} \subset \overline{D(A)} \subset \overline{H_a^1(0,1)}.$$

Mas $\overline{C_0^\infty(0,1)} = L^2(0,1)$ e $\overline{H_a^1(0,1)} = L^2(0,1)$, donde resulta que $\overline{D(A)} = L^2(0,1)$ o que prova o desejado.

(ii) A é dissipativo

Temos que

$$\langle Au, u\rangle = b(u,u) = -\int_0^1 a(x)u_x^2(x)dx \leq 0.$$

Portanto, A é dissipativo.

(iii) A é auto-adjunto

Sejam $u, v \in D(A)$. Como o domínio de A é denso em $L^2(0,1)$, basta mostrarmos que A é simétrico.

Com efeito, da relação de adjunção temos

$$\langle u, A^*v\rangle = \langle Au, v\rangle.$$

Assim,

$$\langle Au, v\rangle = \langle (au_x)_x, v\rangle = -(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x) = \langle u, (av_x)_x\rangle = \langle u, Av\rangle.$$

o que implica que $A^*v = Av$ para todo $v \in D(A)$, ou seja, $A^* = A$.

(iv) A é fechado

Mostraremos que o gráfico de A é fechado para concluirmos que A é fechado. Seja $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } H_a^1(0,1) \text{ e } Au_n \to v \text{ em } L^2(0,1). \tag{2.46}$$

Vamos mostrar que $v = Au$, assim $(u_n, Au_n) \to (u, Au)$, donde seguirá o desejado.

Em virtude (2.46) resulta que $au_{nx} \to au_x$ em $L^2(0,1)$. Logo

$$(au_{nx})_x \to (au_x)_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,1).$$

Por outro lado,

$$(au_{nx})_x = Au_n \to v \text{ em } L^2(0,1).$$

Da imersão $L^2(0,1)$ em $\mathcal{D}'(0,1)$ e, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,1)$, resulta que $v = (au_x)_x$, ou seja,

$$Au = (au_x)_x = v.$$

o que mostra que A é fechado. $\square$

Observação 2.6. *Do fato que $D(A)$ é denso em $H_a^1(0,1)$ é possível estender A a todo $H_a^1(0,1)$.*

Com efeito, o operador A é limitado. Sejam $u \in D(A)$ e $v \in H_a^1(0,1)$, então

$$|(Au, v)| = |((a(\cdot)u_x)_x, v)| = |(\sqrt{a(\cdot)}u_x, \sqrt{a(\cdot)}v_x)| \leq \|u\|_a \, \|v\|_a.$$

Logo, $\|Au\|_2 \leq c\|u\|_a$ e, portanto A é limitado.

Definamos a extensão de A da seguinte forma. Para cada $u \in H_a^1(0,1)$ existe $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $u_n \to u$ em $H_a^1(0,1)$. Considere,

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{A}: & H_a^1(0,1) & \to & [H_a^1(0,1)]' \\ & u & \mapsto & \widetilde{A}u \end{array}$$

onde $\widetilde{A}u = \lim\limits_{n\to+\infty} Au_n$.

Notemos que a aplicação acima está bem definida. Já vimos que $au_{nx} \to au_x$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Seja $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$, então

$$\langle Au_n, \varphi\rangle = \langle (au_{nx})_x, \varphi\rangle = -\langle au_{nx}, \varphi_x\rangle \to -\langle au_x, \varphi_x\rangle = \langle (au_x)_x, \varphi\rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0,1),$$

ou seja,

$$\langle \widetilde{A}u, \varphi\rangle = \langle (au_x)_x, \varphi\rangle, \; \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Seja $w \in H_a^1(0,1)$. Como $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$ segue que

$$\langle \widetilde{A}u, w\rangle = \langle (au_x)_x, w\rangle; \; \forall w \in H_a^1(0,1)$$

donde se conclui que $\widetilde{A}u = Au$ para todo $u \in D(A)$ o que prova que $\widetilde{A}$ é a extensão de A a todo $H_a^1(0,1)$.

Observação 2.7. *Se $u, v \in H_a^1(0,1)$. Então:*

$$\langle -(au_x)_x, v\rangle_{a',a} = \langle \sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x\rangle_{a',a}.$$

De fato, como $u, v \in H_a^1(0,1)$ então,

$$\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1) \text{ e } \sqrt{a}v_x \in L^2(0,1).$$

Assim,

$$\langle \sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x \rangle_{a',a} = (\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x)_{L^2(0,1)}.$$

Como $\overline{C_0^\infty(0,1)}^{H_a^1(0,1)} = H_a^1(0,1)$, então dado $v \in H_a^1(0,1)$ existe $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(0,1)$ tal que $\varphi_\nu \to v$ em $H_a^1(0,1)$. Em particular, temos que

$$\sqrt{a}\varphi_{\nu x} \to \sqrt{a}v_x \ \text{ em } L^2(0,1).$$

Portanto,

$$(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}\varphi_{\nu x}) \to (\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x) = \langle \sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x \rangle_{a',a}.$$

Por outro lado,

$$(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}\varphi_{\nu x}) = \langle au_x, \varphi_{\nu x} \rangle_{a',a} = \langle -(au_x)_x, \varphi_\nu \rangle_{a',a} \to \langle -(au_x)_x, v \rangle_{a',a}.$$

Pela unicidade do limite no espaço das distribuições, segue que

$$\langle -(au_x)_x, v \rangle_{a',a} = \langle \sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x \rangle_{a',a}$$

o que mostra o que desejávamos.

No que segue denotaremos $\widetilde{A}$ também por A.

Capítulo 3

O Problema Linear

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução do problema,

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)u = 0 & \text{em } (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.1}$$

sendo o dado inicial $u_0 \in L^2(0,1)$, $a(x) = x^\alpha$, com $0 \leq \alpha < 2$, $x \in [0,1]$. A função $b \in L^\infty(0,1)$ é tal que $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in (0,\epsilon)$, com $\epsilon > 0$. O termo $b(\cdot)u$ representa um amortecimento localizado e linear o qual foi acrescentado com o propósito de gerar dissipação para obtermos o decaimento exponencial.

3.1 Existência e Unicidade de Solução Regular

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de solução regular, via dois métodos diferentes, no qual serão abordados nas próximas duas subseções.

3.1.1 Existência e Unicidade de Solução via Faedo - Galerkin

Nesta subseção estabeleceremos a existência e unicidade de solução regular ou solução forte via o método de Faedo-Galerkin.

Definição 3.1. *Diz-se que uma função $u(t,x)$ definida em $[0,T]\times(0,1)$ é solução regular ou solução forte para o problema (3.1), se:*

(i) $u \in C^0([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T; D(A)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1))$.

(ii) $u'(t) - Au(t) + b(\cdot)u(t) = 0$ *em* $L^2(0,1)$.

Teorema 3.2. *Para todo* $u_0 \in D(A)$ *o problema (3.1) possui uma única solução forte* u.

Demonstração: Por simplicidade dividiremos a demonstração em cinco etapas.

(i) Primeira Etapa: Problema Aproximado.

Observemos, inicialmente, que $D(A)$ é separável. Com efeito, consideremos em $D(A)$ a norma dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_a + \|Au\|_2, \quad \text{para todo } \ u \in D(A),$$

e definamos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccc} T: & D(A) & \to & L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \\ & u & \mapsto & (\,u\,,\ \sqrt{a}u_x,\ \ (au_x)_x\,). \end{array}$$

Não é difícil ver que T está bem definido e também que T é uma isometria. Para provar a última afirmação basta tomarmos em $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ a norma da soma. Logo, $T(D(A))$ é um subespaço fechado de $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$.

Como o espaço $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ é separável temos que $T(D(A))$ também o é e, por conseguinte, $D(A)$ é separável.

Pelo fato do $D(A)$ ser Hilbert com a norma do gráfico e separável segue que $D(A)$ admite uma base Hilbertiana, digamos $\{w_j\}$. Definamos:

$$W_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m],$$

ou seja, W_m é o subespaço de $D(A)$ gerado pelos m primeiros vetores da base de $D(A)$.

Note que $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} W_n} = D(A)$. Consideremos em W_m o problema aproximado, o qual consiste em determinar $u_m(t)$ satisfazendo:

$$\begin{cases} u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i \\ (u_m'(t), w_j) + (\sqrt{a(\cdot)}u_{mx}(t), \sqrt{a(\cdot)}w_{jx}) + (b(\cdot)u_m(t), w_j) = 0, \ j = 1, \cdots, m \\ u_m(0) = u_{0m} \to u_0 \text{ em } D(A). \end{cases} \tag{3.2}$$

onde a sequência convergente $\{u_m(0)\}$ provêm do fato que $\overline{\cup_{n\in\mathbb{N}} W_n} = D(A)$.

Provaremos que o problema (3.2) possui solução local em algum intervalo $[0, t_m)$; $t_m < T$. Da segunda equação do referido problema temos para $j = 1, ..., m$.

$$\left(\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)w_i, w_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a(\cdot)}g_{im}(t)w_{ix}, \sqrt{a(\cdot)}w_{jx}\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} b(\cdot)g_{im}(t)w_i, w_j\right) = 0.$$

o que implica que

$$g'_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\left[\left(\sqrt{a(\cdot)}w_{ix}, \sqrt{a(\cdot)}w_{jx}\right) + (b(\cdot)w_i, w_j)\right] = 0, \text{ para todo } j = 1, ..., m, \tag{3.3}$$

pois $(w_i, w_j) = 0$, para todo $i \neq j$ e $(w_i, w_j) = 1$ se $i = j$, uma vez que a base é Hilbertiana.

Podemos representar a igualdade acima em forma matricial, isto é,

$$\begin{pmatrix} g'_{1m} \\ g'_{2m} \\ \vdots \\ g'_{mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\sqrt{a(\cdot)}w_{1x}, \sqrt{a(\cdot)}w_{1x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_1) & \cdots & (\sqrt{a(\cdot)}w_{mx}, \sqrt{a(\cdot)}w_{1x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_1) \\ (\sqrt{a(\cdot)}w_{1x}, \sqrt{a(\cdot)}w_{2x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_2) & \cdots & (\sqrt{a(\cdot)}w_{mx}, \sqrt{a(\cdot)}w_{2x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) + (b(\cdot)w_1(x), w_m) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) + (b(\cdot)w_1(x), w_m) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$\mathbb{Y}_m(t) := \begin{pmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{pmatrix} \quad , \quad 0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M := \begin{pmatrix} (\sqrt{a(\cdot)}w_{1x}, \sqrt{a(\cdot)}w_{1x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_1) & \cdots & (\sqrt{a(\cdot)}w_{mx}, \sqrt{a(\cdot)}w_{1x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_1) \\ (\sqrt{a(\cdot)}w_{1x}, \sqrt{a(\cdot)}w_{2x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_2) & \cdots & (\sqrt{a(\cdot)}w_{mx}, \sqrt{a(\cdot)}w_{2x}) + (b(\cdot)w_1(x), w_2) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) + (b(\cdot)w_1(x), w_m) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) + (b(\cdot)w_1(x), w_m) \end{pmatrix}$$

Assim, segue que

$$\mathbb{Y}'_m(t) + M\mathbb{Y}_m(t) = 0 \tag{3.4}$$

e definamos também,

$$\mathbb{Y}_m(0) := \begin{pmatrix} g_{1m}(0) \\ g_{2m}(0) \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \end{pmatrix} = \mathbb{Y}_{0m}. \tag{3.5}$$

De (3.4) e (3.5) temos o seguinte problema de E.D.O

$$\begin{cases} \mathbb{Y}'_m(t) & = -M\mathbb{Y}_m(t) \\ \mathbb{Y}_m(0) & = \mathbb{Y}_{0m}. \end{cases} \tag{3.6}$$

que é equivalente ao problema aproximado (3.2).

A fim de aplicar o Teorema de Carathéodory em (3.6) definamos a seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m & \to & \mathbb{R}^m \\ & (t,x) & \mapsto & -Mx \end{array}$$

Logo, para $t \in [0,t_m)$ e $x = \mathbb{Y}_m(t)$ podemos reescrever o sistema (3.6) da seguinte forma

$$\begin{cases} \mathbb{Y}'_m(t) & = F(t,\mathbb{Y}_m(t)) \\ \\ \mathbb{Y}_m(0) & = \mathbb{Y}_{0m}. \end{cases}$$

Agora, considere o compacto $D = [0,T]\times B_b \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$, onde

$$B_b := \{x \in \mathbb{R}^m;\ |x| \leq b; \quad b > 0\}$$

e verifiquemos que $F : D \to \mathbb{R}^m$ satisfaz as condições de Caratheódory. De fato:

<u>Primeira condição</u>: F é mensurável em relação a t, para cada $\mathbb{Y}_m$ fixo.

De fato, como a aplicação F não depende de t, para cada $\mathbb{Y}_m(t)$ fixado temos que F é constante e dessa forma contínua. Logo mensurável.

<u>Segunda condição</u>: F é contínua em relação a $\mathbb{Y}_m$, para cada t fixo.

Com efeito, fixado $t > 0$ e dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\epsilon}{\|M\|}$ tal que para cada $\mathbb{Y}^1_m$, $\mathbb{Y}^2_m$ que satisfaz

$$|\mathbb{Y}^1_m - \mathbb{Y}^2_m| < \delta$$

implica

$$\begin{aligned} |F(t,\mathbb{Y}^1_m(t)) - F(t,\mathbb{Y}^2_m(t))| &= |-M\mathbb{Y}^1_m(t) + M\mathbb{Y}^2_m(t)| \\ &\leq \|M\||\mathbb{Y}^1_m(t) - \mathbb{Y}^2_m(t)| \\ &\leq \|M\|\delta < \epsilon, \end{aligned}$$

observe que o operador matricial M é limitado.

<u>Terceira condição</u>: Para cada compacto $K \subset D$, existe uma função real $m_K(t)$ integrável, tal que

$$|F(t,\mathbb{Y}_m(t))| \leq m_K(t);\ \text{para todo } (t,x) \in K.$$

Com efeito, consideremos $K = D$ e para todo $(t, \mathbb{Y}_m(t)) \in D$ tem-se

$$|F(t, \mathbb{Y}_m(t))| = |-M\mathbb{Y}_m(t)| \leq \|M\||\mathbb{Y}_m(t)| = m_K(t)$$

onde $m_K(t)$ é notavelmente integrável.

Logo, pelo Teorema de Carathéodory existe uma solução $\mathbb{Y}_m(t)$ de (3.6) em $(0, t_m); t_m < T$.

(ii)Segunda etapa: Estimativas a Priori.

- **Primeira Estimativa a Priori**

Esta etapa nos fornecerá estimativas que nos permitirão prolongar a solução aproximada $u_m(t) \in W_m$ definida para todo $t \in [0, t_m)$, $t_m < T$, a todo intervalo $[0, T]$.

Multiplicando o problema aproximado (3.2) por $g_{jm}(t)$ e somando o resultado em j de 1 a m, obtemos

$$(u_m'(t), u_m(t)) + (\sqrt{a(\cdot)}u_{mx}(t), \sqrt{a(\cdot)}u_{mx}(t)) + (b(\cdot)u_m(t), u_m(t)) = 0. \tag{3.7}$$

Para todo $t \in (0, t_m)$ com $m \in \mathbb{N}$ fixado, temos

$$(u_m'(t), u_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_2^2. \tag{3.8}$$

Com efeito, seja $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, t_m)$, então pelo teorema de Fubini e por integração por partes, tem-se:

$$\begin{aligned}
\langle (u_m'(t), u_m(t)), \theta(t)\rangle &= \int_0^{t_m}\left(\int_0^1 u_m'(t,x)u_m(t,x)dx\right)\theta(t)dt \\
&= \int_0^1\int_0^{t_m}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_m(t,x))^2\theta(t)dtdx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left[(u_m(t,x))^2\theta(t)|_0^{t_m} - \int_0^{t_m}(u_m(t,x))^2\theta'(t)dt\right]dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^{t_m}(u_m(t,x))^2\theta'(t)dtdx \\
&= -\int_0^{t_m}\int_0^1\frac{1}{2}(u_m(t,x))^2\theta'(t)dxdt \\
&= -\langle\frac{1}{2}\|u_m(t)\|_2^2, \theta'(t)\rangle \\
&= \langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2, \theta(t)\rangle.
\end{aligned}$$

Assim, a igualdade (3.7) pode ser escrita como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||_2^2+\int_0^1 a(x)|u_{mx}(t)|^2dx=-(b(\cdot)u_m(t),u_m(t)).$$

Integrando a expressão acima de 0 à t; $t<t_m$, obtemos:

$$\frac{1}{2}||u_m(t)||_2^2+\int_0^t\int_0^1 a(x)|u_{mx}(s,x)|^2dxds=\frac{1}{2}||u_m(0)||_2^2-\int_0^t\int_0^1 b(x)u_m^2(s,x)dxds.$$

Pelo problema (3.2) temos que $u_m(0)=u_{0m}\to u_0$ em $D(A)$, logo existe uma constante $c_1>0$ tal que $\|u_m(0)\|<c_1$, para todo $m\in\mathbb{N}$. Então;

$$\|u_m(t)\|_2^2+\int_0^t\int_0^1 2a(x)|u_{mx}(s,x)|^2dxds\leq c_1+2\|b\|_\infty\int_0^t\left[\|u_m(t)\|_2^2+\int_0^\xi\int_0^1 2a(x)|u_{mx}(s,x)|^2dxds\right]d\xi.$$

Definamos $q_m(t):=\|u_m(t)\|_2^2+\displaystyle\int_0^t\int_0^1 2a(x)|u_{mx}(s,x)|^2dxds$, assim

$$q_m(t)\leq c_1+2\|b\|_\infty\int_0^t q_m(\xi)d\xi,\quad t\in[0,t_m]\text{ e }m\in\mathbb{N}.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall para integrais, temos

$$q_m(t)\leq c_1e^{2\|b\|_\infty t}=c_1e^p<c_1e^T=c_2\quad\forall t\in[0,t_m)\text{ com }T>p\text{ e }\forall m\in\mathbb{N}.$$

Como c_2 independe de t e de m, segue do Corolário 1.22 do Teorema de Carathéodory que para todo $m\in\mathbb{N}$, $u_m(t)$ pode ser prolongada a todo intervalo $[0,T]$. Dessa forma, podemos refazer as contas feitas anteriormente para $t\in[0,T]$ donde seguirá que,

$$\{u_m\}\text{ é limitada em }L^\infty(0,T;L^2(0,1))\tag{3.9}$$

$$\{\sqrt{a}u_{mx}\}\text{ é limitada em }L^2(0,T;L^2(0,1)).\tag{3.10}$$

•• Segunda Estimativa a Priori.

Temos de (3.3) que

$$g'_{jm}(t)=-\sum_{i=1}^m g_{im}(t)\left[(\sqrt{a(\cdot)}w_{ix},\sqrt{a(\cdot)}w_{jx})+(b(\cdot)w_i,w_j)\right];j=1,\dots,m.$$

Como o lado direito da igualdade acima está em $L^2(0,T)$, resulta que g'_{jm} também está, onde aqui as derivadas são entendidas no sentido de Dini. Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T\|u'_m(t)\|_2^2dt&=\int_0^T\|\sum_{j=1}^m g'_{jm}(t)w_j\|_2^2dt\\&\leq\sum_{j=1}^m\int_0^T|g'_{jm}(t)|^2dt<+\infty,\end{aligned}$$

ou seja,

$$u'_m \in L^2(0,T;L^2(0,1)).$$

Novamente, de (3.3) resulta que

$$g''_{jm}(t) = -\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)\left[\left(\sqrt{a(\cdot)}w_{ix}, \sqrt{a(\cdot)}w_{jx}\right) + (b(\cdot)w_i, w_j)\right]; j = 1, \cdots, m.$$

Como o lado direito da equação acima está em $L^2(0,T)$, segue que

$$g''_{jm} \in L^2(0,T),$$

onde as derivadas são no sentido das distribuições. Além disso,

$$\begin{aligned} \int_0^T ||u''_m(t)||_2^2 dt &= \int_0^T ||\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)w_j||_2^2 dt \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \int_0^T |g''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u''_m \in L^2(0,T;L^2(0,1)).$$

Derivando em relação a t a segunda igualdade de (3.2), obtemos:

$$(u''_m(t), w_j) + (\sqrt{a(\cdot)}u'_{mx}(t), \sqrt{a(\cdot)}w_{jx}) + (b(\cdot)w'_m(t), w_j) = 0.$$

Multiplicando a expressão anterior por $g'_{jm}(t)$ e somando o resultado em j de 1 a m decorre que

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\sqrt{a(\cdot)}u'_{mx}(t), \sqrt{a(\cdot)}u'_{mx}(t)) + (b(\cdot)u'_m(t), u'_m(t)) = 0. \tag{3.11}$$

Temos que

$$(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||_2^2,$$

e para provar que tal igualdade se verifica basta procedermos de forma análoga à realizada para provar (3.8).

Logo, (3.11) pode ser reescrita da seguinte forma

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||_2^2 + \int_0^1 a(x)|u'_{mx}(t,x)|_2^2 dx + (b(\cdot)u'_m(t), u'_m(t)) = 0.$$

Integrando a igualdade acima de 0 a T, obtemos:

$$\frac{1}{2}||u'_m(T)||_2^2+\int_0^T\int_0^1 a(x)|u'_{mx}(s,x)|_2^2dxds=\frac{1}{2}||u'_m(0)||_2^2-\int_0^T\int_0^1 b(x)(u'_m(s,x))^2dxds.$$

Mas, $u'_m(0)$ é limitado. Com efeito, multiplicando a segunda expressão do problema (3.2) por $g'_{jm}(t)$, somando o resultado em j de 1 a m e calculando a expressão em $t=0$, tem-se

$$\|u'_m(0)\|_2^2=-(\sqrt{a(\cdot)}u_{mx}(0),\sqrt{a(\cdot)}u'_{mx}(0))-(b(\cdot)u_m(0),u'_m(0)),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\|u'_m(0)\|_2^2 &= -\int_0^1 a(x)u_{mx}(0,x)u'_{mx}(0,x)dx-\int_0^1 b(x)u_m(0,x)u'_m(0,x)dx\\ &= \int_0^1 (a(x)u_{mx})_x u'_m(0,x)dx-\int_0^1 b(x)u_m(0,x)u'_m(0,x)dx\\ &= ((a(\cdot)u_{mx})_x(0,x),u'_m(0,x))-(u'_m(0,x),b(\cdot)u_m(0,x))\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos:

$$\begin{aligned}\|u'_m(0)\|_2^2 &\le \|(a(\cdot)u_{mx})_x(0)\|_2\|u'_m(0)\|_2+\|u'_m(0)\|_2\|b(\cdot)u_m(0)\|_2\\ &= \|u'_m(0)\|_2(\|(a(\cdot)u_{mx})_x(0)\|_2+\|b(\cdot)u_m(0)\|_2)\end{aligned}$$

o que implica que para $\|u'_m(0)\|_2\neq 0$ tem-se:

$$\|u'_m(0)\|_2\le\|(a(\cdot)u_{mx})_x(0)\|_2+\|b(\cdot)u_m(0)\|_2,$$

ou ainda,

$$\|u'_m(0)\|_2\le\|(a(\cdot)u_{mx})_x(0)\|_2+\|b\|_\infty^2\|u_m(0)\|_2^2.$$

Por (3.2) temos que $u_m(0)=u_{0m}\to u_0$ em $D(A)$ donde segue que $(a(\cdot)u_{mx})_x(0)=(a(\cdot)u_{0mx})_x\to(a(\cdot)u_{0x})_x$ em $L^2(0,1)$ e $u_m(0)\to u_0$ em $L^2(0,1)$. Logo, existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\|(a(\cdot)u_{mx})_x(0)\|_2\le c_1,\ \text{para todo } m\in\mathbb{N}$$

e

$$\|u_m(0)\|_2\le c_2,\ \text{para todo } m\in\mathbb{N}.$$

Portanto, existe uma constante $c = c_1 + \|b\|_\infty^2 c_2^2 > 0$ tal que

$$\|u_m'(0)\|_2 \leq c, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\|u_m'(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_0^1 2a(x)|u_{mx}'(t,x)|^2 dxdt \leq c_1 + 2\|b\|_\infty \left(\int_0^T \|u_m'(t)\|_2^2 + \int_0^\xi \int_0^1 2a(x)|u_{mx}(t,x)|^2 dxds \right) d\xi.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall para integrais implica que existe c_3 que independe de t e m tal que

$$\|u_m'(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_0^1 2a(x)|u_{mx}'(t,x)|^2 dxdt \leq c_3$$

o que implica

$$\{u_m'\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.12}$$

$$\{\sqrt{a}u_{mx}'\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.13}$$

(iii) Terceira etapa: Passagem ao Limite

As estimativas a priori feitas anteriormente nos fornecem condições para que possamos mostrar a existência de solução regular para o problema em questão (3.1).

Observe, inicialmente, que pelo Teorema da Representação de Riesz temos:

$$L^1(0,T;L^2(0,1)) \equiv (L^\infty(0,T;L^2(0,1)))'.$$

Como o espaço $L^1(0,T;L^2(0,1))$ é separável segue que $L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ também o é, e ainda, o espaço $L^2(0,T;L^2(0,1))$ é reflexivo. Dessa forma, do exposto acima, das limitações obtidas em (3.9), (3.10), (3.12) e (3.13) e do Teorema de Banach-Alaoglu-Boubarki segue que existem subsequências $\{u_\mu\} \subset \{u_m\}$ e $\{u_\mu'\} \subset \{u_m'\}$ tais que:

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.14}$$

$$u_\mu' \overset{*}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.15}$$

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \rightharpoonup \omega \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.16}$$

$$\sqrt{a}u_{\mu x}' \rightharpoonup \xi \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{3.17}$$

Como $L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1)) \cong L^2((0,T)\times(0,1))$. De (3.14) e (3.15) segue que

$$u_{\mu x} \rightharpoonup u_x \text{ em } \mathcal{D}'((0,T)\times(0,1)$$

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \text{ em } \mathcal{D}'((0,T)\times(0,1)$$

$$u'_{\mu x} \rightharpoonup u'_x \text{ em } \mathcal{D}'((0,T)\times(0,1)).$$

Por outro lado, $\sqrt{a(x)} = \sqrt{x^\alpha} \in C^\infty((0,1))$ então,

$$\sqrt{a(x)}u_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a(x)}u_x \text{ em } \mathcal{D}'((0,T)\times(0,1))$$

$$\sqrt{a(x)}u'_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a(x)}u'_x \text{ em } \mathcal{D}'((0,T)\times(0,1)).$$

Das convergências acima e pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'((0,T)\times(0,1))$ temos

$$\eta = u',\ \omega = \sqrt{a(x)}u_x \ \text{ e } \ \xi = \sqrt{a(x)}u'_x.$$

Logo podemos concluir que

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.18}$$

$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.19}$$

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a}u_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \tag{3.20}$$

$$\sqrt{a}u'_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a}u'_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{3.21}$$

Já vimos, da primeira estimativa a priori, que vale

$$\|u_m(t)\|_2^2 + \int_0^T\int_0^1 2a(x)|u_{mx}(t,x)|^2dxdt \le c$$

donde resulta que

$$\int_0^T\int_0^1 |u_m(t,x)|^2dxdt \le c \tag{3.22}$$

e

$$\int_0^T\int_0^1 a(x)|u_{mx}(t,x)|^2dxdt \le \frac{c}{2}. \tag{3.23}$$

Somando (3.22) e (3.23) temos

$$\int_0^T\int_0^1 |u_m(t,x)|^2 + a(x)|u_{mx}(t,x)|^2dxdt \le c_1,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \|u_m(t)\|_a^2 dt \leq c_1$$

donde segue que

$$u_m \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)).$$

Agora, utilizando a desigualdade obtida na segunda estimativa a Priori, isto é,

$$\|u_m'(t)\|_2^2 + \int_0^T \int_0^1 2a(x)|u_{mx}'(t,x)|^2 dxdt \leq c_3$$

e procedendo de maneira análoga à realizada anteriormente, obtemos que

$$u_m' \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)).$$

Como $H_a^1(0,1)$ é Hilbert conforme provamos na proposição (2.2) segue que $L^2(0,T;H_a^1(0,1))$ também o é, logo existem subsequências $\{u_\mu\} \subset \{u_m\}$ e $\{u_\mu'\} \subset \{u_m'\}$ de modo que

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0,T;H_a^1(0,1))$$

$$u_\mu' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0,T;H_a^1(0,1)).$$

Sendo o espaço $L^2(0,T;H_a^1(0,1))$ completo segue que

$$u \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)) \tag{3.24}$$

e

$$u' \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)). \tag{3.25}$$

Sejam $j \in \mathbb{N}$ e $\mu \geq j$ e consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando (3.2) por $\theta(t)$ e integrando o resultado em $[0,T]$, obtemos:

$$\int_0^T (u_\mu'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{a(\cdot)}u_{\mu x}(t),\sqrt{a(\cdot)}w_{jx})\theta(t)dt + \int_0^T (b(\cdot)u_\mu(t),w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Passando o limite na expressão acima quando $\mu \to +\infty$ segue que,

$$\int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{a(\cdot)}u_x(t),\sqrt{a(\cdot)}w_{jx})\theta(t)dt + \int_0^T (b(\cdot)u(t),w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Sendo $j \in \mathbb{N}$ arbitrário e da totalidade dos $\{w_j\}$ em $D(A)$ tem-se

$$\int_0^T (u'(t),v)\theta(t)dt+\int_0^T (\sqrt{a(\cdot)}u_x(t),\sqrt{a(\cdot)}v_x)\theta(t)dt+\int_0^T (b(\cdot)u(t),v)\theta(t)dt = 0 \ \forall v \in D(A), \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Observe que

$$\begin{aligned}(\sqrt{a(\cdot)}u_x(t), \sqrt{a(\cdot)}v_x) &= (au_x(t), v_x) = \int_0^1 au_x(t)v_x dx \\ &= -b(u(t), v) = -(Au(t), v) \text{ para todo } v \in D(A) \subset H_a^1(0,1),\end{aligned}$$

onde A é a extensão de A conforme foi definido na observação (2.6).

Logo,

$$\int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt - \int_0^T (Au(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (b(\cdot)u(t), v)\theta(t)dt = 0,$$

ou ainda,

$$(u'(t), v) - (Au(t), v) + (b(\cdot)u(t), v) = 0 \text{ em } D'(0,T); \text{ para todo } v \in H_a^1(0,1)$$

o que implica que

$$u' - Au + b(\cdot)u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

Como $u'(t), b(\cdot)u(t) \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ segue que

$$-Au(t) \in L^2(0,1) \text{ para quase todo } t \in (0,T) \tag{3.26}$$

e daí,

$$u'(t) - Au(t) + b(\cdot)u(t) = 0 \text{ em } L^2(0,1)$$

mostrando que a condição (ii) da definição (3.1) é satisfeita.

De (3.26) segue que

$$u(t) \in D(A), \text{ para quase todo } t \in (0,T). \tag{3.27}$$

De (3.18), (3.27) e do fato que $\|A(u)\|_2 \leq c\|u\|_2$, temos

$$u \in L^2(0,T;D(A)).$$

Note que esse espaço é uma parte da classe que queremos mostrar que u pertence.

Por outro lado, de (3.18) e (3.19) decorre que

$$u \in H^1(0,T;L^2(0,1)).$$

Observe que o espaço acima também constitui uma parte da classe na qual queremos mostrar que u pertence. Resta-nos mostrar que $u \in C^0([0,T], H_a^1(0,1))$.

De (3.24) e (3.25) obtemos

$$u \in H^1(0,T; H_a^1(0,1)).$$

Mas $H^1(0,T;H_a^1(0,1)) \hookrightarrow C^0([0,T];H_a^1(0,1))$. Logo,

$$u \in C^0([0,T]; H_a^1(0,1)),$$

o que mostra que $u \in C^0([0,T], H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1))$. Para concluir a demonstração basta verificarmos o dado inicial e provarmos a unicidade da solução que será realizada na quinta e sexta etapa, respectivamente.

(iv) Quarta etapa: Verificação do dado inicial.

Já foi provado que

$$u \in C^0([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1))$$

logo faz sentido calcular $u(0)$ e $u(T)$.

Mostraremos que $u(0) = u_0$. Com efeito, seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Então para j fixado tal que $j \geq n_0$ temos que

$$\int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt \text{ quando } \mu \to +\infty.$$

Integrando por partes a expressão anterior, tem-se

$$-(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u_\mu'(t), w_j)\theta(t)dt \longrightarrow -(u(0), w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt, \ \mu \to +\infty.$$

De (3.19), obtemos

$$-(u_\mu(0), w_j) \longrightarrow -(u(0), w_j) \quad \forall j \in \mathbb{N}, \ \mu \to +\infty,$$

ou seja,

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(0,1)$$

pois o $\overline{D(A)} = L^2(0,1)$.

Por outro lado, de (3.2) temos que

$$u_m(0) \to u_0 \text{ em } D(A).$$

Como $D(A) \hookrightarrow L^2(0,1)$ segue que

$$u_m(0) \to u_0 \text{ em } L^2(0,1).$$

E sendo $\{u_\mu\} \subset \{u_m\}$ então

$$u_\mu(0) \to u_0 \text{ em } L^2(0,1).$$

Pela unicidade do limite fraco em $L^2(0,1)$ segue que

$$u(0) = u_0.$$

(v) Quinta etapa: Unicidade de solução.

Sejam u e v soluções do problema (3.1) então $\phi = u - v$ também o é, e portanto, ϕ satisfaz o problema

$$\begin{cases} \phi_t = (a(\cdot)(\phi_x))_x + b(\cdot)\phi & (x,t) \in (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ \phi(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} \phi(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a\phi_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ \phi(0,x) = 0 & x \in (0,1). \end{cases}$$

Compondo a primeira igualdade acima com ϕ temos

$$(\phi'(t), \phi(t)) + ((a(\cdot)(\phi_x))_x(t), \phi(t)) + (b(\cdot)\phi(t), \phi(t)) = 0$$

e daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi(t)\|_2^2 + (\sqrt{a(\cdot)}\phi_x(t), \sqrt{a(\cdot)}\phi_x(t)) + \int_0^1 b(x)(\phi(t))^2 dx = 0.$$

Integrando a expressão acima de 0 à T e observando que $\phi(0) = 0$, segue que

$$\frac{1}{2}\|\phi(t)\|_2^2 + \int_0^T \|\sqrt{a(\cdot)}\phi_x(s)\|_2^2 ds + \int_0^T \int_0^1 b(x)(\phi(t))^2 dx dt = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\|\phi(t)\|_2^2 = 0$$

donde resulta que $\phi = 0$ e portanto $u = v$, concluindo o que desejávamos. $\square$

3.1.2 Existência e Unicidade de Solução via Teoria de Semigrupos Lineares

Nesta subseção estudaremos a existência e unicidade de solução regular do problema dado, via Teoria de Semigrupos Lineares.

Temos que o problema (3.1) pode ser reescrito como um problema de Cauchy abstrato, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t); \qquad t > 0 \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.28}$$

onde $\mathcal{A} = A + B$ tal que o operador $B : D(B) \subset L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ é definido da seguinte forma $Bu = -b(\cdot)u$ e o operador A é o definido na seção (2.2).

Note que para o problema acima ser equivalente ao problema (3.1), no domínio de $\mathcal{A}$ está incorporado as condições de bordo.

O operador $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações. De fato, inicialmente, temos que A é dissipativo, tal fato já foi provado na seção 2.2. Que A^* também o é, basta observamos que A é auto-adjunto conforme também já foi provado na seção 2.2.

Portanto, aplicando o Corolário 1.37 do Teorema de Lumer Phillips ao operador A segue que A é um gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações sobre $L^2(0,1)$.

Note que $D(B) = L^2(0,1)$, onde $D(B) = \{u \in L^2(0,1); Bu \in L^2(0,1)\}$. Com efeito, que $D(B) \subset L^2(0,1)$ é verdade. Resta-nos mostrar que $L^2(0,1) \subset D(B)$. Seja $u \in L^2(0,1)$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Bu(x)|^2 dx &\leq \int_0^1 |-b(x)|^2 |u(x)|^2 dx \\ &\leq \|b\|_\infty^2 \int_0^1 |u(x)|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Portanto, segue que $D(B) = L^2(0,1)$ e daí $D(A) \subset L^2(0,1) = D(B)$.

Também, o operador B é dissipativo, pois

$$\langle Bu, u \rangle = \int_0^1 -b(x)(u(x))^2 dx \leq 0 \text{ para todo } u \in D(B).$$

Além disso, para todo $u \in D(A)$ tem-se

$$\|Bu\|_2^2 = \int_0^1 (-b(x)u(x))^2 dx \leq \|b\|_\infty^2 \int_0^1 (u(x))^2 dx,$$

ou ainda,

$$\|Bu\|_2 \leq \|b\|_\infty \|u\|_2 + 0\|Au\|_2.$$

Logo, pelo Corolário 1.38 segue que $\mathcal{A}$ é um gerador infinitesimal de C_0-semigrupo de contrações.

Considerando o problema de Cauchy (3.28) onde o operador $\mathcal{A}$ é o definido anteriormente. Dado $u_0 \in D(A)$ temos em virtude do Teorema 1.41 que existe uma única solução

$$u \in C([0, +\infty); D(A)) \cap C^1([0, +\infty); L^2(0, 1))$$

associada ao problema de Cauchy mencionado anteriormente.

Observação 3.3. *É importante ressaltar que a solução forte via teoria de semigrupos é mais regular do que a solução forte obtida via o método de Faedo-Galerkin. Dessa forma, em particular, a solução via teoria de Semigrupos também satisfaz a definição de solução regular dada anteriormente.*

3.2 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de solução fraca do problema (3.1), utilizando a existência de soluções regulares e argumentos de densidade.

Definição 3.4. *Diz-se que uma função $u(t, x)$ definida em $[0, T] \times (0, 1)$ é solução fraca para o problema (3.1), se:*
(i) $u \in C^0([0, T]; L^2(0, 1)) \cap L^2(0, T; H_a^1(0, 1))$;
(ii) $u' - Au + b(\cdot)u = 0$ em $L^2(0, T; [H_a^1(0, 1)]')$.

Teorema 3.5. *Para todo $u_0 \in L^2(0, 1)$ o problema (3.1) possui uma única solução fraca u.*

Demonstração: Seja $u_0 \in L^2(0,1)$. Pela densidade de $D(A)$ em $L^2(0,1)$ existe uma sequência $(u_{0n}) \subset D(A)$ tal que

$$u_{0n} \to u_0 \text{ em } L^2(0,1). \tag{3.29}$$

Por outro lado, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que $u_{0n} \in D(A)$ e portanto associado a esse dado inicial existe uma única solução regular ou forte, u_n, na seguinte classe

$$C^0([0,T]; H^1_a(0,1)) \cap L^2(0,T; D(A)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1)),$$

e verifica

$$\begin{cases} u_n' - (a(\cdot)u_{nx})_x + b(\cdot)u_n = 0 & \text{em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ u_n(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} u_n(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_{nx})(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u_n(0,x) = u_{0n}(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.30}$$

Sendo assim, para todo m e $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$\begin{cases} u_n' - u_m' + (a(\cdot)(u_{mx} - u_{nx}))_x + b(\cdot)(u_n - u_m) = 0 & \text{em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ (u_n - u_m)(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} (u_n - u_m)(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)(u_{nx} - u_{mx}))(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ (u_n - u_m)(0,x) = (u_{0n} - u_{0m})(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{3.31}$$

Compondo a primeira equação de (3.31) com $(u_n - u_m)(t)$, temos:

$$((u_n' - u_m')(t), (u_n - u_m)(t)) + (((a(\cdot)u_{mx})_x - (au_{nx})_x)(t), (u_n - u_m)(t)) + (b(\cdot)(u_n - u_m)(t), (u_n - u_m)(t)) = 0.$$

Mas,

$$((u_n' - u_m')(t), (u_n - u_m)(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_m(t)\|_2^2$$

e

$$(((a(\cdot)(u_{mx} - u_{nx}))_x)(t), (u_n - u_m)(t)) = \int_0^1 a(x)(u_{nx} - u_{mx})^2(t,x)dx$$

a igualdade anterior vale em virtude da definição do operador extensão A.

Logo, temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)-u_m(t)\|_2^2+\int_0^1 a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dx &= -\int_0^1 b(x)(u_n-u_m)^2(t,x)dx\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)-u_m(t)\|_2^2+\int_0^1 a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dx &\leq \int_0^1 b(x)(u_n-u_m)^2(t,x)dx\\
\Rightarrow \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t)-u_m(t)\|_2^2+\int_0^1 a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dx &\leq \|b\|_\infty\|(u_n-u_m)(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Integrando a última expressão acima de 0 a T, tem-se

$$\frac{1}{2}\|u_n(T)-u_m(T)\|_2^2+\int_0^T\int_0^1 a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dxdt \leq \frac{1}{2}\|u_n(0)-u_m(0)\|_2^2+\|b\|_\infty\int_0^T\|u_n(t)-u_m(t)\|_2^2dt,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&\|u_n(T)-u_m(T)\|_2^2+\int_0^T\int_0^1 2a(x)|(u_{nx}-u_{mx})|^2(t,x)dxdt\\
&\quad\leq \|u_n(0)-u_m(0)\|_2^2+2\|b\|_\infty\int_0^T\left(\|u_n(t)-u_m(t)\|_2^2+\int_0^1 2a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dx\right)dt \quad \forall t\in[0,T].
\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall para integrais, implica que

$$\|u_n(T)-u_m(T)\|_2^2+\int_0^T\int_0^1 2a(x)(u_{nx}-u_{mx})^2(t,x)dxdt \leq \|u_{n0}-u_{m0}\|_2^2 e^{2\|b\|_\infty T}.$$

Da convergência de (3.29) e da desigualdade acima, resulta:

$$\sup_{t\in[0,T]}\|u_n(T)-u_m(T)\|_2^2\to 0 \text{ quando } n \text{ e } m\to+\infty$$

e

$$\int_0^T\int_0^1 a(x)|(u_{nx}-u_{mx})|^2dxdt\to 0 \text{ quando } n \text{ e } m\to+\infty,$$

ou seja, (u_n) e $(\sqrt{a}u_{nx})$ são sequências de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(0,1))$ e $L^2(0,T;L^2(0,1))$, respectivamente. Como os espaços $C^0([0,T];L^2(0,1))$ e $L^2(0,T;L^2(0,1))$ são completos segue que existem funções $u\in C^0([0,T];L^2(0,1))$ e $v\in L^2(0,T;L^2(0,1))$ tais que

$$u_n\to u \text{ em } C^0([0,T];L^2(0,1)) \tag{3.32}$$

$$\sqrt{a(\cdot)}u_{nx}\to v \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{3.33}$$

Note que da primeira convergência segue parte do que queremos provar para garantir (i) da definição anterior.

De (3.32), (3.33) e da cadeia de imersões

$$C^0([0,T];L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow D'(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow D'(0,T;D'(0,1)) \quad (3.34)$$

conclui-se que

$$\sqrt{a(\cdot)}u_{nx} \to \sqrt{a(\cdot)}u_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)),$$

assim

$$u_n \to u \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \quad (3.35)$$

$$\sqrt{a(\cdot)}u_{nx} \to \sqrt{a(\cdot)}u_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)), \quad (3.36)$$

e daí resulta que (u_n) é uma sequência de Cauchy em $L^2(0,T;H^1_a(0,1))$ e sendo tal espaço completo temos que existe $\eta \in L^2(0,T;H^1_a(0,1))$ de modo que

$$u_n \to \eta \text{ em } L^2(0,T;H^1_a(0,1)).$$

Como $L^2(0,T;H^1_a(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1))$ segue que

$$u_n \to \eta \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \quad (3.37)$$

De (3.35), (3.37) e da unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(0,1))$ tem-se que $\eta = u$. Disto e de (3.36) conclui-se que

$$u \in L^2(0,T;H^1_a(0,1)).$$

Portanto,

$$u \in C^0([0,T];L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1_a(0,1))$$

o que prova que a condição (i) da Definição 3.4 é satisfeita.

Provaremos, agora, que u satisfaz a condição (ii) da definição citada anteriormente.

Consideremos u_n a única solução de (3.1) associada ao dado inicial $u_{0n} \in D(A)$ que verifica (3.30). Sejam $\theta \in D(0,T)$ e $\varphi \in D(0,1)$. Compondo a primeira equação de (3.30) com $\theta\varphi$, obtemos:

$$\langle u_n' - (a(\cdot)u_{nx})_x + b(\cdot)u_n, \theta\varphi\rangle = 0 \text{ para todo } \theta \in D(0,T) \text{ e } \varphi \in D(0,1) \quad (3.38)$$

na dualidade $D'(0,T;D'(0,1)) \times D(0,T;D'(0,1))$.

Observe que

$$\langle u_n', \theta\varphi\rangle = -\langle u_n, \theta'\varphi\rangle \text{ para todo } \theta \in D(0,T) \text{ e } \varphi \in D(0,1).$$

Da expressão acima, de (3.35) e da cadeia de imersões dada em (3.34) segue que

$$\langle u_n', \theta\varphi\rangle \to \langle u', \theta\varphi\rangle \tag{3.39}$$

para todo $\theta \in D(0,T)$ e $\varphi \in D(0,1)$.

De (3.36) e da cadeia de imersões (3.34) segue que

$$\sqrt{a(\cdot)}u_{nx} \to \sqrt{a(\cdot)}u_x \text{ em } D'(0,T;D'(0,1)),$$

e daí

$$\langle Au_n, \theta\varphi\rangle \to \langle Au, \theta\varphi\rangle \tag{3.40}$$

para todo $\theta \in D(0,T)$ e $\varphi \in D(0,1)$.

Também,

$$\langle b(\cdot)u_n, \theta\varphi\rangle \to \langle b(\cdot)u, \theta\varphi\rangle \tag{3.41}$$

para todo $\theta \in D(0,T)$ e $\varphi \in D(0,1)$.

As convergências acima ocorrem na dualidade $D'(0,T;D'(0,1)) \times D(0,T;D'(0,1))$.

Assim, tomando o limite em (3.38) quando $n \to +\infty$ e levando em conta as convergências acima (3.39),(3.40) e (3.41) obtemos:

$$\langle u' - Au + b(\cdot)u, \theta\varphi\rangle = 0$$

na dualidade $D'(0,T;D'(0,1)) \times D(0,T;D'(0,1))$.

Mas, pela totalidade do conjunto

$$\{\theta\varphi, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \varphi \in D(0,1)\}$$

em $\mathcal{D}(0,T;D'(0,1))$, vem que

$$\langle u' - Au + b(\cdot)u, \psi\rangle = 0$$

para todo $\psi \in D(0,T;D'(0,1))$.

Então

$$u' - Au + b(\cdot)u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;D'(0,1)).$$

Como $u \in L^2(0,T;H_a^1(0,1))$, temos que $u(t) \in H_a^1(0,1)$ para quase todo $t \in (0,T)$ e, portanto, $Au(t) \in [H_a^1(0,1)]'$.

Afirmamos que $\|Au(t)\|_{a'} \leq c\|\sqrt{a(\cdot)}u_x(t)\|_2 \leq c\|u(t)\|_{a'}$.

De fato, para todo $v \in H_a^1(0,1)$, temos que

$$\begin{aligned}
|\langle Au(t), v\rangle|^2 &= |\langle (a(\cdot)u_x(t))_x, v\rangle|^2 \\
&= |(\sqrt{a(\cdot)}u_x(t), \sqrt{a(\cdot)}v_x)|^2 \\
&\leq \|\sqrt{a(\cdot)}u_x(t)\|_2^2 \|\sqrt{a(\cdot)}v_x\|_2^2 \\
&\leq c\|u(t)\|_a^2 \|v\|_a^2,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|\langle Au(t), v\rangle| \leq c\|u(t)\|_a \|v\|_a$$

assim para $\|v\|_a \neq 0$ implica que

$$\|Au(t)\|_{a'} \leq c\|u(t)\|_a,$$

e daí,

$$\int_0^T \|Au(t)\|_{a'}^2 dt \leq c^2 \int_0^T \|u(t)\|_a^2$$

donde decorre que

$$Au \in L^2(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

De $L^2(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;[H_a^1(0,1)]')$ e do fato que $b(\cdot)u \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, segue que

$$u' - Au + b(.u) = 0 \text{ em } L^2(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

o que prova que a condição (ii) é satisfeita.

Resta-nos provar que a condição inicial é verificada e que a solução do problema é única. De fato:

Como

$$u_n \to u \text{ em } C^0([0,T]; L^2(0,1))$$

tem-se que

$$u_n(0) \to u(0) \text{ em } L^2(0,1).$$

Por outro lado, $u_{0n} = u_n(0) \to u_0$ em $L^2(0,1)$. Assim, da unicidade do limite em $L^2(0,1)$ temos que $u_0 = u(0)$ e portanto $u_0(x) = u(0,x)$.

A unicidade é provada de maneira análoga ao caso regular. □

3.3 Cálculo da Energia

Nesta seção calcularemos a energia associada a solução regular ou solução forte u do problema (3.1).

Seja $u_0 \in D(A)$. Então, pelo Teorema 3.2, existe uma única solução forte u do problema (3.1). Da definição de solução forte tem-se que $u(t) \in D(A)$ para quase todo $t \in [0, +\infty)$ e $\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t)$ quase sempre em $L^2(0,1)$, onde $\mathcal{A}$ é conforme definimos na subseção 3.1.2.

Compondo $\frac{du(t)}{dt} = \mathcal{A}u(t)$ com $u(t)$ no espaço $L^2(0,1)$, obtemos:

$$\left(\frac{d}{dt}u(t), u(t)\right) = (\mathcal{A}u(t), u(t)).$$

Mas,

$$\left(\frac{d}{dt}u(t), u(t)\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2$$

e

$$\begin{aligned}
(\mathcal{A}u(t), u(t)) &= (Au(t), u(t)) + (Bu(t), u(t)) \\
&= \int_0^1 (a(x)u_x(t,x))_x u(t,x)dx - \int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx \\
&= a(x)u_x(t,x)u(t,x)|_0^1 - \int_0^1 a(x)u_x^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx.
\end{aligned}$$

Nosso objetivo é mostrar que

$$a(x)u_x(t,x)u(t,x)|_0^1 = 0 \tag{3.42}$$

para tal dividiremos em casos, a saber, $0 \leq \alpha < 1$ e $1 \leq \alpha < 2$.

<u>1^o caso:</u> $0 \leq \alpha < 1$.

Mostraremos, inicialmente, que as funções em (3.42) estão definidas em 0 e 1.

Já provamos, no Capítulo 2, que $u(t) \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$, dessa maneira, ficam bem definidas $u(t,1)$ e $u(t,0)$. Pelo fato de $u(t) \in D(A) = \{u(t) \in H_a^1(0,1); a(\cdot)u_x(t) \in H^1(0,1)\}$ e da imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$ segue que $a(\cdot)u_x(t) \in C^0([0,1])$ e daí decorre que $a(\cdot)u_x(t,0)$ e $a(\cdot)u_x(t,1)$ também estão bem definidas.

Logo, podemos escrever (3.42) da seguinte forma,

$$a(1)u_x(t,1)u(t,1) - a(0)u_x(t,0)u(t,0).$$

Mas, $u(t,1) = u(t,0) = 0$ quase sempre em $[0,+\infty)$, o que mostra que (3.42) é satisfeita para $0 \leq \alpha < 1$.

<u>2^o caso:</u> $1 \leq \alpha < 2$.

Como no caso anterior mostraremos primeiro que as funções em (3.42) estão bem definidas. Como, nesse caso, não sabemos nada a respeito da $u(0)$ tomaremos $0 < \delta < 1$ e provaremos primeiramente que as funções estão bem definidas para $x = \delta$ e $x = 1$, e depois analisaremos a situação limite.

Já vimos na seção 2.1 que $u(t) \in W^{1,1}(\delta,1)$ então $u(t,1)$ e $u(t,\delta)$ estão bem definidas, posto que, $H^1(\delta,1) \hookrightarrow C([\delta,1])$. Novamente, da imersão anterior e do fato de $u(t) \in D(A)$ segue que $a(\cdot)u_x(t) \in C([\delta,1])$ donde temos que $a(\cdot)u_x(t,\delta)$ e $a(\cdot)u_x(t,1)$ também estão bem definidos.

Agora, seja $0 < \delta < 1$. Temos que,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (a(x)u_x(t,x))_x u(t,x)dx &= \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 (a(x)u_x(t,x))_x u(t,x)dx \\
&= \lim_{\delta \to 0} \left[a(x)u_x(t,x)u(t,x)|_\delta^1 - \int_\delta^1 a(x)(u_x(t,x))^2 dx \right] \\
&= \lim_{\delta \to 0} a(x)u_x(t,x)u(t,x)|_\delta^1 - \int_0^1 a(x)(u_x(t,x))^2 dx.
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\lim_{\delta\to 0} a(x)u_x(t,x)u(t,x)|_\delta^1 &= \lim_{\delta\to 0}(a(1)u_x(t,1)u(t,1) - a(\delta)u_x(t,\delta)u(t,\delta))\\ &= a(1)u_x(t,1)u(t,1) - \lim_{\delta\to 0} a(\delta)u_x(t,\delta)u(t,\delta)\\ &= a(1)u_x(t,1)u(t,1) - \lim_{\delta\to 0} a(\delta)u_x(t,\delta)\lim_{\delta\to 0} u(t,\delta)\\ &= a(1)u_x(t,1)u(t,1) - a(0)u_x(t,0)\lim_{\delta\to 0} u(t,\delta)\\ &= a(1)u_x(t,1)u(t,1).\end{aligned}$$

Como $u(t,1) = 0$, posto que $u \in H_a^1(0,1)$ segue que (3.42) é satisfeita para $1 \leq \alpha < 2$.

Portanto, concluímos que a solução u satisfaz

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = -\int_0^1 a(x)u_x^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx \text{ quase sempre em } [0,+\infty). \quad (3.43)$$

Integrando a expressão acima de 0 a t; $t \neq +\infty$ vem que

$$\frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|u(0)\|_2^2 - \int_0^t\int_0^1 a(x)u_x(s,x)^2dxds - \int_0^t\int_0^1 b(x)u^2(s,x)dxds.$$

Definamos $E_u(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2; t > 0$ a energia associada a solução u. Note que de (3.43) concluímos que $E_u(t)$ é não crescente.

Agora, considere $u_0 \in L^2(0,1)$. Pelo Teorema 3.5 da seção 3.2 temos que o problema (3.1) admite uma única solução fraca. Como as soluções fracas são limites de soluções fortes, segue que, dada uma solução fraca existe uma sequência de soluções fortes que convergem para a solução fraca u dada.

Assim,

$$\lim_{n\to+\infty} E_{u_n}(t) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\|u_n(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2 \text{ em } t \in [0,+\infty).$$

Logo, definamos $E_u(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2; t \geq 0$ como sendo a energia associada a solução fraca u, donde segue que

$$E_{u_n}(t) \to E_u(t) \text{ quando } n \to +\infty \text{ e para } t \in [0,+\infty),$$

e daí decorre que a energia associada à solução fraca é o limite de uma sequência de energias associada à solução forte e também que a energia da solução fraca é não-crescente.

3.4 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que o problema de Cauchy (3.28) ou equivalentemente que o problema (3.1) decai com taxa exponencial.

Conforme vimos na seção 3.1.2 temos que A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Logo, as soluções do problema de Cauchy abstrato:

$$\begin{cases} \frac{du(t)}{dt} = Au(t); \qquad t > 0 \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{3.44}$$

são dadas por

$$u(t,x) = S(t)u_0; \qquad t \geq 0 \tag{3.45}$$

Ainda, em virtude da teoria de semigrupos lineares segue que se $u_0 \in D(A)$ então a solução u dada por (3.45) é solução forte, ou seja, pertence à classe

$$C^1([0,+\infty); L^2(0,1)) \cap C([0,+\infty); D(A)).$$

Assim, a fim de obtermos decaimento com taxa exponencial através do acréscimo de um termo de amortecimento friccional devemos primeiramente provar que o problema (3.44) não decai exponencialmente. Para tal usaremos o Teorema de Prüss. Logo, é suficiente provarmos que uma das hipóteses do citado teorema não se verifica. É o que demonstraremos no próximo resultado para o caso $0 < \alpha < 1$. Para o caso $1 \leq \alpha < 2$, ainda precisa ser provado.

Proposição 3.6. *O problema (3.44) não é exponencialmente estável quando $\alpha \in (0,1)$.*

Demonstração: Considere $f \in L^2(0,1)$ tal que $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Suponha que exista $u \in D(A)$ tal que $Au = f$. Logo, para cada $s \in (0,1]$ temos:

$$\int_0^s Au(\sigma)d\sigma = \int_0^s f(\sigma)d\sigma.$$

Mas $Au(\sigma) = (au_x(\sigma))_x = \frac{d}{dx}(au_x)(\sigma)$. Assim,

$$\int_0^s \frac{d}{dx}(au_x)(x)dx = (au_x)(s) - (au_x)(0).$$

Observe que $(au_x)(s)$ e $(au_x)(0)$ estão bem definidos, pois $au_x \in H^1(0,1)$, uma vez que, $u \in D(A) = M = \{u \in H^1_a(0,1); au_x \in H^1(0,1)\}$ e vale a imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow C([0,1])$.

Afirmamos que $(au_x)(0) = \lim\limits_{x\to 0^+}(au_x)(x) = 0$. Note que tal afirmação já foi provada na seção (2.2). Logo, temos:

$$\begin{aligned} (au_x)(s) &= \int_0^s f(\sigma)d\sigma \\ \Rightarrow u_x(s) &= \frac{1}{a(s)}\int_0^s f(\sigma)d\sigma \qquad 0 < s \leq 1. \end{aligned}$$

Integrando esta última identidade de 0 a x obtemos,

$$u(x) - u(0) = \int_0^x \frac{1}{a(s)}\int_0^s f(\sigma)d\sigma ds.$$

Como $u \in H^1_a(0,1)$ então $u(0) = 0 = u(1)$. Logo, considerando $x = 1$ tem-se:

$$\begin{aligned} 0 = \int_0^1 s^{-\alpha}\int_0^s f(x)dxds &= \int_0^1 \frac{1}{1-\alpha}\frac{d}{ds}(s^{1-\alpha})\int_0^s f(\sigma)d\sigma ds \\ &= \frac{1}{1-\alpha}s^{1-\alpha}\int_0^s f(\sigma)d\sigma|_0^1 - \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^{1-\alpha}\frac{d}{ds}\int_0^s f(\sigma)d\sigma ds \\ &= -\frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^{1-\alpha}f(s)ds. \end{aligned}$$

Escolhendo $f(s) = -2s + 1$ temos que $f \in L^2(0,1)$ e

$$\int_0^1 f(s)ds = \int_0^1 (-2s+1)ds = (-s^2 + s)|_0^1 = 0.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^{1-\alpha}f(s)ds &= \frac{1}{1-\alpha}\int_0^1 s^{1-\alpha}(-2s+1)ds \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{-2}{3-\alpha}s^{3-\alpha}|_0^1 + \frac{1}{2-\alpha}s^{2-\alpha}|_0^1\right] \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{-2}{3-\alpha} + \frac{1}{2-\alpha}\right] \\ &= -\frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)}. \end{aligned}$$

Note que $-\frac{1}{(2-\alpha)(3-\alpha)} \neq 0; \quad \alpha \in [0,1)$.

Portanto, não pode existir $u \in D(A)$ tal que $Au = f$, donde segue que A não é sobrejetor e dessa forma $0 \notin \rho(A)$. □

Retornemos ao problema (3.1) a fim de provarmos o decaimento exponencial do mesmo, ou seja, que existem constantes $c > 0$ e $\gamma > 0$ tal que para toda solução do problema (3.1) tem-se,

$$E(t) \leq ce^{-\gamma t}E(0); \quad t \geq 0.$$

Note que para o caso $\alpha = 0$ há o decaimento exponencial mesmo sem acrescentar o termo de amortecimento, uma vez que é, em particular, a equação do calor, ou seja,

$$u_t - u_{xx} = 0 \text{ em } (0,1) \times \mathbb{R}_+. \tag{3.46}$$

De fato, compondo (3.46) com $u(t)$ em $L^2(0,1)$, temos:

$$(u_t(t), u(t)) + (-u_{xx}(t), u(t)) = 0.$$

Note que os produtos internos estão bem definidos, pois $u_t(t), -u_{xx}(t), u(t) \in L^2(0,1)$.

Mas,

$$(u_t(t), u(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2$$

e

$$\begin{aligned}
(u_{xx}(t), u(t)) &= \int_0^1 u_{xx}(t,x)u(t,x)dx \\
&= u_x(t,x)u(t,x)|_0^1 - \int_0^1 u_x^2(t,x)dx \\
&= u_x(t,1)u(t,1) - u_x(t,0)u(t,0) - \int_0^1 u_x^2(t,x)dx.
\end{aligned}$$

Como $u(t,1) = 0$ e $u(t,0) = 0$ para $0 \leq \alpha < 1$, segue que:

$$u_x(t,1)u(t,1) - u_x(t,0)u(t,0) = 0.$$

E daí,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = -\int_0^1 u_x^2(t,x)dx \leq 0.$$

Como $E_u(t) = \frac{1}{2}\|u(t)\|_2^2; t \geq 0$ a energia associada à solução u. Assim,

$$\frac{d}{dt}E_u(t) = -\int_0^1 u_x^2(t,x)dx = -\|u_x\|_2^2.$$

Observe, ainda, que para o caso $\alpha = 0$ temos que o espaço $H_a^1(0,1)$ coincide com o espaço $H_0^1(0,1)$ e como estamos em domínios limitados podemos utilizar a desigualdade de Poincaré, assim temos:

$$\frac{d}{dt}E_u(t) \leq -\frac{1}{c}\|u\|_2^2$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}E_u(t) + \gamma E_u(t) \leq 0,$$

onde $\gamma = \frac{2}{c}$; c é a constante de Poincaré.

Multiplicando a desigualdade acima pelo fator integrante $e^{\gamma t}$ teremos,

$$\frac{d}{dt}E_u(t)e^{\gamma t} + \gamma E_u(t)e^{\gamma t} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\gamma t}E_u(t)\right) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t obtemos,

$$E_u(t)e^{\gamma t} - E_u(0)e^{\gamma 0} \leq 0$$

$$\Rightarrow E_u(t) \leq e^{-\gamma t}E_u(0),$$

o que prova o decaimento com taxa exponencial para o caso $\alpha = 0$. Logo, por mais forte razão, quando acrescentamos o termo de amortecimento linear também haverá o decaimento, e neste caso, dizemos que há “over damping”.

Agora, provaremos que há decaimento exponencial para $0 < \alpha < 2$. Para isso nos inspiramos no trabalho de Cavalcanti e Oquendo [9]. Consideremos a função auxiliar $\varphi \in L^\infty(0,1)$ definida da seguinte forma:

$$\begin{cases} \varphi(x) \geq \frac{\delta}{2} & \text{se } x \in a^{-1}([\frac{\delta}{2},1]) \\ \\ \varphi(x) = 0 & x \in a^{-1}([0,\frac{\delta}{2})) \end{cases}$$

onde a função a é a definida anteriormente, isto é, $a(x) = x^\alpha$ e tal que φ satisfaz:

$$\varphi(x) + b(x) \geq \frac{\delta}{2}; \quad \forall x \in (0,1).$$

O próximo resultado desempenha um papel fundamental para garantirmos a taxa de decaimento.

Proposição 3.7. *Seja φ a função auxiliar definida anteriormente. Então para $C > 0$ e para todo $u \in H_a^1(0,1)$ temos:*

$$\int_0^1 \varphi(x)|u(x)|^2 dx \leq C \int_0^1 a(x) u_x^2(x) dx.$$

Antes de mostrarmos que proposição anterior é satisfeita, mostraremos que a desigualdade de Poincaré é válida, também, para funções que se anulam (no sentido do traço) em apenas uma parte da fronteira Γ, conforme enuncia o próximo resultado, uma vez que o utilizaremos para provar a Proposição 3.7. Para isso, consideremos (p,q) um intervalo da reta com p e q finitos e definamos o seguinte espaço

$$H^1_{\Gamma_0}(p,q) = \{u \in H^1(p,q); u(q) = 0\}$$

que é um espaço de Hilbert (ver demonstração na página 102 de [1]) munido com a norma induzida por $H^1(p,q)$.

Agora, consideremos a aplicação $u \in H^1_{\Gamma_0}(p,q) \to \|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)}$, onde

$$\|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} = \int_p^q \left|\frac{d}{dx}u\right|^2 dx.$$

Temos que tal aplicação define uma norma. Para isso basta mostrarmos que a primeira condição de norma é satisfeita, ou seja, que $\|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} = 0$ se, e somente se, $u = 0$, uma vez que as demais condições são satisfeitas, pois $\|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} \geq 0$ para todo $u \in H^1_{\Gamma_0(p,q)}$, $\|\lambda u\|_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} = |\lambda| \|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)}$, basta utilizarmos a definição de norma no espaço $H^1_{\Gamma_0}(p,q)$ e por fim a condição $\|u+v\|_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} \leq \|u\|_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)} + \|v\|_{H^1_{\Gamma_0}(p,q)}$ é consequência da Proposição 1.3 que é a Desigualdade de Minkowski.

Dessa forma, provemos a primeira condição. Suponha que $\|\frac{d}{dx}u\|_{L^2(p,q)} = 0$ então $\frac{d}{dx}u = 0$, logo $u = c$ onde c é uma constante. Como $u(q) = 0$ e (p,q) é convexo segue que $u = 0$ em (p,q). Portanto, a aplicação acima define uma norma.

Lema 3.8. *Seja (p,q) um intervalo da reta com p e q finitos. Então, existe uma constante $c > 0$, tal que*

$$\|u\|_{L^2(p,q)} \leq c \left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L^2(p,q)}; \text{ para todo } u \in H^1_{\Gamma_0}(p,q),$$

onde c só depende de (p,q).

Demonstração: Se $u = 0$ nada temos a provar. Suponhamos então que $u \neq 0$. Assim, mostrar o desejado é equivalente a mostrar que existe $c_2 > 0$ tal que

$$c_2 \leq \left\| \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{\|u\|_{L^2(p,q)}}\right)\right\|_{L^2(p,q)},$$

ou ainda, basta provarmos que existe $c > 0$ tal que $\|\frac{d}{dx}u\|_{L^2(p,q)} \geq c$ para todo $u \in H^1_{\Gamma_0}(p,q)$ com $\|u\|_{L^2(p,q)} = 1$.

Suponhamos o contrário, ou seja, que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in H^1_{\Gamma_0}(p,q)$ com $\|u_n\|_{L^2(p,q)} = 1$, mas

$$\left\|\frac{d}{dx}u_n\right\|_{L^2(p,q)} \leq \frac{1}{n}. \tag{3.47}$$

Tomando o limite na desigualdade anterior quando $n \to +\infty$ resulta que,

$$\lim_{n\to+\infty}\left\|\frac{d}{dx}u_n\right\|_{L^2(p,q)} = 0. \tag{3.48}$$

De (3.47) e do fato que $\|u_n\|_{L^2(p,q)} = 1;$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se

$$\|u_n\|^2_{H^1(p,q)} = \|u_n\|^2_{L^2(0,1)} + \left\|\frac{d}{dx}u_n\right\|^2_{L^2(p,q)} \leq 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2 \tag{3.49}$$

o que implica que $\{u_n\}$ é limitada no espaço topológico $(H^1_{\Gamma_0}(p,q), \|\cdot\|_{H^1(p,q)})$. Como $H^1_{\Gamma_0}(p,q)$ é Hilbert com a topologia induzida por $H^1(p,q)$ então existe $(u_\mu) \subset (u_n)$ e $u \in H^1_{\Gamma_0}$ tal que

$$u_\mu \rightharpoonup u \text{ em } H^1_{\Gamma_0}(p,q). \tag{3.50}$$

Sendo a aplicação $u \in H^1_{\Gamma_0}(p,q) \to \|\frac{d}{dx}u\|$ uma norma, ela é convexa e semi-contínua inferiormente (vide Observação 1.19). Logo, de (3.48) e (3.50) obtemos:

$$\left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L^2(p,q)} \leq \lim_{\mu\to+\infty}\left\|\frac{d}{dx}u_\mu\right\|_{L^2(p,q)} = 0$$

assim $\left\|\frac{d}{dx}u\right\|_{L^2(p,q)} = 0$, e consequentemente, $u = 0$ posto que $\|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0(p,q)}} = \|\frac{d}{dx}u\|_{L^2(p,q)}$.

Por outro lado, em virtude da imersão $H^1(p,q) \hookrightarrow L^2(p,q)$ ser compacta, então de (3.49) após a extração de uma subsequência, caso necessário, obtemos:

$$u_\mu \to u \text{ em } L^2(p,q)$$

o que implica

$$\|u_\mu\|_{L^2(p,q)} \to \|u\|_{L^2(p,q)} \text{ em } L^2(p,q).$$

Como $\|u_\mu\|_{L^2(p,q)} = 1$ segue que $\|u\|_{L^2(p,q)} = 1$, o que é um absurdo, pois $u = 0$, o que prova o lema. $\square$

Agora, demonstraremos a Proposição 3.7.

Demonstração: Utilizaremos argumentos de densidade para provarmos o desejado. Dessa forma, começaremos provando que dado $\psi \in C_0^\infty(0,1)$, temos:

$$\int_0^1 \varphi(x)|\psi(x)|^2 dx \leq c \int_0^1 a(x)|\psi_x(x)|^2 dx.$$

De fato:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \varphi(x)|\psi(x)|^2 dx &= \int_{\text{supp } \varphi} \varphi(x)\psi^2(x)dx \\
&\leq \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \varphi(x)\psi^2(x)dx \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi^2(x)dx \\
&\leq c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi_x^2(x)dx.
\end{aligned}$$

Note que podemos aplicar o Lema anterior, pois $\psi \in H^1_{\Gamma_0}(\frac{\delta}{2},1)$. Com efeito, como $\psi \in C_0^\infty(\frac{\delta}{2},1)$ então $\psi, \psi_x \in C(\frac{\delta}{2},1) \hookrightarrow L^2(\frac{\delta}{2},1)$. Também, $\psi(x) = 0$ quando $x = 1$. Logo, $\psi \in H^1_{\Gamma_0}(\frac{\delta}{2},1)$.

Agora, com o objetivo de mostrar que

$$c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi_x^2(x)dx \leq C \int_0^1 a(x)\psi_x^2(x)dx$$

dividiremos em casos.

<u>1^o caso:</u> $\alpha = 0$.

Se $\alpha = 0$ então $a(x) = 1$ para todo $x \in (\frac{\delta}{2},1) \subset (0,1)$ e dessa forma não há nada a mostrar.

<u>2^o caso:</u> $0 < \alpha < 1$.

Neste caso temos que $a(x) = x^\alpha$ então $a_x(x) = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0$ e daí $a(x)$ é crescente. Assim, para $x \in (\frac{\delta}{2},1)$ teremos:

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \leq a(x) \leq 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi_x^2(x)dx &= c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \frac{a(x)}{a(x)}\psi_x^2(x)dx \\ &\leq c\|\varphi\|_\infty \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha \int_{\frac{\delta}{2}}^1 a(x)\psi_x^2(x)dx \\ &\leq c_1 \int_0^1 a(x)\psi_x^2(x)dx, \text{ onde } c_1 = c\|\varphi\|_\infty \left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha. \end{aligned}$$

3^o caso: $\alpha = 1$.

Sendo $\alpha = 1$ então $a(x) = x$ e portanto $\frac{\delta}{2} \leq a(x) \leq 1$. Procedendo de maneira análoga à realizada anteriormente, teremos:

$$c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi_x^2(x)dx \leq c_2 \int_0^1 a(x)\psi_x^2(x)dx, \text{ onde } c_2 = c\|\varphi\|_\infty \left(\frac{\delta}{2}\right).$$

Vale ressaltar que a constante c_2 é diferente da constante c_1, uma vez que, α está fixado arbitrariamente.

4^o caso: $1 < \alpha < 2$.

Observe que $a_x(x) = \alpha x^{\alpha-1} \geq 0$ o que implica que $a(x)$ é crescente. Logo,

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^\alpha \leq a(x) \leq 1.$$

Agora, procedendo conforme o 2^o caso obtemos:

$$c\|\varphi\|_\infty \int_{\frac{\delta}{2}}^1 \psi_x^2(x)dx \leq c_3 \int_0^1 a(x)\psi_x^2(x)dx, \text{ onde } c_3 = c\|\varphi\|_\infty \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha.$$

Portanto, tomando $C = \max\{1, c_1, c_2, c_3\} = c_3$ tem-se

$$\int_0^1 \varphi(x)\psi^2(x) \leq C \int_0^1 a(x)\psi_x^2(x)dx; \quad \psi \in C_0^\infty(0,1) \text{ e } 0 \leq \alpha < 2.$$

Dado $u \in H_a^1(0,1)$ então como $\overline{C_0^\infty(0,1)} = H_a^1(0,1)$ existe $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\psi_n \to u \text{ em } H_a^1(0,1) \text{ quando } n \to +\infty,$$

ou seja,

$$\left(\int_0^1 (|\psi_n - u|^2 + |\sqrt{a}\psi_{nx} - \sqrt{a}u_x|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0 \text{ quando } n \to +\infty.$$

Então, em particular,

$$\psi_n \to u \text{ em } L^2(0,1)$$

e

$$\sqrt{a}\psi_{nx} \to \sqrt{a}u_x \text{ em } L^2(0,1).$$

Logo, da última convergência e do fato que $\sqrt{a(\cdot)} \in L^\infty(0,1)$ segue que $a\psi_{nx} \to au_x$. Além disso, $(\varphi(x))^{\frac{1}{2}}\psi_n \to (\varphi(x))^{\frac{1}{2}}u$ em $L^2(0,1)$. Com efeito:

$$\begin{aligned}
\|(\varphi(x))^{\frac{1}{2}}\psi_n - (\varphi(x))^{\frac{1}{2}}u\|_2^2 &= \int_0^1 |(\varphi(x))^{\frac{1}{2}}(\psi_n - u)|^2 dx \\
&= \int_0^1 \varphi(x)|\psi_n - u|^2 dx \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_0^1 |\psi_n - u|^2 dx \\
&\to 0
\end{aligned}$$

Assim, resulta,

$$\int_0^1 \varphi(x)u^2(x)dx \leq C\int_0^1 a(x)u_x^2(x)dx \quad \text{para todo } u \in H_a^1(0,1)$$

o que prova o desejado. □

Tendo em vista o exposto acima estamos aptos a mostrar que a energia associada a solução do problema (3.1) decai exponencialmente, para $0 < \alpha < 2$. De fato, já vimos na seção 3.3 do Capítulo 3 que:

$$\frac{d}{dt}E_u(t) = -\int_0^1 a(x)u_x^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx.$$

Em virtude da propriedade da φ e da Proposição 3.7 temos:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_u(t) &\leq -\frac{1}{C}\int_0^1 \varphi(x)u^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx \\
&= -M\int_0^1 (\varphi(x) + b(x))u^2(t,x)dx, \text{ onde } M = \min\left\{\frac{1}{C}, 1\right\} \\
&\leq -\frac{M\delta}{2}\int_0^1 u^2(t,x)dx \\
&= -\gamma E_u(t); \ \gamma = M\delta.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E_u(t) + \gamma E_u(t) \leq 0.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{\gamma t}$ obtemos,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E_u(t)e^{\gamma t} + \gamma E_u(t)e^{\gamma t} &\leq 0 \\ \Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\gamma t}E_u(t)) &\leq 0. \end{aligned}$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 à t temos,

$$e^{\gamma t}E_u(t) - e^{\gamma 0}E_u(0) \leq 0$$

$$\Rightarrow E_u(t) \leq e^{-\gamma t}E_u(0).$$

o que prova o decaimento exponencial.

Observação 3.9. *Temos que $\gamma = M\delta$, onde $M = \min\left\{\frac{1}{C}, 1\right\}$ e $0 < \delta < 1$. Analisando os possíveis casos de M temos que: Se $M = 1$ então $\gamma = \delta$ e δ não depende de u. Portanto, passando o limite no decaimento associado a solução forte, obtemos o decaimento para solução fraca. Caso $M = \frac{1}{C}$, onde $C = c\|\varphi\|_\infty \left(\frac{2}{\delta}\right)^\alpha; 1 < \alpha < 2$ e c é a constante de Poincaré (que não depende de u). Logo, γ também não dependerá de u, e dessa forma, também obtemos o decaimento para solução fraca.*

Capítulo 4

O Problema Não-Linear

Neste capítulo trataremos do Problema Não-Linear,

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{em } (0,1) \times \mathbb{R}_+ \\ u(t,1) = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+ \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{4.1}$$

sendo o dado inicial $u_0 \in L^2(0,1); a(x) = x^\alpha; 0 \leq \alpha < 2; x \in [0,1]$. A função $b \in L^\infty(0,1)$ é tal que $b(x) > b_0 > 0$ para todo $x \in (0, \frac{\delta}{2}); 0 < \delta < 1$ e suponhamos que g satisfaz as seguintes hipóteses:

(H_1) g é globalmente Lipschitz, ou seja,

$$|g(s_1) - g(s_2)| \leq k|s_1 - s_2|; \text{ para todo } s_1, s_2 \in \mathbb{R},$$

para algum $k > 0$.

(H_2) g monótona.

(H_3) $g(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Em outras palavras, a hipótese (H_3) nos diz que g não muda de sinal.

Observe que como consequência de (H_1) e (H_3) temos que $g(0) = 0$.

4.1 Existência e Unicidade de Soluções Clássicas

Nesta seção estudaremos a existência e unicidade de solução clássica via Teoria de Operadores Maximais Monótonos. Para tal, relembremos alguns resultados:

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $(\cdot,\cdot)$ e $\|\cdot\|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H e consideremos $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado de H.

Definição 4.1. *Dizemos que A é um operador monótono se para todo $v \in D(A)$ tivermos $(Av, v) \geq 0$.*

E ainda, A é dito maximal monótono se, for monótono e, além disso, $Im(I + A) = H$, ou seja, para todo $f \in H$, existe $u \in D(A)$ tal que $u + Au = f$.

Considere o problema

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = Fu; & \text{em } [0,T] \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{4.2}$$

onde A é um operador maximal monótono e $F : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ é contínua.

Para o problema (4.2) acima temos a seguinte definição:

Definição 4.2. *Se $u \in C([0,T]; L^2(0,1))$ satisfaz o problema (4.2), a solução u é dita solução generalizada.*

Se $u \in C^1([0,T]; L^2(0,1)) \cap C([0,T]; D(A))$, a solução de (4.2) é dita solução clássica.

Em ambos os casos, u satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$$

O próximo resultado garante a existência e unicidade da solução clássica e generalizada do problema (4.2).

Teorema 4.3. *Seja $F : H \to H$ uma função localmente Lipschitz, ou seja, para todo $M > 0$ existe $L > 0$ tal que $\|u\|_H \leq M$ e $\|v\|_H \leq M$ implica que $\|Fu - Fv\|_H \leq L\|u - v\|_H$.*

Então, para todo $u_0 \in H$ existe u solução generalizada de (4.2) em $[0,T]$ e esta pode ser estendida em uma solução maximal sobre $[0, T_{max})$ com

$$T_{max} = +\infty \text{ ou } T_{max} < +\infty \text{ e } \lim_{t \to T_{max}} \|u(t)\|_H = +\infty$$

Se $u_0 \in D(A)$, a solução é clássica.

Demonstração: Ver [2] □

Temos que o problema

$$\begin{cases} u_t - (a(\cdot)u_x)_x + b(\cdot)g(u) = 0 & \text{em } (0,1)\times[0,T_{max}) \\ u(t,1) = 0 & \\ \text{e } \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{4.3}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + \tilde{A}u = Fu; & \text{em } [0,T_{max}) \\ u(0) = u_0 & \end{cases} \tag{4.4}$$

onde $\tilde{A}u = -(au_x)_x$ e

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(0,1) & \to & L^2(0,1) \\ & u & \mapsto & -b(\cdot)g(u). \end{array}$$

Note que as condições de bordo do problema (4.1) foram incorporadas ao domínio do operador $\tilde{A}$.

Já vimos que $Au = (au_x)_x$ é dissipativo então $-Au = -(au_x)_x = \tilde{A}u$ é monótono. Também, já vimos que, A é gerador infinitesimal de um C_0-semigrupo de contrações em $L^2(0,1)$. Logo, $\lambda I - A$ é inversível para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+$. Tomando $\lambda = 1$ e utilizando o fato que $-A = \tilde{A}$ vem que $I + \tilde{A}$ é sobrejetivo, o que mostra que $\tilde{A}$ é maximal. Portanto, $\tilde{A}$ é um operador maximal monótono.

Mostremos, agora, que

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(0,1) & \to & L^2(0,1) \\ & u & \mapsto & -b(\cdot)g(u). \end{array}$$

está bem definida e é globalmente Lipschitz. Com efeito:

Que F está bem definida é verdade, pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 |Fu|^2 dx &= \int_0^1 |-b(x)g(u)|^2 dx \\ &\leq \|b\|_\infty^2 \int_0^1 |g(u)|^2 dx \\ &= \|b\|_\infty^2 \int_0^1 |g(u) - g(0)|^2 dx \\ &\leq \|b\|_\infty^2 k^2 \int_0^1 |u|^2 dx < \infty. \end{aligned}$$

Agora, sejam $u, v \in L^2(0,1)$. Então:

$$\begin{aligned}
\|Fu - Fv\|_2^2 &= \|-b(\cdot)g(u) + b(\cdot)g(v)\|_2^2 \\
&= \|b(\cdot)(g(u) - g(v))\|_2^2 \\
&\leq \|b\|_\infty^2 \|g(u) - g(v)\|_2^2 \\
&\leq k^2 \|b\|_\infty^2 \|u - v\|_2^2 \\
&= M\|u - v\|_2^2; \quad M = k^2\|b\|_\infty^2,
\end{aligned}$$

o que mostra que F é globalmente Lipschitz.

Sendo F globalmente Lipschitz então F é contínua e localmente Lipschitz. Logo, estamos nas hipóteses do Teorema 4.3 o que implica que u é solução do problema (4.4).

Portanto, para todo $u_0 \in L^2(0,1)$ existe u tal que

$$u \in C([0, T_{max}]; L^2(0,1)).$$

Se $u_0 \in D(A)$ existe u tal que

$$u \in C^1([0, T_{max}]; L^2(0,1)) \cap C([0, T_{max}]; D(A)).$$

Agora, nosso objetivo é estender a solução clássica obtida anteriormente de 0 ao infinito.

Mostraremos, primeiramente, a dependência contínua dos dados iniciais, e em seguida, que se o dado inicial for nulo então a solução é nula, a fim de utilizarmos tais fatos e mostrarmos que a solução pode ser estendida. De fato:

Dependência contínua dos dados iniciais: Sejam $\tilde{u}_0, u_0 \in D(A)$ então existem soluções clássicas;

$$\tilde{u}(t) = S(t)\tilde{u}_0 + \int_0^t S(t-s)F(\tilde{u}(s))ds, \text{ para todo } t \in [0, T_{max})$$

e

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds, \text{ para todo } t \in [0, T_{max}).$$

que satisfazem o problema (4.3).

Observe que

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_2^2 &= \|S(t)(\tilde{u}_0-u_0)+\int_0^t S(t-s)(F(\tilde{u}(s))-F(u(s)))ds\|_2^2 \\
&\leq 2\left(\|S(t)(\tilde{u}_0-u_0)\|_2^2+\|\int_0^t S(t-s)(F(\tilde{u}(s))-F(u(s)))ds\|_2^2\right).
\end{aligned}$$

Analisaremos, agora, as parcelas que compõem o lado direito da desigualdade.

<u>Primeira Parcela</u>: $\|S(t)(\tilde{u}_0-u_0)\|^2 \leq \|\tilde{u}_0-u_0\|_2^2$, pois $S(t)$ é semigrupo de contrações.

<u>Segunda parcela</u>:

$$\begin{aligned}
\left\|\int_0^t S(t-s)[F(\tilde{u}(s))-F(u(s))]ds\right\|_2^2 &= \left\|\int_0^t S(t-s)[-b(\cdot)g(\tilde{u}(s))+b(\cdot)g(u(s))]ds\right\|_2^2 \\
&\leq \left(\int_0^t \|S(t-s)[-b(\cdot)g(\tilde{u}(s))+b(\cdot)g(u(s))]\|_2 ds\right)^2 \\
&\leq \left(\int_0^t \|-b(\cdot)g(\tilde{u}(s))+b(\cdot)g(u(s))\|_2 ds\right)^2 \\
&= \left(\int_0^t \|b(\cdot)(g(\tilde{u}(s)-g(u(s)))\|_2 ds\right)^2 \\
&\leq \left[\left(\int_0^t 1^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t \|b(x)(g(\tilde{u}(s))-g(u(s)))\|_2^2 ds\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2 \\
&= t\left(\int_0^t \|b(x)(g(\tilde{u}(s))-g(u(s)))\|_2^2 ds\right) \\
&\leq T\|b\|_\infty^2 \int_0^t \|g(\tilde{u}(s))-g(u(s))\|_2^2 ds \\
&\leq T\|b\|_\infty^2 k^2 \int_0^t \|\tilde{u}(s)-u(s)\|_2^2 ds, \text{ onde } T < T_{max}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_2^2 \leq 2\|\tilde{u}_0-u_0\|_2^2 + c\int_0^t \|\tilde{u}(s)-u(s)\|_2^2 ds, \text{ onde } c = 2T\|b\|_\infty^2 k^2.$$

Aplicando o Lema de Gronwall para integrais temos,

$$\begin{aligned}
\|\tilde{u}(t)-u(t)\|_2^2 &\leq 2\|\tilde{u}_0-u_0\|_2^2 e^{(c\int_0^t 1ds)} \\
&= 2\|\tilde{u}-u_0\|_2^2 e^{ct} \\
&\leq 2\|\tilde{u}_0-u_0\|_2^2 e^{cT}; t < T, \text{ onde } T \text{ é fixado }.
\end{aligned}$$

Portanto, para dados iniciais próximos temos soluções próximas, ou seja, há dependência contínua dos dados inicias.

Mostraremos, agora, que se o dado inicial é nulo então a solução do problema (4.3) é nula. Com efeito, seja $u_0 = 0$ então,

$$u(t) = \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_2 &= \left\| \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds \right\|_2 \\
&\leq \int_0^t \|S(t-s)F(u(s))\|_2 ds \\
&\leq \int_0^t \|F(u(s))\|_2 ds. \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

Note que $F(0) = 0$, pois $F(0) = -b(x)g(0)$ e $g(0) = 0$. Logo, podemos reescrever (4.5) da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\|u(t)\|_2 &\leq \int_0^t \|F(u(s)) - F(0)\|_2 ds \\
&\leq k\int_0^t \|u(s)\|_2 ds.
\end{aligned}$$

Aplicando o Lema de Gronwall para integrais temos,

$$\|u(t)\|_2 \leq 0.e^{(\int_0^t 1ds)} = 0$$

o que implica que $\|u(t)\|_2 = 0$ e portanto $u(t) = 0$.

Do exposto acima estamos aptos a estender a solução clássica de 0 ao infinito. De fato: Se $T_{max} = +\infty$ nada temos a fazer. Suponhamos, por contradição que, $T_{max} < \infty$. Então,

$$\|\tilde{u}(t)\|_2 \leq e^{cT}\|\tilde{u}_0\|_2.$$

Tomando o limite quando $t \to T_{max}$ segue que

$$\lim_{t\to T_{max}} \|\tilde{u}(t)\|_2 \leq e^{cT}\|\tilde{u}_0\|_2 < \infty$$

absurdo. Logo, a solução clássica pode ser estendida de $[0, +\infty)$.

Resta-nos provar a unicidade da solução clássica. Com efeito, sejam u e v soluções clássicas do problema (4.1). Da dependência contínua segue que

$$\|u(t) - v(t)\|_2^2 \leq 2e^{cT}\|u_0 - u_0\|_2^2 = 0.$$

Logo, $u(t) = v(t)$ para todo $t \in [0, +\infty)$. Portanto $u = v$.

4.2 Existência e Unicidade de Soluções Generalizadas como limite de Soluções Clássicas

Nesta seção vamos provar a existência e unicidade de soluções generalizadas globais, como sendo o limite de soluções clássicas.

Seja $u_0 \in L^2(0,1)$, então existe uma solução generalizada

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))ds; \text{ para todo } t \in [0, t_{max})$$

onde

$$\begin{array}{rccc} F: & L^2(0,1) & \to & L^2(0,1) \\ & u & \to & -b(\cdot)g(u). \end{array}$$

Como $D(A)$ é denso em $L^2(0,1)$ existe $(u_{\mu_0}) \subset D(A)$ tal que

$$u_{\mu_0} \to u_0 \text{ em } L^2(0,1) \text{ quando } \mu \to +\infty. \tag{4.6}$$

Logo, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ considere $\{u_\mu\}$ a sucessão de soluções clássicas associada ao dado inicial $u_{\mu 0}$. Assim,

$$u_\mu \in C^1([0, T_{max}]; L^2(0,1)) \cap C([0, T_{max}]; D(A))$$

e u_μ satisfaz,

$$\begin{cases} u'_\mu - (a(\cdot)(u_{\mu x}))_x + b(\cdot)g(u_\mu) = 0 & \text{em } (0,1) \times (0, T_{max}) \\ u_\mu(t,1) = 0 & \text{em } (0, T_{max}) \\ \text{e } \begin{cases} u_\mu(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a(\cdot)u_\mu)_x(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & \\ u_\mu(0,x) = u_{\mu 0}(x) & x \in (0,1). \end{cases}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned} \|u_\mu(t) - u(t)\|_2^2 &= \left\| S(t)(u_{\mu 0} - u_0) + \int_0^t S(t-s)[F(u_\mu(s)) - F(u(s))]ds \right\|_2^2 \\ &\leq 2\left(\|S(t)(u_{\mu 0} - u_0)\|_2^2 + \left\| \int_0^t S(t-s)[F(u_\mu(s)) - F(u(s))]ds \right\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Procedendo conforme fizemos para obter o resultado de dependência contínua dos dados iniciais concluímos que,

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_2^2 \leq 2\|u_{\mu 0} - u_0\|_2^2 + c\int_0^t \|u_\mu - u\|_2^2 ds; \quad c = 2T\|b\|_\infty^2 k^2.$$

Logo, pelo Lema de Gronwall para integrais temos,

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_2^2 \leq 2\|u_{\mu 0} - u_0\|_2^2 e^{cT}; t < T, \text{ onde } T \text{ é fixado},$$

donde decorre que

$$u_\mu \to u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1))$$

em virtude da convergência dada em (4.6), o que mostra a existência de soluções generalizadas como limite de soluções clássicas.

Para provarmos que a solução generalizada pode ser estendida a todo o intervalo $[0,+\infty)$, basta procedermos conforme fizemos na seção anterior quando estendemos a solução clássica de 0 ao infinito.

Quanto a unicidade, segue de maneira análoga à realizada quando provamos a unicidade da solução clássica.

4.3 Decaimento Exponencial

Nesta seção mostraremos que a energia associada ao problema com o termo de amortecimento não linear decai sob taxa exponencial. Para tal precisaremos acrescentar hipóteses sobre a função g. A hipótese que acrescentaremos sobre a g é:

$$ks^2 \leq g(s)s \leq k_1 s^2, \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \text{ e } k, k_1 > 0. \tag{4.7}$$

De modo análogo ao realizado na seção 3.4 do Capítulo 3 temos que para o caso $\alpha = 0$ há o decaimento exponencial mesmo sem acrescentar o termo de amortecimento não linear, posto que é, em particular, a equação do calor em $(0,1)\times\mathbb{R}_+$. Logo, acrescentando o termo de amortecimento o mesmo decai sob taxa exponencial por mais forte razão, ocorrendo o fenômeno conhecido como "over damping".

Resta-nos mostrar que para $0 < \alpha < 2$ o problema com o termo de amortecimento não linear decai exponencialmente.

Compondo a primeira equação do problema não linear (4.1) com $u(t)$ em $L^2(0,1)$, temos:

$$(u_t(t), u(t)) - ((a(\cdot)u_x)_x(t), u(t)) + (b(\cdot)g(u)(t), u(t)) = 0$$

Mas,

$$(u_t(t), u(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2$$

e

$$((a(\cdot)u_x)_x(t), u(t)) = -\int_0^1 a(x)u_x^2(t,x)dx.$$

Assim, utilizando a Proposição 3.7, a propriedade da φ e a hipótese adicional da g, isto é, a desigualdade (4.7), segue que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 &= -\int_0^1 a(x)u_x^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)g(u(t,x))u(t,x)dx \\
&\leq -\frac{1}{C}\int_0^1 \varphi(x)u^2(t,x)dx - \int_0^1 b(x)(ku^2)(t,x)dx \\
&= -\frac{1}{C}\int_0^1 \varphi(x)u^2(t,x)dx - k\int_0^1 b(x)u^2(t,x)dx \\
&\leq -\tilde{c}\left(\int_0^1 (\varphi(x)+b(x))u^2(t,x)dx\right), \quad \text{onde } \tilde{c} = \min\left\{\frac{1}{C}, k\right\} \\
&\leq -\frac{\delta}{2}\tilde{c}\int_0^1 u^2(t,x)dx \\
&= -\gamma E_u(t) \text{ onde } \gamma = \delta\tilde{c}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}E_u(t) + \gamma E_u(t) \leq 0.$$

Multiplicando a desigualdade acima por $e^{(\gamma t)}$ obtemos,

$$\frac{d}{dt}E_u(t)e^{\gamma t} + \gamma E_u(t)e^{\gamma t} \leq 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(e^{\gamma t}E_u(t)) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade anterior de 0 a t temos,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{d}{ds}(e^{\gamma t}E_u(s))ds \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad e^{\gamma t}E_u(t) - e^{\gamma .0}E_u(0) \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad e^{\gamma t}E_u(t) - E_u(0) \leq 0 \\
&\Rightarrow \quad E_u(t) \leq e^{-\gamma t}E_u(0).
\end{aligned}$$

o que prova que de fato há o decaimento exponencial.

Referências Bibliográficas

[1] BARBIERI, D.: **Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel**. 2010. 167f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Estadual de Maringá, PR. 2010.

[2] BRÉZIS, H.: **Autumn Course On Semigroups, Theory and Application.** Paris, Masson, 1983.

[3] BRÉZIS, H.: **Analyse Fonctionnelle (Théore et Applications).** Paris, Masson, 1983.

[4] CAMPITI, M.; METAFUNE, G.; PALLARA, D.: **Degenerate Self-adjoint Evolution Equations on the Unit Interval** . Springer-Verlag New York Inc, Semigroup Forum, vol 57, p.01 - 36, 1998.

[5] CANNARSA, P.; MARTINEZ, P.; VANCOSTENOBLE, J.: **Carlemam Estimates For A Class Of Degenerate Parabolic Operators** . Society for Industrial and Applied Mathematics, vol 47, N^o 1, p.01 - 19, 2008.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N; KOMORNIK, V.: **Introdução à Anàlise Funcional**. Eduem, Maringá, 2011.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Introdução à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Eduem, Maringá, 2009.

[9] CAVALCANTI, M. M.; OQUENDO, H. P.: **Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation**. SIAM J. Control Optim., v. 42, pp. 1310-1324, 2003.

[10] CODDINGTON, E; LEVINSON, N.: **Theory of Ordinary Differential Equations**, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[11] EVANS, L. C.: **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

[12] KREYSZIG, E.: **Introductory functional analysis with applications**. Istituto di Analisi Matematica, Universita Di Torino, 1989.

[13] LIU, Z. & ZHENG, S.: **Semigroups associated with dissipative systems,** Chapman & Haal/CRC Research Notes in Mathematics v. 398, Boca Raton, FL, 1999.

[14] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A Integral de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[15] PAZY, A.: **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations,** Applied Mathematical Sciences v. 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[16] RIVERA, J. E. M.: **Estabilização de Semigrupos e Aplicações,** Séries de Métodos Matemáticos, Rio de janeiro, 2008.

[17] SANTOS, C. G.: **Estimativas de Carleman para uma classe de operadores parabólicos que podem degenerar**. 2009. 95f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Estadual de Maringá, PR.2009.

[18] VIANA, A., LEAL, A.: **Desigualdade de Gronwall.** Universidade Estadual do Sergipe; DMAI, 2010.

[19] ZEIDLER, E.: **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, (1990).

[20] ZHENG, S.: **Nonlinear evolution equations,** Chapman & Haal/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics v. 133, Boca Raton, FL, 2004.