UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

Estabilização Uniforme na Fronteira da Equação da Onda Semilinear com Dissipação não Linear na Fronteira

Maringá
2012

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

Estabilização Uniforme na Fronteira da Equação da Onda Semilinear com Dissipação não Linear na Fronteira

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria N. Domingos Cavalcanti

Maringá

2012

Estabilização Uniforme na Fronteira da Equação da Onda Semilinear com Dissipação não Linear na Fronteira

ARTHUR HENRIQUE CAIXETA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Profª. Drª. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientadora)

Prof. Drª. Luci Harue Fatori
Universidade Estadual de Londrina - UEL-PR

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Prof. Dr. Paulo Domingos Cordaro
Universidade de São Paulo - IME-USP-SP

Dedico este trabalho à minha família.

Aos meus amigos.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, por ter me dado forças nas horas que fraquejei e por ter me incentivado nos momentos em que pensei em desistir.

Agradeço à minha família, por entender minhas decisões, perceber meus sonhos e me ajudar a alcançá-los.

Aos amigos, a família que temos o privilégio de escolher, por amenizar a saudade de casa e estender a mão quando eu precisei.

Agradeço aos professores da graduação e do curso de mestrado, que adicionaram muito à minha formação pessoal e profissional.

Agradecimentos em especial às professoras Luci Harue Fatori, que me orientou em meu projeto de iniciação científica, e Valéria Neves Domingos Cavalcanti, que me orientou durante a pós-graduação. Estas dão o fundo de verdade da brincadeira que temos de chamar as orientadoras de mães. Obrigado pela paciência e compreensão.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, gostaria de agradecer a todas as pessoas que de acreditaram em mim. Muito obrigado!

Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes.

—— Isaac Newton.

Resumo

Neste trabalho, provamos a existência e unicidade de solução e estabelecemos taxas de decaimento uniforme para a energia associada à seguinte equação de onda com dissipação não-linear na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \ \ u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), & \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma$. Sendo $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 e Γ_1 subconjuntos não-vazios, fechados e disjuntos de Γ. Denotamos por $\frac{\partial}{\partial \nu}$ a derivada direcional na direção do vetor normal unitário externo à Γ.

Palavras-chave: Estabilização uniforme, Equação de onda semilinear, Dissipação não linear na fronteira.

Abstract

In this work, we proved the existence and uniqueness of solution and stablished uniform decay rates to the following wave equation with nonlinear boundary damping

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{on } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \;\; u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), & \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a bounded domain with smooth boundary $\partial\Omega = \Gamma$. In this case, $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, Γ_0 and Γ_1 nonempty, closed and disjoint subsets of Γ. We denote $\frac{\partial}{\partial \nu}$ the normal derivative and ν the unit outward normal field to Γ.

Keywords: Uniform stabilization, Semilinear wave equation, Nonlinear boundary damping.

Sumário

Introdução

Neste trabalho apresentamos de maneira didática e detalhada os resultados contidos no artigo de Irena Lasiecka e Daniel Tataru [19]. Inicialmente, apresentamos os resultados de existência e unicidade do problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \;\; u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), & \end{cases} \tag{0.1}$$

utilizando dois métodos, a saber: o método de Faedo-Galerkin e a resolução via Teoria dos Semigrupos. A opção de apresentar os dois métodos residiu no fato de criar a possibilidade de compará-los no que concerne à eficiência bem como na sua compreensão. Enquanto o primeiro método de resolução é mais construtivo e mais simples no que se refere aos pré-requisitos teóricos, torna-se evidente a necessidade de se exigir maior regularidade das funções envolvidas. Por outro lado, de modo a utilizar a Teoria dos Semigrupos, torna-se necessária a familiaridade com a Teoria dos Operadores Monótonos, o que implica no conhecimento de uma ferramenta teórica mais refinada. Neste contexto, usa-se fortemente os textos de Viorel Barbu e R. Showalter, conforme [2] e [32], respectivamente. Em contraste com a vasta maioria dos artigos escritos sobre este tema, o presente trabalho não impõe hipótese alguma sobre o comportamento na origem da função responsável pela dissipação, exceto no que diz respeito à continuidade e monotonicidade. O artigo estudado foi o primeiro a estabelecer taxas de decaimento uniforme ótimas para a energia associada ao sistema (0.1) sem que se imponha hipótese alguma sobre o crescimento da função g na origem. O método apresentado reduz o problema de se obter taxas de decaimento para uma equação diferencial parcial (EDP) à resolução de uma equação diferencial ordinária (EDO), dada explicitamente.

A idéia de se obter taxas de decaimento para uma classe de funções que respondem pela dissipação sem quantificar seu comportamento na origem, tem atraído considerável atenção na literatura. De fato, artigos como [23] e [24], devidos à Patrick Martinez, nos fornecem um método geral, baseado em desigualdades de energia (adaptando a estratégia iniciada em [16] com A. Haraux), que nos permitem calcular taxas de decaimento para sistemas dissipativos, impondo algumas hipóteses de regularidade à dissipação. Embora nesses trabalhos as taxas de decaimento sejam explícitas, elas não são ótimas para alguns casos importantes. Posteriormente, taxas de decaimento ótimas foram obtidas por Fatiha Alabau-Boussouira em [1], em que métodos da energia com peso mais refinados foram utilizados. As taxas obtidas em [19] estão em sintonia com as obtidas no presente trabalho.

Usualmente, na presença de dissipação não linear numa parte da fronteira, na literatura precedente considerava-se a fronteira subdividida em duas partes complementares, ou seja, $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ com $\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0\}$ e $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\}$, em que $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é um ponto fixado e $\nu(x)$ é a normal exterior unitária à Γ no ponto x. Além disso, as hipóteses feitas sobre a função g impunham um crescimento polinomial na origem, conforme Vilmos Komornik [18] - seção 9.2, o que implicava em taxas polinomiais. Nesta direção, podemos citar os artigos [23] e [24] de Patrick Martinez, que generalizou essas taxas, generalizando o crescimento de g na origem.

Temos, ainda, outro avanço significativo no que se refere à geometria do domínio Ω. Considerando a fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ subdividida em duas partes, Γ_0 e Γ_1, nenhuma imposição é feita sobre Γ_1, parte da fronteira onde atua a dissipação. No entanto, mantém-se a imposição geométrica sobre a parte não controlável da fronteira, isto é: $(x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0$ sobre Γ_0.

A dissertação encontra-se organizada conforme segue: No primeiro capítulo, apresentaremos algumas definições, notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o trabalho; no segundo capítulo, provaremos a existência e unicidade de solução para o problema dado utilizando os dois métodos anteriormente citados: o método de Faedo-Galerkin e a Teoria de Semigrupos; no terceiro capítulo, estabeleceremos taxas de decaimento para a energia associada ao sistema; e no quarto capítulo (Apêndice), encontram-se a demonstração de alguns resultados técnicos utilizados ao longo do segundo e terceiro capítulos.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No geral, o estudo das equações diferenciais parciais envolvem funções chamadas dados iniciais, que nem sempre possuem regularidade suficiente para possuírem derivada no sentido clássico. Devido à isso, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

em que $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha\, \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma sequência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a sequência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições podemos agora definir este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção é a seguinte:

Sejam u, v definidas num aberto limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos do teorema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|, \ para\ p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções integráveis num aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *convergente quase sempre para uma função* u. *Se existir uma função* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|u_\nu| \leq u_0$ *quase sempre,* $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ *então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [25].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função* u. *Se* $\liminf\limits_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu$ *é finito, então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [25].

Proposição 1.1.1. *Se* $u \in L^1(\Omega)$ *então as integrais indefinidas de* u *são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [25].

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Young) - *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$. *Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* f, g *em* $L^p(\Omega)$, *então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [25].

Proposição 1.1.4. (Desigualdade de Hölder) - *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3].

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.1.4.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ *e* $\frac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.1.5. (Desigualdade de Interpolação) - *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [26].

Proposição 1.1.6. (Desigualdade de Jensen) - *Seja* B *um hipercubo do* $\mathbb{R}^n$, *então para toda função côncava* F *e toda função integrável* $g \in L^1(B)$, *teremos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)} \int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{med(B)} \int_B F(g(x))dx$$

Demonstração: Ver [28].

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se (f_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 1.3. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))^{'}$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.7. *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))^{'}$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e* *somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω*, onde* T_u *é a distribuição definida por*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [5].

Deste lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.8. *Seja* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$*,* $1 \leq p < +\infty$*, tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$*, então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.2. (Lema de Gronwall) - *Sejam* $z \in L^\infty(0,T)$ *e* $f \in L^1(0,T)$ *tais que* $z(t) \geq 0$*,* $f(t) \geq 0$ *e seja* c *uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.1.3. (Lema de Lions) - *Seja* (u_ν) *uma sucessão de funções pertencentes à* $L^q(Q)$ *com* $1 < q < \infty$*. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q*,*

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$*,*

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$*.*

Demonstração: Ver [22].

Teorema 1.4. (Teorema da Média) - *Seja $f : (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [15].

1.1.3 Convolução e Regularização

Em toda esta seção consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. A prova de todos os resultados desta seção podem ser encontrados em Brèzis [3].

Definição 1.1.1. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 1.5. *Nas condições da definição 1.1.1 temos*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Notação: Dada uma função f denotamos $\breve{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 1.1.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^n} g(\breve{f} * h).$$

Proposição 1.1.10. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$supp\ (f * g) \subset supp\ f + supp\ g.$$

Proposição 1.1.11. *Sejam $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (k natural). Então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$*

e vale a fórmula de derivação

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, então* $(f * g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Definição 1.1.2. *Denominamos sucessão regularizante a toda sucessão* $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *de funções tais que*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad supp\ \rho_n \subset B\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.1.12. *Seja* $f \in C(\mathbb{R}^n)$*. Então* $(\rho_n * f) \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* R^n*.*

Proposição 1.1.13. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$*. Então* $(\rho_n * f) \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, caracterizaramos os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$ para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x,y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

munido do produto interno

$$(u,v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+||x||^2)^s \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}dx.$$

Prova-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com o produto interno descrito acima é um espaço de Hilbert. Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n-1$, Ω estando localmente do mesmo lado de Γ.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

que leva u na sua restrição a Ω. Então r_Ω é uma aplicação linear e contínua. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se,

$$D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$$

no sentido das distribuições. Decorre daí que para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) & \to & H^m(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

é contínua. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega;\ u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H^s_0(\Omega)\right)' \text{ onde } H^s_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

A fim de definirmos uma topologia para $H^s(\Omega)$ consideremos o seguinte espaço de Banach

$$\frac{H^s(\mathbb{R}^n)}{\ker(r_\Omega)} = \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da seguinte norma

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in v + \ker(r_\Omega)\}.$$

Por outro lado, para cada $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); \omega \in v + ker(r_\Omega)\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Logo,

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Diante disto, face a sobrejetividade de r_Ω, podemos definir

$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||r_\Omega v||_{H^s(\Omega)} = ||[v]||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\}.$$

Mudido desta norma, para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$, as normas

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad ||u||_{H^m(\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\},$$

são equivalentes em $H^m(\Omega)$.

Proposição 1.1.14. *Para todo $s \geq 0$, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.15. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua de um espaço no outro.*

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.6. (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \ se\, m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.4. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Sejam s_1, s_2 e s_3 números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [21].

Proposição 1.1.16. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.7. (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [5].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

Proposição 1.1.17. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Se $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

onde $p*$ vem dado por $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, existe uma constante $C = C(p,n)$ tal que

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.8. *Quando $n > 2$ temos a inclusão $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ para todo ρ satisfazendo $2 \leq \rho \leq p$, onde p é dado por: $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$.*

Demonstração: Ver [14].

Teorema 1.9. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior à Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:

$$\int_\Omega \nabla u\nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.10. (Identidades de Green generalizadas) -

Para todo $u \in \mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ *e* $v \in H^2(\Omega)$, *tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} - (u, \Delta v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} + \langle \gamma_0 u, \gamma_1 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ *e* $v \in H^1(\Omega)$, *tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.18. (Regularidade dos problemas elípticos) - *Seja* Ω *um aberto de classe* C^2 *com fronteira* Γ *limitada. Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$, *verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, *onde* c *é uma constante que só depende de* Ω. *Além disso, se* Ω *é de classe* C^{m+2} *e* $f \in H^m(\Omega)$, *então* $u \in H^{m+2}(\Omega)$ *com* $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; *em particular, se* $m > \frac{n}{2}$ *então* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. *Ainda, se* Ω *é de classe* C^∞ *e* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.19. *Seja* $I = (a, b)$ *limitado ou não. Sejam* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *e* $u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq +\infty$. *Então* $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ *e*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração: Ver [3].

1.2 Espaços Funcionais a Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u:(a,b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, as funções $u:(a,b) \to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup\left\{c \geq 0; \|u(t)\|_X \leq c, q.s.\right\}.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, $m = 0, 1, \ldots$, consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Seja $u \in L^1(a,b;X)$. Diremos que $v \in L^1(a,b;X)$ é a derivada fraca de u e escrevemos $u' = v$ desde que

$$\int_a^b \phi'(t)u(t)dt = -\int_a^b \phi(t)v(t)dt$$

para toda $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\phi \in C_0^\infty([a,b])$.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(a,b;X)$ consiste de todas as funções vetoriais $u \in L^p(a,b;X)$

tal que u' existe no sentido fraco e $u' \in L^p(a,b;X)$. Define-se

$$||u||_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b ||u(t)||_X^p + ||u'(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup\limits_{a \leq t \leq b} \text{ess}\,(||u(t)||_X + ||u'(t)||_X) \leq \infty & \text{se} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Escrevemos $H^1(a,b;X) = W^{1,2}(a,b;X)$.

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [33]

Proposição 1.2.1. *Sejam $m = 0, 1, \ldots$; $1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então:*

(a) $C^m([a,b];X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) $C([a,b];X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(d) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(f) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Proposição 1.2.2. *Seja $u \in W^{1,p}(a,b;X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então, $u \in C([a,b];X)$.*

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. Noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$: seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida como um único elemento deste espaço que satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função de $L^2(a,b;X)$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ que a cada f associa $\tilde{f}$, é linear e contínua, e ainda é injetora. Portanto, identificando $\tilde{f}$ com f obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde χ_K denota a função característica de K.

Teorema 1.11. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.*
(a) A cada função $v \in L^q(a,b;X')$ corresponde um único funcional $\overline{v} \in Y'$, onde $Y' = L^p(a,b;X)$, dado por

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ corresponde exatamente uma única função $v \in L^q(a,b;X')$

dada por (1.1). Além disso

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a,b;X)$ é reflexivo e separável.

Demonstração: Ver [33].

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a,b;X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico entre os dois espaços. Donde

$$\langle v,u\rangle = \int_a^b \langle v(t),u(t)\rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt\right)^{\frac{1}{q}}; \quad \forall u \in Y; \quad \forall v \in Y'.$$

Sejam a e b dois números reais, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a,b) := \{u \in L^2(a,b;X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a,b;Y)\},$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a,b;X)$. O conjunto $W(a,b)$ munido da norma

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|_{L^2(a,b;X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais

$\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b;X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a,b) tal que *supp* (φ_ν) e *supp* (φ) estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a,b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a,b;X)$.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b;X), v' \in L^2(a,b;X), \quad v(a) = v(b) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b;X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b;X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.2.3. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [27].

Da proposição anterior podemos identificar f com u'. De posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b;X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.

Corolário 1.2.3.1. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b;X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X);$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [27].

Teorema 1.12. (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach* *tais que* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, *onde* B_0 *e* B_1 *são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, *e consideremos* W *munido da norma*

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W *em* $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver [22].

Lema 1.2.1. *Sejam* H *e* V *espaços de Banach, tais que* $H \hookrightarrow V$. *Se* $u \in L^1(0,T;H)$ *e* $u' \in L^1(0,T;V)$ *então* $u \in C^0([0,T];V)$.

Demonstração: Ver [30].

1.3 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ, ou seja,$\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Inicialmente, vamos definir o espaço $H^s(\Gamma)$.

No caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, temos que $\Gamma = \{(x',0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, identificamos toda função u definida em Γ com a função $x' \to u(x',0)$ do $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$. Com tal identificação temos que $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, neste caso simples, definimos $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Fixemos um sistema de cartas locais de Γ, isto é, $\{(U_1,\varphi_1),(U_2,\varphi_2),...,(U_N,\varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_N$ no $\mathbb{R}^n$ tais que

$$supp(\sigma_j) \subset U_j,\ j = 1,2,...,N, \qquad \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1,\ x \in \Gamma.$$

Dada uma função w definida em Γ, para todo $j = 1, 2, ..., N$ seja

$$w_j(y) = \begin{cases} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se} \quad y' \in \Omega_0 = (0,1)^{n-1}, \\ 0 & \text{se} \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

Sendo $supp(\gamma_0 \sigma_j) = supp\ \sigma_j \cap \Gamma \subset U_j \cap \Gamma$ e como φ_j aplica $U_j \cup \Gamma$ sobre $\Omega_0 \times \{0\}$, temos

$$supp\ w_j \subset \varphi_j(supp\ \sigma_j \cup \Gamma) \subset \Omega_0 \times \{0\}.$$

Decorre daí que se $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$, então w_j pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, ..., N$.

Dado $s > 0$ consideremos $H^s(\Gamma)$ como sendo o espaço vetorial das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, ...N$, munido do seguinte produto escalar:

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (w_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})};$$

para todo $w, v \in H^s(\Gamma)$. Temos que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert com $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.3.1. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [26].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.3.1 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

tal que

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma; \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.13. *A função traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [26].

Consideremos, agora, Ω uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.14. *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,, \; \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita, linear e contínua.

Demonstração: Ver [26].

Considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos respectivos produtos internos

$$\begin{aligned}
(u, v)_{\mathcal{H}^0} &= (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\ u\,, v \in \mathcal{H}^0(\Omega), \\
(u, v)_{\mathcal{H}^1} &= (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\ u\,, v \in \mathcal{H}^1(\Omega),
\end{aligned}$$

temos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.2. *A aplicação linear* $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ *definida por*

$$u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$$

se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua

$$\begin{array}{rcl} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) & \to & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u & \mapsto & \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{array}$$

Além disso, a aplicação γ *acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.*

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.3.3. *A aplicação linear* $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \ \to \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [5].

1.3.1 Traço em $L^2(0, T; H^m(\Omega))$.

Conforme visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{1.2}$$

linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e que admite uma inversa à direita também linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & L^2(0, T; H^m(\Omega)) & \to & L^2\left(0, T; \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, \end{array} \tag{1.3}$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$; onde $\gamma(u(t))$ é a aplicação γ dada em (1.2) aplicada em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.2) e (1.3) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.3) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita τ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega)),;\gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.4}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, \end{array} \tag{1.5}$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$ e que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.3).

Proposição 1.3.4. *Seja $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então $\gamma u' = (\gamma u)'$.*

Demonstração: Ver [27].

1.3.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ constituído dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & M^{\perp} \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{array} \tag{1.6}$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v') = \langle f, v\rangle; \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f'$. A aplicação definida em (1.6) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ definimos $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma \phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma \psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt; \tag{1.7}$$

para todo $w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim, temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma} f; \end{array} \tag{1.8}$$

onde $\widetilde{\gamma} f$ definido por (1.7), é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim, são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.5. *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma} u.$$

Proposição 1.3.6. *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\widetilde{\gamma} u' = (\gamma u)'.$$

Teorema 1.15. *A aplicação traço (1.8) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\widetilde{\tau} : H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

Demonstração: Ver [27].

Observação 1.3.1. *Se nos resultados anteriormente vistos considerarmos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ ou $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, ao invés de $H^m(\Omega)$, em conjunto com as Proposições 1.3.2 e 1.3.3 obteremos a existência das aplicações lineares e contínuas*

$$\widetilde{\gamma} : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

e

$$\widetilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

1.4 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [13].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1.9) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

Corolário 1.16.1. *Sejam $\Omega = [0,T) \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.9) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

1.5 Topologia Fraca - $\sigma(E,E')$ e Topologia Fraco $\star$ - $\sigma(E',E)$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.5.1. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E,E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f, $f \in E'$.*

Notação: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E,E^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.5.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$*em E.*

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$*em E, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$*em E e* $f_n \to f$ *em E', então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [3].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.5.2. *A topologia fraco $\star$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.5.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iv) Se $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.2. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.17. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F. Então, T é contínuo em E, munido da topologia fraca $\sigma(E, E')$, em F, munido da topologia fraca $\sigma(F, F')$. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [3].

1.6 Teoria de Semigrupos

Sejam V e W espaços de Banach reais, então $V \times W$ denotará o espaço produto cartesiano. Um elemente do espaço $V \times W$ será escrito na forma $[v, w]$ para $v \in V$ e $w \in W$. Um operador multivalor A de V em W será visto como um subconjunto de $V \times W$. Se $A \subset V \times W$, definimos

$$\begin{aligned} Av &= \{w \in W; [v, w] \in A\}; \quad D(A) = \{v \in V; Av \neq \emptyset\}; \\ Im(A) &= \bigcup_{v \in D(A)} Av; \quad A^{-1} = \{[w, v]; [v, w] \in A\}. \end{aligned}$$

Nesta seção V denotará um espaço de Banach real, V' o seu espaço dual. O valor de $v^* \in V'$ em $v \in V$ será denotado por $\langle v, v^* \rangle$ ou $\langle v^*, v \rangle$.

1.6.1 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Banach

Definição 1.6.1. *Um conjunto $A \subset V \times V'$ é chamado de monótono se*

$$\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0; \quad \forall \, [u_i, v_i] \in A, i = 1, 2.$$

Um subconjunto monótono de $V \times V'$ é chamado de maximal monótono se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono de $V \times V'$.

Se A é um operador de valor único de $V \times V'$, então a condição de monotonicidade torna-se

$$\langle u_1 - u_2, Au_1 - Au_2 \rangle \geq 0; \quad \forall \, u_1, u_2 \in D(A).$$

Definição 1.6.2. *Um operador multivalor $A : X \longrightarrow X'$ é chamado coercivo, se*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\langle x_n, x_n' \rangle}{\|x_n\|} = \infty,$$

para todo par $[x_n, x_n'] \in A$ tal que $\lim\limits_{n \to \infty} \|x_n\| = \infty$.

Definição 1.6.3. *Seja A um operador de valor único definido de V em V' tal que $D(A) = V$. A é dito ser* <u>*hemicontínuo*</u> *em V se*

$$w - \lim_{t \to 0} A(u + tv) = Au, \quad \forall u, v \in V;$$

onde "$w - lim$" denota que a convergência é fraca.

Teorema 1.18. *Seja V um espaço de Banach reflexivo e B um operador monótono, hemicontínuo e definido em todo V tomando valores em V'. Então, B é maximal monótono. Se, além disso, B for coercivo, então $Im(B) = V'$.*

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.19. *Sejam X e X' reflexivos e estritamente convexos. Seja $F : X \longrightarrow X'$ a aplicação dualidade de X. Se A é um subconjunto monótono de $X \times X'$, então A é maximal monótono em $X \times X'$ se, e somente se, para todo $\lambda > 0$ (equivalentemente para algum $\lambda > 0$), $A + \lambda F : X \longrightarrow X'$ é sobrejetor.*

Demonstração: Ver [2].

Teorema 1.20. *Seja X reflexivo, e sejam A e B conjuntos maximais monótonos de $X \times X'$. Suponha que*

$$(int(D(A)) \cap D(B)) \neq \emptyset.$$

Então $A + B$ é maximal monótono em $X \times X'$.

Demonstração: Ver [2].

1.6.2 Subdiferencial de Funções Convexas

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu espaço dual topológico.

Definição 1.6.4. *A* <u>*G-diferencial*</u> *de $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ em $u \in D(\varphi)$ é uma função $f \in V'$ tal que $f(v) = \varphi'(u, v)$, $\forall\ v \in V$. Esta função f é única, é denotada por $\varphi'(u)$ e dizemos que φ é* <u>*G-diferenciável*</u> *em u, ou diferenciável à Gateaux.*

Observação: $\varphi'(u,v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\varphi(u+tv) - \varphi(u)\Big)$ é a derivada direcional de u na direção de v.

Definição 1.6.5. *Uma função convexa e própria em V é uma função φ de V em $(-\infty, +\infty]$, tal que φ não é identicamente igual a $+\infty$ e*

$$\varphi((1-\lambda)u + \lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi(u) + \lambda\varphi(v),$$

onde $u, v \in V$ e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Definição 1.6.6. *Seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ convexa e própria. A subdiferencial de φ em $u \in D(\varphi)$ é o conjunto de todos os funcionais $u^* \in V'$ tais que*

$$\langle u^*, v - u\rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad v \in V,$$

e é denotado por $\partial\varphi(u)$. Cada um desses $u^* \in \partial\varphi(u)$ é também chamado de subdiferencial de φ em u.

Proposição 1.6.1. (Kachurovskii) *Seja K convexo em V e seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ G-diferenciável em cada $u \in K$, $K = D(\varphi)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) φ *é convexa,*

(ii) $\langle \varphi'(u), v - u\rangle \leq \varphi(v) - \varphi(u), \quad \forall\ u, v \in K,$

(iii) $\langle \varphi'(u) - \varphi'(v), u - v\rangle \geq 0 \quad \forall\ u, v \in K.$

Demonstração: Ver [32].

Proposição 1.6.2. *Seja $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ um funcional convexo e próprio. Se φ é G-diferenciável em $u \in int(D(\varphi))$, então $\partial\varphi(u) = \{\varphi'(u)\}$. Se φ é contínua e $\partial\varphi(u)$ é único, então φ é G-diferenciável em u.*

Demonstração: Ver [32].

Proposição 1.6.3. *Seja $\varphi : W \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ uma função convexa e $\Lambda : V \longrightarrow W$ contínua e linear. Se φ é contínua eem algum ponto de $Im(\Lambda)$, então $\partial(\varphi \circ \Lambda) = \Lambda^* \circ \partial\varphi \circ \Lambda$.*

Demonstração: Ver [32].

Definição 1.6.7. *A função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ é dita semicontínua inferiormente em V se*

$$\liminf_{v \to u} \varphi(v) \geq \varphi(u), \quad \forall\ u \in V.$$

Teorema 1.21. *Seja φ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em V. Então $\partial\varphi$ é um operador maximal monótono de V em V'.*

Demonstração: Ver [2].

1.6.3 Operadores Dissipativos

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu dual. Denotaremos por $F : V \to V'$ a aplicação dualidade de V.

Definição 1.6.8. *Um subconjunto A de $V \times V$ (equivalentemente um operador multivalor de V nele mesmo) é chamado de dissipativo se para quaisquer $[x_i, y_i] \in A,\ i = 1, 2,$ existe $f \in F(x_1 - x_2)$ tal que*

$$f(y_1 - y_2) \leq 0.$$

Um conjunto dissipativo A é dito ser maximal dissipativo se não está contido propriamente em qualquer subconjunto de $V \times V$.

Um conjunto dissipativo A é chamado de m-dissipativo se

$$Im(I - A) = V.$$

Em particular, se V é um espaço de Hilbert e A é m-dissipativo, então, A é um operador de valor único e $-A$ é maximal monótono.

1.6.4 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $((\cdot,\cdot))$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H e consideremos $A : D(A) \subset H \to H$ um operador não limitado de H.

Definição 1.6.9. *Dizemos que A é um operador monótono se para todos $v_1, v_2 \in D(A)$ tivermos $((Av_1 - Av_2, v_1 - v_2)) \geq 0$.*

A é dito maximal monótono se, for monótono e, além disso, $Im(I + A) = H$, ou seja,

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Proposição 1.6.4. *Seja A um operador maximal monótono sobre H, então temos:*

(i) $\overline{D(A)} = H$.

(ii) *A é fechado.*

(iii) $\forall \lambda > 0$, *$(I + \lambda A)$ é bijetor de $D(A)$ sobre H e $(I + \lambda A)^{-1}$ é limitado com* $||(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.22. ***(Hille-Yosida)*** *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Além disso, se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \;\; e \;\; \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall\, t \geq 0, \tag{1.11}$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico

$$||u||_{D(A)} = |u| + |A\,u|.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.23. *Seja A um operador em H, H espaço de Hilbert, tal que para algum $\omega_1 \geq 0$, $A + \omega_1 I$ é maximal monótono. Seja $B : H \longrightarrow H$ é uma função lipschitziana, com constante de Lipschitz $\omega_2 > 0$. Então, para cada $\lambda \geq 0$, $u_0 \in D(A)$ $(\overline{D(A)})$ e $f : [0,T] \longrightarrow H$ absolutamente contínua, existe uma única solução (generalizada) de*

$$\frac{du}{dt}(t) + Au(t) + Bu(t) = \lambda u(t) + f(t),$$

absolutamente contínua e tal que $u(0) = u_0$.

Demonstração: Ver [32].

Proposição 1.6.5. *Seja $\varphi : W \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ convexa, $\Lambda : V \longrightarrow W$ contínua e linear, e suponha que φ seja contínua em algum ponto de $Im(\Lambda)$. Então $\partial(\varphi \circ \Lambda) = \Lambda' \circ \partial\varphi \circ \Lambda$.*

Demonstração: Ver [32].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de solução para o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \ \ u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

utilizando o método de Faedo-Galerkin e a Teoria de Semigrupos. Utilizaremos os dois métodos de modo a permitir a comparação da eficiência entre eles e iniciaremos com o método de Faedo-Galerkin por ser mais construtivo e, desta forma, mais didático.

As funções g, f_0 e f_1 devem satisfazer inicialmente as seguintes hipóteses

(**H.1**) A função não linear $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(i) g é contínua e monótona crescente sobre $\mathbb{R}$;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) Existem m e M constantes tais que $0 < m < M$ e $ms^2 \leq g(s)s \leq Ms^2, |s| > 1$.

(**H.2**)

(i) $f_0 \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, C^1 por partes e diferenciável na origem;

(ii) $f_0(s)s \geq 0$;

(iii) $|f_0'(s)| \leq K(1+|s|^{k_0-1})$, $1 < k_0 < \dfrac{n}{n-2}$, para $|s| > R$ grande o suficiente.

(H.3)

(i) $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é localmente lipschitziana, contínua e diferenciável na origem;

(ii) $f_1(s)s \geq 0$;

(iii) $|f_1(s)| \leq A(|s| + |s|^{k_1})$, $s \in \mathbb{R}$ $1 < k_1 < \frac{n-1}{n-2}$, A constante.

No que segue, denotaremos por $\mathcal{V}$, o espaço $\mathcal{V} = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}$. Em $\mathcal{V}$, definimos a seguinte norma

$$||v||_{\mathcal{V}}^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx, \tag{2.2}$$

que é proveniente do produto interno

$$(v,u)_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx.$$

Com esta norma, $\mathcal{V}$ é um espaço de Hilbert e, além disso, esta norma é equivalente à norma de $H^1(\Omega)$ em $\mathcal{V}$.

Usaremos as seguintes notações:

$$Q = \Omega \times (0,T), \Sigma = \Gamma \times (0,T), \Sigma_i = \Gamma_i \times (0,T), \;\; i = 0,1.$$

$$||v||_\Omega^2 = ||v||_{L^2(\Omega)}^2 = \int_\Omega |v(x)|^2 dx \;\text{ e }\; ||v||_\Gamma^2 = ||v||_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma.$$

$$(u,v)_\Omega = (u,v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x) \;\; dx \;\text{ e }\; (u,v)_\Gamma = (u,v)_{L^2(\Gamma)} = \int_\Gamma u(x)v(x) \;\; dx.$$

2.2 Existência e Unicidade de Solução - Via método de Faedo-Galerkin

De modo a resolver o problema (2.1) utilizando o método de Faedo-Galerkin, utilizaremos o método direto de resolução usual, isto é, primeiramente será resolvido um problema com dados iniciais mais regulares e, a partir de argumentos de densidade, demonstraremos a existência e unicidade de solução para o problema inicial.

Além disso, para provar o desejado pelo método de Faedo-Galerkin, fez-se necessária a adição de hipóteses sobre as funções g, f_0, e f_1. Tais funções devem satisfazer hipóteses adicionais conforme segue

(H.1)' A função g satisfaz $(H.1)$, é de classe $C^1(\mathbb{R})$ e sua derivada é limitada;

(H.2)' A função f_0 satisfaz $(H.2)-(ii)$, é lipschitziana de classe C^1 e sua derivada é limitada;

(H.3)' A função f_1 satisfaz $(H.3)$, é Lipschitz contínua de classe C^1 e f_1' é limitada.

Com o intuito de não sobrecarregar a notação, denotaremos por u' a derivada da função u com relação à variável t, ou seja, $u' = \dfrac{du}{dt} = u_t$.

2.2.1 Solução Regular

Nesta seção provaremos a existência de solução para o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u_t = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}, \;\; u_t(0) = u^1 \in \mathcal{V}. & \end{cases} \tag{2.3}$$

A partir deste, por meio de uma sequência de soluções, obteremos a solução para o problema (2.1). Observemos que foi adicionada a perturbação αu_t, $\alpha > 0$, aos termos de fronteira, com o intuito de resolver o problema.

Teorema 2.1. *Suponha que sejam satisfeitas as hipóteses* $(H.1)' - (H.3)'$.

Se $\{u^0, u^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ *e satisfazem a condição de compatibilidade*

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha u^1 = -g(u^1) - f_1(u^0) \quad q.s. \text{ em } \Gamma_1,$$

então existe uma solução do problema (2.3) na classe

$$u \in L^\infty\left(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}\right) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

Se, além disso, a função g *satisfizer a condição de coercividade, isto é,*

$$g(s_1) - g(s_2) \geq \alpha_0(s_1 - s_2) \quad \text{para quaisquer } s_1 \geq s_2 \text{ e } \alpha_0 > 0 \text{ fixo},$$

então a solução do problema (2.3) é única. A função u *será dita solução forte ou regular de (2.1)*

Multiplicando a equação $u_{tt} - \Delta u + f_0(u) = 0$ por uma função admissível v, integrando em Ω, fazendo uso da segunda identidade de Green e observando que $u = 0$ em $\Gamma_0 \times (0, \infty)$ vem que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_{tt}(x,t)v(x)\ dx + \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x)\ dx + \int_{\Gamma_1} G(u'(x,t))v(x)\ d\Gamma \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} f_1(u(x,t))v(x)\ d\Gamma + \int_\Omega f_0(u(x,t))v(x)\ dx = 0, \quad \forall t \in]0, \infty[. \end{aligned}$$

em que $G(s) = \alpha s + g(s)$.

Consideremos $\{w_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço $\mathcal{V}$. A partir desta base, construiremos uma outra base relacionada ao problema perturbado, da seguinte forma: Se u^0, u^1 são linearmente independentes, definimos $w_1 = u^0$, $w_2 = u^1$ e para w_i, $i \geq 3$, os vetores são os elementos da base $\{w_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ escolhidos de tal forma que sejam linearmente independentes com u^0 e u^1. Caso u^0 seja um múltiplo escalar de u^1, escolhemos $w_1 = u^0$ e para w_i, $i \geq 2$, os vetores são os elementos da base $\{w_j^*\}_{j\in\mathbb{N}}$ que sejam linearmente independentes com u^0.

Esta nova base denotaremos por $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$. Ponhamos $V_m = [w_1, \ldots, w_m]$ e consideremos em V_m o problema aproximado

$$(PA)\ \begin{cases} u_m(t) \in V_m \Leftrightarrow u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}(t) w_i, \\ (u_m''(t), v) + (\nabla u_m(t), \nabla v) + (f_1(u_m(t)), v)_{\Gamma_1} + (G(u_m'(t)), v)_{\Gamma_1} + (f_0(u_m(t)), v) = 0,\ \ v \in V_m \\ u_m(0) = u^0, \\ u_m'(0) = u^1; \end{cases} \tag{2.4}$$

A existência de solução do problema (PA), será obtida a partir da demonstração da existência de solução de um problema equivalente, garantida pelo Teorema de Carathéodory (ver seção 1.4). Esta demonstração encontra-se no Apêndice.

Mais adiante, provamos também que

$$\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \le C(T), \quad \forall t \in [0, T] \ \ \text{e} \ \ \forall T > 0.$$

Com isto, podemos estender u À todo o intervalo $(0, \infty)$ usando o seguinte argumento: $T_{máx} = \infty$ ou se $T_{máx} < \infty$ então $\lim\limits_{t \to T_{máx}} \left(\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) = \infty$. Portanto, é suficiente provar a existência de solução para todo T finito, como mencionado em [10].

2.2.1.1 *Primeira Estimativa a Priori*

O Teorema de Carathéodory nos fornece que $u_m(t)$ e $u_m'(t)$ são absolutamente contínuas e como consequência disto, $u_m'(t)$ e $u_m''(t)$ existem no sentido de Dini.

Inicialmente, observemos que como estamos considerando a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ ortonormal em $L^2(\Omega)$, resulta que para $j = 1, ..., m$,

$$\gamma_{jm}''(t) = (u_m''(t), w_j) = -(\nabla u_m(t), \nabla w_j) - (G(u_m'(t)) - f_1(u_m(t)), w_j)_{\Gamma_1} - (f_0(u_m(t)), w_j). \tag{2.5}$$

Disto segue que

$$|\gamma''_{jm}(t)| \leq \|u_m(t)\|_{\mathcal{V}}\|w_j\|_{\mathcal{V}} + \int_{\Gamma_1} |G(u'_m) + f_1(u_m)|\,|w_j|d\Gamma + \int_{\Omega} |f_0(u_m)||w_j|dx$$

Pela continuidade das funções envolvidas e da desigualdade de Hölder, segue que $\gamma''_{jm}(t) \in L^2(0, t_m)$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_m} ||u''_m(t)||^2_{\Omega} dt &= \int_0^{t_m} ||\sum_{j=1}^{m} \gamma''_{jm}(t) w_j||^2_{\Omega} dt \\
&\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^{m} ||\gamma''_{jm}(t) w_j||^2_{\Omega} dt \\
&= \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^{m} |\gamma''_{jm}(t)|^2 ||w_j||^2_{\Omega} dt \;\leq\; \sum_{j=1}^{m} ||w_j||^2_{\Omega} \int_0^{t_m} |\gamma''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u''_m \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)). \tag{2.6}$$

Assim, como $u'_m(t)$ é absolutamente contínua em $(0, t_m)$, podemos concluir que

$$\int_{\Omega} u''_m(t)\; u'_m(t)\; dx \quad \in L^1(0, t_m). \tag{2.7}$$

Considere $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Então, de (2.7) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\langle (u''_m(t), u'_m(t)), \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} &= \langle \int_{\Omega} u''_m(x,t) u'_m(x,t) dx, \theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} \\
&= \int_0^{t_m} \int_{\Omega} u''_m(x,t) u'_m(x,t) \theta(t) dx dt \\
&= \int_{\Omega} \int_0^{t_m} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u'_m(x,t))^2 \theta(t) dt dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left\{ (u'_m(x,t))^2 \theta(t)|_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} (u'_m(x,t))^2 \theta'(t) dt \right\} dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_\Omega (u'_m(x,t))^2\theta'(t)dxdt \\
&= -\frac{1}{2}\langle ||u'_m(t)||^2_\Omega, \theta'\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega, \theta\rangle;
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$(u''_m(t), u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega. \tag{2.8}$$

Da mesma forma provamos que

$$(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||^2_\Omega. \tag{2.9}$$

Retornemos ao problema aproximado (PA) e consideremos $v = w_j,\ j = 1, ..., m$. Multiplicando a equação por $\gamma'_{jm}(t), t \in [0, t_m)$, e somando em j de 1 até m obtemos

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) + (G(u'_m(t)) + f_1(u_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} + f_0(u_m(t)), u'_m(t)) = 0. \tag{2.10}$$

Substituindo (2.8) e (2.9) em (2.10), obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega \ &+\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||^2_\Omega \ +\ \alpha||u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} + \int_{\Gamma_1} f_1(u_m(x,t))u'_m(x,t)\ d\Gamma \\
&+\ \int_{\Gamma_1} g(u'_m(x,t))u'_m(x,t)\ d\Gamma + \int_\Omega f_0(u_m(x,t))u'_m(x,t)\ dx = 0.
\end{aligned}
$$

Mas temos por $(H.1)-(ii)$ que $g(s)s \geq 0$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega \ &+\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||^2_\Omega \ +\ \alpha||u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} \\
&\leq\ -\underbrace{\int_{\Gamma_1} f_1(u_m(x,t))u'_m(x,t)\ d\Gamma}_{I_1} - \underbrace{\int_\Omega f_0(u_m(x,t))u'_m(x,t)\ dx}_{I_2}.
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

(i) Estimativa para I_1: De $(H.3)$, pela desigualdade de Young e da continuidade do traço de ordem 0,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} |f_1(u_m(x,t))||u_m'(x,t)| \; d\Gamma &\leq \int_{\Gamma_1} L_1(2\epsilon)^{-1/2}|u_m(x,t)|(2\epsilon)^{1/2}|u_m'(x,t)| \; d\Gamma \\
&\leq \frac{L_1^2}{4\epsilon}||u_m(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} + \epsilon||u_m'(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} \\
&\leq k||\nabla u_m(t)||^2_{\Omega} + \epsilon||u_m'(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)}
\end{aligned}
$$

(ii) Estimativa para I_2: De $(H.2)$ e usando novamente a desigualdade de Young,

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega} |f_0(u_m(x,t))||u_m'(x,t)| \; dx &\leq \int_{\Omega} L_0(2\epsilon)^{-1/2}|u_m(x,t)|(2\epsilon)^{1/2}|u_m'(x,t)| \; dx \\
&\leq \frac{L_0^2}{4\epsilon}||u_m(t)||^2_{\Omega} + \epsilon||u_m'(t)||^2_{\Omega},
\end{aligned}
$$

sendo L_i a constante de Lipschitz associada à f_i, $i = 0, 1$.

Ponhamos $E(t, u_m) = \dfrac{1}{2}(||u_m'(t)||^2_{\Omega} + ||\nabla u_m(t)||^2_{\Omega})$ e $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2}$. Então, de (2.11), temos

$$
\frac{dE}{dt}(t, u_m) \leq \frac{d}{dt}E(t, u_m) + \frac{\alpha}{2}||u_m'(t)||^2_{\Gamma_1} \leq K_1 E(t, u_m),
$$

em que K_1 é uma constante que depende da continuidade do traço de ordem 0 e da imersão $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$.

Integrando de 0 a t, para $0 < t < t_m$ e aplicando o lema de Gronwall, segue que

$$
E(t, u_m) \leq E(u^0, u^1)e^{K_1 T}.
$$

Com isto provamos a existência de uma constante $C > 0$, que independe de $t \in [0, t_m)$ e $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$
||u_m'(t)||^2_{\Omega} + ||\nabla u_m(t)||^2_{\Omega} + \alpha \int_0^t ||u_m'(t)||^2_{\Gamma_1} dt \leq C; \quad \forall t \in [0, t_m), \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.12}
$$

Usando o Corolário 1.16.1 podemos estender as soluções u_m, à todo intervalo $[0,T]$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, obtemos que a desigualdade (2.12) é válida para todo $t \in [0,T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$. Além disso,

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}). \tag{2.13}$$

$$(u'_m) \quad \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.14}$$

$$(u'_m) \quad \text{é limitada em } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.15}$$

2.2.1.2 Segunda Estimativa a Priori

No que segue, faremos alguns cálculos com o intuito de derivar a equação do (PA) com relação a variável t.

Sendo $\dfrac{d}{dt}$ a derivada no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u_m, \theta \right\rangle &= -\int_0^T u_m(t)\theta'(t)dt = -\int_0^T (\sum_{j=1}^m \gamma_{jm}(t)w_j)\theta'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^m \left(-\int_0^T \gamma_{jm}(t)\theta'(t)dt \right) w_j = -\sum_{j=1}^m \left\{ \gamma_{jm}(t)\theta(t)|_0^T - \int_0^T \gamma'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^T \gamma'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j = \int_0^T u'_m(t)\theta(t)dt = \langle u'_m, \theta \rangle
\end{aligned}$$

o que prova que a derivada distribucional de u_m e a derivada clássica são coincidentes.

De maneira análoga e utilizando (2.6), observando que $u''_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ prova-se que

$$\left\langle \frac{d}{dt}u'_m, \theta \right\rangle = \langle u''_m, \theta \rangle.$$

Por outro lado, usando propriedades da integral de Bochner constatamos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_j), \theta \right\rangle &= \langle (\nabla u'_m(t), \nabla w_j), \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(G(u'_m(t)) + f_1(u_m(t)), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle &= \langle ((G'(u'_m(t))u''_m(t) + f'_1(u_m(t))u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(f_0(u_m(t)), w_j), \theta \right\rangle &= \langle (f'_0(u_m(t))u'_m(t), w_j), \theta \rangle.
\end{aligned}$$

As duas últimas igualdades decorrem das hipóteses feitas sobre as funções g, f_0 e f_1, e a derivação de uma composição assegurada pela Proposição 1.1.19.

Das relações acima e de (2.5) resulta que

$$\gamma'''_{jm}(t) = \frac{d}{dt}(u''_m(t), w_j) = -(\nabla u'_m(t), \nabla w_j) - ((G'(u'_m(t))u''_m(t))_{\Gamma_1}$$
$$-(f'_1(u_m(t))u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} - (f'_0(u_m(t))u'_m(t), w_j). \tag{2.16}$$

Mas u'_m é uma função absolutamente contínua, donde u''_m é um função integrável. Utilizando as limitações impostas sobre as derivadas das funções g, f_0 e f_1, verificamos que

$$\gamma'''_{jm} \in L^2(0, T),$$

onde as três derivadas são no sentido distribucionais. Sendo assim,

$$\int_0^T ||u'''_m(t)||^2_\Omega dt = \int_0^T ||\sum_{j=1}^m \gamma'''_{jm}(t) w_j||^2_\Omega dt < +\infty$$

isto é,

$$u'''_m \in L^2(0, T; L^2(\Omega)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. De (2.16) obtemos,

$$(u'''_m(t), w_j) + (\nabla u'_m(t), \nabla w_j) + ((G'(u'_m(t))u''_m(t) + f'_1(u_m(t))u'_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (f'_0(u_m(t))u'_m(t), w_j) = 0.$$

Multiplicando a identidade acima por γ''_{jm}, somando em j, e usando que $g'(s) > 0$ temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u''_m(t)||^2_\Omega &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u'_m(t)||^2_\Omega + \alpha||u''_m(t)||^2_{\Gamma_1} \\ &\leq -\underbrace{(f'_1(u_m(t))u'_m(t), u''_m(t))_{\Gamma_1}}_{I_3} - \underbrace{(f'_0(u_m(x,t))u'_m(x,t), u''_m(x,t))}_{I_4}.\end{aligned} \tag{2.17}$$

(i) Estimativa para I_3: Pela hipótese $(H.3)-(iii)$ juntamente com o fato de $(2n-2)(k_1-1) < \frac{2n-2}{n-2}$, segue da desigualdade de Hölder generalizada e da desigualdade de Young que

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}|f'_1(u_m(x,t))||u'_m(x,t)||u''_m(x,t)|\ d\Gamma \\ &\leq A\int_{\Gamma_1}|u'_m(x,t)||u''_m(x,t)|\ d\Gamma + A\int_{\Gamma_1}|u_m(x,t)|^{k_1-1}|u'_m(x,t)||u''_m(x,t)|\ d\Gamma \\ &\leq \frac{A^2}{\epsilon}||u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} + \epsilon||u''_m(t)||^2_{\Gamma_1} + A||u_m(t)||^{k_1-1}_{L^{(2n-2)(k_1-1)}(\Gamma_1)}||u'_m(t)||_{L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma_1)}||u''_m(t)||_{L^2(\Gamma_1)}\end{aligned} \tag{2.18}$$

Usando a imersão de Sobolev $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma_1)$, (2.13) e a desigualdade de Young em conjunto com a continuidade da aplicação traço de ordem 0, temos

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_1}|f'_1(u_m(x,t))||u'_m(x,t)||u''_m(x,t)|\ d\Gamma \\ &\leq \frac{A^2}{\epsilon}||\nabla u'_m(t)||^2 + \epsilon||u''_m(t)||^2_{\Gamma_1} + \frac{c}{\delta}||\nabla u'_m(t)||^2 + \delta||u''_m(t)||_{L^2(\Gamma_1)},\end{aligned}$$

em que δ é uma constante positiva.

(ii) Estimativa para I_4: De modo inteiramente análogo ao caso anterior, obtemos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}&\int_\Omega|f'_0(u_m(x,t))||u'_m(x,t)||u''_m(x,t)|\ dx \\ &\leq k(||\nabla u'_m(t)||^2 + ||u''_m(t)||^2)\end{aligned} \tag{2.19}$$

Escolhamos $\epsilon = \delta = \frac{\alpha}{4}$. Donde de (2.17)-(2.19), decorre que

$$\frac{d}{dt}E(t,u_m') \le \frac{d}{dt}E(t,u_m') + \frac{\alpha}{2}||u_m''(t)||_{\Gamma_1} \le K_2 E(t,u_m'). \tag{2.20}$$

Vamos agora estimar a sequência $(u_m''(0))$. Considerando $t=0$ no problema aproximado (PA), e considerando as condições de compatibilidade acerca dos dados iniciais, a saber,

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \alpha u^1 = -g(u^1) - f_1(u^0),$$

obtemos

$$\begin{aligned}(u_m''(0),v)) + (\nabla u_m(0),\nabla v) + \int_{\Gamma_1} G(u_m(0))\ v\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1} f_1(u_m(0))\ v\ d\Gamma \\ +\alpha\int_{\Gamma_1} u_m'(0)\ v\ d\Gamma + \int_\Omega f_0(u_m(x,0))v\ \ dx = 0.\end{aligned}$$

Pela Fórmula de Green e tomando $v = u_m''(0)$ segue que

$$||u_m''(0)||_\Omega^2 - (\Delta u_m(0), u_m''(0)) + \int_\Omega f_0(u_m(x,0))u_m''(x,0)\ \ dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}||u_m''(0)||_\Omega^2 &\le ||\Delta u_m(0)||_\Omega ||u_m''(0)||_\Omega - \int_\Omega f_0(u_m(x,0))u_m''(x,0)\ \ dx \\ &\le ||u_m(0)||_{H^2(\Omega)}||u_m''(0)||_\Omega + ||f_0(u^0)||_\Omega ||u_m''(x,0)||_\Omega, \qquad (2.21)\end{aligned}$$

pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ou seja,

$$\|u_m''(0)\|_\Omega \le \|u^0\|_{H^2(\Omega)} + \|f_0(u^0)\|_\Omega,\ \forall m \in \mathbb{N}$$

Portanto, $(u_m''(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$.

Assim, ao integrarmos (2.20) de 0 a t e aplicarmos a desigualdade de Gronwall, obtemos que

$$\begin{aligned}
(u_m'') &\quad \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) && (2.22)\\
(u_m') &\quad \text{é limitada em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}) && (2.23)\\
(u_m'') &\quad \text{é limitada em } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) && (2.24)
\end{aligned}$$

2.2.1.3 Passagem ao Limite

Identificaremos $L^2(\Omega)$ com seu dual via teorema da Representação de Riesz. Valem

$$\begin{aligned}
L^\infty(0,T;\mathcal{V}) &\equiv [L^1(0,T;\mathcal{V}')]'\\
L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) &\equiv [L^1(0,T;L^2(\Omega))]'.
\end{aligned}$$

Além disso, $L^1(0,T;\mathcal{V}')$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ são separáveis. Pelo Lema 1.5.2 e das Estimativas a Priori, existe uma subsequência (u_μ) de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$\begin{aligned}
u_\mu &\overset{*}{\rightharpoonup} u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}) && (2.25)\\
u_\mu' &\overset{*}{\rightharpoonup} u' \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}) && (2.26)\\
u_\mu'' &\overset{*}{\rightharpoonup} u'' \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). && (2.27)\\
u_\mu' &\rightharpoonup u' \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) && (2.28)\\
u_\mu'' &\rightharpoonup u'' \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) && (2.29)
\end{aligned}$$

Sendo $\mathcal{V} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, de (2.26), (2.27) e em virtude do Teorema 1.12 (Teorema de Aubin-Lions) podemos extrair uma subsequência de (u_μ) (ainda mantendo a mesma indexação) tal que

$$u_\mu \to u \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q)$$

e, então,

$$u_\mu \to u \ \text{ q.s. em } \ Q.$$

Da continuidade da função f_0 segue que

$$f_0(u_\mu) \to f_0(u) \quad \text{q.s. em} \;\; Q.$$

Além disso, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, denotando $\Omega = \Omega_{\mu 1} \cup \Omega_{\mu 2}$, onde

$$\Omega_{\mu 1} = \{x \in \Omega; |u_\mu(x,t)| \leq R\} \;\text{ e }\; \Omega_{\mu 2} = \{x \in \Omega; |u_\mu(x,t)| > R\}, \tag{2.30}$$

e R é dado em $(H.2) - (iii)$, temos

$$\begin{aligned}
||f_0(u_\mu)||^2_{L^2(Q)} &= \int_0^T \int_\Omega |f_0(u_\mu(x,t))|^2 dx \;\; dt \\
&= \int_0^T \left[\int_{\Omega_{\mu 1}} |f_0(u_\mu(x,t))|^2 dx + \int_{\Omega_{\mu 2}} |f_0(u_\mu(x,t))|^2 dx \right] dt \\
&\leq \int_0^T \left[med(\Omega) K_0 + 2k^* \int_{\Omega_{\mu 2}} (|u_\mu(x,t)|^{2k_0} + |u_\mu(x,t)|^2) dx \right] dt \\
&\leq K_0^*
\end{aligned}$$

onde K_0^* depende de Ω, de T e da limitação dada por (2.13), pois vale a cadeia de imersões $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{2k_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$. Logo,

$$||f_0(u_\mu)||^2_{L^2(Q)} \leq K_0^*; \;\; \forall \mu \in \mathbb{N}. \tag{2.31}$$

Donde, de (2.31) e do Lema 1.1.3 (Lema de Lions) segue que

$$f_0(u_\mu) \rightharpoonup f_0(u) \;\text{ em }\; L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q).$$

Como $w_j \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \subset L^2(0,T)$, segue que

$$\int_0^T (f_0(u_\mu(t)), w_j)\theta(t) \;\; dt \to \int_0^T (f_0(u(t)), w_j)\theta(t) \;\; dt. \tag{2.32}$$

Utilizando a cadeia $H^{1/2}(\Gamma_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{2k_1}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ demonstramos que

$$\int_0^T (f_1(u_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \to \int_0^T (f_1(u(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt. \tag{2.33}$$

Usando a hipótese $(H.1)-(iii)$ juntamente com a continuidade da função g e utilizando também um raciocínio análogo ao que foi usado com as funções f_0 e f_1, provamos que

$$\int_0^T (g(u'_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \to \int_0^T (g(u'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt. \tag{2.34}$$

Mais ainda, como

$$u''_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então

$$\langle u''_\mu, \varphi\rangle \to \langle u'', \varphi\rangle\ \ \forall\varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega));$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), \varphi(t)\Big)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), \varphi(t)\Big)\ dt.$$

Como $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, em particular,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt. \tag{2.35}$$

De (2.25) temos que

$$\nabla u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n),$$

então

$$\langle \nabla u_\mu, \varphi\rangle \to \langle \nabla u, \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Do fato que $\nabla w_j \theta \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ decorre que

$$\int_0^T (\nabla u_\mu, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t) \ dt \rightarrow \int_0^T (\nabla u, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t) \ dt. \tag{2.36}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu > j$. Multiplicando a equação do problema aproximado (2.4) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, tomando $v = w_j$ e integrando de 0 a T, resulta que

$$\begin{aligned} 0 = &\int_0^T (u''_\mu(t), w_j)\theta(t) \ dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t) \ dt + \int_0^T (g(u'_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt \\ &+\alpha \int_0^T (u'_\mu(t), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_1(u_\mu(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_0(u_\mu(t)), w_j)\theta(t) \ dt. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Pelas convergências dadas em (2.32)-(2.36) podemos passar o limite na equação (2.37), quando $\mu \rightarrow \infty$, obtendo

$$\begin{aligned} 0 = &\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t) \ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t) \ dt + \int_0^T (g(u'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt \\ &+\alpha \int_0^T (u'(t), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_1(u(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_0(u(t)), w_j)\theta(t) \ dt. \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pela totalidade dos $w_j's$ em $\mathcal{V}$ temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u''(t), v)\theta(t) \ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t) \ dt + \int_0^T (g(u'(t)), v)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt \\ &+\alpha \int_0^T (u'(t), v)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_1(u(t)), v)_{\Gamma_1}\theta(t) \ dt + \int_0^T (f_0(u(t)), v)\theta(t) \ dt = 0, \end{aligned}$$

$\forall \ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\forall v \in \mathcal{V}$.

Em particular, para $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\langle u'', \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} + \langle -\Delta u, \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} + \langle f_0(u), \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0,$$

ou seja,

$$\langle u'' - \Delta u + f_0(u), \varphi\theta \rangle_{\mathcal{D}'(Q),\mathcal{D}(Q)} = 0; \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Como o conjunto $\{\varphi\theta; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é total em $\mathcal{D}(Q)$, decorre que

$$u'' - \Delta u + f_0(u) = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q). \tag{2.39}$$

Da regularidade de u'' e $f_0(u)$, para quase todo $t \in (0,T)$, temos que

$$\Delta u(t) = u''(t) + f_0(u(t)) \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Segue da regularidade dos problemas elípticos que, para quase todo $t \geq 0$, $u(t) \in H^2(\Omega)$ e

$$||u(t)||_{H^2(\Omega)} \leq k||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{H^2(\Omega)} \leq k||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)} &= k||u''(t) + f_0(u(t))||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq k||u''(t)||_{L^2(\Omega)} + k||f_0(u(t))||_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

provando que $u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$, desde que u'' e $f_0(u)$ são elementos de $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$. Desta forma, para todo $T > 0$,

$$u \in L^\infty(0,T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(0,T;\mathcal{V}). \tag{2.40}$$

2.2.1.4 Condição de Fronteira

De (2.38) temos

$$\begin{aligned} &\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (f_0(u(t)), w_j)\theta(t) \\ &\quad + \int_0^T (f_1(u(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (G(u'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt = 0, \end{aligned} \tag{2.41}$$

para todos $j \in \mathbb{N}$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. De (2.39), $u'' - \Delta u + f_0(u) = 0$ em $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, logo

$$u''(x,t) = \Delta u(x,t) - f_0(u(x,t)), \ \text{ para q.t. } \ (x,t) \in \Omega\times]0,T[. \tag{2.42}$$

Substituindo (2.42) em (2.41), segue que

$$\int_0^T (\Delta u(t) - f_0(u(t)), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (f_0(u(t)), w_j)\theta(t)dt$$
$$+ \int_0^T (f_1(u(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt + \int_0^T (G(u'(t)), w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt = 0.$$

Aplicando a identidade de Green,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) w_j(x)\theta(t) d\Gamma\ dt = -\int_0^T \int_{\Gamma_1} f_1(u(x,t)), w_j(x)_{\Gamma_1}\theta(t)d\Gamma dt$$
$$- \int_0^T \int_{\Gamma_1} G(u'(x,t)), w_j(x)_{\Gamma_1}\theta(t)d\Gamma dt. \tag{2.43}$$

Notemos que $\{\gamma_0 w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é densa em $L^2(\Gamma_1)$.

Consequentemente, de (2.43) obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u' = -f_1(u) - g(u') \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Gamma_1))$$

e, portanto, da regularidade da função u

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \alpha u' = -f_1(u) - g(u') \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.44}$$

2.2.1.5 Unicidade

Sejam u e v soluções regulares do problema (2.3). Considerando $w = u - v$ temos que w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + f_0(u) - f_0(v) = 0 & \text{em } \Omega \times]0,\infty[, \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} + \alpha w' + f_1(u) - f_1(v) + g(u') - g(v') = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0,\infty[, \\ w = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0,\infty[, \\ w(x,0) = 0 = w'(x,0) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.45}$$

Compondo (2.45) com $w'(t)$ e aplicando a fórmula de Green resulta que

$$(w''(t), w'(t)) + (\nabla w(t), \nabla w'(t)) - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x,t) w'(x,t)\ d\Gamma$$
$$+(f_0(u(t)) - f_0(v(t))), w'(t)) = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_\Omega - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x,t)(u'(x,t) - v'(x,t))$$

$$+\int_\Omega (f_0(u(x,t)) - f_0(v(x,t)))(u'(x,t) - v'(x,t))\ dx = 0.$$

Assumindo agora a coercividade da função g

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_\Omega + \alpha_0||w'(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$\leq \int_\Omega |f_0(u(x,t)) - f_0(v(x,t))||w'(x,t)|dx + \int_{\Gamma_1} |f_1(u(x,t)) - f_1(v(x,t))||w'(x,t)|d\Gamma_1.$$

Sendo as funções f_0 e f_1 lipschitzianas, da desigualdade de Young vem, para $\epsilon > 0$, que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_\Omega + \alpha_1||w'(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$\leq C_0(||w(t)||^2 + ||w'(t)||^2) + C_1(\frac{1}{4\epsilon}||w(t)||^2_{\Gamma_1} + \epsilon||w'(t)||^2_{\Gamma_1}).$$

Da desigualdade de Poincaré, da continuidade da aplicação traço $\gamma_0 : \mathcal{V} \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ e escolhendo ϵ pequeno o suficiente, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_\Omega \leq C(||w'(t)||^2 + ||\nabla w(t)||^2).$$

Integrando de 0 a T,

$$||w'(t)||_{\Omega}^2 + ||\nabla w(t)||_{\Omega}^2 \leq ||w'(0)||_{\Omega}^2 + ||\nabla w(0)||_{\Omega}^2 + C' \int_0^T \left[||w'(t)||_{\Omega}^2 + ||\nabla w(t)||_{\Omega}^2 \right] dt.$$

Como $||w'(0)|| = ||\nabla w(0)|| = 0$, concluímos da desigualdade de Gronwall que $w(t) = 0$ em $\mathcal{V}$, para quase todo $t \in [0,T]$ e portanto $u = v$, ou seja, a solução regular do problema perturbado é única.

2.2.2 Solução Fraca

A seguir, provaremos a existência e a unicidade da solução do problema (2.1). Faremos tal prova por meio de aproximação de soluções regulares do problema perturbado (2.3). Consideremos novamente o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u(0) = u^0 \in \mathcal{V}, \;\; u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.46}$$

Teorema 2.2. *Assuma as hipóteses $(H.1)' - (H.3)'$.*

Se $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, então existe solução do problema (2.46) na seguinte classe

$$u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)\right).$$

Se, além disso, g for coerciva, então tal solução é única. Tal função é denominada solução fraca de (2.46).

Seja A um operador não-linear cujo domínio é dado por

$$D(A) = \{(u,v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mid u + N[G(\gamma_0 v) + f_1(\gamma_0 u)] \in D(-\Delta)\},$$

pondo

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta\left\{u + N[G(\gamma_0 v) + f_1(\gamma_0 u)]\right\} + f_0(u) \end{bmatrix}.$$

em que $N : H^{-1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{V}$ é o operador de Neumann definido por

$$Nq = p \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{em } \Omega, \\ p = 0 & \text{em } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = q & \text{em } \Gamma_1. \end{cases}$$

Na seção 4.3 do Apêndice, provamos que existe um número real $\omega > 0$, tal que $A + \omega I$ é um operador maximal monótono no espaço $E := \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$. Como $D(A) = D(A + \omega I)$, concluímos da proposição 1.6.4 que $\overline{D(A)} = E$. Mais ainda, se $(u, v) \in D(A)$, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -G(\gamma_0 v) - f_1(\gamma_0 u) \ \in L^2(\Gamma_1).$$

Vamos assumir agora que $(u^0, u^1) \in E$ e considere, tendo em vista que $D(A)$ é denso em E, uma sequência $(u^0_\mu, u^1_\mu) \subset D(A)$ tal que

$$u^0_\mu \longrightarrow u^0 \ \text{ em } \ \mathcal{V} \ \text{ e } \ u^1_\mu \longrightarrow u^1 \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Assim, (u^0_μ, u^1_μ) satisfaz, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial u^0_\mu}{\partial \nu} + \frac{1}{\mu} u^1_\mu = -g(u^1_\mu) - f_1(u^0_\mu),$$

em que α foi escolhido na forma $\dfrac{1}{\mu}$.

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$, seja u_μ solução regular de (2.3) com dados iniciais (u^0_μ, u^1_μ) e $\alpha = \dfrac{1}{\mu}$. Logo,

$$u_\mu \in C([0, T], H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap C^1([0, T], \mathcal{V}),$$

e satisfaz

$$(P_\mu)\begin{cases} u_\mu'' - \Delta u_\mu = -f_0(u_\mu) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \\ \dfrac{\partial u_\mu}{\partial \nu} + \dfrac{1}{\mu} u_\mu' = -g(u_\mu') - f_1(u_\mu) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \\ u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u_\mu(0) = u^0 \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}, \;\; u_\mu'(0) = u^1 \in \mathcal{V}. \end{cases} \tag{2.47}$$

Tomando o produto interno em $L^2(\Omega)$ na primeira equação de (P_μ) com $u_\mu'(t)$ e considerando os mesmos argumentos utilizados para provar a primeira estimativa, obtemos

$$\|u_\mu'\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha \int_0^t \|u_\mu'(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds \leq C.$$

Das estimativas acima, existe uma subsequência de (u_μ), cujo parâmetro de convergência será ainda denotado pelo mesmo símbolo, tal que

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \tag{2.48}$$

$$u_\mu' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.49}$$

$$u_\mu' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \tag{2.50}$$

Das hipóteses assumidas sobre as funções f_0, f_1 e g, e pela regularidade de u e u', podemos concluir ainda, em virtude do lema de Lions, as seguintes convergências

$$f_0(u_\mu) \rightharpoonup f_0(u) \;\text{ em }\; L^2(Q) \tag{2.51}$$

$$f_1(u_\mu) \rightharpoonup f_1(u) \;\text{ em }\; L^2(Q) \tag{2.52}$$

$$g(u_\mu') \rightharpoonup \chi \;\text{ em }\; L^2(\Sigma_1) \tag{2.53}$$

Além disso, pelo teorema de Aubin-Lions

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ em } L^2(Q) \tag{2.54}$$

$$u_\mu \longrightarrow u \text{ em } L^2(\Sigma_1) \tag{2.55}$$

Resta-nos provar que $g(u') = \chi$. Para isso, usaremos argumentos de monotonicidade.

Definindo $z_{\mu,\sigma} = u_\mu - u_\sigma$, $\mu, \sigma \in \mathbb{N}$, de (P_μ) vem que

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z'_{\mu,\sigma}\|^2 + \|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2\right\} + \frac{1}{\mu}\int_{\Gamma_1}|u'_\mu|^2 d\Gamma + \frac{1}{\sigma}\int_{\Gamma_1}|u'_\sigma|^2 d\Gamma \\ -\left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\sigma}\right]\int_{\Gamma_1} u'_\mu u'_\sigma d\Gamma + \int_{\Gamma_1}\left[g(u'_\mu) - g(u'_\sigma)\right]\left[u'_\mu - u'_\sigma\right] d\Gamma \\ + \int_{\Gamma_1}\left[f_1(u_\mu) - f_1(u_\sigma)\right]\left[u_\mu - u_\sigma\right] d\Gamma + \int_\Omega \left[f_0(u_\mu) - f_0(u_\sigma)\right]\left[u_\mu - u_\sigma\right] dx = 0,\end{gathered} \tag{2.56}$$

ou ainda,

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\left\{\|z'_{\mu,\sigma}\|^2 + \|\nabla z_{\mu,\sigma}\|^2\right\} + \int_0^t\int_{\Gamma_1}\left[g(u'_\mu) - g(u'_\sigma)\right]\left[u'_\mu - u'_\sigma\right] d\Gamma ds \\ = \left[\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\sigma}\right]\int_0^t\int_{\Gamma_1} u'_\mu u'_\sigma d\Gamma ds - \frac{1}{\mu}\int_0^t\int_{\Gamma_1}|u'_\mu|^2 d\Gamma ds - \frac{1}{\sigma}\int_0^t\int_{\Gamma_1}|u'_\sigma|^2 d\Gamma ds \\ - \int_0^t\int_{\Gamma_1}\left[f_1(u_\mu) - f_1(u_\sigma)\right]\left[u_\mu - u_\sigma\right] d\Gamma ds - \int_0^t\int_\Omega \left[f_0(u_\mu) - f_0(u_\sigma)\right]\left[u_\mu - u_\sigma\right] dx\ ds.\end{gathered} \tag{2.57}$$

Das convergências (2.51)-(2.55), juntamente com a limitação de (u'_μ) em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, temos que o lado direito da igualdade (2.57) tende a zero quando $\mu \longrightarrow \infty$.

Portanto, temos que

$$u_\mu \longrightarrow u \ \text{ em } \ C([0,T;\mathcal{V}]) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.58}$$

$$\tag{2.59}$$

$$\lim_{\mu,\sigma\to\infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} \left[g(u'_\mu) - g(u'_\sigma) \right] \left[u'_\mu - u'_\sigma \right] d\Gamma ds = 0. \tag{2.60}$$

Daí,

$$\lim_{\mu\to\infty} \left[\int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u'_\mu) u'_\mu d\Gamma ds - \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u'_\mu) u' \ d\Gamma ds - \int_0^t \int_{\Gamma_1} \chi \ u'_\mu d\Gamma ds \right]$$

$$+ \lim_{\sigma\to\infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u'_\sigma) u'_\sigma d\Gamma ds = 0.$$

Trocando σ por μ, deduzimos que

$$\lim_{\mu\to\infty} \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u'_\mu) u'_\mu d\Gamma ds = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \chi \ u' \ d\Gamma ds. \tag{2.61}$$

Como g é monótona crescente,

$$\int_0^T \langle g(u'_\mu) - g(\psi), u'_\mu - \psi \rangle dt \geq 0, \ \forall \psi \in L^2(\Gamma_1).$$

Esta última desigualdade assegura que

$$\liminf_{\mu\to\infty} \int_0^T \langle g(u'_\mu), \psi \rangle dt + \liminf_{\mu\to\infty} \int_0^T \langle g(\psi), u'_\mu - \psi \rangle dt$$

$$\leq \liminf_{\mu\to\infty} \int_0^T \langle g(u'_\mu), u'_\mu \rangle dt.$$

Considerando agora as convergências (2.50),(2.53) e (2.61), obtemos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - g(\psi), u'(t) - \psi \rangle dt \geq 0.$$

Escolhamos $\psi = u' + \lambda\xi$, em que $\xi \in L^2(\Gamma_1)$ é um elemento arbitrário. Sendo o operador $g : L^2(\Gamma_1) \to L^2(\Gamma_1)$; $v \mapsto g(v)$ hemicontínuo, segue que $\chi = g(u')$, como queríamos provar.

As convergências acima nos permitem passar o limite no problema (P_μ), a fim de obter

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = -f_0(u) \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;\mathcal{V}'), \\ u = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u) \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1) \\ \\ u(0) = u^0, \ u'(0) = u^1. \end{cases} \tag{2.62}$$

com $u \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. A prova de que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u)$ em $L^2(\Sigma_1)$, encontra-se na seção 4.4, no Apêndice.

2.2.2.1 Unicidade

Sejam u e v soluções fracas da equação (2.46). Ponha $w = u - v$. Então, $w \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ e verifica

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w = -f_0(u) + f_0(v) & \text{em } L^2(0,T;\mathcal{V}'), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') + g(v') - f_1(u) + f_1(v) & \text{em } L^2(\Sigma_1), \\ w = 0 & \text{em } \Sigma_0, \\ w(0) = w'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.63}$$

Pela identidade de energia (ver Apêndice), juntamente com as hipóteses assumidas $(H.1) - (H.3)$ e a coercividade da função g

$$\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \int_0^t \|w'(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds$$

$$\leq \int_0^t \|f_0(u(s)) - f_0(v(s))\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|w'(s)\|_{L^2(\Omega)} ds + \int_0^t \|f_1(u(s)) - f_1(v(s))\|_{L^2(\Sigma)} \cdot \|w'(s)\|_{L^2(\Sigma)} ds$$

Assim

$$\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \alpha_0 \int_0^t \|w'(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds$$

$$\leq L_0 \int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|w'(s)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_1 \int_0^t \|w(s)\|_{L^2(\Sigma)} \cdot \|w'(s)\|_{L^2(\Sigma)}$$

$$\leq C \int_0^t \left(\|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) ds + C \int_0^t \left(\frac{1}{4\epsilon} \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \epsilon \|w'(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \right) ds. \tag{2.64}$$

E disto segue que

$$\begin{aligned} &\|w'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + (\alpha_0 - C\epsilon) \int_0^t \|w'(s)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} ds \\ &\leq C \left(1 + \frac{1}{4\epsilon}\right) \int_0^t \left(\|w'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \right) ds. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Escolhendo $\alpha_0 - C\epsilon > 0$, pelo lema de Gronwall, concluímos que $u(t) = v(t)$ em $\mathcal{V}$ e $u'(t) = v'(t)$ em $L^2(\Omega)$, para quase todo $0 \leq t \leq T$.

2.3 Existência e Unicidade de Solução - Via Teoria de Semigrupos

Como fora anteriormente mencionado, neste capítulo será resolvido o problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = -f_0(u) & \text{em } \Omega \times (0, \infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u_t) - f_1(u) & \text{em } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u(0) = u^0 \in \mathcal{V}, \;\; u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.66}$$

na abordagem da teoria de semigrupos não-lineares.

Neste contexto, as hipóteses assumidas acerca das funções f_0, f_1 e g são as seguintes:

(**H.1**) A função não linear $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $g \in C(\mathbb{R})$ é monótona crescente;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) Existem m e M constantes tais que $0 < m < M$ e $ms^2 \leq g(s)s \leq Ms^2, |s| > 1$.

(**H.2**) A função $f_0 \in W^{1,\infty}_{loc}$, é tal que

(i) f_0 é $C^1(\mathbb{R})$ por partes e diferenciável na origem;

(ii) $f_0(s)s \geq 0$;

(iii) $|f_0'(s)| \leq N(1 + |s|^{k_0 - 1})$, $1 < k_0 < \dfrac{n}{n-2}$, para $|s| > N$ grande o suficiente.

(**H.3**) A função $f_1 \in C(\mathbb{R})$ satisfaz

(i) f_1 é diferenciável em $s = 0$ e localmente lipschitziana;

(ii) $f_1(s)s \geq 0$;

(iii) $|f_1(s)| \leq A(|s| + |s|^{k_1})$, $s \in \mathbb{R}$ $k_1 < \frac{n-1}{n-2}$, A constante.

Teorema 2.3. *Assuma as hipóteses $(H.1) - (H.3)$ citadas acima. Se*

$$g(s_1) - g(s_2) \geq \alpha(s_1 - s_2) \quad \textit{para todo} \quad s_1 - s_2 \geq 0,$$

então o problema (2.66) possui uma única solução na classe

$$u \in C([0,T]; \mathcal{V}) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$$

e, além disso,

$$\gamma_0 u' \in L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_1)), \ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_1)).$$

Lembremos do operador A citado na seção anterior

A é um operador não-linear cujo domínio é dado como sendo

$$D(A) = (u,v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} \mid u + N[G(\gamma_0 v) + f_1(\gamma_0 u)] \in D(-\Delta).$$

e pomos

$$A\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ -\Delta\left\{u + N[G(\gamma_0 v) + f_1(\gamma_0 u)]\right\} + f_0(u) \end{bmatrix}.$$

em que $N : H^{-1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{V}$ é o operador de Neumann definido também na seção anterior.

Procedendo a seguinte mudança de variáveis na equação

$$U = \begin{bmatrix} u \\ u' \end{bmatrix},$$

obtemos

$$U' = -A\, U.$$

Assumindo as hipóteses $(H.1) - (H.3)$ e, mais ainda, supondo f_0 e f_1 lipschitzianas, sabemos que existe um $\omega > 0$ suficientemente grande tal que $A + \omega I$ é maximal monótono (ver Apêndice). Deste modo, pelo teorema 1.23, conclui-se que existe uma única solução

$$u \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)),$$

de (2.66) para qualquer $T > 0$ finito.

Para provar que $u', \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, observemos que se $(u^0,u^1) \in D(A)$, temos que $\gamma_0(u^1) \in H^{1/2}(\Gamma_1)$, donde

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu},\ g(\gamma_0 u^1) \in L^2(\Gamma_1).$$

Se $(u(t),u'(t))$ é uma solução do problema para o dado inicial $(u^0,u^1) \in D(A)$, então, pela propriedade de semigrupo, temos $(u(t),u'(t)) \in D(A)$ e, consequentemente,

$$u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)) \ \text{ e } \ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Pela identidade de energia, (4.60) do Apêndice, temos

$$
\begin{aligned}
&\|u'(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 \\
&= \|u^1\|^2 + \|\nabla u^0\|^2 + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u' d\Gamma ds + 2\int_0^t \int_\Omega f_0(u)u'\ dx\ ds \\
&= 2\cdot E(0) - 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u')u'\ d\Gamma ds - 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} f_1(u)u'\ d\Gamma ds + 2\int_0^t \int_\Omega f_0(u)u'\ dx\ ds \\
&\leq 2\cdot E(0) - 2\alpha \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'|^2\ d\Gamma ds + 2L_1 \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u||u'|\ d\Gamma ds + 2L_0 \int_0^t \int_\Omega |u||u'|\ dx\ ds \\
&\leq 2\cdot E(0)) - 2\alpha \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'|^2\ d\Gamma ds + 2L_1 \left\{ \frac{1}{4\epsilon} \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma ds + \epsilon \int_0^t \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma ds \right\} \\
&+2L_0 \left\{ \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u|^2\ dx\ ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega |u'|^2\ dx\ ds \right\}.
\end{aligned}
\tag{2.67}
$$

Escolha $\epsilon = \dfrac{\alpha}{2L_1}$ e obtemos

$$
\|u'(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \alpha \int_0^t \|u'(t)\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq C\left\{ \|\nabla u^0\|^2 + \|u^0\|^2 + \|u^1\|^2 \right\}.
$$

Pela densidade de $D(A)$ em E, podemos estender a desigualdade anterior a todo E. Da hipótese $(H.1)-(iii)$ conclui-se que $g(u') \in L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_1))$. Como é aprensentado no Apêndice, faz sentido falar da derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ no espaço $H^{-1}(0,T; H^{-1/2}(\Gamma_1))$. Mas pela igualdade

$$
\frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u)
$$

e, da regularidade das funções em questão, obtemos $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,\infty; L^2(\Gamma_1))$.

Vamos provar agora que as hipóteses $(H.1)-(H.3)$ são suficientes, ou seja, podemos omitir a hipótese sobre as funções f_0 e f_1 serem lipschitzianas. Considere a aproximação da equação (2.66)

$$\begin{cases} u_l'' - \Delta u_l = -f_{0l}(u_l) & \text{em } \Omega \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u_l}{\partial \nu} = -g(u_l') - \dfrac{1}{l}u_l' - f_{1l}(u_l) & \text{em } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u_l = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ u_l(0) = u^0 \in \mathcal{V}, \;\; u_l'(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{2.68}$$

em que as funções f_{il} são definidas por

$$f_{il}(s) = \begin{cases} f_1(s), & |s| \leq l; \\ f_i(l), & s > l; \qquad i = 0,1 \\ f_i(-l), & s \leq -l. \end{cases}$$

Pondo $g_l(s) = g(s) + \dfrac{1}{l}s$, segue que g_l está nas hipóteses do teorema, isto é, satisfaz $(H.1)$. Vamos provar agora que as funções f_{0l} e f_{1l} são lipschitzianas (condição necessária para provar que o operador $A + \omega I$ é maximal monótono). Para tanto, basta verificar no intervalo $[-l,l]$:

(0) Temos por hipótese que $f_{0l} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ e, além disso, f_{0l} é C^1 por partes. Existe uma partição do intervalo $[-l,l]$ tal que f_{0l} é C^1 em cada um desses subintervalos. Logo, em cada um desses subintervalos, f_{0l} é Lipschitz contínua, em virtude do teorema do valor médio. Se $-l = s_0, s_1, \ldots, s_k = l$ é tal partição e L_{0j} é a constante de Lipschitz de f_{0l} no subintervalo $[s_j, s_{j+1}]$, então $L_{0l} = \displaystyle\sum_{j=0}^{k-1} L_{0j}$ é constante de Lipschitz para f_{0l}.

(1) Como f_1 é localmente lipschitziana, o mesmo vale para f_{1l}. Se $s \in [-l,l]$, existe ϵ_s tal que f_{1l} é lipschitziana no intervalo $[s-\epsilon_s, s+\epsilon_s]$. Como $[-l,l]$ é compacto, podemos cobrir tal intervalo com uma quantidade finita de subintervalos onde f_{1l} é lipschitziana. Ponha $[-l,l] \subset \cup_{j=0}^{m-1}[s_j - \epsilon_{s_j}, s_j + \epsilon_{s_j}]$ e L_{1j} a constante de Lipschitz de f_{1l} no subintervalo $[s_j - \epsilon_{s_j}, s_j + \epsilon_{s_j}]$. Então $L_{1l} = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} L_{1j}$ é constante de Lipschitz para f_{1l}.

Deste modo, existe uma solução

$$u_l \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)),$$

com

$$\frac{\partial u_l}{\partial \nu},\ u_l',\ g_l(u_l') \in L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1)).$$

Vamos provar que esta sequência de soluções possui uma subsequência convergente, cujo limite é solução do problema (2.66). Para tanto, provaremos primeiramente o seguinte lema:

Lema 2.3.1. *Sob as hipóteses do Teorema 2.3, temos quando $l \longrightarrow \infty$ e $u_l \rightharpoonup u$ em $\mathcal{V}$,*

$$\int_\Omega F_{0l}(u)\ dx + \int_{\Gamma_1} F_{1l}(u) d\Gamma \le C, \tag{2.69}$$

em que $F_{il}(t) = \int_0^t f_{il}(s)\ ds$ e $C = C(\|u\|_{\mathcal{V}})$,

$$\begin{cases} f_{1l}(u_l) \longrightarrow f_1(u) & em \quad L^2(\Gamma_1); \\ f_{0l}(u_l) \longrightarrow f_0(u) & em \quad L^2(\Omega). \end{cases} \tag{2.70}$$

Demonstração: Como $|f_{0l}'(s)| \le C(1+|s|^{k_0-1})$, então $F_{0l}(s) \le A_0|s|^2 + B_0|s|^{k_0+1}$ e, para $u \in \mathcal{V}$,

$$\left|\int_\Omega F_{0l}(u(x))\ dx\right| \le \int_\Omega \left(A_0|u(x)|^2 + B_0|u(x)|^{k_0+1}\right) dx \le C_0,$$

pela imersão $\mathcal{V} \hookrightarrow L^{k_0+1}(\Omega)$.

De modo análogo, do fato de $F_{1l}(s) \le A_1|s|^{k_1+1} + B_1|s|^2$, segue

$$\left|\int_{\Gamma_1} F_{1l}(u(x))\ d\Gamma\right| \le \int_{\Gamma_1} \left(A_1|u(x)|^{k_1+1} + B_1|u(x)|^2\right) d\Gamma \le C_1,$$

pelas imersões $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$ e $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^{k_1+1}(\Gamma_1)$ e usando a continuidade do traço.

Assim, fica provado (2.69). Para provar (2.70)-(i), ponhamos $\Gamma_l = \{x \in \Gamma_1 : \ |u_l(x)| > l\}$.

$$\int_{\Gamma_1} |f_{1l}(u_l(x)) - f_1(u(x))|^2 d\Gamma$$

$$\leq 2\left\{\int_{\Gamma_1} |f_{1l}(u_l(x)) - f_1(u_l(x))|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |f_1(u_l(x)) - f_1(u(x))|^2 d\Gamma\right\}.$$

Em vista da imersão compacta $H^{1/2}(\Gamma_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma_1)$ e da continuidade da função f_1, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue a segunda integral do lado direito da desigualdade acima tende à zero. Vamos analisar então a primeira integral:

Como $f_{1l}(s) = f_1(s)$ para $|s| \leq l$, então

$$\int_{\Gamma_1} |f_{1l}(u_l(x)) - f_1(u_l(x))|^2 d\Gamma$$

$$\leq 2\left\{\int_{\Gamma_l} |f_1(u_l(x))|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_l} \left(|f_1(l)|^2 + |f_1(-l)|^2\right) d\Gamma\right\}.$$

Tem-se

$$\left(\int_{\Gamma_l} l^{\frac{2n-2}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2n-2}} \leq \left(\int_{\Gamma} |u_l(x)|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right)^{\frac{n-2}{2n-2}} \leq C = C(\|u_l\|_{\mathcal{V}})$$

pela imersão $H^{1/2}(\Gamma_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{\frac{2n-2}{n-2}}(\Gamma_1)$ e pela continuidade da aplicação traço de ordem 0. Disto segue que $med(\Gamma_l) \leq C\cdot l^{\frac{-2n+2}{n-2}}$.

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_l} |f_1(u_l(x))|^2 d\Gamma &\leq C\int_{\Gamma_l} |u_l(x)|^{2k_1} d\Gamma \\ &\leq C\left[\int_{\Gamma_l} |u_l(x)|^{\frac{2n-2}{n-2}}\right]^{\frac{k_1(n-2)}{n-1}} \cdot (med\Gamma_l)^{1-\frac{k_1(n-2)}{n-1}} \longrightarrow 0,\end{aligned}$$

pois $k_1(n-2) < n-1$.

$$\int_{\Gamma_l} |f_1(\pm l)|^2 d\Gamma \leq C \cdot l^{2k_1} \cdot med\Gamma_l \leq C \cdot l^{2k_1 - \frac{2n-2}{n-2}} \longrightarrow 0.$$

A prova de (2.70)-(ii) é inteiramente análoga. □

Agora, se

$$E_l(t) = \frac{1}{2}\left(\|u_l'(t)\|^2 + \|\nabla u_l(t)\|^2\right) + \int_{\Gamma_1} F_{1l}(u_l)d\Gamma + \int_{\Omega} F_{0l}(u_l)dx,$$

pela identidade de energia temos

$$E_l(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} g_l(u_l')\ u_l'\ d\Gamma\ ds = E_l(0) \leq C\left(\|u^0\|_{\mathcal{V}}; \|u^1\|_{L^2(\Omega)}\right),$$

em que a desigualdade decorre do lema, parte (2.69).

Da hipótese $(H.1)-(iii)$, segue que

$$\begin{aligned}
&\|u_l'\|^2_{L^2(\Sigma_1)} \leq C\left(\|u^0\|_{\mathcal{V}}; \|u^1\|_{L^2(\Omega)}\right)\\
&\|u_l\|_{C([0,T];\mathcal{V})} + \|u_l'\|_{C([0,T;L^2(\Omega)])} \leq C.
\end{aligned}$$

Das limitações acima, segue que

$$\begin{aligned}
&\gamma_0 u_l \longrightarrow \gamma_0 u \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1))\\
&\gamma_0 u_l' \rightharpoonup \gamma_0 u' \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1).
\end{aligned}$$

Como valem as imersões de Sobolev $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{2k_0}(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} L^{2k_1}(\Gamma)$, juntamente com as hipóteses $(H.1)-(H.3)$ (como no lema) concluímos que

$$f_{0l}(u_l) \rightharpoonup f_0(u) \ \text{ em } \ L^2(Q) \tag{2.71}$$

$$f_{1l}(u_l) \rightharpoonup f_1(u) \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1)) \tag{2.72}$$

$$g_l(u_l') \rightharpoonup g_0 \in L^2(\Sigma_1). \tag{2.73}$$

Usando argumentos de monotonicidade, da mesma forma como foi feito no capítulo anterior, prova-se que $g_0 = g(u')$. As convergências (2.71)-(2.73) dadas acima, nos permitem passar o limite em (2.68), completando a demonstração do teorema 2.3.

Capítulo 3

Estabilização

Antes de enunciarmos o resultado de estabilização, introduziremos primeiramente algumas notações e definições que serão usadas ao longo deste capítulo.

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função côncava estritamente crescente, com $h(0) = 0$, e tal que

$$h(g(s)s) \geq s^2 + g^2(s); \quad |s| \leq 1. \tag{3.1}$$

A função h pode sempre ser construída em virtude das hipóteses $(H.1)$. Com efeito, definimos funções crescentes k_1,k_2 sobre $\mathbb{R}$ verificando

$$k_1(s\ g(s)) \geq s^2 + g^2(s), \text{ para } s \leq 0$$
$$k_2(s\ g(s)) \geq s^2 + g^2(s), \text{ para } s \geq 0.$$

Então, a função

$$h = conc(max\{k_1, k_2\}), \text{ (envelope côncavo)}$$

tem as propriedades desejadas.

Seja

$$\tilde{h}(s) = h\left(\frac{s}{med(\Sigma_1)}\right); \tag{3.2}$$

em que $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0,T)$ e $T > 0$ é uma constante dada. Como $\tilde{h}$ é monótona crescente, para todo $c \geq 0$, $cI + \tilde{h}$ é inversível. Seja K uma constante positiva e ponhamos

$$p(s) = (cI + \tilde{h})^{-1}(Ks). \tag{3.3}$$

Então, p é positiva, contínua e estritamente crescente, com $p(0) = 0$. Finalmente, definamos

$$q(s) = s - (I + p)^{-1}(s). \tag{3.4}$$

Deste modo, q também é uma função positiva e crescente.

Denotemos por $E(t)$ a energia relacionada à solução (u, u_t), isto é,

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||u'(t)||^2_{L^(\Omega)}\right) + \int_{\Sigma_1} f_1(u)\ u'\ d\Gamma + \int_Q f_0(u)\ u'\ dx. \tag{3.5}$$

Em adição às hipóteses $(H.1) - (H.3)$ assumidas no capítulo (2), utilizadas para a resolução de (2.1), assumiremos também as seguintes hipóteses adicionais

(**H.4**) Para $r(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, a seguinte condição geométrica é verificada sobre a porção não controlada da fronteira Γ_0:

$$r(x) \cdot \nu(x) \leq 0, \text{ em } \Gamma_0.$$

(**H.5**) $\Gamma_0 = \partial\Omega_1 \neq \emptyset$, onde Ω_1 é convexo e $\Omega_1 \cap \Omega = \emptyset$.

A seguir, enunciaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Sob as hipóteses* $(H.1)-(H.5)$*, se* (u, u_t) *é solução de (2.1) e (3.1) se verifica, então para algum* $T_0 > 0$*,*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right)(E(0)), \quad \forall t > T_0; \tag{3.6}$$

onde $S(t)$ *é solução da equação diferencial*

$$\frac{dS}{dt}(t) + q(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{3.7}$$

com q *definida em (3.4).*

Serão utilizadas as identidades abaixo sobre a fronteira de Ω, sendo $u : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suficientemente regular e q um campo de vetores sobre definido sobre Γ.

$$\nabla u = \partial_\nu u \; \nu + \nabla_T u, \tag{3.8}$$

$$q \cdot \nabla u = \partial_\nu u (q \cdot \nu) + q \cdot \nabla_T u, \tag{3.9}$$

$$|\nabla u|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + |\nabla_T u|^2. \tag{3.10}$$

3.1 O Método dos Multiplicadores

Iniciaremos com a seguinte desigualdade:

Lema 3.1.1. *Assuma* $(H.4)$*. Se* $u \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ *é uma função tal que*

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = f \in L^1(0,T; L^2(\Omega)), \\ u(0) = u^0 \in H^1(\Omega), \;\; u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \tag{3.11}$$

e, além disso,

$$\begin{cases} u_t, \dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)), \\ u = 0 \;\; em \; \Sigma_0 = \Gamma_0 \times (0,T)\,. \end{cases} \tag{3.12}$$

Então,

$$\int_{\alpha}^{T-\alpha}\left[||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)}+||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right]dt \leq C\left[||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}+||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]$$
$$+C\left[\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma+\int_{\Sigma_1}|u'|^2 d\Sigma+\int_Q |f|^2 dQ\right]+C_T||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))} \tag{3.13}$$

em que a constante C não depende de T, e $\alpha > 0$ e $\frac{1}{2} > \rho > 0$ são arbitrariamente pequenos mas fixos.

Demonstração: Seguiremos na prova por soluções regulares e o resultado se estenderá por densidade às soluções fracas.

Seja então $u \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];\mathcal{V})$ satisfazendo (3.11)-(3.12). Multiplicando a equação (3.11) por $(r\cdot\nabla u) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, em que r é dado em $(H.4)$ e, integrando em $Q = \Omega \times (0,T)$, obtemos

$$\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(r\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_1}-\underbrace{\int_0^T\int_\Omega \Delta u(r\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_2}=\int_0^T\int_\Omega f(r\cdot\nabla u)dx\ dt \tag{3.14}$$

Integrando N_1 por partes, temos

$$\begin{aligned} N_1 &= \int_0^T\int_\Omega u_{tt}(r\cdot\nabla u)dx\ dt \\ &= \left[\int_\Omega u'(r\cdot\nabla u)dx\right]_0^T-\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u'(r\cdot\nabla u')dx\ dt}_{N_3}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Pondo $r(x)=\Big(r_1(x),r_2(x),...,r_n(x)\Big)$, $\nabla u'=\left(\frac{\partial u'}{\partial x_1},...,\frac{\partial u'}{\partial x_n}\right)$, aplicando a Fórmula de Gauss em N_3, para $i = 1, ..., n$, e como $u = 0$ em Σ_0, por (3.12) segue que

$$\begin{aligned} N_3 &= \int_0^T \int_\Omega u'(r \cdot \nabla u') dx\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega u' \Big(\sum_{i=1}^n r_i \frac{\partial u'}{\partial x_i} \Big) dx\, dt \\ &= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (u')^2 r_i\, dx\, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u')^2 \frac{\partial r_i}{\partial x_i}\, dx\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Gamma (u')^2 r_i\, \nu_i\, d\Gamma\, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (div\ r)(u')^2 dx\, dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u')^2 (r \cdot \nu)\, d\Gamma\, dt. \end{aligned} \tag{3.16}$$

De (3.15) e (3.16) e do fato de $div\ r = n$, vem que

$$N_1 = \Big[\int_\Omega u'(r \cdot \nabla u) dx \Big]_0^T + \frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega (u')^2 dx\, dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (u')^2 (r \cdot \nu)\, d\Gamma\, dt. \tag{3.17}$$

Por outro lado, aplicando a Fórmula de Green em N_2, obtemos

$$\begin{aligned} N_2 &= -\int_0^T \int_\Omega \Delta u (r \cdot \nabla u) dx\, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (r \cdot \nabla u) dx\, dt - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u (r \cdot \nabla u) d\Gamma\, dt. \end{aligned}$$

Usando a identidade (3.9) e o fato que $u = 0$ em Σ_0, segue que

$$N_2 = \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (r \cdot \nabla u) dx\, dt}_{N_4} - \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu) d\Gamma\, dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (r \cdot \nabla_T u) d\Gamma\, dt. \tag{3.18}$$

Assim, usando a notação

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla r \cdot \nabla u\, dx = \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\, dx, \tag{3.19}$$

$$
\begin{aligned}
N_4 &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(r \cdot \nabla u) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(r \cdot \nabla u) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n r_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial r_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + r_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial r_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ dx\ dt + \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} r_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla r \cdot \nabla u\ dx\ dt + \underbrace{\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} r_j\ dx\ dt}_{N_5}. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Da Fórmula de Gauss e utilizando novamente que $div\ r = n$, decorre que

$$
\begin{aligned}
N_5 &= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} r_j\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 r_j\ dx\ dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^2 r_j\ dx\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega |\nabla u|^2 \frac{\partial r_j}{\partial x_j}\ dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Gamma |\nabla u|^2 r_j\ \nu_j\ d\Gamma\ dt \\
&= -\frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma |\nabla u|^2 (r \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

De (3.10) e considerando que $u = 0$ sobre Σ_0, temos que

$$
\begin{aligned}
N_5 = & -\frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (r \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.18)-(3.22), resulta que

$$\begin{aligned} N_2 \; = \; & \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla r \cdot \nabla u \; dx \; dt - \frac{n}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \; dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (r \cdot \nu) d\Gamma \; dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (r \cdot \nabla_T u) d\Gamma \; dt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Portanto, observando que $\dfrac{\partial r_j}{\partial x_i} = 1$ se $i = j$ e $\dfrac{\partial r_j}{\partial x_i} = 0$ se $i \neq j$, concluímos de (3.19) e (3.23)

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \Delta u \, (r \cdot \nabla u) \, dx \; dt = \frac{1}{2} \int_\Sigma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma \\ - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (r \cdot \nabla_T u) \; d\Sigma + \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \int_Q |\nabla u|^2 \; dQ. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Da hipótese $(H.4)$, $r \cdot \nu \leq 0$ em Γ_0 e das igualdades (3.14), (3.17) e (3.24) vem que

$$\int_Q f (r \cdot \nabla u) \; dQ = \left[\int_\Omega u'(r \cdot \nabla u) \; dx \right]_0^T - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |u'|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma + \frac{n}{2} \int_Q |u'|^2 \; dQ$$

$$- \frac{1}{2} \int_\Sigma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma + \int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (r \cdot \nabla_T u) \; d\Sigma$$

$$+ \left(1 - \frac{n}{2} \right) \int_Q |\nabla u|^2 \; dQ$$

$$\geq \frac{n}{2} \int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2 \right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2 \; dQ + \left[\int_\Omega u'(r \cdot \nabla u) \; d\Sigma \right]_0^T + \int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} (r \cdot \nabla_T u) \; d\Sigma$$

$$- \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma + \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma_1} |u'|^2 (r \cdot \nu) \; d\Sigma.$$

Assim,

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\leq \int_Q f(r\cdot \nabla u)\ dQ - \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 (r\cdot \nu)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} |u'|^2 (r\cdot \nu)\ d\Sigma$$

$$-\left[\int_\Omega u'(r\cdot \nabla u)\ d\Sigma\right]_0^T - \int_{\Sigma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(r\cdot \nabla_T u)\ d\Sigma + \frac{1}{2}\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 (r\cdot \nu)\ \ d\Sigma;$$

isto é, de (3.10) e da regularidade do campo r,

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\leq C\int_Q |f|^2\ dQ + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ + C\int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Sigma + C\int_{\Sigma_1} |u'|^2\ d\Sigma$$

$$+||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + C\int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\ \ d\Sigma.$$

Donde

$$\frac{n}{2}\int_Q \left[|u'|^2 - |\nabla u|^2\right] dQ + \frac{1}{2}\int_Q |\nabla u|^2\ dQ$$

$$\leq C\left\{||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\} + \int_{\Sigma_1} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\ \ d\Sigma \tag{3.25}$$

$$+C\left\{\int_{\Sigma_1} |u'|^2\ d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Sigma + \int_Q |f|^2\ dQ\right\}.$$

Retornando à equação (3.11), multiplicando por u, integrando por partes, usando a identidade de Green e observando que $u = 0$ em Σ_0, obtemos a identidade:

$$\left[\int_\Omega u'\ u\ dx\right]_0^T - \int_Q |u'|^2\ dQ + \int_Q |\nabla u|^2\ dQ - \int_{\Sigma_1} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}\ u\right] d\Sigma = \int_Q f\ u\ dQ.$$

Da desigualdade de Young e procedendo de maneira análoga ao que foi feito anteriormente,

$$\begin{aligned}&\int_Q \left[|\nabla u|^2 - |u'|^2\right] dQ \leq C \left\{ \int_{\Sigma_1} \left[\frac{1}{4\epsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + \epsilon |u|^2 \right] d\Sigma \right. \\ &\left. + ||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \frac{1}{2} \int_Q |f|^2 \; dQ + \frac{1}{2} \int_Q |u|^2 \; dQ \right\}.\end{aligned} \tag{3.26}$$

Combinando (3.25), (3.26) e a continuidade do traço de ordem 0, obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \left[||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C \left\{||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right\} \\ &+ C \left\{ \int_{\Sigma_1} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |u'|^2 \, d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Sigma \right\} + C \int_Q |f|^2 dQ + C \int_Q |u|^2 dQ.\end{aligned} \tag{3.27}$$

Do lema 7.2, desigualdade (7.5) em [20], temos

$$\begin{aligned}&\int_\alpha^{T-\alpha} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt \leq C_{\rho,\alpha} \left\{ \int_{\Sigma_1} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \; u \right|^2 + |u|^2 \right] d\Sigma \right. \\ &\left. + C_T ||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))} + \int_Q |f|^2 dQ \right\},\end{aligned} \tag{3.28}$$

com α e ρ sob as hipóteses enunciadas no lema. Aplicando (3.27), substituindo $(0, T)$ por $(\alpha, T - \alpha)$ e usando a desigualdade (3.28), obtemos o resultado desejado.

□

Lema 3.1.2. *Assuma $(H.1) - (H.4)$. Seja (u, u_t) solução de (2.46). Então,*

$$\int_0^T E(t) dt \leq C(E(0)) \left\{ \int_{\Sigma_1} \left[g^2(u') + |u'|^2 + |f_1^2(u)|^2 \right] d\Sigma + \int_Q \left[f_0^2(u) + u^2 \right] dQ + E(T) \right\}. \tag{3.29}$$

Demonstração: Conforme Apêndice, da identidade de energia, temos que

$$E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u') \; u' \; d\Gamma ds = E(0), \quad 0 \leq t \leq T,$$

em que

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t))d\Gamma + \int_\Omega F_0(u(t))dx$$

Observemos ainda que se (u, u_t) é solução de (2.46) segue que $f = f_0(u) \in L^2(Q)$, conforme (2.51), $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u) \in L^2(\Sigma_1)$, de acordo com (2.62) e $u^0 \in \mathcal{V} \subset H^1(\Omega)$, $u^1 \in L^2(\Omega)$. Sendo assim, podemos aplicar o lema anterior e obter

$$\int_\alpha^{T-\alpha} \left[||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt \leq C\left[||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right]$$

$$+C\left[\int_{\Sigma_1} |g(u')|^2 + |f_1(u)|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_1} |u'|^2 d\Sigma + \int_Q |f_0(u)|^2 dQ\right] + C_T||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))}. \tag{3.30}$$

Por outro lado, para α fixado temos

$$\int_0^\alpha \left[||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt + \int_{T-\alpha}^T \left[||u'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt$$

$$\leq 2\alpha E(0) \leq 2\alpha\left\{E(T) + \int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2\right] d\Sigma\right\}. \tag{3.31}$$

Portanto, de (3.30) e (3.31)

$$\int_0^T \left[\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right] dQ \leq C\left\{E(T) + ||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right.$$

$$\left. + \int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + f_1^2(u) + |u'|^2\right] d\Sigma + \int_Q f_0^2(u) dQ + ||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))}\right\}. \tag{3.32}$$

Das hipóteses $(H.2)-(iii)$ e $(H.3)-(iii)$, obtemos

$$\int_\Omega F_0(u(t))dx + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t))d\Gamma \leq C\left\{\int_\Omega |u(t)|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |u(t)|^2 d\Gamma\right.$$

$$\left. + \int_\Omega |u(t)|^{k_0+1} dx + \int_{\Gamma_1} |u(t)|^{k_1+1} d\Gamma\right\},$$

e, pelas imersões de Sobolev, como $k_0, k_1 > 1$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2k_0}(\Omega)$ e $H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^{2k_1}(\Gamma_1)$, decorre da continuidade do traço de ordem 0 que

$$\int_\Omega F_0(u(t))dx + \int_{\Gamma_1} F_1(u(t))d\Gamma \leq C\left\{||u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right\}. \tag{3.33}$$

Logo, de (3.32) e (3.33) segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq C\left[E(T) + ||u'||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}\right] + C\left[\int_{\Sigma_1}|u'|^2 d\Sigma\right.\\ \left. + \int_{\Sigma_1}|g(u')|^2 + |f_1(u)|^2 d\Sigma + \int_Q |f_0(u)|^2 + u^2 dQ\right] + C_T||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))}.\end{aligned} \tag{3.34}$$

Além disso, como $\dfrac{1}{2} + \rho < 1$ temos pelo lema 1.1.4 que para qualquer $\epsilon > 0$ que

$$||u||^2_{L^2(0,T;H^{1/2+\rho}(\Omega))} \leq \int_0^T \left[\epsilon||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt.$$

Substituindo em (3.34), obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \leq C(E(0))\left\{\int_Q |\nabla u|^2 dQ + \int_Q |u|^2 dQ\right\} + C\left\{E(T) + \int_Q f_0^2(u)dQ\right.\\ \left. + \int_0^T \left[\epsilon||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} + C(\epsilon)||u(t)||^2_{L^2(\Omega)}\right] dt + \int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2 + |f_1^2(u)|\right] d\Sigma\right\}.\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\int_0^T E(t)dt \leq C(E(0))\left\{\int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2 + |f_1^2(u)|\right] d\Sigma + \int_Q \left[f_0^2(u) + u^2\right] dQ + E(T)\right\}.$$

provando o desejado em (3.29). □

Lema 3.1.3. *Assuma* $(H.1) - (H.5)$*. Se* u *é como no lema anterior, então para* $\epsilon > 0$

suficientemente pequeno e $C(\epsilon)$ uma constante que depende de ϵ, temos

$$\int_{\Sigma_1} f_1^2(u)d\Sigma \leq \epsilon|E(0)|^{c_1}\int_0^T E(t)dt + C(\epsilon)\int_{\Sigma_1}|u|^2 d\Sigma, \tag{3.35}$$

$$\int_{\Omega} f_0^2(u)dQ \leq \epsilon|E(0)|^{c_0}\int_0^T E(t)dt + C(\epsilon)\int_{Q}|u|^2 dQ. \tag{3.36}$$

Demonstração: Provaremos (3.35), pois a demonstração para (3.36) é inteiramente análoga.

Considere a desigualdade de interpolação (Proposição 1.1.5)

$$||u||_{L^p} \leq ||u||_{L^2}^{1-q}||u||_{L^r}^q, \ \frac{1}{p} = \frac{1-q}{2} + \frac{q}{r},$$

válida para $1 \leq 2 \leq r \leq \infty$ e $0 \leq q \leq 1$.

Aplicando a desigualdade acima com $p = 2k_1$, $r = 2k_1 + s$ e $0 < s < \dfrac{1}{2}$ obtemos juntamente com $(H.3)$,

$$\int_{\Gamma_1} f_1^2(u(t))d\Gamma \leq C\int_{\Gamma_1}\left[u^2(t) + u^{2k_1}(t)\right]d\Gamma \leq C\left\{\int_{\Gamma_1}|u(t)|^2 d\Gamma + ||u(t)||_{L^2(\Gamma_1)}^{(1-q)2k_1}\ ||u(t)||_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)}^{2qk_1}\right\},$$

em que $q = 1 + \dfrac{s}{k_1(2-2k_1-s)}$.

Pela desigualdade de Young com $p = \dfrac{1}{(1-q)k_1}$ e $\overline{p} = \dfrac{1}{1-k_1(1-q)}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_1} f_1^2(u(t))d\Gamma \leq C\Bigg\{&\int_{\Gamma_1}|u(t)|^2 d\Gamma + [(1-q)k_1]\eta^{-\frac{1}{(1-q)k_1}}||u(t)||_{L^2(\Gamma_1)}^2 \\ &+[1-(1-q)k_1]\eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}||u(t)||_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)}^{\frac{2k_1q}{1-k_1(1-q)}}\Bigg\}.\end{aligned} \tag{3.37}$$

Para $0 < s < \dfrac{2n-2}{n-2} - 2k_1$, graças à hipótese $(H.3)$ e às imersões de Sobolev combinadas com o teorema do traço de ordem 0, segue que

$$||u(t)||_{L^{2k_1+s}(\Gamma_1)} \leq C\|u(t)\|_{H^{1/2}(\Gamma_1)} \leq C||\nabla u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Disto vem que, se $0 < s < m\acute{\imath}n\left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2n-2}{n-2} - 2k_1\right\}$, então de (3.37)

$$\int_{\Gamma_1} f_1^2(u(t))d\Gamma \leq C\left\{\left(1+\eta^{-\frac{1}{(1-q)k_1}}\right)||u(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} + \eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}||\nabla u(t)||^{\frac{2k_1 q}{1-k_1(1-q)}}_{L^2(\Omega)}\right\}.$$

Como $q = 1 + \dfrac{s}{k_1(2-2k_1-s)}$, então

$$\frac{1}{1-k_1(1-q)} = \frac{2k_1+s-2}{2k_1-2} \quad \text{e} \quad \frac{2k_1 q}{1-k_1(1-q)} = 2k_1 + s.$$

Sendo $\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq E(0)$, temos que

$$\begin{aligned}
\eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}||\nabla u(t)||^{\frac{2k_1 q}{1-k_1(1-q)}}_{L^2(\Omega)} &= \eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}||\nabla u(t)||^2_{L^2(\Omega)} \cdot ||\nabla u(t)||^{2-\frac{2k_1 q}{1-k_1(1-q)}}_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}} E(t) \cdot |E(0)|^{1-\frac{k_1 q}{1-k_1(1-q)}} \\
&= \eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}} E(t) \cdot |E(0)|^{c_1}, \quad c_1 > 0.
\end{aligned}$$

Defina $\epsilon = C\eta^{\frac{1}{1-k_1(1-q)}}$ e integre de 0 a T a desigualdade acima para concluir a prova. $\square$

Combinando os lemas 3.1.2 e 3.1.3, para $1 > \epsilon\left(|E(0)|^{c_0} + |E(0)|^{c_1}\right) > 0$ e $c = m\acute{a}x\{c_0, c_1\} > 0$,

$$\begin{aligned}
\left(1 - \epsilon\,[E(0)]^c\right)\int_0^T E(t)dt \leq C\Bigg\{&\int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2\right]d\Sigma \\
&+ C(\epsilon)\left[\int_{\Sigma_1} u^2 d\Sigma + \int_Q u^2 dQ\right] + E(T)\Bigg\}
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Lema 3.1.4. *Assuma* $(H.1)-(H.5)$. *Seja* (u, u_t) *solução de (2.46). Então, para* $T > T_0$, T_0 *suficientemente grande, temos*

$$\int_{\Sigma_1} |u|^2 d\Sigma + \int_Q |u|^2 dQ \leq C(E(0))\left\{\int_{\Sigma_1}\left[|u'|^2 + g^2(u')\right]d\Sigma\right\}. \tag{3.39}$$

Demonstração: Faremos a prova por contradição. Seja T_0 uma constante suficientemente grande fixa. Suponha que (3.39) não seja verificado e seja $\left\{u_l(0), u_l'(0)\right\}$ uma sequência de dados iniciais onde as soluções correspondentes $\{u_l\}_{l\in\mathbb{N}}$ do problema (2.46), com $E_l(0)$ uniformemente limitada em l, verifiquem

$$\lim_{l\to+\infty} \frac{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_l|^2 d\Sigma + \int_Q |u_l|^2 dQ}{\displaystyle\int_{\Sigma_1} |u_l'|^2 d\Sigma + \int_{\Sigma_1} g^2(u_l') d\Sigma} = +\infty, \tag{3.40}$$

Suponhamos que $E_l(0) \leq M$. Então $E_l(t) \leq M$ e, portanto (passando à uma subsequência se necessário), $u_l \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;\mathcal{V})$ e $u_l' \rightharpoonup u'$ em $L^2(Q)$. Disto segue que $\gamma_0 u_l \rightharpoonup \gamma_0 u$ em $L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma_1)$. Além disso, como já foi visto, da hipótese $(H.1)-(iii)$ concluímos que $u_l' \rightharpoonup u'$ em $L^2(\Sigma_1)$. Assim, pelo teorema de Aubin-Lions, temos que $u_l \longrightarrow u$ em $L^2(Q)$ e $u_l \longrightarrow u$ em $L^2(\Sigma_1)$.

Dividiremos a prova em dois casos.

Caso A: $u \neq 0$.

Das hipóteses $(H.2)-(H.3)$ segue que

$$\begin{aligned} f_0(u_l) &\rightharpoonup f_0(u) \quad \text{em} \quad L^2(Q); \\ f_1(u_l) &\rightharpoonup f_1(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_1). \end{aligned}$$

De (3.40), sendo o numerador uma sequência limitada, temos que u_l', $g(u_l') \longrightarrow 0$ em $L^2(\Sigma_1)$. Passando o limite na equação

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = -f_0(u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -f_1(u), \quad u' = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0. \end{cases} \tag{3.41}$$

e para $u' = v$,

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = -f_0'(u)v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \\ v = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0. \end{cases} \tag{3.42}$$

Escolha $\epsilon > 0$ pequeno o suficiente, de modo que para qualquer $x \in \Gamma_0$, a bola $B_\epsilon(x)$ de raio ϵ e centro em x não intersecte Γ_1. Denotemos

$$\Omega_\epsilon = \Omega_1 \backslash \left[\bigcup_{x \in \Gamma_0} (\Omega_1 \cap B_\epsilon(x)) \right].$$

É claro que $\Omega_\epsilon \subset \Omega_1$ e, se $\Gamma_\epsilon := \partial\Omega_\epsilon$, temos que $\Gamma_\epsilon \subsetneq \Omega_1$. O conjunto $\Omega \backslash \overline{\Omega_\epsilon}$ é um conjunto que contém Ω e, neste conjunto, podemos considerar a solução v nula em $\overline{\Omega_1} \backslash \Omega_\epsilon$, pois $v = 0$ em Γ_0.

Partindo do conjunto $\Omega \backslash \overline{\Omega_\epsilon}$, podemos aplicar o princípio de continuação única apresentado em [29], para concluir que, para T grande o suficiente, $u' = v = 0$ em $\Omega \backslash \overline{\Omega_\epsilon}$, pois $v = 0$ em $\overline{\Omega_1} \backslash \Omega_\epsilon$. Logo

$$\begin{cases} -\Delta u = -f_0(u), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -f_1(u) \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0. \end{cases} \tag{3.43}$$

Multiplicando por u, da identidade de Green vem que

$$\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + u \ f_0(u) \right] dx + \int_{\Gamma_1} u \ f_1(u) d\Gamma = 0,$$

e disto segue que $\|u\| = 0$ em $L^2(0, T; \mathcal{V})$, isto é, $u = 0$ que é uma contradição.

Caso B: $u = 0$.

Ponha

$$C_l = \left(\|u_l\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|u_l\|^2_{L^2(Q)} \right)^{1/2}, \quad \tilde{u}_l = \frac{1}{C_l} u_l.$$

Como $u = 0$, então $C_l \longrightarrow 0$ conforme $l \longrightarrow \infty$. Daí, $u_l' \longrightarrow 0$ em $L2(\Sigma_1)$.

Por outro lado, de (3.38) e da identidade de energia, depois de usar a estimativa

$$\int_0^T E(t)dt \geq T\cdot E(T) \geq T\cdot E(0) - T\int_{\Sigma_1} u'\, g(u')d\Sigma,$$

e tomando ϵ pequeno,

$$(T - E(0))\cdot E(0) \leq C_T\,(E(0))\left\{\int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2 + |u|^2\right]d\Sigma + \int_Q |u|^2 dQ\right\}$$

donde, novamente pela identidade de energia,

$$E(t) \leq E(0) \leq C_T(E(0))\left\{\int_{\Sigma_1}\left[g^2(u') + |u'|^2 + |u|^2\right]d\Sigma + \int_Q |u|^2 dQ\right\}. \tag{3.44}$$

Dividindo (3.44) aplicada à solução u_l por C_l^2 e lembrando de (3.40),

$$\|\nabla\tilde{u}_l(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\tilde{u}_l'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_T(E(0)), \quad 0 \leq t \leq T. \tag{3.45}$$

Portanto, $(\tilde{u}_l)$ é uma sequência limitada em $H^1(0,T;\mathcal{V})$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos escrever

$$\begin{cases} \tilde{u}_l \rightharpoonup \tilde{u} \ \text{ em } \ H^1(0,T;\mathcal{V}), \\ \tilde{u}_l \longrightarrow \tilde{u} \ \text{ em } \ L^2(\Sigma) \cap L^2(\Omega). \end{cases} \tag{3.46}$$

Além disso,

$$\begin{cases} \tilde{u}_l'' = \Delta\tilde{u}_l - \dfrac{f_0(u_l)}{C_l}, \\ \tilde{u}_l = 0 \ \text{ em } \ \Sigma_0, \\ \dfrac{\partial\tilde{u}_l}{\partial\nu} = \dfrac{1}{C_l}\left(-g(u_l') - f_1(u_l)\right) \ \text{ em } \ \Sigma_1. \end{cases} \tag{3.47}$$

Afirmo que

(i) $\dfrac{g(u_l')}{C_l} \longrightarrow 0$ em $L^2(\Sigma_1)$;

(ii) $\dfrac{f_0(u_l)}{C_l} \longrightarrow f_0'(0)\tilde{u}$ em $L^2(Q)$;

(iii) $\dfrac{f_1(u_l)}{C_l} \longrightarrow f_1'(0)\tilde{u}$ em $L^2(\Sigma_1)$.

De fato,

(i) Segue diretamente do limite (3.40).

(ii)

$$\Delta_l = \left\| f_0'(0)\tilde{u} - \frac{f_0(u_l)}{C_l} \right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \int_{|u_l|\leq\epsilon} |\tilde{u}_l^2| \left| f_0'(0) - \frac{f_0(u_l)}{u_l} \right|^2 dQ + 2|f_0'(0)|^2 \int_{|u_l|>\epsilon} |\tilde{u}_l|^2 dQ + C \int_{|u_l|>\epsilon} \frac{f_0^2(u_l)}{C_l^2} dQ$$

$$\leq \|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} \cdot \rho_\epsilon^2 + C \int_{|u_l|>\epsilon} \left[\frac{u_l^2}{C_l^2} + \frac{u_l^{2k_0}}{C_l^2} \right] dQ,$$

em que $\rho_\epsilon = \sup\limits_{|s|\leq\epsilon} \left| f_0'(0) - \dfrac{f_0(s)}{s} \right|$. Note que $\rho_\epsilon \longrightarrow 0$ quando $\epsilon \longrightarrow 0$. Assim,

$$\Delta_l = \left\| f_0'(0)\tilde{u} - \frac{f_0(u_l)}{C_l} \right\|^2_{L^2(Q)}$$

$$\leq \|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} \cdot \rho_\epsilon^2 + C \int_{|u_l|>\epsilon} \left[\frac{u_l^{2k_0}}{C_l^2} \left(1 + \frac{1}{\epsilon^{2k_0-2}} \right) \right] dQ$$

$$\leq \|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} \cdot \rho_\epsilon^2 + \frac{C_\epsilon}{C_l^2} \|u_l\|^{2k_0}_{L^{2k_0}(Q)}$$

$$= \|\tilde{u}_l\|^2_{L^2(Q)} \cdot \rho_\epsilon^2 + C_\epsilon \|\tilde{u}_l\|^{2k_0}_{2k_0} \cdot C_l^{2k_0-2}.$$

Sendo $(\tilde{u}_l)$ limitada em $L^\infty(0,T;H^1(\Omega))$, é também limitada em $L^2(Q)$. Então, do fato de $C_l \longrightarrow 0$ quando $l \longrightarrow \infty$, temos

$$\limsup_{l\to\infty} \Delta_l \leq \sup_l \|\tilde{u}_l\|_{L^2(Q)} \cdot \rho_\epsilon^2.$$

E quando $\epsilon \longrightarrow 0$, $\lim\limits_{l\to\infty} \Delta_l = 0$.

(iii) Análogo ao caso (ii).

Passando agora os limites calculados em (3.47), obtemos

$$\begin{cases} \tilde{u}'' = \Delta\tilde{u} - f_0'(0)\tilde{u}, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -f_1'(0)\tilde{u} \quad \text{em} \quad \Sigma_1; \end{cases} \tag{3.48}$$

$$\begin{cases} \tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_0, \\ \tilde{u}' = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_1. \end{cases}$$

Assim, $v = \tilde{u}'$ satisfaz

$$\begin{cases} \tilde{v}'' = \Delta v - f_0'(0)v, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_1, \\ v_{|\Sigma_0} = 0. \end{cases} \tag{3.49}$$

Aplicando resultados clássicos sobre unicidade de solução da equação de onda, segue que para T_0 suficientemente grande, $v = \tilde{u}' = 0$.

Substituindo na equação (3.48), temos

$$\begin{cases} \Delta\tilde{u} - f_0'(0)\tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -f_1'(0)\tilde{u} \quad \text{em} \quad \Sigma_1, \\ \tilde{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Sigma_0. \end{cases} \tag{3.50}$$

Multiplicando (3.50) por $\tilde{u}$ e usando a fórmula de Green, obtemos $\tilde{u} = 0$, o que contradiz $\|\tilde{u}\|^2_{L^2(\Sigma_1)} + \|\tilde{u}\|^2_{L^2(Q)} = 1$. $\square$

Substituindo o resultado obtido no lema 3.1.4 na desigualdade (3.38) e tomando ϵ

pequeno o suficiente, obtemos:

Proposição 3.1.1. *Para $T > 0$ suficientemente grande,a solução u do problema (2.46) satisfaz*

$$E(T) \leq C_T(E(0)) \int_{\Sigma_1} \left[g^2(u') + |u'|^2 \right] d\Sigma. \tag{3.51}$$

3.2 Prova do Teorema 3.1

Lema 3.2.1. *Com $p(s)$ definida como em (3.3), para $T > 0$ grande o suficiente, temos*

$$p(E(T)) + E(T) \leq E(0).$$

Demonstração: Defina

$$\Sigma_A = \{x \in \Sigma_1 : |u| \geq 1 \ \text{ q.s.}\},$$
$$\Sigma_B = \Sigma_1 \backslash \Sigma_A.$$

Da hipótese $(H.1)$, temos

$$\int_{\Sigma_A} \left[g^2(u') + |u'|^2 \right] d\Sigma \leq (M + m^{-1}) \int_{\Sigma_1} g(u') \ u' \ d\Sigma. \tag{3.52}$$

Por outro lado,

$$\int_{\Sigma_B} \left[g^2(u') + |u'|^2 \right] d\Sigma \leq \int_{\Sigma_B} h\left(g(u') \ u'\right) d\Sigma. \tag{3.53}$$

Pela desigualdade de Jensen e do fato de $g(s) \ s > 0$ para $s \neq 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_B} h\left(g(u') \ u'\right) d\Sigma &\leq med(\Sigma) \cdot h\left(\int_{\Sigma_1} g(u') \ u' \ d\Sigma \right) \\ &= med(\Sigma_1) \cdot \tilde{h}\left(\int_{\Sigma_1} g(u') \ u' \ d\Sigma \right). \end{aligned} \tag{3.54}$$

Combinando (3.52), (3.53), (3.54) e (3.1.4), tem-se

$$E(T) \leq C_T(E(0)) \left[(M + m^{-1}) \int_{\Sigma_1} g(u')\ u'\ d\Sigma \right.$$

$$\left. +\ \ med(\Sigma_1) \cdot \tilde{h} \left(\int_{\Sigma_1} g(u')\ u'\ d\Sigma \right) \right].$$

Ponha $K = \dfrac{1}{C_T(E(0)) \cdot med(\Sigma_1)}$ e $c = \dfrac{M + m^{-1}}{med(\Sigma)}$. Disto segue que

$$p(E(T)) \leq \int_{\Sigma_1} g(u')\ u'\ d\Sigma = E(0) - E(T).$$

□

A fim de demonstrar o Teorema 3.1, usaremos um resultado devido a Lasiecka e Tataru [19].

Lema 3.2.2. *Seja p uma função crescente, positiva e tal que $p(0) = 0$. Como definido no início do capítulo em (3.4), $q(s) = s - (I + p)^{-1}(s)$ é uma função crescente. Considere uma sequência (s_m) de números positivos que satisfaça*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m. \tag{3.55}$$

Então, $s_m \leq S(m)$, em que $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + q(S(t)) = 0\ ,\ \ S(0) = s_0. \tag{3.56}$$

Além disso, $S(t)$ é monótona não-crescente e se se $p(s) > 0$ quando $s > 0$, então $\lim\limits_{t \to \infty} S(t) = 0$.

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre m.

De fato, para $m = 0$, segue de (3.55) que

$$(I + p)(s_1) \leq s_0. \tag{3.57}$$

Como $(I+p)^{-1}$ é crescente temos que

$$\begin{aligned} s_1 \leq (I+p)^{-1}(s_0) &= s_0 - s_0 + (I+p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - q(s_0). \end{aligned} \tag{3.58}$$

Por outro lado, como q é uma função positiva, a solução $S(t)$ de (3.56) é monótona não-crescente, ou seja,

$$S(t) \leq S(\tau)\ ,\ \forall t \geq \tau \geq 0\,. \tag{3.59}$$

Integrando (3.56) de 0 a 1 obtemos

$$S(1) - S(0) + \int_0^1 q(S(\tau))d\tau = 0,$$

e, como q é crescente, de (3.59) e da hipótese $S(0) = s_0$, resulta que

$$\begin{aligned} S(1) &= S(0) - \int_0^1 q(S(\tau))d\tau \\ &\geq S(0) - \int_0^1 q(S(0))d\tau \\ &= S(0) - q(S(0)) \\ &= (I-q)(S(0)) \\ &= (I+p)^{-1}(S(0)) = (I+p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - q(s_0) \geq s_1, \end{aligned}$$

portanto $S(1) \geq s_1$.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para m, ou seja, $S(m) \geq s_m$. Portanto, para $m+1$ de (3.55), temos

$$(I+p)s_{m+1} \leq s_m. \tag{3.60}$$

Como $(I+p)^{-1}$ é crescente, resulta que

$$s_{m+1} \leq s_m - q(s_m). \tag{3.61}$$

Agora, integrando (3.56) de m à $m+1$, obtemos

$$S(m+1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(\tau))d\tau = 0.$$

Do fato que q é crescente, de (3.59) e da hipótese indutiva, obtemos

$$\begin{aligned} S(m+1) &\geq S(m) - \int_m^{m+1} q(S(\tau))d\tau \\ &= S(m) - q(S(m)) = (I-q)S(m) \\ &= (I+p)^{-1}S(m) \geq (I+p)^{-1}s_m \\ &= s_m - q(s_m). \end{aligned} \tag{3.62}$$

Das relações (3.61) e (3.62) resulta que

$$S(m+1) \geq s_{m+1},$$

o que prova o desejado.

Para finalizarmos a prova do lema, resta-nos provar que se $p(s) > 0$ para $s > 0$ então $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0$.

De fato, por (3.56), para cada $\overline{T} > 0$, temos

$$S(\overline{T}) - S(0) + \int_0^{\overline{T}} q(S(\overline{T}))d\tau = 0$$

e por (3.59) resulta

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \int_0^{\overline{T}} q(S(\overline{T}))d\tau,$$

ou seja,

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}q(S(T)) \tag{3.63}$$

Por (3.59) temos que $S(t)$ é uma função monótona não crescente e limitada inferiormente pelo 0, pois $S(m) \geq s_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e s_m são números positivos. Seja $C = \inf \left\{ S(t)\,;\, t \geq 0 \right\}$. Observe que $C = \lim\limits_{t \to +\infty} S(t)$. Mostraremos que $C = 0$.

Suponha por contradição que $C > 0$. Logo de (3.63), obtemos que

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}q(C)\,,\ \forall \overline{T} > 0 \tag{3.64}$$

como $p(s) > 0$ para $s > 0$ obtemos que $q(C) > 0$, pois caso contrário, se $\exists\ s^* > 0$ tal que $q(s^*) \leq 0$, segue que

$$s^* - (I+p)^{-1}(s^*) \leq 0 \Leftrightarrow s^* \leq (I+p)^{-1}(s^*) \Leftrightarrow (I+p)(s^*) \leq s^*$$

ou ainda, se e somente se $p(s^*) \leq 0$, o que é uma absurdo.

Portanto, tomando $\overline{T} \in \mathbb{N}$ tal que $S(0) < \overline{T}q(C)$ resulta de (3.64) que $S(\overline{T}) < 0$ o que é um absurdo. Então concluímos que $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0$. $\square$

Prova do Teorema 3.1 Aplicando o lema 3.2.1, mas trocando o intervalo de integração $(0, T)$ por $(mT, m(T+1))$,

$$E(m(T+1)) + p(E(m(T+1))) \leq E(mT)\,,\ \text{para } m = 0, 1, \ldots$$

Aplicando o lema 3.2.2 para $s_m = E(mT)$, obtemos

$$E(mT) \leq S(m)\ ,\ m = 0, 1, \ldots$$

Pondo $t = mT + \tau$, $0 \leq \tau < T$ e lembrando da propriedade de evolução, resulta que

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right).$$

Como $\tau < T$, então $\dfrac{\tau}{T} < 1$. Daí, para $t > T$ tem-se $\dfrac{t-\tau}{T} > \dfrac{t}{T} - 1$. E usando o fato de que S é monótona não-crescente, concluímos que

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right).$$

Com isto, a prova do Teorema 3.1 está completa.

3.3 Computação das Taxas Efetivas de Decaimento

Para ilustrar as taxas de decaimento que são obtidas a partir da aplicação do teorema 3.1, apresentaremos dois resultados que seguem como aplicação direta do mesmo. O primeiro corolário engloba o caso em que a função g decai para zero mais rápido do que uma função linear e, o segundo corolário, o caso complementar.

Corolário 3.1.1. *Suponha que $g'(0) = 0$ e a função $\sqrt{s}g\left(\sqrt{s}\right)$ é convexa para $s \in [0, s_0]$, s_0 arbitrariamente pequeno. Então a equação diferencial a ser resolvida se torna*

$$\frac{d}{dt}S(t) + \sqrt{S(t)}g\left(\sqrt{S(t)}\right) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. Se

$$G(s, S_0) := \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} \frac{du}{g(u)}, \tag{3.65}$$

então

$$S(t) = G^{-1}\left(-\frac{t}{2}, S_0\right). \tag{3.66}$$

Demonstração: Ver [7].

Corolário 3.1.2. *Suponha que*

$$\lim_{s\to 0} \frac{s}{g(s)} = 0,$$

e além disso, $\sqrt{s}g^{-1}\left(\sqrt{s}\right)$ é convexa, para $s \in [0, s_0]$, s_0 arbitrariamente pequeno. Então a

EDO a ser resolvida é

$$\frac{d}{dt}S(t) + \sqrt{S(t)}g^{-1}\left(\sqrt{S(t)}\right) = 0, \quad S(0) = E(0) = S_0$$

e $E(t) \leq C(E(0))S(t)$. *Se*

$$G(s, S_0) := \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} \frac{du}{g^{-1}(u)}, \tag{3.67}$$

então

$$S(t) = G^{-1}\left(-\frac{t}{2}, S_0\right).$$

Demonstração: Ver [7].

Vejamos agora dois exemplos, onde são aplicados os corolários 3.1.1 e 3.1.2.

Exemplo 3.3.1. *Considere* $g(s) = s^p$, $p > 1$. *Como* $\sqrt{s}g\left(\sqrt{s}\right) = s^{\frac{p+1}{2}}$ *é convexa, resolvemos*

$$S_t + S^{\frac{p+1}{2}} = 0.$$

Pela fórmula (3.65),

$$G(s, S_0) = \int_{\sqrt{S_0}}^{\sqrt{s}} u^{-p} du = \frac{1}{1-p}\left[s^{\frac{p+1}{2}} - S_0^{\frac{p+1}{2}}\right].$$

Assim,

$$G^{-1}(t) = \left[S_0^{\frac{-p+1}{2}} - t(1-p)\right]^{\frac{2}{-p+1}},$$

donde, conforme (3.66), a taxa de decaimento é dada por

$$E(t) \leq C(E(0))\left[E(0)^{\frac{-p+1}{2}} + t(p-1)\right]^{\frac{2}{-p+1}}.$$

Exemplo 3.3.2. *Considere* $g(s) = \dfrac{s}{|s|^{1-\theta}}$, $0 < \theta < 1$. *Então* $g^{-1}(s) = s^{\frac{1}{\theta}}$ *para* $s > 0$. *Pondo* $p = \dfrac{1}{\theta} > 1$, *recaímos no caso apresentado no Exemplo 3.3.1 e, temos que a taxa de decaimento é dada por*

$$E(t) \leq C(E(0)) \left[E(0)^{\frac{\theta-1}{2\theta}} + t\frac{1-\theta}{\theta} \right]^{\frac{2\theta}{\theta-1}}.$$

Capítulo 4

Apêndice

4.1 O Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$

O espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$. De fato, seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ um sequência tal que

$$u_k \to u \ \text{ em } \ H^1(\Omega).$$

Pela continuidade da aplicação traço γ_0, temos que

$$\gamma_0(u_k) \to \gamma_0(u) \ \text{ em } \ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$

e assim,

$$\gamma_0(u_k) \to \gamma_0(u) \ \text{ q.s. em } \ \Gamma.$$

Como $\{u_k\} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ temos que $\gamma_0(u_k) = 0$ q.s. em Γ_0, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ e da convergência acima, concluímos que $\gamma_0(u) = 0$ q.s. em Γ_0, o que prova que $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Logo, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert temos o desejado.

Além do mais, em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ as normas

$$||u||_{H^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad [u] = ||\nabla u||_{\Omega} \tag{4.1}$$

são equivalentes. Com efeito, notemos inicialmente que a aplicação

$$u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow [u] = ||\nabla u||_\Omega \tag{4.2}$$

define uma seminorma em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Agora, se $[u] = 0$ isto é, $||\nabla u||_\Omega = 0$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \ \ \forall\, i = 1, ..., n$, logo, $u = C$, onde C é uma constante (notemos que Ω é conexo). Como $u|_{\Gamma_0} = 0$ resulta que $u = 0$ em Ω. Portanto, a aplicação acima é uma norma.

Como a desigualdade

$$||\nabla u||^2_\Omega \leq ||u||^2_\Omega + ||\nabla u||^2_\Omega = ||u||^2_{H^1(\Omega)}$$

é trivialmente verificada, para provarmos o desejado em (4.1) é suficiente garantirmos a existência de uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$||u||_\Omega \leq c_1[u]; \ \ \forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{4.3}$$

Se $u = 0$, nada temos a provar. Suponhamos, então, que $u \neq 0$. De (4.3) temos que mostrar o desejado é equivalente a mostrar que existe $c_2 > 0$ tal que

$$c_2 \leq \left[\frac{u}{||u||_\Omega}\right]; \ \ \forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Ou ainda, basta provarmos que

$$\exists\, c > 0 \ \text{ tal que } \ [u] \geq c, \ \forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ \text{ com } \ ||u||_\Omega = 1.$$

Suponhamos o contrário, ou seja, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $u_n \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ com $||u_n||_\Omega = 1$ e, no entanto,

$$[u_n] < \frac{1}{n}. \tag{4.4}$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $n \to +\infty$ resulta que

$$\lim_{n \to +\infty} [u_n] = 0. \tag{4.5}$$

Agora, de (4.4) e do fato que $||u_n||_\Omega = 1;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ temos

$$||u_n||^2_{H^1(\Omega)} = ||u_n||^2_\Omega + [u_n]^2 \leq 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2, \tag{4.6}$$

o que implica que $\{u_n\}$ é limitada no espaço topológico $(H^1_{\Gamma_0}(\Omega), ||.||_{H^1(\Omega)})$. Sendo $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, existirá (u_ν) subsequência de (u_n) e $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{4.7}$$

Sendo a aplicação $v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \mapsto [v]$ uma norma, ela é convexa e semicontínua inferiormente. Logo de (4.5) e (4.7) obtemos

$$[u] \leq \lim_{\nu \to \infty} [u_\nu] = 0.$$

Assim, $[u] = 0$ e portanto $u = 0$.

Por outro lado, em virtude da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser compacta, então de (4.6), após a extração de uma eventual subsequência obtemos

$$u_\nu \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \tag{4.8}$$

o que implica que

$$||u_\nu||_\Omega \to ||u||_\Omega.$$

Como $||u_\nu||_\Omega = 1$ vem que $||u||_\Omega = 1$ o que é um absurdo, pois $u = 0$. Ficando provado a equivalência entre as normas.

4.2 Existência de Solução para o Problema Aproximado

Nesta seção provaremos a existência de solução para o problema aproximado (2.4), mencionado anteriormente no Capítulo 2, utilizando o teorema de Carathéodory.

Consideremos no problema aproximado (PA) $v = w_j, j = 1, ..., m.$

$$(u''_m(t), w_j)+(\nabla u_m(t), \nabla w_j)+(f_1(u_m(t)), v)_{\Gamma_1}+(G(u'_m(t)), v)_{\Gamma_1}+(f_0(u_m(t)), w_j) = 0; \; j = 1, ..., m.$$

O sistema de equações acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma''_{1m}(t) \\ \gamma''_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} [G(u'_m(t)) + f_1(u_m(t))]w_1 \; d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} [G(u'_m(t)) + f_1(u_m(t))]w_2 \; d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} [G(u'_m(t)) + f_1(u_m(t))]w_m \; d\Gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{\Omega} f_0(u_m(t))w_1 \; dx \\ \int_{\Omega} f_0(u_m(t))w_2 \; dx \\ \vdots \\ \int_{\Omega} f_0(u_m(t))w_m \; dx \end{bmatrix} = 0.$$

Renomeando

$$C = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

]

$$B = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z(t) = \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + P(z'(t)) + Q(z(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \;\; ; \;\; z'(0) = z^1, \end{cases} \tag{4.9}$$

em que,

$$P(z'(t)) = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} G(Bz'(t))w_1 \;\, d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} G(Bz'(t))w_2 \;\, d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} G(Bz'(t))w_m \;\, d\Gamma \end{bmatrix}, \quad Q(z(t)) = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} f_1(Bz(t))w_1 \;\, d\Gamma + \int_{\Omega} f_0(Bz(t))w_1 \;\, d\mathbf{x} \\ \int_{\Gamma_1} f_1(Bz(t))w_2 \;\, d\Gamma + \int_{\Omega} f_0(Bz(t))w_2 \;\, d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} f_1(Bz(t))w_m \;\, d\Gamma + \int_{\Omega} f_0(Bz(t))w_m \;\, d\mathbf{x} \end{bmatrix},$$

com $G(s) = \alpha s + g(s)$,

$$z^0 = \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(0) \\ \gamma_{2m}(0) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z^1 = \begin{bmatrix} \gamma'_{1m}(0) \\ \gamma'_{2m}(0) \\ \vdots \\ \gamma'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Ortonormalizando a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ utilizando o processo de Gram-Schmidt, a matriz C se torna a matriz identidade.

Assim, o sistema (4.9) pode ser escrito como

$$\begin{cases} z''(t) + Az(t) + P(z'(t)) + Q(z(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \ \ ; \ \ z'(0) = z^1. \end{cases} \tag{4.10}$$

Ponhamos

$$Y_1(t) = z(t), \ \ Y_2(t) = z'(t), \ \ Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \ \text{e} \ Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -AY_1(t) - P(Y_2(t)) - Q(Y_1(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -P(Y_2(t)) - Q(Y_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Provaremos que o problema

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -P(Y_2(t)) - Q(Y_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \tag{4.11}$$

possui solução local utilizando o Teorema 1.16 (Teorema de Carathéodory).

Fixe $T > 0$ e considere a aplicação

$r : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, dada por

$$r(t, y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -P(y_2) - Q(y_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} y$$

em que

$y = (\xi_1, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_{2m}), y_1 = (\xi_1, ..., \xi_m)$ e $y_2 = (\xi_{m+1}, ..., \xi_{2m})$.

Nosso objetivo é verificar que a aplicação r está nas condições do Teorema de Carathéodory.

Com efeito,

(i) Para $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado, a função r é mensurável como função de $t \in [0, T]$, visto que esta não depende de t.

(ii) Seja $t \in [0, T]$ fixado. Vamos provar que r é contínua como função de y.

A aplicação

$$y \mapsto \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} y \tag{4.12}$$

é linear, logo contínua.

Por outro lado, tome $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma sequência tal que

$$y_\nu \to y \text{ em } \mathbb{R}^{2m}. \tag{4.13}$$

Se $y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu})$ e $y = (y_1, y_2)$ com $y_{1\nu}, y_{2\nu}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$y_{1\nu} \to y_1 \text{ em } \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad y_{2\nu} \to y_2 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Provemos que $P(y_{2\nu}) \to P(y_2)$ e $Q(y_{1\nu}) \to Q(y_1)$.

Notemos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$B(x)y_{1\nu} \to B(x)y_1 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, como a função f_0 é contínua, temos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$f_0(B(x)y_{1\nu}) \to f_0(B(x)y_1) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para q.t. $x \in \Omega$,

$$f_0(B(x)y_{1\nu})w_j(x) \to f_0(B(x)y_1)w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além do mais, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois é convergente. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$||y_{1\nu}||_{\mathbb{R}^m} \leq M.$$

Pela continuidade de f_0 e sendo $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$, pelo teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, vem que

$$\int_\Omega f_0(B(x)y_{1\nu})w_j(x)\ dx \longrightarrow \int_\Omega f_0(B(x)y_1)w_j(x)\ dx,\ \forall j = 1, \ldots, m.$$

Lembremos que $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Disto segue que

$$By_{2\nu} = \sum_{i=1}^{m} w_i y_{(2\nu)_i} \in \mathcal{V} \text{ e } By_2 = \sum_{i=1}^{m} w_i y_{2_i} \in \mathcal{V}.$$

Portanto, de (4.13) segue que

$$By_{2\nu} \to By_2 \text{ em } \mathcal{V}.$$

Usando que a derivada da função g é limitada, juntamente com a proposição (1.1.19), fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} G: \ & \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V} \\ & w \mapsto G(w): \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ & \qquad\qquad\qquad \mathbf{x} \mapsto G(w)(\mathbf{x}) = G(w(\mathbf{x})), \end{aligned}$$

e $\gamma_0 : \mathcal{V} \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$, pela continuidade de G segue que

$$\gamma_0(G(By_{2\nu}))\gamma_0(w_j) \longrightarrow \gamma_0(G(By_2))\gamma_0(w_j) \ \text{ em } \ L^1(\Gamma_1)$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_0 G(By_{2\nu})\gamma_0 w_j d\Gamma \to \int_{\Gamma_1} \gamma_0 G(By_2)\gamma_0 w_j d\Gamma \quad \forall j = 1, ..., m.$$

De modo análogo se prova que

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_0 f_1(By_{1\nu})\gamma_0 w_j d\Gamma \to \int_{\Gamma_1} \gamma_0 f_1(By_1)\gamma_0 w_j d\Gamma \quad \forall j = 1, ..., m.$$

Assim,

$$Q(y_{1\nu}) \to Q(y_1) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^m. \tag{4.14}$$

$$P(y_{2\nu}) \to P(y_2) \ \text{ em } \ \mathbb{R}^m. \tag{4.15}$$

De (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15) resulta que a aplicação r é contínua como função de y para $t \in [0, T]$ fixado.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto. Existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$||r(t, y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t) \quad \forall (t, y) \in K.$$

De fato, temos

$$||r(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq ||P(y_2)||_{\mathbb{R}^m} + ||Q(y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||A(y)||_{\mathbb{R}^m}. \tag{4.16}$$

Sendo P e Q contínuas em $\mathbb{R}^m$, bem como a aplicação linear A, existe $M_K > 0$ tal que

$$||r(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K \tag{4.17}$$

.

Tomando $m_K(t) = M_K; \;\; \forall t \in [0,T]$, segue de (4.16) e (4.17) que

$$||r(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t); \quad \forall (t,y) \in K.$$

Assim, dos itens (i), (ii) e (iii) temos que as condições do Teorema de Carathéodory são satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = r(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $0 < t_m < T$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas em $[0, t_m)$ e $z''(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

Como os problemas (2.4) e (4.11) são equivalentes, existe uma solução $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{im}(t) w_i$ para o problema aproximado (2.4), em $[0, t_m)$ para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo.

A primeira estimativa a priori (capítulo 2, seção 2.2.1.1), nos permitirá estender a solução obtida à todo intervalo $[0, T]$.

4.3 O Operador A

Nosso objetivo nesta seção, é provar o que foi afirmado no capítulo 2 sobre o operador A, isto é, que o operador A definido a partir do operador de Neumann N é ω-acretivo no espaço produto $E = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, $\mathcal{V} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Isto é, existe um $\omega > 0$ tal que o operador $A + \omega I$ é maximal monótono. Neste caso, estamos considerando em E a norma da soma.

Vamos mostrar que o operador

$$N : H^{-1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathcal{V}$$

introduzido anteriormente está bem definido e é contínuo, logo fechado. Consequentemente, $D(N^*) = \mathcal{V}'$, onde N^* é o operador adjunto de N e, $N^* : \mathcal{V}' \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ verifica $\|N\| = \|N^*\|$.

Por definição

$$Nq = p \Longleftrightarrow \begin{cases} -\Delta p = 0 & \text{em } \ \Omega; \\ p = 0 & \text{em } \ \Gamma_0; \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu} = q & \text{em } \ \Gamma_1. \end{cases}$$

Seja $q \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$. Defina

$$\varphi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

pondo $\varphi(v) = \langle q, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)}$. Pela continuidade de q e da continuidade da aplicação traço de ordem 0, vem que $\varphi \in \mathcal{V}'$. Como a função

$$a : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por $a(u, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}$ é bilinear, contínua e coerciva, em virtude do lema de Lax-Milgram, existe um único $p \in \mathcal{V}$ tal que

$$\langle q, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)} = \varphi(v) = a(p, v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \ v \in \mathcal{V}. \tag{4.18}$$

Sendo $D(-\Delta) = \left\{ u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} : \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1 \right\} \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ e sabendo que $D(-\Delta)$ é denso em $\mathcal{V}$, temos que existe uma sequência $\{p_n\} \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ tal que

$$p_n \longrightarrow p \ \text{ em } \ \mathcal{V}. \tag{4.19}$$

Para cada p_n, vale a segunda fórmula de Green generalizada:

$$(-\Delta p_n, v) + (\nabla p_n, \nabla v) = \langle \gamma_1 p_n, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)}, \quad \forall\ v \in H^1(\Omega). \tag{4.20}$$

Em particular, se $v \in C_0^\infty(\Omega)$, de (4.18) e (4.20) vem que

$$(\nabla p, \nabla v) = 0, \ \forall\ v \in C_0^\infty(\Omega) \ \text{ e,} \tag{4.21}$$

$$(-\Delta p_n, v) = (\nabla p_n, \nabla v), \ \forall\ v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{4.22}$$

Usando (4.19) na identidade (4.22), obtemos que $-\Delta p = 0$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Logo, $0 = -\Delta p \in L^2(\Omega)$. Assim, podemos aplicar a segunda fórmula de Green em p para obter

$$(\nabla p, \nabla v) = \langle \gamma_1 p, \gamma_0 v\rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_1), H^{1/2}(\Gamma_1)}, \ \forall\ v \in \mathcal{V}. \tag{4.23}$$

Esta igualdade, juntamente com (4.18), implica que $\gamma_1 p = q$, como queríamos demonstrar.

Provaremos agora que $N^*(-\Delta v) = \gamma_0 v$, para todo $v \in \mathcal{V}$. Mostraremos para as funções $v \in D(-\Delta)$, pois este é denso em $\mathcal{V}$. Como $D(-\Delta) = \left\{u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \ : \ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1\right\}$, então

$$-\Delta v \in L^2(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{V}' \ \text{ e } \ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \ \text{ em } \ \Gamma_1. \tag{4.24}$$

Da propriedade de adjunção, segue que

$$\langle N^*(-\Delta v), q\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_1), H^{-1/2}(\Gamma_1)} = \langle -\Delta v, Nq\rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}. \tag{4.25}$$

Seja agora p a solução do problema elíptico

$$\begin{aligned} &\Delta p = 0 \quad \text{em} \quad \Omega; \\ &p = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0; \qquad\qquad \Leftrightarrow Nq = p \\ &\frac{\partial p}{\partial \nu} = q \quad \text{em} \quad \Gamma_1. \end{aligned} \tag{4.26}$$

De (4.24)-(4.26), juntamente com a primeira identidade de Green generalizada, obtemos

$$\begin{aligned} &\langle N^*(-\Delta v), q\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_1),H^{-1/2}(\Gamma_1)} = \langle -\Delta v, p\rangle = (v, \Delta p)_{L^2(\Omega)} - (\Delta v, p)_{L^2(\Omega)} \\ &= \langle \gamma_0 v, \gamma_1 p\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_1),H^{-1/2}(\Gamma_1)} - \langle \gamma_1 v, \gamma_0 p\rangle_{H^{3/2}(\Gamma_1),H^{-3/2}(\Gamma_1)} = \langle \gamma_0 v, \gamma_1 p\rangle_{H^{1/2}(\Gamma_1),H^{-1/2}(\Gamma_1)}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

como queríamos.

Provemos agora a monotonicidade do operador $A + \omega I$.

Com $\begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \in D(A)$ e L_0, L_1 constantes de Lipschitz para f_0 e f_1, respectivamente, temos

$$\langle A \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \rangle_E$$

$$\begin{aligned} &= -\left(\nabla(v^1 - v^2), \nabla(u^1 - u^2)\right) - \left(\Delta(u^1 - u^2), v^1 - v^2\right) \\ &+ \left(g(v^1) - g(v^2), v^1 - v^2\right)_{\Gamma_1} + \left(f_1(u^1) - f_1(u^2), v^1 - v^2\right)_{\Gamma_1} \\ &+ \left(f_0(u^1) - f_0(u^2), v^1 - v^2\right) \geq (\alpha - \epsilon)\|v^1 - v^2\|^2_{\Gamma_1} \\ &- \frac{L_1}{4\epsilon}\|u^1 - u^2\|^2_{\Gamma_1} - \frac{L_0}{2}\|u^1 - u^2\|^2 - \frac{1}{2}\|v^1 - v^2\|^2. \end{aligned} \tag{4.28}$$

Aplicando o teorema do traço, tomando $\epsilon < \alpha$ e somando $\omega \left\| \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \right\|_E^2$ de ambos os lados para $\omega > máx \left\{ \dfrac{L_1}{4\epsilon}, \dfrac{L_0}{2}, \dfrac{1}{2} \right\}$ concluímos que

$$\begin{aligned} &\langle (A+\omega I) \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} - (A+\omega I) \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u^1 \\ v^1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u^2 \\ v^2 \end{bmatrix} \rangle_E \\ &\geq (\alpha - \epsilon + \omega)\|\nabla v^1 - \nabla v^2\|_\Omega^2 + \left(\omega - \frac{L_1}{4\epsilon}\right) \|\nabla u^1 - \nabla u^2\|_\Omega^2 \\ &\quad + \left(\omega - \frac{L_0}{2}\right) \|u^1 - u^2\|_\Omega^2 + \left(\omega - \frac{1}{2}\right) \|v^1 - v^2\|_\Omega^2 \\ &\geq 0, \end{aligned} \tag{4.29}$$

o que prova que $A + \omega I$ é monótono.

A seguir provaremos a maximalidade de $A + \omega I$. Para isso, basta provarmoa que para algum $\lambda > 0$ a equação

$$A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \lambda \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

possui solução $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in E$, para qualquer $\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in E$. Equivalentemente, devemos resolver a seguinte equação

$$\begin{cases} -v + \lambda u = h_1; \\ -\Delta(u - N(g(v) + f_1(u))) + f_0(u) + \lambda v = h_2. \end{cases} \tag{4.30}$$

Temos $u = \dfrac{1}{\lambda}(h_1 + v)$ e

$$\lambda v - \frac{1}{\lambda}\Delta N g(v) - \Delta N f_1\left(\frac{1}{\lambda}(v + h_1)\right) + f_0\left(\frac{1}{\lambda}(v + h_1)\right) = \frac{1}{\lambda}\Delta h_1 + h_2. \tag{4.31}$$

Defina

$$\begin{aligned} S(v) &= -\Delta N \left[g(v) + f_1\left(\tfrac{1}{\lambda}(h_1+v)\right)\right]; \\ T(v) &= \lambda v + f_0\left(\tfrac{1}{\lambda}(h_1+v)\right). \end{aligned} \tag{4.32}$$

Substituindo (4.32) em (4.31), temos que

$$-\frac{1}{\lambda}\Delta v + S(v) + T(v) = \frac{1}{\lambda}\Delta h_1 + h_2.$$

Nosso problema agora se resume em mostrar que o operador $-\frac{1}{\lambda}\Delta + S + T$ é sobrejetor.

Inicialmente, consideremos a aplicação dualidade $F : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ (cada ponto possui uma única imagem, pois estamos trabalhando em um espaço de Hilbert) e a extensão do operador $-\Delta : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$. Dado $v \in \mathcal{V}$, existe $v' \in \mathcal{V}'$ tal que $F(v) = v'$. Além disso, por definição,

$$\langle v', v\rangle = \|v\|^2 = (\nabla v, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle -\Delta v, v\rangle.$$

Pela unicidade de v', concluímos que $-\Delta = F$. Assim, pelo teorema (1.19), para provar a sobrejetividade do operador $-\frac{1}{\lambda}\Delta + S + T$, basta provar que $S + T$ é maximal monótono.

No que segue, consideraremos o par dual $\{\mathcal{V}', \mathcal{V}\}$ com respeito à dualidade de $L^2(\Omega)$. Provaremos primeiramente que o operador T é monótono, coercivo e hemicontínuo. Daí, pelo teorema (1.18), T é maximal monónoto e sobrejetor.

(i) T é monótono.

$$\begin{aligned} &\langle Tu - Tv, u - v\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \langle f_0\left(\tfrac{1}{\lambda}(h_1+u)\right) - f_0\left(\tfrac{1}{\lambda}(h_1+v)\right) + \lambda(u-v), u-v\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\ &\geq -\frac{L_0}{\lambda}\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)} + \lambda\|u-v\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

Escolhemos então $\lambda^2 > L_0$.

(ii) T é coercivo:

$$\frac{\langle Tu_n, u_n\rangle}{\|u_n\|} = \frac{\langle f_0\left(\frac{1}{\lambda}(h_1+u)\right) + \lambda u_n, u_n\rangle}{\|u_n\|}$$

$$\geq \left(\lambda - \frac{L_0}{\lambda}\right)\|u_n\|.$$

Logo, quando $\|u_n\| \longrightarrow \infty$, o termo da esquerda diverge para infinito. Isto prova que T é coercivo.

(iii) T é hemicontínuo:

T é contínuo, portanto hemicontínuo.

Para concluir o desejado, faremos uso do teorema (1.20). Portanto, resta-nos mostrar que o operador S é maximal monótono. Mostraremos, em verdade, que S é a subdiferencial de uma função convexa. Inicialmente, observe que $S = (-\Delta)\circ N \circ (g + F_\lambda^1)\circ N^* \circ (-\Delta)$, onde $F_\lambda^1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_1)$ é definido por $F_\lambda^1(v) = f_1\left(\frac{1}{\lambda}(h_1+v)\right)$.

Pomos então $\Lambda = N^*\circ(-\Delta)$. Sendo $-\Delta$ um operador auto-adjunto, temos que $\Lambda^* = (-\Delta)\circ N$. Disto segue que podemos escrever o perador S da seguinte forma

$$S = \Lambda^*\circ(g + F_\lambda^1)\circ\Lambda. \tag{4.33}$$

Observemos que o operador $\Lambda : \mathcal{V} \longrightarrow H^{1/2}(\Gamma_1)$ é contínuo.

Defina $\phi : H^{1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\phi(u) = \int_{\Gamma_1}\int_0^{u(x)} g(\tau)d\tau d\Gamma + \lambda\int_{\Gamma_1}\int_0^{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u(x))} f_1(\tau)d\tau d\Gamma. \tag{4.34}$$

Pelas hipóteses $(H.1)$ e $(H.3)$, este funcional está bem definido. Afirmo que este funcional é contínuo. De fato, considere $\{u_n\} \subset H^{1/2}(\Gamma_1)$ uma sequência tal que $u_n \longrightarrow u$.

Então

$$
\begin{aligned}
|\phi(u_n) - \phi(u)| &= \left| \int_{\Gamma_1} \int_0^{u_n(x)} g(\tau) d\tau d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \int_0^{u(x)} g(\tau) d\tau d\Gamma \right. \\
&+ \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u_n(x))} f_1(\tau) d\tau d\Gamma - \lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u(x))} f_1(\tau) d\tau d\Gamma \Bigg| \\
&\leq \int_{\Gamma_1} \int_{u_n(x),u(x)} |g(\tau)| d\tau d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_1} \int_{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u_n(x)),\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u(x))} |f_1(\tau)| d\tau d\Gamma \\
&\leq \underbrace{c \int_{\Gamma_1} |u_n(x) - u(x)| d\Gamma}_{I_1} + \underbrace{\left(\frac{K}{2} + \frac{L_1}{2}\right) \int_{\Gamma_1} \left| |u_n(x)|^2 - |u(x)|^2 \right| d\Gamma}_{I_2}.
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

É claro que $I_1 \longrightarrow 0$, pois $L^2 \hookrightarrow L^1$. Já a segunda integral tende a zero pois

$$
\int_{\Gamma_1} \left| |u_n(x)|^2 - |u(x)|^2 \right| d\Gamma \leq \left(\int_{\Gamma_1} |u_n(x) - u(x)|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma_1} |u_n(x) + u(x)|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}},
$$

e este segundo fator é limitado. Logo, ϕ é contínua.

Vamos verificar agora que ϕ é Gateaux diferenciável em todo ponto. Pelo teorema da média,

$$
\begin{aligned}
\frac{\phi(u + \delta v) - \phi(u)}{\delta} &= \frac{1}{\delta} \int_{\Gamma} \left[\int_{u(x)}^{u(x)+\delta v(x)} g(\tau) d\tau + \lambda \int_{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u(x))}^{\frac{1}{\lambda}(h_1(x)+u(x)+\delta v(x))} f_1(\tau) d\tau \right] d\Gamma \\
= \int_{\Gamma_1} g(u)\ v\ d\Gamma &+ \int_{\Gamma_1} f_1 \left(\frac{1}{\lambda}(h_1 + u) \right) v\ d\Gamma.
\end{aligned}
\tag{4.36}
$$

O operador $R : H^{1/2}(\Gamma_1) \longrightarrow (L^2(\Gamma_1))' \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_1)$ dado por

$$
(Ru, v) := \int_{\Gamma_1} g(u)\ v\ d\Gamma + \int_{\Gamma_1} f_1 \left(\frac{1}{\lambda}(h_1 + u) \right) v\ d\Gamma
$$

é tal que $\phi'(u) = Ru$. Se provarmos agora que ϕ é convexa, por pela proposição (1.6.2), $\phi'(u) = Ru = \partial\phi(u)$. Em virtude do teorema de Kachurovskii (1.6.1), basta provar que

$\langle \phi'(u) - \phi'(v), u - v\rangle \geq 0$. Das hipóteses $(H.1)$ e $(H.3)$,

$$\langle \phi'(u) - \phi'(v), u - v\rangle = (Ru - Rv, u - v)$$

$$= \int_{\Gamma_1} [g(u) - g(v)][u - v] d\Gamma + \lambda \int_{\Gamma_1} \left[f_1\left(\frac{1}{\lambda}(h_1 + u)\right) - f_1\left(\frac{1}{\lambda}(h_1 + v)\right)\right][u - v] d\Gamma \tag{4.37}$$

$$\geq \left(\alpha_0 - \frac{L_1}{\lambda}\right)\|u - v\|.$$

Escolhemos então, $\lambda > max\left\{\frac{L_1}{\alpha_0}, \sqrt{L_0}\right\}$.

Combinando os resultados obtidos em (4.33), (4.35) e (4.37), pela proposição (1.6.3) temos que

$$S = \partial(\phi \circ \Lambda).$$

Como foi provado que ϕ é convexa e, Λ é linear, fica demonstrado que S é um operador maximal monótono, como queríamos.

4.4 Identidade de Energia

Nosso intuito é provar a seguinte identidade de energia

$$E(t) + \int_0^t \int_{\Gamma_1} g(u'(t))u'(t)\ d\Gamma\ dt = E(0),$$

para $0 \leq t \leq T$, onde u é uma solução fraca do problema (2.1), em que

$$E(t) = \frac{1}{2}\left(||u'(t)||^2_\Omega + ||\nabla u(t)||^2_\Omega\right) + \int_{\Gamma_1} F_1(u))\ d\Gamma + \int_\Omega F_0(u))\ dx,$$

e

$$F_i(s) = \int_0^s f_i(t)\ dt,\ i = 0, 1.$$

Seja θ_0 a função característica do intervalo $[s, t]$, onde $0 < s < t < T$. Para cada número natural $n \geq n_0 > \ máx \left\{ \frac{1}{s}, \frac{1}{T-t} \right\}$, defina

$$\theta_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \leq \xi \leq s - \frac{1}{n} \\ 1 + n(\xi - s) & \text{se } \ s - \frac{1}{n} \leq \xi \leq s \\ 1 & \text{se } \ s \leq \xi \leq t \\ 1 - n(\xi - t) & \text{se } \ t \leq \xi \leq t + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \ t + \frac{1}{n} \leq \xi \leq T \end{cases} \tag{4.38}$$

cuja derivada no sentido das distribuições é:

$$\theta_n'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \leq \xi < s - \frac{1}{n} \\ n & \text{se } \ s - \frac{1}{n} < \xi < s \\ 0 & \text{se } \ s < \xi < t \\ -n & \text{se } \ t < \xi < t + \frac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \ t + \frac{1}{n} < \xi \leq T \end{cases} \tag{4.39}$$

Seja $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão regularizante positiva, par, isto é,

$$\rho_k(\xi) = \rho_k(-\xi), \quad \text{tal que } supp(\rho_k) \subset \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right] \tag{4.40}$$

Definamos:

$$\varphi_{n,k} = \theta_n \Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k \Big] \tag{4.41}$$

onde a convolução é considerada em t. A função acima está bem definida, pois se $\tilde{\theta_n}$ e $\tilde{u'}$ são as extensões nulas fora de $[0,T]$ de θ_n e u' respectivamente, então, $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta_n}\Big[(\tilde{\theta_n}\tilde{u'}) * \rho_k * \rho_k\Big](t) &= \tilde{\theta_n}(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\theta_n}(\xi)\tilde{u'}(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi \\ &= \theta_n(t) \int_0^T \theta_n(\xi)u'(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi = \varphi_{n,k}(t) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre em virtude de $\tilde{\theta_n}(\xi) = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus (0,T)$ e também pelas condições iniciais impostas sobre n_0.

Notemos que:

$$\begin{aligned} supp\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] &\subset supp(\theta_n u') + \Big[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\Big] + \Big[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\Big] \\ &\subset supp(\theta_n) \cap supp(u') + \Big[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\Big] \\ &\subset supp(\theta_n) + \Big[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\Big] \\ &\subset \Big[s - \frac{1}{n_0}, t + \frac{1}{n_0}\Big] + \Big[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\Big] \end{aligned} \tag{4.42}$$

Se $x \in \Big[s - \frac{1}{n_0}, t + \frac{1}{n_0}\Big]$ e $y \in \Big[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\Big]$ então

$$s - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} \leq x + y \leq t + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k} \tag{4.43}$$

Forçando

$$s - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} > 0 \quad \text{e} \quad t + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k} < T \tag{4.44}$$

vem que $k > \dfrac{2n_0}{n_0 s - 1}$ e $k > \dfrac{2n_0}{(T-t)n_0 - 1}$.

Pondo

$$k_0 > \max\left\{\frac{2n_0}{n_0 s - 1}, \frac{2n_0}{(T-t)n_0 - 1}\right\}, \ k_0 \in \mathbb{N}, \tag{4.45}$$

seque que para $k \geq k_0$

$$supp\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] \subset \Big[s - \frac{1}{n_0}, t + \frac{1}{n_0}\Big] + \Big[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\Big] \subset]0, T[\tag{4.46}$$

De agora em diante consideraremos$(\rho_k)_{k \geq k_0}$ e $(\theta_n)_{n \geq n_0}$.

Sempre que aparecer uma convolução, estaremos considerando a extensão nula fora do intervalo $[0,T]$.

Consideremos $\mathcal{V} = H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Temos $u \in L^2(0,T;\mathcal{V})$ e $u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. No caso em que $n \geq n_0$ e $k \geq k_0$, foi visto que $\operatorname{supp}((u'\theta) * \rho * \rho) \subset (0,T)$ e $\theta \in H^1_0(0,T)$. Além disso,

$$u \in C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \subset W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)),$$

donde pela regra de Leibniz,

$$(u\theta_n)' = u'\theta_n + u\theta_n'$$

e desta última igualdade vem que:

$$(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n)' * \rho_k * \rho_k - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k \tag{4.47}$$

Consideremos agora, a primeira expressão à direita da igualdade acima. Temos para todo $t \in [0,T]$:

$$\begin{aligned}\Big[(u\theta_n)' * \rho_k * \rho_k\Big](t) &= \int_0^T (u\theta_n)'(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi = \Big[(u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=T} \\ &- \int_0^T (u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k)'(t-\xi)d\xi = \int_0^T (u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k')(t-\xi)d\xi\end{aligned}$$

O que quer dizer que

$$(u\theta_n)' * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n) * \rho_k * \rho_k' \tag{4.48}$$

Substituindo-se (4.48) em (4.47), vem que

$$(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k \tag{4.49}$$

Assim de (4.41) obtemos

$$\varphi_{n,k} = \theta_n\Big[(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\Big] = \theta_n\Big[(u\theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k\Big]$$

Esta última expressão nos diz que:

$$\varphi_{n,k} \in C_0^\infty(0, T; \mathcal{V})$$

Temos ainda $u'' = \Delta u - f_0(u) \in L^2(0, T; \mathcal{V}')$. Donde, de modo análogo, do fato de

$$u' \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; \mathcal{V}') \subset H^1(0, T; \mathcal{V}'),$$

que

$$(u''\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (u'\theta_n') * \rho_k * \rho_k \in C_0^\infty([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Faz sentido compor a equação:

$$u'' - \Delta u = -f_0(u) \quad \text{em} \quad L^2(0, T; V')$$

com $\varphi_{n,k}$ na dualidade $\langle ., . \rangle_{L^2(0,T;V'),L^2(0,T;V)}$, isto é,

$$\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{V',V} dt + \int_0^T \langle -\Delta u(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{V',V} dt = \int_0^T \langle -f_0(u(t)), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{V',V} dt \quad (4.50)$$

(i) Análise do primeiro termo à esquerda de (4.50):

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle dt &= \int \langle u'', \theta_n\big[(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k]\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle u''\theta_n, (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle (u''\theta_n) * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle (u'\theta_n)' * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\rangle dt - \int_0^T ((u'\theta_n') * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k)\, dt
\end{aligned}$$

Mas por (4.46) resulta que:

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\Big(((u'\theta_n)*\rho_k,(u'\theta_n)*\rho_k\Big)dt=\int_0^T \frac{d}{dt}\Big(((\theta_n u'),(u'\theta_n)*\rho_k*\rho_k\Big)dt=0.$$

Contudo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(((\theta_n u'),(u'\theta_n)*\rho_k*\rho_k\Big) &= 2\Big([(u'\theta_n)*\rho_k]',(u'\theta_n)*\rho_k\Big)\\ &= 2\Big((u'\theta_n)'*\rho_k,(u'\theta_n)*\rho_k\Big)\end{aligned}$$

Daí

$$\int_0^T \langle u''(t),\varphi_{n,k}(t)\rangle dt=-\int_0^T \Big((u'\theta_n')*\rho_k,(u'\theta_n)*\rho_k\Big)dt\,. \tag{4.51}$$

Entretanto:

$$\begin{aligned}(u'\theta_n')*\rho_k &\longrightarrow u'\theta_n' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))\\ (u'\theta_n)*\rho_k &\longrightarrow u'\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))\end{aligned}$$

Logo de (4.51) e das convergências acima, concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle u''(t),\varphi_{n,k}(t)\rangle dt=-\int_0^T \theta_n'\theta_n|u'(t)|^2dt\,. \tag{4.52}$$

(ii) Análise do termo à direita de (4.50) Sendo $u\in C([0,T];\mathcal{V})\hookrightarrow L^2(Q)$, temos que $-f_0(u)\in L^2(Q)$. Daí

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^T \langle -f_0(u(t)),\varphi_{n,k}(t)\rangle dt=\int_0^T \theta_n^2(t)\,(-f_0(u(t)),u'(t))\,dt. \tag{4.53}$$

(iii) Análise do segundo termo à esquerda de (4.50):

Observemos primeiramente que se $u\in C([0,T];\mathcal{V})\cap C^1([0,T;L^2(\Omega))$, tem-se que

$-\Delta u \in C([0,T];\mathcal{V}')$ e $f_0(u) \in C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T];\mathcal{V}')$, no seguinte sentido:

$$(-\Delta u)(t) = -\Delta(u(t)) \ \text{ e } \ f_0(u(t))(x) = f_0(u(x,t)).$$

Portanto, $u'' = \Delta u - f_0(u) \in C([0,T];\mathcal{V}')$ e, disto segue que

$$u'(t) - u'(0) = \int_0^t u''(s)\, ds = \int_0^t [\Delta u - f_0(u)]\, ds.$$

Pondo $z(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)\, ds \in \mathcal{V}$, implica

$$\Delta z(t) = \int_0^t \Delta u(t)\, ds = u'(t) - u'(0) + \int_0^t f_0(u(s))\, ds \in L^2(\Omega).$$

Conclui-se pois, que $z \in C([0,T];\mathcal{V}^1)$, em que $\mathcal{V}^1 = \{v \in \mathcal{V} : \Delta v \in L^2(\Omega)\}$. Assim, $u = z' \in H^{-1}(0,T;\mathcal{V}^1)$ e portanto

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

Vamos agora considerar $(u_\mu) \subset C([0,T];H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];\mathcal{V})$ a sequência de soluções fortes convergindo para u em $C([0,T];\mathcal{V}) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. De maneira análoga, definimos

$$z_\mu(t) = \int_0^t u_\mu(s)\, ds,$$

e provamos que $u_\mu \longrightarrow u$ em $H^{-1}(0,T;\mathcal{V}^1)$.

Além disso,

$$-g(u'_\mu) - f_1(u_\mu) = -\frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} \ \text{ em } \ H^{-1}(0,T;H^{-1/2}(\Gamma_1)).$$

Mas como

$$u'_\mu \rightharpoonup u \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1),$$
$$g(u'_\mu) \rightharpoonup g(u') \ \text{ em } \ L^2(\Sigma_1),$$

Disto segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u) \quad \text{em} \quad L^2(\Sigma_1).$$

Portanto, u satisfaz

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = -f_0(u) & \text{em} \quad C([0,T];\mathcal{V}'); \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -g(u') - f_1(u) & \text{em} \quad L^2(\Sigma_1); \\ u = 0 & \text{em} \quad \Sigma_0; \\ u(0) = u^0, u'(0) = u^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{cases} \tag{4.54}$$

Por outro lado, como $u' \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e $f_0(u) \in L^2(Q) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, então $u'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ e, por conseguinte,

$$\Delta u = u'' + f_0(u) \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da fórmula de Green generalizada,

$$\langle -\Delta u_{|H_0^1(0,T;\mathcal{V})}, v\rangle = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(\Sigma_1)},$$

$\forall\ v \in H_0^1(0,T;\mathcal{V})$.

Sendo $-\Delta u \in L^2(0,T;\mathcal{V}') \cap H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)) = (L^2(0,T;\mathcal{V}))' \cap (H_0^1(0,T;L^2(\Omega))'$ e mais ainda, $H_0^1(0,T;\mathcal{V}) \subset L^2(0,T;\mathcal{V}) \cap H_0^1(0,T;L^2(\Omega)$, conclui-se que para toda $v \in H_0^1(0,T;\mathcal{V})$ é válida a igualdade

$$\begin{aligned} (\nabla u, \nabla v)_{L^2(Q)} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(\Sigma_1)} &= \langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \langle -\Delta u, v\rangle_{L^2(0,T;\mathcal{V}'),L^2(0,T;\mathcal{V})} = \int_0^T \langle -\Delta u(t), v(t)\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} dt. \end{aligned}$$

Assim, para $v = \varphi_{n,k}$ em particular,

$$\int_0^T \langle -\Delta u(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} dt = \int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi_{n,k}(t))_{L^2(\Omega)}\, dt - \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(t), \varphi_{n,k}(t)\right)_{L^2(\Gamma_1)} dt$$
$$= \underbrace{\int_0^T (\nabla u(t), \nabla \varphi_{n,k}(t))_{L^2(\Omega)}\, dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T (g(u'(t)), \varphi_{n,k}(t))_{L^2(\Sigma_1)}\, dt}_{I_2} + \underbrace{\int_0^T (f_1(u(t)), \varphi_{n,k}(t))_{L^2(\Sigma_1)}\, dt}_{I_3}.$$

E da mesma forma como fizemos em (i) e (ii), temos

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} I_1 &= -\int_0^T \theta_n \theta_n' \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt \\ \lim_{k\to\infty} I_2 &= \int_0^T \theta_n^2 \left(g(u'(t)), u'(t)\right)_{L^2(\Gamma_1)} dt \\ \lim_{k\to\infty} I_3 &= \int_0^T \theta_n^2 \left(f_1(u(t)), u'(t)\right)_{L^2(\Gamma_1)} dt. \end{aligned} \tag{4.55}$$

Portanto para cada n, de (4.50), (4.52), (4.53) e (4.55), vem que:

$$\begin{aligned} &-\int_0^T \theta_n \theta_n' \|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt - \int_0^T \theta_n \theta_n' \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} dt + \int_0^T \theta_n^2 \left(f_0(u(t)), u'(t)\right)_{L^2(\Omega)} dt \\ &\quad + \int_0^T \theta_n^2 \left(g(u'(t)), u'(t)\right)_{L^2(\Gamma_1)} dt + \int_0^T \theta_n^2 \left(f_1(u(t)), u'(t)\right)_{L^2(\Gamma_1)} dt. \end{aligned} \tag{4.56}$$

O próximo passo é passar o limite em (4.56) quando $n \longrightarrow \infty$.

Lema 4.4.1. *Se $h \in L^1(0,T)$ e s e t, são pontos de Lebesgue de h então,*

$$-\int_0^T \theta_n \theta_n' h\ dr \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\Big(h(t) - h(s)\Big)$$

Demonstração: Com efeito, temos

$$-\int_0^T \theta_n(r)\theta_n'(r) h(r)\ dr = -\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} n\Big[1 + n(r-s)\Big] h(r) dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} n\Big[1 - n(r-t)\Big] h(r) dr$$

Mas

$$\begin{aligned} &\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} n\Big[1 + n(r-s)\Big] h(r) dr = \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} n h(r) dr + \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} n^2 (r-s) h(r) dr \\ = \quad & \frac{1}{(1\backslash n)} \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} h(r) dr + \frac{1}{(1\backslash n^2)} \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} (r-s) h(r) dr \longrightarrow \frac{1}{2} h(s) \end{aligned}$$

Analogamente

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} n\Big[1-n(r-t_0)\Big]h(r)dr \longrightarrow \frac{1}{2}h(t)$$

o que prova o lema $\square$

Agora, sendo $\|u'(.)\|$ e $\|\nabla u(.)\|$ localmente integráveis, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, o conjunto dos pontos de Lebessgue destas funções (simultaneamente) é de medida plena em $(0,T)$. Logo, quando $n \longrightarrow \infty$, temos para quases todo $s,t \in [0,T]$:

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \frac{1}{2}\|u'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{-\int_{s-\frac{1}{n}}^{t+\frac{1}{n}} \theta_n^2\left[(f_0(u(r)),u'(r))_{L^2(\Omega)} + (g(u'(r)),u'(r))_{L^2(\Gamma_1)} + (f_1(u(r)),u'(r))_{L^2(\Gamma_1)}\right]dr\right\} \tag{4.57}$$

Lema 4.4.2. *Seja $h \in L^1(0,T)$. Se s e t são pontos de Lebesgue de h, então*

$$\int_0^T \theta_n^2(r)h(r)dr \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_s^t h(r)dr.$$

Demonstração: Pela definição da função θ_n,

$$\int_0^T \theta_n^2(r)h(r)\ dr = \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} \left(1+n(r-s)\right)^2 h(r)dr + \int_s^t h(r)dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left(1-n(r-t)\right)^2 h(r)dr$$

Provemos que

$$\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} \left(1+n(r-s)\right)^2 h(r)dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} \left(1-n(r-t)\right)^2 h(r)dr \longrightarrow 0$$

Temos

$$\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} \left(1+n(r-s)\right)^2 h(r)dr = \underbrace{\int_{s-\frac{1}{n}}^{s} h(r)dr}_{I_1} + \underbrace{2n\int_{s-\frac{1}{n}}^{s}(r-s)h(r)dr}_{I_2} + \underbrace{n^2\int_{s-\frac{1}{n}}^{s}(r-s)^2h(r)dr}_{I_3}$$

Claramente, $I_1 \longrightarrow 0$. Também $I_2 \longrightarrow 0$ pelo lema anterior.

$$|I_3| \leq n^2 \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} (r-s)^2 |h(r)| dr \leq \int_{s-\frac{1}{n}}^{s} |h(s)| dr \longrightarrow 0.$$

De modo semelhante,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{t}^{t+\frac{1}{n}} \left(1 - n(r-t)\right)^2 h(r) dr = 0.$$

□

Portanto, para quase todos $s, t \in (0, T)$, após passagem ao limite em (4.57), temos

$$\begin{aligned} &\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u'(s)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(s)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &-2\left\{\int_s^t (f_0(u(r)), u'(r))_{L^2(\Omega)} + (g(u'(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)} + (f_1(u(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)}\, dr\right\} \end{aligned} \tag{4.58}$$

Considere agora, $(s_\nu) \subset (0, T)$ uma sequência de pontos de Lebesgue convergente para zero. Para quase todo $t \in (0, T]$, vale

$$\begin{aligned} &\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = \|u'(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &-2\left\{\int_{s_\nu}^t (f_0(u(r)), u'(r))_{L^2(\Omega)} + (g(u'(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)} + (f_1(u(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)}\, dr\right\}. \end{aligned} \tag{4.59}$$

Mas visto que $u \in C([0, T]; \mathcal{V}) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$, temos $\|u'(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|u'(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla u(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Portanto, tomando o limite quando $\nu \longrightarrow \infty$, segue que para quase todo $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\left(\|u'(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\right) = \frac{1}{2}\left(\|u^1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u^0\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\int_0^t \left[(f_0(u(r)), u'(r))_{L^2(\Omega)} + (g(u'(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)} + (f_1(u(r)), u'(r))_{L^2(\Gamma_1)}\right] dr, \end{aligned} \tag{4.60}$$

para qualquer solução fraca do problema (2.46) como queríamos provar.

Bibliografia

[1] ALABAU-BOUSSOUIRA, F. **Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems**, Appl. Math. Optim. 51 (1) (2005) 61-105.

[2] BARBU, V. **Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces**. România, Bucuresti: Noordhoff International Publishing, 1976.

[3] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications**. Masson, Paris, 1983.

[4] BRÉZIS, H.: **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: DMA/UEM, 2007.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. **Wellposedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**. Journal of Differential Equations, v. 236, p. 407-459, 2007.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J. A. **Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear feedback and source term on the boundary**. Advances in Mathematical Sciences and Applications, v. 16, p. 661-696, 2006.

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J. A. **Global solvability and asymptotic stability for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term**. CONTRIBUTIONS TO NONLINEAR ANALYSIS, Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, 2006, v. 66, p. 161-184, 2006.

[10] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J. A. **On existence and asymptotic stability of solutions of the degenerate wave equation with nonlinear boundary conditions**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, v. 281, p. 108-124, 2001.

[11] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; MARTINEZ, P. **Existence and decay rate estimate for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term**. Journal of Differential Equations, v. 203, p. 119-158, 2004.

[12] CHEN, G. **Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain**. J. Math. Pure Appl., v. 58, p. 248-274, 1979.

[13] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Mac Graw-Hill, 1955.

[14] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. V. 2, New York: Springer-Verlang Berlin Heidelberg, 1990.

[15] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[16] HARAUX, A. **Nonlinear Evolution Equations - Global Behaviours of Solutions**, Springer-Verlag, 1981.

[17] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.

[18] KOMORNIK, V. **Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method**, Mason-John Wiley, Paris, 1994.

[19] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Differential and Integral Equations, v.6, p. 507-533, 1993.

[20] LASIECKA I.; TRIGGIANI R. **Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions**. Appl. Math. Optim.,v. 25, 189-224, 1992.

[21] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Problèmes aux Limites non Homogènes**. Applications, Dunod, Paris, 1968 Vol. I.

[22] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[23] MARTINEZ, P. **A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems**, ESAIM Control Optim. Calc.Var. 4 (1999) 419-444

[24] MARTINEZ, P. **A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping**, Rev. Mat.Complut. 12 (1999) 251-283.

[25] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A. **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.

[26] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[27] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[28] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Petrópolis - RJ: LNCC, 1999.

[29] RUIZ, A. **Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential**, J. Math. Pure Appl., v. 71, p. 455-467, 1992.

[30] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[31] SIMON, J. **Compact sets in the space** $L^p(0,T;B)$, Annali di Mat. Pura et Applicate, IV Vol. CXLVI, p. 65-96, 1987.

[32] SHOWALTER, R.: **Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations**. AMS, Providence, 1997.

[33] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. V. 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.