PONTOS FIXOS EM CONES DE ESPAÇOS DE BANACH E UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE QUARTA ORDEM

André Luís Machado Martinez

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Ma To Fu

Maringá - PR

2006

PONTOS FIXOS EM CONES DE ESPAÇOS DE BANACH E UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL DE QUARTA ORDEM

André Luís M. Martinez

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Ma To Fu - UEM ....
(Orientador)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFV ....

Prof. Dr. Luiz A. Vieira de Carvalho - UEM ....

Prof. Dr. Maurício Luciano Pelicer - UEM ....

Maringá

Fevereiro 2006

Dedico este trabalho em primeiro lugar a Deus,
e aos meus pais e ao meu irmão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, aos meus pais e familiares, aos meus amigos que dentre os quais destaco: Emerson, Carlos, Eduardo, Evandro, Gilson, Marieli e a Chiara. Que sempre estiveram de uma maneira ou outra me ajudando.

Agradeço em especial ao professor Ma To Fu pela atenção, compreensão e tempo dedicado.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo sobre os teoremas de ponto fixo de Krasnoselskii para cones em espaços de Banach e suas aplicações. A nossa principal contribuição é o estudo, utilizando os teoremas de Krasnoselskii, da existência de soluções positivas de problemas de contorno de quarta ordem do tipo

$$u^{iv} - M(\int_0^L u'^2\, dx)u'' = f(x, u, u'),$$

$$u(0) = u''(0) = u(L) = 0, \quad u''(L) = g(u'(L)),$$

onde M, f, g são funções possivelmente não lineares.

Abstract

In this dissertation we study the Krasnoselskii's fixed point theorems to cones in ordered Banach spaces and its applications. Our main contribution is the use of the Krasnoselskii's fixed point theorem in the search of positive solutions of the fourth order boundary value problem

$$u^{iv} - M(\int_0^L u'^2\,dx)u'' = f(x,u,u'),$$

$$u(0) = u''(0) = u(L) = 0, \quad u''(L) = g(u'(L)),$$

where M, f, g are possibly nonlinear functions.

Sumário

Introdução

A teoria de pontos fixos é uma das ferramentas mais comuns na análise de problemas não lineares. A sua utilização no estudo de equações diferenciais e integrais é bem conhecida e é tema central em diversos livros, como por exemplo, em Agarwal-Meehan-O'Regan [2] ou Zeidler [14].

Após a publicação do livro de D. Guo e V. Lakshmikantham [8], sobre teoremas de pontos fixos em cones de espaços de Banach, houve um grande progresso no estudo de soluções positivas para equações diferenciais ordinárias de segunda ordem. Guo e Lakshmikantham mostraram novas maneiras de construir cones de funções positivas de forma a permitir a aplicação dos teoremas de ponto fixo de Krasnoselskii [9].

No Capítulo I estudamos os teoremas de ponto fixo de Banach, Brouwer e Schauder. A apresentação é baseado no livro de Agarwal, Meehan e O'Regan [2].

No Capítulo II estudamos uma teoria de aplicações compactas essenciais (ver Definição 2.1.1), que em seguida é utilizada para provar a Alternativa de Leray-Schauder e os teoremas de Krasnoselskii de compressão e expansão de cones em espaços de Banach. Mais uma vez seguimos o texto [2].

No Capítulo III apresentamos duas aplicações da teoria desenvolvida no Capítulo II. A primeira, mais simples, se refere ao problema de valor de contorno de quarta ordem:

$$\begin{cases} u^{iv}(x) = f(x, u(x)), \quad 0 < x < L, \\ u(0) = u(L) = u''(0) = u''(L) = 0, \end{cases}$$

onde $f : [0, L] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua. A existência duas soluções positivas é discutida combinando os teoremas de Krasnoselskii e a Alternativa de Leray-Schauder.

A segunda aplicação, apresentada na Seção 3.2, se refere a uma equação de quarta ordem envolvendo termos não-locais e termos não lineares em u' do tipo:

$$u^{iv}(x) - M\left(\int_0^L u'^2\,dx\right)u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad 0 < x < L,$$

com condições de fronteira não lineares

$$u(0) = u''(0) = u(L) = 0, \quad u''(L) = g(u'(L)),$$

onde f, g, M são funções contínuas. A existência de soluções é provada com o uso do teorema de Krasnoselskii em cones de funções positivas côncavas.

Os resultados referente a Seção 3.2 são originais e complementam os estudos desenvolvidos em Bai e Wang [5] e Ma [12].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos resultados e definições básicas que serão usadas nos próximos capítulos, e também enunciaremos e demonstraremos alguns dos principais teoremas de ponto fixo.

1.1 Definições Básicas

Definição 1.1.1 *Diz-se que* $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função escada quando existir uma decomposição* D *do intervalo* (a,b)*, tal que* u *é constante em cada subintervalo* $I_k = (x_{k-1}, x_k), k = 1, 2, ..., n,$ *de* D*. A decomposição* D *diz-se associada à função escada* u*, sendo claro que* D *não é univocamente determinado para cada* u*.*

Definição 1.1.2 *Diz-se que uma função* $u : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *é mensurável quando* u *for o limite quase sempre de uma sucessão de funções escada.*

Definição 1.1.3 *Seja* p *um número real tal que* $1 \leq p < \infty$*. Representaremos por* $L^p(a,b)$ *a classe de todas as funções reais mensuráveis* u *definidas em* (a,b) *tais que* $|u|^p$ *é integrável a Lebesgue.*

Como podemos ver em [15], os espaços $L^p(a,b)$ são espaços de Banach com a norma

$$\|u\|_p = \left(\int_a^b |u(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

Definição 1.1.4 *Um conjunto C é convexo, se dados dois pontos, então o segmento que os une também está contido em C, ou seja, se $x, y \in C$ então*

$$tx + (1-t)y \in C \text{ para todo } t \in [0,1].$$

Definição 1.1.5 *Dois espaços topológicos X e Y são ditos $homeomorfos$ se existe uma aplicação bijetora $f : X \longrightarrow Y$ tal que f e f^{-1} são contínuas.*

Definição 1.1.6 *Dizemos que um espaço topológico X tem a propriedade do ponto fixo se toda aplicação contínua $f : X \longrightarrow X$ tem um ponto fixo.*

Definição 1.1.7 *Um subconjunto A de um espaço de topológico X é um retrato de X, se existe uma aplicação contínua $r : X \longrightarrow A$ onde $r(a) = a$, para todo $a \in A$. A função r é chamada retração.*

Definição 1.1.8 *Dado $A \subset \mathbb{R}^n$, uma função contínua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita de classe C^1, se possui uma extensão em um aberto contendo A, onde f é continuamente diferenciável.*

Definição 1.1.9 *Seja (X,d) um espaço métrico. Uma aplicação $F : X \longrightarrow X$ é Lipschitiziana, se existe uma constante $\alpha \geq 0$ tal que*

$$d(F(x), F(y)) \leq \alpha d(x,y) \text{ para todo } x, y \in X. \tag{1.1}$$

Observação 1.1.10 *Notemos que uma aplicação Lipschitiziana é necessariamente contínua. A menor constante α, para o qual (1.1) ocorre é dita constante de Lipschitz para F e é denotada por L. Se $L < 1$ dizemos que F é uma contração, quando $L = 1$, dizemos que F é não expansiva.*

1.2 Teorema de Banach

Nesta seção trataremos de um dos mais conhecidos teoremas de ponto fixo o teorema da contração de Banach.

Teorema 1.2.1 *(Teorema da contração de Banach) Sejam (X, d) um espaço métrico completo e $F : X \longrightarrow X$ uma contração com constante Lipschitziana L. Então F tem um único ponto fixo $u \in X$. Além disso, para todo $x \in X$ temos*

$$\lim_{n\to\infty} F^n(x) = u,$$

com

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x)).$$

Demonstração: Primeiro mostraremos a unicidade do ponto fixo. Suponha que existam $x, y \in X$ tais que $x = F(x)$ e $y = F(y)$. Então

$$d(x, y) = d(F(x), F(y)) \leq Ld(x, y),$$

portanto $d(x, y) = 0$.

Para mostrar a existência do ponto fixo selecionamos $x \in X$. Pimeiramente mostraremos que $\{F^n(x)\}$ é uma seqüência de Cauchy. Observemos que para $n \in \{0, 1, ...\}$

$$d(F^n(x), F^{n+1}(x)) \leq Ld(F^{n-1}(x), F^n(x)) \leq ... \leq L^n d(x, F(x)).$$

Deste modo para $m > n$ onde $n \in \{0, 1, 2, ...\}$,

$$\begin{aligned} d(F^n(x), F^m(x)) &\leq d(F^n(x), F^{n+1}(x)) + d(F^{n+1}(x), F^m(x)) \\ &\quad + ... + d(F^{m-1}(x), F^m(x)) \\ &\leq L^n d(x, F(x)) + ... + L^{m-1} d(x, F(x)) \\ &\leq L^n d(x, F(x))[1 + L + L^2 + ...] \\ &= \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x)). \end{aligned}$$

Isto é, para $m > n, n \in \{0, 1, ...\}$,

$$d(F^n(x), F^m(x)) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x)). \tag{1.2}$$

Ou seja mostramos que $\{F^n(x)\}$ é uma seqüência de Cauchy e sendo X completo, existe $u \in X$ tal que $\lim_{n \to \infty} F^n(x) = u$. Além disso, a continuidade de F implica que

$$u = \lim_{n \to \infty} F^{n+1}(x) = \lim_{n \to \infty} F(F^n(x)) = F(u),$$

portanto u é um ponto fixo de F. Finalmente fazendo $m \longrightarrow \infty$ em (1.2) obtemos

$$d(F^n(x), u) \leq \frac{L^n}{1-L} d(x, F(x)).$$

□

1.3 Teorema de Brouwer

Nosso próximo passo será mostrar alguns resultados preliminares que serão importantes para a demonstração do teorema de ponto fixo de Brouwer.

Teorema 1.3.1 *Se X tem a propriedade do ponto fixo e X é homeomorfo a Y, então Y tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Seja $h : X \longrightarrow Y$ um homeomorfismo e seja $g : Y \longrightarrow Y$ uma aplicação contínua. Note que

$$h^{-1} \circ g \circ h : X \longrightarrow X,$$

é contínua. Como X tem a propriedade do ponto fixo, então existe $x_0 \in X$ tal que

$$h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0.$$

Logo $g(y_0) = y_0$ onde $y_0 = h(x_0)$. □

Teorema 1.3.2 *Se X tem a propriedade do ponto fixo, e A é um retrato de X, então A tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Sejam $f : A \longrightarrow A$ uma função contínua, e $r : X \longrightarrow A$ uma retração, notemos primeiramente que $f \circ r : X \longrightarrow A \subset X$ é contínua, e como X tem a propriedade do ponto fixo, então existe $x_0 \in X$, tal que $(f \circ r)(x_0) = x_0$, agora como $(f \circ r)(x_0) \in A \Rightarrow x_0 \in A \Rightarrow r(x_0) = x_0 \Rightarrow f(x_0) = x_0$. $\square$

Apartir deste ponto denotaremos o produto interno $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, e a norma $\|x\| = \langle x, x\rangle^{\frac{1}{2}}$ para $x, y \in \mathbb{R}^n$, a bola unitária fechada $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ e a esfera unitária $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; \|x\| = 1\}$.

Teorema 1.3.3 *Sejam A um subconjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 sobre A. Então existe constante $L \geq 0$ (constante de Lipschitz) com $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ para todo $x, y \in A$.*

Demonstração: Da desigualdade do Valor Médio (ver [17]), obtemos que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\| \sup_{0<t<1} \|f'(tx + (1-t)y)\|,$$

então sendo f é de classe C^1, segue que f' é limitada sobre A, donde concluimos o resultado. $\square$

Teorema 1.3.4 *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ o fecho de um aberto conexo, e $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 sobre A. Então existe intervalo $(-\varepsilon, \varepsilon)$, para algum $\varepsilon > 0$, no qual a função $\phi : t \longmapsto vol(f_t(A))$ é um polinômio de grau menor igual a n, aqui $f_t : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dada por $f_t(x) = x + tF(x)$, e vol refere-se ao volume n-dimensional de Lebesgue.*

Demonstração: Ver [7] $\square$

Definição 1.3.5 *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$. Uma função (campo vetorial) $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita regular se*

$$f(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in A,$$

e normada se

$$\|f(x)\| = 1, \text{ para todo } x \in A.$$

O campo $f : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é tangente a S^{n-1} se

$$\langle x, f(x) \rangle = 0 \text{ para todo } x \in S^{n-1}.$$

Teorema 1.3.6 *Seja $F : S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo vetorial normal de classe C^1, e tangente a S^{n-1}. Então para $t > 0$ suficientemente pequeno tem-se:*

$$f_t(S^{n-1}) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}} S^{n-1}, \text{ onde } f_t : x \longmapsto x + tF(x).$$

Demonstração: Consideremos

$$F^\star(x) := \|x\| F(\frac{x}{\|x\|}) \text{ para } x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\},$$

e

$$A := \{x \in \mathbb{R}^n; \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2}\}.$$

Seja $|t| < min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{L}\}$, onde L é a constante de Lipschtz para $F^\star$ sobre A (teorema 1.3.3). Fixemos $z \in S^{n-1}$, e definimos $G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$G(x) := z - tF^\star(x).$$

Como $\|F(y)\| = 1, \forall y \in S^{n-1}$ e $|t| < \frac{1}{3}$, então $G(A) \subset A$, de fato se $w \in G(A) \Rightarrow \exists x \in A($ logo $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2}),$ tal que $w = z - tF^\star(x)$, como

$$\|w\| = \|z - t\|x\|F(\frac{x}{\|x\|})\| \leq \|z\| + |t|\|x\| \leq 1 + \frac{1}{3}\|x\| \leq \frac{3}{2},$$

de maneira análoga obtemos $\|w\| \geq \frac{1}{2}$. Assim $w \in A$, e portanto $G : A \longrightarrow A$ é uma contração. De fato,

$$\|G(x) - G(y)\| = |t|\|F^\star(x) - F^\star(y)\| \leq |t|L\|x - y\| < \|x - y\|.$$

Do teorema de Banach (teorema 1.2.1) segue que G possui ponto fixo $x_0 \in A$, tal que $G(x_0) = x_0$, então

$$x_0 + tF^\star(x_0) = z. \tag{1.3}$$

Como $z \in S^{n-1}$, então $\langle z, z\rangle = 1$ e $\|F(u)\| = 1$ para $u \in S^{n-1}$ e $\langle v, F(v)\rangle = 0$ para todo $v \in S^{n-1}$, e da equação (1.3), concluimos que

$$\|x_0\| = (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}}.$$

Tomando $y = \frac{x}{\|x\|}$ então $y \in S^{n-1}$, da última igualdade temos $x_0 = \frac{y}{(1+t^2)^{\frac{1}{2}}}$, substituindo em (1.3) temos

$$y + tF(y) = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} z.$$

Assim para $|t| < min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{L}\}$, e $z \in S^{n-1}$ existe $y \in S^{n-1}$ tal que

$$f_t(y) = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} z.$$

Conseqüentemente

$$f_t(S^{n-1}) \supset (1 + t^2)S^{n-1}.$$

Para provar a outra inclusão basta observar que todo $v = (1 + t^2)^{-\frac{1}{2}} f_t(u)$ pertence a S^{n-1}, para todo $u \in S^{n-1}$, então

$$f_t(u) = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} v \in (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} S^{n-1}.$$

$\square$

Teorema 1.3.7 *Seja $k \in \{1, 2, ...\}$, então não existe um campo vetorial normado de classe C^1 tangente a S^{2k}.*

Demonstração: Se existe campo F de classe C^1 tangente a S^{2k}. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, tais que, $0 < a < 1 < b$, e estendemos F por $F^\star$, como no teorema 1.3.6, no domínio $A = \{x \in \mathbb{R}^n; a \leq \|x\| \leq b\}$, sendo F tangente a S^{2k} então $F^\star$ é tangente a toda esfera concêntrica contida em A. Tomando $f_t(x) := x + tF^{\star}(x)$ no teorema 1.3.6, tem-se

$$f_t(A) = (1+t^2)^{\frac{1}{2}}A,$$

para $t > 0$ suficientemente pequeno. Conseqüentemente

$$Vol(f_t(A)) = (1+t^2)^{\frac{2k+1}{2}}Vol(A).$$

Agora $(1+t^2)^{\frac{2k+1}{2}}$ não é um polinômio. O que contradiz o teorema 1.3.4, logo não existe tal campo. $\square$

Teorema 1.3.8 *Seja $k \in \{1, 2, ...\}$, então não existe campo vetorial contínuo e regular sobre S^{2k}.*

Demonstração: Se existe campo F nas hipóteses acima, então $F(x) \neq 0$ para todo $x \in S^{2k}$, logo está definido

$$m = min\{\|F(x)\|; x \in S^{2k}\} > 0,$$

pois F é contínua e S^{2k} é compacto, do teorema da aproximação de Weierstrass (ver [16]) (aplicado a cada componente de F). Logo existe campo vetorial $P : S^{2k} \longrightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$, tal que

$$\|P(x) - F(x)\| < \frac{m}{2} \text{ para todo } x \in S^{2k},$$

onde cada componente de P é um polinômio. Assim o campo P é de classe C^{∞} e P é regular, pois

$$\|P(x)\| \geq \|F(x)\| - \|P(x) - F(x)\| > \frac{m}{2}, \text{ para todo } x \in S^{2k}.$$

Definimos o campo Q por

$$Q(x) := P(x) - \langle P(x), x\rangle\, x, \text{ para cada } x \in S^{2k}.$$

Logo Q é de classe C^∞ e Q é tangente a S^{2k}, note também que para cada $x \in S^{2k}$ temos

$$\begin{aligned}
\|Q(x)\| &\geq \|P(x)\| - \|Q(x)\| \\
&> \frac{m}{2} - |\langle P(x), x\rangle| \\
&= \frac{m}{2} - |\langle P(x) - F(x), x\rangle| \\
&\geq \frac{m}{2} - \|P(x) - F(x)\| > 0.
\end{aligned}$$

Assim o campo $\frac{Q}{\|Q\|}$ contradiz o teorema 1.3.7, e portanto não existe campo contínuo e tangente regular sobre S^{2k} $\square$

Antes de demonstrarmos o teorema de Brouwer faremos algumas observações. Podemos identificar $\mathbb{R}^n$ como um subspaço do $\mathbb{R}^{n+1}$, onde cada ponto $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ com $x = (x_1, ..., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Assim todo ponto do $\mathbb{R}^{n+1}$ pode ser representado por (x, x_{n+1}) com $x \in \mathbb{R}^n$ e $x_{n+1} \in \mathbb{R}$.

A esfera unitária $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ pode ser dividida em dois hemisférios, o superior

$$S_+{}^n := \{(x, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \geq 0\},$$

e o inferior

$$S_-{}^n := \{(x, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}.$$

A esfera unitária do $\mathbb{R}^{n-1}$

$$S^{n-1} := S_+{}^n \cap S_-{}^n,$$

é o equador de S. Sejam $e_{n+1} := (0, ..., 0, 1)$ o pólo norte, e $-e_{n+1} := (0, ..., 0, -1)$ o pólo sul. A projeção estereográfica (de e_{n+1} para S^n) é a plicação $S_+ : \mathbb{R}^n \longrightarrow S^n$ definida por

$$S_+(x) := \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Esta função é de classe C^∞, e transforma B^n em $S_-{}^n$. Além disso $S_+(x) = x \quad \forall x \in S^{n-1} \subset S^n$. Definimos a projeção estereográfica S_- (de $-e_{n+1}$ para S^n) por

$$S_-(x) := \left(\frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2}\right), \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Teorema 1.3.9 *(Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) A bola fechada unitária B^n, no $\mathbb{R}^n$, tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Primeiramente provaremos para $n = 2k$. Se existe uma função contínua $f : B^{2k} \longrightarrow B^{2k}$ que não possui ponto fixo, então definimos o campo vetorial

$$G(x) := x - f(x).$$

Imediatamente G é regular sobre B^{2k}, e para todo $x \in S^{2k-1}$ tem-se

$$\langle G(x), x\rangle = 1 - \langle x, f(x)\rangle > 0, \forall \quad x \in S^{2k-1}.$$

Agora seja $F : B^{2k} \longrightarrow B^{2k}$ definida por

$$F(x) := x - \left(\frac{1 - \|x\|^2}{1 - \langle x, f(x)\rangle}\right) f(x).$$

Note que F está bem definida. Se $F(x) = 0$, para $x \in B^{2k}$, então $0, x$ e $f(x)$ são colineares, e portanto

$$\langle x, f(x)\rangle\, x = \|x\|^2 f(x). \tag{1.4}$$

Logo para $x \in B^{2k}$, tal que $F(x) = 0$ concluimos que $x = f(x)$. Do que foi assumido F é regular sobre B^{2k} e é claro que $F(x) = x$ se $x \in S^{2k-1}$.

Para todo $x \in B^{2k}$, consideremos o conjunto $\{x + tF(x); t \in [0, 1]\}$. A imagem deste conjunto por S_+ é um arco diferencial com ponto inicial sobre ${S_-}^{2k}$. Definimos o campo de vetores T_- sobre ${S_-}^{2k}$ por

$$\begin{aligned} T_-(y) &:= \left\{\frac{d}{dt} S_+(x + tF(x))\right\} |_{t=0} \\ &= \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2}((1 + \|x\|^2)F(x) - 2\langle x, F(x)\rangle\, x, 2\langle x, F(x)\rangle), \end{aligned}$$

para $y = S_+(x) \in {S_-}^{2k}$. É fácil ver que T_- é regular, contínua e tangente a ${S_-}^{2k}$. Além disso, $F(x) = x$ para cada $x \in S^{2k-1}$, implica que $T_-(y) = e_{n+1}$ para $y \in S^{2k-1}$.

Definimos o campo de vetores T_+ sobre ${S_+}^{2k}$ por

$$\begin{aligned} T_+(y) &:= \left\{\frac{d}{dt} S_-(x - tF(x))\right\} |_{t=0} \\ &= \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2}(2\langle x, F(x)\rangle\, x - (1 + \|x\|^2)F(x), 2\langle x, F(x)\rangle), \end{aligned}$$

para $y = S_-(x) \in {S_+}^{2k}$.

É imediato que $T_+(y) = T_-(y)$ para todo $y \in S^{2k-1}$.

Assim para $y \in S^{2k}$, seja

$$T(y) := \begin{cases} T_-(y), & \text{para } y \in {S_-}^{2k}, \\ T_+(y), & \text{para } y \in {S_+}^{2k}. \end{cases}$$

Então T é um campo de vetores contínuo, regular e tangente a S^{2k}, o que contradiz o teorema 1.3.8, logo f tem ponto fixo e concluimos a prova para $n = 2k$.

Se $B^n = B^{2k-1}$, é suficiente observarmos que a aplicação contínua

$$f : B^{2k-1} \longrightarrow B^{2k-1},$$

pode ser extendida a $g : B^{2k} \longrightarrow B^{2k}$, definindo

$$g(x, x_{2k}) := (f(x), 0).$$

Assim g é contínua, e do primeiro caso, possui ponto fixo $(x_0, {x_{2k}}^0)$. Então x_0 é ponto fixo de f. □

Será fácil provarmos uma generalização do teorema 1.3.9, mas para isto serão necessários os seguintes resultados.

Teorema 1.3.10 *(Projeção sobre um convexo fechado) Sejam H um espaço de Hilbert, $K \subset H$ um convexo, fechado e não vazio. Então para toda $f \in H$ existe único $u \in K$ tal que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|. \tag{1.5}$$

Ainda mais, u se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \end{cases}. \tag{1.6}$$

Escrevemos $u = P_k f$ = projeção de f sobre k.

Demonstração: Ver [6]. □

Proposição 1.3.11 *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior se verifica*

$$\|P_k f_1 - P_k f_2\| \leq \|f_1 - f_2\| \quad \forall f_1, f_2 \in H.$$

Demonstração: Pondo $u_1 = P_k f_1$ e $u_2 = P_K f_2$ resulta da equação (1.5) e (1.6) do teorema 1.3.10

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{1.7}$$

$$\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K \tag{1.8}$$

Subistituindo na equação (1.7) v por u_2 e v por u_1 na equação (1.8), somando concluimos que

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle .$$

Por conseqüência $\|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$. □

Teorema 1.3.12 *Todo conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ fechado, convexo e não vazio é uma retração do $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Considerando a aplicação definida no teorema 1.3.10

$$P_c : \mathbb{R}^n \longrightarrow C,$$

que pela proposição 1.3.11 é contínua, e é imediatamente uma retração. □

Teorema 1.3.13 *Todo conjunto $C \subset \mathbb{R}^n$ convexo, fechado, limitado e não vazio tem a propriedade do ponto fixo.*

Demonstração: Observamos que C é subconjunto de alguma bola $B^\star \subset \mathbb{R}^n$, sendo B^n e $B^\star$ homeomorfas, dos teoremas 1.3.1 e 1.3.9 segue que $B^\star$ tem a propriedade do ponto fixo. O teorema 1.3.12 implica que C é uma retração de $B^\star$ e do teorema 1.3.2 obtemos que C tem a propriedade do ponto fixo. □

Observação 1.3.14 *Do resultado acima concluimos que todo subconjunto convexo, fechado, limitado e não vazio, de um espaço vetorial normado X isomorfo ao $\mathbb{R}^n$ com $n = dimX$, tem a propriedade do ponto fixo.*

1.4 Teorema de Schauder

Queremos estender o teorema de Brouwer para espaços de dimensão infinita. Antes, observemos o seguinte exemplo:

Exemplo 1.4.1 Seja

$$l_2 := \left\{ x = (x_1, x_2, ...); \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \right\},$$

e

$$B := \{x \in l_2; \|x\| \leq 1\}.$$

Definimos $f : B \longrightarrow \partial B \subset B$, por

$$f(x) := (\sqrt[2]{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, ...),$$

e é fácil ver que f é contínua, mas não possui ponto fixo. Ou seja, em espaços de dimensão infinita, será necessário exigirmos mais hipóteses.

Definição 1.4.2 *Sejam X e Y espaços lineares normados. Uma função $F : X \longrightarrow Y$ é dita compacta se $F(X)$ está contido em algum subconjunto compacto de Y. Uma aplicação compacta $F : X \longrightarrow Y$ é dita de dimensão finita, se $F(X)$ está contido num espaço de dimensão finita de Y.*

Nosso próximo passo será estender o teorema Brouwer para aplicações compactas sobre espaços lineares normados. Esta generalização é devida a Schauder. A principal idéia é aproximar aplicações compactas por aplicações com imagem de dimensão finita. Seja $A = \{a_1, ..., a_n\}$ um subconjunto finito de um espaço linear normado $E = (E, \|.\|)$, e para $\varepsilon > 0$ fixo, consideramos:

$$A_\varepsilon := \bigcup_{i=1}^{n} B(a_i, \varepsilon) \text{ onde } B(a_i, \varepsilon) := \{x \in E : \|x - a_i\| < \varepsilon\}.$$

Para cada $i = 1, ..., n$, seja $\mu_i : A_\varepsilon \longrightarrow \mathbb{R}$ a aplicação dada por

$$\mu_i(x) := max\{0, \varepsilon - \|x - a_i\|\}.$$

$Co(A)$ denotará o menor convexo que contém A.

Afirmamos que:

$$Co(A) = \{y \in E/y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i \text{ onde } a_i \in A \text{ e } \lambda_i \in \mathbb{R} \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\}.$$

É imediato que $Co(A)$ é convexo. Vamos mostrar que $Co(A)$ é o menor convexo que contém A. Supomos por absurdo que exista subconjunto convexo $C \subset E$, tal que $A \subset C \subset Co(A)$ com $C \neq Co(A)$. Então existe $\alpha \in Co(A)$ tal que $\alpha \notin C$. Como $\alpha \in Co(A)$, ele é uma combinação dos elementos de A. Devemos mostrar que toda combinação convexa de elementos do convexo C pertencem a C, o que será feito por indução: Consideremos $\{x_1, ..., x_k\}$ um subconjunto finito de um convexo qualquer. Se $k = 0$ ou $k = 1$ o resultado é óbvio. Supomos válido para $k = m - 1$, e provaremos para $k = m$. Seja

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \quad \text{ tal que } \quad \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1 \text{ e } \lambda_i \geq 0, \quad \forall i = 1, ..., m.$$

Se $\lambda_m = 1$ o resultado segue, caso contrário $\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i > 0$, e então vemos que

$$\beta = \left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i} \right) x_1 + ... + \left(\frac{\lambda_{m-1}}{\sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i} \right) x_{m-1},$$

pertence ao convexo C por hipótese. Como $x_m \in C$, então sendo C convexo

$$t\beta + (1 - t)x_m \in C, \quad \forall t \in [0, 1],$$

considerando em particular $t = \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i$, concluimos que

$$x = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \in C.$$

Portanto $Co(A)$ é o menor convexo que contém A. $\square$

Notemos que nestas condições $Co(A)$ é fechado. De fato, seja $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Co(A)$ com $\beta_n \longrightarrow \beta$. Devemos mostrar que $\beta = \lambda_1 x_1 + ... + \lambda_m x_m \in Co(A)$. Como $\beta_m = \lambda_1^n x_1 + ... + \lambda_m^n x_m$, onde $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n = 1,\ \forall\, n$, temos que $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^n = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ e então $\beta \in Co(A)$.

A projeção de *Schauder* é a aplicação $P_\varepsilon : A_\varepsilon \longrightarrow Co(A)$ definida por

$$P_\varepsilon(x) := \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)} \qquad \text{para } x \in A_\varepsilon.$$

Observemos que $P_\varepsilon(x)$ é bem definida pois se $x \in A_\varepsilon$, então $x \in B(a-i, \varepsilon)$ para algum $i \in \{1, ..., n\}$ e portanto $\sum_{i=1}^{n} \mu_i(x) \neq 0$. Além disso $P_\varepsilon(x) \subset Co(A)$, pois cada $P_\varepsilon(x)$ é uma combinação convexa dos pontos $a_1, ..., a_n$.

Teorema 1.4.3 *Sejam C um subconjunto convexo de um espaço linear normado, e $A = \{a_1, ..., a_n\} \subset C$. Se P_ε denota a projeção de Schauder, então:*

(i) P_ε é uma aplicação contínua e compacta de A_ε em $Co(A) \subset C$, e

(ii) $\|x - P_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in A_\varepsilon$.

Demonstração: (i) A contínuidade é imediata, devemos mostrar a compacidade, seja $\{P_\varepsilon(x_m)\}_{m=1}^{\infty}$ uma seqüência sobre $P_\varepsilon(A_\varepsilon)$. Denotemos $\mu(x) := \sum_{i=1}^{n} \mu_i(x)$, e portanto

$$P_\varepsilon(x_m) := \sum_{i=1}^{n} \frac{\mu_i(x_m)}{\mu(x_m)} a_i.$$

Observemos que para cada $m \in \{1, 2, ...\}$,

$$b_m = \left(\frac{\mu_1(x_m)}{\mu(x_m)}, ..., \frac{\mu_n(x_m)}{\mu(x_m)} \right) \in [0, 1]^n,$$

assim $b_m \in [0,1]^n, \quad \forall m$. Então existe uma subseqüência b_{mk} convergente (pois $[0,1]^n$ é compacto) e portanto $P_\varepsilon(x_{mk})$ é convergente. Portanto P_ε é compacta. Note que usando, o mesmo raciocínio podemos provar que $Co(A)$ é compacto.

(ii) Observemos que para cada $x \in A_\varepsilon$

$$\begin{aligned}
\|x - P_\varepsilon(x)\| &= \left\| \frac{\mu(x)}{\mu(x)} x - \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)}{\mu(x)} \right\| = \frac{1}{\mu(x)} \left\| \mu(x)x - \sum_{i=1}^n \mu_i(x) a_i \right\| \\
&= \frac{1}{\mu(x)} \left\| \sum_{i=1}^n \mu_i(x)x - \sum_{i=1}^n \mu_i(x) a_i \right\| = \frac{1}{\mu(x)} \left\| \sum_{i=1}^n \mu_i(x)(x - a_i) \right\| \\
&\leq \frac{1}{\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \|x - a - i\| < \frac{1}{\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x)\varepsilon = \varepsilon,
\end{aligned}$$

como $\mu_i(x) = 0$ a menos que $\|x - a_i\| < \varepsilon$, obtemos o desejado. □

Nosso próximo resultado é conhecido como teorema da aproximação de Schauder.

Teorema 1.4.4 *Seja C um subconjunto convexo de um espaço linear normado E e $F : E \longrightarrow C$ uma aplicação compacta e contínua. Então para cada $\varepsilon > 0$, existe conjunto finito $A = \{a_1, ..., a_n\}$ de $F(E)$, e uma aplicação contínua de dimensão finita $F_\varepsilon : E \longrightarrow C$ com as seguintes propriedades:*

(i) $\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in E$,

(ii) $F_\varepsilon(x) \subset Co(A) \subset C$.

Demonstração: Sendo F compacta, então $F(E)$ está contido em algum subconjunto compacto K de C, e portanto K é totalmente limitado. Assim existe $A = \{a_1, ..., a_n\} \subset F(E)$ tal que $F(E) \subset A_\varepsilon$. Seja $P_\varepsilon : E \longrightarrow Co(A)$ a projeção de Schauder, e definimos a aplicação $F_\varepsilon : E \longrightarrow C$ por

$$F_\varepsilon(x) := P_\varepsilon(F(x)) \quad \text{para cada } x \in E.$$

Do teorema 1.4.3 segue o resultado. □

Antes de provarmos o teorema do ponto fixo de Schauder introduziremos uma noção de ε-ponto fixo.

Definição 1.4.5 *Seja D subconjunto de um espaço linear normado E, e $F : D \longrightarrow E$ uma aplicação. Se para todo $\varepsilon > 0$, existe ponto $d \in D$, tal que $\|d - F(d)\| < \varepsilon$, então F tem um ε-ponto fixo.*

Teorema 1.4.6 *Seja D um subconjunto fechado de um espaço linear normado E, e $F : D \longrightarrow E$ uma aplicação compacta e contínua. Então F tem ponto fixo se, e somente se, F tem um ε-ponto fixo .*

Demonstração: Primeiro assumimos que F tem um ε-ponto fixo para cada $\varepsilon > 0$. Agora para cada $n \in \{1, 2, ...\}$, seja d_n um $(\frac{1}{n})$-ponto fixo para F, isto é,

$$\|d_n - F(d_n)\| < \frac{1}{n}. \tag{1.9}$$

Sendo F compacta, então $F(D)$ está contido em algum subconjunto compacto K de E, e portanto existe subseqüência $(d_{nk})_{n_k \in \mathbb{N}}$ de $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente, logo existe $x \in K$, tal que $F(d_{nk}) \longrightarrow x$. Agora da equação (1.9) temos que $d_{nk} \longrightarrow x$, e sendo D fechado, temos que $x \in D$. Como F é contínua, de (1.9) concluimos que $x = F(x)$. A recíproca é imediata. $\square$

Agora estamos prontos para provar o teorema de ponto fixo de Schauder.

Teorema 1.4.7 *(Teorema de Ponto Fixo de Schauder) Seja C um subconjunto convexo de um espaço linear normado E. Então toda aplicação contínua e compacta $F : C \longrightarrow C$ possui ponto fixo.*

Demonstração: Do teorema 1.4.6 com $D = C$, é suficiente mostrar que F tem um ε-ponto fixo, para todo $\varepsilon > 0$. Fixemos $\varepsilon > 0$, o teorema 1.4.4 garante a existência de uma aplicação de dimensão finita e contínua $F_\varepsilon : C \longrightarrow C$ tal que:

$$\|F_\varepsilon(x) - F(x)\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in C, \tag{1.10}$$

e

$$F_\varepsilon(C) \subset Co(A) \subset C \text{ para cada conjunto finito } A \subset C.$$

Logo como $Co(A)$ é fechado e limitado e $F_\varepsilon(Co(A)) \subset Co(A)$. Aplicando o teorema 1.3.13 obtemos $x_\varepsilon \in Co(A)$, tal que $x_\varepsilon = F_\varepsilon(x_\varepsilon)$. Além disso da equação (1.10) temos que

$$\|F_\varepsilon(x_\varepsilon) - F(x_\varepsilon)\| = \|x_\varepsilon - F(x_\varepsilon)\| < \varepsilon.$$

$\square$

Capítulo 2

Teoremas de Krasnoselskii

Neste capítulo apresentamos os Teoremas de Compressão e de Expansão do Cone de Krasnoselskii, segundo a referência [1] de R. P. Agarwal, M. Meehan e D. O'Regan.

2.1 Aplicações Essenciais

Nesta seção mostraremos que a propriedade do ponto fixo (ou mais geral, ser essencial) é invariante por homotopias, para aplicações compactas.

Fixemos algumas notações. Denotaremos por $K(\overline{U}, C)$ o conjunto das aplicações compactas e contínuas $F : \overline{U} \longrightarrow C$, onde $\overline{U}$ denota o fecho de U em C. O conjunto das aplicações $F \in K(\overline{U}, C)$, tais que $x \neq F(x)$ para $x \in \partial U$, será denotado por $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Definição 2.1.1 *Uma aplicação $F \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, se para toda aplicação $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ com $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$, existe $x \in U$ tal que $x = G(x)$. Reciprocamente F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, se existe $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ livre de ponto fixo com $G/_{\partial U} = F/_{\partial U}$.*

Observação 2.1.2 *Se $F \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ é essencial então F tem ponto fixo em U.*

Definição 2.1.3 *Duas aplicações F e G pertencentes a $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ são homotópicas em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, quando*

$$F \simeq G \text{ em } K_{\partial U},$$

ou seja, se existe aplicação contínua e compacta $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow C$ tal que $H_t(.) := H(., t) : \overline{U} \longrightarrow C$ pertence a $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ para cada $t \in [0,1]$, tal que $H_o = F$ e $H_1 = G$.

Teorema 2.1.4 *Sejam E um espaço de Banach, $C \subset E$ convexo e fechado e U um aberto em C e $F, G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Se*

$$x \neq tG(x) + (1-t)F(x) \text{ para cada } (x,t) \in \overline{U} \times [0,1].$$

Então $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Demonstração: Seja $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow C$ definida por

$$H(x,t) := tG(x) + (1-t)F(x),$$

primeiro mostraremos que H é contínua e compacta, a continuidade segue imediatamente, para mostrarmos a compacidade, consideramos $\{(x_n, t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ uma seqüência em $\overline{U} \times [0,1]$, sem perda de generalidade podemos assumir que existe $t \in [0,1]$, tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, sendo F e G aplicações compactas, então existem subseqüências $\{(x_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ de $\{(x_n)\}_{k=1}^{\infty}$ e $u, v \in C$ tais que:

$$F(x_{n_k}) \longrightarrow v \text{ e } G(x_{n_k}) \longrightarrow u \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Da convexidade de C obtemos que

$$H(x_{n_k}, t_{n_k}) = t_{n_k} G(x_{n_k}) + (1 - t_{n_k}) F(x_{n_k}) \longrightarrow tu + (1-t)v \in C \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Portanto H é compacta. Além disso, sendo

$$x \neq tG(x) + (1-t)F(x) \text{ para todo } (x,t) \in \partial U \times [0,1],$$

logo H não tem ponto fixo no ∂U assim $H_t \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ para cada $t \in [0,1]$. Finalmente como $H_0 = F$ e $H_1 = G$, portanto $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. $\square$

Nosso próximo resultado irá caracterizar as aplicações não essenciais em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ em termos de homotopias.

Teorema 2.1.5 *Sejam E um espaço de Banach, C subconjunto convexo e fechado de E, U subconjunto aberto de C e $F \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Então são equivalentes:*

(i) F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$,

(ii) Existe $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ livre de ponto fixo com $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Demonstração: $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ livre de ponto fixo tal que $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$. Supomos por absurdo que exista $x \in \partial U$ e $t \in [0,1]$ tal que:

$$x = tG(x) + (1-t)F(x).$$

Logo, $x = G(x)$, o que é uma contradição pois $G \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Assim

$$x \neq tG(x) + (1-t)F(x) \text{ para cada } (x,t) \in \partial U \times [0,1].$$

Do teorema 2.1.4 segue que $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.
$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow C$ uma aplicação contínua e compacta, com $H_0 = G$ e $H_1 = F$. Consideremos:

$$B := \{x \in \overline{U} : x = H(x,t) \text{ para algum } t \in [0,1]\}.$$

Se $B = \phi$ então para cada $t \in [0,1]$ temos que H_t não tem ponto fixo no $\overline{U}$, em particular F não tem ponto fixo. Portanto F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Se $B \neq \phi$, a continuidade de H implica que B é fechado no $\overline{U}$. Sendo B fechado e $B \cap \partial U = \phi$ então existe função contínua

$$\mu : \overline{U} \longrightarrow [0,1] \text{ com } \mu(\partial U) = 1 \text{ e } \mu(B) = 0.$$

Definimos $J : \overline{U} \longrightarrow C$ por

$$J(x) := H(x, \mu(x)).$$

É imediato que J é contínua e compacta (pois $J(\overline{U}) \subset H(\overline{U} \times [0,1])$). Além disso, $J|_{\partial U} = F|_{\partial U}$, de fato se $x \in \partial U$ então

$$J(x) = H(x, 1) = F(x).$$

Finalmente, $x \neq J(x)$ para $x \in \overline{U}$, pois se $x = J(x)$ para algum $x \in \overline{U}$, imediatamente $x \in B$ e portanto $\mu(x) = 0$ (isto é, $x = G(x)$) uma contradição. Conseqüentemente, $J \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ com $x \neq J(x)$ para $x \in \overline{U}$ e $J|_{\partial U} = F|_{\partial U}$. Portanto F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. □

Nosso próximo resultado mostrará que a propriedade "ser essencial" é invariante por homotopias para aplicações compactas.

Teorema 2.1.6 *Sejam E um espaço de Banach, C subconjunto fechado e convexo de E, e U subconjunto aberto de C. Suponha que F e G são aplicações de $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ com $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Então F é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ se, e somente se, G é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.*

Demonstração: Se F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, o teorema 2.1.5 garante a existência de $T \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ livre de ponto fixo, com $F \simeq T$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Logo $T \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ e portanto do teorema 2.1.5, G é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Simetricamente obtemos que F é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ se, e somente se, G é não essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. □

Teorema 2.1.7 *Sejam $E = (E, \| \,.\, \|)$ um espaço de Banach, C um subconjunto de E fechado e convexo, U um aberto em C. Suponha que $F \in K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Então existe $\varepsilon > 0$ com as seguintes propriedades:*
(i) Cada aplicação contínua e compacta, $G : \overline{U} \longrightarrow C$ satisfazendo
$\|F(x) - G(x)\| < \varepsilon$ para todo $x \in \partial U$, pertencente a $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.
(ii)G (descrita em (i)) é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.

Demonstração: Sendo $F : \overline{U} \longrightarrow C$ uma aplicação compacta, e livre de ponto fixo no ∂U, então existe $\varepsilon > 0$, tal que

$$\|x - F(x)\| \geq \varepsilon \text{ para todo } x \in \partial U.$$

Se $G : \overline{U} \longrightarrow C$ satisfaz

$$\|F(x) - G(x)\| < \varepsilon \text{ para todo } x \in \partial U,$$

então

$$\|G(x) - x\| \geq \|x - F(x)\| - \|G(x) - F(x)\| > \varepsilon - \varepsilon = 0,$$

e portanto G não tem ponto fixo no ∂U. Aplicando o teorema 2.1.4 deduzimos que $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Assim o teorema 2.1.6 garante que G é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. □

2.2 Alternativa de Leray-Schauder

O próximo resultado fornece um exemplo de aplicação essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$, que será particularmente útil.

Teorema 2.2.1 *Sejam E um espaço de Banach, C um subconjunto fechado e convexo de E, U um subconjunto aberto de C e $p \in U$. Então a aplicação constante $F(\overline{U}) \equiv p$ é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$.*

Demonstração: Seja $G : \overline{U} \longrightarrow C$ uma aplicação contínua e compacta com $G|_{\partial U} = F|_{\partial U} = p$. Devemos mostrar que G tem ponto fixo em U. Seja $J : C \longrightarrow C$, dada por

$$J(x) := \begin{cases} G(x), & x \in \overline{U}, \\ p, & x \in C \backslash \overline{U}. \end{cases}$$

É imediato que J é contínua e compacta. O teorema de ponto fixo de Schauder 1.4.7 garante que J possui um ponto fixo $x \in C$. Logo $x \in U$ pois $p \in U$. Conseqüentemente $x = J(x) = G(x)$ e portanto x é um ponto fixo de G. Assim F é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. $\square$

Com o auxílio do exemplo fornecido pelo teorema 2.2.1 provaremos a alternativa de Leray-Schauder.

Teorema 2.2.2 *Sejam E um espaço de Banach, C um subconjunto de E fechado e convexo, U um subconjunto aberto de C e $p \in U$. Então toda aplicação contínua e compacta $F : \overline{U} \longrightarrow C$ tem no mínimo uma das seguintes propriedades:*

$(A1)$ F tem ponto fixo no $\overline{U}$, ou

$(A2)$ Existe $u \in \partial U$ e $\lambda \in (0,1)$ com $u = \lambda F(u) + (1-\lambda)p$.

Demonstração: Supomos que $(A2)$ não ocorre e $x \neq F(x) \quad \forall x \in \partial U$, seja $G : \overline{U} \longrightarrow C$, definida por $G(x) = p \quad \forall x \in \overline{U}$, e consideramos a aplicação contínua e compacta $H : \overline{U} \times [0,1] \longrightarrow C$ que é a junção de F com G, dada por

$$H(x,t) := tF(x) + (1-t)p.$$

Além disso, para cada $t \in [0,1]$ temos que $x \neq H_t(x)$, para todo $x \in \partial U$. Conseqüentemente, $F \simeq G$ em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$. Agora o teorema 2.1.6 e o teorema 2.2.1 implicam que F é essencial em $K_{\partial U}(\overline{U}, C)$ e portanto existe $x \in U$ com $x = F(x)$, isto é, $(A1)$ ocorre. $\square$

2.3 Teoremas de Krasnoselskii

Nesta seção apresentamos o Teorema de Compressão e o de Expansão do Cone de Krasnoselskii e algumas generalizações.

Definição 2.3.1 *Seja E um espaço de Banach real. Um subconjunto convexo, fechado e não vazio $P \subset E$ é dito um cone se este satifaz as seguintes condições:*

(i) $x \in P$, $\lambda \geq 0$, então $\lambda x \in P$;

(ii) $x \in P$, $-x \in P$, então $x = 0$.

Todo cone $P \subset E$ induz uma ordem em E dada por

$$x \leq y, \qquad \text{se, e somente se, } y - x \in P.$$

Definição 2.3.2 *Dizemos que a norma em E ($\|.\|_E : E \longrightarrow \mathbb{R}$) é crescente com respeito a C, se para todos $x, y \in C$ valem as seguintes desigualdades:*

$$\|x\| \leq \|x + y\| \ e \ \|y\| \leq \|x + y\|.$$

Teorema 2.3.3 *Sejam E um espaço de Banach, C um subconjunto convexo e fechado de E não vazio e $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F \in K(\overline{B}_R, C)$ e assuma as seguintes condições:*

(2.1) $\quad x \neq F(x)$ *para* $x \in S_r \cup S_R$,

(2.2) $\quad \left\{ \begin{array}{l} F : \overline{B}_r \longrightarrow C, \text{ é não essencial em } K_{S_r}(\overline{B}_r, C), \\ \text{isto é }, F/_{\overline{B}_r} \text{ é não essencial em } K_{S_r}(\overline{B}_r, C). \end{array} \right.$,

(2.3) $\quad F : \overline{B}_R \longrightarrow C$ *é essencial em* $K(\overline{B}_R, C)$.

Então F tem no mínimo um ponto fixo em $\Omega = \{x; x \in C \text{ e } r < \|x\| < R\}$.

Demonstração: A condição (2.2) implica que existe $\theta \in K(\overline{B}_R, C)$ com $\theta|_{S_r} = F|_{S_r}$ e $x = \theta(x)$ para todo $x \in \overline{B}_r$. Definimos a aplicação $\Phi : \overline{B_r} \longrightarrow C$ por

$$\Phi(x) := \left\{ \begin{array}{ll} F(x), & r \leq \|x\| \leq R, \\ \theta(x), & 0 \leq \|x\| \leq r. \end{array} \right.$$

Notemos que $\Phi \in K(\overline{B}_R, C)$, e além disso, Φ não tem ponto fixo no $\overline{B}_r$, (sendo $F : \overline{B}_R \longrightarrow C$ essencial em $K(\overline{B}_R, C)$ então Φ tem ponto fixo em $\overline{B}_R$, portanto $x = \Phi(x)$, como $\theta(x)$ não tem ponto fixo, a definição da aplicação Φ implica que $x = F(x)$, da condição (2.1) concluimos que $x \in \Omega$. $\square$

Teorema 2.3.4 *Sejam E um espaço de Banach, C um subconjunto convexo e fechado de E não vazio e $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que as seguintes condições são satifeitas:*

$$(2.4) \qquad \left\{ \begin{array}{c} N : \overline{B}_R \times \longrightarrow C \text{ é uma aplicação contínua e compacta} \\ \text{com } N(x,0) = 0 \text{ para todo } x \in \overline{B}_R, \text{ e tal que para cada} \\ t \in [0,1], \text{ nos temos que } x \neq N(x,t) \text{ para todo } x \in S_R \end{array} \right. ,$$

$$(2.5) \qquad \left\{ \begin{array}{c} H : \overline{B}_r \times \longrightarrow C \text{ é uma aplicação contínua e compacta} \\ \text{tal que para cada } t \in [0,1], \text{ nos temos } x \neq H(x,t) \forall x \in S_r \end{array} \right. ,$$

$$(2.6) \qquad H(.,1)|_{\overline{B}_r} = N(.,1)|_{\overline{B}_r},$$

$$(2.7) \qquad x \neq H(x,0) \qquad \forall x \in B_r.$$

Então $N(.,1)$ tem ponto fixo em $\Omega = \{x; x \in C \ \text{ e } r < \|x\| < R\}$.

Demonstração: Do teorema 2.2.1 obtemos que a aplicação identicamente nula é essencial em $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$, isto juntamente com (2.4) (ou seja N é uma homotopia) e o teorema 2.1.6 implicam que

$$(2.8) \qquad N(.,1) : \overline{B}_R \longrightarrow C \text{ é essencial em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C).$$

Além disso, (2.7) implica que $H(.,0)$ é não essencial em $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$. Isto juntamente com (2.5) e (2.6) e o Teorema 2.1.6 obtemos:

$$(2.9) \qquad N(.,1) = H(.,1) : \overline{B_r} \longrightarrow C \text{ é não essencial em } K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$$

Agora com $N(.,1)$ no lugar de F no teorema 2.3.3 então (2.9) implica (2.2) e (2.8) implica (2.3), de (2.4), (2.5) e (2.6) obtemos (2.1). Portanto o resultado segue do teorema 2.3.3. $\square$

Nosso próximo resultado é o Teorema de Compressão do Cone de Krasnoselskii.

Teorema 2.3.5 *Sejam E um espaço de Banach, C um subconjunto convexo e fechado de E não vazio e $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F \in K(\overline{B}_R, C)$ e assuma que as seguites condições são satisfeitas:*

$$(2.10) \qquad x \neq \lambda F(x) \text{ para } \lambda \in [0,1) \text{ e } x \in S_R,$$

$$(2.11) \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{exite } v \in C \backslash \{0\} \text{ com,} \\ x \neq F(x) = \delta v \text{ para todo } \delta > 0 \text{ e } x \in S_r. \end{array} \right.$$

Então F possui ponto fixo no $\overline{\Omega} = \{x; x \in C \ \text{ e } r \leq \|x\| \leq R\}$.

Demonstração: Suponhamos que $x \neq F(x)$ para $x \in S_r \cup S_R$, escolhemos $M > 0$ tal que

$$\|F(x)\| \leq M \quad \forall x \in \overline{B_r}.$$

Tomemos $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|\delta_0\| > M+r. \tag{2.12}$$

Sejam

$$N(.,t) := tF(.) \text{ e } H(.,t) := F(.) + (1-t)\delta_0 v.$$

Pretendemos aplicar o teorema 2.3.4, as condições (2.10) e (2.11) (com $\delta = (1-t)\delta_0$), implicam que (2.4) e (2.5) são satisfeitos. Além disso, (2.6) é verdadeiro desde que

$$N(x,1) = F(x) = H(x,1) \text{ para } x \in \overline{B}_r.$$

Finalmente, (2.12) implica que (2.7) é satisfeito, e o resultado segue do teorema 2.3.4. □

Antes de enunciarmos o próximo teorema, fixemos algumas notações:

$$\Omega_\rho := \{x \in E : \|x\| < \rho\} \qquad \partial_E\Omega_\rho := \{x \in E : \|x\| = \rho\},$$

$$B_\rho := \{x : x \in C \text{ e } \|x\| < \rho\} \qquad S_\rho := \{x : x \in C \text{ e } \|x\| = \rho\}.$$

O Teorema de Compressão do Cone de Krasnoselskii é mais conhecido na seguinte forma:

Teorema 2.3.6 *Sejam $E = (E, \|.\|)$ um espaço de Banach, $C \subseteq E$ um cone, e seja $\|.\|$ crescente com respeito a C. Além disso, sejam $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F : \overline{\Omega}_R \cap C \longrightarrow C$ é uma aplicação contínua e compacta e assuma que as seguintes condições são satisfeitas:*

(2.13) $\quad \|F(x)\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E\Omega_R \cap C$,

(2.14) $\quad \|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E\Omega_r \cap C$.

Então F possui um ponto fixo em $C \cap \{x \in E; r \leq \|x\| \leq R\}$.

Demonstração: Note que (2.13) implica (2.10), de fato se existisse $x \in \partial_E \Omega_R \cap C$ com $x = \lambda F(x)$ com $\lambda \in [0,1)$, então $\|x\| < \|F(x)\|$ o que contradiz (2.13), logo (2.10) ocorre. Também (2.14) implica (2.11), de fato se existisse $v \in C \backslash \{0\}$ com $x = F(x) + \delta v$ para cada $\delta > 0$ e $x \in S_r$. Sendo $\|.\|$ crescente com respeito a C, e como $\delta v \in C$ concluimos que:

$$\|x\| = \|F(x) + \delta v\| \geq \|F(x)\|,$$

o que contradiz (2.14), logo (2.11) ocorre e o resultado segue do teorema 2.3.5 $\square$

Teorema 2.3.7 *Sejam E um espaço de Banach, $C \subseteq E$ um cone. Além disso, sejam $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F \in K(\overline{B}_R, C)$ e assuma que as seguintes condições ocorrem:*

(2.15) $\quad x \neq F(x)$ *para* $x \in S_r \cup S_R$,

(2.16) $\quad \begin{cases} F : \overline{B}_r \longrightarrow C \text{ é essencial em } K_{S_r}(\overline{B}_r, C) \\ \text{isto é } F|_{B_r}, \text{ é essencial em } K_{S_r}(\overline{B_r}, C). \end{cases},$

(2.17) $\quad F : \overline{B}_R \longrightarrow C$ *é não essencial em* $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$.

Então F tem no mínimo dois pontos fixos x_0 e x_1, com $x_0 \in B_r$ e $x_1 \in \Omega = \{x; x \in C \text{ e } r < \|x\| < R\}$.

Demonstração: (2.16) implica que F possui ponto fixo x_0 em B_r. Seja $\psi := F|_{\overline{\Omega}}$, supomos que ψ não tem ponto fixo, o fato de que $F : \overline{B_R} \longrightarrow C$ é não essencial em $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ implica que existe aplicação contínua e compacta $\theta : \overline{B}_R \longrightarrow C$ com $\theta|_{S_R} = F|_{S_R}$ e $x \neq F(x)$ para $x \in \overline{B}_R$. Fixemos $\rho \in (0, r)$ e consideramos a aplicação Φ dada por

$$\Phi := \begin{cases} \frac{\rho}{R}\theta(\frac{R}{\rho}x), & 0 \leq \|x\| \leq \rho, \\ \\ \frac{(r-\rho)\|x\|}{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}\psi(\frac{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|}), & \rho \leq \|x\| \leq r, \\ \\ \psi(x), & r \leq \|x\| \leq R. \end{cases}$$

Observe que $\Phi : \overline{B}_R \longrightarrow C$, e está bem definida, e sendo $\rho \leq \|x\| \leq r$, então

$$r \leq \left\| \frac{(R-\rho)r - (R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|} x \right\| \leq R.$$

Também $\Phi : \overline{B}_R \longrightarrow C$ é uma aplicação contínua e compacta. Além disso,

$$\Phi|_{S_R} = \psi|_{S_R} = F|_{S_R} \text{ e } \Phi|_{\overline{\Omega}} = \psi|_{\overline{\Omega}} = F|_{\overline{\Omega}},$$

e portanto Φ não tem ponto fixo. Notando que

$$\Phi|_{S_r} = \psi|_{S_r} = F|_{S_r},$$

e sendo $\Phi : \overline{B}_r \longrightarrow C$ uma aplicação contínua e compacta, da igualdade acima segue que Φ não possui ponto fixo no $\overline{B}_r$, o que contradiz (2.16). $\square$

Nosso próximo resultado é o Teorema de Expansão do Cone de Krasnoselkii.

Teorema 2.3.8 *Sejam E um espaço de Banach, e $C \subseteq E$ um cone. Além disso, sejam $r, R \in \mathbb{R}$ constantes, tais que $0 < r < R$. Suponha que $F \in K(\overline{B}_R, C)$, e assuma que as seguintes condições ocorrem:*

(2.18) $\quad x \neq \lambda F(x)$ *para* $\lambda \in [0,1)$ *e* $x \in S_r$,

(2.19) $\quad \begin{cases} \text{existe } v \in C\backslash\{0\} \text{ com} \\ x \neq F(x) + \delta v \text{ para qualquer } \delta > 0 \text{ e } x \in S_R. \end{cases}$

Então F possui ponto fixo no $\overline{\Omega} = \{x : x \in C \text{ e } r \leq \|x\| \leq R\}$.

Demonstração: Supomos $x \neq F(x)$ para $x \in S_r \cup S_R$, caso contrário já teríamos o resultado. Aplicaremos o teorema 2.3.7. Para isto basta mostrarmos que as condições (2.16) e (2.17) são satisfeitas. De fato consideremos a homotopia $H : \overline{B}_r \times [0,1] \longrightarrow C$ definida por:

$$H(x, \lambda) := \lambda F(x),$$

note que $H_0 = 0$ e $H_1 = F$, e portanto sendo $x \neq F(x)$ sobre S_r, obtemos $H_0 \simeq H_1$ em $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$. Como $H_0 : \overline{B}_r \longrightarrow C$ é essencial em $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ (teorema 2.2.1), o teorema 2.1.6 implica que $F : \overline{B}_r \longrightarrow C$ é essencial em $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$. Assim (2.16) ocorre. Agora seja $\delta > 0$ tal que:

(2.20) $$\|\delta_0 v\| > \sup_{x \in S_R} \|F(x)\| + R.$$

Consideremos a homotopia $N : \overline{B}_R \times [0,1] \longrightarrow C$ definida por:

$$N(x,\lambda) := F(x) + \lambda\delta_0 v.$$

Note que N é uma aplicação contínua e compacta tal que $N_0 = F$ e $N_1 = F + \delta_0 v$. Então como vale (2.19) temos:

$$N_0 \simeq N_1 \text{ em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \tag{2.21}$$

Note que (2.20) implica para $\lambda \in [0,1]$ e $x \in S_R$,

$$\|\delta_0 v + \lambda F(x)\| > R = \|x\|.$$

Assim

$$x \neq \lambda F(x) + \delta_0 v \text{ se } \lambda \in [0,1] \text{ e } x \in S_R. \tag{2.22}$$

Sejam $G : \overline{B}_R \longrightarrow C$ a aplicação constante definida por $G(x) = \delta_0 v$, e a homotopia $J : \overline{B}_R \times [0,1] \longrightarrow C$ definida por:

$$J(x,\lambda) = \delta_0 v + \lambda F(x).$$

Observe que J é uma aplicação contínua e compacta, tal que $J_0 = G$ e $J_1 = N_1$, logo de (2.22) resulta que:

$$N_1 \simeq G \text{ sobre } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \tag{2.23}$$

Assim (2.21) e (2.23) implicam

$$N_0 \simeq G \text{ em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \tag{2.24}$$

Portanto sendo $G(x) = \delta_0 v$ para $x \in \overline{B}_R$ e $\delta_0 \in C \backslash \overline{B}_R$, imediatamente G é não essencial em $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$, do teorema 2.1.6 obtemos que $N_0 = F$ é não essencial em $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$, logo (2.17) se verifica. $\square$

O teorema de expansão do cone de Krasnoselskii é mais conhecido na seguinte forma:

Teorema 2.3.9 *Sejam $E = (E, \|.\|)$ um espaço de Banach, $C \subset E$ um cone e seja a $\|.\|$ crescente com respeito a C. Além disso, sejam $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F : \overline{\Omega}_R \cap C \longrightarrow C$ é contínua e compacta, e assuma que as seguintes condições ocorrem:*

(2.25) $\quad \|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_R \cap C$,

(2.26) $\quad \|F(x)\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$.

Então F possui ponto fixo em $\{x : x \in C, r \leq \|x\| \leq R\}$.

Demonstração: O resultado segue do teorema 2.3.8, para isto basta observar que (2.26) $\Rightarrow$ (2.18). De fato, se $x = \lambda F(x)$ para $\lambda \in [0, 1)$ e $x \in S_R$, então

$$0 < \|x\| = \lambda \|F(x)\| < \|F(x)\|,$$

o que contradiz (2.26), e logo (2.18) ocorre. Temos também que (2.25) $\Rightarrow$ (2.19). De fato, se $x = F(x) + \delta v$ para algum $v \in C \backslash \{0\}$ e para cada $\delta > 0$ e $x \in S_R$, sendo $\|.\|$ crescente com respeito a C, e do fato de que $\delta v \in C$ para todo $\delta > 0$, obtemos:

$$\|x\| = \|F(x) + \delta v\| > \|F(x)\|,$$

o que contradiz (2.25), e logo (2.19) ocorre. $\square$

Teorema 2.3.10 *Sejam $E = (E, \|.\|)$ um espaço de Banach, $C \subset E$ um cone e seja a $\|.\|$ crescente com respeito a C. Além disso, sejam $r, R \in \mathbb{R}$ constantes com $0 < r < R$. Suponha que $F : \overline{\Omega}_R \cap C \longrightarrow C$ é contínua e compacta, e assuma que as seguintes condições ocorrem:*

(2.27) $\quad x \neq F(x)$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$,

(2.28) $\quad \|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_R \cap C$,

(2.29) $\quad \|F(x)\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$.

Então F tem no mínimo dois pontos fixos x_0 e x_1, com $x_0 \in \Omega_r \cap C$ e
$x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \overline{\Omega}_r)$.

Demonstração: Como (2.29) implica que

$$x \neq \lambda F(x), \ \forall \lambda \in [0, 1) \ \text{ e } \ x \in \partial_E \Omega_r \cap C,$$

da Alternativa de Leray-Schauder (teorema 2.2.2 com $p = 0$) concluimos que F possui ponto fixo $x_0 \in \overline{\Omega}_r \cap C$. Assim de (2.27), $x_0 \in \Omega_r \cap C$. Além disso o teorema 2.3.9 implica que F tem um ponto fixo $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \Omega_r)$. Assim de (2.27), $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \overline{\Omega}_r)$. □

Observação 2.3.11 *Note que no teorema 2.3.10 o ponto fixo x_0 pode ser igual a zero, no próximo teorema aumentaremos uma hipótese para obtermos dois pontos fixos distintos e não nulos.*

Teorema 2.3.12 *Sejam $E = (E, \|.\|)$ um espaço de Banach, $C \subset E$ um cone e seja a $\|.\|$ crescente com respeito a C. Além disso, sejam $L, r, R \in \mathbb{R}$ constantes tais que $0 < L < r < R$. Suponha que $F : \overline{\Omega}_R \cap C \longrightarrow C$ é uma aplicação contínua e compacta, e assuma que as seguintes condições ocorrem:*

(2.30) $x \neq F(x)$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$,

(2.31) $\|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_L \cap C$,

(2.32) $\|F(x)\| \leq \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$,

(2.33) $\|F(x)\| > \|x\|$ *para todo* $x \in \partial_E \Omega_R \cap C$.

Então F tem no mínimo dois pontos fixos x_0 e x_1 com $x_0 \in C \cap (\Omega_r \backslash \Omega_L)$ e $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R \backslash \overline{\Omega}_r)$.

Demonstração: O resultado segue imediatamente dos teoremas (2.4) e (2.7). □

Capítulo 3

Equações Diferenciais de Quarta Ordem

3.1 Uma Equação de Quarta Ordem Semilinear

Nesta seção combinaremos a alternativa de Leray-Schauder (teorema 2.2.2) com o teorema de compressão e o de expanssão do cone de Krasnoselskii (2.3.6 e 2.3.9) para encontrar uma ou mais soluções positivas para a equação de quarta ordem semilinear:

$$\begin{cases} u^{iv}(x) = f(x, u(x)) & x \in [0, L] \\ u(0) = u(L) = u''(0) = u''(L) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $f : [0, L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua.

Uma possível solução u de (3.1), será uma função de $C_0[0, L]$, então trabalharemos no espaço de Banach $E = C_0[0, L]$ com norma $\|u\|_E = \|u\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,L]} |u(t)|$.

Seja $G : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função de Green para o problema $-w'' = h$ com $w(0) = w(L) = 0$, definida por:

$$G(x, t) = \begin{cases} \frac{t(L-x)}{L} & 0 \leq t \leq x \leq L \\ \frac{x(L-t)}{L} & 0 \leq x \leq t \leq L \end{cases} \tag{3.2}$$

Agora $G(x, t)$ possui as seguintes propriedades:

$$G(x, t) \geq 0, \quad \forall x, t \in [0, L]; \qquad G(x, t) > 0, \quad \forall x, t \in (0, L), \tag{3.3}$$

$$G(x,t) \leq G(t,t), \quad \forall (x,t) \in [0,L] \times [0,L], \tag{3.4}$$

$$G(x,t) \geq mG(t,t), \quad \forall (x,t) \in [mL,(1-m)L] \times [0,L], \tag{3.5}$$

onde $0 < m < \frac{1}{2}$.

De (3.2) para encontrar uma solução de (3.1), é equivalente encontrar um ponto fixo para o operador $T : E \longrightarrow E$ definido por:

$$Tu(x) = \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt. \tag{3.6}$$

O primeiro resultado desta seção nos fornece uma solução geral (não necessariamente positiva) para o problema (3.1).

Teorema 3.1.1 *Seja $f : [0,L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Suponha que existe uma constante $\rho > 0$, independente de $\lambda \in (0,1)$, tal que $\|u\|_E \neq \rho$ para toda $u \in E$ solução de*

$$u(x) = \lambda \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt. \tag*{$(3.6)_\lambda$}$$

Então (3.1) tem no mínimo uma solução $u^\star \in E$, tal que $\|u^\star\|_E < \rho$.

Demonstração: É claro que uma solução de $(3.6)_\lambda$ é uma solução da equação $u = \lambda Tu$, onde T foi definido em (3.6), usando o teorema de Arzelà-Ascoli(ver [18]), vemos que T é contínuo e completamente contínuo. Agora de acordo com a Alternativa de Leray-Schauder (teorema 2.2.2), com $p = 0$, e $U = \{u \in E; \|u\|_E < \rho\}$, se u é uma solução de $(3.6)_\lambda$, então $\|u\|_E \neq \rho$, de onde otemos que $(A2)$ não ocorre, assim temos que $(A1)$ se verifica, e o resultado segue. $\square$

Afim de tornar este texto mais claro, listaremos as condições que serão assumidas.

(K1) f é contínua com

$$f(t,u) \geq 0, \quad \forall (t,u) \in [0,L] \times \mathbb{R}.$$

(K2) $$f(t,u) \leq q(t)w(|u|), \quad \forall (t,u) \in [0,L] \times \mathbb{R},$$

onde q, w são contínuas, $w : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty)$ é não decrescente e $q : [0,L] \longrightarrow [0,\infty)$.

(K3) Existe $\alpha > 0$ tal que

$$\alpha > dw(\alpha),$$

onde

$$d = \sup_{x\in[0,L]} \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)q(s)dsdt$$

(K4) $$f(t,u) \geq \tau(t)w(|u|), \quad \forall (t,u) \in [mL,(1-m)L] \times \mathbb{R} - \{0\},$$

onde $\tau : [mL,(1-m)L] \longrightarrow (0,\infty)$ é contínua.

(K5) Existe $\beta > 0$, com $\beta \neq \alpha$, tal que

$$\beta < w(m\beta) \int_{mL}^{(1-m)L} \int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)dsdt,$$

onde $\sigma \in [0,L]$ é definido por

$$\int_{mL}^{(1-m)L} \int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)dsdt = \sup_{x\in[0,L]} \int_{mL}^{(1-m)L} \int_0^L G(x,t)G(t,s)\tau(s)dsdt.$$

(K6) Existe $\beta > 0$, com $\beta \neq \alpha$, tal que a seguinte condição ocorre para $m\beta \leq x \leq \beta$

$$x < w(x).m \int_{mL}^{(1-m)L} \int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)dsdt.$$

Nosso próximo resultado usará o teorema 3.1.1 para provar a existência de uma solução não negativa para o problema (3.1).

Teorema 3.1.2 *Se (K1)-(K3) ocorrem. Então, (3.1) tem uma solução não negativa $u^\star \in E$, tal que $\|u^\star\|_E < \alpha$, isto é, $0 \leq u^\star(x) < \alpha, \quad x \in [0,L]$.*

Demonstração: Para aplicar o teorema (3.1.1), consideramos $f^{\star} : [0, L] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f^{\star}(t, u) = f(t, |u|) \quad \forall (t, u) \in [0, L] \times \mathbb{R}.$$

É imediato que $f^{\star}$ é contínua.

Mostraremos que existe $u \in E$ positiva, tal que

$$u(x) = \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)f^{\star}(s, u(s))dsdt, \tag{3.7}$$

e assim da definição de $f^{\star}$ e de (K1) obteremos uma solução para (3.1).

Para isto consideramos

$$u(x) = \lambda \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)f^{\star}(s, u(s))dsdt, \tag{3.8}$$

onde $\lambda \in (0, 1)$. Seja $u \in E$ uma solução qualquer de (3.8). Verificaremos que $\|u\|_E \neq \alpha$, agora de (3.3) e (K1) segue que

$$\begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)f^{\star}(s, u(s))dsdt \\ &= \lambda \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)f(s, |u(s)|)dsdt \geq 0, \quad \forall x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Então,

$$|u(x)| = u(x), \quad \forall t \in [0, L]. \tag{3.9}$$

Aplicando (3.9),(K2) e (K3) sucessivamente, encontramos para cada $x \in [0, L]$,

$$\begin{aligned} |u(t)| = u(t) &\leq \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)f(s, |u(s)|)dsdt \\ &\leq \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)q(s)w(|u(s)|)dsdt \\ &\leq \int_0^L \int_0^L G(x, t)G(t, s)q(s)w(\|u\|_E)dsdt \\ &\leq dw(\|u\|_E). \end{aligned}$$

Então

$$\|u\|_E \leq dw(\|u\|_E).$$

Comparando com (K3), concluimos que $\|u\|_E \neq \alpha$.

Agora do Teorema 3.1.1 segue que (3.7) tem uma solução $u^\star \in E$ com $\|u\|_E \leq \alpha$. De (3.3), (K1) e (K2) segue que

$$|u^\star(x)| = u^\star(x), \quad x \in [0, L] \quad \text{e} \quad \|u^\star\|_E \neq \alpha$$

E portanto segue da definição da função $f^\star$ que $u^\star$ é uma solução de (3.1), com $\|u^\star\|_E < \alpha$. □

No teorema 3.1.2 mostramos a existência de uma solução não negativa, a qual poderia ser trivial, ou seja, nula. Nosso próximo resultado garante a existência de uma solução positiva.

Teorema 3.1.3 *Se (K1)-(K5) ocorrem, então (3.1) possui uma solução positiva $u^* \in E$ tal que:*

(a) $\alpha < \|u\|_E < \beta$ e $\displaystyle\min_{x\in[mL,(1-m)L]} u^*(x) > m\alpha$ se $\alpha < \beta$;

(b) $\beta < \|u\|_E < \alpha$ e $\displaystyle\min_{x\in[mL,(1-m)L]} u^*(x) > m\beta$ se $\beta < \alpha$;

Demonstração: Aplicaremos o teorema de expansão ou o de compressão do cone de Krasnoselskii (teorema 2.3.6 e 2.3.9). Para isto observemos que o operador $T : E \longrightarrow E$ é completamente contínuo.

Definimos um cone $C \subset E$ por

$$C = \left\{ u \in E; u(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, L], \text{ e } \min_{x\in[mL,(1-m)L]} u(x) \geq m\|u\|_E \right\}$$

mostraremos que T aplica C em C. Seja $u \in C$, observemos que de (3.3) e (K1) obtemos:

$$Tu(x) = \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \geq 0, \quad \forall x \in [0, L]. \tag{3.10}$$

Agora usando (3.10) e (3.4), obtemos para $x \in [0, L]$ que

$$|Tu(x)| = Tu(x) \leq \int_0^L \int_0^L G(t,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt.$$

Isto implica

$$\|u\|_E \leq \int_0^L \int_0^L G(t,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt. \tag{3.11}$$

Aplicando (3.10),(K1),(3.5) e (3.11), obtemos para cada $x \in [mL,(1-m)L]$,

$$Tu(x) \geq \int_0^L \int_0^L mG(t,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \geq m\|Tu\|_E.$$

Assim,

$$\min_{x\in[mL,(1-m)L]} Tu(x) \geq m\|Tu\|_E. \tag{3.12}$$

Tendo estabelecido (3.10) e (3.12), mostramos que $T(C) \subset C$.

Para aplicarmos Krasnoselskii devemos mostrar que ocorrem

(i) $\|Tu\|_E < \|u\|_E$, se $u \in C$ e $\|u\|_E = \alpha$

(ii)$\|Tu\|_E > \|u\|_E$, se $u \in C$ e $\|u\|_E = \beta$

De fato, seja $u \in C$ tal que $\|u\|_E = \alpha$. Usando (3.10), (K2) e (K3), obtemos para todo $t \in [0,L]$,

$$\begin{aligned} |Tu(x)| = Tu(x) &\leq \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)q(s)w(|u(s)|)dsdt \\ &\leq \int_0^L \int_0^L G(x,t)G(t,s)q(s)w(\alpha)dsdt \\ &\leq dw(\alpha) \\ &< \alpha = \|u\|_E. \end{aligned}$$

Portanto obtemos (i).

Para provar (ii) tomemos $u \in C$ com $\|u\|_E = \beta$. Da definição de C temos

$$m\beta = m\|u\|_E \leq |u(x)| \leq \|u\|_E = \beta, \quad \forall x \in [mL,(1-m)L]. \tag{3.13}$$

De (K4), (3.13) e (K5), obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned} |Tu(\sigma)| = Tu(\sigma) &= \int_0^L \int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \\ &\geq \int_{mL}^{(1-m)L} \int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\geq \int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)w(|u(s)|)dsdt \\
&\geq \int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)w(m\beta)dsdt \\
&> \beta = \|u\|_E.
\end{aligned}
$$

Portanto $\|Tu\|_E > \|u\|_E$.

Assim do teorema 2.3.6 (se $\alpha < \beta$), ou do teorema 2.3.9 (se $\alpha > \beta$), obtemos uma solução $u^* \in C$ com

$$min\{\alpha, \beta\} \leq \|u^*\| \leq max\{\alpha, \beta\}.$$

De (i) e (ii) segue que $\|u^*\|_E \neq \alpha$ e $\|u^*\|_E \neq \beta$ e imediatamente (a) e (b) ocorrem. □

Teorema 3.1.4 *Se (K1)-(K4) e (K6) ocorrem. Então, (3.1) uma solução positiva $u^* \in E$ tal que:*

(a) $\alpha < \|u\|_E < \beta$ e $\min\limits_{x\in[mL,(1-m)L]} u^*(x) > m\alpha$ se $\alpha < \beta$;

(b) $\beta < \|u\|_E < \alpha$ e $\min\limits_{x\in[mL,(1-m)L]} u^*(x) > m\beta$ se $\beta < \alpha$;

Demonstração: A prova é analoga a do teorema 3.1.3, exceto em provar (ii) ou seja que $\|Tu\|_E \geq \|u\|_E$ para $u \in C$ com $\|u\|_E = \beta$, agora usando (K4), (3.13) e (K6) obtemos

$$
\begin{aligned}
|Tu(\sigma)| = Tu(\sigma) &= \int_0^L\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \\
&\geq \int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)f(s,u(s))dsdt \\
&\geq \int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)w(|u(s)|)dsdt \\
&> \int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,t)G(t,s)\tau(s)\frac{|u(s)|}{m\int_{mL}^{(1-m)L}\int_0^L G(\sigma,\mu)G(\mu,\nu)\tau(\nu)d\nu d\mu}dsdt \\
&= \beta = \|u\|_E.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\|Tu\|_E > \|u\|_E$. □

Teorema 3.1.5 *Se (K1)-(K5) ocorrem com $\alpha < \beta$. Então, (3.1) possui no mínimo duas soluções não negativas $u^1, u^2 \in C_o[0, L]$ tais que*

$$0 \leq \|u^1\| < \alpha < \|u^2\| < \beta \text{ e } \min_{t \in [Lm,(1-m)L]} u^2(t) > m\alpha$$

Demonstração: A existência de u^1, u^2 segue dos teoremas 3.1.2 e 3.1.3 item (a).□

3.2 Soluções Positivas de uma Equação de Vigas com Termo Não Local

Nesta seção mostraremos a existência de uma solução positiva para a equação de vigas termo não local, via teorema de compressão do cone de Krasnoselskii (teorema 2.3.6). Consideramos a equação de quarta ordem:

$$u^{(iv)}(x) - M\left(\int_0^L u'^2(x)dx\right)u''(x) = f(x, u(x), u'(x)), \quad 0 < x < L, \tag{3.14}$$

com condições de fronteira

$$u(0) = u''(0) = 0, \tag{3.15}$$

$$u(L) = 0 \text{ e } u''(L) = g(u'(L)), \tag{3.16}$$

onde $f : [0, L] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, $g \in C(\mathbb{R})$ e $M \in C(\mathbb{R}^+)$. Antes de escrevermos a equação integral, vamos reduzir a ordem do problema (3.14)-(3.15)-(3.16), com a identificação $v = u'' - M(\|u'\|_2^2)u$, concluimos que este problema é equivalente ao par de sistemas:

$$\begin{cases} u'' = M(\|u'\|_2^2)u + v, \\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

$$\begin{cases} v'' = f(x, u, u'), \\ v(0) = 0 \quad v(L) = g(u'(L)) \end{cases} \tag{3.18}$$

Seja G a função de Green para o problema $-w'' = h$, com $w(0) = w(L) = 0$, definida por

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{x(L-t)}{L} & 0 \leq x \leq t \leq L \\ \frac{t(L-x)}{L} & 0 \leq t \leq x \leq L. \end{cases} \tag{3.19}$$

Logo

$$w(x) = \int_0^L G(x,t)h(t)dt.$$

Portanto concluimos de (3.17) e (3.18) que:

$$u(t) = \int_0^L -G(x,t)(M(\|u'\|_2^2)u(t) + v(t))dt.$$

onde

$$v(t) = \int_0^L -G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds + \frac{t}{L}g(u'(L)).$$

Tivemos de adicionar o termo $\frac{t}{L}g(u'(L))$, por que $v(t) = -\int_0^L G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds$ vale somente quando $v(0) = v(L) = 0$.

Combinando u, v, podemos esperar encontrar uma solução de (3.14)-(3.15)-(3.16) do problema de ponto fixo:

$$Tu(x) = \int_0^L G(x,t)\left(\int_0^L (G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds - M(\|u'\|_2^2)u(t) - \frac{t}{L}g(u'(L))\right)dt \tag{3.20}$$

Por causa do termo $M(\|u'\|_2^2)$ na equação equação (3.14) devemos ter uma estimativa primeiramente para u' com a norma do $L^2(0,L)$. Poderíamos estudar a possibilidade de pontos fixos do operador T em $H_0^1(0,L)$. Mas neste caso, infelizmente não podemos estimar o bordo em termos de $u'(0)$ e $u'(L)$. Dois espaços de funções adequados para nossa análise, seriam $C^1[0,L]$ ou $H^2(0,L)$. Preferimos trabalhar no espaço de Banach:

$$E = C_0[0,L] \cap C^1[0,L], \text{ com a norma } \|u\|_E = \|u'\|_\infty = \max_{t\in[0,L]} |u'(t)|.$$

Como estamos em busca de soluções positivas supomos que $f : [0,L]\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e $f(s,u_1,u_2) \geq 0$, para todo $(s,u_1,u_2) \in [0,L]\times[0,\frac{L\beta}{2}]\times[-\beta,\beta]$, onde $\beta > 0$ será definido a seguir.

Observação 3.2.1 *Notemos que a função* $h : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por*

$$h(t) = \int_0^L G(t,s)f(s,0,0)ds,$$

é uma solução do problema de Dirichlet $-h'' = f(.,0,0)$, *com* $h(0) = h(L) = 0$. *Como* f *é não negativa, temos que* h *é uma função côncava com* $h(t) \geq 0$, $\forall t \in [0, L]$.

Para aplicarmos *Krasnoselskii* assumiremos as seguintes condições sobre f:

$$f(s,0,0) \leq f(s,u_1,u_2), \quad \forall (s,u_1,u_2) \in [0,L] \times [0, \frac{L\beta}{2}] \times [-\beta, \beta], \tag{3.21}$$

$$\max_{t\in[0,L]} \int_0^L G(.,s)f(s,0,0)ds = \frac{A}{\delta}, \qquad \text{onde } A > 0 \text{ e } \delta > 0. \tag{3.22}$$

Observação 3.2.2 *A função* h *definida na observação 3.2.1 é côncava, e de (3.22), a função* h *tem a propriedade* $h(t) = 0$ *se, e somente se,* $t = 0$ *ou* $t = L$. *Assim dado* $m \in (0, \frac{1}{2})$ *existe* $a_m \in (0, 1)$ *tal que*

$$h(t) \geq a_m \frac{A}{\delta}, \quad \forall t \in [Lm, L(1-m)],$$

e se $h(t) \geq a_1 \frac{A}{\delta}$, $\forall t \in [Lm, L(1-m)]$ *para algum* $a_1 \in (0,1)$ *então* $a_1 \leq a_m$.

A observação 3.2.2 implica que para $m \in (0, \frac{1}{2})$ tem-se:

$$\left| \int_0^L G(t,s)f(s,0,0)ds \right| \geq a_m \frac{A}{\delta} \quad \forall t \in [Lm, (1-m)L] \tag{3.23}$$

Lema 3.2.3 *Se* $u \in E$, *então*

$$\|u'\|_2^2 \leq L\|u'\|_\infty^2. \tag{3.24}$$

Demonstração: De fato

$$\|u'\|_2^2 = \int_0^L |u'(s)|^2 ds \leq \|u'\|_\infty^2 \int_0^L ds = L\|u'\|_\infty^2.$$

□

Lema 3.2.4 *Se $u \in E$, então*

$$\|u\|_\infty \leq \frac{L}{2}\|u\|_E. \tag{3.25}$$

Demonstração: Supomos por contradição que (3.25) não ocorre, então existe $u \in E$ e $t_0 \in (0, L)$ tal que $|u(t_0)| > \frac{L}{2}\|u\|_E$. Do teorema do valor médio temos $t_1 \in (0, t_0)$ e $t_2 \in (t_0, L)$ tal que

$$u'(t_1) = \frac{u(t_0) - u(0)}{t_0} = \frac{u(t_0)}{t_0}, \quad u'(t_2) = \frac{u(L) - u(t_0)}{L - t_0} = \frac{-u(t_0)}{L - t_0}.$$

Então se

$$t_0 \leq \frac{L}{2} \text{ implica } |u'(t_1)| \geq \frac{|u(t_0)|}{L/2} = \frac{2|u(t_0)|}{L},$$
$$t_0 \geq \frac{L}{2} \text{ implica } |u'(t_2)| \geq \frac{|u(t_0)|}{L/2} = \frac{2|u(t_0)|}{L}.$$

Logo $\max\{|u'(t_1)|, |u'(t_2)|\} > \|u'\|_\infty$, o que é uma contradição, assim concluimos a demonstração. □

Tendo em vista o estudo de soluções positivas, consideremos o cone

$$C = \left\{u \in C^1[0, L]; u(0) = u(L) = 0 \text{ e } u \text{ é côncava } \right\}. \tag{3.26}$$

Queremos encontrar um raio $\beta > 0$, tal que para toda função $u \in C \cap \overline{\Omega}_\beta$ (onde $\Omega_\beta = \{u \in E;\ \|u'\|_\infty < \beta\}$), tem-se:

$$\begin{aligned} Tu(x) &= \int_0^L G(x, t)\left(\int_0^L G(t, s)f(s, u(s), u'(s))ds - M(\|u'\|_2^2)u(t) - \frac{t}{L}g(u'(L))\right) dt \\ &\geq 0, \quad \forall x \in [0, L]. \end{aligned}$$

Para isto é suficiente que

$$\int_0^L G(t, s)f(s, u(s), u'(s))ds - M(\|u'\|_2^2)u(t) - \frac{t}{L}g(u'(L)) \geq 0, \quad \forall t \in [0, L], \tag{3.27}$$

nosso próximo passo será mostrar que

$$\int_0^L G(t, s)f(s, u(s), u'(s))ds - M(\|u'\|_2^2)u(t) \geq 0,$$

e em seguida assumiremos condições sobre g para que (3.27) ocorra.

Lema 3.2.5 *Suponha que f satisfaz as condições (3.21) e (3.22), e que:*

$$M(s) \leq A, \quad \forall s \in \left[0, \quad L\min\left\{\frac{(a_m)^2}{(Lm\delta)^2}, \frac{(2a_m)^2}{(L\delta)^2}\right\}\right]. \tag{3.28}$$

Então existe $\beta > 0$ tal que para todo $u \in C$, com $\|u\|_E \leq \beta$, tem-se

$$\int_0^L G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds - M(\|u'\|_2^2)u(t) \geq 0, \text{ para todo } t \in [0,L]. \tag{3.29}$$

Demonstração: Tomando $\beta = \min\{\frac{a_m}{\delta Lm}, \frac{2a_m}{L\delta}\}$, temos da equação (3.28) que $M(\|u'\|_2^2) \leq A, \quad \forall u \in E$ tal que $\|u\|_E \leq \beta$.

Vamos provar (3.29). Se $t \in [Lm, (1-m)L]$, de (3.21) , (3.22) e da observação 3.2.2 obtemos

$$\int_0^L G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds \geq a_m\frac{A}{\delta}, \qquad \forall u \in E \text{ e } \forall t \in [Lm,(1-m)L].$$

Como $\|u\|_E \leq \beta$, então $\|u\|_\infty \leq \frac{L\|u'\|_\infty}{2} \leq \frac{L\beta}{2} \leq \frac{a_m}{\delta}$. Assim $\forall t \in [Lm, (1-m)L]$ concluimos:

$$\begin{aligned}\int_0^L G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds &\geq a_m\frac{A}{\delta} \\ &\geq M(\|u'\|_2^2)\frac{a_m}{\delta} \\ &\geq M(\|u'\|_2^2)u(t),\end{aligned}$$

donde resulta que (3.29) se verifica no intervalo $[Lm, (1-m)L]$.

Agora se $t \in [0, Lm]$, como $\|u'\|_\infty \leq \frac{a_m}{\delta Lm}$ então segue do teorema do valor médio (ver [16]), que $Au(t)$ está abaixo do segmento que passa por $(0,0)$ e $(Lm, a_m\frac{A}{\delta})$. Como $\int_0^L G(t,s)f(s,0,0)ds$ é uma função côncava, de (3.23) resulta que esta aplicação está acima deste segmento, e portanto (3.29) ocorre. De maneira análoga prova-se para $t \in [(1-m)L, L]$. □

Para garantirmos a existência de solução, assumimos as seguintes hipóteses:

(H1) Asumimos as condições (3.21), (3.22) e (3.28) impostas sobre f e M, e que

$$g(s) \leq 0, \quad \forall s \in [-\beta, 0], \text{ e } \max_{s\in[-\beta,0]} |g(s)| = \frac{c\beta}{b},$$

onde β foi definido no Lema 3.2.5, e b, c são constantes positivas com

$$b = \max\left\{\int_0^L \frac{(L-t)t}{L^2}dt, \int_0^L \frac{t^2}{L^2}dt\right\}.$$

A condição de sinal aqui imposta sobre a função g, foi motivada por estarmos em busca de uma solução côncava para o problema, então esperamos que sua derivada segunda seja negativa, e também sua derivada em L, daí a condição para o sinal da g.

(H2) Existem constantes reais positivas a, d tais que

$$f(t,u,v) \leq \frac{d\beta}{a}, \qquad \forall (t,u,v) \in [0,L] \times [0, \frac{L\beta}{2}] \times [-\beta, \beta],$$

com

$$a = \max\left\{\int_0^L \int_0^L \frac{(L-t)}{L} G(t,s)dsdt, \int_0^L \int_0^L \frac{t}{L} G(t,s)dsdt\right\}.$$

(H3) As constantes c, d definidas em (H1) e (H2) respectivamente cumprem

$$c + d \leq 1.$$

Observação 3.2.6 *De $(H1)$ e do lema 3.2.5 tem-se*

$$Tu(x) \geq 0, \quad \forall x \in [0,L], \ \text{ e } (Tu)'' \leq 0,$$

para toda $u \in C \cap \overline{\Omega}_\beta$, assim o conjunto imagem $T(C \cap \overline{\Omega}_\beta)$ é formado por funções côncavas.

Proposição 3.2.7 *Se $u \in E$, e u é côncava então*

$$\|u'\|_\infty = \max\{|u'(0)|, |u'(L)|\}.$$

Demonstração: De fato sendo $u \in C^1[0,1]$ uma aplicação côncava, logo u' é decrescente no intervalo $[0,L]$ e como $u(0) = u(L) = 0$, então existe $c \in [0,L]$ tal que $u'(c) = 0$ (teorema do valor médio). Portanto

$$u'(x) \geq 0, \forall x \in [0,c] \text{ e}, \qquad u'(x) \leq 0, \forall x \in [c,L].$$

Logo

$$\max_{x\in[0,c]} |u'(x)| = u'(0), \qquad \max_{x\in[c,L]} |u'(x)| = |u'(L)|.$$

donde concluimos a afirmação. $\square$

Lema 3.2.8 *Se (H1) ocorre, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $u \in C$ com $\|u\|_E = \frac{1}{n_0}$, tem-se $\|Tu\|_E > \|u\|_E$.*

Demonstração: Se para todo inteiro positivo n, com $n \geq n_1$ (onde $n_1 \in \mathbb{N}$ e $\frac{1}{n_1} \leq \beta$) se verifica $\|Tu\|_E \not> \|u\|_E$, para toda $u \in E$ com $\|u\|_E = \frac{1}{n}$, segue que para todo $n \geq n_1$ existe $u_n \in C$ com $\|u_n\|_E = \frac{1}{n}$ e $\|Tu_n\|_E \leq \|u_n\|_E$. Assim construimos seqüência $(u_n)_{n\geq n_1}$ em E, tal que $u_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, e $Tu_n \longrightarrow 0$ quando $n \longrightarrow \infty$, como T é contínua, teríamos $T0 = 0$, o que contradiz (H1), uma vez que

$$\begin{aligned} \|T0(x)\|_\infty &= \left\| \int_0^L G(x,t) \left(\int_0^L G(t,s) f(s,0,0) ds - \frac{t}{L} g(u'(L)) \right) dt \right\|_\infty \\ &\geq \left\| \int_0^L G(x,t) \int_0^L G(t,s) f(s,0,0) ds dt \right\|_\infty > 0. \end{aligned}$$

Portanto existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $u \in C$ com $\|u\|_E = \frac{1}{n_0}$, tem-se $\|Tu\|_E > \|u\|_E$. $\square$

Para garantirmos a existência de solução positiva, aplicaremos o teorema 2.3.6. Para simplificar a notação denotaremos:

$$z(t) = \int_0^L G(t,s) f(s, u(s), u'(s)) ds - M(\|u'\|_2^2) u(t) - \frac{t}{L} g(u'(L)).$$

É imediato de (H1) e do lema 3.2.5 que $z(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, L]$ e $u \in C \cap \overline{\Omega}_\beta$.

Teorema 3.2.9 *Se $(H1) - (H2) - (H3)$ ocorrem então (3.14)-(3.15)-(3.16) tem uma solução côncava positiva $u^\star \in E$, tal que $\frac{1}{n_0} < \|u^\star\|_E \leq \beta$.*

Demonstração: Das condições assumidas para f, M e g temos que o operador T está bem definido e é contínuo. Do teorema de Arzelà-Ascoli (ver [18]) segue que T

é compacto. Aplicaremos o teorema de compressão do cone de Krasnoselskii para mostrar que o operador T definido em (3.20) tem um ponto fixo em C. Do que foi assumido em (H1), do lema 3.2.5 e da observação 3.2.6 segue que T aplica $C \cap \overline{\Omega}_\beta$ em C. Da definição de C e da proposição 3.2.7 obtemos que $\|.\|_E$ é crescente com respeito a C. Devemos mostrar que:

$$(i) \qquad \forall u \in C \text{ com } \|u\|_E = \beta \text{ implica } \|Tu\|_E \leq \beta,$$

e

$$(ii) \qquad \forall u \in C \text{ com } \|u\|_E = \frac{1}{n_0} \text{ implica } \|Tu\|_E > \frac{1}{n_0}.$$

(i) Seja $u \in C$ com $\|u\|_E = \beta$ então

$$\|Tu\|_E = \max_{x\in[0,L]} \left| \int_0^L \partial_x G(x,t)z(t)dt \right|.$$

Agora segue da Proposição 3.2.7 que

$$\|Tu\|_E = \max\left\{ \int_0^L \frac{t}{L} z(t)dt, \int_0^L \frac{L-t}{L} z(t)dt, \right\}.$$

Como $u \in C$ e $M(s) \geq 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}_+$ obtemos

$$z(t) \leq \int_0^L G(t,s)f(s,u(s),u'(s))ds - \frac{t}{L} g(u'(L)).$$

Deste fato, de (H1), (H2) e (H3) tem-se:

$$\|Tu\|_E \leq \max\left\{ \int_0^L \frac{t}{L} \left(\int_0^L G(t,s)\frac{d\beta}{a} ds + \frac{t}{L}\frac{c\beta}{b} \right) dt, \right.$$
$$\left. \int_0^L \frac{L-t}{L} \left(\int_0^L G(t,s)\frac{d\beta}{a} ds + \frac{t}{L}\frac{c\beta}{b} \right) dt \right\}$$

$$\leq \beta \max\left\{ \frac{d}{a} \int_0^L \int_0^L \frac{t}{L} G(t,s)dsdt + \frac{c}{b}\int_0^L \frac{t^2}{L^2} dt, \right.$$
$$\left. \frac{d}{a} \int_0^L \int_0^L \frac{L-t}{L} G(t,s)dsdt + \frac{c}{b}\int_0^L \frac{(L-t)t}{L^2} dt \right\}$$

$$\leq \beta(d{+}c) \leq \beta$$

donde concluimos (i).

(ii) Segue do Lema 3.2.8.

E o resultado segue do teorema de compressão do cone de Krasnoselskii 2.3.6. $\square$

3.2.1 Exemplo

Para mostramos que as condições (H1)-(H2)-(H3) assumidas para garantir a existência de solução para o problema (3.14)-(3.15)-(3.16) são possiveis apresentamos o seguinte exemplo:

Exemplo 3.2.10 *Suponhamos que*

$$\begin{aligned} L &= 1, \\ f(t,u,v) &= 6t + 2u^2 + 2v^2, \\ M(s) &= \frac{1}{3} + s, \\ g(s) &= 3s^3. \end{aligned}$$

Logo

$$h(t) = \int_0^1 G(t,s) f(s,0,0) ds = t - t^3$$

e então

$$\max_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) f(s,0,0) ds = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2\frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Tomemos

$$A = \frac{2}{3}, \qquad \delta = \frac{3}{\sqrt{3}} \qquad e \qquad m = \frac{1}{4}.$$

Sabendo-se que

$$\begin{aligned} h\left(\frac{1}{4}\right) &= \frac{1}{4} - \frac{1}{64} > 0,234, \\ h\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{3}{4} - \frac{27}{64} > 0,328, \end{aligned}$$

e observando que h é côncava obtemos:

$$h(t) > 0,5\frac{A}{\delta}, \quad \forall t \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right],$$

e então podemos considerar

$$a_{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Assim temos

$$\beta = \min\left\{\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4\sqrt{3}}}, \frac{1}{\frac{3}{\sqrt{3}}}\right\} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Como

$$b = \max\left\{\int_0^1 (1-t)tdt, \int_0^1 t^2 dt\right\} = \frac{1}{3}$$

e

$$a = \max\left\{\int_0^1 \int_0^1 (1-t)G(t,s)dsdt, \int_0^1 \int_0^1 tG(t,s)dsdt\right\} = \frac{1}{24},$$

as hipóteses $(H1)$*-*$(H3)$ *são satisfeitas.*

A hipótese $(H1)$ *é satisfeita tomando* $c = 1/3$*, pois* $g(s) \leq 0, \quad \forall s \in [-\beta, 0]$ *e*

$$\max_{s\in[-\beta,0]} |g(s)| = \max_{s\in[-\frac{\sqrt{3}}{3},0]} |3s^3| = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{c\beta}{b}.$$

A hipótese $(H2)$ *é satisfeita tomando* $d = 1/2$*, pois*

$$f(t,u,v) \leq 6 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = 6 + \frac{1}{6} + \frac{2}{3} < 6,9$$

e

$$\frac{d\beta}{a} = 4\sqrt{3} > 6,9.$$

Então

$$f(t,u,v) < \frac{d\beta}{a}, \quad \forall (t,u,v) \in [0,1] \times [0, \frac{\sqrt{3}}{6}] \times [-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}].$$

A hipótese $(H3)$ *é imediata, uma vez que*

$$c + d = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \leq 1.$$

Bibliografia

[1] AGARWAL, R.P.; O'REGAN, D.; MEEHAN, M. **Fixed Point Theory and Applications**, Cambridge University Press, 2001.

[2] AGARWAL, R.P.; WONG, P.J.Y.; O'REGAN, D. **Positive Solutions of Differential, Difference and Integral Equations**, Kluwer, Dordrech, 1999.

[3] AROSIO, A. A geometrical nonlinear correction to the Timoshenko beam equation, **Nonlinear Analysis**, Vol. 47, 729-740, 2001.

[4] BAI, Z.; WANG, Y; GE, W. Triple positive solutions for a class of two-point boundary-value problems, **Electronic Journal of Differential Equations**, Vol. 2004(6), 1-8, 2004.

[5] BAI, Z.; WANG, H. On positive solutions of some nonlinear fourth-order beam equations, **Journal of Mathematical Analysis and Applications**, Vol. 270, 357-368, 2002.

[6] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[7] GOEBEL K.; KIRK, W.A. **Topics in Metric Fixed Point Theory**, Cambridge University Press, 1990.

[8] GUO, D.; LAKSHMIKANTHAM, V. **Nonlinear Problems in Abstract Cones**, Academic Press, Orlando, 1988.

[9] KRASNOSEL'SKII, M.A. **Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations**, Noordhoff, Groningen, 1964.

[10] LIU, B. A note on a nonlocal boundary value problem, **Applied Mathematics and Computation**, Vol. 154, 871-880, 2004.

[11] MA, T.F. Existence results for a model of nonlinear beam on elastic bearings, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 13, 11-15, 2000.

[12] MA, T.F. Positive solutions for a nonlinear Kirchhoff type beam equation, **Applied Mathematics Letters**, Vol. 18, 479-482, 2005.

[13] WOINOWSKY-KRIEGER, S. The effect of axial force on the vibration of hinged bars, **Journal of Applied Mechanics**, Vol. 17, 35-36, 1950.

[14] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 1: Fixed-Point Theorems**, Springer Verlag, New York, 1989.

[15] MEDEIROS, L.A. e MELLO, E.A. **A integral de Lebesgue**, Rio de Janeiro, UFRJ, 1984.

[16] LIMA, E. L. **Curso de Análise**, Projeto Euclides. Rio de Janeiro, IMPA, 1994.

[17] LIMA, E. L. **Análise no Espaço** $\mathbb{R}^n$, Edgar Blücher Ltda.

[18] MUNKRES, JAMES R., **Topology**, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 2000.