

Conteúdo

Introdução	1
1 Preliminares	3
1.1 Sistemas Controláveis	3
1.2 Semigrupos Associados a Sistemas de Controle	4
1.3 Ações de Grupos	8
2 Subgrupos Transitivos de $GL(2, \mathbb{R})$	11
2.1 Subálgebras Transitivas de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$	13
2.2 Unicidade das Subálgebras Transitivas de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$	15
3 Controlabilidade de Sistemas Lineares	25
3.1 Teorema de Kalman	26
4 Controlabilidade de Sistemas Bilineares Bidimensionais	33
4.1 Semigrupos em $SL(2, \mathbb{R})$	36
4.2 Semigrupos em $GL^+(2, \mathbb{R})$	43
4.3 Controlabilidade no Caso $SL(2, \mathbb{R})$	44
4.4 Controlabilidade no Caso $GL^+(2, \mathbb{R})$	57
4.5 Controlabilidade no Caso $SO(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^+I$	64
4.6 Conclusão	66
Bibliografia	68

CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS BILINEARES BIDIMENSIONAIS

Carlos Alexandre Ribeiro Martins

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio
Co-Orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana

Maringá - Pr
2006

CONTROLABILIDADE DE SISTEMAS BILINEARES DE DIMENSÃO DOIS

por

Carlos Alexandre Ribeiro Martins

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-Pr, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio -
UEM (Orientador)

Prof. Dr. Alexandre José Santana -
UEM (Co-Orientador)

Prof. A definir

Maringá, de Fevereiro de 2006

DEDICO

À minha mãe **Ieda Maria Ribeiro Martins**,
ao meu pai **Carlos Claudinei Martins Biazi**
e ao meu irmão **Erasmó Cesar Ribeiro Martins**.

Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer à Deus.

Aos professores Dr. Osvaldo Germano do Rocio e Dr. Alexandre José Santana, pela orientação, compreensão e apoio constante para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica e humana.

À secretaria da Pós-Graduação, Lúcia, pela atenção e paciência.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

À todos os amigos que tive nestes anos, em especial: André, Emerson, Franciele, Gilson, Kleber, Luciano, Marieli e Waldir. À minha querida parceira Patrícia por sempre me motivar.

E finalmente, gostaria agradecer de maneira especial à minha mãe, pelos conselhos, exemplo de vida, sabedoria, por sempre estar disposta a ajudar e que durante minha vida me ensinou a ser uma pessoa boa e honesta.

A todos vocês, meu sincero **muito obrigado**.

Aqueles que mais se arriscam, saboreiam a mais doce recompensa.

Anônimo

Resumo

O principal objetivo desta dissertação é dar condições necessárias e suficientes para que um sistema bilinear de dimensão dois seja controlável. O método usado é a teoria de Lie. Os principais tópicos abordados no trabalho são:

1. Introduzir da linguagem básica necessária para o entendimento da teoria;
2. Encontrar os subgrupos conexos de $GL(2, \mathbb{R})$, os quais são transitivos em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$;
3. Estudo da controlabilidade do sistema linear;
4. Análise da controlabilidade do sistema bilinear de dimensão dois.

Introdução

Mesmo considerando os recentes avanços na teoria de controle, ainda são poucos os resultados que, de uma maneira simples, garantem a controlabilidade de um sistema de equações diferenciais ordinárias. Nesta direção, o principal objetivo deste trabalho, é apresentar condições necessárias e suficientes para a controlabilidade do sistema bilinear

$$\dot{x} = Ax + uBx \tag{1}$$

com controle irrestrito $u \in \mathbb{R}$, sendo A e B matrizes reais 2×2 .

Para sistemas lineares, um resultado simples e elegante, conhecido como critério de Kalman, estabelece condições necessárias e suficientes para a controlabilidade. Este tópico tratamos no Capítulo 3.

Para matrizes reais $n \times n$, conhecemos somente soluções parciais para o problema da controlabilidade do sistema bilinear (1), sendo as condições estabelecidas por Jurdjevic e Kupka em [7], uma das mais significantes e conhecidas até o presente momento.

Trabalhando no contexto mais geral da teoria de semigrupos, particularmente naquela pertencente a grupos de Lie semi-simples, San Martin e seus colaboradores, sistematicamente utilizam da teoria de conjuntos controláveis em espaços homogêneos para obter resultados relacionados com a controlabilidade de sistemas de campos vetoriais invariantes à direita em grupos de Lie.

A principal referência deste trabalho é [1]. Nesse artigo, San Martin, Barros, Ribeiro e Rocio desenvolveram os resultados sobre controlabilidade do artigo [14], no caso particular do grupo de Lie $SL(2, \mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2 com determinante igual a 1. Isto foi feito sem o uso explícito da teoria avançada de grupos e álgebras de Lie semi-simples, o que permite que este trabalho seja praticamente auto contido.

A principal técnica que utilizamos neste trabalho, está relacionada com a teoria de grupos e álgebras de Lie, no sentido que passamos a expor: Associado ao sistema bilinear (1), temos o conjunto de campos vetoriais $\Sigma = \{A, \pm B\}$, o qual gera como álgebra de Lie, a subálgebra $\mathfrak{Lie}\Sigma$ da álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Associado a Σ também

temos o semigrupo

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k}, \text{ tal que } t_i \geq 0, X_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$$

do subgrupo de Lie

$$G_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k}, \text{ tal que } t_i \in \mathbb{R}, X_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$$

do grupo de Lie $\text{GL}(2, \mathbb{R})$.

A seguir, mostramos que estudar a controlabilidade do sistema (1) é equivalente a estudar a transitividade do semigrupo S_Σ na variedade $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, no sentido em que para todos $x, y \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, existe $g \in S_\Sigma$ tal que $g(x) = y$. Obviamente uma condição necessária para a transitividade do semigrupo S_Σ é a transitividade do subgrupo G_Σ . Nesta direção, o Capítulo 2 trata da classificação dos subgrupos de Lie de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$, cuja ação natural em $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ é transitiva. O principal resultado do capítulo é o Teorema 2.14, cujo resultado deduzimos que os subgrupos conexos transitivos de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ são: o grupo $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$ das matrizes reais 2×2 com determinante positivo, o grupo $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ das matrizes com determinante igual a um e o grupo $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^+ I$, o qual é isomorfo ao grupo \mathbb{C}^* dos números complexos não-nulos.

No Capítulo 1, desenvolvemos aspectos gerais estritamente necessários para o entendimento do restante do trabalho. De [8], sabemos que o semigrupo S_Σ tem interior não-vazio na topologia intrínseca de G_Σ . Assim do Teorema 1.4, deduzimos uma condição necessária para a controlabilidade do sistema (1) é que a subálgebra de Lie $\mathfrak{Lie}\Sigma$ coincida com a álgebra de Lie de um dos grupos transitivos acima citados.

No Capítulo 4, antes de analisarmos o problema da controlabilidade, tratamos do desenvolvimento de um critério efetivo e aplicável ao problema considerado. Este critério, apresentado no Teorema 4.10, é um caso particular do Teorema 6.2 de [15] e estabelece que um semigrupo de interior não-vazio $S \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$ coincide com $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, a ação induzida por S no espaço projetivo unidimensional $\mathbb{R}P^1$ não deixa nenhum subconjunto próprio de $\mathbb{R}P^1$, com interior não-vazio, invariante.

Faremos a análise das trajetórias dos campos vetoriais A e $\pm B$ em várias etapas. Primeiro analisamos o caso em que tanto A como B possuem traço zero e mostramos, conforme Teorema 4.20, que neste caso o sistema (1) é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < 0$. Este é o principal resultado deste trabalho, pois a análise dos outros casos sempre o tem como parâmetro. Para análise do caso em que A e B geram $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, usamos a decomposição $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ para recairmos no caso anterior. A análise do caso $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^+ I$ faremos na seção 4.5, por fim, apresentamos um resumo dos resultados obtidos na seção 4.6.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, definimos a linguagem usada no trabalho e apresentamos os resultados necessários para a realização do mesmo. Usamos como bibliografia básica, os textos [2], [3], [4], [11], [13] e [18].

1.1 Sistemas Controláveis

Sejam X_1, X_2, \dots, X_k campos vetoriais de classe C^∞ sobre uma variedade conexa M e seja Ω uma família de funções de \mathbb{R} em \mathbb{R}^k dada por $u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t))$, onde cada $u \in \Omega$ é uma função parcialmente constante. Os elementos de Ω chamamos de funções de controle.

Fixada uma função de controle $u \in \Omega$, considere a equação diferencial

$$\frac{d}{dt}x = (u_1(t)X_1 + u_2(t)X_2 + \dots + u_k(t)X_k)x \quad (1.1)$$

na qual $x \in M$. Ao variarmos $u \in \Omega$ obtemos um sistema de equações diferenciais.

Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos que $u_i(t)$ é um número real e o lado direito de (1.1) fornece um campo de vetores em M . Uma solução de (1.1) é uma curva $\gamma_x : \mathbb{R} \rightarrow M$, C^∞ por partes tal que $\gamma_x(0) = x$ e seu vetor tangente $\gamma_x'(t)$ coincide com o lado direito de (1.1), para cada elemento na imagem de $\gamma_x(t)$ em M . Dessa forma, as soluções de (1.1), ou trajetórias do sistema de equações ordinárias, passam a ser concatenações de trajetórias. Observe que a curva depende de $x \in M$, por isso utilizamos o subíndice x .

Definição 1.1 Dizemos que o sistema (1.1) é controlável com respeito à família de funções de controle Ω se para quaisquer $x, y \in M$, existe uma função $u(t) \in \Omega$ e $T > 0$, tal que a solução $\gamma_x(t)$ de (1.1) satisfaz $\gamma_x(0) = x$ e $\gamma_x(T) = y$.

Observe que a solução $\gamma_x(t)$ depende da função $u(t)$, ou seja, é a solução de alguma equação do sistema de equações diferenciáveis. A definição dada acima justifica a exigência de M ser uma variedade conexa. Daqui por diante, sempre que referirmos a uma variedade, consideramos a mesma com esta propriedade.

1.2 Semigrupos Associados a Sistemas de Controle

Sejam Σ um subconjunto qualquer de campos vetoriais sobre a variedade M e $\mathfrak{X}(M)$ o espaço vetorial de todos os campos vetoriais em M .

Denotamos por $\mathfrak{Lie}\Sigma$ o menor subespaço vetorial de $\mathfrak{X}(M)$ que contém Σ e sucessivos colchetes de elementos em Σ .

Para cada $x \in M$, definimos $\mathfrak{Lie}\Sigma(x)$ como sendo o subespaço vetorial de $T_x M$ dado por $\mathfrak{Lie}\Sigma(x) = \{X(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{Lie}\Sigma\}$. Temos que Σ induz em M o semigrupo dado por

$$S_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_m}^m, \text{ tal que } t_i \geq 0, X^i \in \Sigma \text{ e } m \in \mathbb{N}\}.$$

Temos também associado a Σ o subgrupo

$$G_\Sigma = \{X_{t_1}^1 \circ X_{t_2}^2 \circ \cdots \circ X_{t_m}^m, \text{ tal que } t_i \in \mathbb{R}, X^i \in \Sigma \text{ e } m \in \mathbb{N}\}.$$

onde X_{t_k} denota o fluxo determinado pelo campo X .

Nem sempre é possível compor X_{t_r} com X_{t_s} se os campos não forem completos. Nas definições de S_Σ e G_Σ , consideramos somente as composições possíveis. Quando trabalhamos com campos invariantes à direita em grupos de Lie, esse problema não existe, pois estes campos são completos (conforme [12]).

Definição 1.2 Para cada $x \in M$, definimos o conjunto $G_\Sigma(x) = \{g(x), \text{ tal que } g \in G_\Sigma\}$ como a órbita em x induzida por Σ . O conjunto $S_\Sigma(x) = \{g(x), \text{ tal que } g \in S_\Sigma\}$ definimos como a órbita positiva em x induzida por Σ .

Na definição anterior consideramos somente os elementos g de G_Σ e S_Σ tais que x pertence ao domínio de g .

Observação 1.3 *Se $g \in S_\Sigma$ e x pertence ao domínio de g , então $g(x)$ é o ponto final de uma sequência de trajetórias concatenadas de elementos de Σ , que se iniciam em x e são percorridas em tempo positivo apenas. Portanto, o conjunto $S_\Sigma(x)$, coincide com o conjunto dos pontos atingíveis a partir de x por concatenações de trajetórias dos campos de Σ , com a restrição que consideramos apenas as partes positivas das trajetórias.*

De [8], sabemos que o semigrupo S_Σ tem interior não-vazio na topologia intrínseca de G_Σ . Usamos o próximo resultado inúmeras vezes em todo nosso trabalho. O mesmo, fornece uma condição segundo a qual o interior do semigrupo S_Σ é não-vazio em G_Σ . Denotamos interior por int .

Teorema 1.4 *Se $\mathfrak{L}\mathfrak{i}\mathfrak{e}\Sigma(x) = T_xM$ para cada $x \in M$, então para cada aberto $A \subseteq M$ contendo x temos que*

$$\text{int}(S_\Sigma(x)) \cap A \neq \emptyset.$$

Demonstração: Faremos a demonstração por indução sobre $\dim M = n$.

Lembre-mos que $\dim M = \dim T_xM$, para qualquer x em M . Para esta demonstração, fixamos um aberto qualquer contendo x que denotamos por A , $A \subseteq M$. Mostraremos que existem em $S_\Sigma(x)$, arbitrariamente próximos de x , subvariedades de M cujas dimensões são $1, 2, \dots, n$ contidas em $S_\Sigma(x) \cap A$.

Se $n = 0$, não há o que fazer.

Se $n > 0$, temos que existe pelo menos um campo X de Σ tal que $X(x) \neq 0$, pois caso contrário para qualquer X em Σ segue que $X(x) = 0$ e assim $[X_1, X_2](x) = 0$, $[X_1, [X_2, X_3]](x) = 0$, etc. Assim, $\mathfrak{L}\mathfrak{i}\mathfrak{e}\Sigma(x) = 0$, absurdo, pois estamos supondo $n > 0$ que é $\dim T_xM$.

Seja $X \in \Sigma$ um campo vetorial tal que $X(x) \neq 0$ e considere a curva $f_1(t) = X_t(x)$ em M , que é uma subvariedade de dimensão 1. O conjunto $\{X_t(x) : t \geq 0\}$ está contido em $S_\Sigma(x)$, pois para $t \geq 0$ temos que $X_t \in S_\Sigma$. Como existe $\epsilon_1 > 0$ tal que o conjunto não-vazio $M_1 = \{X_t(x) : t \in I_1 = (0, \epsilon_1)\}$ está contido em A , temos que $M_1 \subset (S_\Sigma(x) \cap A)$.

Desta forma, se $n = 1$ temos o resultado.

Se $n > 1$, existe algum Y em Σ tal que o campo Y não é tangente a M_1 , isto é, para qualquer $\epsilon > 0$, existe Y em Σ tal que para algum $t_0 \in (0, \epsilon)$, o conjunto $\{Y(X_{t_0}(x), X(X_{t_0}(x)))\}$ é linearmente independente.

De fato, suponhamos por absurdo que tal Y não exista, ou seja, existe $\epsilon > 0$, tal que para qualquer $Y \in \Sigma$ o conjunto $\{Y(X_t(x)), X(X_t(x))\}$ é linearmente dependente, para qualquer $t \in (0, \epsilon)$. Se isso ocorre, então todo Y em Σ é tangente a subvariedade M_1 , logo qualquer colchete entre elementos de Σ também é tangente a subvariedade M_1 , conseqüentemente $\dim \mathfrak{L}\mathfrak{ie}\Sigma(x) = 1$, absurdo, já que supomos $n > 1$.

Seja $Y \in \Sigma$ um campo tal que $\{Y(X_{t_0}(x)), X(X_{t_0}(x))\}$ é linearmente independente, por continuidade supomos que o conjunto $\{Y(X_t(x)), X(X_t(x))\}$ é linearmente independente para t suficientemente pequeno. Considere a aplicação

$$f_2 : I_2 \rightarrow M$$

$$(s, t) \mapsto Y_s \circ X_t(x).$$

onde I_2 é uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 .

Provaremos que f_2 é uma imersão local no ponto $(0, t)$. Lembrando que, se X é um campo vetorial então $\frac{d}{dt}X_t(x) = X(X_t(x))$, assim temos as seguintes derivadas parciais

$$\frac{\partial}{\partial s} f_2(s, t) = Y(Y_s \circ X_t(x)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} f_2(s, t) = (dY_s)_{X_t(x)} X(X_t(x)).$$

No ponto $(0, t)$, temos que os seguintes campos são linearmente independentes para t suficientemente pequeno.

$$\frac{\partial}{\partial s} f_2(0, t) = Y(X_t(x)) \quad \text{e} \quad \frac{\partial}{\partial t} f_2(0, t) = X(X_t(x))$$

Assim, $(df_2)_{(0,t)}$ é injetora e portanto, f_2 é imersão local.

Seja V_0 uma vizinhança de $(0, t)$, temos que $M'_2 = \{Y_s \circ X_t(x) : (s, t) \in V_0\}$ é uma subvariedade bidimensional contida em $S_\Sigma(x)$. Como consideramos somente tempos positivos, em $(0, t)$ temos que $t \geq 0$. Como V_0 é vizinhança de $(0, t)$, considerando $V_{0s} = \{(s, t) \in V_0 : s \geq 0\}$, temos que V_{0r} está contido em V_0 , portanto o conjunto $M_2 = \{Y_s \circ X_t(x) : (s, t) \in V_{0s}\}$ está contido em M'_2 e portanto em $S_\Sigma(x)$, e mais, M_2 está contido em A . Portanto $M_2 \subset (S_\Sigma(x) \cap A)$.

Dessa forma, se $n = 2$, o teorema está demonstrado.

Se $n > 2$, sejam X, Y os campos vetoriais de Σ onde o conjunto $\{Y(X_t(x)), X(X_t(x))\}$ é linearmente independente, se t for suficientemente pequeno. Considere um campo Z em Σ e a aplicação

$$f_3 : I_3 \rightarrow M$$

$$(r, s, t) \mapsto Z_r o Y_s o X_t(x)$$

em que I_3 é uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^3 . Observe que $f_3(r, s, t) \in S_\Sigma(x)$, pois os campos $Z_r, Y_s, X_t \in S_\Sigma$, assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} f_3(r, s, t) &= Z(Z_r o Y_s o X_t(x)) \\ \frac{\partial}{\partial s} f_3(r, s, t) &= (dZ_r)_{Y_s o X_t(x)} Y(Y_s o X_t(x)) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_3(r, s, t) &= d(Z_r o Y_s)_{X_t(x)} X(X_t(x)).\end{aligned}$$

No ponto $(0, s, t)$, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r} f_3(0, s, t) &= Z(Y_s o X_t(x)) \\ \frac{\partial}{\partial s} f_3(0, s, t) &= Y(Y_s o X_t(x)) = \frac{\partial}{\partial s} f_2(s, t) \\ \frac{\partial}{\partial t} f_3(0, s, t) &= d(Y_s)_{X_t(x)} X(X_t(x)) = \frac{\partial}{\partial t} f_2(s, t).\end{aligned}$$

Por continuidade, temos que em V_{0s} o conjunto $\{\frac{\partial}{\partial s} f_2(s, t), \frac{\partial}{\partial t} f_2(s, t)\}$ é linearmente independente, para s e t , suficientemente pequenos. Como estamos supondo $n > 2$, de maneira análoga aos casos anteriores, existe um campo Z em Σ tal que $Z(Y_s o X_t(x))$ seja linearmente independente com $\{\frac{\partial}{\partial s} f_2(s, t), \frac{\partial}{\partial t} f_2(s, t)\}$.

Logo $(df_3)_{(0,s,t)}$ é injetora e f_3 é uma imersão local.

Se W_0 é vizinhança de $(0, s, t)$, então o conjunto $f_3(W_0) = M'_3$ é uma subvariedade tridimensional contida em $S_\Sigma(x)$. Considere $W_{0r} = \{(r, s, t) \in W_0 : r \geq 0\}$, temos que W_{0r} está contido em W_0 , desse modo, o conjunto $M_3 = f_3(W_{0r})$ está contido em M'_3 , que sabemos estar contido em $S_\Sigma(x)$, mais ainda, M_3 está contido em A e, assim, M_3 está contido em $S_\Sigma(x) \cap A$.

Como M é finito este raciocínio pode ser repetido até alcançar a dimensão de M .

□

A hipótese do teorema anterior, na qual $\dim \mathfrak{L}ie \Sigma(x) = \dim M$ é denominada de condição do posto da álgebra de Lie.

Assim, a controlabilidade de (1) é equivalente a transitividade do semigrupo de interior não-vazio S_Σ em M , no sentido que dados quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in S_\Sigma$ tal que $gx = y$.

1.3 Ações de Grupos

Nesta seção mostraremos que, se um grupo de Lie G age diferencialmente à esquerda numa variedade M , então, campos invariantes à direita no grupo G induzem campos de vetores em M . Por simplicidade, denotaremos $\mathbb{R}^n - \{0, 0, \dots, 0\}$ por \mathbb{R}_0^n .

Definição 1.5 Dizemos que um grupo de Lie G age à esquerda em uma variedade M se existe uma aplicação diferenciável

$$\theta : G \times M \rightarrow M$$

que satisfaz:

- i) $\theta(1_G, x) = x$, para qualquer $x \in M$;
- ii) $\theta(g_1 g_2, x) = \theta(g_1, \theta(g_2, x))$ para quaisquer $g_1, g_2 \in G$ e qualquer $x \in M$.

Muitas vezes, será usada a notação $\theta(g, x) = \theta_g(x)$.

Definição 1.6 A órbita de um elemento $x \in M$, induzida pela ação θ , é o subconjunto de M dado por $\theta_G(x) = \{\theta_g(x) : g \in G\}$.

Definição 1.7 Dizemos que ação θ é transitiva, ou que G age transitivamente em M através de θ , se dados quaisquer $x, y \in M$, existe $g \in G$ tal que $\theta_g(x) = y$, isto é, $\theta_G(x) = M$ para qualquer $x \in M$.

Seja G um grupo de Lie conexo com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $\Sigma \subset \mathfrak{g}$ um subconjunto de campos vetoriais invariantes à direita de G .

Suponhamos que G age diferencialmente à esquerda na variedade M pela ação

$$\theta : G \times M \rightarrow M.$$

Mostraremos que todo campo vetorial X de Σ induz um campo vetorial \tilde{X} em M dado pela equação

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{\exp tX}(x).$$

De fato, para todo campo vetorial X de Σ e todo $t \in \mathbb{R}$, temos que $\exp tX$ pertence a G . Logo, $\theta_{\exp tX}$ é um elemento no grupo de difeomorfismos de M , fixando $x \in M$ consideramos a curva $\xi : \mathbb{R} \rightarrow M$ dada por $\xi(t) = \theta_{\exp tX}(x)$.

Observe que $\xi(0) = \text{id}(x)$ e $\frac{d}{dt}\xi|_{t=0}$ é uma aplicação de \mathbb{R} no espaço tangente $T_x M$. Assim, um conjunto de campos vetoriais Σ sobre G induz a família de campos $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{X}, \text{ tal que } X \in \Sigma\}$ em M .

Conforme vimos, a órbita de um elemento $h \in G$ induzida por Σ , é a classe lateral à direita $G_\Sigma(h) = \{gh, \text{ tal que } g \in G_\Sigma\}$. A órbita positiva de h é dada por $S_\Sigma(h) = \{gh, \text{ tal que } g \in S_\Sigma\}$.

Surge uma questão: Saber como será a órbita de elementos de M , induzida por $\tilde{\Sigma}$. No sentido da definição 1.2, esta órbita será dada através de órbitas de elementos de G induzidas por Σ . De fato, como o fluxo de \tilde{X} é dado por $\exp tX$, a órbita do elemento x de M induzida por $\tilde{\Sigma}$ é a órbita da ação de G_Σ em M , ou seja, $\theta_{G_\Sigma}(x)$, pois G_Σ se identifica com a órbita da unidade de G . Já a órbita positiva é dada por $\theta_{S_\Sigma}(x)$.

Temos que o espaço tangente à órbita $\theta_{G_\Sigma}(x)$ é formado pelos campos \tilde{X} com X variando em $\mathfrak{L}\mathfrak{i}\mathfrak{e}\Sigma$.

Definição 1.8 Dizemos que $\tilde{\Sigma}$ é transitivo em M se o conjunto $\{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{L}\mathfrak{i}\mathfrak{e}\Sigma\}$, coincide com $T_x M$ para qualquer $x \in M$.

Observe a coincidência da definição acima com o espaço tangente à órbita $\theta_{G_\Sigma}(x)$.

Temos o seguinte resultado que relaciona a controlabilidade do sistema Σ em G e do sistema induzido $\tilde{\Sigma}$ em M .

Teorema 1.9 Seja G um grupo de Lie conexo que age à esquerda na variedade M pela ação θ . Tome Σ um subconjunto de campos invariantes à direita de \mathfrak{g} e $\tilde{\Sigma}$ a família de campos induzido em M por Σ via a ação θ . Então,

- i) Para todo x em M , a órbita positiva de x induzida por $\tilde{\Sigma}$, denotada por $S_{\tilde{\Sigma}}(x)$, coincide com o conjunto $\{\theta_g(x); g \in S_\Sigma\}$.
- ii) Se a ação θ é transitiva e Σ é controlável em G , então $\tilde{\Sigma}$ é controlável em M .
- iii) $\tilde{\Sigma}$ é controlável em M se, e somente se, o semigrupo S_Σ age transitivamente em M .

Demonstração:

i) Seja $\gamma(t)$ uma trajetória em G induzida por Σ . Nesse caso, $\theta_{\gamma(t)}(x)$ é uma trajetória em M induzida por $\tilde{\Sigma}$, pois, se restringirmos t a um subintervalo em que $\gamma(t)$ é a trajetória de um único campo X de Σ , logo $\gamma(t) = \exp tX$ nesse intervalo. Portanto, $\theta_{\gamma(t)}(x) = \theta_{\exp tX}(x)$ é uma trajetória em M induzida por $\tilde{\Sigma}$.

Para a outra inclusão, tome y um elemento de M que pertence à órbita positiva de x induzida por $\tilde{\Sigma}$. Logo existe uma trajetória $\gamma(t)$ de algum campo $\tilde{X} \in \tilde{\Sigma}$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) = y$ com $t \geq 0$. Mas $y = \gamma(t) = \theta_{\exp tX}(x)$, assim $\exp tX$ pertence a S_Σ . Portanto, y pertence ao conjunto $\{\theta_g(x), \text{ tal que } g \in S_\Sigma\}$.

ii) Queremos mostrar que $S_{\tilde{\Sigma}}(x) = M$ para qualquer $x \in M$. Como Σ é controlável em G , pelo item *i*) temos que $S_{\tilde{\Sigma}}(x)$ coincide com a órbita da ação de G em M . Como a ação é transitiva então $\theta_G(x) = M$ para todo $x \in M$. Portanto $\tilde{\Sigma}$ é controlável.

iii) Suponhamos que $\tilde{\Sigma}$ é controlável em M , isto é, $S_{\tilde{\Sigma}}(x) = M$ qualquer x em M . Conforme mostramos em *i*) temos que o conjunto $\{\theta_g(x); g \in S_\Sigma\}$ coincide com M . Tome $y \in M$, logo $y = \theta_g(x)$ para algum g de S_Σ , assim S_Σ age transitivamente em M .

Por outro lado, se S_Σ age transitivamente em M , dados quaisquer x, y de M , existe g em S_Σ tal que $\theta_g(x) = y$, ou seja, o conjunto $\{\theta_g(x); g \in S_\Sigma\}$ coincide com M para qualquer elemento $x \in M$, então $S_{\tilde{\Sigma}}(x)$ coincide com M e $\tilde{\Sigma}$ é controlável em M .

□

Observação 1.10 *Temos que a controlabilidade de $\tilde{\Sigma}$ em M é equivalente à transitividade da ação de S_Σ em M , item iii). Como $S_\Sigma \subset G_\Sigma \subset G$, uma condição necessária para que S_Σ seja transitivo é que tanto G quanto G_Σ sejam transitivos em M .*

De uma forma mais geral, os conjuntos controláveis para sistemas induzidos por ações de grupos semi-simples foram estudados dentro do contexto da teoria de semi-grupo em [14] e [15].

Capítulo 2

Subgrupos Transitivos de $GL(2, \mathbb{R})$

O objetivo deste capítulo é encontrar os subgrupos de Lie conexos de $GL(2, \mathbb{R})$ cuja ação natural sobre \mathbb{R}^2 é transitiva em \mathbb{R}_0^2 .

Para encontrar tais subgrupos veremos alguns resultados que permitem mostrar que o grupo de Lie G , com álgebra de Lie \mathfrak{g} , age transitivamente na variedade M se, e somente se, o campo vetorial induzido por \mathfrak{g} é transitivo em M . Com isto, mostramos que G age transitivamente em M se, e somente se, \mathfrak{g} é transitivo em M .

Seja G um grupo de Lie, agindo na variedade M e \mathfrak{g} a álgebra de Lie de G . Cada $X \in \mathfrak{g}$ define um campo de vetores \tilde{X} em M dado por

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_{\exp tX}(x)).$$

Considerando $\Sigma = \mathfrak{g}$, pela definição 1.7, temos que $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo em M se o conjunto $\{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$, coincide com $T_x M$ para qualquer $x \in M$, denotamos o conjunto $\{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$ por $\tilde{\mathfrak{g}}(x)$.

Sabemos também, que dado qualquer $x \in M$, o espaço tangente à órbita de x é o conjunto $\{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$. Como o fluxo de \tilde{X} é dado por $\exp tX$, denotamos o espaço tangente à órbita de $x \in M$ como $T_x(\theta_G(x)) = \{\tilde{X}(x); X \in \mathfrak{g}\}$.

Proposição 2.1 *Se a variedade M é conexa, então G age transitivamente sobre M se, e somente se, $\tilde{\mathfrak{g}}$ for transitivo sobre M .*

Demonstração: Se G age transitivamente em M , então $\theta_G(x) = M$ para qualquer $x \in M$. Logo

$$\tilde{\mathfrak{g}}(x) = T_x(\theta_G(x)) = T_x M$$

e portanto, temos que $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo sobre M .

Por hipótese, para qualquer $x \in M$ temos que $\tilde{\mathfrak{g}}(x) = T_x M$. De [5], todas as órbitas $\theta_G(x)$ são abertas em M . Assim, dada uma órbita $\theta_G(x_0)$ ela é aberta e o seu complementar em M também é aberto, pois é a união de órbitas. Logo $\theta_G(x_0)$ é fechado em M , pois é complementar de um aberto.

Como M é conexa e $\theta_G(x_0)$ é aberto e fechado, temos que $M = \theta_G(x_0)$, logo G age transitivamente em M . □

Consideremos agora o caso particular onde o grupo de Lie é $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$. Este grupo age de maneira natural na variedade $M = \mathbb{R}^n$, via a ação θ dada por

$$\theta : G \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(g, x) \mapsto g \cdot x$$

no qual $g \cdot x$ é a multiplicação de matriz g pelo vetor coluna x . Sabemos que em G a exponencial é a exponencial usual de matrizes, logo para qualquer $X \in \mathfrak{g}$,

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta_{\exp tX}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} ((\exp tX) \cdot (x)) = X \cdot x \quad (2.1)$$

onde $X \cdot x$ é o produto usual de matrizes.

Considerando $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $M = \mathbb{R}_0^n$ na proposição anterior, temos o seguinte corolário.

Corolário 2.2 *Seja $G \subset \text{GL}(n, \mathbb{R})$ um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} e $n \geq 2$. Temos que G age transitivamente em \mathbb{R}_0^n se, e somente se, $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo sobre \mathbb{R}_0^n .*

Como \mathbb{R}_0^2 é conexo, para verificar que um subgrupo de Lie $G \subset \text{GL}(2, \mathbb{R})$, com álgebra de Lie \mathfrak{g} age transitivamente em \mathbb{R}_0^2 , é suficiente mostrar que $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 .

Entretanto $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se:

$$\tilde{\mathfrak{g}}(x) = T_x(\mathbb{R}_0^2) = \{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$$

para todo $x \in \mathbb{R}_0^2$. Por um lado, temos que $T_x(\mathbb{R}_0^2) = \mathbb{R}^2$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^2$. Por outro lado, verificamos da igualdade (2.1), que as órbitas $\tilde{X}(x)$ e $X \cdot x$ coincidem, portanto $\{\tilde{X}(x), \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\} = \{X \cdot x, \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$, logo $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se:

$$\mathbb{R}^2 = \{X \cdot x, \text{ tal que } X \in \mathfrak{g}\}$$

Observe que a igualdade anterior implica que \mathfrak{g} é transitivo em \mathbb{R}_0^2 . Assim, $\tilde{\mathfrak{g}}$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se, e somente se, \mathfrak{g} é transitivo em \mathbb{R}_0^2 . Desse modo usando o corolário anterior, temos a seguinte consequência.

Corolário 2.3 *Seja $G \subset GL(2, \mathbb{R})$ um grupo de Lie com álgebra de Lie \mathfrak{g} . Então G é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se, e somente se, \mathfrak{g} é transitivo sobre \mathbb{R}_0^2 .*

Observe que o último corolário vale também para o espaço \mathbb{R}^n , se $n \geq 2$.

2.1 Subálgebras Transitivas de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$

Os grupos $GL^+(2, \mathbb{R})$, $SL(2, \mathbb{R})$ e $SO(2, \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R}^+)I$ e suas respectivas álgebras são:

$$GL^+(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL(2, \mathbb{R}), \text{ tal que } \det g > 0\}$$

$$SL(2, \mathbb{R}) = \{g \in GL(2, \mathbb{R}), \text{ tal que } \det g = 1\}$$

$$SO(2, \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R}^+)I = \{g \in SL(2, \mathbb{R}), \text{ tal que } gg^t = I\} \otimes (\mathbb{R}^+)I$$

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R})\}$$

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \{g \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \text{ tal que } \text{tr} g = 0\}$$

$$\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I = \{g \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \text{ tal que } g = -g^t\} \oplus \mathbb{R}I.$$

Observe que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ é uma álgebra abeliana. Em todo nosso trabalho, denotamos o traço de uma matriz simplesmente por tr .

Teorema 2.4 *As subálgebras $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ são todas transitivas em \mathbb{R}_0^2 .*

Demonstração: Para mostrar que $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 , devemos mostrar que, fixado qualquer $\xi_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_0^2$ o conjunto $\{A\xi_0, \text{ tal que } A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})\}$ coincide com \mathbb{R}^2 .

$$\text{Para } x_0 \neq 0, \text{ tome } A = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{x_0} & 0 \end{bmatrix},$$

observe que

$$A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e que } B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ Logo, dado qualquer } (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

considere $C = xA + yB$, assim temos que $C \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Supondo que $y_0 \neq 0$, considere $D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{y_0} \end{bmatrix}$,

assim $D \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $E \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

basta considerar $F = xD + yE$ e obtemos que $F \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Observe que A, B, C, D, E e F pertencem a álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e assim $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é transitiva em \mathbb{R}_0^2 .

Da mesma forma, para mostrar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 , precisamos mostrar que, dado $\xi_0 = (x_0, y_0)$ não nulo, temos $\mathbb{R}^2 = \{A\xi_0; A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})\}$.

Se $x_0 \neq 0$, considere $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{x_0} & 0 \\ \frac{y_0}{x_0^2} & -\frac{1}{x_0} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{x_0} & 0 \end{bmatrix}$,

observe que

$A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e que $B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Logo, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

se $C = xA + yB$, então temos que $C \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Para $y_0 \neq 0$, sejam $D = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{y_0} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $E = \begin{bmatrix} -\frac{1}{y_0} & \frac{x_0}{y_0^2} \\ 0 & \frac{1}{y_0} \end{bmatrix}$,

como

$D \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $E \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

considerando $F = xD + yE$, temos que $F \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Observe que A, B, C, D, E e F pertencem a $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e assim a álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é transitiva em \mathbb{R}_0^2 .

Mostraremos que $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 . Fixado qualquer $\xi_0 = (x_0, y_0)$ não-nulo, devemos mostrar que $\mathbb{R}^2 = \{A\xi_0, \text{ tal que } A \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})\} \oplus \mathbb{R}I$. Como $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, seja

$$A = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{bmatrix} x_0 & y_0 \\ -y_0 & x_0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{x_0^2 + y_0^2} \begin{bmatrix} y_0 & -x_0 \\ x_0 & y_0 \end{bmatrix},$$

temos que $A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e que $B \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Assim dado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, basta considerar $C = xA + yB$ e temos que $C \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Note que A, B e $C \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ e assim a álgebra $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ é transitiva em \mathbb{R}_0^2 .

Observe que, na verdade provamos que, dado qualquer ponto de \mathbb{R}_0^2 , existem matrizes que o levam na base canônica de \mathbb{R}^2 , o que é suficiente para demonstrar o resultado. \square

2.2 Unicidade das Subálgebras Transitivas de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$

O objetivo agora, é mostarmos que as únicas subálgebras de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ transitivas em \mathbb{R}_0^2 , são aquelas do Teorema 2.4.

Proposição 2.5 *A álgebra $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebras unidimensionais transitivas em \mathbb{R}_0^2 .*

Demonstração: Suponhamos que exista subálgebra \mathfrak{h} de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, transitiva em \mathbb{R}_0^2 com $\dim \mathfrak{h} = 1$. Logo $\mathbb{R}^2 = \{A\xi_0; A \in \mathfrak{h}\}$ para qualquer $\xi_0 = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}_0^2$. Conseqüentemente, $\dim \mathbb{R}^2 = \dim\{A\xi_0, \text{ tal que } A \in \mathfrak{h}\}$. Como $\dim \mathfrak{h} = 1$, temos que $\dim\{A\xi_0; A \in \mathfrak{h}\} = 1$, contradizendo o fato da dimensão de \mathbb{R}^2 ser 2. \square

Lema 2.6 *A álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebra abeliana bidimensional.*

Demonstração: Sejam $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Temos que $[H, P] = 2P$, $[H, Q] = -2Q$ e $[P, Q] = H$. Suponhamos por absurdo, que exista tal subálgebra abeliana \mathfrak{h} e que $\{X, Y\}$ é base de \mathfrak{h} , assim existem escalares $a_i, b_i, i = 1, 2, 3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$X = a_1H + a_2P + a_3Q \quad \text{e} \quad Y = b_1H + b_2P + b_3Q.$$

Como estamos supondo que \mathfrak{h} é abeliana, então

$$[X, Y] = XY - YX = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Substituindo $X = a_1H + a_2P + a_3Q$ e $Y = b_1H + b_2P + b_3Q$ na igualdade acima, obtemos o sistema

$$\begin{cases} 2(a_1b_2 - a_2b_1) = 0 \\ 2(a_3b_1 - a_1b_3) = 0 \\ (a_2b_3 - a_3b_2) = 0 \end{cases}, \text{ segue que}$$

$$a_1b_2 = a_2b_1, \quad a_1b_3 = a_3b_1, \quad a_2b_3 = a_3b_2.$$

Assim, os escalares de X e Y são proporcionais e com isso, X e Y são linearmente dependentes, o que é um absurdo, contrariando o fato de $\{X, Y\}$ ser base de \mathfrak{h} . Assim demonstramos o resultado. \square

Na próxima demonstração, obtemos alguns resultados que usamos inúmeras vezes no restante do trabalho. Estes resultados dizem respeito às formas que uma matriz em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ pode assumir, de acordo com o sinal de seu determinante.

Lema 2.7 *Toda subálgebra \mathfrak{h} de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ bidimensional possui uma base de tal forma que todo elemento de \mathfrak{h} , nesta base, se escreve na forma*

$$\begin{bmatrix} \eta & \gamma \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}, \text{ com } \eta \text{ e } \gamma \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Pelo Lema 2.6 consideramos \mathfrak{h} não abeliano. Em [13], existe um resultado bem conhecido da teoria de álgebra de Lie que garante a existência de uma base $\{X, Y\}$ para \mathfrak{h} tal que $[X, Y] = Y$, isto é, Y é um autovetor associado ao autovalor 1 da aplicação abaixo:

$$\text{ad}(X) : \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

$$Y \mapsto [X, Y].$$

Como X faz parte da base de \mathfrak{h} e \mathfrak{h} está contido em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, temos que a princípio, X é da forma $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$. Temos que

$$p_X(\lambda) = \lambda^2 - a^2 - bc = \lambda^2 + \det X$$

é o polinômio característico de X .

i) Se $\det X < 0$. Fazendo $p_X(\lambda) = 0$ temos que $\lambda^2 = -\det X$, isso ocorre se, e somente se, $\lambda = \pm\sqrt{-\det X}$. Assim existem autovalores reais e distintos e X é diagonalizável, como $\text{tr} X = 0$, a forma de Jordan de X é $X = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}$.

ii) Se $\det X = 0$, então o autovalor de X é o zero com multiplicidade dois e sua forma de Jordan é $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

iii) Agora suponhamos que $\det X > 0$, assim os autovalores de X são complexos e conjugados $\lambda = \pm i\sqrt{\det X}$, para facilitar denotamos $\lambda = \pm i\xi$. Sabemos que, caso as raízes do polinômio característico não pertençam ao corpo, não faz sentido falar em forma de Jordan. Neste caso usamos equivalência de matrizes, já que uma matriz da forma $\begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$ tem autovalores $\pm i\xi$.

Precisamos encontrar uma matriz A inversível, de tal forma que

$$AXA^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix},$$

de maneira equivalente

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} A = X.$$

$$\text{Seja } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{-c}{\xi} & \frac{a}{\xi} \end{bmatrix}, \text{ logo } A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a}{c} & -\frac{\xi}{c} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e fazendo uma conta simples, temos que

$$A^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}.$$

Falta concluir que A é inversível, ou seja, $\det A \neq 0$, como $\det A = \frac{c}{\xi}$. Suponhamos por absurdo, que $\det A = 0$. Isso acontece se, e somente se, $c = 0$, entretanto a condição $c = 0$ implica que $\det X = -a^2 < 0$, isto contraria a hipótese assumida.

Logo se $\det X > 0$, então X é equivalente a matriz $\begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$.

Considere a base canônica de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ dada por $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\text{e } Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -0 \end{bmatrix}$$

a) Suponhamos agora, que X é equivalente à matriz $\begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix}$, considerando a base canônica

$$\begin{aligned} \text{ad}(X)(H) &= [X, H] = 0H - 2\xi P - 2\xi Q \\ \text{ad}(X)(P) &= [X, P] = \xi H + 0P + 0Q \\ \text{ad}(X)(Q) &= [X, Q] = \xi H + 0P + 0Q. \end{aligned}$$

Nesse caso a matriz associada à transformação $\text{ad}(X)$ é dada por

$$\text{ad}(X) = \begin{bmatrix} 0 & \xi & \xi \\ -2\xi & 0 & 0 \\ 2\xi & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

seus autovalores são $\lambda = 0$ e $\lambda = \pm 2\xi i$, contrariando o fato de pelo menos um dos autovalores ser o número um.

b) Se X é equivalente a matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, na base canônica

$$\text{ad}(X) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

mas $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Logo $\text{ad}(X)$ é nilpotente, como todos autovalores de uma transformação linear nilpotente são nulos, temos um absurdo, já que o número um é autovalor.

c) Logo a única alternativa para X é

$$X = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}.$$

Seja Y a outra matriz da base, a princípio Y é da forma $Y = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$, como

$$[X, Y] = XY - YX = Y.$$

Fazendo cálculos com a igualdade acima, chegamos que

$$\begin{bmatrix} 0 & 2\eta\beta \\ -2\eta\gamma & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & -\alpha \end{bmatrix}$$

e obtemos o sistema

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ 2\eta\beta = \beta \\ -2\eta\gamma = \gamma \end{cases}$$

Na terceira equação, temos que γ é livre e $2\eta = -1$, substituindo $\eta = \frac{-1}{2}$ na segunda equação, temos que $\beta = 0$.

Conseqüentemente, $Y = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Como X e Y são elementos da base de \mathfrak{h} e obtemos o resultado. □

Lema 2.8 *A álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebra transitiva bidimensional.*

Demonstração: Provamos no Lema 2.6 que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebra abeliana bidimensional, logo verificamos o resultado para subálgebras não abelianas.

Pelo Lema 2.7, sabemos que se $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é uma subálgebra bidimensional, então existe uma base β_1 , em que os elementos $A \in \mathfrak{h}_1$, na base β_1 são da forma

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}.$$

Sendo assim, tomando \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 subálgebras bidimensionais de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não abelianas, denotando por β_1, β_2 suas respectivas bases, onde os elementos de \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 , nestas bases, são da forma acima.

Mostraremos agora que, caso \mathfrak{h}_1 seja transitivo em \mathbb{R}_0^2 , \mathfrak{h}_2 também será.

Afirmção: Se \mathfrak{h} é transitivo em \mathbb{R}_0^2 , então sua conjugada, por uma matriz inversível N , é transitiva. De fato, temos que dados quaisquer $u, v \in \mathbb{R}_0^2$, existe $A \in \mathfrak{h}$ tal que $Au = v$. Como N é inversível, temos que $Nu, Nv \in \mathbb{R}_0^2$ e assim, existe $A' \in \mathfrak{h}$, tal que $A'Nu = Nv$, logo $(N^{-1}A'N)u = v$. Desse modo, o conjunto $H = \{N^{-1}A'N, \text{ tal que } A' \in \mathfrak{h}_1\}$ é subálgebra transitiva em \mathbb{R}_0^2 .

Considerando as bases de \mathbb{R}_0^2 , β_1 e β_2 e a matriz mudança de base de β_1 para β_2 , denotada por M , temos que as subálgebras \mathfrak{h}_1 e \mathfrak{h}_2 são conjugadas.

Pela afirmação, se \mathfrak{h}_1 é transitiva em \mathbb{R}_0^2 , então \mathfrak{h}_2 também será transitiva em \mathbb{R}_0^2 . Logo, para mostrar que $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ não possui subálgebras transitivas bidimensionais, basta exibir uma não transitiva.

Seja $\mathfrak{h} = \left\{ \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c \end{bmatrix}, \text{ tal que } c, d \in \mathbb{R} \right\}$ subálgebra de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ bidimensional não abeliana, não é difícil mostrar que é subálgebra.

Temos que $\begin{bmatrix} c & d \\ 0 & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx + dy \\ -cy \end{bmatrix}$ e \mathfrak{h} não é transitivo se considerarmos $y = 0$. □

Para o próximo resultado, precisamos da seguinte observação.

Observação 2.9 *Sejam \mathfrak{h} e $\tilde{\mathfrak{h}}$ subálgebras bidimensionais de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, pelo Lema 2.6 temos que \mathfrak{h} e $\tilde{\mathfrak{h}}$ não são abelianas. Na demonstração do resultado anterior, \mathfrak{h} e $\tilde{\mathfrak{h}}$ são conjugadas e \mathfrak{h} é transitiva se, e somente se, $\tilde{\mathfrak{h}}$ é transitiva.*

Proposição 2.10 *Se $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e a álgebra $\mathfrak{h} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}I$ é transitiva em \mathbb{R}_0^2 . Então, \mathfrak{h} é isomorfo a $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$.*

Demonstração: Como $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, podemos escrever X como $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$, se $A \in \mathfrak{h}$, temos que

$$A = \alpha X + \beta I = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta & \alpha b \\ \alpha c & -\alpha a + \beta \end{bmatrix}, \text{ com } \alpha \text{ e } \beta \in \mathbb{R}.$$

a) Suponhamos que $\det X < 0$. Neste caso, pela demonstração do Lema 2.7, temos que X é equivalente à matriz $\tilde{X} = \begin{bmatrix} \eta & 0 \\ 0 & -\eta \end{bmatrix}$, daí obtemos uma nova subálgebra $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathbb{R}\tilde{X} \oplus \mathbb{R}I$ e sua respectiva matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \alpha\eta + \beta & 0 \\ 0 & -\alpha\eta + \beta \end{bmatrix}$. Considerando (x_0, y_0) não nulo em \mathbb{R}^2 , temos que

$$\tilde{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha\eta + \beta)x_0 \\ (-\alpha\eta + \beta)y_0 \end{bmatrix}.$$

Se $x_0 = 0$ ou $y_0 = 0$, temos que $\tilde{\mathfrak{h}}$ não é transitivo, conseqüentemente, pela observação anterior, \mathfrak{h} não é transitivo em \mathbb{R}_0^2 .

Portanto a matriz X considerada em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ no enunciado do teorema não possui determinante negativo.

b) Considere agora que $\det X = 0 = -a^2 - bc$, multiplicando a primeira linha por c e a segunda por $-a$, obtemos a matriz $\begin{bmatrix} ac & bc \\ -ac & a^2 \end{bmatrix}$.

Agora, substituindo a segunda linha pela soma das outras duas linhas, obtemos $\begin{bmatrix} ac & bc \\ -ac + ac & a^2 + bc \end{bmatrix}$.

Como $\det X = 0$, temos que X é equivalente a uma matriz na forma $\begin{bmatrix} ac & bc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, como o traço deve ser zero, obtemos que X deve ser equivalente à matriz $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & bc \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Por outro lado, multiplicando a primeira linha por $+a$ e a segunda por b , em seguida substituindo a primeira linha pela soma das outras duas, obtemos que X é equivalente à matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bc & 0 \end{bmatrix}$.

Se X é equivalente à matriz $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bc & 0 \end{bmatrix}$, obtemos uma nova subálgebra $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathbb{R}\tilde{X} \oplus \mathbb{R}I$ e sua respectiva matriz $\tilde{A} = \begin{bmatrix} \beta & 0 \\ abc & \beta \end{bmatrix}$, seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_0^2$, temos que $\tilde{A} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta x_0 \\ abc x_0 + \beta y_0 \end{bmatrix}$, se $x_0 = 0$ temos que $\tilde{\mathfrak{h}}$ não é transitivo e, portanto, pela observação anterior, \mathfrak{h} não é transitivo em \mathbb{R}_0^2 .

Se X é equivalente à matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ bc & 0 \end{bmatrix}$, concluimos de maneira análoga, que \mathfrak{h} não é transitivo quando $y_0 = 0$.

Portanto a matriz X , considerada em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ no enunciado do teorema, não pode ter $\det X = 0$.

c) Então $\det X > 0$ é a única alternativa para que \mathfrak{h} seja transitiva. Se isso ocorre, temos que X é equivalente à matriz $\tilde{X} = \begin{bmatrix} 0 & -\xi \\ \xi & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, (veja demonstração do Lema 2.7) e, novamente, obtemos uma nova subálgebra $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathbb{R}\tilde{X} \oplus \mathbb{R}I = \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$.

Portanto a equivalência entre X e \tilde{X} garante que \mathfrak{h} é isomorfo a $\tilde{\mathfrak{h}}$. □

Proposição 2.11 *Se $\mathfrak{k} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com $\dim \mathfrak{k} = 2$ e $\mathfrak{h} = \mathfrak{k} \oplus \mathbb{R}I$. Então, \mathfrak{h} não é transitiva.*

Demonstração: Pelo Lema 2.7, dado $X \in \mathfrak{k}$, existe uma base de \mathbb{R}^2 , em que X pode ser escrito como $X = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$. Assim, se $A \in \mathfrak{h}$, temos que

$$A = \alpha X + \beta I, \text{ logo } A = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta & \alpha b \\ 0 & -\alpha a + \beta \end{bmatrix} \text{ e } \mathfrak{h} \text{ não é transitiva se } y_0 = 0, \text{ pois}$$

$$A \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha a + \beta)x_0 + (\alpha b)y_0 \\ (-\alpha a + \beta)y_0 \end{bmatrix}. \quad \square$$

Proposição 2.12 *A única subálgebra de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ transitiva em \mathbb{R}_0^2 de dimensão 3 é $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Considere a projeção canônica de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$:

$$\pi : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \text{ dada por } \pi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{bmatrix}.$$

Suponhamos que \mathfrak{h} é subálgebra tridimensional transitiva em \mathbb{R}_0^2 , como $\pi(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $\dim \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = 3$, temos que $0 \leq \dim \pi(\mathfrak{h}) \leq 3$. É fácil verificar que $\text{Ker} \pi = \mathbb{R}I$. Seja $\delta = \pi|_{\mathfrak{h}}$, temos que $\text{Ker} \delta \subseteq \text{Ker} \pi = \mathbb{R}I$, logo $\dim \text{Ker} \delta \leq \dim \text{Ker} \pi = 1$. Assim $\dim \text{Ker} \delta = 1$ ou $\dim \text{Ker} \delta = 0$.

Se $\dim \text{Ker} \delta = 1$, então $\text{Ker} \delta = \mathbb{R}I$. Daí $\mathbb{R}I \subset \mathfrak{h}$, pois $\text{Ker} \delta \subset \mathfrak{h}$. Pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $\dim \mathfrak{h} = \dim \mathbb{R}I + \dim \delta(\mathfrak{h})$. Como supomos \mathfrak{h} tridimensional, temos que $\dim \delta(\mathfrak{h}) = 2$. Denote $\delta(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{k}}$, observe que $\tilde{\mathfrak{k}} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com $\dim \tilde{\mathfrak{k}} = 2$. Portanto $\mathfrak{h} = \tilde{\mathfrak{k}} \oplus \mathbb{R}I$ e pela Proposição 2.11 segue que \mathfrak{h} não é transitiva.

Se $\dim \text{Ker} \delta = 0$, temos que $\dim \delta(\mathfrak{h}) = 3$ e a transformação linear $\delta : \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é isomorfismo de álgebras. Logo

$$\delta[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = [\delta(\mathfrak{h}), \delta(\mathfrak{h})] = [\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}), \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})] = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \delta(\mathfrak{h}) \text{ e assim } [\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] = \mathfrak{h},$$

pois δ é isomorfismo.

Se $Z \in \mathfrak{h}$, então $Z = [X, Y] = XY - YX$, para algum $X, Y \in \mathfrak{h}$.

Como $\text{tr}(Z) = \text{tr}[X, Y] = \text{tr}(XY - YX) = \text{tr}(XY) - \text{tr}(YX) = 0$, segue que $Z \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Como Z é qualquer, segue que $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, mas por hipótese temos que $\dim \mathfrak{h} = 3$, assim $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e demonstramos o resultado. □

Proposição 2.13 *Suponhamos que \mathfrak{h} é uma subálgebra de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ transitiva em \mathbb{R}_0^2 , então \mathfrak{h} é uma das subálgebras do Teorema 2.4.*

Demonstração: Pela Proposição 2.5 temos que $2 \leq \dim \mathfrak{h} \leq 4$. Assim, há três casos:

a) $\dim \mathfrak{h} = 4$, como \mathfrak{h} é subálgebra de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e $\dim \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = 4$, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

b) $\dim \mathfrak{h} = 3$, foi feito na Proposição 2.12.

c) $\dim \mathfrak{h} = 2$, considere a projeção da Proposição 2.12, agora estamos supondo $\dim \mathfrak{h} = 2$, assim temos que $0 \leq \dim \delta(\mathfrak{h}) \leq 2$. Analisando os casos.

c.i) Se $\dim \delta(\mathfrak{h}) = 0$, temos que $\dim \text{Ker} \delta = 2$, absurdo, pois $\dim \text{Ker} \pi = 1$ e $\text{Ker} \delta \subseteq \text{Ker} \pi$.

c.ii) Se $\dim \delta(\mathfrak{h}) = 1$, temos que $\dim \text{Ker} \delta = 1$ e δ não é injetora. Logo $\mathbb{R}I \subset \mathfrak{h}$ (veja Proposição 2.12), temos também, que

$$\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$$

como $\dim \mathfrak{h} = 2$, temos que

$$\mathfrak{h} = \mathbb{R}X \oplus \mathbb{R}I, \text{ com } X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}).$$

Pela Proposição 2.10 segue que \mathfrak{h} é isomorfo a $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$.

c.iii) Suponhamos que $\dim \delta(\mathfrak{h}) = 2$. A aplicação abaixo,

$$\pi : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

satisfaz que $\pi(X, \alpha I) = X$, como $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ e $\dim \mathfrak{h} = 2$, temos que $\mathfrak{h} = K \oplus \mathbb{R}I$, com $K \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $\dim K = 1$. Assim,

$$\delta : \mathfrak{h} = K \oplus \mathbb{R}I \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$$

é tal que $\delta(X, \alpha I) = X$. Logo podemos escrever $X = \delta(X, \alpha I)$. Portanto qualquer $(X, \alpha I) \in \mathfrak{h}$ pode ser escrito como $(\delta(X, \alpha I), \alpha I)$, ou seja,

$$\mathfrak{h} \subset \delta(\mathfrak{h}) \oplus \mathbb{R}I.$$

Mas $\delta(\mathfrak{h}) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é uma subálgebra bidimensional e pela Proposição 2.11 segue que $\delta(\mathfrak{h}) \oplus \mathbb{R}I$ não é transitiva, logo \mathfrak{h} também não. □

Como o objetivo deste capítulo é encontrar os subgrupos de Lie conexos de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ cuja ação natural sobre \mathbb{R}^2 é transitiva em \mathbb{R}_0^2 , mostramos, no Corolário

2.3, que encontrar estes subgrupos é equivalente a mostrar que suas álgebras são transitivas em \mathbb{R}_0^2 no sentido da definição 1.7. Como consequência do Teorema 2.4, temos.

Teorema 2.14 *Os únicos subgrupos de Lie de $GL(2, \mathbb{R})$, cuja ação natural sobre \mathbb{R}^2 é transitiva em \mathbb{R}_0^2 , são:*

$$GL^+(2, \mathbb{R}), \quad SL(2, \mathbb{R}) \quad e \quad SO(2, \mathbb{R}) \otimes (\mathbb{R}^+)I.$$

Capítulo 3

Controlabilidade de Sistemas Lineares

O objetivo deste capítulo é apresentar um critério simples que garanta a controlabilidade de um sistema de controle linear. Sejam A uma matriz $n \times n$, $b \in \mathbb{R}_0^n$ e considere a equação diferencial

$$\dot{x} = Ax + ub,$$

no qual $x \in \mathbb{R}_0^n$ e $u \in \mathbb{R}$ é a função de controle.

Historicamente, o estudo da controlabilidade deste sistema linear teve como precursor Kalman que, em [9], estudou de maneira mais geral, o sistema dinâmico

$$\dot{x} = F(t)x + G(t)u(t)$$

onde $t \in \mathbb{R}$, x é uma n -upla, $u(t)$ é uma m -upla e as funções $F(t)$ e $G(t)$ são matrizes $n \times n$ e $n \times m$ respectivamente.

Se o sistema dinâmico acima possui coeficientes constantes, existe um critério geral para a controlabilidade. Critério este dado em função de $F(t)$, $G(t)$ e deduzido usando a teoria de equações diferenciais. Este critério é conhecido como critério de *Kalman*. Outra referência para o estudo de sistema de controle via equações diferenciais é [10].

Quase dez anos após a publicação de [9], Jurdjevic e Sussmann estudaram em [16] a controlabilidade do sistema não linear na forma

$$\dot{x} = F(x, u)$$

com o objetivo de estabelecer um critério em termos de F e suas derivadas para a controlabilidade do sistema.

Existe uma diferença entre os dois trabalhos, enquanto Kalman usa a teoria de equações diferenciais, Jurdjevic e Sussmann atacam o problema usando teoria de Lie.

O principal objetivo deste capítulo é demonstrar o teorema, conhecido como Teorema de *Kalman*, que estabelece uma condição necessária e suficiente para que o sistema linear $\dot{x} = Ax + ub$ seja controlável. Uma outra referência para o estudo, usando teoria de Lie, é San Martin [12], o qual será a base para o desenvolvimento deste capítulo.

Teorema 3.1 (Teorema de Kalman) *O sistema linear $\dot{x} = Ax + ub$ é controlável se, e somente se, o conjunto $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ gera \mathbb{R}^n .*

A idéia da demonstração do Teorema de *Kalman*, é a seguinte:

Temos que o sistema $\dot{x} = Ax + ub$ é controlável se, e somente se, o conjunto de campos vetoriais associado a este sistema, denotado por $\tilde{\Sigma}$, for controlável. No entanto, pelo Teorema 1.9, temos que a controlabilidade de $\tilde{\Sigma}$ é equivalente à transitividade de S_{Σ} em \mathbb{R}^n . Por outro lado, S_{Σ} é transitivo em \mathbb{R}^n se, e somente se, todas as órbitas da ação de S_{Σ} em \mathbb{R}^n coincidem com todo \mathbb{R}^n , isto é, $\theta_{S_{\Sigma}}(x) = \mathbb{R}^n$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. A órbita da ação de S_{Σ} no elemento $x \in \mathbb{R}^n$ é dada por

$$\theta_{S_{\Sigma}}(x) = \{(\exp tA) \cdot x + c, \text{ onde } t \geq 0 \text{ e } c \in \text{ger}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}\}.$$

Assim, o sistema é controlável se, e somente se,

$$\{(\exp tA) \cdot x + c, \text{ onde } t \geq 0 \text{ e } c \in \text{ger}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}\} = \mathbb{R}^n.$$

A partir daí, não é difícil verificar que $\dot{x} = Ax + ub$ é controlável se, e somente se, $\text{ger}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\} = \mathbb{R}^n$.

3.1 Teorema de Kalman

Para a demonstração do Teorema de *Kalman*, é necessário antes introduzir uma linguagem básica e resultados preliminares.

Considere $\text{Af}(n)$, o grupo das transformações afins em \mathbb{R}^n . Ou seja os elementos T de $\text{Af}(n)$ são aplicações

$$T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$x \mapsto gx + b$$

onde $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{R}^n$. Assim, cada elemento T de $\text{Af}(n)$ pode ser identificado de maneira única como par (g, b) . Portanto podemos identificar $\text{Af}(n)$ com o produto semidireto

$$\text{GL}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$$

sendo o produto semidireto dado por

$$(g, v)(h, u) = (gh, gu + v).$$

A unidade de $\text{Af}(n)$ é o par $(I, 0)$, onde $I \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $0 \in \mathbb{R}^n$. O inverso de (g, v) é $(g^{-1}, -g^{-1}v)$.

Dado o sistema

$$\dot{x} = Ax + ub$$

considere em \mathbb{R}^n o campo \tilde{X}^u , definido por $\tilde{X}^u(x) = Ax + ub$. Associado a este sistema temos a família de campos de vetores dada por

$$\tilde{\Sigma} = \{\tilde{X}^u, \text{ tal que } u \in \mathbb{R}\}.$$

Usaremos o Teorema 1.9 para a análise da controlabilidade, o mesmo afirma que $\tilde{\Sigma}$ é controlável se, e somente se, $S_{\tilde{\Sigma}}$ agir transitivamente em \mathbb{R}^n . Mostraremos que um conjunto de campos vetoriais Σ sobre o grupo $\text{Af}(n)$ induz, pela ação θ , a família de campos vetoriais $\tilde{\Sigma}$ em \mathbb{R}^n .

A ação do grupo $\text{Af}(n)$ em \mathbb{R}^n é dada de maneira natural por

$$\theta : \text{Af}(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(g, v)w \mapsto gw + v$$

onde $g \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ e $v, w \in \mathbb{R}^n$. Não é difícil mostrar que a aplicação acima satisfaz a definição de ação.

A álgebra de Lie do grupo afim é dada por $\mathfrak{af}(n) = \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^n$. Seja X um elemento da álgebra de Lie $\mathfrak{af}(n)$, destacamos, agora, duas questões importantes para este capítulo, a primeira é saber qual a forma do campo em \mathbb{R}^n induzida por X e pela ação θ , a outra é descrever o colchete entre elementos de $\mathfrak{af}(n)$.

Inicialmente, respondemos a primeira questão, isto é, mostramos que o campo induzido por $X \in \mathfrak{af}(n)$, é exatamente, o campo dado por $\tilde{X}^u(x) = Ax + ub$.

Teorema 3.2 *Se $X = (A, v) \in \mathfrak{af}(n)$, então o campo induzido por X em \mathbb{R}^n pela ação definida acima, é dado por $\tilde{X}(x) = Ax + v$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^n$.*

Demonstração: De maneira geral, um campo induzido por uma ação é dado por:

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_{\exp tX}(x)).$$

Aplicando esta definição no caso particular em que $X = (A, v)$ e $x \in \mathbb{R}^n$, temos:

$$\tilde{X}(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_{\exp t(A,v)}(x)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\theta_{(\exp tA, tv)}(x)) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (\exp tA \cdot x + tv),$$

obtendo assim que

$$\tilde{X}(x) = A \cdot \exp tA \cdot x + v \Big|_{t=0} = Ax + v$$

□

Pelo Teorema anterior, concluímos que um conjunto de campos vetoriais sobre $\text{Af}(n)$, dado por $\Sigma = \{(A, ub) \in \mathfrak{af}(n) : u \in \mathbb{R}\}$, induz a família de campos sobre \mathbb{R}^n , dada por $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{X}^u : u \in \mathbb{R}\}$, onde $\tilde{X}^u(x) = Ax + ub$.

Os dois próximos resultados permitem obter uma resposta para a segunda questão, isto é, uma descrição do colchete da álgebra $\mathfrak{af}(n)$.

Teorema 3.3 *Se $X = (A, v)$ é um elemento de $\mathfrak{af}(n)$ e (g, u) um elemento do grupo $\text{Af}(n)$. Então $(A, v)(g, u) = (Ag, Au + v)$.*

Demonstração: Dados $(A, v) \in \mathfrak{af}(n)$ e $(g, u) \in \text{Af}(n)$, precisamos saber como o campo (A, v) associa ao elemento (g, u) um vetor em $T_{(g,u)}\text{Af}(n)$.

Pelo Teorema 3.2, dado $X = (A, v) \in \mathfrak{af}(n)$, o campo induzido \tilde{X} age em $x \in \mathbb{R}^n$ como $\tilde{X}(x) = Ax + v$. Assim,

$$(A, v)((g, u)(x)) = (A, v)(gx + u) =$$

$$A(gx + u) + v = Agx + Au + v = (Ag, Au + v)(x)$$

na primeira igualdade, usamos a forma que $\text{Af}(n)$ age em \mathbb{R}^n , já na segunda, temos (A, v) como campo induzido, agindo no elemento $(gx + u)$ de \mathbb{R}^n .

Assim, $(Ag, Au + v)$ é um campo em \mathbb{R}^n que é induzido pelo próprio campo (A, v) de $\mathfrak{af}(n)$. Logo, $(A, v)(g, u) = (Ag, Au + v)$ pertence a $T_{(g,u)}\text{Af}(n)$.

□

Lema 3.4 Se $(A, v) \in \text{Af}(n)$, então a diferencial $d(A, v) |_{(g,u)}: T_{(g,u)}\text{Af}(n) \rightarrow \mathfrak{af}(n)$ é dada por $d(A, v) |_{(g,u)}(C, m) = (A, 0)(C, m) = (AC, Am)$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.3, temos que a aplicação

$$(A, v) : \text{Af}(n) \rightarrow \mathfrak{af}(n) \text{ é dada por } (A, v)(g, u) = (Ag, Au + v)$$

e, assim, descrevemos sua derivada da seguinte forma $d(A, v) |_{(g,u)}: T_{(g,u)}\text{Af}(n) \rightarrow \mathfrak{af}(n)$.

Sabemos que (A, v) induz uma curva $\alpha : I \rightarrow \text{Af}(n)$, dada por $\alpha(t) = (g(t), u(t))$, com $\alpha(0) = (g, u)$ e $\alpha'(t) = ((A, v) \circ \alpha)(t)$ para todo t , veja que $\alpha'(0) = (g'(0), u'(0)) \in T_{(g,u)}\text{Af}(n)$.

Considere a composta $((A, v) \circ \alpha)(t) = (A, v)(g(t), u(t)) = (Ag(t), Au(t) + v)$, derivando em relação a t e calculando em $t = 0$, obtemos $(Ag'(0), Au'(0)) = (A, 0)(g'(0), u'(0))$. Como $(g'(0), u'(0)) \in T_{(g,u)}\text{Af}(n)$, temos que

$$d(A, v) |_{(g,u)}: T_{(g,u)}\text{Af}(n) \rightarrow \mathfrak{af}(n)$$

é dada por

$$d(A, v) |_{(g,u)}(C, m) = (A, 0)(C, m) = (AC, Am).$$

□

Agora sim, há condições para descrever o colchete de $\mathfrak{af}(n)$.

Teorema 3.5 Se $(A, v), (B, w) \in \mathfrak{af}(n)$, então o colchete entre estes campos é dado pela expressão $[(A, v), (B, w)] = ([A, B], Aw - Bv)$.

Demonstração: Existe uma fórmula geral para o colchete dada por

$$[X, Y](h) = dX |_h(Y(h)) - dY |_h(X(h)),$$

onde X e Y são elementos da álgebra de Lie associados ao grupo de Lie que contém o elemento h .

Considere o caso particular em que os campos são $X = (A, v), Y = (B, w) \in \mathfrak{af}(n)$ e o elemento do grupo $h = (g, u) \in \text{Af}(n)$. Neste caso,

$$[(A, v), (B, w)](g, u) = d(A, v) |_{(g,u)}((B, w)(g, u)) - d(B, w) |_{(g,u)}((A, v)(g, u))$$

pelo Teorema 3.3, sabemos que $(B, w)(g, u) = (Bg, Bu + w)$, logo

$$[(A, v), (B, w)](g, u) = d(A, v) |_{(g,u)}((Bg, Bu + w)) - d(B, w) |_{(g,u)}((Ag, Au + v)).$$

Pelo lema que antecede este teorema, temos que

$$d(A, v) |_{(g,u)} ((Bg, Bu + w)) = (A, 0)(Bg, Bu + w).$$

Assim

$$[(A, v), (B, w)](g, u) = (A, 0)(Bg, Bu + w) - (B, 0)(Ag, Au + v).$$

Novamente, pelo Teorema 3.3, temos que $(A, 0)(Bg, Bu + w) = (ABg, A(Bu + w) + 0)$. Da igualdade anterior segue que

$$\begin{aligned} [(A, v), (B, w)](g, u) &= (ABg, A(Bu + w) + 0) - (BAg, B(Au + v) + 0) \\ &= (ABg - BAg, ABu + Aw - BAu - Bv) \\ &= ([A, B]g, [A, B]u + Aw - Bv) \\ &= ([A, B], Aw - Bv)(g, u). \end{aligned}$$

□

Resumidamente, um elemento $X = (A, v)$ de $\mathfrak{af}(n)$, induz o campo \tilde{X} em \mathbb{R}^n , dado por $\tilde{X}(x) = Ax + v$ para cada $x \in \mathbb{R}^n$. Daí, pelo Teorema 3.2, temos que a família $\tilde{\Sigma} = \{\tilde{X}^u, \text{ tal que } u \in \mathbb{R}\}$, é induzida pelo conjunto de campos $\Sigma = \{(A, ub) \in \mathfrak{af}(n), \text{ com } u \in \mathbb{R}\}$. Pelo Teorema 3.5, o colchete entre elementos de $\mathfrak{af}(n)$ é dado pela expressão $[(A, v), (B, w)] = ([A, B], Aw - Bv)$.

Agora, determinaremos a álgebra de Lie $\mathfrak{Lie}\Sigma$. Para isto, note que os elementos de Σ são da forma (A, ub) com $u \in \mathbb{R}$ e A, b fixos. Assim, para calcular sucessivos colchetes de elementos de Σ , basta usar o Teorema 3.5. De fato, seja $v \in \mathbb{R}$, então

$$[(A, ub), (A, vb)] = ([A, A], vAb - uAb) = (0, (v - u)Ab);$$

$$[(A, ub), [(A, ub), (A, vb)]] = [(A, ub), (0, (v - u)Ab)] = (0, (v - u)A^2b);$$

$$[(A, ub), [(A, ub), [(A, ub), (A, vb)]]] = [(A, ub), (0, (v - u)A^2b)] = (0, (v - u)A^3b);$$

⋮

após n-etapas, temos

$$[(A, ub), [(A, ub), [\dots [(A, ub), (A, vb)]]]] = (0, (v - u)A^n b).$$

Como $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$, pelo Teorema de Cayley-Hamilton, existe um polinômio não trivial $p(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$ no qual $p(A) = 0$. Assim,

$$A^n = -(c_{n-1}A^{n-1} + \dots + c_1A + c_0I)$$

$$A^n b = -(c_{n-1}A^{n-1}b + \dots + c_1Ab + c_0b)$$

com algum $c_i \neq 0$. Com isso $A^n b \in \text{ger}\{b, Ab, A^2B, \dots, A^{n-1}b\}$. A parte linear de $\mathfrak{Lie}\Sigma$ é sempre A , já na parte constante aparecem elementos da forma b, Ab, A^2B, \dots . Então,

$$\mathfrak{Lie}\Sigma = \{(\lambda A, c) \in \mathfrak{af}(n), \text{ tal que } \lambda \in \mathbb{R}, c \in C\}$$

onde $C = \text{ger}\{b, Ab, A^2B, \dots, A^{n-1}b\}$ é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^n .

Com a álgebra de Lie $\mathfrak{Lie}\Sigma$ descrita, é possível descrever o grupo G_Σ e em seguida o semigrupo S_Σ .

Como G_Σ é o único subgrupo de Lie cuja álgebra é $\mathfrak{Lie}\Sigma$, exponenciando $\mathfrak{Lie}\Sigma$, concluímos que G_Σ é produto semidireto entre o subgrupo a um-parâmetro e C , isto é

$$G_\Sigma = \{\exp tA; t \in \mathbb{R}\} \times C.$$

Assim, S_Σ é o produto semidireto entre $\{\exp tA; t \geq 0\}$ e C , ou seja

$$S_\Sigma = \{\exp tA; t \geq 0\} \times C.$$

Pelo Teorema 1.9, temos que $\tilde{\Sigma}$ é controlável se, e somente se, o semigrupo S_Σ age transitivamente em \mathbb{R}^n , ou seja, devemos mostrar que

$$\theta_{S_\Sigma}(x) = \mathbb{R}^n$$

qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Sabemos que $(\exp tA, c)(x) = (\exp tA) \cdot x + c$, logo

$$\theta_{S_\Sigma}(x) = \{(\exp tA) \cdot x + c, \text{ tal que } t \geq 0 \text{ e } c \in C\}.$$

Observe que a órbita do elemento $0 \in \mathbb{R}^n$ coincide com o conjunto C , pois

$$\theta_{S_\Sigma}(0) = (\exp tA, c) \cdot (0) = c$$

no qual $c \in \text{ger}\{b, Ab, A^2B, \dots, A^{n-1}b\}$.

A demonstração do Teorema de *Kalman* é uma consequência do exposto até o momento. Segue a demonstração do Teorema de *Kalman*, lembre que $C = \text{ger}\{b, Ab, A^2B, \dots, A^{n-1}b\}$.

Teorema (*Teorema de Kalman*) O sistema linear $\dot{x} = Ax + ub$ é controlável se, e somente se, o conjunto $\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ gera \mathbb{R}^n .

Demonstração: Suponhamos que o sistema linear é controlável, logo o conjunto $\theta_{S_\Sigma}(x)$ coincide com \mathbb{R}^n , qualquer $x \in \mathbb{R}^n$. Em particular, considerando $x = 0 \in \mathbb{R}^n$, $\theta_{S_\Sigma}(0) = \mathbb{R}^n$. Mostramos anteriormente, que o conjunto $\theta_{S_\Sigma}(0)$ coincide com C , ou seja, $\text{ger}\{b, Ab, \dots, A^{n-1}b\}$ coincide com \mathbb{R}^n .

Reciprocamente, se $\text{ger}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\}$ coincide com \mathbb{R}^n , para mostrar que o sistema é controlável, devemos verificar que $\theta_{S_\Sigma}(x) = \mathbb{R}^n$ qualquer x em \mathbb{R}^n . Mostramos que $\theta_{S_\Sigma}(x) = \{(\exp tA) \cdot x + c, \text{ em que } t \geq 0 \text{ e } c \in C\}$, como estamos supondo que $\text{ger}\{b, Ab, A^2b, \dots, A^{n-1}b\} = \mathbb{R}^n$, o sistema é controlável. □

Assim, demonstramos o Teorema de *Kalman* e para terminar o capítulo, faremos uma aplicação simples do mesmo.

Exemplo 3.6 *Considere o sistema linear*

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} x + u(\alpha, \beta)$$

onde $x \in \mathbb{R}^2$ e $b = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_0^2$.

Como a expressão Ab é dada por $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha + \beta \end{bmatrix}$, pelo Teorema de Kalman, o sistema acima é controlável se o conjunto $\text{ger}\{(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha + \beta)\}$ coincide com \mathbb{R}^2 .

Se $\alpha = 0$, o conjunto $\text{ger}\{(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha + \beta)\}$ é dado por: $\text{ger}\{(0, \beta), (0, 0 + \beta)\}$ que, claramente, não coincide com \mathbb{R}^2 , pelo Teorema de Kalman o sistema não é controlável.

Se $\alpha \neq 0$, o conjunto $\{(\alpha, \beta), (\alpha, \alpha + \beta)\}$ gera \mathbb{R}^2 , conseqüentemente o sistema é controlável.

Capítulo 4

Controlabilidade de Sistemas Bilineares Bidimensionais

Neste capítulo, estudaremos condições necessárias e suficientes para a controlabilidade do sistema bilinear

$$\dot{x} = (A + uB)x, \quad (4.1)$$

com controle irrestrito $u \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$ e $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

Associado ao sistema acima, temos a família de campos vetoriais

$$\Gamma = \{A + uB, \text{ tal que } u \in \mathbb{R}\}$$

e o respectivo semigrupo

$$S_\Gamma = \{e^{t_1(A+u_1B)} \cdot e^{t_2(A+u_2B)} \dots e^{t_k(A+u_kB)}, \text{ tal que } t_i \geq 0, u_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$$

do subgrupo

$$G_\Gamma = \{e^{t_1(A+u_1B)} \cdot e^{t_2(A+u_2B)} \dots e^{t_k(A+u_kB)}, \text{ tal que } t_i \in \mathbb{R}, u_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}$$

de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$

Estudar a controlabilidade do sistema (4.1) é equivalente a estudar a transitividade do semigrupo S_Γ na variedade conexa $\mathbb{R}_0^2 := \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$. Obviamente, uma condição necessária para que isto ocorra é a transitividade da ação do grupo G_Γ em \mathbb{R}_0^2 .

Portanto, primeiro precisamos encontrar os subgrupos conexos do grupo $\text{GL}(2, \mathbb{R})$ que são transitivos em \mathbb{R}_0^2 e depois analisar os seus semigrupos de interior não-vazio.

Pelo Teorema 2.14 os subgrupos conexos de $\text{GL}(2, \mathbb{R})$, transitivos em \mathbb{R}_0^2 são:

$$\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R}), \quad \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^+ I$$

cujas álgebras de Lie são:

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}), \quad \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \quad \text{e} \quad \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} I$$

Este capítulo tem a seguinte divisão: As duas primeiras seções tratam de condições para que um semigrupo de interior não-vazio coincida com o grupo $\mathrm{GL}^+(2, \mathbb{R})$ ou o grupo $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. No caso $G_\Sigma = \mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^+ I$, esta análise não é necessária, pois o grupo em questão é abeliano. As três últimas seções tratam da controlabilidade e conclusões.

Como o interior do semigrupo S_Σ é não-vazio em G_Σ , pelo Teorema 1.4 consideramos matrizes A e B tais que $\mathcal{L}ie\{A, B\}$ coincide com alguma das três álgebras citadas anteriormente.

Um outro sistema de campos vetoriais, associado ao sistema bilinear considerado, é $\Sigma = \{A \pm B\}$ que obviamente, gera a mesma subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ que o conjunto de campos vetoriais Γ . Iniciamos o capítulo mostrando que estudar a controlabilidade do conjunto de campos vetoriais Σ é equivalente a estudar a controlabilidade do conjunto de campos Γ , ou seja, considerando o semigrupo

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k}, \text{ tal que } t_i \geq 0, X_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$$

associado a Σ , temos que S_Γ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se, e somente se, S_Σ o for.

Antes disto, precisamos lembrar algumas questões sobre o produto de Campbell-Hausdorff. A referência para este tópico é [17], seção 2.15. O produto de Campbell-Hausdorff entre os elementos X, Y de uma álgebra de Lie é dado por:

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X, Y] + \frac{1}{12}[X, [X, Y]] + \frac{1}{12}[Y, [X, Y]] + \frac{1}{48}[[X, [X, Y]], Y] + \dots$$

Esta série sempre converge para X e Y suficientemente pequenos. Além disto, temos que

$$e^{X*Y} = e^X e^Y \quad \text{e} \quad X + Y = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n} X * \frac{1}{n} Y \right).$$

Segundo as observações feitas, somente faz sentido considerar os campos vetoriais A e B que geram, como álgebra de Lie, uma das álgebras transitivas que já foram citadas. Assumimos esta hipótese em todo este capítulo, lembrando que um semigrupo é controlável se sua ação for transitiva.

Lema 4.1 *Se S é um semigrupo de $GL(2, \mathbb{R})$ e $\text{int}(Sx)$ é não-vazio com $\overline{S(x)} = \mathbb{R}_0^2$ para todo $x \in \mathbb{R}_0^2$. Então, S é controlável.*

Demonstração: Sejam $x, y \in \mathbb{R}_0^2$. Como $\text{int}(Sy)$ é não-vazio, e $S(x)$ é denso em \mathbb{R}_0^2 , temos que $S^{-1}(y) \cap S(x) \neq \emptyset$. Seja z um elemento desta interseção. Neste caso, existem elementos, digamos b e a em S , tais que $z = b^{-1}y = ax$. Portanto $(ba)x = y$ e y pertence à órbita $S(x)$. Isto mostra a controlabilidade de S . □

Teorema 4.2 *O semigrupo S_Γ é controlável se, e somente se, S_Σ o for.*

Demonstração: Seja $x \in \mathbb{R}_0^2$ um elemento arbitrário. Afirmamos que $e^B x$ pertence a $\overline{S_\Gamma(x)}$. Para isto observe que

$$e^B x = e^{\lim_{u \rightarrow \infty} (\frac{1}{u}A+B)} x = e^{\lim_{u \rightarrow \infty} \frac{1}{u}(A+uB)} x$$

e, como $e^{\frac{1}{u}(A+uB)}(x)$ pertence a $S_\Gamma(x)$ para qualquer $u \in \mathbb{R}^*$, segue que $e^B x \in \overline{S_\Gamma(x)}$. Analogamente, mostramos que $e^{-B}x \in \overline{S_\Gamma(x)}$ e, como $e^A x \in \overline{S_\Gamma(x)}$, então $S_\Sigma(x)$ está contido em $\overline{S_\Gamma(x)}$. Portanto, se S_Σ for controlável, o mesmo ocorrerá com S_Γ e, pelo lema anterior, S_Γ é controlável.

Reciprocamente, suponhamos que S_Γ seja controlável. Se $x \in \mathbb{R}_0^2$, pelo produto de Campbell-Hausdorff, temos que

$$e^{tA+tuB} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n(\frac{t}{n}A * \frac{tu}{n}B)} = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{t}{n}A * \frac{tu}{n}B})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{tu}{n}B})^n.$$

Mas $e^{\frac{t}{n}A} e^{\frac{tu}{n}B}$ pertence a S_Σ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e, então, $e^{tA+tuB}x \in \overline{S_\Gamma(x)}$. Logo $S_\Gamma(x) \subset \overline{S_\Sigma(x)}$ e o resultado segue como consequência do Lema anterior. □

A importância destes resultados preliminares reside no fato de que, estudar a controlabilidade do sistema bilinear considerado, é equivalente a estudar a transitividade do semigrupo de interior não-vazio

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k}, \text{ tal que } t_i \geq 0, X_i \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}$$

em \mathbb{R}_0^2 no sentido em que: Dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}_0^2$, existe $g \in S_\Sigma$ tal que $gx = y$. Isto será feito analisando sistematicamente as trajetórias dos campos vetoriais A e $\pm B$.

4.1 Semigrupos em $SL(2, \mathbb{R})$

Como já mencionamos, estudar a controlabilidade de um sistema de campos vetoriais é equivalente a estudar a transitividade do semigrupo associado ao campo de vetores. Nesta direção, o estudo de condições sobre as quais um semigrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ coincide com este grupo, é de fundamental importância. Nesta seção, trataremos exclusivamente desta questão. O principal resultado, Teorema 4.8, estabelece que: Se S é um semigrupo de interior não-vazio de $SL(2, \mathbb{R})$, cuja ação induzida no espaço projetivo $\mathbb{R}P^1$ é transitiva, então $S = SL(2, \mathbb{R})$.

Denote por $\mathbb{R}P^1$ o espaço projetivo unidimensional. Para cada $v \in \mathbb{R}_0^2$, denote por $[v] \in \mathbb{R}P^1$ o subespaço gerado por v .

Temos que a ação de $SL(2, \mathbb{R})$ é transitiva em \mathbb{R}_0^2 , veja Teorema 2.14 e, portanto, também o é em $\mathbb{R}P^1$ pela ação projetiva natural de $SL(2, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}P^1$ a qual é dada por:

$$\begin{aligned} \theta : SL(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}P^1 &\rightarrow \mathbb{R}P^1 \\ (g, [v]) &\mapsto [gv] \end{aligned}$$

Uma primeira condição, para que um semigrupo de $SL(2, \mathbb{R})$ coincida com o mesmo, é estabelecida no próximo Lema.

Lema 4.3 *Se $S \subset SL(2, \mathbb{R})$ é um semigrupo e existe algum X em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com autovalores imaginários puros tal que $\exp X$ está no interior de S . Então $S = SL(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Como o traço de X é zero e seus autovalores são imaginários puros temos que, em alguma base conveniente de \mathbb{R}^2 ,

$$X = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } a \neq 0.$$

Com isto,

$$\exp(tX) = \begin{bmatrix} \cos(ta) & -\text{sen}(ta) \\ \text{sen}(ta) & \cos(ta) \end{bmatrix}$$

e, como $\exp X$ pertence ao interior de S , existe $\epsilon > 0$, tal que

$$h = \begin{bmatrix} \cos(u) & -\text{sen}(u) \\ \text{sen}(u) & \cos(u) \end{bmatrix}$$

pertence ao interior de S para $a - \epsilon < u < a + \epsilon$.

Mas

$$(h)^n = \begin{bmatrix} \cos(nu) & -\operatorname{sen}(nu) \\ \operatorname{sen}(nu) & \cos(nu) \end{bmatrix},$$

logo escolhendo inteiros positivos n e k , tais que $a - \epsilon < \frac{2\pi k}{n} < a + \epsilon$, obtemos

$$(h)^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Assim a identidade do grupo está no interior do semigrupo e portanto $S = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$. □

Lema 4.4 *Seja S um semigrupo de interior não-vazio de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$. Se existe X em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ nilpotente tal que $\exp X$ pertence ao interior de S , então $S = \operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.3, basta mostrarmos que existe algum elemento $h \in \operatorname{int} S$ que é exponencial de alguma matriz em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com autovalores imaginários puros.

Se $X = 0$, não há o que fazer.

Caso contrário, existe uma base onde X pode ser escrito na forma $X = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Seja $g = \exp X$. Como g está no interior de S , existe $\epsilon > 0$, suficientemente pequeno, tal que $h = \exp \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{bmatrix}$ pertence ao interior de S , já que a aplicação exponencial é contínua.

Mas $Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\epsilon & 0 \end{bmatrix}$ possui autovalores imaginários puros e portanto, pelo Lema 4.3, temos o resultado. □

Lema 4.5 *Se S é um semigrupo de interior não-vazio de $\operatorname{SL}(2, \mathbb{R})$ transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Então, dado v em \mathbb{R}_0^2 , existem w em \mathbb{R}_0^2 e $h \in \operatorname{int} S$ tais que $\{v, w\}$ é base de \mathbb{R}^2 , mais ainda, na base $\{v, w\}$, h se escreve como*

$$h = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}, \text{ para algum } \mu > 0.$$

Demonstração: Seja $v \in \mathbb{R}_0^2$. Como interior de S é não-vazio, tomemos $h_1 \in \text{int}S$. Pela transitividade de S em $\mathbb{R}P^1$ existe h_2 em S tal que

$$h_2[h_1v] = [v],$$

ou seja, $h_2h_1[v] = [v]$. Como $\text{int}S$ é um ideal de S , $h_2h_1 \in \text{int}S$ e assim existe algum elemento no interior de S que fixa v . Denote tal elemento por g . Seja agora $u \in \mathbb{R}_0^2$, tal que $\{v, u\}$ seja base de \mathbb{R}^2 . Como v é autovetor de g temos que, na base $\{v, u\}$, o elemento g pode ser escrito como

$$g = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } a, b \in \mathbb{R} \text{ e } a \neq 0.$$

Mas $g \in \text{int}S$ e então potências de g também estão no interior de S . Portanto g^2 pertence ao interior de S e, na base $\{v, u\}$, pode ser escrito na forma

$$g^2 = \begin{bmatrix} \mu & c \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}$$

onde $\mu > 0$ e $c \in \mathbb{R}$. Se $\mu = 1$ então $g^2 = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e, como $\exp \begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ então, pelo Lema 4.4, temos que $S = \text{SL}(2, \mathbb{R})$. Nesse caso, a identidade $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ pertence ao interior de S e tal elemento é diagonal na base $\{v, u\}$. Se $\mu \neq 1$ considere $w = u + \frac{c}{(\mu^{-1}-\mu)}v$. Neste caso a matriz de $h = g^2$ na base $\{v, w\}$ tem a forma procurada pois, como na base $\{v, u\}$, $h = \begin{bmatrix} \mu & c \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}$ então $h(v) = \mu v$ e $h(u) = cv + \mu^{-1}u$. Logo $h(w) = h(u) + \frac{c}{(\mu^{-1}-\mu)}h(v) = \dots = \mu^{-1}w$ e portanto na base $\{v, w\}$, h possui a forma desejada. □

Para a demonstração do próximo resultado, usamos o fato que as matrizes $\begin{bmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & c \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} d & b \\ -b^{-1} & 0 \end{bmatrix}$, com a e b não nulos, podem ser escritas como

$$\begin{bmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} d & b \\ -b^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-d}{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Lema 4.6 *Seja $S \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$ semigrupo com interior não-vazio e transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Dado $v \in \mathbb{R}_0^2$ existe $\xi \in \mathbb{R}_0^2$ e h no interior de S tal que $\{v, \xi\}$ é base de \mathbb{R}^2 e h , nessa base, pode ser escrito como*

$$h = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda > 1.$$

Demonstração: Seja $\{v, w\}$ a base mencionada no Lema 4.5. Como S é transitivo em $\mathbb{R}P^1$, existem g_1 e g_2 em S tais que $g_1[v] = [w]$ e $g_2[w] = [v]$. Logo $g_1v = aw$, para algum $a \neq 0$. Assim, lembrando que $g_1 \in S \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$, podemos na base $\{v, w\}$, escrever g_1 como

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & -a^{-1} \\ a & c \end{bmatrix}.$$

Temos, também, que $g_2w = bv$, com $b \neq 0$. Da mesma forma, na base $\{v, w\}$, g_2 pode ser escrito como

$$g_2 = \begin{bmatrix} d & b \\ -b^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Pelo observado antes deste Lema, g_1 e g_2 podem ser escritos como

$$g_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} h_1 n_1 \quad \text{e} \quad g_2 = h_2 n_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

onde

$$h_1 = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad n_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad h_2 = \begin{bmatrix} b & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{bmatrix} \quad ; \quad n_2 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-d}{b} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com a e b não-nulos.

Agora, seja

$$h = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \mu > 0$$

na base $\{v, w\}$ como no Lema 4.5.

Se $\mu > 1$, não há o que fazer. Caso contrário, μ^n é tão pequeno quanto se deseje e não é restritivo considerar, no restante da demonstração, $h^n \in \text{int}S$ ao invés de h e μ^n no lugar de μ .

Como h está no interior de S , dados g_1 e $g_2 \in S$, temos que $g_2 h g_1 \in \text{int}S$, pois $\text{int}S$ é ideal em S . Usando a decomposição de g_1 e g_2 , temos que

$$g_2 h g_1 = h_2 n_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} h_1 n_1 = h_2 n_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} h_1 n_1.$$

Como

$$n_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & \mu^{-1} \end{bmatrix} n_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

então, $g_2 h g_1 = h_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix} h_1 n_1$. Da mesma forma, conseguimos deslocar h_1 para a esquerda. Logo

$$g_2 h g_1 = h_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} h_1 \begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $g_2 h g_1 = h_3 n_3$, onde

$$h_3 = h_2 \begin{bmatrix} \mu^{-1} & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} h_1 \quad \text{e} \quad n_3 = \begin{bmatrix} 1 & \star \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obtemos assim, que $h_3 = \begin{bmatrix} ab\mu^{-1} & 0 \\ 0 & a^{-1}b^{-1}\mu \end{bmatrix}$ com a e b não-nulos. Considerando $\mu > 0$ suficientemente pequeno, temos que $\lambda = ab\mu^{-1} > 1$. Logo

$$h_3 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda > 1.$$

Assim, $h_3 n_3 = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda^* \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}$ na base $\{v, w\}$, com $\lambda > 1$. Considere $\xi = w + \frac{\lambda^*}{(\lambda^{-1}-\lambda)}v$. Temos que $h_3 n_3$ pode ser representado na base $\{v, \xi\}$ na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda > 1.$$

Como $g_2 h g_1 = h_3 n_3 \in \text{int}S$, terminamos a demonstração do lema. □

Antes do próximo Teorema, observemos o seguinte:

Observação 4.7 Considere o intervalo $(a, b) \subset \mathbb{R}^+$. Se $1 < a < b$, então existe T_0 , tal que (T_0, ∞) está contido em $\bigcup_{n \geq 1} (a^n, b^n)$. Se $0 < c < d < 1$, existe T_1 , com $0 < T_1 < 1$, tal que $(0, T_1)$ está contido em $\bigcup_{n \geq 1} (c^n, d^n)$.

Teorema 4.8 *Se $S \subset \text{SL}(2, \mathbb{R})$ semigrupo de interior não-vazio, transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Então, $S = \text{SL}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Pelo Lema 4.6, dado $v \in \mathbb{R}_0^2$, existe uma base $\{v, \xi\}$ de \mathbb{R}^2 e $h \in \text{int}S$ tal que h , nesta base, pode ser escrito como

$$h = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda > 1.$$

Além do mais, dado $\xi \in \mathbb{R}_0^2$, existem $\zeta \in \mathbb{R}_0^2$ e $g \in \text{int}S$, tais que $\{\zeta, \xi\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 e g , nesta base, se escreve como

$$g = \begin{bmatrix} \eta^{-1} & 0 \\ 0 & \eta \end{bmatrix}, \text{ com } \eta > 1.$$

Na base $\{v, \xi\}$, o elemento g acima pode ser representado por

$$\begin{bmatrix} \eta^{-1} & 0 \\ c & \eta \end{bmatrix}, \text{ com } \eta > 1.$$

Como $h \in \text{int}S$, potências de h e de suas vizinhanças pertencem ao interior de S . Pela observação anterior, existe $T_0' > 0$ de tal forma que para todo $t > T_0'$, o elemento

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}$$

pertence ao interior de S .

Analogamente, como $g \in \text{int}S$, existe $T_0'' > 0$, onde para todo $t > T_0''$, existe um elemento no interior de S que pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ c & t \end{bmatrix}.$$

Seja $T_0 = \max\{T_0', T_0''\}$. Para todo $t > T_0$, existem elementos no interior de S que podem ser escritos como o produto

$$\begin{bmatrix} t & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^{-1} & 0 \\ c & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ct^{-1} & 1 \end{bmatrix} = \exp \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ ct^{-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, obtemos um elemento no interior do semigrupo, que é exponencial de um elemento nilpotente da álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Portanto, pelo Lema 4.4, temos que $S = \text{SL}(2, \mathbb{R})$. □

Nos próximos resultados, denotamos o fecho por fe.

Lema 4.9 *Se S é um semigrupo com interior não-vazio em $\mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Então $\mathrm{fe}(Sx) = \mathbb{R}P^1$ para qualquer x em $\mathbb{R}P^1$ se, e somente se, S é transitivo em $\mathbb{R}P^1$.*

Demonstração: Suponhamos que $\mathrm{fe}(Sx) = \mathbb{R}P^1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}P^1$. Como o interior de S é não-vazio, temos que o conjunto $S^{-1} = \{g^{-1}, \text{ tal que } g \in S\}$, também tem interior não-vazio. Dado $y \in \mathbb{R}P^1$, temos que $S^{-1}y$ é um subconjunto de $\mathbb{R}P^1$ com interior não-vazio.

Como Sx é denso em $\mathbb{R}P^1$, então $Sx \cap S^{-1}y \neq \emptyset$. Considerando z nesta interseção, temos que $z = g_1x = g_2^{-1}y$ para certos $g_1, g_2 \in S$. Assim $g_2g_1x = y$, como $g_2g_1 \in S$, temos que S é transitivo em $\mathbb{R}P^1$.

Por outro lado, se S é transitivo em $\mathbb{R}P^1$, dado $x \in \mathbb{R}P^1$ temos que $Sx = \mathbb{R}P^1$. Como $Sx \subset \mathrm{fe}(Sx)$, obtemos que $\mathbb{R}P^1 \subset \mathrm{fe}(Sx)$. Portanto $\mathrm{fe}(Sx) = \mathbb{R}P^1$. □

Teorema 4.10 *Se $S \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ é semigrupo de interior não-vazio. Então $S \neq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto próprio $C \subset \mathbb{R}P^1$, com interior não-vazio e S invariante, ou seja, $SC \subset C$.*

Demonstração: Suponhamos por absurdo, que não exista tal compacto. Neste caso, todo compacto em $\mathbb{R}P^1$, com interior não-vazio e S invariante, coincide com $\mathbb{R}P^1$. Observemos que $\mathrm{fe}(Sx)$ é um compacto de $\mathbb{R}P^1$ para qualquer $x \in \mathbb{R}P^1$.

Como $S(Sx) \subset Sx$, então Sx é S invariante. Assim, temos que $\mathrm{fe}(Sx)$ também é S invariante. Como o interior de S é diferente do vazio, temos que o interior do conjunto $\mathrm{fe}(Sx)$ também o é. Portanto $\mathrm{fe}(Sx) = \mathbb{R}P^1$ para qualquer x em $\mathbb{R}P^1$ e daí, pelo Lema 4.9, temos que $S = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$, contrariando a hipótese assumida.

Reciprocamente, se existe tal compacto C , considere $y \in \mathbb{R}P^1 - \{C\}$. Como C é S invariante, para qualquer $x \in C$, não existe elemento $g \in S$, tal que $gx = y$. Logo S não é transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Portanto $S \neq \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. □

Observação 4.11 *Como consequência do Teorema 4.8, temos que um semigrupo de interior não-vazio $S \subset \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 se, e somente se, $S = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. De fato: A transitividade em \mathbb{R}_0^2 implica a transitividade em $\mathbb{R}P^1$.*

4.2 Semigrupos em $GL^+(2, \mathbb{R})$

Seja $g \in GL^+(2, \mathbb{R})$. Neste caso, $\det(g) > 0$ e $\det(\frac{1}{\sqrt{\det g}}g) = (\frac{1}{\sqrt{\det g}})^2 \det g = 1$. Portanto a aplicação

$$\pi : GL^+(2, \mathbb{R}) \rightarrow SL(2, \mathbb{R}),$$

dada por

$$\pi(g) = \frac{1}{\sqrt{\det g}}g,$$

está bem definida. Além disso, π é um homomorfismo e $\text{Ker}\pi = \mathbb{R}^+I$. Logo $\text{Ker}\pi$ é isomorfo ao grupo (\mathbb{R}^+, \cdot) .

Como π é uma aplicação aberta, se $S \subset GL^+(2, \mathbb{R})$ é um semigrupo de interior não-vazio, o mesmo acontece com o semigrupo $\pi(S)$ de $SL(2, \mathbb{R})$. Para o próximo resultado, consideremos π a aplicação anterior.

Proposição 4.12 *Se $S \subset GL^+(2, \mathbb{R})$ é um semigrupo com interior não-vazio tal que $\pi(S) = SL(2, \mathbb{R})$. Então existe algum semigrupo Γ de \mathbb{R}^+ , com interior não-vazio, tal que*

$$S \cap \text{Ker}\pi = \Gamma I.$$

Além disso, $S = GL^+(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, existem λ_1, λ_2 em Γ , com $\lambda_1 > 1$ e $\lambda_2 < 1$, tais que $\lambda_1 I$ e $\lambda_2 I \in S$.

Demonstração: Como interseção de semigrupos é semigrupo, $S \cap \text{Ker}\pi$ é semigrupo. Assim basta mostrar que $S \cap \text{Ker}\pi$ é não-vazio.

De fato, como o interior de S é não-vazio, tomemos $g \in \text{int}S$, temos que $\pi(g) \in SL(2, \mathbb{R})$. Como $SL(2, \mathbb{R})$ é grupo, temos que $(\pi(g))^{-1} \in SL(2, \mathbb{R})$. Por hipótese, temos que π restrito a S é sobrejetor. Logo existe algum $h \in S$ com $\pi(h) = (\pi(g))^{-1}$ e assim hg pertence a $\text{Ker}\pi$. Como $g \in \text{int}S$ e $h \in S$ segue que $hg \in \text{int}S$. Isto mostra que a interseção $\text{int}S \cap \text{Ker}\pi$ é não-vazia. Conseqüentemente $S \cap \text{Ker}\pi \neq \emptyset$ e demonstramos a primeira afirmação.

Para a última afirmação, começamos supondo que $S = GL^+(2, \mathbb{R})$. Como $\text{Ker}\pi \subset GL^+(2, \mathbb{R})$, temos que $S \cap \text{Ker}\pi = \text{Ker}\pi$. Como $\text{Ker}\pi = \mathbb{R}^+I$, pela afirmação anterior segue que $\Gamma = \mathbb{R}^+$ e existem λ_1, λ_2 em Γ , com $\lambda_1 > 1$ e $\lambda_2 < 1$, tais que $\lambda_1 I$ e $\lambda_2 I$ estão em S .

Para a recíproca, usaremos a Observação 4.7. Seja λ_1 em Γ com $\lambda_1 > 1$. Como interior de Γ é não-vazio, seja $a \in \text{int}\Gamma$, temos que $\lambda_1 a$ pertence ao interior de Γ .

Assim, $\lambda_1^n a \in \text{int}S$ para qualquer n natural. Como $\lambda_1 > 1$ temos que, existe algum elemento no interior de S tão grande quanto se deseje. Chame tal elemento de b . Como $b \in \text{int}S$, existe $\epsilon_1 > 0$, tal que $b + \epsilon_1$ pertence ao interior de S , com $1 < b < b + \epsilon_1$.

Pela Observação 4.7, existe $T_1 > 1$, tal que (T_1, ∞) está contido em $\bigcup_{n>1} (b^n, (b + \epsilon_1)^n)$. Como $b, b + \epsilon_1 \in \text{int}\Gamma$, temos que $\bigcup_{n>1} (b^n, (b + \epsilon_1)^n)$ também. Conseqüentemente temos que (T_1, ∞) está contido no interior de Γ .

Consideramos agora $\lambda_2 < 1$, analogamente, existe algum elemento no interior de Γ tão próximo de zero quanto se deseje. Denotamos tal elemento por c . Como $c \in \text{int}S$, existe $\epsilon_2 > 0$, tal que $c - \epsilon_2 \in \text{int}S$. Logo da desigualdade $0 < c - \epsilon_2 < c < 1$, temos que existe T_2 , com $0 < T_2 < 1$, tal que $(0, T_2) \in \text{int}\Gamma$.

Logo existe algum $\rho \in \text{int}\Gamma$, de tal forma que seu inverso ρ^{-1} também pertence ao interior de Γ . Daí a unidade de \mathbb{R} pertence ao interior de Γ e portanto $\Gamma = \mathbb{R}^+$.

Como $\Gamma = \mathbb{R}^+$, temos que $S \cap \text{Ker}\pi = \mathbb{R}^+I$ e, assim, $\mathbb{R}^+I \subset S$. Como $\text{Ker}\pi = \mathbb{R}^+I$, concluímos que $\text{Ker}\pi \subset S$.

Para concluir que $S = \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$, seja $g \in \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$. Como $\pi(g) \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ e, por hipótese, $\text{SL}(2, \mathbb{R}) = \pi(S)$, temos que, existe algum elemento $h \in S$ tal que $\pi(g) = \pi(h)$. Logo $gh^{-1} \in \text{Ker}\pi$ e como foi mostrado que $\text{Ker}\pi \subset S$, temos que $gh^{-1} \in S$. Então $g \in S$, pois $h \in S$ e, portanto, $\text{GL}^+(2, \mathbb{R}) = S$. □

4.3 Controlabilidade no Caso $\text{SL}(2, \mathbb{R})$

O objetivo desta seção é analisar a controlabilidade do sistema bilinear $\dot{x} = Ax + uBx$ no caso em que o grupo G_Σ associado ao conjunto de campos vetoriais $\Sigma = \{A, \pm B\}$ coincide com $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Neste caso, a álgebra de Lie gerada por $\{A, \pm B\}$ deve coincidir com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Para verificar esta última condição começamos com o lema abaixo.

Lema 4.13 *Sejam A e B matrizes não-nulas de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se $\det B > 0$, então $\det[A, B] \leq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, A é múltiplo de B . Além disso, $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.*

Demonstração: Se $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $\det B > 0$, conforme aparece na demonstração do Lema 2.7, existe uma base γ de \mathbb{R}^2 tal que B , nesta base, se escreve como

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } a \neq 0.$$

Observemos que, neste caso, B é anti-simétrica. Seja A na base γ , $A = \begin{bmatrix} b & c \\ d & -b \end{bmatrix}$.

Podemos ainda, reescrever A na seguinte forma: $A = (A - A^t) + A^t = A_1 + A_2$, onde $A_1 = (A - A^t)$ e $A_2 = A^t$. Observemos que A_1 é anti-simétrica e A_2 é simétrica. Logo A_1 é múltiplo de B , acarretando $[A_1, B] = 0$ e portanto, $[A, B] = AB - BA = A_2B - BA_2 = [A_2, B]$. Mas

$$[A_2, B] = \begin{bmatrix} a(c+d) & -2ab \\ -2ab & -a(c+d) \end{bmatrix},$$

assim $\det[A, B] = \det[A_2, B] = -a^2((c+d)^2 + 4b^2) \leq 0$.

Se $\det[A, B] = 0$, então $-a^2((c+d)^2 + 4b^2) = 0$. Como $a \neq 0$, temos que $(c+d)^2 + 4b^2 = 0$, isto é, $c = -d$ e $b = 0$. Logo $A = \begin{bmatrix} 0 & -d \\ d & 0 \end{bmatrix}$ e portanto, A é múltiplo de B .

Reciprocamente, se $A = \lambda B$, temos que $[A, B] = 0$ e daí, $\det[A, B] = 0$.

Resta mostrar a segunda afirmação.

Se $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente temos, em particular, que A não é múltiplo de B . Neste caso, pela primeira afirmação, $\det[A, B] \neq 0$ e assim $\det[A, B] < 0$.

Reciprocamente, se $\det[A, B] < 0$, em particular $\det[A, B] \neq 0$ e pela primeira afirmação, segue que A não é múltiplo de B . Suponhamos que A seja múltiplo de $[A, B]$. Como $[A, B] = [A_2, B]$ é simétrico, concluímos que o mesmo ocorre com A e daí cálculos simples implicam que $A = 0$, absurdo. Como $[A, B]$ é simétrico e B é anti-simétrica, temos que B não é múltiplo de $[A, B]$. Portanto, se $\det[A, B] < 0$, então o conjunto $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente. □

Pelo Lema anterior, concluímos que: Se $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com $\det B > 0$, então o semigrupo induzido por $\{A, \pm B\}$ em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ possui interior não-vazio se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.

Lema 4.14 *Sejam A e B matrizes não-nulas em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se $\det B = 0$, então $\det[A, B] \leq 0$ e a igualdade ocorre se, e somente se, $[A, B]$ é múltiplo de B . Além disso, $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.*

Demonstração: Como $B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, pela demonstração do Lema 2.7, existe uma base β de \mathbb{R}^2 tal que B , na base β se escreve como $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Seja $A = \begin{bmatrix} b & c \\ d & -b \end{bmatrix}$ na base β . Calculando o colchete, temos que:

$$[A, B] = AB - BA = \begin{bmatrix} -d & 2b \\ 0 & d \end{bmatrix}.$$

Logo $\det[A, B] = -d^2 \leq 0$.

Se $\det[A, B] = 0$, então $d = 0$ e portanto, $[A, B] = \begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ é múltiplo de B . Reciprocamente, se $[A, B] = \lambda B$, então $\det[A, B] = \det(\lambda B) = 0$.

Suponhamos agora, que $\{A, B, [A, B]\}$ seja linearmente independente. Neste caso, $[A, B]$ não é múltiplo de B e pela primeira afirmação, segue que $\det[A, B] < 0$.

Por outro lado, como $\det[A, B] < 0$, temos que $\det[A, B] \neq 0$ e pela primeira afirmação, segue que $[A, B]$ não é múltiplo de B . Se $[A, B]$ é múltiplo de A , temos que $A = 0$ e conseqüentemente, $\det[A, B] = 0$, contrariando a hipótese assumida. Temos que A não é múltiplo de B , caso contrário $[A, B] = 0$ e teríamos $\det[A, B] = 0$. Portanto o conjunto $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente. □

Como consequência do Lema 4.14, concluímos que se $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ com $\det B = 0$, então o semigrupo induzido por $\{A, \pm B\}$ possui interior não-vazio em $SL(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.

Lema 4.15 *A álgebra de Lie gerada por A e B em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ coincide com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, $\det[A, B] \neq 0$.*

Demonstração: Sabemos que a álgebra de Lie gerada por A e B é o menor subespaço de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ que contém $\{A, B\}$ e seus colchetes. Como a dimensão de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ é três, $\mathfrak{Lie}\{A, B\} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ se o conjunto $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente.

Pelos Lemas 4.13 e 4.14, se o determinante de A ou de B é maior ou igual a zero, então não só é diferente de zero, como menor. Para concluir o resultado, falta

analisar o caso em que o determinante de A e de B são simultaneamente menores que zero.

Suponhamos que $\det A < 0$ e $\det B < 0$. Pela demonstração do Lema 2.7, existe uma base de \mathbb{R}^2 , tal que nesta base, A e B se escrevem como

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}, \text{ com } a \neq 0 \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} b & c \\ d & -b \end{bmatrix}, \text{ com } -b^2 - cd < 0.$$

$$\text{Logo } [A, B] = \begin{bmatrix} 0 & 2ac \\ -2ad & 0 \end{bmatrix} \text{ e portanto, } \det[A, B] = 4a^2cd.$$

Suponhamos que $\mathfrak{Lie}\{A, B\} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e que $\det[A, B] = 0$. Neste caso, como $a \neq 0$, temos que $cd = 0$.

Se $c = 0$, então A, B e $[A, B]$ são matrizes triangulares inferiores. Logo B pode ser escrito como: $B = \frac{b}{a}A - \frac{1}{2a}[A, B]$, contrariando a hipótese assumida.

Se $d = 0$, então A, B e $[A, B]$ são matrizes triangulares superiores e, de maneira análoga, $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente dependente.

Reciprocamente, suponhamos que $\det[A, B] \neq 0$, neste caso $cd \neq 0$, ou seja, $c \neq 0$ e $d \neq 0$.

Considerando uma combinação linear nula de A, B e $[A, B]$.

$$\lambda A + \eta B + \mu[A, B] = 0_{2 \times 2},$$

temos que

$$\begin{bmatrix} \lambda a + \eta b & \eta c + 2\mu ac \\ \eta d - 2\mu ad & -(\lambda a + \eta b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Portanto} \quad \begin{cases} \lambda a + \eta b = 0 \\ \eta c + 2\mu ac = 0 \\ \eta d - 2\mu ad = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos que $\eta = \mu = \lambda = 0$ e com isto, o conjunto $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente. □

Como consequência direta dos três lemas anteriores, temos um critério para verificar se a álgebra de Lie gerada por A e B coincide com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Este critério fornece uma condição para que o interior do semigrupo S_Σ seja não-vazio e, como foi comentado nas preliminares, esta condição é necessária para o estudo da controlabilidade.

Teorema 4.16 *Dados $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ as seguintes afirmações são equivalentes.*

- a) *A álgebra de Lie gerada por $\{A, B\}$ coincide com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$;*
- b) *O conjunto $\{A, B, [A, B]\}$ é linearmente independente;*
- c) *$\det[A, B] \neq 0$.*

Seja C uma matriz na álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, analisaremos as possíveis trajetórias da exponencial de C , estudando o sinal de seu determinante.

1º Caso: $\det C > 0$. Neste caso, segundo a demonstração do Lema 2.7, existe uma base de \mathbb{R}^2 , segundo a qual C se escreve como

$$C = \begin{bmatrix} 0 & -\lambda \\ \lambda & 0 \end{bmatrix}, \text{ com } \lambda > 0.$$

Exponenciando C , temos que

$$\exp tC = \begin{bmatrix} \cos t\lambda & -\sin t\lambda \\ \sin t\lambda & \cos t\lambda \end{bmatrix}.$$

Neste caso, a exponencial de C age em um ponto de \mathbb{R}_0^2 , fazendo com que ele gire em torno da origem. Isto é, as trajetórias induzidas por C em \mathbb{R}_0^2 são círculos centrados na origem.

No espaço projetivo temos, uma única trajetória que pode ser representada segundo a figura 4.3.1.

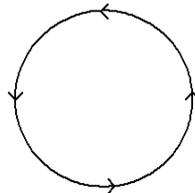


Figura 4.3.1

Na análise do 2º caso, usaremos a seguinte proposição.

Lema 4.17 *Suponhamos que A seja não-nula, que $\text{tr}A = 0$ e $\det A = 0$. Neste caso, em alguma base ortogonal de \mathbb{R}^2 , $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.*

Demonstração: Observe que A^2 é a matriz nula e que 0 é autovalor de A . Seja v autovetor associado a 0 e consideremos $w \in \mathbb{R}^2$ um vetor não-nulo ortogonal a v . Temos que $Aw \neq 0$, pois $\{v, w\}$ é base e A é não-nula. Mas $A(Aw) = 0$, assim Aw é paralelo a v e, portanto, $\{Aw, w\}$ é base ortogonal de \mathbb{R}^2 . Na base $\{Aw, w\}$, A se escreve como $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

□

2º Caso: $\det C = 0$, com C não-nula. Neste caso, podemos fixar uma base de forma que, nesta base $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Exponenciando C , temos que

$$\exp tC = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

A ação em um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}_0^2$ fornece a transformação:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0 + ty_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, as trajetórias em \mathbb{R}_0^2 são semi-retas paralelas ao eixo x , exceto os pontos do tipo $(x_0, 0)$ que são fixos. Foi mostrado na Lema 4.17 que, em alguma base ortogonal de \mathbb{R}^2 , a matriz é dada na forma acima, logo podemos considerar as trajetórias como na figura 4.3.2, observando que os pontos do eixo x são fixos.

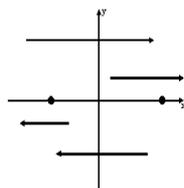


Figura 4.3.2

No espaço projetivo, temos duas trajetórias: Uma fixa, que é a classe do eixo x e a outra densa

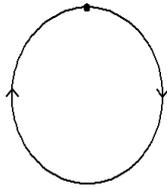


Figura 4.3.3

onde \bullet significa ponto fixo, veja figura 4.3.3.

3º Caso $\det C < 0$. Neste caso em alguma base de \mathbb{R}^2 temos que $C = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$, para algum $\lambda > 0$. Neste caso, a exponencial de C é dada por

$$\exp tC = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\lambda t} \end{bmatrix}$$

que age em \mathbb{R}_0^2 da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_0 e^{\lambda t} \\ y_0 e^{-\lambda t} \end{bmatrix}.$$

As trajetórias de C em \mathbb{R}_0^2 são hipérbolas representadas como na figura 4.3.4, observando que a base não necessariamente é ortogonal.

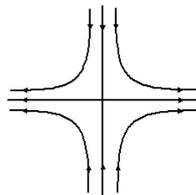


Figura 4.3.4

No espaço projetivo, temos que os eixos são fixos. Neste caso, a classe do eixo y é denominada de repulsor e a do eixo x de atrator. A representação no espaço projetivo é dada na figura 4.3.5

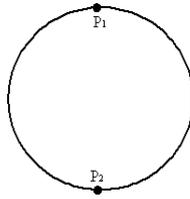


Figura 4.3.5

onde p_1 e p_2 são, respectivamente, o repulsor e o atrator. Observe que p_1 e p_2 correspondem ao autoespaço gerado pelo menor e maior autovalor da trajetória de C respectivamente.

Nos três casos analisados, fizemos questão de mostrar a representação das trajetórias no espaço projetivo. A controlabilidade será analisada a partir do Teorema 4.10, ou seja, temos que o sistema é controlável se, e somente se, o semigrupo não deixa invariante qualquer subconjunto compacto próprio de interior não-vazio do espaço projetivo. Devemos verificar, também, a condição necessária dada pelo Corolário 4.16, ou seja, $\det[A, B] \neq 0$.

No resto desta seção, assumimos que as matrizes A e B pertencem à álgebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e são não nulas.

Quando é mencionada "trajetória de B ", estaremos nos referindo à trajetória que a exponencial de B induz em \mathbb{R}^2 . Lembre que o semigrupo associado ao conjunto de campos vetoriais $\{A, \pm B\}$ é

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} \cdot e^{t_2 X_2} \dots e^{t_m X_m}, \text{ tal que } t_i \geq 0 \text{ e } X_i \in \Sigma = \{A \pm B\}\}.$$

Vejamos agora, como fica a controlabilidade, analisando o sinal de $\det B$.

Ao representarmos as trajetórias no espaço projetivo, denotaremos de bola cheia o atrator de A , de bola vazia o repulsor de A , de quadrado cheio o atrator de B e quadrado vazio o repulsor de B .

Caso a) $\det B > 0$ e A não é múltiplo de B . Pelo Lema 4.13, temos que $\det[A, B] < 0$. Logo o interior do semigrupo associado a $\Sigma = \{A \pm B\}$ é não-vazio em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$. Mostraremos que, neste caso, o sistema é controlável.

Como foi visto, as trajetórias de B são círculos. Portanto não existe nenhum compacto próprio do espaço projetivo que é invariante pela ação do semigrupo, e pelo Teorema 4.10 obtemos a controlabilidade.

Caso b) $\det B = 0$ e A é uma matriz tal que $[A, B] \neq \lambda B$. Neste caso, pelo Lema 4.14, temos que $\det[A, B] < 0$. Assim, o interior do semigrupo associado a $\Sigma = \{A \pm B\}$ é não-vazio. Neste caso, também ocorre a controlabilidade. De fato:

Sabemos que uma das trajetórias de B é densa em $\mathbb{R}P^1$. Assim, a classe do eixo x será ponto de acumulação de qualquer compacto C de $\mathbb{R}P^1$ S -invariante. Como C é compacto, ele contém todos seus pontos de acumulação. Portanto C contém a classe do eixo x . Para obter a controlabilidade, dependemos, também, das trajetórias de $-B$, que são opostas às trajetórias de B , observe a figura 4.3.6.

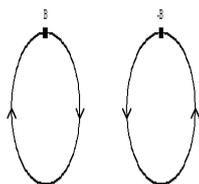


Figura 4.3.6

Portanto todo compacto próprio de interior não-vazio que é S -invariante coincide com todo o espaço projetivo. Pelo Teorema 4.10, ocorre então a controlabilidade.

Caso c) $\det B < 0$. Neste caso, há três possibilidades:

c.i) $\det A > 0$ e $\det[A, B] < 0$. Neste caso, o sistema é controlável, pois as trajetórias de A são círculos.

c.i.i) $\det A = 0$ e $\det[A, B] < 0$. As trajetórias de $\pm B$ são representadas como na figura 4.3.7.

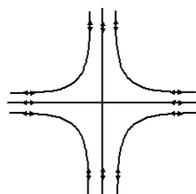


Figura 4.3.7

Consideremos bases $\beta_1 = \{u_1, v_1\}$ e $\beta_2 = \{u_2, v_2\}$, tais que A e B , nestas bases, se representam como:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}, \lambda > 0$$

Para continuar a análise necessitamos do seguinte resultado.

Proposição 4.18 *Considere as matrizes A e B acima e suas respectivas bases. Se $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ é transitiva em \mathbb{R}^2 , então as bases β_1 e β_2 não possuem vetores paralelos.*

Demonstração: Basta mostrar que, se β_1 e β_2 possuem algum vetor paralelo, $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ não é transitiva em \mathbb{R}^2 . Como $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ é gerada como álgebra de Lie por A , B e $[A, B]$, então basta mostrar que estes elementos deixam alguma reta invariante caso haja a coincidência mencionada. No caso em que $u_1 = au_2$, com $a \neq 0$, temos que

$$A(u_1) = 0 \quad , \quad B(u_1) = B(au_2) = aB(u_2) = \lambda au_2 = \lambda u_1$$

e assim,

$$[A, B](u_1) = A(B(u_1)) - B(A(u_1)) = A(\lambda u_1) - B(0) = \lambda A(u_1) = 0.$$

Os outros casos, $u_1 = bv_2$, $v_1 = cv_2$ e $v_1 = dv_2$, são analisados analogamente. \square

Como conseqüência deste resultado e da hipótese assumida, não há coincidência entre os pontos fixos de B com o atrator de A .

Na figura 4.3.8, fica claro que o sistema é controlável, pois não existe subespaço compacto próprio de interior não-vazio S -invariante.

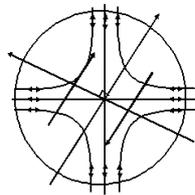


Figura 4.3.8

Que pode ser representado no espaço projetivo na figura 4.3.9.

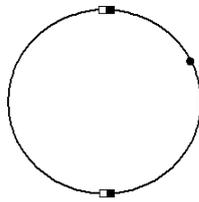


Figura 4.3.9

c.i.i.i) $\det A < 0$. Este é sem dúvida, o caso mais interessante. A controlabilidade depende do sinal do determinante do colchete. Será feita a análise geométrica e algébrica.

Análise Geométrica.

Existem duas possibilidades: Uma delas é quando os pontos fixos, repulsor e atrator de A , ou melhor dizendo, da trajetória induzida por A estão na mesma trajetória de B . A outra possibilidade ocorre quando os pontos fixos, repulsor e atrator de A , estão em trajetórias distintas de B .

A situação em que os pontos fixos de A estão em uma mesma trajetória de B é representada geometricamente no espaço projetivo pela figura 4.3.10.

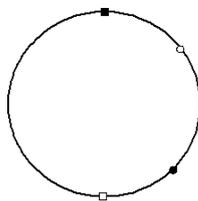


Figura 4.3.10

E a situação em que estão em trajetórias distintas de B é representada na figura 4.3.11.

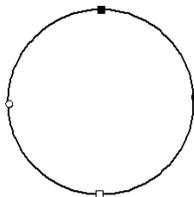


Figura 4.3.11

Em \mathbb{R}_0^2 , as trajetórias de A e $\pm B$ são representada como.

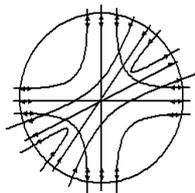


Figura 4.3.12

No primeiro caso, ou seja, quando os pontos fixos de A estão em uma mesma trajetória de B , ocorre a controlabilidade, veja figura 4.3.12. No outro caso, conforme demonstraremos não ocorre a controlabilidade, para isto observe a figura 4.3.13.

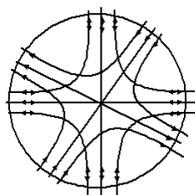


Figura 4.3.13

Neste caso, existe um subconjunto compacto próprio de interior não-vazio do espaço projetivo que é S -invariante pela ação projetiva. Portanto, pelo Teorema 4.10, o sistema não é controlável.

Mostraremos que os pontos fixos de A e de B não podem coincidir, para isso temos o próximo resultado.

Proposição 4.19 *Sejam $A, B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se A e B possuem autovetor em comum, então a álgebra de Lie gerada por A e B não é transitiva em \mathbb{R}^2 .*

Demonstração: Suponhamos que A e B têm em comum algum autovetor, digamos u , assim existem escalares a e b não-nulos, tais que $A(u) = au$ e $B(u) = bu$.

Como

$$[A, B](u) = A(B(u)) - B(A(u)) = A(bu) - B(au) = bau - abu = 0,$$

segue que $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ não é transitivo em \mathbb{R}^2 . □

Como os pontos fixos de A e de B estão diretamente relacionados com os autovetores de A e de B . Se algum dos pontos fixos de A coincidir com algum ponto fixo de B , então A e B possuem algum autovetor em comum. Pela proposição anterior temos que $\det[A, B] = 0$, que não pode acontecer, pois assim $\text{int}S_\Sigma = \emptyset$ em $\text{SL}(2, \mathbb{R})$.

Observe a diferença entre a Proposição 4.18 e a proposição anterior. Como o determinante de A e de B são negativos, na proposição anterior, temos que suas bases são formadas por autovetores, o que não ocorre na proposição 4.18.

Mostraremos agora, o significado **algébrico** do caso **c.i.i.i**). Pelo Lema 2.7, existe uma base tal que A e B se representam na mesma como $A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com a não-nulo e $(-\alpha^2 - \gamma\beta) < 0$.

Neste caso, $\det[A, B] = 4a^2\gamma\beta$ e como uma condição necessária para controlabilidade é que $\det[A, B] \neq 0$, temos que γ e β são não-nulos.

Os autovalores de A são $\pm\sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}$ e seus autovetores associados são o repulsor e o atrator de A . Para o cálculo dos autovetores de A , observe que

$$A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \pm\sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta})x + \beta y = 0 \\ \gamma x + (-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta})y = 0 \end{cases}$$

Temos que $y \neq 0$, caso contrário, na segunda equação teríamos $\gamma x = 0$. Sabemos que $\gamma \neq 0$, logo $x = 0$, o que contraria o fato de (x, y) ser não-nulo.

Como supomos que (x, y) é autovetor, temos que $(\frac{x}{y}, 1)$ também é, podemos assumir que $y = 1$. Logo os autovetores são $(\frac{-\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}}, 1)$ e $(\frac{-\beta}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}}, 1)$.

Sabemos da demonstração geométrica, que o sistema é controlável se, e somente se, os autovetores de A estão em um mesmo quadrante. Como

$$x_1 \cdot x_2 = \left(\frac{-\beta}{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}}\right) \cdot \left(\frac{-\beta}{\alpha - \sqrt{\alpha^2 + \gamma\beta}}\right) = \frac{\beta^2}{-\gamma\beta}$$

então,

$$x_1 \cdot x_2 > 0 \text{ se, e somente se, } -\gamma\beta > 0.$$

Logo a controlabilidade ocorre se, e somente se,

$$\det[A, B] < 0.$$

Teorema 4.20 *Dados A e B em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, o semigrupo de interior não-vazio S_Σ induzido por $\{A, \pm B\}$ coincide com $\text{SL}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, $\det[A, B] < 0$.*

Demonstração: Temos que $S_\Sigma = \text{SL}(2, \mathbb{R})$ se, e somente se, o sistema é controlável. Mas conforme verificamos, a controlabilidade ocorre se, e somente se, $\det[A, B] < 0$. \square

4.4 Controlabilidade no Caso $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$

Nesta seção, usaremos resultados obtidos na seção anterior para analisar a controlabilidade no caso do grupo $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$. Seja $A \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e considere a igualdade

$$A = \left(A - \frac{\text{tr}A}{2}I\right) + \frac{\text{tr}A}{2}I.$$

Assim, podemos decompor a álgebra $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ como a seguinte soma direta

$$\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I.$$

Denotemos por \tilde{A} a diferença $(A - \frac{\text{tr}(A)}{2}I)$ e $\frac{\text{tr}(A)}{2}$ por $\sigma(A)$, assim $A = \tilde{A} + \sigma(A)I$. Como o produto das matrizes $\sigma(A)I$ e \tilde{A} comutam, temos que $[\sigma(A)I, \tilde{B}] = 0$ e $[\sigma(B)I, \tilde{A}] = 0$. Logo

$$[A, B] = AB - BA = [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

Sendo Σ o sistema determinado por A e $\pm B$ em $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, denotamos por $\tilde{\Sigma}$ o sistema determinado por \tilde{A} e $\pm \tilde{B}$ em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Mostraremos que $S_\Sigma = S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$, onde Λ é um subconjunto de todas as matrizes múltiplas positivas da identidade. De fato: Temos que

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k}, \text{ tal que } t_k \geq 0, X_k \in \Sigma, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como

$$X_i = \tilde{X}_i + \sigma(X_i)I,$$

podemos escrever um elemento $g \in S_\Sigma$ como

$$g = e^{t_1 X_1} e^{t_2 X_2} \dots e^{t_k X_k} = e^{t_1 \tilde{X}_1 + t_1 \sigma(X_1)I} e^{t_2 \tilde{X}_2 + t_2 \sigma(X_2)I} \dots e^{t_k \tilde{X}_k + t_k \sigma(X_k)I}.$$

Mas $\sigma(X_i)$ e \tilde{X}_j comutam, assim

$$\begin{aligned} g &= e^{t_1 \tilde{X}_1} e^{t_1 \sigma(X_1)I} e^{t_2 \tilde{X}_2} e^{t_2 \sigma(X_2)I} \dots e^{t_k \tilde{X}_k} e^{t_k \sigma(X_k)I} \\ g &= (e^{t_1 \tilde{X}_1} e^{t_2 \tilde{X}_2} \dots e^{t_k \tilde{X}_k}) \cdot (e^{t_1 \sigma(X_1)I} e^{t_2 \sigma(X_2)I} \dots e^{t_k \sigma(X_k)I}). \end{aligned}$$

Logo,

$$g = \tilde{g} \cdot e^{(t_1 \sigma(X_1) + t_2 \sigma(X_2) + \dots + t_k \sigma(X_k))I}$$

onde $\tilde{g} \in S_{\tilde{\Sigma}}$ e $e^{(t_1 \sigma(X_1) + t_2 \sigma(X_2) + \dots + t_k \sigma(X_k))I} \in \mathbb{R}^+$.

Para o próximo resultado, considere a projeção canônica π de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ em $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, dada por $\pi \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2} \end{bmatrix}$.

Lema 4.21 *Considere a decomposição $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ e a projeção canônica $\pi : \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ é uma subálgebra, tal que $\pi(\mathfrak{h}) = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Então $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Como $\pi|_{\mathfrak{h}}$ é sobrejetora, pelo teorema do núcleo e da imagem, temos que $\dim \mathfrak{h} = \dim \pi(\mathfrak{h}) + \dim \text{Ker} \pi|_{\mathfrak{h}} = 3 + \dim \text{Ker} \pi|_{\mathfrak{h}}$. Caso $\dim \text{Ker} \pi|_{\mathfrak{h}} = 0$ temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e caso $\dim \text{Ker} \pi|_{\mathfrak{h}} = 1$, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. □

Para verificar a condição do interior do semigrupo ser diferente do vazio em $\text{GL}^+(2, \mathbb{R})$, temos o seguinte lema.

Lema 4.22 *Se $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ com $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $\text{tr}(B) \neq 0$. Então, $\det[A, B] \neq 0$ se, e somente se, a álgebra $\mathfrak{Lie}\{A, B\}$ coincide com $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Se isso ocorre então a álgebra $\mathfrak{Lie}\{\tilde{A}, \tilde{B}\}$ coincide com $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{h} = \mathfrak{Lie}\{A, B\} \subset \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e $\pi(\mathfrak{h}) = \tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{Lie}\{\tilde{A}, \tilde{B}\} \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$.

Suponhamos que $\det[A, B] \neq 0$. Como $[A, B] = [\tilde{A}, \tilde{B}]$, segue que $\det[A, B] = \det[\tilde{A}, \tilde{B}]$ e pelo Corolário 4.16, temos que $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Assim $\pi|_{\mathfrak{h}}$ é sobrejetora e pelo Lema 4.21, temos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ ou $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Se $\mathfrak{h} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$, ocorre que $\text{tr}A = \text{tr}B = 0$, contrariando o fato que $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $\text{tr}(B) \neq 0$. Portanto $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$.

Reciprocamente, se $\mathfrak{h} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, então $\tilde{\mathfrak{h}} = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$. Pelo Corolário 4.16, $\det[\tilde{A}, \tilde{B}]$ é diferente de zero, mas $\det[A, B] = \det[\tilde{A}, \tilde{B}]$, portanto $\det[A, B] \neq 0$. □

Observação 4.23 *Na próxima demonstração, usaremos que as ações de $S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$ e de $S_{\tilde{\Sigma}}$ coincidem em $\mathbb{R}P^1$. Para isto, considere a definição de ação projetiva do início da seção 4.1 e o seguinte fato: Sejam $h \in S_{\tilde{\Sigma}}$, $p \in \Lambda$ e $[v] \in \mathbb{R}P^1$, temos que hv e hpv são representantes da mesma classe de equivalência em $\mathbb{R}P^1$.*

Demonstraremos agora, uma outra condição necessária para a controlabilidade de Σ .

Lema 4.24 *Sejam $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, com $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $\text{tr}(B) \neq 0$. Se S_{Σ} é transitivo em $\mathbb{R}P^1$, então $S_{\tilde{\Sigma}}$ também é transitivo em $\mathbb{R}P^1$.*

Demonstração: Suponhamos que S_{Σ} é transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Como $S_{\Sigma} = S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$, segue que $S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$ é transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Entretanto as ações de $S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$ e $S_{\tilde{\Sigma}}$ coincidem em $\mathbb{R}P^1$. Logo $S_{\tilde{\Sigma}}$ é transitivo em $\mathbb{R}P^1$. □

Como consequência do lema anterior, a condição de que $S_{\tilde{\Sigma}}$ não é transitivo em $\mathbb{R}P^1$ implica que S_{Σ} também não é transitivo em $\mathbb{R}P^1$. Entretanto S_{Σ} não ser transitivo em $\mathbb{R}P^1$ implica que Σ não é controlável. Portanto a controlabilidade de $\tilde{\Sigma}$ é uma condição necessária para a controlabilidade de Σ .

Para analisarmos a controlabilidade no caso $G_{\Sigma} = \text{GL}^+(2, \mathbb{R})$, usaremos a Proposição 4.12 e o próximo resultado.

Proposição 4.25 *Suponhamos que $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, com $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $\text{tr}(B) \neq 0$ e que $\tilde{\Sigma}$ seja controlável. Se S_Σ é transitivo em algum raio r_0 partindo da origem de \mathbb{R}^2 , então S_Σ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 .*

Demonstração: Por hipótese, fixado algum raio r_0 partindo da origem, dados quaisquer $\eta, \mu \in r_0$, existe $g \in S_\Sigma$, tal que $g\eta = \mu$. Como $\tilde{\Sigma}$ é controlável, temos que $S_{\tilde{\Sigma}}$ é transitivo em \mathbb{R}_0^2 , assim $S_{\tilde{\Sigma}}$ é transitivo entre raios também, isto é, dados dois raios partindo da origem r_1 e r_2 , existe $\tilde{h} \in S_{\tilde{\Sigma}}$ tal que $\tilde{h}r_1 = r_2$.

Como as ações de $S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$ e $S_{\tilde{\Sigma}}$ em $\mathbb{R}P^1$ coincidem (veja Observação 4.22) e $S_{\tilde{\Sigma}}$ é transitivo entre raios, temos que $S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$ também é transitivo entre raios. Mas, $S_\Sigma = S_{\tilde{\Sigma}}\Lambda$, logo S_Σ é transitivo entre raios.

Seja r_0 o raio em que S_Σ é transitivo, sejam $x, y \in \mathbb{R}_0^2$ e denote por r_1, r_2 os raios contendo x e y respectivamente. Como S_Σ é transitivo entre raios, existem $g, h \in S_\Sigma$, tais que $gr_1 = r_0$ e $hr_0 = r_2$. Para algum $d \in r_0$, temos que $hd = y$ e, assim, $d = h^{-1}y \in r_0$. Temos, também, que $gx \in r_0$. Como S_Σ é transitivo em r_0 , temos que, existe $l \in S_\Sigma$ tal que $l(gx) = h^{-1}y$, logo $(hlg)x = y$ e S_Σ é transitivo em \mathbb{R}^2 . □

Daqui até o fim desta seção, consideramos que $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$, com $\text{tr}(A) \neq 0$ ou $\text{tr}(B) \neq 0$, que $\mathfrak{Lie}\{A, B\} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e $\tilde{\Sigma}$ é controlável. O Lema 4.22 e o Teorema 4.20 implicam que as condições $\mathfrak{Lie}\{A, B\} = \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$ e $\tilde{\Sigma}$ são simultaneamente satisfeitas se $\det[A, B] < 0$.

Analisaremos agora, a controlabilidade de acordo com $\text{tr}B$.

Caso a) $\text{tr}B \neq 0$. Considerando que B pode ser escrito como $B = \tilde{B} + \sigma(B)I$, onde $\tilde{B} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ e $\sigma(B) = \frac{\text{tr}(B)}{2} \neq 0$, temos as seguintes situações a serem analisadas.

a.i) $\det\tilde{B} < 0$. Neste caso, pela demonstração do Lema 2.7, existe uma base de \mathbb{R}^2 a qual \tilde{B} se representa como $\tilde{B} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix}$, com $a > 0$, neste caso, podemos escrever B como

$$B = \begin{bmatrix} a + \sigma(B) & 0 \\ 0 & -a + \sigma(B) \end{bmatrix}.$$

Seja $\lambda = a + \sigma(B)$ e $\mu = -a + \sigma(B)$. Exponenciando $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$, temos que

$$\exp tB = \begin{bmatrix} e^{t\lambda} & 0 \\ 0 & e^{t\mu} \end{bmatrix}.$$

Como $\sigma(B) \neq 0$ e $a > 0$, pelo menos um dos números λ ou μ é não-nulo. Logo, pelo menos uma das funções $e^{t\lambda}$ ou $e^{t\mu}$, é diferente da função constante um. A ação de $\exp tB$ em \mathbb{R}_0^2 é dada por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} xe^{t\lambda} \\ ye^{t\mu} \end{bmatrix}.$$

Assim, existem raios de \mathbb{R}^2 que as trajetórias da exponencial de B deixam invariantes. Considerando as trajetórias de $\exp -tB$, temos que S_Σ deixa estes raios transitivos sob a ação de S_Σ . Pela Proposição 4.25, temos que Σ é controlável.

a.i.i) Suponhamos, agora, que $\det \tilde{B} = 0$. Sabemos que, existe uma base em que \tilde{B} se escreve como $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Neste caso, podemos considerar $B = \begin{bmatrix} \sigma(B) & 1 \\ 0 & \sigma(B) \end{bmatrix}$. Exponenciando B , temos que

$$\exp tB = \begin{bmatrix} e^{t\sigma(B)} & * \\ 0 & e^{t\sigma(B)} \end{bmatrix},$$

cuja ação em \mathbb{R}_0^2 é da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e^{t\sigma(B)}x + *y \\ e^{t\sigma(B)}y \end{bmatrix}.$$

Como $\sigma(B) \neq 0$, temos que $\exp tB$ deixa o raio do tipo $(x, 0)$ invariante. Ao considerarmos as trajetórias de $\exp -tB$, temos que S_Σ deixa o raio do tipo $(x, 0)$ transitivo. Segue da Proposição 4.25 que Σ é controlável.

a.i.i.i) Se $\det \tilde{B} > 0$. Existe uma certa base de \mathbb{R}^2 , onde consideramos $\tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{bmatrix}$. Logo $B = \begin{bmatrix} \sigma(B) & -b \\ b & \sigma(B) \end{bmatrix}$, com $\sigma(B)$ e b não-nulos.

Neste caso, será usada a Proposição 4.12 para o estudo da controlabilidade. Temos que

$$\exp tB = \exp t(\tilde{B} + \sigma(B)I) = \exp t\tilde{B} \cdot \exp t\sigma(B)I$$

ou seja,

$$\exp tB = \begin{bmatrix} \cos(tb) & -\sin(tb) \\ \sin(tb) & \cos(tb) \end{bmatrix} \cdot e^{t\sigma(B)}I.$$

Considere $\bar{t} \in \mathbb{R}^+$, de tal maneira que $\bar{t}b = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$. Como $\exp tB \in S_\Sigma$, temos que algum elemento em S_Σ é da forma $e^{\bar{t}\sigma(B)}I$, onde I é a identidade de S_Σ . Considerando agora, a exponencial de $-B$, existe algum elemento em S_Σ da forma $e^{-\bar{t}\sigma(B)}I$.

Se $\sigma(B) > 0$, temos que $e^{\bar{t}\sigma(B)} > 1$ e $0 < e^{-\bar{t}\sigma(B)} < 1$. Neste caso, pondo $\lambda_1 = e^{\bar{t}\sigma(B)}$ e $\lambda_2 = e^{-\bar{t}\sigma(B)}$, pela Proposição 4.12 temos que Σ é controlável.

Se $\sigma(B) < 0$, segue de maneira análoga que Σ é controlável. Portanto no caso em questão, o sistema é controlável.

Caso b) $\text{tr}B = 0$. Nesse caso, $B = \tilde{B}$ e por hipótese $\text{tr}A \neq 0$. Consideramos as possíveis formas de Jordan para B :

b.i) $\det B < 0$. Pela demonstração do Lema 2.7, consideramos que em uma conveniente base de \mathbb{R}^2 , B se escreve como $B = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{bmatrix}$, com $\lambda > 0$. As trajetórias da exponencial de B são hipérbolas, que deixam raios invariantes. Considerando as trajetórias da exponencial de $-B$, temos que a ação do semigrupo S_Σ deixa transitivo estes raios e, pela Proposição 4.25, temos que Σ é controlável.

b.i.i) Suponhamos agora, que $\det B = 0$. Existe uma base α de \mathbb{R}_0^2 , na qual B pode ser escrita como $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Sabemos que a exponencial de B induz duas trajetórias: Semi-retas paralelas ao eixo x e os ponto fixos do eixo x .

Neste caso, os subconjuntos conexos invariantes por trajetórias da exponencial de B são faixas na forma $\{(s, t)$, com $s \in \mathbb{R}$ e $t \in I\}$. Tais faixas são invariantes pela ação de S_Σ se forem invariantes por trajetórias de $\exp tA$.

Temos que Σ não é controlável se, e somente se, fixada uma reta dada por $\{(s, t')$ com $s \in \mathbb{R}$ e $t' \in I$ fixo $\}$, o vetor tangente Ax aponte somente acima ou somente abaixo desta reta, para todo $x \in \{(s, t')$ com $s \in \mathbb{R}$ e $t' \in I$ fixo $\}$. O vetor tangente Ax aponta somente acima da reta citada anteriormente se, e somente se, a segunda coordenada de $A(s, t')$, assume valores somente maiores que t' . Portanto a controlabilidade de Σ ocorre se, e somente se, a segunda coordenada de $A(s, t')$ assume valores maiores e menores que t' .

Na base α , podemos escrever A como: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, com $a + d \neq 0$. Mas

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} as + bt' \\ cs + dt' \end{bmatrix}.$$
 Logo a segunda coordenada de $A(s, t')$ é dada pela função linear $cs + dt'$, onde c, d, t' estão fixos e $s \in \mathbb{R}$. Observe que $c \neq 0$, pois caso contrário $\det[A, B] = 0$, o que não pode ocorrer. Assim, para s conveniente, a função $cs + dt'$ assume valores maiores e menores que t' . Portanto, neste caso, Σ é controlável.

b.i.i.i) Se $\det B > 0$. Pela demonstração do Lema 2.7, existe uma certa base β de \mathbb{R}^2 na qual podemos representar B como: $B = \begin{bmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{bmatrix}$. Conhecemos, que trajetórias da exponencial de B são círculos centrados na origem.

Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno em relação à base β anterior. Os subconjuntos conexos invariantes por trajetórias da exponencial de B , são anéis formados por aqueles $z \in \mathbb{R}^2$, tais que $\|z\|$ pertence a algum intervalo de \mathbb{R}^+ . Nesse caso, temos que Σ não é controlável se, e somente se, $\exp tA$ deixa invariante algum desses anéis. Para analisar a controlabilidade, precisamos do próximo lema.

Lema 4.26 Σ não é controlável se, e somente se, para algum $z_0 \in \mathbb{R}_0^2$ fixado, o produto interno $\langle Az, z \rangle$ não muda de sinal quando z percorre a circunferência de centro na origem e raio $\|z_0\|$ (circunferência induzida pela trajetória de B).

Demonstração: Se Σ não é controlável. Então, existe algum anel M que é invariante pela ação de $\exp tA$. Seja I o intervalo de \mathbb{R}^+ que define tal anel. Denotemos por C a circunferência de centro na origem e raio $\|z_0\|$.

Suponhamos por absurdo, que para todo $z_0 \in \mathbb{R}_0^2$, com $\|z_0\| \in I$, o produto interno $\langle Az, z \rangle$ muda de sinal quando z percorre C . Neste caso, o anel M não é invariante pela ação de $\exp tA$ e obtemos um absurdo. Portanto, existe algum $z_0 \in \mathbb{R}_0^2$ neste anel, no qual $\langle Az, z \rangle$ não muda de sinal quando z percorre C .

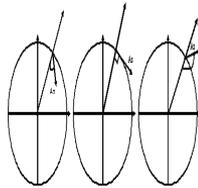


Figura 4.4.1

Reciprocamente, seja $z_0 \in \mathbb{R}^2$, onde $\langle Az, z \rangle$ não muda de sinal quando z percorre C . Suponhamos que o produto interno $\langle Az, z \rangle$ possui somente sinal positivo quando z percorre C , logo o ângulo entre Az e z é agudo e não atingimos os pontos exteriores de C , portanto Σ não é controlável. Se o sinal de $\langle Az, z \rangle$ é somente negativo, não atingimos pontos no interior de C , portanto Σ não é controlável. Se $\langle Az, z \rangle = 0$ para todo z em C , então a trajetória de $\exp tA$ é dada por círculos, ou seja, A e B têm a mesma trajetória e isso não ocorre, pois $\text{tr}(A) \neq 0$. Na figura 4.4.1, ilustramos as situações acima.

□

Para a análise da controlabilidade, será usado o sinal em que se refere o lema anterior, seja

$$D = \frac{A + A^t}{2}.$$

Como $\langle A^t z, z \rangle = \langle Az, z \rangle$, temos que $\langle Dz, z \rangle = \langle Az, z \rangle$. Pelo Lema anterior, a controlabilidade de Σ é equivalente à mudança de sinal do produto interno $\langle Dz, z \rangle$ quando z percorre a circunferência de centro na origem e raio $\|z_0\|$. Como D é simétrica, temos que $\langle Dz, z \rangle$ muda de sinal se D possui autovalores com sinais diferentes, isto é, $\det D < 0$.

Fazendo um pouco de contas, obtemos que $\det D = \frac{1}{\det B} (\det[B, A] + \det B \cdot (\text{tr}(A))^2)$. Como $\det B > 0$, temos que $\det D < 0$ se, e somente se, $(\det[B, A] + \det B \cdot (\text{tr}(A))^2) < 0$.

Portanto Σ é controlável se, e somente se, $\det[B, A] < -(\det B \cdot (\text{tr}(A))^2)$.

4.5 Controlabilidade no Caso $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^+ \mathbf{I}$

Considere o caso em que as matrizes A e B pertencem à álgebra de Lie $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \mathbf{I}$, como esta álgebra é abeliana, a álgebra de Lie gerada por A e B coincide com $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R} \mathbf{I}$ se, e somente se, o conjunto $\{A, B\}$ é linearmente independente.

O semigrupo associado ao campo de vetores $\Sigma = \{A, \pm B\}$ pode ser dado por

$$S_\Sigma = \{e^{t_1 A} e^{s_1 B} e^{t_2 A} e^{s_2 B} \dots e^{t_k A} e^{s_k B}, \text{ tal que } t_i \geq 0, s_i \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}\}.$$

Como o grupo $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R} \mathbf{I}$ é abeliano, temos que vale a fórmula $\exp X \exp Y = \exp(X + Y)$. Esta fórmula implica que o semigrupo acima pode ser representado

como

$$S_\Sigma = \{e^{tA+sB}, \text{ tal que } t \geq 0, s \in \mathbb{R}\}.$$

Daqui até o fim desta seção, assumimos que $A, B \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ e que o conjunto $\{A, B\}$ é linearmente independente.

Análise Geométrica.

Temos que $\text{SO}(2, \mathbb{R})$ se identifica com S^1 , assim o espaço topológico do grupo $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}I$ é dado por $S^1 \otimes \mathbb{R}$, topologicamente o grupo $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^+I$ é um cilindro superior.

Temos também que os grupos \mathbb{C}^* e $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^+I$ são isomorfos pela aplicação: $\varphi(r(z)e^{i\theta(z)}) = (e^{i\theta(z)}, r(z)I)$.

Sejam A e B matrizes em $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$, dadas por $A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 & -b_2 \\ b_2 & b_1 \end{bmatrix}$. Sabemos que, caso $a_1 = 0$ ou $b_1 = 0$, as trajetórias da exponencial de A e da exponencial de B são círculos.

Como o conjunto $\{A, B\}$ é linearmente independente. Se $b_1 = 0$, necessariamente $b_2 \neq 0$ e $a_1 \neq 0$. Já a condição $b_1 \neq 0$ implica que pelo menos um dos números b_2 ou a_2 é não-nulo.

Temos que a matriz $C = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ identificamos com o número complexo $a + bi$. Assim, existem números complexos $z(A)$ e $z(B)$ associados às matrizes A e B .

Como $S_\Sigma = \exp\{tA + sB; \text{ com } t \geq 0, s \in \mathbb{R}\}$ e o conjunto $\{tA + sB; \text{ com } t \geq 0, s \in \mathbb{R}\}$ fornece um semiplano no plano complexo. Temos que o semigrupo S_Σ é a exponencial do semiplano determinado por A e B . Como a aplicação exponencial de números complexos enrola o plano em um cilindro, temos que Σ é controlável se, e somente se, o semiplano determinado por A e B é enrolado em um cilindro superior.

Considerando $z(A) = a_1 + a_2i$, $z(B) = b_1 + b_2i$, temos que

$$\exp(tA + sB) = \exp(t(a_1 + a_2i) + s(b_1 + b_2i))$$

isto é,

$$\exp(tA + sB) = \exp(ta_1 + sb_1) \cdot [\cos(ta_2 + sb_2) + i \sin(ta_2 + sb_2)].$$

Suponhamos que $b_1 = 0$, ou seja, $B \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, mostraremos a seguir que o sistema não é controlável. De fato, neste caso, a igualdade acima implica que

$$\exp(tA + sB) = \exp(ta_1) \cdot [\cos(ta_2 + sb_2) + i \sin(ta_2 + sb_2)].$$

Se $a_1 < 0$. Neste caso, temos que $0 < \exp(ta_1) \leq 1$, pois $t \geq 0$. Obtemos somente o cilindro entre 0 e 1 e o sistema não é controlável.

Se $a_1 > 0$. Neste caso, $\exp(ta_1) \geq 1$ e obtemos o cilindro somente acima de 1. Novamente o sistema não é controlável.

Suponhamos que $b_1 \neq 0$ ($B \notin \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$), como $s \in \mathbb{R}$, obtemos todo o cilindro superior e o sistema é controlável.

Portanto Σ é controlável em $\text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}I$ se, e somente se, B não pertence a álgebra $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.

Análise Algébrica.

Suponhamos que $B \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, logo $B = \begin{bmatrix} 0 & -b_2 \\ b_2 & 0 \end{bmatrix}$, com $b_2 \neq 0$. Observe que $\text{tr}B = 0$ e $\det B > 0$. Tal situação foi estudada na seção 4.4, lá concluímos que Σ é controlável se, e somente se, $\det D < 0$, com $D = \frac{A+A^t}{2}$.

Como $A = \begin{bmatrix} a_1 & -a_2 \\ a_2 & a_1 \end{bmatrix}$, temos que $D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_1 \end{bmatrix}$, logo $\det D = (a_1)^2 > 0$ e Σ não é controlável. Portanto Σ não é controlável se $B \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$.

Se $B \notin \mathfrak{so}(2, \mathbb{R})$, então o número complexo $z(B)$ não é imaginário puro e o semiplano determinado por A e B contém em seu interior algum dos semieixos imaginários. Entretanto uma matriz do tipo $M = \begin{bmatrix} 0 & -m \\ m & 0 \end{bmatrix}$ está associada ao número complexo $z(M) = mi$, que é imaginário puro. Logo existe um elemento no interior do semigrupo S_Σ que é exponencial de M . Como a exponencial de M é a matriz de rotação, considerando algum $t \in \mathbb{R}^+$ com $tm = 2k\pi$ para algum $k \in \mathbb{Z}$, o elemento identidade pertence ao interior de S_Σ . Portanto $S_\Sigma = \text{SO}(2, \mathbb{R}) \otimes \mathbb{R}^+I$ e Σ é controlável.

4.6 Conclusão

Considerando os resultados provenientes das seções anteriores, temos, agora condições necessárias e suficientes para que o sistema bilinear bidimensional seja controlável.

Teorema 4.27 *Sejam $A, B \in \mathfrak{gl}(2, \mathbb{R})$. Dado o sistema de equações diferenciais $\dot{x} = (A + uB)x$ com $u \in \mathbb{R}$, a controlabilidade do mesmo ocorre nos seguintes casos:*

- a) *Suponhamos que $\text{tr}(B) = \text{tr}(A) = 0$. Neste caso, o sistema é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < 0$;*
- b) *Agora se $\text{tr}(B) = 0$ e $\text{tr}(A) \neq 0$, então:*
- i) *$\det B \leq 0$, o sistema é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < 0$;*
 - ii) *$\det B > 0$, o sistema é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < -\det B \cdot \text{tr}(A)^2$;*
- c) *Se $\text{tr}(B) \neq 0$. Então o sistema é controlável se, e somente se, $\det[A, B] < 0$;*
- d) *Suponhamos que $A \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}I$ e $B \in \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) \oplus \mathbb{R}^*I$. O sistema é controlável se, e somente se, o conjunto $\{A, B\}$ é linearmente independente.*

Bibliografia

- [1] BRAGA BARROS, C. J., RIBEIRO, J. G. F., ROCIO, O. G. e SAN MARTIN, L. A. B.: Controllability of two-dimensional bilinear systems. *Proyecciones*, vol 15, (1996), 111-139.
- [2] HELGASON, S.: *Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces*. Academic Press (1978).
- [3] HILGERT, J., HOFFMAN K. H. e LAWSON, J.: *Lie groups, convex cones and semigroups*, Oxford University, 1989.
- [4] HILGERT, J. e NEEB, K. H.: *Lie semigroups and their applications*, *Lectures Notes in Mathematics*, Springer Verlag 1993.
- [5] JURDJEVIC, Velimir.: *Geometric Control Theory*, Cambridge University Press, 1997.
- [6] JURDJEVIC, V. e SUSSMAN, H.J.: Control systems on Lie groups, *Journal of Differential Equations*, vol 12 (1972), 313-329.
- [7] JURDJEVIC, V. e KUPKA, T.: Control systems subordinated to a group action acessibility, *Journal of Differential Equations*, vol 39 (1981), 180-211.
- [8] JURDJEVIC, V. e KUPKA, T.: Control systems on semisimple Lie groups and their homogeneous spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, vol 31 (1981), 151-179.
- [9] KALMAN, R. E., HO Y. C. and NARENDRA K. S.: Controlability of linear dynamical systems, *Contrib. Diff. Eqs.*, vol 1 (1963), 189-213.
- [10] LEE, E. B. e MARKUS L.: *Foundations of optimal control theory*. Wiley (1967).

- [11] LIMA, E. L.: Variedades Diferenciáveis, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1973.
- [12] SAN MARTIN, L. A. B.: Órbitas de Famílias de Campos de Vetores, 1998, www.ime.unicamp.br/~smartin
- [13] SAN MARTIN, L. A. B.: Álgebras de Lie, Editora da Unicamp, São Paulo, 1999.
- [14] SAN MARTIN, L. A. B.: Invariant control sets on flag manifolds. Math. of Control Signal Systems, vol6, (1993), 41-61.
- [15] SAN MARTIN, L. A. B e TONELLI, P. A.: Semigroups act on homogeneous spaces. Semigroups Forum, vol 50, (1995), 59-88.
- [16] SUSSMANN, H. J. e JURDJEVIC, V.: Controllability of Nonlinear Systems, Journal of Differential Equations, vol 12 (1972), 95-116.
- [17] VARADARAJAN, V. S.: O.: Lie Groups, Lie algebras and their representations. Prentice Hall Inc., 1974.
- [18] WARNER, F. W.: Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott-Foresman e Co., S. Francisco, 1971.