UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

CAMILA DE OLIVEIRA VIEIRA

Existência e decaimento exponencial de soluções de uma equação da onda semilinear e parcialmente viscoelástica com dissipação friccional localizada

Maringá

2013

CAMILA DE OLIVEIRA VIEIRA

Existência e decaimento exponencial de soluções de uma equação da onda semilinear e parcialmente viscoelástica com dissipação friccional localizada

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria N. Domingos Cavalcanti

Maringá

2013

Existência e decaimento exponencial de soluções de uma equação da onda semilinear e parcialmente viscoelástica com dissipação friccional localizada

CAMILA DE OLIVEIRA VIEIRA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof[a]. Dr[a]. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientadora)

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki
Universidade Federal de Juiz de Fora - UFJF-MG

Aprovada em: 17 de junho de 2013
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus; e a meus pais Mara e Lino, e a meu irmão Marcelo, pelo apoio em todos os momentos desta importante etapa da minha vida.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço à Deus, por dar-me forças para superar os obstáculos dessa caminhada.

Aos meus pais, que são exemplo de vida, sabedoria, que sempre me apoiaram e acreditaram em mim; ao meu irmão que sempre esteve disposto a me ajudar e ouvir, e a toda minha família, que é o meu maior incentivo e motivação.

Ao meu namorado Alex, que com muito amor, paciência e companheirismo esteve ao meu lado e nunca deixou de acreditar e confiar em mim.

Às minhas amigas de Tupã, que mesmo distantes, estiveram comigo nesta etapa da minha vida, aos amigos de graduação que deixaram saudades pelo companheirismo, sinceridade e união. Aos amigos de mestrado e doutorado, Flávio Falcão, José Henrique, Stephanie, João Pitot, Arthur, entre outros; por terem me apoiado nas horas difíceis e terem me ajudado em vários momentos de dúvidas. À minha amiga Caroline, pela amizade e carinho que partilhamos durante essa longa caminhada.

À professora Valéria N. D. Cavalcanti, pela paciência, sabedoria, compreensão, incentivo e ajuda que foram essenciais na conclusão deste trabalho.

Aos meus professores, de graduação e de mestrado, que me proporcionaram uma boa formação acadêmica, e a todos aos demais professores pela grande contribuição em minha trajetória. À todos os membros do Departamento de Matemática da UEM.

À Capes pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível à dedicação exclusiva ao período de estudos.

Enfim, a todas as pessoas que passaram pela minha vida e acreditaram em mim. Muito obrigada!

“A insistência e a persistência vencem qualquer resistência.”

Resumo

Neste trabalho, provamos a existência e unicidade de solução e estabelecemos taxas de decaimento exponencial para a energia associada ao sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0 \Delta u + \displaystyle\int_0^t \mathrm{div}[a(x) g(t-s) \nabla u(s)] ds + f(u) + b(x) h(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0, \infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega, \end{cases}$$

em que Ω é um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira regular Γ. Sendo k_0 uma constante positiva, a e b são funções não-negativas, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $b \in L^\infty(\Omega)$, satisfazendo $med\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0$.

Abstract

In this work we prove the well-posedness of solutions and we estabilish exponential decay rates for the energy of system

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0\Delta u + \displaystyle\int_0^t \mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega. \end{cases}$$

where Ω is an open bounded set of $\mathbb{R}^n$ with smooth boundary Γ. Here, k_0 is a positive constant, the functions a, b are nonnegative, $a \in C^1(\overline{\Omega})$, $b \in L^\infty(\Omega)$, satisfying
$meas\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos os resultados contidos no artigo de Marcelo Moreira Cavalcanti e Higidio Portillo Oquendo [5]. Inicialmente, foram provados resultados de existência e unicidade de solução do sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0\Delta u + \displaystyle\int_0^t \mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega. \end{cases}$$

Para a demonstração da existência de soluções regulares utilizamos o método de Faedo-Galerkin e, a obtenção de soluções fracas, decorrem como processo limite das soluções regulares. A unicidade de solução fraca foi obtida como consequência da Identidade de Energia. A opção pelo método de Faedo-Galerkin se justifica por ser o mais apropriado quando o sistema se encontra sob efeitos viscoelásticos.

A estabilização para a equação da onda sujeita à dissipação localizada

$$u_{tt} - \Delta u + b(x)h(u_t) = 0 \;\text{ em }\; \Omega \times \mathbb{R}_+$$

tem sido estudada por um longo tempo e por muitos autores.

Podemos citar, por exemplo, os artigos de ZUAZUA, E. [10] e NAKAO, M. [9] onde foi estabelecido o decaimento uniforme de soluções considerando a função b positiva em todo o domínio Ω. Quando o termo dissipativo depende da velocidade linearmente, ZUAZUA, E. [11] prova que a energia associada à equação acima decai exponencialmente se a região de "damping" contém uma vizinhança da fronteira Γ ou pelo menos contém uma vizinhança ω da parte da fronteira dada por $\{x \in \Gamma; (x - x_0) \cdot \nu(x) > 0\}$. Nessa direção, é importante citar o resultado de BARDOS, C.; LEBEAU, G. M.; RAUCH, J. [6], baseado em análise microlocal, que estabelece uma condição necessária e suficiente para a obtenção de decaimento exponencial, a saber: a região dissipativa satisfaz a condição da ótica geométrica. O exemplo clássico de um subconjunto aberto ω que verifica essa condição é quando ω é uma vizinhança da fronteira.

Por outro lado, o decaimento uniforme de soluções para equações da onda viscoelásticas

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds = 0 \text{ em } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

foi obtido por RIVERA, J. M.; SOBRINHO, J. B. e SALVATIERRA, A. P. [7, 8]; onde eles assumiram que a é uma função positiva em todo o domínio Ω ou na vizinhança ω.

O trabalho de CAVALCANTI, M.; OQUENDO, H. P. [5] estudado, foi um trabalho pioneiro em que a equação da onda parcialmente viscoelástica foi considerada sujeita à dissipação friccional localizada. Nesse contexto, existe uma competição entre os "dampings" viscoelástico e friccional, posto que de acordo com as hipóteses feitas, eles podem atuar simultaneamente, porém de forma complementar.

Uma outra característica muito interessante que os autores levam em consideração, é que eles consideram mecanismos de "damping" localizados, de diferentes naturezas, atuando no domínio mas não necessariamente dissipações localizadas estrategicamente, como anteriormente considerado na literatura.

A organização desta dissertação é a seguinte: no capítulo 1 apresentaremos algumas notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o tabalho; no capítulo 2 provaremos a existência e unicidade de solução para o problema dado utilizando o método de Faedo-Galerkin; e no capítulo 3 estabeleceremos taxas de decaimento exponencial para a energia associada ao sistema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função

$v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega}\text{ess}|u(x)|, \; para \; p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência de funções integráveis num aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, convergente quase sempre para uma função* u*. Se existir uma função* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|u_\nu| \leq u_0$ *quase sempre,* $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ *então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [17].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função* u*. Se* $\liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu$ *é finito, então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [17].

Proposição 1.1.1. *Se* $u \in L^1(\Omega)$ *então as integrais indefinidas de* u *são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [17].

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Young) - *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$*. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [1].

Proposição 1.1.3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* f, g *em* $L^p(\Omega)$*, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [17].

Proposição 1.1.4. (Desigualdade de Hölder) - *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [1].

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.1.4.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ *e* $\frac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.1.5. (Desigualdade de Interpolação) - *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [18].

Proposição 1.1.6. (Desigualdade de Jensen) - *Seja* B *um hipercubo do* $\mathbb{R}^n$, *então para toda função côncava* F *e toda função integrável* $g \in L^1(B)$, *teremos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)} \int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{med(B)} \int_B F(g(x))dx$$

Demonstração: Ver [20].

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 1.3. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [1].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.7. *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [1].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω, *onde* T_u *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi \rangle =$

$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [3].

Deste lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.8. *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.1.2. (Lema de Gronwall) - *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \ge 0$, $f(t) \ge 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \le c + \int_0^t z(s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \le ce^{\int_0^t z(s)ds},\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.1.3. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \le C,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [16].

Definição 1.1.1. *Seja $f : E \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, uma função mensurável. Um ponto $x \in E$, é dito ponto de Lebesgue se*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0,$$

onde, $B(x,r)$ é a bola de centro x e raio r, e $|B(x,r)|$ é a medida de Lebesgue da bola.

Proposição 1.1.9. (Teorema da Diferenciação de Lebesgue) *Seja $E \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto mensurável à Lebesgue e $f : E \to \mathbb{R}$, uma função localmente integrável. Então os pontos de Lebesgue formam um conjunto de medida plena no domínio, ou seja,*

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} |f(y)-f(x)|\,dy = 0,$$

quase sempre em E. Em que, $B(x,r)$ é a bola de centro x e raio r, e $|B(x,r)|$ é a medida de Lebesgue da bola.

Teorema 1.4. (Teorema da Média) - *Seja $f : (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [14].

1.1.3 Convolução e Regularização

Em toda esta seção consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. A prova de todos os resultados desta seção podem ser encontrados em Brèzis [1].

Definição 1.1.2. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \le p \le +\infty$. Definimos a convolução de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 1.5. *Nas condições da definição 1.1.2 temos*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f * g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Notação: Dada uma função f denotamos $\breve{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 1.1.10. *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, *com* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^n} g(\breve{f} * h).$$

Proposição 1.1.11. *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. *Então*

$$supp\ (f * g) \subset supp\ f + supp\ g.$$

Proposição 1.1.12. *Sejam* $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ *(k natural). Então* $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ *e vale a fórmula de derivação*

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, *então* $(f * g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.3. *Denominamos* <u>*sucessão regularizante*</u> *a toda sucessão* $\{\rho_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *de funções tais que*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad supp\ \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.1.13. *Seja* $f \in C(\mathbb{R}^n)$. *Então* $(\rho_n * f) \to f$ *uniformemente sobre todo compacto de* R^n.

Proposição 1.1.14. *Seja* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $(\rho_n * f) \to f$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$.

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$ $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$ para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função

$u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y)dy,$$

onde $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \hat{u}(x)\hat{v}(x)dx.$$

Prova-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com o produto interno descrito acima é um espaço de Hilbert. Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n - 1$, Ω estando localmente do mesmo lado de Γ.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

que leva u na sua restrição a Ω. Então r_Ω é uma aplicação linear e contínua. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se,

$$D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$$

no sentido das distribuições. Decorre daí que para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & H^m(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

é contínua. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega;\ u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H_0^s(\Omega)\right)' \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

A fim de definirmos uma topologia para $H^s(\Omega)$ consideremos o seguinte espaço de Banach

$$\frac{H^s(\mathbb{R}^n)}{\ker(r_\Omega)} = \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da seguinte norma

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in v + \ker(r_\Omega)\}.$$

Por outro lado, para cada $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); \omega \in v + ker(r_\Omega)\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Logo,

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Diante disto, face a sobrejetividade de r_Ω, podemos definir

$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||r_\Omega v||_{H^s(\Omega)} = |||[v]|||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\}.$$

Mudido desta norma, para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$, as normas

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad ||u||_{H^m(\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\},$$

são equivalentes em $H^m(\Omega)$.

Proposição 1.1.15. *Para todo $s \geq 0$, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.16. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua de um espaço no outro.*

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.6. (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \ \textit{se}\ m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.1.4. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Sejam s_1, s_2 e s_3 números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [15].

Proposição 1.1.17. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as segintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.7. (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja* Ω *um subconjunto aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$, Ω *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

Proposição 1.1.18. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Se* $1 \leq p < n$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

onde p^* *vem dado por* $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, *existe uma constante* $C = C(p, n)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.8. *Quando* $n > 2$ *temos a inclusão* $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ *para todo* ρ *satisfazendo* $2 \leq \rho \leq p$, *onde* p *é dado por:* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$.

Demonstração: Ver [13].

Teorema 1.9. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior à Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.10. (Fórmula de Green generalizada) - *Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.11. (Teorema da Regularidade das Soluções Fracas) *Seja Ω um conjunto aberto de classe $C^2(\Omega)$ com fronteira Γ limitada. Se $u \in H_0^1(\Omega)$ é tal que*

$$\int_\Omega \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \int_\Omega f \varphi \qquad \forall \varphi \in H_0^1(\Omega);$$

e se $f \in L^2(\Omega)$ e $a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega})$, então temos que $u \in H^2(\Omega)$. Além disso

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

onde C é uma constante que dependendo apenas de Ω.

Demonstração: Ver Nota 25 da seção IX.6 [1].

Proposição 1.1.19. *Seja* $I =]a,b[$ *limitado ou não. Sejam* $G \in C^1(\mathbb{R})$ *tal que* $G(0) = 0$ *e* $u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq +\infty$. *Então* $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ *e*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração: Ver [1].

1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (a,b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess \|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a,b]; X)$, $m = 0, 1, \ldots,$ consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t \in [a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Seja $u \in L^1(a,b,X)$. Diremos que $v \in L^1(a,b,X)$ é a derivada fraca de u e escrevemos

$u' = v$ desde que

$$\int_a^b \phi'(t)u(t)dt = -\int_a^b \phi(t)v(t)dt$$

para toda $\phi : [a, b] \to \mathbb{R},\ \phi \in C_0^\infty([a, b])$.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(a, b; X)$ consiste de todas as funções vetoriais $u \in L^p(a, b, X)$ tal que u' existe no sentido fraco e $u' \in L^p(a, b, X)$. Ademais,

$$||u||_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\int_a^b ||u(t)||_X^p + ||u'(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup ess_{a \leq t \leq b}\Big(||u(t)||_X + ||u'(t)||_X\Big) \leq \infty & \text{se} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Escrevemos $H^1(a, b; X) = W^{1,2}(a, b; X)$.

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [23]

Proposição 1.2.1. *Sejam $m = 0, 1, \ldots;\ 1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então:*

(a) $C^m([a, b]; X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a, b; X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) $C([a, b]; X)$ é denso em $L^p(a, b; X)$ e a imersão $C([a, b]; X) \hookrightarrow L^p(a, b; X)$ é contínua.

(d) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a, b; X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u, v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t), v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a, b; X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(f) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a, b; X) \hookrightarrow L^q(a, b; Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Proposição 1.2.2. *Seja $u \in W^{1,p}(a, b; X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então, $u \in C([a, b]; X)$.*

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. Noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$: seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida como um único elemento deste espaço que satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função de $L^2(a,b;X)$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ que a cada f associa $\tilde{f}$, é linear e contínua, e ainda é injetora. Portanto, identificando $\tilde{f}$ com f obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde χ_K denota a função característica de K.

Teorema 1.12. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável,* $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

(a) A cada função $v \in L^q(a,b;X')$ corresponde um único funcional $\overline{v} \in Y'$, onde $Y' = L^p(a,b;X)$, dado por

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ corresponde exatamente uma única função $v \in L^q(a,b;X')$ dada por (1.1). Além disso

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a,b;X)$ é reflexivo e separável.

Demonstração: Ver [23].

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a,b;X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico entre os dois espaços. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}}; \quad \forall u \in Y; \quad \forall v \in Y'.$$

Sejam a e b dois números reais, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a,b) := \{u \in L^2(a,b;X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a,b;Y)\},$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a,b;X)$. O conjunto $W(a,b)$ munido da norma

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|_{L^2(a,b;X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais

$\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b;X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a,b) tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a,b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a,b;X)$.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b:X), v' \in L^2(a,b:X), \quad v(a) = v(b) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b:X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b:X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.2.3. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [19].

Da proposição anterior podemos identificar f com u'. De posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b:X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.

Corolário 1.2.3.1. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b:X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X);$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [19].

Teorema 1.13. (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [16].

Lema 1.2.1. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [21].

1.3 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [12].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t, x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t, x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t, x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t), \ \forall (t, x) \in K.$$

Teorema 1.14. (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1.2) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta, \ \beta > 0$.*

Corolário 1.14.1. *Sejam $\Omega = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.2) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

1.4 Topologia Fraca - $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraco $\star$ - $\sigma(E', E)$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f \in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.4.1. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações φ_f, $f \in E'$.*

Notação: Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.4.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) *Se* $x_n \to x$ *em* E, *então* $x_n \rightharpoonup x$*em* E.

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$*em* E, *então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$*em* E *e* $f_n \to f$ *em* E', *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [1].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.4.2. *A topologia fraco $\star$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.4.2. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iv) *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

Demonstração: Ver [1].

Lema 1.4.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [1].

Lema 1.4.2. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [1].

Teorema 1.15. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F. Então, T é contínuo em E, munido da topologia fraca $\sigma(E,E')$, em F, munido da topologia fraca $\sigma(F,F')$. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [1].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

Seja Ω um conjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave Γ. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0\Delta u + \displaystyle\int_0^t \mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega; \end{cases} \tag{2.1}$$

em que k_0 é uma constante positiva; as funções

$$a \text{ e } b \text{ são não negativas, } a \in C^1(\overline{\Omega}), \;\; b \in L^\infty(\Omega) \text{ e } med\{x \in \Gamma; a(x) > 0\} > 0. \tag{2.2}$$

O objetivo deste capítulo é provar a existência e unicidade de solução, regular e fraca para o problema apresentado utilizando o método de Faedo-Galerkin que, além de ser um método didático e de fácil compreensão, é mais apropriado para sistemas que estão na presença de efeitos viscoelásticos.

De modo a provar o resultado de existência de soluções, as funções f, g e h, devem satisfazer as seguintes hipóteses:

(**H.1**) A função de relaxamento $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ é não-crescente, satisfazendo

(i) $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$;

(ii) $\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty g(s)ds < k_0$;

(iii) $g'(t) \leq -c_1 g(t)$ e $g''(t) \leq c_2 g(t)$, $\forall t \geq 0$, para constantes $c_1, c_2 > 0$;

Em vista de (H.1) (ii), temos que $k(x,t) := k_0 - a(x) \int_0^t g(s)\, ds$, verifica

$$0 < k_0 - \|a\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} \int_0^\infty g(s)\, ds \leq k(x,t) \leq k_0, \quad \forall\, (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+.$$

(**H.2**) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz

(i) $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;

(ii) $f(s)s \geq 0; \quad \forall s \in \mathbb{R}$;

(iii) f é superlinear, isto é,

$$(\rho+1)F(s) \leq f(s)s, \qquad F(z) := \int_0^z f(s)ds \quad \forall s \in \mathbb{R};$$

Além disso, f satisfaz a seguinte condição de crescimento:

(iv) $|f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{\rho-1} + |y|^{\rho-1})|x-y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$, para algum $C > 0$ e $\rho \geq 1$ tal que $(n-2)\rho \leq n$.

(v) $|f'(s)| \leq N(1 + |s|^{\rho-1})$, $1 \leq \rho \leq \dfrac{n}{n-2}$, para algum $N > 0$.

A escolha de ρ nas condições acima se justifica para garantirmos a imersão

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ onde } q = \frac{2n}{n-2}.$$

(**H.3**) A função não linear $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verifica

(i) $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$;

(ii) $h(s)s \geq 0$; $\forall s \in \mathbb{R}$;

(iii) h é uma função monótona não decrescente;

(iv) $c_3|w| \leq |h(w)| \leq c_4|w| \quad \forall s \in \mathbb{R}$, para constantes c_3 e $c_4 > 0$;

(v) $h' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

(**H.4**) Simplificaremos os cálculos introduzindo os seguintes operadores binários:

$$(g * w)(t) := \int_0^t g(t-s)\, w(s)\, ds,$$

$$(g \Box w)(t) := \int_0^t g(t-s)\, |w(t) - w(s)|^2\, ds,$$

$$(g \diamond w)(t) := \int_0^t g(t-s)\, (w(t) - w(s))\, ds,$$

Uma relação importante entre esses operadores é dado pelo Lema abaixo:

Lema 2.1.1. *Para quaisquer duas funções $g, w \in C^1(\mathbb{R})$, a seguinte identidade se verifica*

$$(2\,[(g{*}w)(t)]\, w')(t) = (g'\Box w)(t) - g(t)\,|w(t)|^2 - \frac{d}{dt}\left\{(g\Box w)(t) - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right) |w(t)|^2\right\}, t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Diferenciando em relação à t a expressão dada por

$$\left\{(g\Box w)(t) - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right) |w(t)|^2\right\},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left[(g\Box w) - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right) w^2\right](t) &= (g'\Box w)(t) + 2\int_0^t g(t-s)(w(t) - w(s))\ w'(t)\ ds \\
&- g(t)(w(t))^2 - 2\left(\int_0^t g(s)\ ds\right)\ w(t)\ w'(t) \\
&= (g'\Box w)(t) - g(t)(w(t))^2 - 2\ w'(t)\int_0^t g(t-s)\ w(s)\ ds \\
&= (g'\Box w)(t) - g(t)(w(t))^2 - 2\ w'(t)\ (g * w)(t)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$2\,[(g * w)(t)]\, w'(t) = (g'\Box w)(t) - g(t)\,|w(t)|^2 - \frac{d}{dt}\left\{(g\Box w)(t) - \left(\int_0^t g(s)\, ds\right) |w(t)|^2\right\}.$$

2.2 Solução Regular

2.2.1 Existência de Solução Regular

Nesta seção provaremos a existência e a unicidade de solução regular para o problema (2.1), estabelecendo o seguinte resultado:

Teorema 2.1. *Suponha que sejam satisfeitas as hipóteses (H.1)-(H.4), $k_0 > 0$ e a e b satisfaçam (2.2).*

(i) Se $\{u^0, u^1\} \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$, então existe uma única solução do problema (2.1) na classe

$$u \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)\ u' \in L^\infty\left(0, T; H_0^1(\Omega)\right)\ u'' \in L^\infty\left(0, T; L^2(\Omega)\right);\ \forall T > 0.$$

A função u será dita solução forte ou solução regular de (2.1).

Multiplicando a equação diferencial parcial

$$u_{tt} - k_0 \Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x) g(t-s) \nabla u(s)] ds + f(u) + b(x) h(u_t) = 0$$

por uma função admissível v, integrando o resultado em Ω, aplicando a fórmula de Green e a fórmula de Gauss, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t) v(x,t)\ dx + k_0 \int_\Omega \nabla u(x,t) \cdot \nabla v(x,t)\ dx - \int_0^t \int_\Omega a(x) g(t-s) \nabla u(x,s) \cdot \nabla v(x,t)\, dx\, ds\ + \int_\Omega f(u(t,x))\, v(x,t)\, dx + \int_\Omega b(x) h(u'(t,x))\, v(x,t)\, dx = 0 \qquad \forall\ t \in]0, \infty[.$$

Consideremos $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ uma base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ que é densa em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e em $H_0^1(\Omega)$.

Definamos

$$V_m = [w_1, ..., w_m]$$

e consideremos em V_m o problema aproximado

$$(PA) \quad \begin{cases} u_m(t) \in V_m \Leftrightarrow u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i, \\ (u_m''(t), v) + k_0(\nabla u_m(t), \nabla v) - \int_0^t g(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla v) ds + \\ (f(u_m(t)), v) + (b(.)h(u_m'(t)), v) = 0, \\ u_m(0) = u_m^0 \to u^0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ u_m'(0) = u_m^1 \to u^1 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega); \qquad \forall v \in V_m \end{cases} \tag{2.3}$$

onde as sequências convergentes $\{u_m(0)\}$ e $\{u_m'(0)\}$ provêm do fato que a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é densa nos espaços $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$.

De modo a resolvermos o problema aproximado (PA), devemos resolver um problema equivalente, cuja solução é garantida pelo Teorema de Carathéodory (ver seção 1.3).

Consideremos no problema aproximado (PA) $v = w_j, j = 1, ..., m$. Então,

$$(u_m''(t), w_j) + k_0(\nabla u_m(t), \nabla w_j) - \int_0^t g(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j)\, ds +$$

$$(f(u_m(t)), w_j) \ + \ (b(.)h(u_m'(t)), w_j) \ = \ 0; \quad j = 1, ..., m.$$

O sistema de equações acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}''(t) \\ h_{2m}''(t) \\ \vdots \\ h_{mm}''(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \ k_0 \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} (a(.)\nabla w_1,\nabla w_1) & (a(.)\nabla w_2,\nabla w_1) & \cdots & (a(.)\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (a(.)\nabla w_1,\nabla w_2) & (a(.)\nabla w_2,\nabla w_2) & \cdots & (a(.)\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (a(.)\nabla w_1,\nabla w_m) & (a(.)\nabla w_2,\nabla w_m) & \cdots & (a(.)\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \int_0^t g(t-s)h_{1m}(s)\ ds \\ \int_0^t g(t-s)h_{2m}(s)\ ds \\ \vdots \\ \int_0^t g(t-s)h_{mm}(s)\ ds \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \int_\Omega f(u_m(t))w_1\ \ dx \\ \int_\Omega f(u_m(t))w_2\ \ dx \\ \vdots \\ \int_\Omega f(u_m(t))w_m\ \ dx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_\Omega b(x)h(u_m'(t))w_1\ \ dx \\ \int_\Omega b(x)h(u_m'(t))w_2\ \ dx \\ \vdots \\ \int_\Omega b(x)h(u_m'(t))w_m\ \ dx \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Denotando

$$C = \begin{bmatrix} (w_1,w_1) & (w_2,w_1) & \cdots & (w_m,w_1) \\ (w_1,w_2) & (w_2,w_2) & \cdots & (w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m) & (w_2,w_m) & \cdots & (w_m,w_m) \end{bmatrix},$$

$$A = k_0 \begin{bmatrix} (\nabla w_1,\nabla w_1) & (\nabla w_2,\nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (\nabla w_1,\nabla w_2) & (\nabla w_2,\nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1,\nabla w_m) & (\nabla w_2,\nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) - F(t, z(t)) + P(z(t)) + Q(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \ \ ; \ \ z'(0) = z^1, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde

$$F(t, z(t)) = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ h_{im}(s)\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ h_{im}(s)\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_2) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ h_{im}(s)\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$P(z(t)) = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_\Omega f(Bz(t))w_1\ \ dx \\ \displaystyle\int_\Omega f(Bz(t))w_2\ \ dx \\ \vdots \\ \displaystyle\int_\Omega f(Bz(t))w_m\ \ dx \end{bmatrix}, \quad Q(z'(t)) = \begin{bmatrix} \displaystyle\int_\Omega b(x)h(Bz'(t))w_1\ \ dx \\ \displaystyle\int_\Omega b(x)h(Bz'(t))w_2\ \ dx \\ \vdots \\ \displaystyle\int_\Omega b(x)h(Bz'(t))w_m\ \ dx \end{bmatrix},$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} h_{1m}(0) \\ h_{2m}(0) \\ \vdots \\ h_{mm}(0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z^1 = \begin{bmatrix} h'_{1m}(0) \\ h'_{2m}(0) \\ \vdots \\ h'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Ortonormalizando a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ em $L^2(\Omega)$ utilizando o processo de Gram-Schmidt, a matriz C se torna a matriz identidade.

Assim, o sistema (2.4) pode ser escrito

$$\begin{cases} z''(t) + Az(t) - F(t, z(t)) + P(z(t)) + Q(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \ \ ; \ \ z'(0) = z^1. \end{cases} \tag{2.5}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \;\; Y_2(t) = z'(t), \;\; Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \text{ e } Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -AY_1(t) + F(t, Y_1(t)) - P(Y_1(t)) - Q(Y_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t, Y_1(t)) - P(Y_1(t)) - Q(Y_2(t)) \end{bmatrix}.$$

Donde, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} Y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t, Y_1(t)) - P(Y_1(t)) - Q(Y_2(t)) \end{bmatrix}, \\ \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \tag{2.6}$$

Provaremos a seguir que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema 1.14 (Teorema de Carathéodory).

De fato, consideremos a seguinte aplicação:

$h : [0, T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, definida por

$$h(t, y) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} y + \begin{bmatrix} 0 \\ F(t, y_1) - P(y_1) - Q(y_2) \end{bmatrix},$$

onde $y = (\xi_1, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_{2m})$, $y_1 = (\xi_1, ..., \xi_m)$ e $y_2 = (\xi_{m+1}, ..., \xi_{2m})$. No que segue denotaremos

$$G(y) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A & 0 \end{bmatrix} y$$

Verificaremos que a aplicação h está nas condições do Teorema de Carathéodory.

Com efeito,

(i) Seja $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. As funções $P(y_1)$, $Q(y_2)$ e $G(y)$ são mensuráveis como função de $t \in [0,T]$, uma vez que estas não dependem de t. Resta-nos mostrar que a função $F(t,y)$ é contínua em relação a variável $t \in [0,T]$.

Note que cada termo da matriz

$$F(t,y) = \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ y_i\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_1) \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ y_i\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_2) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s)\ y_i\ ds\ (a(.)\nabla w_i, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

é contínuo em relação à $t \in [0,T]$, devido a continuidade da função g em $\mathbb{R}$. Assim a função $F(t,y)$ é contínua em relação à t. Portanto, a função h é mensurável como função de $t \in [0,T]$.

(ii) Para cada $t \in [0,T]$, h é contínua como função de y.

De fato, tomemos $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma sequência tal que

$$y_\nu \to y \text{ em } \mathbb{R}^{2m}, \text{ ou seja, } \|y_\nu - y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \to 0, \quad \text{quando } \nu \to \infty. \tag{2.7}$$

Se $y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu})$ e $y = (y_1, y_2)$ com $y_{1\nu}, y_{2\nu}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$\|h(t,y_\nu) - h(t,y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} (y_\nu - y) \right\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|F(t,y_{1\nu)} - F(t,y_1)\|_{\mathbb{R}^m} +$$

$$\|P(y_{1\nu)} - P(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|Q(y_{2\nu)} - Q(y_2)\|_{\mathbb{R}^m}$$

Note que

$$\begin{aligned}
\left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} (y_\nu - y) \right\|^2_{\mathbb{R}^{2m}} &= \|y_{2\nu} - y_2\|^2_{\mathbb{R}^m} + \| - A(y_{1\nu} - y_1)\|^2_{\mathbb{R}^m} \\
&\leq \|y_{2\nu} - y_2\|^2_{\mathbb{R}^m} + \|A\|^2_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)} \; \|y_{1\nu} - y_1\|^2_{\mathbb{R}^m} \\
&\leq (1 + \|A\|^2_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)}) \; \{\|y_{2\nu} - y_2\|^2_{\mathbb{R}^m}\} + \|y_{1\nu} - y_1\|^2_{\mathbb{R}^m}\} \\
&= (1 + \|A\|^2_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)}) \; \|y_\nu - y\|^2_{\mathbb{R}^{2m}}
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} (y_\nu - y) \right\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq (1 + \|A\|^2_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)})^{1/2} \; \|y_\nu - y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned}
\|F(t, y_{1\nu}) - F(t, y_1)\|^2_{\mathbb{R}^m} &= \sum_{l=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \int_0^t g(t-s) \; y_{1\nu,i} \; ds \; (a(.)\nabla w_i, \nabla w_l) \right. \\
&- \left. \sum_{i=0}^{t} \int_0^t g(t-s) \; y_{1,i} \; ds \; (a(.)\nabla w_i, \nabla w_l) \right\}^2 \\
&= \sum_{l=1}^{m} \left\{ \sum_{i=1}^{m} \; \left\{ \int_0^t g(t-s) \; (y_{1\nu,i} - y_{1,i}) \; ds \right\} \; (a(.)\nabla w_i, \nabla w_l) \right\}^2 \\
&\leq \|g\|^2_{L^1(0,\infty)} \; m^2 \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} |(y_{1\nu,i} - y_{1,i})|^2 \, |(a(.)\nabla w_i, \nabla w_l)|^2.
\end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
|(a(.)\nabla w_i, \nabla w_l)| &\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |\nabla w_i(x) \cdot \nabla w_l(x)| dx \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \, \|\nabla w_i\|_\Omega \, \|\nabla w_l\|_\Omega \\
&\leq \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \, \max_{i=1,\ldots,m} \|\nabla w_i\|_\Omega,
\end{aligned}$$

então

$$\|F(t, y_{1\nu}) - F(t, y_1)\|^2_{\mathbb{R}^m} \leq \|g\|^2_{L^1(0,\infty)} \, m^2 \sum_{l=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \; |(y_{1\nu,i} - y_{1,i})|^2 \left[\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \, \max_{i=1,\ldots,m} \|\nabla w_i\|_\Omega \right]^2,$$

donde

$$\|F(t, y_{1\nu}) - F(t, y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq \|g\|_{L^1(0,\infty)} \, m^{3/2} \, \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \max_{i=1,\ldots,m} \|\nabla w_i\|_\Omega^2 \;\; \|y_\nu - y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \tag{2.9}$$

Por outro lado, notemos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$B(x) y_{1\nu} \to B(x) y_1 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, como a função f é contínua, temos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$f(B(x) y_{1\nu}) \to f(B(x) y_1) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para quase todo $x \in \Omega$,

$$f(B(x) y_{1\nu}) w_j(x) \to f(B(x) y_1) w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além do mais, $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada, pois é convergente. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$||y_{1\nu}||_{\mathbb{R}^m} \leq M.$$

Usando o fato que

$$|B(x) \; y_{1\nu}| \leq M \; \sum_{i=1}^m |w_i(x)|$$

e da condição (H.2)(iii) e (v), temos para quase todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned}
|f(B(x) y_{1\nu}) w_j(x)| &\leq C \left(1 + |B(x) \; y_{1\nu}|^{\rho-1}\right) |B(x) \; y_{1\nu}| \; |w_j(x)| \\
&= C \left(|B(x) \; y_{1\nu}| \; |w_j(x)| + |B(x) \; y_{1\nu}|^\rho \; |w_j(x)|\right) \\
&\leq C \left(M \sum_{i=1}^m |w_i(x)| \; |w_j(x)| + M^\rho \left(\sum_{i=1}^m |w_i(x)| \right)^\rho |w_j(x)| \right) \\
&\leq C \, M \sum_{i=1}^m |w_i(x)| \; |w_j(x)| + C \, M^\rho \, m^\rho \sum_{i=1}^m |w_i(x)|^\rho \; |w_j(x)|;
\end{aligned}$$

$\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, ..., m$. Pela Imersão de Sobolev, garantimos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega), \text{ pois, } 2\rho \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Deste modo, obtemos

$$C\, M \sum_{i=1}^{m} |w_i(x)|\, |w_j(x)| \; + \; C\, M^\rho\, m^\rho \sum_{i=1}^{m} |w_i(x)|^\rho\, |w_j(x)| \in L^1(\Omega)$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que $f(B(x)y_1)\, w_j(x)$ e integrável e além disso,

$$\int_\Omega f(B(x)y_{1\nu})\; w_j(x)\; dx \to \int_\Omega f(B(x)y_1)\; w_j(x)\; dx; \quad \forall\, j = 1, ..., m,$$

ou seja,

$$P(y_{1\nu}) \to P(y_1) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m. \tag{2.10}$$

De forma análoga, temos para quase todo $x \in \Omega$,

$$B(x)y_{2\nu} \to B(x)y_2 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, como a função h é contínua, temos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$h(B(x)y_{2\nu}) \to h(B(x)y_2) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para quase todo $x \in \Omega$,

$$b(x)\; h(B(x)y_{2\nu})\; w_j(x) \to b(x)\; h(B(x)y_2)\; w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Da limitação da sequência $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$, temos que a constante $M > 0$ verifica

$$||y_{2\nu}||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M.$$

Do fato que

$$|B(x)\ y_{2\nu}| \leq M\ \sum_{i=1}^{m} |w_i(x)|$$

e da condição (H.3) (ii) e (iv), temos para quase todo $x \in \Omega$,

$$\begin{aligned} |b(x)h(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| &\leq \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\ c_4\ |B(x)\ y_{2\nu}|\ |w_j(x)| \\ &\leq c_4\ M\ \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^{m} |w_i(x)|\ |w_j(x)|; \end{aligned}$$

$\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, ..., m$. Como $\{w_i\}_{i\in\mathbb{N}},\ \{w_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in L^2(\Omega)$, $\forall i, j \in 1, ..., m$, temos

$$C\ M\ \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \sum_{i=1}^{m} |w_i(x)|\ |w_j(x)| \in L^1(\Omega).$$

Portanto, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que $b(x)h(B(x)y_2)\ w_j(x)$ é integrável e além disso,

$$\int_\Omega b(x)\ h(B(x)y_{2\nu})\ w_j(x)\ dx \to \int_\Omega b(x)\ h(B(x)y_2)\ w_j(x)\ dx\ \ \forall\ j = 1, ..., m,$$

ou seja,

$$Q(y_{2\nu}) \to Q(y_2) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^m. \tag{2.11}$$

Assim, de (2.8), (2.9), (2.10), (2.11) e tendo em mente a convergência em (2.7), obtemos

$$\lim_{\nu\to\infty} \|h(t, y_\nu) - h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} = 0,$$

o que prova que a aplicação $h(t, y)$ é contínua como função de y, para $t \in [0, T]$.

No que segue denotaremos por C diferentes constantes.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto e $(t, y) \in K$. Mostraremos que existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$||h(t, y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t) \quad \forall (t, y) \in K.$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}
||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} &\leq \left\| \begin{bmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{bmatrix} y \right\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|F(t,y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|P(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|Q(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} \\
&\leq (1 + \|A\|^2_{\mathfrak{L}(\mathbb{R}^m)})^{\frac{1}{2}} \|y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|g\|_{L^1(0,\infty)} \; m^{3/2} \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \max_{i=1,\ldots,m} \|\nabla w_i\|^2_\Omega \; \|y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\
&+ \|P(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|Q(y_2)\|_{\mathbb{R}^m}.
\end{aligned}$$

Do item (ii) temos que P e Q são contínuas em $\mathbb{R}^m$, em particular, são contínuas em qualquer compacto $K^* \subset \mathbb{R}^{2m}$ e, então, $\exists\, C > 0$ tal que

$$||P(y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||Q(y_2)||_{\mathbb{R}^m} \leq C, \tag{2.12}$$

para todo $y \in \text{proj}_{\mathbb{R}^{2m}} K$, onde $y = (y_1, y_2)$. Desta forma, temos

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C \, \|y\|_{\mathbb{R}^{2m}} + C. \tag{2.13}$$

Como K é um conjunto compacto, segue que K é um conjunto limitado, isto é, existe $M_K > 0$ tal que

$$\|y\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K, \quad \forall\; y \in \text{Proj}_{\mathbb{R}^{2m}} K. \tag{2.14}$$

De (2.13) e (2.14), temos:

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq C\, M_K + C, \qquad \forall\; (t,y) \in K.$$

Denotando

$$m_K(t) = C\, M_K + C,$$

segue que $m_K(t)$ é uma função integrável e, portanto,

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t); \qquad \forall\; (t,y) \in K.$$

Assim, dos itens (i), (ii) e (iii) temos que as condições do Teorema de Carathéodory são satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $0 < t_m < T$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Da definição de $Y(t)$ concluímos que a função $z(t)$ existe no intervalo $[0, t_m)$ com $0 < t_m < T$, $\forall m \in \mathbb{N}$, sendo $z(t)$ e $z'(t)$ absolutamente contínuas em $[0, t_m)$ e $z''(t)$ existindo em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

Como os problemas (2.3) e (2.6) são equivalentes, existe uma solução $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t) w_i$ para o problema aproximado (2.3) em $[0, t_m)$; para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo.

2.2.1.1 Estimativas a Priori

Primeira Estimativa a Priori

A primeira estimativa a priori nos permitirá estender a solução obtida à todo intervalo $[0, T]$, independente de $m \in \mathbb{N}$, usando o corolário do Teorema de Carathéodory.

O Teorema de Carathéodory nos fornece que $u_m(t)$ e $u'_m(t)$ são absolutamente contínuas e como consequência disto $u'_m(t)$ e $u''_m(t)$ existem no sentido de Dini.

Considerando no problema aproximada (PA), $v = w_j$, $j = 1, ..., m$; multiplicando a equação por $h'_{jm}(t)$, $t \in [0, t_m)$, e somando em j de 1 até m, obtemos

$$\begin{aligned} (u''_m(t), u'_m(t)) \;&+\; k_0(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - \int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))\,ds \\ &+\; (f(u_m(t)), u'_m(t)) + (b(x)h(u'_m(t)), u'_m(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Como a base $\{w_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ é ortonormal em $L^2(\Omega)$, resulta que para $j = 1, ..., m$,

$$\begin{aligned} h''_{jm}(t) = (u''_m(t), w_j) = \;&-\; k_0(\nabla u_m(t), \nabla w_j) + \int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j)\,ds \\ &-\; (f(u_m(t)), w_j) - (b(x)h(u'_m(t)), w_j). \end{aligned} \tag{2.16}$$

De (2.16), de (H.2) (iv) e (H.3) (iv) e das imersões, segue que

$$\begin{aligned}
|h''_{jm}(t)| &\leq k_0\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t g(t-s)\int_\Omega |\nabla u_m(s)|\,|\nabla w_j|\,dx\,ds \\
&+ \int_\Omega |f(u_m(t))|\,|w_j|\,dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |h(u'_m(t))|\,|w_j|\,dx \\
&\leq k_0\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t g(t-s)\,\|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}\,\|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}ds \\
&+ C\left[\int_\Omega |w_j|\,|u_m|\,dx + \int_\Omega |w_j|\,|u_m|^\rho\,dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u'_m(t)|\,|w_j|\,dx\right] \\
&\leq \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)}\Big(k_0\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t g(t-s)\,\|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}\,ds \\
&+ C\,\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + C\,\|u_m(t)\|^\rho_{H_0^1(\Omega)} + \|u'_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\Big)
\end{aligned}$$

Pela continuidade das funções envolvidas em $[0,t_m)$; $t_m < T$, segue que $h''_{jm}(t) \in L^2_{loc}(0,t_m)$. Assim

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_m} ||u''_m(t)||^2_\Omega dt &= \int_0^{t_m} ||\sum_{j=1}^m h''_{jm}(t)w_j||^2_\Omega dt \\
&\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m ||h''_{jm}(t)w_j||^2_\Omega dt \\
&= \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^m |h''_{jm}(t)|^2||w_j||^2_\Omega dt \;\leq\; \sum_{j=1}^m ||w_j||^2_\Omega \int_0^{t_m} |h''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u''_m \in L^2_{loc}(0,t_m;L^2(\Omega)). \tag{2.17}$$

Assim, como $u'_m(t)$ é absolutamente contínua em $[0,t_m)$, podemos concluir que

$$\int_\Omega u''_m(t)\;u'_m(t)\;dx \quad\in\quad L^1_{loc}(0,t_m). \tag{2.18}$$

Considere $\theta \in \mathcal{D}(0,t_m)$. Então, de (2.18) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\langle (u''_m(t),u'_m(t)),\theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} &= \langle \int_\Omega u''_m(x,t)u'_m(x,t)dx,\theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)}\\
&= \int_0^{t_m}\int_\Omega u''_m(x,t)u'_m(x,t)\theta(t)dxdt\\
&= \int_\Omega\int_0^{t_m}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u'_m(x,t))^2\theta(t)dtdx\\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega\left\{(u'_m(x,t))^2\theta(t)|_{t=0}^{t=t_m}-\int_0^{t_m}(u'_m(x,t))^2\theta'(t)dt\right\}dx\\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_\Omega(u'_m(x,t))^2\theta'(t)dxdt\\
&= -\frac{1}{2}\langle||u'_m(t)||^2_\Omega,\theta'\rangle\\
&= \langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega,\theta\rangle;
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(u''_m(t),u'_m(t))=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u'_m(t)||^2_\Omega. \tag{2.19}$$

Da mesma forma provamos que

$$k_0(\nabla u_m(t),\nabla u'_m(t)) \;=\; k_0\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|\nabla u_m(t)\|^2_{(L^2(\Omega))^n} \tag{2.20}$$

Usando a definição de convolução e o Lema 2.1.1, decorre que

$$\begin{aligned}
\int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s),\nabla u'_m(t))\,ds &= \int_\Omega a(x)\int_0^t g(t-s)\,\nabla u_m(s)\cdot\nabla u'_m(t)\,ds\,dx\\
&= \int_\Omega a(x)\int_0^t g(t-s)\sum_{i=1}^n\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\,ds\,dx\\
&= \sum_{i=1}^n\int_\Omega a(x)\left[\int_0^t g(t-s)\frac{\partial u_m(s)}{\partial x_i}\,ds\right]\,\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\;dx\\
&= \sum_{i=1}^n\int_\Omega a(x)\left(g*\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)(t)\;\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\;dx\\
&= \sum_{i=1}^n\int_\Omega a(x)\,\frac{1}{2}\left[\left(g'\Box\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)(t)\;-\;g(t)\left|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right|^2\right.\\
&\quad\left.-\;\frac{d}{dt}\left\{\left(g\Box\frac{\partial u_m}{\partial x_i}\right)(t)\;-\;\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)\left|\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\right|^2\right\}\right]\,dx
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= \;& \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,(g'\Box\nabla u_m)(t)\;\;dx \;-\; \frac{1}{2}\,g(t)\int_\Omega a(x)\,|\nabla u_m(t)|^2\;\;dx \\
- \;& \frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega \frac{1}{2}\,a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx\right. \\
- \;& \left.\int_\Omega \frac{1}{2}\,a(x)\,\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)|\nabla u_m(t)|^2\,dx.\right\} \qquad (2.21)
\end{aligned}
$$

Usando a hipótese (H.2) (iii) e da Proposição 1.1.19, segue que

$$
\frac{d}{dt}(F\circ u_m)(t) \;=\; (F'\circ u_m)(t)\,u_m'(t) \;=\; f(u_m(t))\,u_m'(t). \qquad (2.22)
$$

Assim, substituindo (2.19), (2.20), (2.21) e (2.22) em (2.15), resulta

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|u_m'(t)\|_\Omega^2 \;+\; k_0\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\|\nabla u_m(t)\|_\Omega^2 \;-\; \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,\left[(g'\Box\nabla u_m)(t)\;-\;g(t)\,|\nabla u_m(t)|^2\right]\,dx \\
&+\;\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx \;-\; \int_\Omega a(x)\,\left(\int_0^t g(s)\,ds\right)|\nabla u_m(t)|^2\,dx\right\} \\
&+\;\frac{d}{dt}\int_\Omega F(u_m(t))\,dx \;+\; \int_\Omega b(x)\,h(u_m'(t))\,u_m'(t))\,dx \;=\; 0
\end{aligned}
$$

Mas, das hipóteses (2.2), (H.3) (ii) e do fato que $g(t)\geq 0$, e não-crescente obtemos

$$
\int_\Omega b(x)\,h(u_m'(t))\,u_m'(t))\,dx \;\geq\; 0,
$$

$$
\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,g(t)\,|\nabla u_m(t)|^2]\,dx \;\geq\; 0 \qquad \text{e} \qquad -\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,(g'(t)\Box\nabla u_m)(t)\,dx \;\geq\; 0.
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,\left\{\int_\Omega |u_m'(t)|^2\,dx \;+\; \int_\Omega (k_0\;-\;a(x)\,\int_0^t g(s)\,ds)\,|\nabla u_m(t)|^2\,dx\right. \\
&\left.+\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx \;+\; \int_\Omega F(u_m(t))\,dx\right\} \;\leq\; 0.
\end{aligned}
$$

Integrando de 0 à t, obtemos

$$\|u'_m(t)\|^2_\Omega + \int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx + \int_\Omega F(u_m(t))\,dx \leq$$
$$\|u'_m(0)\|^2_\Omega + k_0\,\|\nabla u_m(0)\|^2_\Omega + \int_\Omega F(u_m(0))\,dx.$$

Como

$$u_m(0) \to u^0 \quad \text{em} \quad H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad \text{e} \quad u'_m(0) \to u^1 \quad \text{em} \quad H^1_0(\Omega),$$

então existe uma constante $C > 0$ independente de t e de m tal que

$$\|u'_m(0)\|^2_\Omega + k_0\,\|\nabla u_m(0)\|^2_\Omega \leq C.$$

Por outro lado, de (H.2) (iii) e (v) e da Imersão $H^1_0(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+1}(\Omega)$, pois, $\rho + 1 \leq \dfrac{2n}{n-2}$, existe uma constante $C > 0$ independente de m e de t tal que

$$\int_\Omega F(u_m(0))\,dx \leq \int_\Omega \int_0^{u_m(0)} f(s)\,ds\,dx \leq \int_\Omega (|u_m(0)|^2 + |u_m(0)|^{\rho+1})\,dx \leq C$$

Logo,

$$\|u'_m(0)\|^2_\Omega + k_0\,\|\nabla u_m(0)\|^2_\Omega + \int_\Omega F(u_m(0))\,dx \leq C.$$

Portanto,

$$\|u'_m(t)\|^2_\Omega + \int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx + \int_\Omega F(u_m(t))\,dx \leq C,$$

para todo $t \in [0, t_m[$ e para todo $m \in \mathbb{N}$, no qual C independe de t e de m. Usando o Corolário 1.14.1 podemos estender as soluções $u_m(t)$ à todo intervalo $[0, T]$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

Repetindo os mesmos cálculos da Primeira Estimativa a Priori, concluímos que

$$\|u'_m(t)\|^2_\Omega + \int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u_m(t)|^2\,dx + \int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u_m)(t)\,dx + \int_\Omega F(u_m(t))\,dx \leq C$$

para todo $t \in [0,T], T > 0$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ em que C independe de $T > 0$. Além disso,

$$(u_m') \quad \text{é limitada em } \; L^\infty(0,\infty; L^2(\Omega)) \tag{2.23}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } \; L^\infty(0,\infty; H_0^1(\Omega)). \tag{2.24}$$

Segunda Estimativa a Priori

O nosso intuito nesta etapa é derivar o problema aproximado em relação a t. No que segue faremos alguns cálculos que serão necessários à obtenção da expressão desejada.

Sendo $\dfrac{d}{dt}$ a derivada no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u_m, \theta \right\rangle &= -\int_0^T u_m(t)\theta'(t)dt = -\int_0^T (\sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_j)\theta'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^m \left(-\int_0^T h_{jm}(t)\theta'(t)dt \right) w_j = -\sum_{j=1}^m \left\{ h_{jm}(t)\theta(t)|_0^T - \int_0^T h'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^T h'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j = \int_0^T u'_m(t)\theta(t)dt = \langle u'_m, \theta \rangle
\end{aligned}$$

o que prova que a derivada distribucional de u_m e a derivada clássica coincidem. De maneira análoga e utilizando (2.17), observando que $u''_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ prova-se que

$$\left\langle \frac{d}{dt}u'_m, \theta \right\rangle = \langle u''_m, \theta \rangle$$

ou seja, que as derivadas distribucionais e clássicas de 1ª e 2ª ordem coincidem, desde que elas existam.

Por outro lado, usando propriedades da integral de Bochner constatamos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_j), \theta \right\rangle &= \langle (\nabla u_m'(t), \nabla w_j), \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j) ds, \theta \right\rangle &= \langle g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla w_j) + \int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j) ds, \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(f(u_m(t)), w_j), \theta \right\rangle &= \langle (f'(u_m(t))u_m'(t), w_j), \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(b(x)h(u_m'(t)), w_j), \theta \right\rangle &= \langle (b(x)h'(u_m'(t))u_m''(t), w_j), \theta \rangle.
\end{aligned}$$

As duas últimas igualdades decorrem das hipóteses feitas sobre as funções f e h e a derivação de uma composição dada pela Proposição 1.1.19.

Das relações acima e de (2.16) resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u_m''(t), w_j) &= -k_0(\nabla u_m'(t), \nabla w_j) + g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla w_j) + \int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j) ds \\
&- (f'(u_m(t))u_m'(t), w_j) - (b(x)h'(u_m'(t))u_m''(t), w_j)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

De (2.25), de (H.2) (v), da desigualdade de Holder generalizada, de (2.23), (2.24) e das imersões, temos que

$$\begin{aligned}
|h_{jm}'''(t)| &\leq k_0\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} + g(0)\|a\|_{L^\infty(\Omega)} \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}\|w_j(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t g'(t-s) \int_\Omega |\nabla u_m(s)| \, |\nabla w_j| \, dx \, ds \\
&+ \int_\Omega |f'(u_m(t))| \, |u_m'(t)| \, |w_j| \, dx + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |h'(u_m'(t))| \, |u_m''(t)| \, |w_j| \, dx \\
&\leq k_0\|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)} \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} + C + C \, \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \int_0^t g'(s) \, ds \\
&+ C \, \|u_m'(t)\|_\Omega \, \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} + C\|u_m(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{\rho-1} \, \|u_m'(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \, \|w_j\|_{H_0^1(\Omega)} \\
&+ \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |h'(u_m'(t))| \, |u_m''(t)| \, |w_j| \, dx \\
&\leq C + C \, \|u_m'(t)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|b\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |h'(u_m'(t))| \, |u_m''(t)| \, |w_j| \, dx
\end{aligned}$$

Como u_m' é uma função absolutamente contínua, donde u_m'' é uma função integrável. Utilizando a limitação imposta sobre a derivada da função h, verificamos que

$$h_{jm}''' \in L^2(0, T), \tag{2.26}$$

onde as três derivadas são no sentido distribucionais. Sendo assim,

$$\int_0^T ||u_m'''(t)||_\Omega^2 dt = \int_0^T ||\sum_{j=1}^m h_{jm}'''(t)w_j||_\Omega^2 dt < +\infty,$$

isto é,

$$u_m''' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. De (2.25) e (2.26) obtemos

$$(u_m'''(t), w_j) + k_0(\nabla u_m'(t), \nabla w_j) - g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla w_j) - \int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla w_j)ds$$
$$+ (f'(u_m(t))u_m'(t), w_j) + (b(x)h'(u_m'(t))u_m''(t), w_j) = 0.$$

Multiplicando a identidade acima por h_{jm}'' e somando em j temos

$$(u_m'''(t), u_m''(t)) + k_0(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) - g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t))$$
$$- \int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u_m''(t))ds + (f'(u_m(t))u_m'(t), u_m''(t)) + (b(x)h'(u_m'(t))u_m''(t), u_m''(t)) = 0,$$

donde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m''(t)||_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m'(t)\|_\Omega^2 - \underbrace{g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u_m''(t))}_{I_1} - \tag{2.27}$$
$$\underbrace{\int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u_m''(t))ds}_{I_2} + \underbrace{(f'(u_m(t))u_m'(t), u_m''(t))}_{I_3} + \underbrace{(b(x)h'(u_m'(t))u_m''(t), u_m''(t))}_{I_4} = 0.$$

- Estimativa para I_1

Note que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right) = \left(\frac{\partial u_m'(t)}{\partial x_i}\right)^2 + \frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\frac{\partial u_m''(t)}{\partial x_i}$$

Assim, obtemos:

$$
\begin{aligned}
g(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u''_m(t)) &= g(0)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a(x)\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u''_m(t)}{\partial x_i}\,dx \\
&= g(0)\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega a(x)\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial u_m(t)}{\partial x_i}\,\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\right) - \left(\frac{\partial u'_m(t)}{\partial x_i}\right)^2\right] \\
&\leq g(0)\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_\Omega \,+\, g(0)\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_\Omega \,+\, \|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega\right), \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I_2

Usando a Regra da Integral de Leibniz, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds\right\} &= g'(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) \\
&+ \int_0^t g''(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds \\
&+ \int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u''_m(t))ds.
\end{aligned}
$$

Desta forma, temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u''_m(t))ds \,&=\, \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g'(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds\right\} \\
-\underbrace{g'(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t))}_{I_{21}} &\; -\underbrace{\int_0^t g''(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds}_{I_{22}} \qquad (2.29)
\end{aligned}
$$

Estimativa para I_{21} :

Pelas hipóteses (2.2) e (H.1) (iii), temos

$$
\begin{aligned}
|g'(0)(a(.)\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t))| &\leq c_1\, g(0)\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\,|(\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t))| \\
&\leq C\,\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_\Omega \qquad (2.30)
\end{aligned}
$$

Estimativa para I_{22} :

Pelas hipóteses (2.2) e (H.1) (ii) e (iii), juntamente com as desigualdades de Holder e de Young e de (2.24), segue

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g''(t-s)(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds &\leq c_2 \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t g(t-s) \|\nabla u_m(s)\|_\Omega \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega \, ds \\
&\leq c_2 \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^t g(t-s) \|\nabla u_m(s)\|_\Omega \, ds \\
&\leq C \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \int_0^\infty g(s) \, ds \\
&\leq C + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega^2, \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Deste modo, substituindo (2.30), (2.31) em (2.29), temos

$$
\begin{aligned}
\int_0^t g'(t-s) \left(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u''_m(t)\right) ds &\leq \frac{d}{dt} \left\{ \int_0^t g'(t-s) \left(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t)\right) ds \right\} \\
&+ C \, \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_m(t)\|_\Omega^2 + C + \frac{1}{2} \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega^2. \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I_3

Pela hipótese (H.2) (v), juntamente com o fato de $2\rho \leq \dfrac{2n}{n-2}$, que nos garante as Imersões de Sobolev

$$
H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega),
$$

segue da Desigualdade de Holder Genaralizada, Desigualdade de Young e de (2.23), (2.24) temos que

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \; |f'(u_m(t))| \, |u'_m(t)| \, |u''_m(t)| \, dx \\
&\leq \int_\Omega N \, |u'_m(t)| \, |u''_m(t)| \, dx + \int_\Omega N \, |u_m(t)|^{\rho-1} \, |u'_m(t)| \, |u''_m(t)| \, dx \\
&\leq N \, \|u'_m(t)\|_\Omega \, \|u''_m(t)\|_\Omega + N \, \|u_m(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{\rho-1} \, \|u'_m(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)} \, \|u''_m(t)\|_\Omega \\
&\leq C \, \|u''_m(t)\|_\Omega + C \, \|\nabla u'_m(t)\|_\Omega \, \|u''_m(t)\|_\Omega
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}&\leq \; C + \frac{1}{2}\,\|u''_m(t)\|^2_\Omega + \frac{C}{2}\,\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega + \frac{1}{2}\|u''_m(t)\|^2_\Omega\\&\leq \; C + \|u''_m(t)\|^2_\Omega + \frac{C}{2}\,\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega,\end{aligned}\tag{2.33}$$

- Estimativa para I_4

De acordo com a hipótese (H.3) (iii), segue que $h'(s) \geq 0; \forall s \in \mathbb{R}$. Logo

$$\int_\Omega b(x)\, h'(u'_m(t))\,(u''_m(t))^2 \;\geq\; 0.\tag{2.34}$$

Substituindo (2.28), (2.32), (2.33), (2.34) em (2.27), temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\,\|u''_m(t)\|^2_\Omega + \frac{k_0}{2}\frac{d}{dt}\,\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega \leq C\,\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|^2_\Omega + C\,\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega\\&+\|u''_m(t)\|^2_\Omega + \frac{d}{dt}\left\{\int_0^t g'(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))ds\right\} + C.\end{aligned}$$

Agora, integrando ambos os lados da desigualdade acima de 0 à t, $t \in [0,T]$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,\|u''_m(t)\|^2_\Omega + \frac{k_0}{2}\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega \leq \left(\frac{1}{2}\,\|u''_m(0)\|^2_\Omega + \frac{k_0}{2}\,\|\nabla u'_m(0)\|^2_\Omega + C\right)\\&+C\,\|\nabla u_m(t)\|^2_\Omega - C\,\|\nabla u_m(0)\|^2_\Omega + C\int_0^t \left(\|u''_m(\tau)\|^2_\Omega + \|\nabla u'_m(\tau)\|^2_\Omega\right) d\tau\\&+\underbrace{\int_0^t g'(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))\,ds}_{I_5}.\end{aligned}$$

- Estimativa para I_5

Da condição (H.1) (iii), da desigualdade de Young para $\eta > 0$ e de (2.24), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^t g'(t-s)\,(a(.)\nabla u_m(s), \nabla u'_m(t))\,ds \;&\leq\; c_1\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t g(t-s)\|\nabla u_m(s)\|_\Omega\|\nabla u'_m(t)\|_\Omega\,ds\\&\leq\; C\,\|\nabla u'_m(t)\|_\Omega\\&\leq\; C_\eta + \eta\|\nabla u'_m(t)\|^2_\Omega.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Assim, das limitações das sequências (∇u_m) e $(\nabla u_m(0))$, em $L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega))$ e $L^2(\Omega)$, respectivamente, e de (2.35), tomando $\eta > 0$ suficientemente pequeno de modo a satisfazer $\dfrac{k_0}{2} - \eta > \dfrac{k_0}{4}$ podemos reescrever a equação acima da seguinte forma,

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_m''(t)\|_\Omega^2 + \frac{k_0}{4}\|\nabla u_m'(t)\|_\Omega^2 \le \left(\frac{1}{2}\|u_m''(0)\|_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}\|\nabla u_m'(0)\|_\Omega^2 + C\right)\\ &+C\int_0^t \left(\|u_m''(\tau)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_m'(\tau)\|_\Omega^2\right) d\tau. \qquad (2.36)\end{aligned}$$

No que segue estimaremos a sequência $(u_m''(0))$. Considerando $t = 0$ e tomando $v = u_m''(0)$ no problema aproximado (PA), temos

$$(u_m''(0), u_m''(0)) + k_0(\nabla u_m(0), \nabla u_m''(0)) + (f(u_m(0)), u_m''(0) + (b(.)h(u_m'(0)), u_m''(0)) = 0$$

Pela Fórmula de Green

$$||u_m''(0)||_\Omega^2 - k_0(\Delta u_m(0), u_m''(0)) + (f(u_m(0)), u_m''(0)) + (b(.)h(u_m'(0)), u_m''(0)) = 0.$$

Assim, da limitação da sequência $\{u_m(0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}||u_m''(0)||_\Omega^2 &\le k_0||\Delta u_m(0)||_\Omega||u_m''(0)||_\Omega + \|f(u_m(0))\|_\Omega\,||u_m''(0)||_\Omega + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h(u_m'(0))\|_\Omega\,||u_m''(0)||_\Omega\\ &\le k_0||u_m(0)||_{H^2(\Omega)}||u_m''(0)||_\Omega + \|f(u_m(0))\|_\Omega\,||u_m''(0)||_\Omega + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h(u_m'(0))\|_\Omega\,||u_m''(0)||_\Omega\\ &\le ||u_m''(0)||_\Omega\,(C + \|f(u_m(0))\|_\Omega + \|b\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|h(u_m'(0))\|_\Omega). \qquad (2.37)\end{aligned}$$

De acordo com a condição (H.2) (iv), da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ e da limitação da sequência $\{u_m(0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, vem que

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u_m(0))|^2\,dx &\le C\int_\Omega (|u_m(0)| + |u_m(0)|^\rho)^2 dx\\ &\le C\int_\Omega (|u_m(0)|^2 + |u_m(0)|^{2\rho})\,dx\\ &\le C\,(\|u_m(0)\|_\Omega^2 + \|u_m(0)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho}) \le C.\end{aligned}$$

Logo,

$$\|f(u_m(0))\|_\Omega \leq C \tag{2.38}$$

Por outro lado, de (H.3) (iv) e da limitação da sequência $\{u_m'(0)\}_{m\in\mathbb{N}}$ em $H_0^1(\Omega)$ segue que

$$\left(\int_\Omega |h(u_m'(0))|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\left(\int_\Omega |u_m'(0)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\,\|u_m'(0)\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C. \tag{2.39}$$

De (2.37)-(2.39), segue que $(u_m''(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, de (2.3), a sequência $(\nabla u_m'(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Desta forma, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}||u_m''(0)||_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}||\nabla u_m'(0)||_\Omega^2 \leq C.$$

De (2.36) e da desigualdade acima resulta que

$$\frac{1}{2}\|u_m''(t)\|_\Omega^2 + \frac{k_0}{4}\,\|\nabla u_m'(t)\|_\Omega^2 \leq C + C\int_0^t (\|u_m''(\tau)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_m'(\tau)\|_\Omega^2)\,d\tau,$$

ou ainda,

$$\|u_m''(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_\Omega^2 \leq C + C\int_0^t (\|u_m''(\tau)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_m'(\tau)\|_\Omega^2)\,d\tau.$$

Assim, pelo Lema de Gronwall, obtemos

$$\|u_m''(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_\Omega^2 \leq C\,e^{\int_0^t C\,d\tau} \leq C\,e^{C\,T}, \qquad \forall t \in [0,T] \;\; \forall m \in \mathbb{N}.$$

Ou seja,

$$(u_m'') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.40}$$

$$(\nabla u_m') \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.41}$$

2.2.1.2 Passagem ao Limite

Inicialmente, observemos que pelo Teorema da Representação de Riez, identificando $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com seu dual, temos que

$$\begin{aligned} L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) &\equiv [L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))]' \\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) &\equiv [L^1(0,T;L^2(\Omega))]'. \end{aligned}$$

Além disso, $L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ são separáveis. Pelo Lema 1.4.2 e das Estimativas a Priori, existe (u_μ) subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.42}$$

$$u'_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.43}$$

$$u''_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

As convergências (2.43) e (2.44) decorrem da convergência (2.42), da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e da cadeia de imersões

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(0,T;H_0^1(\Omega)) &\hookrightarrow L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv [L^2(0,T;L^2(\Omega))]' \\ &\hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Convém observar que como $H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ de (2.42), (2.43) e (2.44) e, em virtude do Teorema 1.13 (Teorema de Aubin-Lions), podemos extrair subsequências de (u_μ) e (u'_μ) a qual ainda denotaremos pela mesma notação, de modo que

$$u_\mu \to u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T), \tag{2.45}$$

$$u'_\mu \to u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T), \tag{2.46}$$

em que $Q_T = \Omega \times (0,T)$.

Então,

$$u_\mu \to u \ \text{ q.s. em } \ Q_T,$$

$$u'_\mu \to u' \ \text{ q.s. em } \ Q_T.$$

Da continuidade das funções f e h segue que

$$f(u_\mu) \to f(u) \quad \text{q.s. em } \ Q_T, \tag{2.47}$$

$$h(u'_\mu) \to h(u') \quad \text{q.s. em } \ Q_T,$$

ou ainda,

$$b(x)h(u'_\mu) \to b(x)h(u') \quad \text{q.s. em } \ Q_T. \tag{2.48}$$

Além disso, de (H.3) (v) e de (2.23), para cada $\mu \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} ||b(x)h(u'_\mu)||^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T \int_\Omega |b(x)h(u'_\mu(x,t))|^2 dx \ dt \\ &\leq C \int_0^T \int_\Omega |b(x)|^2 \, |u'_\mu(x,t))|^2 dx \ dt \\ &\leq C \, \|b\|^2_{L^\infty(\Omega)} \, \|u'_\mu\|^2_{L^2(Q_T)} \\ &\leq C. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Da mesma forma, de (H.2) (iv) e do fato que $f(0) = 0$ temos para cada $\mu \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ||f(u_\mu)||^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T \int_\Omega |f(u_\mu(x,t))|^2 dx \ dt \\ &\leq C \int_0^T \int_\Omega (|u_\mu(x,t)|^2 + |u_\mu(x,t)|^{2\rho}) dx \ dt \\ &\leq C \, (\|u_\mu\|^2_{L^2(Q_T)} + \|u_\mu\|^{2\rho}_{L^{2\rho}(Q_T)}). \end{aligned}$$

Da imersão

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^{2\rho}(0,T;L^{2\rho}(\Omega))$$

e de (2.24), temos que existe uma constante $C>0$, tal que

$$||f(u_\mu)||^2_{L^2(Q_T)} \;\leq\; C, \qquad \forall \mu \in \mathbb{N}. \tag{2.50}$$

Assim, de (2.48), (2.49) e do Lema 1.1.3 (Lema de Lions) segue que

$$b(x)h(u'_\mu) \rightharpoonup b(x)h(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T). \tag{2.51}$$

Analogamente, de (2.47), (2.50) e do Lema 1.1.3 (Lema de Lions) segue que

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T). \tag{2.52}$$

Por outro lado, de (H.2) (iv) e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned}\|f(u_\mu(t))\|^2_\Omega &\leq C(\|u_\mu(t)\|^2_\Omega + \|u_\mu(t)\|^{2\rho}_{L^{2\rho}(\Omega)})\\ &\leq C(\|u_\mu(t)\|^2_\Omega + \|\nabla u_\mu(t)\|^{2\rho}_\Omega).\end{aligned}$$

Disso e de (2.24), segue que

$$\text{supess}_{0<t<T}\,\|f(u_\mu(t))\|^2_\Omega \;\leq\; C\,(\text{supess}_{0<t<T}\,\|u_\mu(t)\|^2_\Omega \;+\; \text{supess}_{0<t<T}\,\|\nabla u_\mu(t)\|^{2\rho}_\Omega) \;\leq C.$$

Logo, temos que $\{f(u_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Assim existe uma subsequência $\{f(u_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$f(u_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} \psi \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

portanto,

$$f(u_\mu) \rightharpoonup \psi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.52), temos que

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Assim, da unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que

$$f(u_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} f(u) \,\text{em}\, L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Analogamente, de (H.3) (iv)

$$\|b(x)h(u'_\mu(t))\|^2_\Omega \leq C\|b\|_{L^\infty(\Omega)}\, \|u'_\mu(t)\|^2_\Omega$$

Disso e de (2.23), resulta que

$$\text{supess}_{0<t<T}\, \|b(x)h(u'_\mu(t))\|^2_\Omega \,\leq\, C\, (\text{supess}_{0<t<T}\, \|u'_\mu(t)\|^2_\Omega) \,\leq\, C.$$

Logo, $\{b(x)h(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Então existe uma subsequência $\{b(x)h(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$b(x)h(u'_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

E portanto

$$b(x)h(u'_\mu) \rightharpoonup \eta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.51)

$$b(x)h(u'_\mu) \rightharpoonup b(x)h(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, da unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que

$$b(x)h(u'_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} b(x)h(u') \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como $w_j \in H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T) \hookrightarrow L^1(0,T)$, segue que

$$\int_0^T (b(x)h(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (b(x)h(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt, \tag{2.53}$$

e

$$\int_0^T (f(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (f(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt. \tag{2.54}$$

Por outro lado, visto que

$$u''_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então,

$$\langle u''_\mu, \varphi\rangle \to \langle u'', \varphi\rangle, \ \ \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega));$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), \varphi(t)\Big)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), \varphi(t)\Big)\ dt.$$

Como $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, em particular,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt \tag{2.55}$$

De (2.42) temos que

$$\nabla u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n),$$

então,

$$\langle \nabla u_\mu, \varphi\rangle \to \langle \nabla u, \varphi\rangle \quad \forall \varphi \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Do fato que $\nabla w_j \theta \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ decorre que

$$\int_0^T (\nabla u_\mu, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n}\theta(t)\ dt \to \int_0^T (\nabla u, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n}\theta(t)\ dt.$$

Deste modo,

$$\int_0^T k_0(\nabla u_\mu, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n}\theta(t)\ dt \to \int_0^T k_0(\nabla u, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n}\theta(t)\ dt. \tag{2.56}$$

Por outro lado, provemos que $(g * a(x)\nabla u_\mu)$ é limitado em $L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$. De fato, como g é não-crescente e de (2.24) segue que

$$\begin{aligned}
\|(g * a(x)\nabla u_\mu)(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^n} &\leq \int_\Omega a^2(x)\left|\int_0^t g(t-s)\nabla u_\mu(s)\,ds\right|^2 dx \\
&\leq g(0)^2\,\|a\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega\left(\int_0^T |\nabla u_\mu(s)|\,ds\right)^2 dx \\
&\leq g(0)^2\,\|a\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega T\int_0^T |\nabla u_\mu(t)|^2\,dt\,dx \\
&\leq T\,g(0)^2\,\|a\|^2_{L^\infty(\Omega)}\int_0^T \|\nabla u_\mu(t)\|^2_{[L^2(\Omega)]^n}\,dt \ \leq \ C
\end{aligned}$$

Assim, do Lema 1.4.2, existe uma subsequência $(g * a(x)\nabla u_\mu)$ que denotaremos pela mesma notação e $\chi \in L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$, tal que para todo $T>0$,

$$g * a(x)\nabla u_\mu \ \overset{\star}{\rightharpoonup} \chi \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n), \quad \text{em que } \chi = (\chi_1, ..., \chi_n),$$

ou seja,

$$g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \overset{\star}{\rightharpoonup} \chi_i \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)); \qquad \forall i = 1,...,n.$$

Donde,

$$g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \rightarrow \chi_i \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)); \qquad \forall i = 1,...,n.$$

O nosso intuito é mostrar que $\chi_i = g * a(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, para cada $i = 1,...,n$, e, por conseguinte, segue que $\chi = g * a(x)\nabla u$.

Com efeito, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i}(g * a(x)u_\mu)(t) &= \int_0^t g(t-s)\,\frac{\partial a(x)}{\partial x_i}\,u_\mu(s)\,ds + \int_0^t g(t-s)\,a(x)\,\frac{\partial u_\mu(s)}{\partial x_i}\,ds \\ &= \left(g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}u_\mu\right)(t) + \left(g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}\right)(t), \end{aligned} \tag{2.57}$$

ou seja,

$$g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\,(g * a(x)u_\mu) - g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i}u_\mu. \tag{2.58}$$

De (2.45) temos que

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)),$$

e, portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(g * a(x)u_\mu) \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_i}(g * a(x)u) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.59}$$

Também,

$$g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} u_\mu \to g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.60}$$

De (2.59), (2.60) e de (2.58), obtemos a seguinte convergência

$$g * a(x) \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \to \frac{\partial}{\partial x_i} (g * a(x) u) - g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.61}$$

De forma análoga, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (g * a(x) u)(t) &= \int_0^t g(t-s) \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} u(s)\, ds + \int_0^t g(t-s)\, a(x) \frac{\partial u(s)}{\partial x_i} ds \\ &= \left(g * \frac{\partial a(x)}{\partial x_i} u \right)(t) + \left(g * a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)(t). \end{aligned} \tag{2.62}$$

Logo, substituindo (2.62) em (2.61)

$$g * a(x) \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i} \to g * a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(Q_T).$$

Mas, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$, obtemos

$$\chi_i = g * a(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \text{para cada } i = 1, ..., n.$$

Portanto

$$\chi = g * a(x) \nabla u, \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Assim sendo,

$$g * a(x) \nabla u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} g * a(x) \nabla u \;\; \text{em} \;\; L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n). \tag{2.63}$$

Deste modo, de (2.63), segue que

$$\langle g * a(x)\nabla u_\mu, \varphi\rangle \to \langle g * a(x)\nabla u, \varphi\rangle, \;\; \forall\varphi \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n);$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big((g * a(x)\nabla u_\mu)(t), \varphi(t)\Big)\; dt \to \int_0^T \Big((g * a(x)\nabla u)(t), \varphi(t)\Big)\; dt.$$

Como $\nabla w_j\theta \in L^1(0,T;[L^2]^n(\Omega))$, em particular,

$$\int_0^T \Big((g * a(x)\nabla u_\mu)(t), \nabla w_j\Big)\; \theta(t)\;\; dt \to \int_0^T \Big((g * a(x)\nabla u)(t), \nabla w_j\Big)\; \theta(t)\;\; dt. \tag{2.64}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu > j$. Multiplicando a equação do problema aproximado (PA) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, tomando $v = w_j$ e integrando de 0 a T, resulta que

$$\int_0^T (u''_\mu(t), w_j)\theta(t)\;\; dt \; + \int_0^T k_0(\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t)\;\; dt \; - \int_0^T \int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u_\mu(s), \nabla w_j)\theta(t)\, dt \; + \int_0^T (f(u_\mu(t)), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T (b(x)h(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t)\;\; dt = 0. \tag{2.65}$$

Das convergências dadas em (2.53), (2.54), (2.55), (2.56) e (2.64) tomando o limite na equação (2.67), quando $\mu \to \infty$, obtemos

$$\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\;\; dt \; + \int_0^T k_0(\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\;\; dt \; - \int_0^T \int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u(s), \nabla w_j)\theta(t)\, dt \; + \int_0^T (f(u(t)), w_j)\theta(t)\, dt + \int_0^T (b(x)h(u'(t)), w_j)\theta(t)\;\; dt = 0. \tag{2.66}$$

Pela totalidade dos $w_j's$ em $H_0^1(\Omega)$, temos

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)\;\; dt \; + \int_0^T k_0(\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)\;\; dt \; - \int_0^T \int_0^t g(t-s)\,(a(.)\nabla u(s), \nabla v)\theta(t)\, dt \; + \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)\, dt + \int_0^T (b(x)h(u'(t)), v)\theta(t)\;\; dt = 0; \tag{2.67}$$

$\forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\forall v \in H_0^1(\Omega)$. Em particular, para $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\langle u'', \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \langle -k_0\,\Delta u, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \left\langle \int_0^t g(t-s)\,\mathrm{div}[a(x)\nabla u(s)]\,ds, \varphi\theta \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \langle f(u), \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \langle b(x)h(u'), \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0,$$

ou seja,

$$\langle u'' - k_0\,\Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\mathrm{div}[a(x)\nabla u(s)]\,ds + f(u) + b(x)h(u'), \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0;$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Como o espaço $\{\varphi\,\theta; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é tal que as combinações lineares finitas formam um conjunto denso em $\mathcal{D}(Q_T)$, então

$$u'' - k_0\,\Delta u + \int_0^t g(t-s)\,\mathrm{div}[a(x)\nabla u(s)]\,ds + f(u) + b(x)h(u') = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.68}$$

No entanto, como $u'', f(u), b(x)h(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ temos que

$$-k_0\,\Delta u + \int_0^t g(t-s)\mathrm{div}[a(x)\nabla u(s)]\,ds \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

e, portanto, a igualdade (2.68) se dá em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$.

Denotemos,

$$Au = -k_0\,\Delta u + g * \mathrm{div}[a(x)\nabla u],$$

então para quase todo $t \in (0,T), Au(t) \in L^2(\Omega)$.

Segue do Teorema 1.11 (Teorema da Regularidade das soluções fracas) que para quase todo $t \geq 0$, $u(t) \in H^2(\Omega)$ e, além disso,

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{H^2(\Omega)} &\leq C\,\{\,||-u''(t) - f(u(t)) - b(x)h(u'(t))||_\Omega\} \\ &\leq C\,\{\,||u''(t)||_\Omega + ||f(u(t))||_\Omega + ||b(x)h(u'(t))||_\Omega\}. \end{aligned}$$

Como todas as funções do lado direito da desigualdade acima pertencem à $L^\infty(0,T)$,

$\forall T > 0$, segue que

$$u \in L^\infty(0, T, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)); \qquad \forall T > 0.$$

2.2.1.3 Dados Iniciais

Do problema aproximado temos que

$$\begin{aligned} u_m(0) &\rightarrow u^0 \text{ em } H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ u_m'(0) &\rightarrow u^1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{aligned}$$

Nesta etapa, mostraremos que $u^0 = u(0)$ e $u^1 = u'(0)$.

Primeiramente, notemos que $u, u' \in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$ e $u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, então pelo Lema 1.2.1 temos que $u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega))$ e $u' \in C^0([0, T]; L^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido calcularmos $u(0), u(T), u'(0)$ e $u'(T)$.

Seja $\theta \in C^1([0, T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $u'_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$, então,

$$\langle u'_\mu, \varphi \rangle \rightarrow \langle u', \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (u'_\mu(t), \varphi) \ dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), \varphi) \ dt, \quad \forall \ \varphi \in L^1(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como $w_j\theta \in L^1(0, T; L^2(\Omega))$, em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta(t) \ dt \rightarrow \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t) \ dt.$$

Integrando por partes e da convergência $u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega))$, obtemos

$$\Big[\theta(t)(u_\mu(t), w_j)\Big]_0^T - \int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t) \ dt \rightarrow \Big[\theta(t)(u(t), w_j)\Big]_0^T - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t) \ dt,$$

ou ainda,

$$-(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u_\mu(t), w_j)\theta'(t)\; dt \to -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)\; dt,$$

o que implica que

$$(u_\mu(0), w_j) \quad \to \quad (u(0), w_j), \quad \forall\; j \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, da densidade de $\{w_j\}$ em $L^2(\Omega)$ segue que $u_\mu(0) \rightharpoonup u(0)$ em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, do problema aproximado, temos

$$u_\mu(0) \quad \to \quad u^0 \;\; \text{em} \;\; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

o que implica que

$$u_\mu(0) \quad \rightharpoonup \quad u^0 \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega).$$

Da unicidade do limite fraco obtemos que $u(0) = u^0$.

De forma análoga mostramos que $u'(0) = u^1$.

2.2.2 Unicidade de Solução Regular

Sejam u e v soluções regulares do problema (2.1). Considerando $w = u - v$ temos que w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} w'' - k_0\Delta w + \displaystyle\int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla w(s)]ds + f(u) - f(v) + b(x)(h(u') - h(v')) = 0 & \text{em} \;\; L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \\ w = 0 & \text{em} \;\; \Gamma \;\times\;]0,\infty[, \\ w(x,0) = 0 = w'(x,0) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.69}$$

Compondo a primeira linha de (2.69) com $w'(t)$, resulta que

$$
\begin{aligned}
&(w''(t), w'(t)) - k_0(\Delta w(t), w'(t)) + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla w(s)]\, ds, w'(t)) \\
&+ (f(u(t)) - f(v(t)), w'(t)) + (b(.)(h(u'(t)) - h(v'(t))), w'(t)) = 0.
\end{aligned}
$$

E portanto,

$$
\begin{aligned}
&(w''(t), w'(t)) + k_0(\nabla w(t), \nabla w'(t)) - \int_0^t g(t-s)(a(.)\nabla w(s), \nabla w'(t))\, ds \\
&+ (f(u(t)) - f(v(t)), w'(t)) + (b(.)(h(u'(t)) - h(v'(t))), w'(t)) = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, de (H.3) (iii)

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||_\Omega^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\left([g'\Box\nabla w](t) - g(t)|\nabla w(t)|^2\right) dx \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\, dx - \int_\Omega a(x)\left(\int_0^t g(s)ds\right)|\nabla w(t)|^2\, dx\right\} \\
&+ \int_\Omega (f(u(t)) - f(v(t))\,(u'(t) - v'(t))dx \;\le\; 0.
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

Como a função $a(x)$ é não negativa e g é não-crescente, então

$$
-\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\left([g'\Box\nabla w](t) - g(t)|\nabla w(t)|^2\right) dx \ge 0. \tag{2.71}
$$

Assim, podemos reescrever a equação (2.70) do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||w'(t)||_\Omega^2 + \int_\Omega\left(k_0 - a(x)\int_0^t g(s)ds\right)|\nabla w(t)|_\Omega^2 + \int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\, dx\right\} \\
&+ \int_\Omega (f(u(t)) - f(v(t))\,(u'(t) - v'(t))dx \le 0.
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

Da condição de crescimento da f, tal que $1 \le \rho \le \dfrac{n}{n-2}$ e $C > 0$, temos

$$
\int_\Omega (f(u(t)) - f(v(t))\,(u'(t) - v'(t))dx \;\le\; C\left(1 + |u(t)|^{\rho-1} + |v(t)|^{\rho-1}\right)|w(t)|\,|w'(t)|\, dx. \tag{2.73}
$$

Notemos que,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Portanto, afirmamos que

$$|u(t)|^{\rho-1}, |v(t)|^{\rho-1} \in L^n(\Omega), \text{ para quase todo } t \in [0,T]. \tag{2.74}$$

Com efeito, temos por hipótese que $1 \leq \rho \leq \dfrac{n}{n-2}$, o que implica que $(\rho-1)\,n \leq \dfrac{2n}{n-2}$. Logo

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{(\rho-1)n}(\Omega). \tag{2.75}$$

Como $u(t), v(t) \in H_0^1(\Omega)$, para quase todo $t \in [0,T]$, do exposto acima, vem que $u(t), v(t) \in L^{(\rho-1)n}(\Omega)$ e, então,

$$|u(t)|^{\rho-1}, |v(t)|^{\rho-1} \in L^n(\Omega), \text{ quase sempre em } [0,t],$$

o que prova (2.74).

Observemos que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1, \text{ em que, } q = \frac{2n}{n-2}. \tag{2.76}$$

Resulta de (2.73), (2.74), (2.76) e da desigualdade de Holder generalizada, que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (f(u(t)) - f(v(t))\ (u'(t) - v'(t))\ dx \\ &\leq C\ (||u(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)} + ||v(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)})\ ||w(t)||_{L^q(\Omega)}\ ||w'(t)||_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.77}$$

Desta maneira, substituindo (2.77) em (2.72), temos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||w'(t)||_\Omega^2+\int_\Omega k(x,t)|\nabla w(t)|_\Omega^2+\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\ \ dx\right\}\\ &\leq C\ \ (||u(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)}+||v(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)})\ \ ||w(t)||_{L^q(\Omega)}\ \ ||w'(t)||_{L^2(\Omega)}\end{aligned} \tag{2.78}$$

No entanto, de (2.75) e como $u, v \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$, temos

$$\text{supess}_{t\in[0,T]}||u(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)} \leq \text{supess}_{t\in[0,T]}||u(t)||^{\rho-1}_{H_0^1(\Omega)} < \infty, \tag{2.79}$$

e

$$\text{supess}_{t\in[0,T]}||v(t)||^{\rho-1}_{L^{(\rho-1)n}(\Omega)} \leq \text{supess}_{t\in[0,T]}||v(t)||^{\rho-1}_{H_0^1(\Omega)} < \infty. \tag{2.80}$$

Logo, do fato acima, da desigualdade de Young, de (2.78) e da imersão, $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{||w'(t)||_\Omega^2+\int_\Omega k(x,t)|\nabla w(t)|_\Omega^2+\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\ \ dx\right\}\\ &\leq C\,(||w(t)||^2_{L^q(\Omega)}+||w'(t)||^2_\Omega)\\ &\leq C\,(||\nabla w(t)||^2_\Omega+||w'(t)||^2_\Omega)\ +\ \int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\ \ dx\end{aligned}$$

tal que C é uma constante positiva conveniente.

Integrando de 0 à t; $t \in [0,T]$, a desigualdade acima, segue que existe uma constante C > 0 verificando

$$\begin{aligned}&||w'(t)||^2_\Omega+||\nabla w(t)||^2_\Omega+\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\ \ dx\\ &\quad\leq\ \ C\int_0^t\left(||w'(\tau)||^2_\Omega+||\nabla w(\tau)||^2_\Omega+\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](\tau)\,dx\right)\,dt.\end{aligned}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall, temos que

$$||w'(t)||^2_\Omega+||\nabla w(t)||^2_\Omega+\int_\Omega a(x)\,[g\Box\nabla w](t)\ \ dx \leq 0,$$

para todo $t \in [0, T]$, o que prova que

$$w(t) \equiv 0 \quad \text{em } H_0^1(\Omega), \;\; \forall\, t \in [0, T],$$

e portanto $u = v$, ou seja, a solução regular é única.

2.3 Solução Fraca

2.3.1 Existência de Solução Fraca

A seguir, provaremos a existência de solução fraca do problema (2.1) por aproximação de soluções regulares, estabelecendo o seguinte resultado:

Teorema 2.2. *Suponha que sejam satisfeitas as hipóteses (H.1)-(H.4), $k_0 > 0$ e a e b satisfaçam (2.2).*

(ii) Se $\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, então existe uma única solução do problema (2.1) na classe

$$u \in C^0\left([0, T]; H_0^1(\Omega)\right) \cap C^1\left([0, T]; L^2(\Omega)\right); \;\; \forall T > 0.$$

A função u será dita solução fraca de (2.1).

No que segue, usaremos u' para designar a derivada da função u em relação à variável temporal t, ou seja, $u' = \dfrac{du}{dt} = u_t$.

Seja $\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Como $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ são densos em $H_0^1(\Omega)$ e em $L^2(\Omega)$, respectivamente, existe $\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \in [H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)] \times H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \to \{u^0, u^1\} \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{2.81}$$

Desta maneira, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ existe uma solução regular u_μ do problema

$$\begin{cases} u_\mu'' - k_0\Delta u_\mu + \displaystyle\int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u_\mu(s)]ds + f(u_\mu) + b(x)h(u_\mu') = 0 & \text{em } \Omega \times \,]0,\infty[, \\ u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma \times \,]0,\infty[, \\ u_\mu(x,0) = u_\mu^0(x), \;\; u_\mu'(x,0) = u_\mu^1(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.82}$$

$u_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$. Considere $z_{\mu l} = u_\mu - u_l$. Pelos mesmos argumentos utilizados na unicidade de solução regular obtemos

$$||z_{\mu l}'(t)||_\Omega^2 + ||\nabla z_{\mu l}(t)||_\Omega^2 + \int_\Omega a(x)[g\Box\nabla z_{\mu l}](t)dx \leq (||z_{\mu l}'(0)||_\Omega^2 + ||\nabla z_{\mu l}(0)||_\Omega^2)\ e^{CT}$$

Como o membro da direita converge para zero, pois, $\{u_\mu^0\}$ converge em $H_0^1(\Omega)$ e $\{u_\mu^1\}$ converge em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{aligned} &(u_\mu) \quad \text{é sequência de Cauchy em} \quad C^0([0,T];H_0^1(\Omega)); \\ &(u_\mu') \quad \text{é sequência de Cauchy em} \quad C^0([0,T];L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Sendo os espaços envolvidos de Banach, existe $u \in C^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em } C^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)); \tag{2.83}$$

$$u_\mu' \to u' \quad \text{em } C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.84}$$

Notemos que de (2.84),

$$\begin{aligned} \int_0^T ||b(x)h(u_\mu'(t))||_\Omega^2 dt &= \int_0^T \int_\Omega |b(x)h(u_\mu'(x,t))|^2 dx\ dt \\ &\leq c||b||_{L^\infty(\Omega)}^2 \int_0^T \int_\Omega |u_\mu'(x,t)|^2 dx\ dt \\ &\leq c||b||_{L^\infty(\Omega)}^2 c_1 \\ &= c_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\{b(x)h(u'_\mu)\} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.85}$$

Por outro lado, de (2.84), segue que

$$u'_\mu \to u' \ \text{ q.s. em } \ \Omega\times]0,T[.$$

Pela continuidade da h temos que

$$h(u'_\mu(x,t)) \quad \to \quad h(u'(x,t)) \ \text{ para quase todo} \, (x,t) \in \Omega\times]0,T[,$$

ou ainda,

$$b(x)h(u'_\mu(x,t)) \quad \to \quad b(x)h(u'(x,t)) \ \text{ para quase todo} \, (x,t) \in \Omega\times]0,T[. \tag{2.86}$$

De (2.85), (2.86) e pelo Lema de Lions, existe uma subsequência de $\{b(x)h(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ que ainda denotaremos pela mesma notação tal que

$$b(x)h(u'_\mu) \rightharpoonup b(x)h(u') \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.87}$$

Analogamente, de (2.83)

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |f(u_\mu(x,t))|^2 dx \ \ dt \quad &\leq \quad 2\,c \int_0^T \int_\Omega (|u_\mu(x,t)|^2 \ + \ |u_\mu(x,t)|^{2\rho}) dx \ \ dt \\
&\leq \quad 2\,c\,(\|u_\mu\|^2_{L^2(Q_T)} \ + \ \|u_\mu\|^{2\rho}_{L^{2\rho}(Q_T)}) \\
&\leq \quad c_3
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{f(u_\mu)\} \quad \text{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.88}$$

De (2.83), segue que

$$u_\mu \to u \text{ q.s. em } \Omega \times [0,T].$$

Pela continuidade da f temos que

$$f(u_\mu(x,t)) \quad \to \quad f(u(x,t)) \text{ para quase todo } (x,t) \in \Omega \times]0,T[. \tag{2.89}$$

De (2.88), (2.89) e pelo Lema de Lions, existe uma subsequência de $\{f(u_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ que ainda denotaremos pela mesma notação tal que

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.90}$$

Por outro lado, de (H.3) (iv) temos que

$$\|b(x)h(u'(t))\|_\Omega^2 \leq C\|b\|^2_{L^\infty(\Omega)}\|u'_\mu(t)\|^2_\Omega.$$

Disso e de (2.84), resulta que

$$\text{supess}_{0<t<T}\,\|b(x)h(u'_\mu(t))\|^2_\Omega \;\leq\; C\,(\text{supess}_{0<t<T}\,\|u'_\mu(t)\|^2_\Omega) \;\leq\; C.$$

Logo, $\{b(x)h(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Então existe uma subsequência $\{b(x)h(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$b(x)h(u'_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

E portanto

$$b(x)h(u'_\mu) \quad \rightharpoonup \quad \eta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.87)

$$b(x)h(u'_\mu) \rightharpoonup b(x)h(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, pela unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que

$$b(x)h(u'_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} b(x)h(u') \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Analogamente, de (H.2) (iv) e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \|f(u(t))\|_\Omega^2 &\leq C(\|u_\mu(t)\|_\Omega^2 + \|u_\mu(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho}) \\ &\leq C(\|u_\mu(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_\mu(t)\|_\Omega^{2\rho}). \end{aligned}$$

Disso e de (2.83), resulta que

$$\text{supess}_{0<t<T} \|f(u_\mu(t))\|_\Omega^2 \leq C\,(\text{supess}_{0<t<T} \|u_\mu(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u_\mu(t)\|_\Omega^{2\rho}) \leq C.$$

Logo, $\{f(u_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Então existe uma subsequência $\{f(u_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$f(u_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

E portanto

$$f(u_\mu) \rightharpoonup \eta \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (2.90)

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto, pela unicidade do limite em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, concluímos que

$$f(u_\mu) \overset{\star}{\rightharpoonup} f(u) \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Compondo a equação da primeira linha de (2.82) com $\theta\varphi$ obtemos

$$\langle u''_\mu - k_0\Delta u_\mu + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u_\mu(s)]ds + f(u_\mu) + b(x)h(u'_\mu), \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad (2.91)$$

$\forall\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Notemos que

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi\rangle = -\langle u'_\mu, \theta'\varphi\rangle$$

e de (2.84) segue que

$$-\langle u'_\mu, \theta'\varphi\rangle \to -\langle u', \theta'\varphi\rangle = \langle u'', \theta\varphi\rangle.$$

Concluímos

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle u'', \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.92)$$

De outro modo,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

e por (2.83)

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

ou seja,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Logo,

$$\langle -k_0\Delta u_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle -k_0\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \quad (2.93)$$

Bem como,

$$
\begin{aligned}
\left\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u_\mu(s)]ds, \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} &= \left\langle \int_0^t g(t-s)\operatorname{div}[a(x)\nabla u_\mu(s)]ds, \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \\
= \langle g * \operatorname{div}[a(x)\nabla u_\mu], \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} &= \sum_{i=1}^n \left\langle g * \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}\right), \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \\
&= -\sum_{i=1}^n \left\langle g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}
\end{aligned}
$$

e por (2.83)

$$
\begin{aligned}
-\sum_{i=1}^n \left\langle g * a(x)\frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} &\to -\sum_{i=1}^n \left\langle g * a(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \\
&= \left\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds, \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},
\end{aligned}
$$

assim sendo,

$$
\left\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u_\mu(s)]ds, \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \left\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds, \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \tag{2.94}
$$

Do exposto em (2.87), (2.90), (2.92), (2.93), (2.94) obtemos de (2.91), após passagem ao limite,

$$
\left\langle u'' - k_0\Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u'), \theta\varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0;
$$

$\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Mas, pela totalidade do conjunto $R = \{\theta\varphi; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ vem que

$$
\left\langle u'' - k_0\Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u'), \psi \right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q_T).
$$

Então,

$$
u'' - k_0\Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u') = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.95}
$$

Temos que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ e então $-\Delta u \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e como $\int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds, f(u), b(.)h(u') \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ segue que $u'' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$. Assim,

$$u'' - k_0\Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u') = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)).$$

De (2.83) e (2.84) temos que $u \in C^0([0,T,H_0^1(\Omega))$ e $u' \in C^0([0,T],L^2(\Omega))$, isto é,

$$u \in C^0([0,T],H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T],L^2(\Omega)) \quad e \quad u'' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.96}$$

2.3.1.1 Dados Iniciais

De (2.81) e (2.82) temos que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) = u_\mu^0 \quad &\rightarrow \quad u^0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega), \\ u'_\mu(0) = u_\mu^1 \quad &\rightarrow \quad u^1 \;\text{ em }\; L^2(\Omega). \end{aligned}$$

De (2.83) e (2.84) segue que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) \quad &\rightarrow \quad u(0) \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega), \\ u'_\mu(0) \quad &\rightarrow \quad u'(0) \;\text{ em }\; L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, $u(0) = u^0$ e $u'(0) = u^1$.

2.3.2 Unicidade de Solução Fraca

Sejam u e v duas soluções fracas do problema (2.1) e consideremos $w = u - v$. Então,

$$w \in C^0([0,T],H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T],L^2(\Omega))$$

e satisfaz o problema

$$\begin{cases} w''-k_0\Delta w+\displaystyle\int_0^t \text{div}[a(x)g(t-s)\nabla w(s)]ds+f(u)-f(v)+b(x)(h(u')-h(v'))=0 & \text{em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega)),\\ w=0 & \text{em } \Gamma \times \,]0,\infty[,\\ w(x,0)=0=w'(x,0) & x\in\Omega. \end{cases} \tag{2.97}$$

Pela identidade da energia, conforme Apêndice, temos de (H.3) (ii) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\,||w'(t)||^2_\Omega+\frac{k_0}{2}\,||\nabla w(t)||^2_\Omega \;&\leq\; \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t g(t-\xi)|(a(x)\nabla w(\xi),\nabla w(t))|d\xi}_{i}\\ &+\;\underbrace{\int_0^t\int_0^r g(r-\xi)\,|(a(x)\nabla w(\xi),\nabla w(r))|d\xi\,dr}_{ii}\\ &+\;\underbrace{\int_0^t\int_\Omega |f(u(r))-f(v(r))|\,|u'(r)-v'(r)|dx\,dr}_{iii}. \end{aligned} \tag{2.98}$$

- *Estimativa para i*

Pela desigualdade de Young temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\xi)|(a(x)\nabla w(\xi),\nabla w(t))|\,d\xi \;&\leq\; \frac{1}{4}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\int_0^t g(t-\xi)\|\nabla w(\xi)\|^2_\Omega\,d\xi\\ &+\;\frac{1}{4}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\|\nabla w(t)\|^2_\Omega\int_0^t g(t-s)d\xi\\ &\leq\; C\int_0^t g(\xi)\|\nabla w(\xi)\|^2_\Omega\,d\xi+\frac{k_0}{4}\|\nabla w(t)\|^2_\Omega \end{aligned} \tag{2.99}$$

- *Estimativa para ii*

Pela desigualdade de Holder e Young e pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_0^t\int_0^r g(r-\xi)|(a(x)\nabla w(\xi),\nabla w(r))|d\xi\,dr \;&\leq\; \frac{1}{2}\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\left[\int_0^t\int_0^r g(r-\xi)\,\|\nabla w(\xi)\|^2_\Omega\,d\xi\,dr\right.\\ &+\;\left.\int_0^t\int_0^r g(r-\xi)\,\|\nabla w(r)\|^2_\Omega\,d\xi\,dr\right]\\ &\leq\; k_0\int_0^t\|\nabla w(\xi)\|^2_\Omega\,d\xi \end{aligned} \tag{2.100}$$

- *Estimativa para iii*

De (2.77), (2.79), (2.80) e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ temos que

$$\int_\Omega |f(u(r)) - f(v(r))|\, |u'(r) - v'(r)| dx \;\leq\; C\|\nabla w(r)\|_\Omega^2 + \|w'(r)\|_\Omega^2.$$

Logo

$$\int_0^t \int_\Omega |f(u(r)) - f(v(r))|\, |u'(r) - v'(r)| dx\, dr \;\leq\; C \int_0^t (\|\nabla w(r)\|_\Omega^2 + \|w'(r)\|_\Omega^2) dr. \quad (2.101)$$

Assim, substituindo (2.99), (2.100) e (2.101) em (2.98), obtemos

$$\frac{1}{2}||w'(t)||_\Omega^2 + \frac{k_0}{4}||\nabla w(t)||_\Omega^2 \;\leq\; \int_0^t [g(\xi) + C]\|\nabla w(\xi)\|_\Omega^2 + \;\|w'(\xi)\|_\Omega^2\, d\xi$$

Logo, pelo Lema de Gronwall, segue que

$$||w'(t)||_\Omega^2 + ||\nabla w(t)||_\Omega^2 \;\leq\; 0, \quad \forall\, t \in [0, T].$$

Portanto,

$$w(t) \equiv 0 \;\text{ em }\; H_0^1(\Omega), \;\; \forall\, t \in [0, T].$$

Consequentemente $u(t) = v(t)$ em $H_0^1(\Omega), \quad \forall t \in [0, T]$.

2.4 Apêndice

2.4.1 Identidade de Energia

Nosso intuito é provar a identidade

$$\frac{1}{2}\,||u'(t)||^2_\Omega + \frac{k_0}{2}\,||\nabla u(t)||^2_\Omega - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(t))d\xi \;=\; \frac{1}{2}\,||u^1||^2_\Omega + \frac{k_0}{2}\,||\nabla u^0||^2_\Omega +$$
$$\int_0^t\int_0^r g(r-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(r))d\xi\, dr - \int_0^t (f(u(r)), u'(r))dr - \int_0^t (b(x)h(u'(r)), u'(r))dr,$$

para quase todo $t \in [0, T]$, onde u é uma solução fraca do problema (2.1).

Seja θ_0 a função característica do intervalo $[s, t]$, onde $0 < s < t < T$. Para cada número natural $n \geq n_0 > \;\; máx\left\{\frac{1}{s}, \frac{1}{T-t}\right\}$, defina

$$\theta_n(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \; 0 \leq \xi \leq s - \dfrac{1}{n} \\ 1 + n(\xi - s) & \text{se } \; s - \dfrac{1}{n} \leq \xi \leq s \\ 1 & \text{se } \; s \leq \xi \leq t \\ 1 - n(\xi - t) & \text{se } \; t \leq \xi \leq t + \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \; t + \dfrac{1}{n} \leq \xi \leq T. \end{cases} \tag{2.102}$$

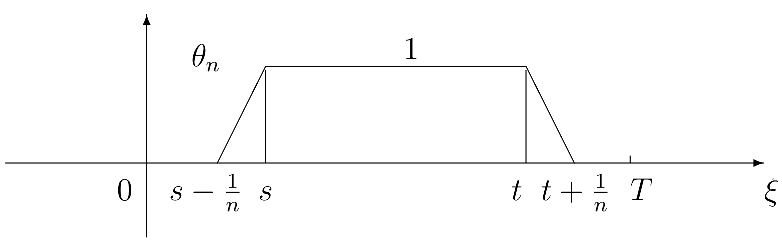

Figura 2.1: Função θ_n

A derivada de θ_n no sentido das distribuições é:

$$\theta_n'(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{se } \ 0 \leq \xi < s - \dfrac{1}{n} \\ n & \text{se } \ s - \dfrac{1}{n} < \xi < s \\ 0 & \text{se } \ s < \xi < t \\ -n & \text{se } \ t < \xi < t + \dfrac{1}{n} \\ 0 & \text{se } \ t + \dfrac{1}{n} < \xi \leq T \end{cases} \tag{2.103}$$

Seja $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sucessão regularizante positiva, par, isto é,

$$\rho_k(\xi) = \rho_k(-\xi), \quad \text{tal que } supp(\rho_k) \subset \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]. \tag{2.104}$$

Definamos:

$$\varphi_{nk} = \theta_n\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] \tag{2.105}$$

onde a convolução é considerada em t. A função acima está bem definida, pois se $\tilde{\theta_n}$ e $\tilde{u}'$ são as extensões nulas fora de $[0,T]$ de θ_n e u' respectivamente, então, $\forall t \in [0,T]$

$$\begin{aligned} \tilde{\theta_n}\Big[(\tilde{\theta_n}\tilde{u'}) * \rho_k * \rho_k\Big](t) &= \tilde{\theta_n}(t)\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\theta_n}(\xi)\tilde{u}'(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi \\ &= \theta_n(t)\int_0^T \theta_n(\xi)u'(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi = \varphi_{nk}(t) \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade decorre em virtude de $\tilde{\theta_n}(\xi) = 0$, $\forall \xi \in \mathbb{R} \setminus (0,T)$ e também pelas condições iniciais impostas sobre n_0. Notemos que:

$$\begin{aligned} supp\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] &\subset supp(\theta_n u') + \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] + \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right] \\ &\subset supp(\theta_n) \cap supp(u') + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right] \\ &\subset supp(\theta_n) + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right] \\ &\subset \left[s - \frac{1}{n_0}, t + \frac{1}{n_0}\right] + \left[-\frac{2}{k}, \frac{2}{k}\right], \qquad \forall n \geq n_0. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Se $x \in \left[s - \dfrac{1}{n_0}, t + \dfrac{1}{n_0}\right]$ e $y \in \left[-\dfrac{2}{k}, \dfrac{2}{k}\right]$ então

$$s - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} \leq x + y \leq t + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k} \tag{2.107}$$

Supondo que

$$s - \frac{1}{n_0} - \frac{2}{k} > 0 \quad \text{e} \quad t + \frac{1}{n_0} + \frac{2}{k} < T \tag{2.108}$$

decorre que

$$k > \frac{2n_0}{n_0 s - 1} \qquad \text{e} \qquad k > \frac{2n_0}{(T-t)n_0 - 1}$$

Logo para que (2.108) ocorra devemos ter

$$k > \max\left\{\frac{2n_0}{n_0 s - 1}, \frac{2n_0}{(T-t)n_0 - 1}\right\} = k_0 \tag{2.109}$$

Assim, para $k \geq k_0$, de (2.106) vem que

$$supp\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] \subset]0, T[. \tag{2.110}$$

De agora em diante consideraremos$(\rho_k)_{k \geq k_0}$ e $(\theta_n)_{n \geq n_0}$.

Sempre que aparecer uma convolução, estaremos considerando a extensão nula fora do intervalo $[0, T]$.

No caso em que $n \geq n_0$ e $k \geq k_0$, foi visto que $supp\Big[(\theta_n u') * \rho_k * \rho_k\Big] \subset]0, T[$ e $\theta_n \in H_0^1(0, T)$.

Temos também

$$u \in C^0([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

donde

$$u \in W^{1,+\infty}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$(u\theta_n)' = u'\theta_n + u\theta_n'$$

e desta última igualdade vem que:

$$(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n)' * \rho_k * \rho_k - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k \tag{2.111}$$

Consideremos agora, a primeira expressão à direita da igualdade acima. Temos para todo $t \in [0,T]$:

$$\Big[(u\theta_n)' * \rho_k * \rho_k\Big](t) = \int_0^T (u\theta_n)'(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)d\xi = \Big[(u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k)(t-\xi)\Big]_{\xi=0}^{\xi=T}$$
$$- \int_0^T (u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k)'(t-\xi)d\xi = \int_0^T (u\theta_n)(\xi)(\rho_k * \rho_k')(t-\xi)d\xi,$$

ou seja,

$$(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n) * \rho_k * \rho_k'. \tag{2.112}$$

Substituindo (2.112) em (2.111), vem que

$$(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k = (u\theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k \tag{2.113}$$

Assim de (2.105) obtemos

$$\varphi_{nk} = \theta_n\Big[(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\Big] = \theta_n\Big[(u\theta_n) * \rho_k * \rho_k' - (u\theta_n') * \rho_k * \rho_k\Big]$$

Esta última expressão nos diz que

$$\varphi_{n,k} \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)).$$

Faz sentido, portanto, compor a equação

$$u_{tt} - k_0\Delta u + \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0 \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

com $\varphi_{n,k}$ na dualidade $\langle .,.\rangle_{L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),L^2(0,T;H_0^1(\Omega))}$, isto é,

$$\begin{aligned}
&\underbrace{\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt}_{1} - \underbrace{k_0\int_0^T \langle \Delta u(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt}_{2} + \\
&\underbrace{\int_0^T \langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]\, ds, \varphi_{n,k}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt}_{3} + \underbrace{\int_0^T \langle f(u(t)), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt}_{4} + \\
&\underbrace{\int_0^T \langle b(x)h(u'(t)), \varphi_{n,k}(t)\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}\, dt}_{5} = 0.
\end{aligned} \tag{2.114}$$

- *Análise de 1*

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t)\rangle dt &= \int \langle u'', \theta_n\big[(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k]\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle u''\theta_n, (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle (u''\theta_n) * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\rangle dt \\
&= \int_0^T \langle (u'\theta_n)' * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\rangle dt - \int_0^T \Big((u'\theta_n') * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\Big) dt.
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Mas por (2.110) resulta que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\Big((u'\theta_n) * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\Big) dt = \int_0^T \frac{d}{dt}\Big((\theta_n u'), (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\Big) dt = 0$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\Big(\theta_n u', (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k\Big) &= 2\Big([(u'\theta_n) * \rho_k]', (u'\theta_n) * \rho_k\Big) \\
&= 2\Big((u'\theta_n)' * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\Big).
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int_0^T \Big((u'\theta_n)' * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k \Big) dt = 0\,. \tag{2.116}$$

Então de (2.115) e (2.116) segue que

$$\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t) \rangle dt = -\int_0^T \Big((u'\theta_n') * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k \Big) dt\,. \tag{2.117}$$

Contudo,

$$\begin{aligned} (u'\theta_n') * \rho_k &\longrightarrow u'\theta_n' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\ (u'\theta_n) * \rho_k &\longrightarrow u'\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Logo, de (2.117) e das convergências acima, concluímos que

$$\int_0^T \langle u''(t), \varphi_{n,k}(t) \rangle dt \overset{k \to +\infty}{\longrightarrow} -\int_0^T \theta_n'\, \theta_n\, ||u'(t)||^2_\Omega dt\,. \tag{2.118}$$

- *Análise de 2*

$$\begin{aligned} &- \quad k_0 \int_0^T \langle \Delta u(t), \varphi_{n,k}(t) \rangle dt = k_0 \sum_{i=1}^n \Big\{ \int_0^T \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t), \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k * \rho_k' \Big) dt \\ &- \quad \int_0^T \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t), \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n' * \rho_k * \rho_k \Big) dt \Big\} = k_0 \sum_{i=1}^n \Big\{ \int_0^T \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t) * \rho_k', \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k \Big) dt \\ &- \quad \int_0^T \Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t) * \rho_k, \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n' * \rho_k \Big) dt \Big\} \end{aligned} \tag{2.119}$$

Notemos que

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k, \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k \Big) = 2\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k', \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k \Big).$$

Logo de (2.110) decorre que

$$\int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t) * \rho_k', \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n * \rho_k\right)dt = 0. \tag{2.120}$$

Assim, de (2.119) e de (2.120) segue que

$$\left.- k_0 \int_0^T \langle \Delta u, \varphi_{n,k}(t)\rangle dt \;=\; -k_0 \sum_{i=1}^n \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t) * \rho_k, \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n' * \rho_k\right)dt\right\} \tag{2.121}$$

Contudo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n(t) * \rho_k &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \frac{\partial u}{\partial x_i}(t)\theta_n' * \rho_k &\longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \end{aligned}$$

Logo, de (2.121) e das convergências acima, concluímos que

$$- k_0 \int_0^T \langle -\Delta u, \varphi_{n,k}\rangle dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} -k_0 \sum_{i=1}^n \int_0^T \theta_n'\,\theta_n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dt = -k_0 \int_0^T \theta_n'\,\theta_n \,\|\nabla u(t)\|_\Omega^2 dt. \tag{2.122}$$

- *Análise de 3*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \Big\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]\,ds, \varphi_{n,k}\Big\rangle dt = \int_0^T \Big\langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]\,ds, \theta_n[(u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k]\Big\rangle\, dt \\
&= \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^t \Big\langle \theta_n(t)\, g(t-s) \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)\right], (u'\theta_n) * \rho_k * \rho_k \Big\rangle\, ds\, dt \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^t \Big(\theta_n(t)\, g(t-s)\, a(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(s), \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n\right) * \rho_k * \rho_k'\Big)\, ds\, dt \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^t \Big(\theta_n(t)\, g(t-s)\, a(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(s), \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n'\right) * \rho_k * \rho_k\Big)\, ds\, dt \\
&= -\sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^t \Big(\theta_n(t)\, g(t-s)\, a(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) * \rho_k', \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n\right) * \rho_k\Big)\, ds\, dt \\
&+ \sum_{i=1}^n \int_0^T \int_0^t \Big(\theta_n(t)\, g(t-s)\, a(x)\, \frac{\partial u}{\partial x_i}(s) * \rho_k, \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n'\right) * \rho_k\Big)\, ds\, dt.
\end{aligned} \tag{2.123}$$

Note que

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^t\Big(\Big[\theta_n(t)\,g(t-s)\,a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)dsBig]*\rho_k',\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n\Big)*\rho_k\Big)\,dt\\
&=-\int_0^T\Big(\theta_n(t)\,a(x)\Big(g*\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)(t)*\rho_k',\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n\Big)*\rho_k\Big)\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.124}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
\theta_n\,a(x)\Big(g*\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)*\rho_k' &\;\rightarrow\; \theta_n\,a(x)\Big(g*\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big) \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))\\
\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\theta_n*\rho_k &\;\rightarrow\; \frac{\partial u}{\partial x_i}\,\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))
\end{aligned}
$$

temos de (2.124)

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^t\Big(\theta_n(t)\,g(t-s)\,a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)*\rho_k',\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n\Big)*\rho_k\Big)\,ds\,dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\\
&-\sum_{i=1}^n\int_0^T\Big(\theta_n(t)\,a(x)\Big(g*\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big),\frac{\partial u}{\partial x_i}\,\theta_n\Big)\,dt=-\sum_{i=1}^n\int_0^T\theta_n^2(t)\Big(a(x)g*\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)\,dt.
\end{aligned}
\tag{2.125}
$$

Analogamente,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n\int_0^T\int_0^t\Big(\theta_n(t)\,g(t-s)\,a(x)\,\frac{\partial u}{\partial x_i}(s)*\rho_k,\Big(\frac{\partial u}{\partial x_i}\theta_n'\Big)*\rho_k\Big)\,ds\,dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow}\\
&\sum_{i=1}^n\int_0^T\theta_n\,\theta_n'\Big(a(x)\Big(g*\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big),\frac{\partial u}{\partial x_i}\Big)dt.
\end{aligned}
\tag{2.126}
$$

De (2.125) e (2.126)

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \langle \int_0^t \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]\, ds, \varphi_{n,k}\rangle dt \quad \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \\
&-\int_0^T \theta_n^2 \int_0^t g(t-s)(a(x)\nabla u(s), \nabla u(t)) ds\, dt + \int_0^T \theta_n\, \theta_n' \int_0^t g(t-s)(a(x)\nabla u(s), \nabla u(t)) ds\, dt.
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

- *Análise de 4*

Temos da regularidade de $f(u)$ que

$$
\int_0^T \Big(f(u(t)), \varphi_{n,k}(t)\Big) dt = \int_0^T \Big((f(u(t))\theta_n) * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\Big) dt. \tag{2.128}
$$

Como

$$
\begin{aligned}
(f(u)\theta_n) * \rho_k \quad &\longrightarrow \quad f(u)\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\
(u'\theta_n) * \rho_k \quad &\longrightarrow \quad u'\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),
\end{aligned}
$$

de (2.128) obtemos

$$
\int_0^T \Big(f(u(t)), \varphi_{n,k}(t)\Big) dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \theta_n^2 (f(u(t)), u'(t)) dt. \tag{2.129}
$$

- *Análise de 5*

Analogamente temos

$$
\int_0^T \Big(b(x)h(u'(t)), \varphi_{n,k}(t)\Big) dt = \int_0^T \Big((b(x)h(u'(t))\theta_n) * \rho_k, (u'\theta_n) * \rho_k\Big) dt. \tag{2.130}
$$

Também

$$
\begin{aligned}
(b(x)h(u')\theta_n) * \rho_k \quad &\longrightarrow \quad b(x)h(u')\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \\
(u'\theta_n) * \rho_k \quad &\longrightarrow \quad u'\theta_n \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)).
\end{aligned}
$$

Então, de (2.130), obtemos

$$\int_0^T \Big(b(x)h(u'(t)),\varphi_{n,k}(t)\Big)dt \overset{k\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^T \theta_n^2(b(x)h(u'(t)),u'(t))dt \tag{2.131}$$

Portanto, para cada $n \geq n_0$, de (2.114), (2.118), (2.122), (2.127), (2.129) e (2.131), vem que

$$\begin{aligned}&-\int_0^T \theta_n'\theta_n||u'(t)||_\Omega^2 dt - k_0\int_0^T \theta_n'\theta_n||\nabla u(t)||_\Omega^2 dt - \int_0^T \theta_n^2\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi),\nabla u(t))d\xi\, dt\\&+\int_0^T \theta_n\,\theta_n'\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi),\nabla u(t))d\xi\, dt + \int_0^T \theta_n^2(f(u(t)),u'(t))dt\\&+\int_0^T \theta_n^2(b(x)h(u'(t)),u'(t))dt = 0.\end{aligned} \tag{2.132}$$

O próximo passo é passar o limite em (2.132) quando $n \to +\infty$. Este limite será obtido utilizando os lemas que seguem.

Lema 2.4.1. *Se $h \in L^1(0,T)$ e s e t, são pontos de Lebesgue de h então,*

$$-\int_0^T \theta_n\theta_n' h(r)\ dr \overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\Big(h(t)-h(s)\Big)$$

Demonstração: Com efeito, temos

$$-\int_0^T \theta_n(r)\theta_n'(r)h(r)\ dr = -\int_{s-\frac{1}{n}}^s n\Big[1+n(r-s)\Big]h(r)dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} n\Big[1-n(r-t)\Big]h(r)dr$$

Mas

$$\begin{aligned}&\int_{s-\frac{1}{n}}^s n\Big[1+n(r-s)\Big]h(r)dr = \int_{s-\frac{1}{n}}^s nh(r)dr + \int_{s-\frac{1}{n}}^s n^2(r-s)h(r)dr\\ = \quad &\frac{1}{(1\backslash n)}\int_{s-\frac{1}{n}}^s h(r)dr + \frac{1}{(1\backslash n^2)}\int_{s-\frac{1}{n}}^s (r-s)h(r)dr \longrightarrow \frac{1}{2}h(s)\end{aligned}$$

Analogamente

$$\int_t^{t+\frac{1}{n}} n\Big[1-n(r-t_0)\Big]h(r)dr \longrightarrow \frac{1}{2}h(t)$$

o que prova o lema $\square$

Lema 2.4.2. *Seja $h \in L^1(0,T)$. Se s e t são pontos de Lebesgue de h, então*

$$\int_0^T \theta_n^2(r)h(r)dr \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_s^t h(r)dr.$$

Demonstração: Pela definição da função θ_n,

$$\int_0^T \theta_n^2(r)h(r)\; dr = \int_{s-\frac{1}{n}}^s (1+n(r-s))^2\, h(r)dr + \int_s^t h(r)dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} (1-n(r-t))^2\, h(r)dr$$

Provemos que

$$\int_{s-\frac{1}{n}}^s (1+n(r-s))^2\, h(r)dr + \int_t^{t+\frac{1}{n}} (1-n(r-t))^2\, h(r)dr \longrightarrow 0$$

Temos

$$\int_{s-\frac{1}{n}}^s (1+n(r-s))^2\, h(r)dr = \underbrace{\int_{s-\frac{1}{n}}^s h(r)dr}_{I_1} + \underbrace{2n\int_{s-\frac{1}{n}}^s (r-s)h(r)dr}_{I_2} + \underbrace{n^2\int_{s-\frac{1}{n}}^s (r-s)^2 h(r)dr}_{I_3}$$

Claramente, $I_1 \longrightarrow 0$. Também $I_2 \longrightarrow 0$ pelo lema anterior.

$$|I_3| \leq n^2\int_{s-\frac{1}{n}}^s (r-s)^2|h(r)|dr \leq \int_{s-\frac{1}{n}}^s |h(s)|dr \longrightarrow 0.$$

De modo semelhante,

$$\lim_{n\to\infty}\int_t^{t+\frac{1}{n}} (1-n(r-t))^2\, h(r)dr = 0.$$

$\square$

Agora, sendo $||u'(.)||$, $||\nabla u(.)||$, $\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(t))d\xi$, localmente integráveis, pelo teorema da diferenciação de Lebesgue, o conjunto dos pontos de Lebesgue destas funções é de medida plena em $(0,T)$. Logo, quando $n \longrightarrow \infty$, temos para quase todo

$s, t \in [0,T]$:

$$\frac{1}{2}\Big[||u'(t)||_\Omega^2 - ||u'(s)||_\Omega^2\Big] + \frac{k_0}{2}\Big[||\nabla u(t)||_\Omega^2 - ||\nabla u(s)||_\Omega^2\Big] - \frac{1}{2}\Big[\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(t))d\xi$$
$$- \int_0^s g(s-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(s))d\xi\Big] - \int_s^t \int_0^r g(r-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(r))d\xi\, dr$$
$$+ \int_s^t (f(u(r)), u'(r))dr + \int_s^t (b(x)h(u'(r)), u'(r))dr = 0.$$

Considere agora, $(s_\nu) \subset (0,T)$ uma sequência de pontos de Lebesgue convergente para zero. Para quase todo $t \in (0,T]$, temos

$$\frac{1}{2}\Big[||u'(t)||_\Omega^2 - ||u'(s_\nu)||_\Omega^2\Big] + \frac{k_0}{2}\Big[||\nabla u(t)||_\Omega^2 - ||\nabla u(s_\nu)||_\Omega^2\Big] - \frac{1}{2}\Big[\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(t))d\xi$$
$$- \int_0^{s_\nu} g(s_\nu-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(s_\nu))d\xi\Big] - \int_{s_\nu}^t \int_0^r g(r-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(r))d\xi\, dr$$
$$+ \int_{s_\nu}^t (f(u(r)), u'(r))dr + \int_{s_\nu}^t (b(x)h(u'(r)), u'(r))dr = 0.$$

Mas visto que $u \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, temos que $\|u'(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|u'(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$ e $\|\nabla u(s_\nu)\|^2_{L^2(\Omega)} \longrightarrow \|\nabla u(0)\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Portanto, tomando o limite quando $\nu \longrightarrow \infty$, segue que para quase todo $t \in [0,T]$,

$$\frac{1}{2}\,||u'(t)||_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}\,||\nabla u(t)||_\Omega^2 - \frac{1}{2}\int_0^t g(t-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(t))d\xi \;=\; \frac{1}{2}\,||u^1||_\Omega^2 + \frac{k_0}{2}\,||\nabla u^0||_\Omega^2$$
$$+ \int_0^t \int_0^r g(r-\xi)(a(x)\nabla u(\xi), \nabla u(r))d\xi\, dr - \int_0^t (f(u(r)), u'(r))dr - \int_0^t (b(x)h(u'(r)), u'(r))dr,$$

para qualquer solução fraca do problema (2.1) como queríamos provar.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

3.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é provar que a solução do sistema

$$\begin{cases} u_{tt} - k_0\Delta u + \displaystyle\int_0^t \mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times [0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma \times [0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \ \ u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

decai exponencialmente para zero, sob as hipóteses que a função de relaxamento g, decai exponencialmente para zero e a função h, tem crescimento linear.

Neste capítulo, além das hipóteses (H.1)-(H.4) dadas no capítulo 2, iremos considerar em (H.1), a desigualdade técnica:

(iv) $g'''(t) \geq Cg'(t), \quad \forall\, t \geq 0$, para alguma constante $C \geq 0$;

e as seguintes hipóteses:

(**H.5**) Os coeficientes de dissipação viscoelástica e friccional verificam

$$a(x) + b(x) \geq \delta, \quad \forall\, x \in \Omega, \ \text{para algum } \delta > 0.$$

(**H.6**) Os dados iniciais satisfazem a desigualdade

$$||u^0||^2_{H^1_0(\Omega)} + k_0\,||u^1||^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda, \ \text{para algum } \lambda \text{ positivo arbitrário.}$$

A hipótese (H.5) nos informa que estamos lidando com uma vasta possibilidade de escolha de funções $a(x)$ e $b(x)$, e o caso mais interessante ocorre quando temos mecanismos de "damping" atuando simultaneamente, mas de forma complementar. A maneira que a dissipação atua no sistema é localizada, mas não necessariamente "estrategicamente localizada."

A hipótese (H.6) não implica que estamos considerando dados iniciais pequenos, posto que λ é arbitrário. Na verdade, esta hipótese nos informa que estamos considerando dados iniciais tomados em conjuntos limitados. A necessidade desta hipótese é proveniente do fato que a taxa de decaimento não é uniforme para dados iniciais arbitrários.

A energia correspondente ao sistema (3.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \Big[|u_t|^2 + k(x,t)|\nabla u|^2 + a(x)g\Box\nabla u\Big]dx + \int_\Omega F(u)dx, \tag{3.2}$$

em que,

$$k(x,t) = k_0 - a(x)\int_0^t g(s)ds \quad e \quad F(z) = \int_0^z f(s)ds, \ \ \forall s \in \mathbb{R}.$$

A propriedade dissipativa das soluções do sistema (3.1) é dada pelo seguinte lema:

Lema 3.1.1. *A energia de primeira ordem do sistema (3.1) satisfaz a identidade*

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)[(g'\Box\nabla u)(t) - g(t)|\nabla u(t)|^2]dx - \int_\Omega b(x)h(u'(t))u'(t)dx. \tag{3.3}$$

Demonstração: Inicialmente, consideramos soluções regulares. O resultado segue por argumento de densidade. Compondo a primeira linha do sistema (3.1) por $u'(t)$, obtemos

$$(u''(t),u'(t)) - k_0(\Delta u(t),u'(t)) + \int_0^t (\mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s),u'(t))ds +$$
$$(f(u(t)),u'(t)) + (b(x)h(u'(t)),u'(t)) = 0.$$

Usando o Teorema de Green e o Teorema de Gauss segue que

$$(u''(t),u'(t)) + k_0(\nabla u(t),u'(t)) - \int_0^t (a(x)g(t-s)\nabla u(s),\nabla u'(t))ds$$
$$+ (f(u(t)),u'(t)) + (b(x)h(u'(t)),u'(t)) = 0.$$

Seguindo os mesmos passos utilizados na 1ª Estimativa a Priori, decorre

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left\{|u'(t)|^2 + \left(k_0 - a(x)\int_0^t g(s)ds\right)|\nabla u(t)|^2 + a(x)(g\Box\nabla u)(t)\right\}dx + \frac{d}{dt}\int_\Omega F(u(t))dx =$$
$$\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)[(g'\Box\nabla u)(t) - g(t)|\nabla u(t)|^2]dx - (b(x)h(u'(t)), u'(t)).$$

Assim, de (3.2), o resultado segue

$$\frac{d}{dt}E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)[(g'\Box\nabla u)(t) - g(t)|\nabla u(t)|^2]dx - \int_\Omega b(x)h(u'(t))u'(t))dx.$$

□

O principal resultado deste capítulo é dado pelo Teorema

Teorema 3.1. *Suponha que as hipóteses* $(H.1)-(H.5)$ *sejam satisfeitas. Se* (u^0, u^1) *satisfaz (H.6), então existe uma constante positiva* γ, *tal que a energia* $E(t)$ *definida em (3.2) satisfaz*

$$E(t) \leq 4\ E(0)e^{-\frac{\gamma t}{1+\lambda^{\rho-1}}}; \quad \forall t \geq 0. \tag{3.4}$$

Para provar o Teorema acima, consideraremos soluções regulares, o resultado seguirá usando argumentos de densidade.

Consideremos uma função não-negativa $\varphi \in C^1(\overline{\Omega})$, supp$(\varphi) \subset$ supp(a) e tal que

$$\varphi(x) \geq \delta/2 \quad se \quad x \in a^{-1}([\delta/2, \infty[),$$

$$\varphi(x) = 0 \quad se \quad x \in a^{-1}([0, \delta/4]).$$

Note que se

$$a(x) \leq \delta/2,\ \ \forall x \in \Omega, \text{ então } \ b(x) \geq \delta/2,\ \ \forall x \in \Omega.$$

De fato, se $b(x) < \delta/2$, para algum $x \in \Omega$, temos

$$a(x) + b(x) < \delta/2 + \delta/2 = \delta, \text{ para algum } x \in \Omega,$$

o que contradiz a hipótese (H.5). Desta forma, temos que o "damping" friccional age em todo domínio de Ω. Analogamente, se

$$b(x) \leq \delta/2, \ \forall x \in \Omega, \text{ implica que } a(x) \geq \delta/2, \ \forall x \in \Omega,$$

e isto nos mostra que o "damping" viscoelástico age em todo o domínio de Ω. Agora, quando temos $a(x) > \delta/2$, para algum $x \in \Omega$, e lembrando que a é uma função contínua, segue que $a(x) > \delta/2$, $\forall x \in W$, onde W é uma vizinhança tal que $W \subset \Omega$, (podendo ser considerada uma vizinhança maximal), então temos que $b(x) \geq \delta/2$ em $\Omega \setminus W$.

Vejamos duas desigualdades que desempenharão um papel essencial quando estabelecermos a taxa de decaimento.

$$(I) \qquad \varphi(x) + b(x) \geq \delta/2, \ \forall\, x \in \Omega. \tag{3.5}$$

De fato, consideremos dois casos:

1. $x \in a^{-1}([\delta/2, \infty[)$

   Neste caso, como $\varphi(x) \geq \delta/2$ e $b(x)$ é uma função não-negativa,

   $$\varphi(x) + b(x) \geq \delta/2, \ \forall x \in \Omega.$$

2. $x \notin a^{-1}([\delta/2, \infty[)$

   Então $0 \leq a(x) < \delta/2$ e, portanto, $-a(x) > -\delta/2$. De (H.5) e do fato que φ é uma função não-negativa, decorre que

   $$\varphi(x) + b(x) \geq b(x) \geq \delta - a(x) > \delta - \delta/2 = \delta/2, \ \forall x \in \Omega.$$

Mostraremos, a seguir, um resultado que é uma variante da Desigualdade de Poincaré.

Lema 3.1.2. *Sejam* Ω_1, Ω_2 *e* Ω *subconjuntos do* $\mathbb{R}^n$ *com medidas positivas e tais que* $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2, \Omega_2 \subset \Omega$. *Então, assumindo que* Ω *é limitado e que* $med(\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega) \neq 0$, *temos*

$$\int_{\Omega_1} |\omega|^2\, dx \leq C \int_{\Omega_2} |\nabla\omega|^2\, dx, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega),$$

em que $C > 0$.

Demonstração: Como $\omega \in H_0^1(\Omega)$, segue que $\omega = 0$ em $\partial\Omega$ e do fato que $med(\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega) > 0$ temos que $\omega\, |_{\partial\Omega_2 \cap \partial\Omega} = 0$. Por outro lado, da hipótese de $\Omega_2 \subset \Omega$, decorre que $\omega \in H^1(\Omega_2)$. Logo, pela Desigualdade de Poincaré,

$$\int_{\Omega_2} |\omega|^2\, dx \leq \int_{\Omega_2} |\nabla\omega|^2\, dx, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Como $\overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$,

$$\int_{\Omega_1} |\omega|^2\, dx \leq \int_{\Omega_2} |\omega|^2\, dx \leq \int_{\Omega_2} |\nabla\omega|^2\, dx, \;\; \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

Portanto,

$$\int_{\Omega_1} |\omega|^2\, dx \leq \int_{\Omega_2} |\nabla\omega|^2\, dx, \quad \forall \omega \in H_0^1(\Omega).$$

$\square$

Com o auxílio do Lema anterior, provaremos a desigualdade abaixo

$$(II) \qquad \int_{\Omega} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|)\, |\omega|^2\, dx \;\leq\; c \int_{\Omega} a(x)\, |\nabla\omega|^2\, dx, \;\; \forall\, \omega \in H_0^1(\Omega). \tag{3.6}$$

Como a é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e $a(x) > 0, x \in \Gamma$ temos que existe $\varepsilon_0 > 0$ e $V \subset \overline{\Omega}$ tal que $med(\partial V \cap \partial\Omega) > 0$ e $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$. De fato, para cada $x \in \Gamma$, existe $V_x = B(x, \delta_x) \cap \overline{\Omega}$, $\delta_x > 0$, tal que $a(y) > 0, \forall\, y \in V_x$. Em particular, $W_x = \overline{B(x, \delta_x/2)} \cap \overline{\Omega}$ é tal que $a(y) > 0, \forall y \in W_x$. Como W_x é um conjunto compacto temos que a admite máximo e mínimo em W_x e, portanto, existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $a(y) \geq \varepsilon_x > 0;\ \ \forall y \in W_x$. Note que

$$\Gamma \subset \bigcup_{x \in \Gamma} B(x, \delta_x/2).$$

Do fato de Γ ser compacto, temos que

$$\Gamma \subset \bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_{x_i}/2).$$

Como $\Gamma \subset \overline{\Omega}$ segue que

$$\Gamma \subset \underbrace{\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i, \delta_{x_i}/2) \cap \overline{\Omega}}_{V}.$$

Seja $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon_{x_i}\,;\, i = 1, ..., m\}$. Assim,

$$a(y) \geq \varepsilon_0, \ \ \forall\, y \in V.$$

Dessa forma, tomando $\Omega_1 := supp(\varphi), \Omega_2 := \{x \in \Omega; a(x) > \min\{\delta/4, \varepsilon_0\}\}$ e $\omega \in H_0^1(\Omega)$, decorre do Lema 3.1.2 que

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|)\, |\omega(x)|^2\, dx &= \int_{\Omega_1} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|)\, |\omega(x)|^2\, dx \\
&\leq \max_{x \in \Omega_1} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\Omega_1} |\omega(x)|^2\, dx \\
&\leq \max_{x \in \overline{\Omega}} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\Omega_1} |\omega(x)|^2\, dx \\
&\leq C_1 \max_{x \in \overline{\Omega}} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\Omega_2} |\omega(x)|^2\, dx \\
&= \frac{C_1}{a_0} \max_{x \in \overline{\Omega}} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\Omega_2} a_0\, |\omega(x)|^2\, dx \\
&\leq C_2 \max_{x \in \overline{\Omega}} (\varphi(x) + |\nabla\varphi(x)|) \int_{\Omega_2} a(x)\, |\nabla\omega(x)|^2\, dx \\
&\leq C \int_{\Omega} a(x)\, |\nabla\omega(x)|^2\, dx,
\end{aligned}$$

em que $a_0 = \min\{\delta/4, \varepsilon_0\} < a(x)$. E assim provamos o desejado.

3.2 Prova do Teorema 3.1

Ao longo de toda a prova, lidaremos com soluções regulares e, então, por densidade a estimativa (3.4) poderá ser estendida às soluções fracas.

Segue da hipótese (H.1) (iii) que

$$g(t) \leq g(0)e^{-c_1 t}, \quad \forall\, t \geq 0,$$

e consequentemente podemos conjecturar que a energia associada decai exponencialmente, ao menos na parte do domínio onde a função $a(x)$ é efetiva.

3.2.1 O Método dos Multiplicadores

Introduziremos o seguinte funcional:

$$\begin{aligned} R_1(t) \;&:=\; -\int_\Omega \varphi(x) \left\{ u'(t)[(g*u)_t(t)] \,+\, \frac{1}{2}\,(g''\Box u)(t) \,-\, \frac{1}{2}\,g'(0)\,|u(t)|^2 \,-\, \frac{1}{2}\,a(x)\,|(g*\nabla u)(t)|^2 \right. \\ &- \left. \frac{1}{2}\left(\int_0^t g''(s)ds\right)|u(t)|^2 \right\} dx. \end{aligned}$$

O seguinte lema recupera uma parte da energia.

Lema 3.2.1. *Dado $\eta > 0$, existe uma constante positiva C tal que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}R_1(t) \;&\leq\; -\; g(0)\int_\Omega \frac{\delta}{2}\,|u'(t)|^2\,dx \,+\, \eta\,(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx \\ &+\; \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,[g(t)|\nabla u(t)|^2 - (g'\Box\nabla u)(t)]\,dx \,+\, \eta\int_\Omega a(x)(g\Box\nabla u)(t)\,dx \\ &+\; \eta\int_\Omega b(x)\,(|u'(t)|^2 + |h(u'(t))|^2)\,dx, \end{aligned}$$

para qualquer solução forte do problema (3.1).

Demonstração: Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por $\varphi(x)(g*u)_t(t)$, temos

$$(u''(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))-(k_0\Delta u(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))+\int_0^t(\mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)],\varphi(x)(g*u)_t(t))\,ds$$
$$+(f(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t))+(b(.)h'(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t))=0.$$

Aplicando os Teoremas de Green e de Gauss, decorre que

$$\underbrace{(u''(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))}_{I}+\underbrace{(k_0\nabla u(t),\nabla[\varphi(x)(g*u)_t(t)])}_{II}-\underbrace{\int_0^t(a(x)g(t-s)\nabla u(s),\nabla[\varphi(x)(g*u)_t(t)])\,ds}_{III}$$
$$+(f(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t))+(b(.)h'(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t))=0. \tag{3.7}$$

- Estimativa para I

Note que

$$\frac{d}{dt}(u'(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))=(u''(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))+(u'(t),\varphi(x)(g*u)_{tt}(t)) \tag{3.8}$$

Substituindo (3.8) em I, e pela regra de Leibniz, resulta que

$$\begin{aligned}(u''(t),\varphi(x)(g*u)_t(t)) &= \frac{d}{dt}(u'(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))-(u'(t),\varphi(x)(g*u)_{tt}(t))\\ &= \frac{d}{dt}(u'(t),\varphi(x)(g*u)_t(t))-\underbrace{(u'(t),\varphi(x)(g''*u)(t))}_{I_1}\\ &- \underbrace{(u'(t),\varphi(x)g'(0)u(t))}_{I_2}-(u'(t),\varphi(x)g(0)u'(t))\end{aligned} \tag{3.9}$$

Analisando I_1 : Segue do Lema 2.1.1

$$\begin{aligned}-\int_\Omega\varphi(x)(g''*u)(t)u'(t)\,dx &= -\frac{1}{2}\int_\Omega\varphi(x)\Big[(g'''\Box u)(t)-g''(t)|u(t)|^2\\ &- \frac{d}{dt}\Big\{g''\Box u-\Big(\int_0^t g''(s)ds\Big)|u(t)|^2\Big\}\Big]\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Analisando I_2 :

$$-\int_{\Omega}\varphi(x)g'(0)u'(t)u(t)\,dx \;=\; -\frac{1}{2}\,g'(0)\int_{\Omega}\varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,|u(t)|^2\,dx \tag{3.11}$$

Assim, substituindo (3.10), (3.11) em (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}(u''(t),\varphi(x)(g*u)_t(t)) = \frac{d}{dt}(u'(t),\varphi(x)(g*u)_t(t)) - \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi(x)(g'''\Box u)(t)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi(x)g''(t)|u(t)|^2dx\\ + \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,(g''\Box u)(t)\,dx \;-\; \frac{1}{2}\int_{\Omega}\varphi(x)\,\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g''(s)ds\right)|u(t)|^2\right]\,dx\\ - \frac{1}{2}\,g'(0)\int_{\Omega}\varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,|u(t)|^2\,dx - (u'(t),\varphi(x)\,g(0)\,u'(t))\end{aligned} \tag{3.12}$$

- Estimativa para II

$$(k_0\nabla u(t),\nabla[\varphi(x)(g*u)_t(t)]) = (k_0\nabla u(t),\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)) + (k_0\nabla u(t),\varphi(x)(g*\nabla u)_t(t)) \tag{3.13}$$

- Estimativa para III

$$\begin{aligned}-\;\int_0^t(a(x)g(t-s)\nabla u(s),\nabla[\varphi(x)(g*u)_t(t)])\,ds \;=\; -\underbrace{\int_0^t g(t-s)\,(a(x)\nabla u(s),\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t))\,ds}_{III_1}\\ -\;\underbrace{\int_0^t g(t-s)\,(a(x)\nabla u(s),\varphi(x)(g*\nabla u)_t(t))\,ds}_{III_2}\end{aligned} \tag{3.14}$$

Analisando III_1 : Pelo Teorema de Fubini e de (H.4),

$$\begin{aligned}&-\int_0^t g(t-s)\int_{\Omega}a(x)\nabla u(s)\cdot\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)\,dx\,ds\\ &=\int_{\Omega}a(x)\nabla\varphi(x)\,(g*u)_t(t)\left\{\int_0^t g(t-s)\,(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds - \int_0^t g(t-s)\nabla u(t)\,ds\right\}\,dx\\ &=\int_{\Omega}a(x)\nabla\varphi(x)\,(g*u)_t(t)\left\{(g\diamond\nabla u)(t) - \int_0^t g(s)\,ds\,\nabla u(t)\right\}dx.\end{aligned} \tag{3.15}$$

Analisando III_2 : Do Teorema de Fubini e de (H.4),

$$\begin{aligned} -\int_0^t g(t-s)\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)\,\nabla u(s)\cdot(g*\nabla u)_t(t)\,dx\,ds &= -\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)(g*\nabla u)_t(t)\cdot(g*\nabla u)(t)\,dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,|(g*\nabla u)(t)|^2\,dx. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Substituindo (3.15), (3.16) em (3.14), segue que

$$\begin{aligned} &-\int_0^t (a(x)g(t-s)\nabla u(s),\nabla[\varphi(x)(g*u)_t(t)])\,ds = \int_\Omega a(x)\,(g*u)_t(t)\nabla\varphi(x)\cdot\Big\{(g\diamond\nabla u)(t) \\ &-\int_0^t g(s)\,ds\,\nabla u(t)\Big\}dx - \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)\,\frac{d}{dt}|(g*\nabla u)(t)|^2\,dx. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Portanto, substituindo (3.12), (3.13), (3.17) em (3.7), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,(u'(t),\varphi(x)(g*u)_t(t)) - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)(g'''\Box u)(t)\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)g''(t)|u(t)|^2dx \\ &+\ \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,(g''\Box u)(t)\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,\frac{d}{dt}\left[\left(\int_0^t g''(s)ds\right)|u(t)|^2\right]\,dx \\ &-\ \frac{1}{2}\,g'(0)\int_\Omega \varphi(x)\,\frac{d}{dt}\,|u(t)|^2\,dx - g(0)\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t))|^2\,dx \\ &+\ (k_0\nabla u(t),\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)) + (k_0\nabla u(t),\varphi(x)(g*\nabla u)_t(t)) \\ &+\ \int_\Omega a(x)\,(g*u)_t(t)\nabla\varphi(x)\cdot\left\{(g\diamond\nabla u)(t) - \int_0^t g(s)\,ds\,\nabla u(t)\right\}dx \\ &-\ \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,\varphi(x)\,\frac{d}{dt}|(g*\nabla u)(t)|^2\,dx + (f(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t)) + (b(.)h'(u(t)),\varphi(x)(g*u)_t(t)) = 0. \end{aligned}$$

Assim, rearranjando os termos da igualdade acima e da definição de $k(x,t)$ segue que

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\,R_1(t) = -\int_\Omega \varphi(x)\left\{g(0)\,|u'(t))|^2 + \frac{1}{2}\,(g'''\Box u)(t) - \frac{1}{2}\,g''(t)\,|u(t)|^2\right\}dx \\ &+\ \int_\Omega (k(x,t)\nabla u(t) + a(x)(g\diamond\nabla u)(t))\cdot(\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t))dx \\ &+\ \int_\Omega k_0\,\nabla u(t)\cdot\varphi(x)(g*\nabla u)_t(t)dx + \int_\Omega (f(u(t)) + b(x)h'(u(t)))\varphi(x)(g*u)_t(t)dx. \end{aligned}$$

Das hipóteses (H.1) (iii) e (iv) obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(t) \,\leq\, & -g(0)\int_\Omega \varphi(x)|u'(t)|^2dx - \underbrace{\frac{c}{2}\int_\Omega \varphi(x)(g'\Box u)(t)dx}_{IV} \\
& + \underbrace{\frac{c}{2}\int_\Omega \varphi(x)g(t)|u(t)|^2dx}_{V} + \underbrace{\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|\,|\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)|dx}_{VI} \\
& + \underbrace{\int_\Omega a(x)|g\diamond\nabla u)(t)|\,|\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)|dx}_{VII} + \underbrace{\int_\Omega k_0\,|\nabla u(t)|\,\varphi(x)|(g*\nabla u)_t(t)|dx}_{VIII} \\
& + \underbrace{\int_\Omega |f(u(t))|\,\varphi(x)\,|(g*u)_t|dx}_{IX} + \underbrace{\int_\Omega b(x)\,|h'(u(t))|\varphi(x)\,|(g*u)_t(t)|\,dx}_{X}.
\end{aligned} \tag{3.18}
$$

- Estimativa para IV

De (H.4) e de (3.6), decorre que

$$
\begin{aligned}
-\frac{c}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,(g'\Box u)(t)\,dx \;&\leq\; \frac{c}{2}\int_\Omega \varphi(x)\left(\int_0^t -g'(t-s)\,|u(t)-u(s)|^2ds\right)dx \\
&\leq\; \frac{c}{2}\int_0^t -g'(t-s)\left(\int_\Omega a(x)\,|\nabla u(t)-\nabla u(s)|^2dx\right)ds \\
&\leq\; \frac{c}{2}\int_\Omega a(x)\,(-g'\Box\nabla u)(t)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.19}
$$

- Estimativa para V

De (3.6), obtemos

$$
\frac{c}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,g(t)\,|u(t)|^2\,dx \,\leq\, \frac{c}{2}\int_\Omega a(x)\,g(t)\,|\nabla u(t)|^2dx. \tag{3.20}
$$

- Estimativa para VI

Da desigualdade de Young, para $\eta > 0$ e de (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|\,|\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)|\,dx &\leq k_0^{1/2}\,\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\int_\Omega k(x,t)^{1/2}\,|\nabla u(t)||\nabla\varphi(x)^{1/2}(g*u)_t|dx\\
&\leq \eta\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla\varphi(x)|\,|(g*u)_t(t)|^2\,dx\\
&\leq \eta\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx.
\end{aligned}\tag{3.21}$$

- Estimativa para VII

Pela desigualdade de Young, para $\eta>0$, da desigualdade de Holder, de (H.4) e de (3.6)

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega a(x)\,|(g\diamond\nabla u)(t)|\,|\nabla\varphi(x)(g*u)_t(t)|\,dx\\
\leq\;& \|a\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\|\nabla\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\int_\Omega a(x)^{1/2}|(g\diamond\nabla u)(t)||\nabla\varphi(x)|^{1/2}|(g*u)_t|dx\\
\leq\;& \eta\int_\Omega a(x)\,|(g\diamond\nabla u)(t)|^2dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla\varphi(x)|\,|(g*u)_t(t)|^2\,dx\\
\leq\;& \eta\int_\Omega a(x)\Big(\int_0^t g(t-s)^{1/2}g(t-s)^{1/2}(\nabla u(t)-\nabla u(s))\,ds\Big)^2dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla\varphi(x)|\,|(g*u)_t(t)|^2\,dx\\
\leq\;& \eta\int_\Omega a(x)\left(\int_0^t g(s)ds\right)(g\Box\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla\varphi(x)|\,|(g*u)_t|^2\,dx\\
\leq\;& \eta\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx\\
\leq\;& C\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx.
\end{aligned}\tag{3.22}$$

- Estimativa para VIII

Da desigualdade de Young, para $\eta>0$, do fato de $k(x,t)>0$ e de (3.6), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega k_0\,|\nabla u(t)|\,\varphi(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|\,dx &\leq k_0\,\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}^{1/2}\int_\Omega|\nabla u(t)|\varphi(x)^{1/2}\,|(g*\nabla u)_t|\,dx\\
&\leq \eta\int_\Omega|\nabla u(t)|^2dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega\varphi(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2dx\\
&\leq \frac{\eta}{L}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx\\
&\leq C\,\eta\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx.
\end{aligned}\tag{3.23}$$

em que $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{k_0 - \|a\|_{L^\infty(\Omega)} \displaystyle\int_0^\infty g(s)ds}$.

- Estimativa para IX

Pela desigualdade de Young, para $\eta > 0$ e de (3.6)

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u(t))|\,\varphi(x)\,|(g*u)_t|\,dx &\leq \|\varphi\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(u(t))|\,\varphi(x)^{1/2}\,|(g*u)_t|\,dx \\ &\leq \eta \int_\Omega |f(u(t))|^2\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega \varphi(x)\,|(g*u)_t(t)|^2\,dx \\ &\leq \eta \int_\Omega |f(u(t))|^2\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.24}$$

- Estimativa para X

Pela desigualdade de Young, para $\eta > 0$, e de (3.6)

$$\begin{aligned}\int_\Omega b(x)\,|h'(u(t))|\,\varphi(x)\,|(g*u)_t(t)|\,dx &\leq \|\varphi\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\,\|b\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega b(x)^{1/2}\,|h'(u(t))|\,\varphi(x)^{1/2}\,|(g*u)_t(t)|\,dx \\ &\leq \eta \int_\Omega b(x)\,|h(u'(t))|^2\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega \varphi(x)|(g*u)_t(t)|^2\,dx \\ &\leq \eta \int_\Omega b(x)\,|h(u'(t))|^2\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t(t)|^2\,dx. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Deste modo, substituindo (3.19)-(3.25) em (3.18), vem que,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}R_1(t) \leq -g(0)\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t)|^2\,dx + C\,\eta\int_\Omega (k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2 + |f(u(t))|^2)\,dx \\ &+C\,\eta\int_\Omega [a(x)(g\Box\nabla u)(t) + b(x)|h(u'(t))|^2]\,dx \;+\; \underbrace{\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g*\nabla u)_t|^2\,dx}_{XI} \\ &+\frac{c}{2}\int_\Omega a(x)\,(-g'\Box\nabla u)(t)\,dx + \frac{c}{2}\int_\Omega a(x)\,g(t)\,|\nabla u(t)|^2 dx. \end{aligned} \tag{3.26}$$

- Estimativa para XI

Mostremos a identidade $(g*u)_t = g(t)u - g'\diamond u$. Com efeito, de (H.4) e de (H.1) (iii), temos que

$$
\begin{aligned}
(g * u)_t(t) &= \frac{d}{dt}\int_0^t g(t-s)u(s)ds = \int_0^t g'(t-s)u(s)ds + g(0)u(t) \\
&= \int_0^t g'(t-s)(u(s)-u(t))ds + \int_0^t g'(t-s)u(t))ds + g(0)u(t) \\
&= -(g \diamond u)(t) + g(t)u(t) - g(0)u(t) + g(0)u(t) \\
&= g(t)u(t) - (g \diamond u)(t). \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

De (3.27), da condição de g ser não crescente, de (H.1) (iii) e da desigualdade de Holder, segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,|(g * \nabla u)_t(t)|^2\,dx &= \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)[|g(t)\nabla u(t) - (g' \diamond \nabla u)(t)|]^2 dx \\
&\leq \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\left[g^2(t)\,|\nabla u(t)|^2 + |(-g' \diamond \nabla u)(t)|^2\right]dx \\
&\leq \frac{C}{\eta}\Big[g(0)\int_\Omega a(x)g(t)\,|\nabla u(t)|^2 dx \\
&+ \int_\Omega a(x)\Big|\int_0^t (-g'(t-s))^{1/2}\,(-g'(t-s))^{1/2}\,(\nabla u(t) - \nabla u(s))\,ds\Big|^2\Big]\,dx \\
&\leq \frac{C}{\eta}g(0)\int_\Omega a(x)\left[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + \left(\int_0^t g'(s)\,ds\right)\,(-g'\Box\nabla u)(t)\right]dx \\
&\leq \frac{C}{\eta}g(0)\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_\Omega a(x)\left[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)\right]dx \\
&\leq \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\left[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)\right]dx \qquad (3.28)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo (3.28) em (3.26), resulta que,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_1(t) \leq -g(0)\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t)|^2\,dx + C\,\eta\int_\Omega (k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2 + |f(u(t))|^2)\,dx \\
&+C\,\eta\int_\Omega [a(x)\,(g\Box\nabla u)(t) + b(x)\,|h(u'(t))|^2]\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)]\,dx. \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

Por outro lado, de (H.2) (iv) e da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2\rho}(\Omega)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u(t))|^2\,dx &\leq C\left\{\int_\Omega |u(t)|^2\,dx + \int_\Omega |u(t)|^{2\rho}\,dx\right\} \leq C\,(\|u(t)\|_\Omega^2 + \|u(t)\|_{L^{2\rho}(\Omega)}^{2\rho}) \\
&\leq C\,(\|\nabla u(t)\|_\Omega^2 + \|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^{2\rho}) \\
&\leq C\,(\|\nabla u(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla u(t)\|_\Omega^{2\rho}) \\
&\leq \frac{C}{L}\left\{\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx + \left(\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx\right)^\rho\right\} \\
&\leq \frac{C}{L}\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx\left[1 + \left(\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx\right)^{\rho-1}\right] \\
&\leq \frac{C}{L}\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx\,(1 + E(t)^{\rho-1}) \\
&\leq C\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx\,(1 + E(0)^{\rho-1}), \qquad (3.30)
\end{aligned}
$$

onde $E(0) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_\Omega (|u'(0)| + k_0|\nabla u(0)|^2)\,dx$ e $\dfrac{1}{L} = \dfrac{1}{k_0 - \|a\|_{L^\infty(\Omega)}\displaystyle\int_0^\infty g(s)ds}$.

Desta forma, substituindo (3.30) em (3.29), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_1(t) \leq -g(0)\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t)|^2\,dx + C\,\eta\,(1 + E(0)^{\rho-1})\int_\Omega (k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2 dx \\
&+ C\,\eta\int_\Omega [a(x)\,(g\Box\nabla u)(t) + b(x)\,|h(u'(t))|^2]\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)]\,dx.
\end{aligned}
$$

De (3.5) e (H.6), o resultado segue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_1(t) \;&\leq\; -g(0)\int_\Omega \frac{\delta}{2}\,|u'(t)|^2\,dx + C\,\eta\,(1 + \lambda^{\rho-1})\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx + C\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx \\
&+\; C\,\eta\int_\Omega b(x)\,(|u'(t)|^2 + |h(u'(t))|^2)\,dx + \frac{C}{\eta}\int_\Omega a(x)\,[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)]\,dx.
\end{aligned}
$$

□

Vamos introduzir o seguinte funcional:

$$
R_2(t) = \int_\Omega u_t(t)\,u(t)\,dx.
$$

O próximo lema recupera uma parte complementar da energia que foi dado nos lemas anteriores.

Lema 3.2.2. *Existe uma constante positiva η tal que*

$$\frac{d}{dt}R_2(t) \;\leq\; \int_\Omega |u'(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2 dx - (\rho+1)\int_\Omega F(u(t))\,dx +$$
$$\eta\int_\Omega (a(x)(g\Box\nabla u)(t) + b(x)\,|h(u'(t))|^2)\,dx,$$

para qualquer solução forte do problema (3.1).

Demonstração: Multiplicando a equação $(3.1)_1$ por $u(t)$, obtemos:

$$(u''(t),u(t)) - (k_0\Delta u(t),u(t)) + \int_0^t (\mathrm{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)],u(t))\,ds$$
$$+\,(f(u(t)),u(t)) + (b(.)h'(u(t)),u(t)) = 0.$$

Aplicando os Teoremas de Green e de Gauss, decorre que

$$\begin{aligned}&\underbrace{(u''(t),u(t))}_{I_1} + (k_0\,\nabla u(t),\nabla u(t)) \underbrace{-\int_0^t (a(x)\,g(t-s)\nabla u(s),\nabla u(t))\,ds}_{I_2}\\ &+ (f(u(t)),u(t)) + (b(.)h'(u(t)),u(t)) = 0.\end{aligned} \tag{3.31}$$

- Estimativa para I_1

Temos que
$$\frac{d}{dt}(u'(t),u(t)) = (u''(t),u(t)) + (u'(t),u'(t)).$$

Assim

$$(u''(t),u(t)) = \frac{d}{dt}(u'(t),u(t)) - \int_\Omega |u'(t)|^2 dx. \tag{3.32}$$

- Estimativa para I_2

De (H.4), temos que

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t (a(x)\,g(t-s)\nabla u(s),\nabla u(t))\,ds = -\int_0^t \Big(\int_\Omega a(x)g(t-s)(\nabla u(s)\cdot\nabla u(t))dx\Big)ds\\
&= \int_\Omega a(x)\nabla u(t)\cdot\Big(\int_0^t g(t-s)(\nabla u(t)-\nabla u(s))ds - \int_0^t g(t-s)\nabla u(t)ds\Big)dx\\
&= \int_\Omega a(x)\nabla u(t)\cdot(g\diamond\nabla u)(t) + \int_\Omega\Big(-a(x)\int_0^t g(s)ds|\nabla u(t)|^2\Big)dx. \qquad (3.33)
\end{aligned}$$

Assim, substituindo (3.32), (3.33) em (3.31), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_\Omega u'(t)u(t)dx = \int_\Omega |u'(t)|^2dx - \int_\Omega k_0\,|\nabla u(t)|^2dx - \int_\Omega a(x)\nabla u(t)\cdot(g\diamond\nabla u)(t)\\
&-\int_\Omega\Big(-a(x)\int_0^t g(s)ds|\nabla u(t)|^2\Big)dx - (f(u(t))+b(.)h'(u(t)),u(t)) = 0.
\end{aligned}$$

Usando a definição do funcional $R_2(t)$ e do fato que $k(x,t) = k_0 - a(x)\int_0^t g(s)ds$ segue que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(t) &= \int_\Omega |u'(t)|^2dx - \int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2dx - \int_\Omega a(x)\nabla u(t)\cdot(g\diamond\nabla u)(t)\\
&- (f(u(t))+b(.)h'(u(t)),u(t)).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}R_2(t) \le \int_\Omega |u'(t)|^2\,dx - \int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx + \underbrace{\int_\Omega a(x)\,|\nabla u(t)|\cdot|(g\diamond\nabla u)(t)|dx}_{I_3} - \\
&\int_\Omega f(u(t))\,u(t)\,dx + \underbrace{\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|\,|u(t)|}_{I_4}\,dx. \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

- Estimativa para I_3

Da desigualdade de Young, para $\eta > 0$, juntamente com a desigualdade de Holder e de (H.4), segue que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega a(x)\,|(g\diamond\nabla u)(t)|\cdot|\nabla u(t)|\,dx &\leq \|a\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega a(x)^{1/2}|(g\diamond\nabla u)(t)|\cdot|\nabla u(t)|dx\\
&\leq \eta\int_\Omega a(x)\,|(g\diamond\nabla u)(t)|^2\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\\
&\leq \eta\int_\Omega a(x)\Big(\int_0^t g(t-s)^{1/2}g(t-s)^{1/2}(\nabla u(t)-\nabla u(s))ds\Big)^2\\
&+ \frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\\
&\leq \|g\|_{L^1(0,\infty)}\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\square\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega|\nabla u(t)|^2\,dx\\
&\leq \|g\|_{L^1(0,\infty)}\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\square\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\frac{1}{L}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx\\
&\leq C\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\square\nabla u)(t)\,dx+\frac{C}{\eta}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx, \qquad (3.35)
\end{aligned}
$$

onde $\dfrac{1}{L}=\dfrac{1}{k_0-\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\displaystyle\int_0^t g(s)ds}$.

- Estimativa para I_4

Da desigualdade de Young, para $\eta>0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|\,|u(t)|\,dx &\leq \|b(x)\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega b(x)^{1/2}|h(u'(t))|\,|u(t)|dx\\
&\leq \eta\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|^2\,dx\,+\,\frac{C}{\eta}\int_\Omega|u(t)|^2\,dx\\
&\leq \eta\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|^2\,dx\,+\,\frac{C}{\eta}\frac{1}{L}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx\\
&\leq \eta\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|^2\,dx\,+\,\frac{C}{\eta}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx, \quad (3.36)
\end{aligned}
$$

em que $\dfrac{1}{L}=\dfrac{1}{k_0-\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\displaystyle\int_0^t g(s)ds}$.

Portanto, substituindo (3.35), (3.36) em (3.34) para $\eta>0$, temos que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R_2(t) &\leq \int_\Omega|u'(t)|^2\,dx-\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx+C\,\eta\int_\Omega a(x)\,(g\square\nabla u)(t)\,dx\\
&- \int_\Omega f(u(t))\,u(t)\,dx+\eta\int_\Omega b(x)|h(u'(t))|^2\,dx\,+\,\frac{C}{\eta}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

De (H.2) (iii) e tomando $\eta > 0$ suficientemente grande, temos o desejado

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R_2(t) &\leq \int_\Omega |u'(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2 dx - (\rho+1)\int_\Omega F(u(t))\,dx \\ &+ C\,\eta\int_\Omega (a(x)(g\Box\nabla u)(t) + b(x)\,|h(u'(t))|^2)\,dx.\end{aligned}$$

□

Consideremos o seguinte funcional:

$$R(t) := R_1(t) + \frac{\delta g(0)}{4}\,R_2(t).$$

O seguinte lema resume os resultados obtidos nos lemas anteriores.

Lema 3.2.3. *Existem constantes positivas k_1 e C, tais que*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R(t) &\leq -k_1\,E(t) + C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)\,[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 - (g'\Box\nabla u)(t) + (g\Box\nabla u)(t)]\,dx \\ &+ C\int_\Omega b(x)\,(|u'(t)|^2 + |h(u'(t))|^2)\,dx,\end{aligned}$$

para qualquer solução forte do problema (3.1).

Demonstração: Fixemos $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\delta g(0)}{4} + C\epsilon_0\,(1+\lambda^{\rho-1}) = -\frac{1}{4}\,\frac{\delta g(0)}{4}. \tag{3.37}$$

Tomando $\eta = \epsilon_0$ no Lema 3.2.1 e combinando com o Lema 3.2.2, temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R(t) &= \frac{d}{dt}\left(R_1(t) + \frac{\delta g(0)}{4}R_2(t)\right) \leq -g(0)\int_\Omega \frac{\delta}{2}\,|u'(t)|^2\,dx + C\,\epsilon_0\,(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx \\ &+ C\,\epsilon_0\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx + C\epsilon_0\int_\Omega b(x)\,(|u'(t)|^2 + |h(u'(t))|^2)\,dx \\ &+ \frac{C}{\epsilon_0}\int_\Omega a(x)\,[g(t)\,|\nabla u(t)|^2 + (-g'\Box\nabla u)(t)]\,dx + \frac{\delta g(0)}{4}\Big\{\int_\Omega |u'(t)|^2\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2 dx \\ &- (\rho+1)\int_\Omega F(u(t))dx + C\epsilon_0\int_\Omega (a(x)(g\Box\nabla u)(t) + b(x)\,|h(u'(t))|^2)\,dx\Big\}.\end{aligned}$$

Assim, reordenando os termos da expressão acima e utilizando (3.37) segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) \ \leq\ & -\frac{\delta g(0)}{4}\int_\Omega \left[|u'(t)|^2+\frac{1}{4}\,k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2+(\rho+1)\,F(u(t))\right]\,dx \\
+\ & \underbrace{C\epsilon_0\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx+C\epsilon_0\frac{\delta g(0)}{4}\int_\Omega b(x)\,|h(u'(t))|^2\,dx}_{I} \qquad (3.38)\\
+\ & \underbrace{\frac{C}{\epsilon_0}\int_\Omega a(x)[g(t)\,|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)]\,dx+\left(C\epsilon_0+C\epsilon_0\frac{\delta g(0)}{4}\right)\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx}_{II}\,.
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I

$$
\begin{aligned}
& C\ \epsilon_0\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx+C\ \epsilon_0\,\frac{\delta g(0)}{4}\int_\Omega b(x)\,|h(u'(t))|^2\,dx \\
\leq\ & C\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx; \qquad (3.39)
\end{aligned}
$$

tal que $C=\max\left\{C\epsilon_0, C\epsilon_0\,\dfrac{\delta g(0)}{4}\right\}$.

- Estimativa para II

De (3.37)

$$
\begin{aligned}
& \frac{C}{\epsilon_0}\int_\Omega a(x)[g(t)\,|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)]\,dx+\left(C\,\epsilon_0+C\,\epsilon_0\,\frac{\delta g(0)}{4}\right)\int_\Omega a(x)\,(g\Box\nabla u)(t)\,dx \\
\leq\ & \left(\frac{C}{\epsilon_0}+C\,\epsilon_0+C\,\epsilon_0\,\frac{\delta g(0)}{4}\right)\int_\Omega a(x)[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)+(g\Box\nabla u)(t)]\,dx \\
\leq\ & C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)+(g\Box\nabla u)(t)]\,dx. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Assim, substituindo (3.39), (3.40) em (3.38), temos que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}R(t)\ \leq\ -\frac{\delta g(0)}{4}\int_\Omega \left[|u'(t)|^2+\frac{1}{4}\,k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2+(\rho+1)\,F(u(t))\right]\,dx\,+ \\
& C\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx+C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)+(g\Box\nabla u)(t)]\,dx.
\end{aligned}
$$

Ou melhor,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) \;&\leq\; -\frac{\delta g(0)}{4}\int_\Omega\left[\frac{1}{4}|u'(t)|^2+\frac{1}{4}\,k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2+\frac{1}{4}a(x)(g\Box\nabla u)(t)+\frac{1}{2}F(u(t))\right]dx\\
+ \;& C\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx+C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)\Big[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)\\
+ \;& \left(1+\frac{\delta g(0)/16}{C(1+\lambda^{\rho-1})}\right)(g\Box\nabla u)(t)\Big]\,dx.
\end{aligned}
$$

Logo, da equação acima e de (3.2), o resultado segue

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) \;&\leq\; -\,k_1\,E(t)+C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)+(g\Box\nabla u)(t)]\,dx\\
+ \;& C\int_\Omega b(x)(|u'(t)|^2+|h(u'(t))|^2)\,dx,
\end{aligned}
$$

onde $k_1=\dfrac{\delta g(0)}{8}$. □

3.2.2 Conclusão do Teorema 3.1

Demonstração:(Demonstração do Teorema 3.1)

Usando as condições (H.1) (iii) e (H.3) (iv) no Lema 3.2.3, decorre que,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}R(t) \;\leq\; & -\; k_1\,E(t)+C(1+\lambda^{\rho-1})\int_\Omega a(x)[g(t)|\nabla u(t)|^2-(g'\Box\nabla u)(t)]\,dx\\
& +\; C\int_\Omega b(x)\,|h(u'(t))|\,|u'(t)|\,dx. \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

Seja N uma constante positiva, e introduziremos o seguinte Funcional de Lyapunov:

$$F(t):=N(1+\lambda^{\rho-1})\,E(t)+R(t).$$

Para N suficientemente grande, temos,

$$\frac{N}{2}\,(1+\lambda^{\rho-1})\,E(t)\;\leq\;F(t)\;\leq 2\,N\,(1+\lambda^{\rho-1})\,E(t),\quad \forall\, t\geq 0. \qquad (3.42)$$

De fato, mostraremos primeiro que

$$|R(t)| \leq C\,E(t).$$

Sabemos que $R(t) = R_1(t) + C\,R_2(t)$. Assim,

1. $|R_2(t)| \leq C\,E(t)$

   Das desigualdades de Poincaré, Holder e Young, obtemos

$$\begin{aligned}
|R_2(t)| &\leq \int_\Omega |u'(t)|\,|u(t)|\,dx \\
&\leq C\left(\int_\Omega |u'(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2\,dx\right) \\
&\leq \frac{C}{L}\,\frac{1}{2}\left(\int_\Omega |u'(t)|^2\,dx + \int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx\right) \\
&\leq C\,E(t).
\end{aligned}$$

2. $|R_1(t)| \leq C\,E(t)$

   Temos que,

$$|R_1(t)| \leq \underbrace{\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t)|\,|(g*u)_t\,dx}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,|(g''\Box u)(t)|\,dx}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{2}\,|g'(0)|\int_\Omega \varphi(x)\,|u(t)|^2\,dx}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,a(x)\,|(g*\nabla u)(t)|^2\,dx}_{I_4} + \underbrace{\int_\Omega \varphi(x)\,|u(t)|^2\left(\int_0^t g''(s)\,ds\right)\,dx}_{I_5}$$

Deste modo, estimaremos cada termo.

- Estimativa para I_1

De (3.6), de (H.1) (iii) e de (H.4)

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(x)\,|u'(t)|\,|(g*u)_t\,dx &\le \|\varphi\|^{1/2}_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \varphi(x)^{1/2}|u'(t)||(g*u)_t|dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2dx + \frac{C}{2}\int_\Omega \varphi(x)|(g*u)_t|^2dx \\
&\le \frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2dx + \frac{C}{2}\int_\Omega \varphi(x)\left(\int_0^t g'(t-s)\,u(s)\,ds + g(0)\,u(t)\right)^2 dx \\
&\le C\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u'(t)|^2dx + g(0)^2|u(t)|^2dx + \varphi(x)\Big(\int_0^t g(t-s)u(s)ds\Big)^2\right]dx \\
&\le \frac{C}{L}\frac{1}{2}\int_\Omega \left[|u'(t)|^2dx + k(x,t)|\nabla u(t)|^2dx + a(x)\left(\int_0^t g(t-s)\nabla u(s)ds\right)^2 dx\right] \\
&\le C\,\frac{1}{2}\int_\Omega |u'(t)|^2dx + \int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|^2dx + \int_\Omega a(x)(g\Box\nabla u)(t)dx \\
&\le C\,E(t). \qquad (3.43)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I_2

De (H.1) (iv) e de (3.6),

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,|(g''\Box u)(t)|\,dx &\le C\,\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,|(g\Box u)(t)|\,dx \\
&\le C\,\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|(g\Box\nabla u)(t)|\,dx \\
&\le C\,E(t). \qquad (3.44)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I_3

Da desigualdade de Poincaré

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\,|g'(0)|\int_\Omega \varphi(x)\,|u(t)|^2\,dx &\le \frac{1}{2}|g'(0)|\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega |u(t)|^2\,dx \\
&\le \frac{1}{2}\frac{C}{L}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx \\
&\le C\,\frac{1}{2}\int_\Omega k(x,t)\,|\nabla u(t)|^2\,dx \\
&\le C\,E(t). \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

- Estimativa para I_4

Da desigualdade de Holder e de (H.4)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_\Omega \varphi(x)\,a(x)\,|(g*\nabla u)(t)|^2\,dx \leq \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\Big(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(s)|ds\Big)^2dx\\
\leq\ & \frac{C}{2}\int_\Omega a(x)\Big(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|ds-\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)|ds\Big)^2dx\\
\leq\ & \frac{C}{2}\int_\Omega a(x)\Big\{\Big(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)-\nabla u(s)|ds\Big)^2+\Big(\int_0^t g(t-s)|\nabla u(t)|ds\Big)^2\Big\}dx\\
\leq\ & \frac{C}{2}\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_\Omega a(x)(g\Box\nabla u)(t)dx+\|g\|^2_{L^1(0,\infty)}\,\|a\|_{L^\infty(\Omega)}\frac{1}{L}\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|dx\\
\leq\ & \frac{C}{2}\int_\Omega\Big[a(x)(g\Box\nabla u)(t)+k(x,t)|\nabla u(t)|\Big]dx\\
\leq\ & C\,E(t).
\end{aligned}\tag{3.46}$$

- Estimativa para I_5

De (H.1) (iii) e da desigualdade de Poincaré,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi(x)\,|u(t)|^2\left(\int_0^t g''(s)\,ds\right)dx &\leq C\int_\Omega\varphi(x)\Big(\int_0^t g(s)ds\Big)|u(t)|^2dx\\
&\leq \frac{1}{2}\frac{C}{L}\|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)}\,\|g\|_{L^1(0,\infty)}\int_\Omega k(x,t)|u(t)|dx\\
&\leq C\,\frac{1}{2}\int_\Omega k(x,t)|\nabla u(t)|dx\\
&\leq C\,E(t).
\end{aligned}\tag{3.47}$$

Logo, de (3.43)-(3.47), concluímos que

$$|R_1(t)|\ \leq\ C\,E(t),$$

e consequentemente de 1. e 2. provamos que

$$|R(t)|\ \leq\ C\,E(t).$$

Disso, temos que

$$|F(t)| \leq N(1+\lambda^{\rho-1})E(t) + |R(t)| \leq [N(1+\lambda^{\rho-1}) + C]E(t),$$

ou seja

$$[N(1+\lambda^{\rho-1}) - C]E(t) \leq F(t) \leq [N(1+\lambda^{\rho-1}) + C]E(t).$$

Escolhendo N suficientemente grande, temos que

$$F(t) \leq 2\,N\,(1+\lambda^{\rho-1})E(t)$$

e

$$F(t) \geq \frac{N}{2}\,(1+\lambda^{\rho-1}),$$

e por conseguinte

$$\frac{N}{2}\,(1+\lambda^{\rho-1})\,E(t) \leq F(t) \leq 2\,N\,(1+\lambda^{\rho-1})\,E(t), \quad \forall\, t \geq 0.$$

Do lema (3.1.1), da desigualdade (3.41) e tomando N suficientemente grande, obtemos

$$\frac{d}{dt}\,F(t) = \frac{d}{dt}N(1+\lambda^{\rho-1})E(t) + \frac{d}{dt}R(t) \leq -\,k_1\,E(t),$$

donde segue em vista da desigualdade (3.42), que

$$\frac{d}{dt}\,F(t) \leq -\frac{k_1}{2N(1+\lambda^{\rho-1})}F(t).$$

Esta última desigualdade implica que

$$F(t) \leq F(0)\,e^{-\frac{k_1 t}{2N(1+\lambda^{\rho-1})}},$$

e em vista da desigualdade (3.42), concluímos que

$$E(t) \;\leq\; 4\,E(0)\,e^{-\frac{k_1 t}{2N(1+\lambda^{\rho-1})}}.$$

Com isto, a prova do Teorema 3.1 está completa. $\square$

Bibliografia

[1] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1984.

[2] BRÉZIS, H. **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[3] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[4] CAVALCANTI, M. M.; CAVALCANTI, V. N. D. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: DMA/UEM, 2007.

[5] CAVALCANTI, M. M.; OQUENDO, H.P. **Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation**. SIAM J. Control Optim., v. 42, pp. 1310-1324, 2003.

[6] BARDOS, C.; LEBEAU, G.; RAUCH, J. **Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary**. SIAM J. Control Optim., v.30, pp. 1024-1065, 1992.

[7] RIVERA, J. E. M.; SOBRINHO, J. B. **Existence and uniform rates of decay for contact problems in viscoelasticity**. APPl. ANAL., v.67, pp. 175-199, 1997.

[8] RIVERA, J. E. M.; SALVATIERRA, A. P. **Asymptotic behaviour of the energy in partially viscoelastic materials**. QUART. APPL. MATH., v.59, pp. 557-578, 2001.

[9] NAKAO, M. **A difference inequality and its applications to nonlinear evolution equations**. J. MATH., v. 30, pp. 747-762, 1978.

[10] ZUAZUA, E. **Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems**. ASYMPTOT. ANAL., v.1, pp. 161-185, 1988.

[11] ZUAZUA, E. **Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping**. COMM. PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS., v. 15, pp. 205-235, 1990.

[12] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Mac Graw-Hill, 1955.

[13] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. V. 2, New York: Springer-Verlang Berlin Heidelberg, 1990.

[14] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[15] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**. Tome 1, Masson, 1988.

[16] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[17] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E. A. **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.

[18] MEDEIROS, L. A.; MIRANDA, M. M. **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[19] MIRANDA, M. M. **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[20] RIVERA, J. E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Petrópolis - RJ: LNCC, 1999.

[21] RAVIART, P. A.; THOMAS, J. M. **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[22] SHOWALTER, R. **Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations**. AMS, Providence, 1997.

[23] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. V. 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.