

O Estudo da Polar de uma Curva Algebróide Plana Reduzida

Catiana Casonatto

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá - PR
2007

O Estudo da Polar de uma Curva Algebróide Plana Reduzida

Catiana Casonatto

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes - UEM
(Orientador)

Prof. Dr. Ana Claudia Nabarro - ICMC - USP

Prof. Dr. Roberta Godoi Wik Atique - ICMC - USP

Maringá
Junho, 2007

Aos meus pais, Marilene e Carlos Casonatto,
exemplos de competência em todos os setores da vida.

AGRADECIMENTOS

Agradeço à Deus, por iluminar e abençoar cada passo de minha existência.

Aos meus pais, Carlos e Marilene, e a minha querida irmã Susiéli, família excepcional que sempre está presente e atuante em minha vida, com o seu contínuo amor, amizade e apoio.

Ao meu namorado Jean Venato Santos, pelo seu carinho constante, incentivo e sua sabedoria que tanto me inspiram a ser uma pessoa e uma profissional melhor.

Ao professor Marcelo Escudeiro Hernandes, pela excelente orientação e preciosos ensinamentos, sendo estes tanto matemáticos quanto de competência, seriedade e integridade.

Aos funcionários do DMA-UEM, em especial à Lúcia pela atenciosa disponibilidade e aos professores que contribuíram em minha formação matemática.

À professora Maria Elenice R. Hernandes, pela contribuição em nosso trabalho e por estar sempre disposta a colaborar.

Às companheiras de república, pelo companheirismo, doação e momentos inesquecíveis: Nazira, Alexandra, Gislaine, Janete, Claudia e Jaqueline.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

CONTEÚDO

Introdução	2
1 Preliminares	4
1.1 Definições e Primeiras Propriedades de Curvas Algebróides Planas	4
1.2 Parametrizações de Newton-Puiseux	7
1.2.1 Curvas Planas Analíticas	13
2 Interseção de Curvas e Semigrupo de Valores	14
2.1 Índice de Interseção	14
2.2 Fórmula de Max Noether	17
2.3 Semigrupo de Valores	21
3 Curvas Polares	25
3.1 Definições e Primeiras Propriedades de Curvas Polares	25
3.2 Fórmula de Plücker e Número de Milnor	30
4 Decomposição da Curva Polar	42
4.1 A noção de Contato	42
4.2 Diagrama de Eggers	53

4.3	Multiplicidade de um Conjunto de Ramos da Polar	58
4.4	Decomposição da Curva Polar em Pacotes	70
4.5	Propriedades de Ramos e de Pacotes de uma Curva Polar	77
	Bibliografia	82

RESUMO

Neste trabalho, estudamos a curva polar de uma curva algebróide plana reduzida.

Apresentamos a relação com a polar e a fórmula de Plücker, bem como com o número de Milnor.

O principal resultado do trabalho utiliza o diagrama de Eggers da curva, de modo a descrever uma decomposição da curva polar em pacotes que estão em correspondência com os vértices pretos do diagrama.

ABSTRACT

In this work we study the polar curve of an algebroid reduced plane curve.

We present the relation with the polar and the Plücker formula and the Milnor number as well.

The main result of this work uses the Eggers diagram to describe a decomposition of the polar curve in blocks that they are in correspondence with the black vertex of the diagram.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho, apresentamos o estudo da curva polar de uma curva algebróide plana reduzida, sendo que o principal resultado estudado é a decomposição da polar em ‘pacotes’.

O primeiro resultado que conhecemos sobre o contato entre os ramos da curva polar e os ramos de uma curva algebróide plana, se deve à Smith [S] em 1875. Um século mais tarde, Merle [M] provou um precioso resultado para o caso irreduzível, sobre uma decomposição da curva polar em pacotes, considerando o contato entre os ramos da polar e a curva. Este resultado foi um marco no estudo de curvas polares, pois ele respondeu uma questão feita por Brieskorn no ano de 1973: como recuperar o semigrupo de uma curva algebróide plana irreduzível C_f a partir do ideal jacobiano $\langle f, f_X, f_Y \rangle$. Em 1977, Kuo e Lu [K-L], com motivações diferentes, estudaram o contato entre as parametrizações de Newton-Puiseux da polar e as parametrizações de Newton-Puiseux da curva, sendo esta uma curva algebróide plana redutível. Eggers [E], em 1983, introduziu um diagrama, que ficou conhecido como o diagrama de Eggers, com o intuito de definir uma decomposição em pacotes das componentes irreduzíveis da curva polar e, além disto, tentar recuperar o semigrupo de uma curva algebróide plana qualquer, através do contato entre os ramos da polar e os ramos da curva, o que solucionaria a questão levantada por Brieskorn, mas para o caso redutível. No entanto, Evelia Garcia Barroso [B₁], em 1996, foi quem respondeu a pergunta para o caso redutível, tendo como objeto de apoio o diagrama de Eggers de uma curva algebróide plana.

Este trabalho teve como principal fonte inspiradora o artigo de Evelia Garcia Barroso [B₂]. Com o intuito de estudar algumas propriedades da curva polar, abordamos no primeiro capítulo, definições elementares da teoria de Geometria Algébrica, tais como: curva algebróide plana e equivalência de curvas, além de vários resultados, como o Teorema de Preparação de Weierstrass e o Teorema de Newton-Puiseux, sendo que o último nos possibilita apresentar alguns elementos importantes que estão relacionados com uma curva algebróide plana irreduzível, como por exemplo, parametrização de Newton-Puiseux, expoentes característicos, bem como os pares de Puiseux.

No segundo capítulo, iniciamos com anel local de uma curva, para então introduzir o conceito de índice de interseção de duas curvas algebróides planas, assim como resultados que nos fornecem maneiras de obter este valor, tais como a fórmula de Max Noether. Em seguida, apresentamos o conceito de semigrupo de valores, um importante invariante com respeito a equivalência de curvas, e algumas de suas propriedades.

Curvas polares são introduzidas no terceiro capítulo, onde apresentamos também algumas de suas propriedades e relações como por exemplo, a fórmula de Plücker e o número de Milnor. O primeiro trata do índice de interseção de uma curva algebróide plana e a curva polar. Já o segundo, é uma informação importante sobre uma curva algebróide plana C_f e suas polares $P_X(f)$ e $P_Y(f)$.

Finalizemos apresentando o quarto capítulo que consta dos principais resultados. Primeiramente definimos o contato entre duas curvas algebróides planas irredutíveis e mostramos a relação existente entre contato e o índice de interseção de duas curvas irredutíveis. Apresentamos o resultado provado por Kuo e Lu sobre o contato entre as parametrizações de Newton-Puiseux da curva polar e as parametrizações de uma curva algebróide plana. Em seguida, estudamos o diagrama de Eggers de uma curva algebróide plana, sendo este uma representação gráfica dos expoentes característicos dos diferentes ramos de uma curva, bem como o contato entre eles. Este objeto é muito interessante, pois conhecendo o diagrama de Eggers de uma curva algebróide plana, conseguimos recuperar através dele, o seu semigrupo. E por fim, apresentamos o teorema da decomposição da curva polar em ‘pacotes’, sendo que estes, por sua vez, estão em correspondência com os vértices pretos do diagrama de Eggers.

Gostaríamos de deixar registrado que alguns poucos resultados foram apresentados sem demonstração, isto se deve ao fato de que necessitaríamos introduzir novos conceitos e resultados auxiliares que nos desviaria do tema central do trabalho, além de torná-lo muito mais extenso.

Preliminares

Neste capítulo, temos como objetivo apresentar conceitos e resultados sobre curvas algebróides planas, que serão utilizados no decorrer deste trabalho. Entre estes podemos citar, definições e propriedades básicas, o Teorema de Preparação de Weierstrass, parametrização de Newton-Puiseux e por fim, expoentes característicos. Alguns resultados neste capítulo serão apenas enunciados, uma vez que são considerados básicos no estudo da teoria de Singularidades e Geometria Algébrica, no entanto, indicaremos referências nas quais tais demonstrações podem ser consultadas.

1.1 Definições e Primeiras Propriedades de Curvas Algebróides Planas

Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \{0\}$ uma série de potências formal. Suponha que

$$f = \sum_{i=n}^{\infty} F_i = F_n + F_{n+1} + F_{n+2} + \cdots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i e $F_n \neq 0$. Denominamos *forma inicial de f* , o polinômio homogêneo F_n e chamamos de *multiplicidade de f* (na origem), o inteiro n , denotando por $\text{mult}(f) = n$. Por convenção, se $f(X, Y) = 0$, dizemos que $\text{mult}(f) = \infty$.

Vale a pena observar que podemos definir multiplicidade de f em um ponto p distinto da origem, basta obtermos a série de Taylor da série de potências f em torno do ponto p e assim a multiplicidade de f em p , $\text{mult}_p(f)$, será dada pelo expoente do termo de menor grau.

Facilmente podemos verificar que multiplicidade de uma série de potências satisfaz as propriedades seguintes.

Proposição 1.1 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Então,*

1. $\text{mult}(f \cdot g) = \text{mult}(f) + \text{mult}(g)$;
2. $\text{mult}(f \pm g) \geq \min\{\text{mult}(f), \text{mult}(g)\}$, sendo válida a igualdade quando $\text{mult}(f) \neq \text{mult}(g)$.

Denotando por $M_{\mathbb{C}[[X,Y]]}$ o ideal maximal de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ gerado por X e Y , introduzimos um dos objetos centrais deste trabalho, a saber, curva algebróide plana.

Definição 1.2 *Seja f um elemento não nulo de $M_{\mathbb{C}[[X,Y]]}$. Chamamos de **curva algebróide plana** C_f , a classe de equivalência de f , módulo a relação de associados.*

Desta maneira, podemos expressar C_f como

$$C_f = \{u \cdot f; u \text{ é uma unidade em } \mathbb{C}[[X,Y]]\}.$$

Observe que da maneira que definimos multiplicidade de uma série de potências formal, é fácil ver que esta é invariante quando multiplicamos por uma unidade. Assim, podemos definir *multiplicidade de uma curva algebróide plana* C_f , como sendo a multiplicidade da série de potências f . Quando uma curva algebróide plana possui multiplicidade igual a um, dizemos que ela é *suave*. Caso esta multiplicidade seja maior que um, dizemos que a curva algebróide plana é *singular*.

Dizemos que uma curva algebróide plana C_f é *irredutível*, se a série de potências formal f é irredutível em $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Vamos denominar uma curva algebróide plana irredutível por *ramo*.

Seja C_f uma curva algebróide plana e considere a seguinte decomposição de f em fatores irredutíveis em $\mathbb{C}[[X,Y]]$, $f = f_1 f_2 \cdots f_r$. Dizemos que a curva C_f é *reduzida*, se $C_{f_i} \neq C_{f_j}$, com $i \neq j$, isto é, quando f_i e f_j não são associadas se $i \neq j$.

Como veremos no desenrolar deste capítulo, várias propriedades de curvas algebróides planas são invariantes por \mathbb{C} -automorfismos de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, dito de outra forma, são invariantes por mudanças de coordenadas em $\mathbb{C}[[X,Y]]$, e isto nos estimula a apresentar a definição que segue.

Definição 1.3 *Sejam C_f e C_g duas curvas algebróides planas. Dizemos que C_f e C_g são **equivalentes**, se existir um \mathbb{C} -automorfismo ϕ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $\phi(C_f) = C_g$. Neste caso, denotamos por $C_f \sim C_g$.*

Dito de outra maneira, temos que C_f e C_g são equivalentes, se existir um \mathbb{C} -automorfismo ϕ e uma unidade u de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tais que $\phi(f) = ug$.

Observação 1.4 *É válido observar que há uma grande dificuldade em classificar as curvas algebróides planas módulo a relação de equivalência \sim , definida anteriormente.*

Para se ter uma noção da dificuldade em verificar se duas curvas são equivalentes, considere as curvas algebróides planas C_f e C_g , onde

$$f(X,Y) = Y^3 - X^5$$

e

$$g(X,Y) = (2 + X)Y^3 - (6X^2 + 3X^3)Y^2 + (6X^4 + 3X^5)Y - 2X^5 - 3X^6 - X^7.$$

O que podemos dizer a respeito da equivalência destas duas curvas?

É difícil responder, uma vez que a única semelhança entre as séries é a multiplicidade. Mas, a série g foi encontrada de modo que

$$\phi(f(X, Y)) = u(X, Y) \cdot g(X, Y),$$

onde $u(X, Y) = (2 + X)^{-1}$ e

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ X &\mapsto X \\ Y &\mapsto Y - X^2. \end{aligned}$$

Portanto, $C_f \sim C_g$.

O resultado seguinte será utilizado, ao longo deste trabalho, como ferramenta para verificarmos se certas aplicações de $\mathbb{C}[X, Y]$ são \mathbb{C} -automorfismos.

Proposição 1.5 *Sejam $g_1, g_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ com formas lineares iniciais L_1 e L_2 , respectivamente. Então, a aplicação*

$$\begin{aligned} \phi: \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ f &\mapsto f(g_1, g_2) \end{aligned}$$

é um \mathbb{C} -automorfismo se, e somente se, L_1 e L_2 são \mathbb{C} -linearmente independentes.

Demonstração: Veja Proposição 1.3.8 de [H]. □

Seja C_f uma curva algebróide plana de multiplicidade n . Como vimos no início do capítulo, podemos escrever

$$f = F_n + F_{n+1} + \dots,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo em $\mathbb{C}[X, Y]$ de grau i e $F_n \neq 0$.

Chamamos a curva algebróide plana C_{F_n} de *cone tangente* da curva C_f .

Como qualquer polinômio homogêneo em duas variáveis com coeficientes em um corpo algebricamente fechado se decompõe num produto de fatores lineares, podemos escrever

$$F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i},$$

onde $\sum_{i=1}^s r_i = n$, $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, \dots, s$ e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$.

Desta maneira, o cone tangente de C_f consiste das formas lineares $a_i X + b_i Y$, $i = 1, \dots, s$, onde cada uma delas possui multiplicidade r_i . Chamamos cada uma destas formas lineares de *reta tangente* de C_f .

E ainda, dizemos que duas curvas algebróides planas C_f e C_g são *transversais*, se possuem retas tangentes distintas.

Para ilustrar os conceitos anteriores, vejamos um exemplo.

Exemplo 1.6 *Seja $f(X, Y) = Y^2 - a^2X^2 - X^3 \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Note que para $a \neq 0$ o cone tangente da curva C_f consiste de duas retas, C_{Y+aX} e C_{Y-aX} , ambas com multiplicidade 1. Já para $a = 0$, temos que o cone tangente da curva C_f é a reta C_Y com multiplicidade 2.*

Observe que se a curva C_f for suave, então seu cone tangente consiste de uma única reta tangente com multiplicidade um.

1.2 Parametrizações de Newton-Puiseux

Nesta seção, focaremos nossos estudos em algumas propriedades algébricas do anel de série de potências formal, apresentando o Teorema de Preparação de Weierstrass e, através do Teorema de Newton-Puiseux, introduziremos os conceitos de parametrização de Newton-Puiseux, bem como a definição de expoentes característicos de uma curva algebróide plana irredutível. Para uma leitura mais rápida, as demonstrações dos resultados desta seção podem ser omitidas, pois isto não prejudicará em nada a compreensão de resultados posteriores.

Definição 1.7 *Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $\text{mult}(f) = n$. Dizemos que f é **regular de ordem m** com respeito à variável X (resp. Y), se $f(X, 0)$ (resp. $f(0, Y)$) for divisível por X^m (resp. Y^m), mas não por X^{m+1} (resp. Y^{m+1}).*

*Dizemos também, que f é **regular** em X (resp. Y), quando f é regular com respeito à X (resp. Y) de ordem $n = \text{mult}(f)$.*

Vejamos tais conceitos em um exemplo.

Exemplo 1.8 *Considere $f(X, Y) = Y^4 - 2X^5Y^2 - 4X^7Y + X^{10} \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Note que $f(X, 0) = X^{10}$, isto é, f é regular de ordem 10 com respeito à variável X .*

Além disto, temos que $f(0, Y) = Y^4$, ou seja, f é regular em Y , uma vez que $\text{mult}(f) = 4$.

Definição 1.9 *Dizemos que uma série de potências f em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ é um **pseudo-polinômio** (resp. um **polinômio de Weierstrass**) em Y , se f assume a seguinte forma*

$$f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X) \in \mathbb{C}[[X]][Y],$$

onde $n \geq 1$ e $\text{mult}(a_i(X)) \geq 1$ (resp. $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$) para $i = 1, \dots, n$.

O teorema seguinte desempenha um importante papel na teoria de Singularidades. Este resultado é usado fortemente para demonstrar o Teorema de Preparação de Weierstrass.

Teorema 1.10 (Teorema da Divisão de Weierstrass) *Seja $f \in M_{\mathbb{C}[[X,Y]]}$ regular de ordem m com respeito à Y . Dado $g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, existem $q \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ e $r \in \mathbb{C}[[X]][[Y]]$ com $r = 0$ ou $\deg_Y(r) < m$, univocamente determinados por f e g , tais que*

$$g(X, Y) = f(X, Y) \cdot q(X, Y) + r(X, Y).$$

Demonstração: A menos de pequenas modificações, a demonstração é a mesma do Teorema 1 do Capítulo 2 de [H]. \square

Estamos, neste momento, aptos a enunciar e demonstrar o Teorema de Preparação de Weierstrass.

Teorema 1.11 (Teorema de Preparação de Weierstrass) *Seja $f \in M_{\mathbb{C}[[X,Y]]}$ regular de ordem m com respeito à Y . Então, existe uma unidade u de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que*

$$f(X, Y) \cdot u(X, Y) = Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + a_2(X)Y^{m-2} + \cdots + a_m(X)$$

é um pseudo-polinômio.

E mais, se f é regular em Y , isto é, $m = \text{mult}(f)$, então $f(X, Y) \cdot u(X, Y)$ é um polinômio de Weierstrass.

Demonstração: Aplicando o Teorema da Divisão para $g(X, Y) = Y^m$, temos que existem $q \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ e $r \in \mathbb{C}[[X]][[Y]]$, tais que

$$Y^m = f(X, Y) \cdot q(X, Y) + r(X, Y),$$

onde $r(X, Y) = b_1(X)Y^{m-1} + b_2(X)Y^{m-2} + \cdots + b_m(X)$, com $b_i(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ para $i = 1, \dots, m$, ou seja,

$$f(X, Y) \cdot q(X, Y) = Y^m - b_1(X)Y^{m-1} - b_2(X)Y^{m-2} - \cdots - b_m(X).$$

Desta forma, denotando $q(X, Y)$ por $u(X, Y)$ e $-b_i(X)$ por $a_i(X)$ para $i = 1, \dots, m$, obtemos a igualdade

$$f(X, Y) \cdot u(X, Y) = Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + \cdots + a_m(X).$$

Mostremos agora que $a_i(X) \in M_{\mathbb{C}[[X]]}$ para $i = 1, \dots, m$ e $u(X, Y)$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Como f é regular de ordem m com respeito à Y , isto é, Y^m divide $f(0, Y)$, temos que Y^m divide $f(0, Y) \cdot u(0, Y)$. Mas,

$$f(0, Y) \cdot u(0, Y) = Y^m + a_1(0)Y^{m-1} + \cdots + a_m(0),$$

ou seja, Y^m divide $a_i(0)Y^{m-i}$ para $i = 1, \dots, m$. Logo, $a_i(0) = 0$ e portanto $a_i(X) \in M_{\mathbb{C}[[X]]}$, para $i = 1, \dots, m$.

Para mostrarmos que $u(X, Y)$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X, Y]]$, observe que, como

$$f(X, Y) \cdot u(X, Y) = Y^m - r(X, Y),$$

temos para $X = 0$,

$$Y^m = f(0, Y) \cdot u(0, Y), \quad (1.1)$$

pois como vimos, $a_i(X) \in M_{\mathbb{C}[[X]]}$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. Como f é uma série regular em Y de ordem m e $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, podemos escrever

$$f(0, Y) = Y^m(c_0 + c_1Y + \dots) \quad \text{e} \quad u(0, Y) = Y^s(d_0 + d_1Y + \dots),$$

com $c_0, d_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, e então $f(0, X) \cdot u(0, Y) = Y^{m+s} \cdot p(Y)$, onde $p(Y) \in \mathbb{C}[[Y]]$. Comparando com (1.1), temos que $p(Y) = 1$ e $s = 0$, assim $u(0, Y) = d_0 + d_1Y + \dots$, com $d_0 \neq 0$. Logo, $u(X, Y) = d_0 + g(X, Y)$, com $g(0, 0) = 0$ e portanto, $u(X, Y)$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Por fim, supondo que f seja regular em Y , isto é, $\text{mult}(f) = m$, temos que

$$\text{mult}(Y^m + a_1(X)Y^{m-1} + a_2(X)Y^{m-2} + \dots + a_m(X)) = \text{mult}(f(X, Y) \cdot u(X, Y)) = m,$$

sendo a última igualdade válida, pois $u(X, Y)$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Desta maneira, $\text{mult}(a_i(X)Y^{m-i}) \geq m$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$, ou seja, $\text{mult}(a_i(X)) \geq i$ para todo $i \in \{1, \dots, m\}$. \square

O Teorema de Preparação de Weierstrass juntamente com o próximo resultado, nos possibilitará assumir ao longo deste trabalho, que uma série de potências em $M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$ seja associada a um polinômio de Weierstrass.

Teorema 1.12 *Seja f um elemento não nulo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Então, existe um \mathbb{C} -automorfismo linear ϕ de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ tal que $\phi(f)$ é regular em Y (ou em X).*

Demonstração: Vamos considerar que $\text{mult}(f) = n$ e a seguinte expansão de f em polinômios homogêneos

$$f(X, Y) = F_n + F_{n+1} + \dots,$$

onde cada F_i possui grau i . Escrevendo F_n na forma

$$F_n(X, Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}Y^{n-1}X + a_{n-2,2}Y^{n-2}X^2 + \dots + a_{0,n}X^n,$$

temos que

$$F_n(X, 1) = a_{n,0} + a_{n-1,1}X + a_{n-2,2}X^2 + \dots + a_{0,n}X^n,$$

ou seja, $F_n(X, 1) \in \mathbb{C}[[X]] \setminus \{0\}$ e admite raízes em \mathbb{C} , digamos, $R = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Desta forma, se tomarmos $\alpha \in \mathbb{C} \setminus R$, teremos $F_n(\alpha, 1) \neq 0$.

Agora, considere a seguinte aplicação,

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto X + \alpha Y \\ Y &\mapsto Y.\end{aligned}$$

Note que ϕ é um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. De fato, observe que as formas iniciais de $\phi(X)$ e $\phi(Y)$ são, respectivamente, $L_1 = X + \alpha Y$ e $L_2 = Y$, isto é, L_1 e L_2 são linearmente independentes. Logo, pela Proposição 1.5, temos que ϕ é um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Observe que $\phi(f(X, Y))$ é regular em Y . Com efeito, como

$$\phi(f(X, Y)) = f(X + \alpha Y, Y) = F_n(X + \alpha Y, Y) + F_{n+1}(X + \alpha Y, Y) + \dots,$$

temos que

$$\phi(f(0, Y)) = f(\alpha Y, Y) = F_n(\alpha Y, Y) + F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \dots.$$

Veja que basta mostrarmos que $F_n(\alpha Y, Y)$ é regular em Y , uma vez que nenhum termo de $F_n(\alpha Y, Y)$ se cancela com termos de $F_{n+1}(\alpha Y, Y) + \dots$. Mas,

$$F_n(\alpha Y, Y) = a_{n,0}Y^n + a_{n-1,1}\alpha Y^n + a_{n-2,2}\alpha^2 Y^n + \dots + a_{0,n}\alpha^n Y^n,$$

ou seja,

$$F_n(\alpha Y, Y) = Y^n(a_{n,0} + a_{n-1,1}\alpha + a_{n-2,2}\alpha^2 + \dots + a_{0,n}\alpha^n) = Y^n \cdot F_n(\alpha, 1),$$

onde, como visto anteriormente, $F_n(\alpha, 1) \neq 0$. Logo, $F_n(\alpha Y, Y)$ é regular em Y e portanto, $\phi(f(X, Y))$ também o é. \square

Vejamos um exemplo que nos permite visualizar melhor o papel que desempenha este resultado em nosso trabalho.

Exemplo 1.13 Considere a série de potências $f(X, Y) = X^2Y^3 + 2XY^4 + XY^6$. Podemos expandir f em polinômios homogêneos da seguinte maneira,

$$f(X, Y) = F_5(X, Y) + F_7(X, Y),$$

onde $F_5(X, Y) = X^2Y^3 + 2XY^4$. Note que $F_5(X, 1) = X^2 + 2X$, e então, para $\alpha \neq 0$ e $\alpha \neq -2$, temos $F_5(\alpha, 1) \neq 0$. Em particular, tomemos $\alpha = 1$.

Desta maneira, considerando o \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$

$$\begin{aligned}\phi: \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto X + Y \\ Y &\mapsto Y,\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}\phi(f(X, Y)) &= f(X+Y, Y) = F_5(X+Y, Y) + F_7(X+Y, Y) = (X+Y)^2 Y^3 + 2(X+Y)Y^4 + (X+Y)Y^6 \\ &= X^2 Y^3 + 2XY^4 + Y^5 + 2XY^4 + 2Y^5 + XY^6 + Y^7 \\ &= 3Y^5 + 4XY^4 + X^2 Y^3 + Y^7 + XY^6,\end{aligned}$$

isto é, $\phi(f(X, Y))$ é regular em Y .

Agora, iniciemos o estudo de parametrizações de uma curva algebróide plana irredutível e de seus expoentes característicos.

Denotando por U_n o grupo multiplicativo das n -ésimas raízes da unidade em \mathbb{C} , apresentamos abaixo uma versão do Teorema de Newton-Puiseux que melhor se adapta ao nosso enfoque. Apesar de não incluímos sua demonstração, o leitor poderá obtê-la a partir dos resultados contidos na seção 3.3 de [H].

Teorema 1.14 (Teorema de Newton-Puiseux) *Seja $f(X, Y) \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ um polinômio de Weierstrass irredutível $f(X, Y) = Y^n + a_1(X)Y^{n-1} + \dots + a_n(X)$. Então,*

$$f(X, Y) = \prod_{i=1}^n (Y - \varphi(\varsigma^i X^{\frac{1}{n}})),$$

para algum gerador fixo ς do grupo U_n e $\varphi(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$.

Pelo teorema acima temos que, se denotarmos $T = X^{\frac{1}{n}}$, isto é, $X = T^n$, então

$$f(T^n, \varphi(T)) = 0.$$

Neste caso, chamamos

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T), \end{cases}$$

de uma *parametrização de Newton-Puiseux de C_f* . Observe ainda que, em virtude do teorema acima, C_f admite n parametrizações distintas e podemos obter todas a partir de uma fixa e dos elementos de U_n .

Agora, considere C_f uma curva algebróide plana irredutível, de multiplicidade n , tal que f é regular em Y e admite uma parametrização de Newton-Puiseux como segue,

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \quad b_m \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Chamamos de *expoentes característicos* da curva C_f , os números naturais β_0, \dots, β_g obtidos da seguinte maneira,

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \epsilon_0 = \text{mult}(f) = n; \\ \beta_j &= \min\{i ; \epsilon_{j-1} \text{ não divide } i \text{ e } b_i \neq 0\}; \\ \epsilon_j &= \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_j) = \text{mdc}(\epsilon_{j-1}, \beta_j).\end{aligned}$$

Através de uma mudança de coordenadas, caso necessário, podemos considerar uma parametrização de Newton-Puiseux da curva C_f como sendo

$$\begin{cases} X = T^{\beta_0} \\ Y = T^{\beta_1} + \sum_{i>\beta_1} b_i T^i. \end{cases}$$

Conhecendo as duas seqüências de números naturais definidas acima, (ϵ_i) e (β_i) , podemos definir os *pares de Puiseux* (η_j, μ_j) , com $j = 1, \dots, g$, da curva C_f como segue,

$$\eta_j = \frac{\epsilon_{j-1}}{\epsilon_j} \text{ e } \mu_j = \frac{\beta_j}{\epsilon_j}.$$

Note que $\text{mdc}(\eta_j, \mu_j) = 1$. De fato,

$$\text{mdc}(\eta_j, \mu_j) = \text{mdc}\left(\frac{\epsilon_{j-1}}{\epsilon_j}, \frac{\beta_j}{\epsilon_j}\right) = \frac{1}{\epsilon_j} \cdot \text{mdc}(\epsilon_{j-1}, \beta_j) = \frac{1}{\epsilon_j} \cdot \epsilon_j = 1. \quad (1.2)$$

Vejamos um exemplo que ilustra como encontrar os expoentes característicos de uma curva algebróide plana irredutível, e com isto, os pares de Puiseux.

Exemplo 1.15 *Seja C_f uma curva algebróide plana irredutível, regular em Y , com multiplicidade 12 e que admite a seguinte parametrização de Newton-Puiseux,*

$$\begin{cases} X = T^{12} \\ Y = T^{24} + 2T^{30} - 4T^{33} + 5T^{40}. \end{cases}$$

Então,

$$\begin{aligned}\beta_0 &= \epsilon_0 = 12; \text{ e } \beta_1 = 30; \\ \epsilon_1 &= \text{mdc}(12, 30) = 6, \text{ o que implica em } \beta_2 = 33; \\ \epsilon_2 &= \text{mdc}(6, 33) = 1.\end{aligned}$$

Logo, os expoentes característicos de C_f são os números naturais 12, 30 e 33.

Calculando os pares de Puiseux, temos que

$$\eta_1 = \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} = \frac{12}{6} = 2, \quad \eta_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} = \frac{6}{1} = 6$$

e

$$\mu_1 = \frac{\beta_1}{\epsilon_1} = \frac{30}{6} = 5, \quad \mu_2 = \frac{\beta_2}{\epsilon_2} = \frac{33}{1} = 33.$$

Logo, os pares de Puiseux são $(2, 5)$ e $(6, 33)$.

1.2.1 Curvas Planas Analíticas

Nesta subseção, consideraremos o anel de série de potências convergentes nas variáveis X e Y , ou seja, $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Os resultados vistos anteriormente para $\mathbb{C}[[X, Y]]$, podem ser demonstrados para $\mathbb{C}\{X, Y\}$ e de maneira similar àquela feita em $\mathbb{C}[[X, Y]]$, podemos definir uma relação de equivalência entre $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$: dizemos que $f \sim g$ se, e somente se, existir ϕ um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ e uma unidade u de $\mathbb{C}\{X, Y\}$, tais que $\phi(f) = u \cdot g$.

A propriedade de convergência permite uma interpretação geométrica do conjunto de zeros de um elemento f de $M = \langle X, Y \rangle$. Isto nos motiva a apresentar a próxima definição.

Definição 1.16 *Seja $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$. Definimos a curva analítica plana determinada por f , como sendo*

$$Z_f = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\},$$

onde $U \subset \mathbb{C}^2$ é uma vizinhança da origem.

Observação 1.17 *Dado um isomorfismo analítico $\varphi^* : V \rightarrow U$, onde U e V são vizinhanças da origem de \mathbb{C}^2 , temos um \mathbb{C} -automorfismo φ de $\mathbb{C}\{X, Y\}$ tal que*

$$\varphi(f) = f \circ (\varphi^*)^{-1},$$

para todo $f \in \mathbb{C}\{X, Y\}$ definido em $V \subset \mathbb{C}^2$. E mais, se f é convergente em V , então $\varphi^*(Z_f) = Z_{\varphi(f)}$.

De fato,

$$Z_{\varphi(f)} = \{(x, y) \in V; \varphi(f)(x, y) = 0\} = \{(x, y) \in V; f \circ (\varphi^*)^{-1}(x, y) = 0\} = \varphi^*(Z_f),$$

sendo a última igualdade válida, pois $(\varphi^*)^{-1}(x, y) \in Z_f$, se, e somente se, $(x, y) \in \varphi^*(Z_f)$.

Veja que se $f, g \in \mathbb{C}\{X, Y\}$, definidas em $V \subset \mathbb{C}^2$, então $Z_{f \cdot g} = Z_f \cup Z_g$.

Interseção de Curvas e Semigrupo de Valores

Iniciaremos este capítulo, apresentando maneiras de se avaliar numericamente o grau de coincidência entre duas curvas algebróides planas. Para isto, introduziremos os conceitos de índice de interseção, valoração associada a uma série de potências e demonstraremos o Teorema de Max Noether. Finalizaremos com a definição de semigrupo de valores e algumas de suas propriedades.

2.1 Índice de Interseção

Nesta seção, temos como objetivo central introduzir o conceito de índice de interseção: uma maneira de expressar numericamente o grau de coincidência entre duas curvas algebróides planas.

Seja f um elemento de $\mathbb{C}[X, Y]$. Definimos *anel local* da curva C_f , como sendo a \mathbb{C} -álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle f \rangle},$$

onde $\langle f \rangle$ é o ideal de $\mathbb{C}[X, Y]$ gerado por f .

Com estas considerações, vejamos a definição de índice de interseção de duas curvas algebróides planas e, em seguida, algumas propriedades.

Definição 2.1 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[X, Y]$. Chamamos de **índice de interseção** de f e g , o número inteiro (incluindo ∞)*

$$I(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[X, Y]}{\langle f, g \rangle}.$$

Com respeito ao índice de interseção, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.2 *Sejam $f, g, h \in \mathbb{C}[X, Y]$, ϕ um \mathbb{C} -automorfismo de $\mathbb{C}[X, Y]$ e u, v unidades em $\mathbb{C}[X, Y]$. As seguintes propriedades são válidas para o índice de interseção:*

1. $I(f, g) < \infty$ se, e somente se, f e g são relativamente primos em $\mathbb{C}[[X, Y]]$;
2. $I(f, g) = I(g, f)$;
3. $I(\phi(f), \phi(g)) = I(uf, vg) = I(f, g)$;
4. $I(f, g \cdot h) = I(f, g) + I(f, h)$;
5. $I(f, g) = 1$ se, e somente se, C_f e C_g são suaves e transversais;
6. $I(f, g - hf) = I(f, g)$.

Demonstração: Veja Teorema 4.3.4 de [H]. □

Agora, dada $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ uma série de potências irreduzível, regular em Y de ordem n e $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux da curva C_f , definimos como *valoração associada a f* , a função

$$\begin{aligned} v_f : \mathbb{C}[[X, Y]] &\longrightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} \\ g &\longmapsto \text{mult}(g(T^n, \varphi(T))), \end{aligned}$$

e $v_f(0) = \infty$.

Sejam g e h elementos de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Segue da Proposição 1.1, as seguintes propriedades da função v_f :

1. $v_f(g \cdot h) = v_f(g) + v_f(h)$;
2. $v_f(h) = 0$ se $h(0, 0) \neq 0$;
3. $v_f(g + h) \geq \min\{v_f(g), v_f(h)\}$, com igualdade se $v_f(g) \neq v_f(h)$.

O próximo resultado nos fornece uma maneira interessante de calcular o índice de interseção entre duas curvas algebróides planas, e esta será muito utilizada em nosso trabalho.

Teorema 2.3 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ e $f = f_1 \cdots f_r$ uma decomposição de f em fatores irreduzíveis, com $f_i \neq f_j$ para todo $i \neq j$. Então,*

$$I(f, g) = \sum_{i=1}^r v_{f_i}(g).$$

Demonstração: Veja Teorema 4.3.6 de [H]. □

Observe que pelo teorema acima, se f for irreduzível, então $I(f, g) = v_f(g)$, para todo g elemento de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

O próximo teorema nos dá, em uma situação particular, exatamente o índice de interseção de duas curvas algebróides planas.

Teorema 2.4 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Então,*

$$I(f, g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g),$$

com igualdade se, e somente se, C_f e C_g não possuem tangentes em comuns.

Demonstração: Primeiramente, observe que é suficiente provarmos o teorema para f e g irredutíveis. De fato, consideremos as seguintes decomposições de f e g em fatores irredutíveis, $f = f_1 \cdots f_r$ e $g = g_1 \cdots g_s$. Temos, pelos itens (2) e (4) do Teorema 2.2, que

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j).$$

Por outro lado, pelo item (1) da Proposição 1.1, temos que

$$\text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) = \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j).$$

Logo, se $I(f_i, g_j) \geq \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j)$ para todo i, j , então

$$I(f, g) = \sum_{i,j} I(f_i, g_j) \geq \sum_{i,j} \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(g_j) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g).$$

Pelo item 3 do Teorema 2.2, índice de interseção é invariante por mudança de coordenadas. Sendo assim, podemos assumir, após uma mudança de coordenadas adequada, que f é regular em Y , isto é, a reta tangente de C_f é C_Y e C_f admite uma parametrização de Newton-Puiseux da forma

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = T^{\beta_1} + \sum_{i > \beta_1} b_i T^i, \end{cases}$$

onde $n = \text{mult}(f) < \beta_1$ e n não divide β_1 .

Agora, suponha que $\text{mult}(g) = m$ e

$$g(X, Y) = (aX + bY)^m + g_{m+1}(X, Y) + \cdots,$$

onde $g_{m+i}(X, Y)$, com $i \geq 1$ é um polinômio homogêneo de grau $m + i$. Então, pelo Teorema 2.3, temos que

$$I(f, g) = \text{mult}((aT^n + b\varphi(T))^m + g_{m+1}(T^n, \varphi(T)) + \cdots) \geq nm = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g),$$

com igualdade se, e somente se, $a \neq 0$, isto é, as retas tangentes de C_f e C_g são distintas. \square

2.2 Fórmula de Max Noether

Vimos anteriormente, pelo Teorema 2.4, como encontrar exatamente o índice de interseção de duas curvas algebróides planas que não possuem as mesmas retas tangentes. Nesta seção, nosso objetivo é expressar o índice de interseção de duas curvas sem a exigência anterior sobre as retas tangentes. Isto será fornecido pela fórmula de Max-Noether.

Antes de mais nada, introduziremos alguns conceitos e notações necessárias, como por exemplo, a definição de transformação quadrática.

Definição 2.5 *Uma transformação quadrática centrada na origem de \mathbb{C}^2 é, a menos de mudança de coordenadas, a aplicação*

$$\begin{aligned} T : \quad \mathbb{C}^2 &\rightarrow \mathbb{C}^2 \\ (X_1, Y_1) &\mapsto (X, Y) = (X_1, X_1 Y_1). \end{aligned}$$

Chamamos de *divisor excepcional* E da transformação quadrática, a reta $X_1 = 0$. Observe que $X_1 = 0$ é igual ao conjunto de pontos $T^{-1}(0, 0)$.

Seja Z_f uma curva analítica, onde f é um elemento de $\mathbb{C}\{X, Y\}$. Examinemos o conjunto $T^{-1}(Z_f)$, o qual chamamos de *transformada total de Z_f* . Para isto, consideremos a seguinte expansão de f em polinômios homogêneos, $f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \dots$. Então,

$$\begin{aligned} f(T(X_1, Y_1)) &= F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \dots \\ &= X_1^n (F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots), \end{aligned}$$

que chamamos de *transformada total de f* .

Denotando

$$f^{(1)}(X_1, Y_1) = F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \dots + X_1^{j-n} F_j(1, Y_1) + \dots,$$

chamamos a curva $Z_{f^{(1)}}$, determinada pela equação $f^{(1)}(X_1, Y_1) = 0$, de *transformada estrita de Z_f* .

Logo, $T^{-1}(Z_f) = E \cup Z_{f^{(1)}}$.

Vejamos um exemplo que ilustre estas definições.

Exemplo 2.6 *Considere a curva analítica Z_f , onde $f(X, Y) = Y^2 - 4X^2 - X^3$. Note que, a transformada total de f é dada por*

$$f(T(X_1, Y_1)) = X_1^2 Y_1^2 - 4X_1^2 - X_1^3,$$

onde a transformada total de Z_f é

$$T^{-1}(Z_f) : X_1^2 Y_1^2 - 4X_1^2 - X_1^3 = X_1^2(Y_1^2 - 4 - X_1) = 0,$$

e a transformada estrita de Z_f é a curva $Z_{f(1)} : Y_1^2 - 4 - X_1 = 0$.

Observe que as retas tangentes de Z_f na origem, dadas por

$$Y^2 - 4X^2 = (Y - 2X) \cdot (Y + 2X) = 0,$$

têm como transformadas estritas, duas retas que passam pelos pontos $P_1 = (0, 2)$ e $P_2 = (0, -2)$, que são exatamente os pontos da interseção de $Z_{f(1)}$ com E .

Os conceitos anteriores podem ser adaptados para $\mathbb{C}[[X, Y]]$, de fato temos que T induz homomorfismos de \mathbb{C} -álgebras, definidos da forma

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto X_1 \\ Y &\mapsto X_1 Y_1 \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto X_1 Y_1 \\ Y &\mapsto X_1, \end{aligned}$$

dependendo do cone tangente de f .

Considerando novamente a expansão de f em polinômios homogêneos,

$$f(X, Y) = F_n(X, Y) + F_{n+1}(X, Y) + \cdots \in \mathbb{C}[[X, Y]],$$

temos que $\sigma(f)$ é um elemento de $\mathbb{C}[[X_1, Y_1]]$, dado por

$$\begin{aligned} \sigma(f) &= f(X_1, X_1 Y_1) = F_n(X_1, X_1 Y_1) + F_{n+1}(X_1, X_1 Y_1) + \cdots \\ &= X_1^n (F_n(1, Y_1) + X_1 F_{n+1}(1, Y_1) + \cdots). \end{aligned}$$

Chamemos a série

$$\sigma^*(f) = \frac{1}{X_1^n} \sigma(f) = \frac{1}{X_1^n} f(X_1, X_1 Y_1),$$

onde $n = \text{mult}(f)$, de transformada estrita por σ de C_f , e denotemos também por $f^{(1)}$.

De maneira análoga, define-se transformada estrita por τ de C_f .

Vejamos algumas observações.

Observação 2.7 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Então, $\sigma^*(f \cdot g) = \sigma^*(f) \cdot \sigma^*(g)$.*

De fato, suponha que $\text{mult}(f) = n$ e $\text{mult}(g) = m$. Então, $\text{mult}(f \cdot g) = n + m$ e, por

definição, temos que

$$\sigma^*(f \cdot g) = \frac{1}{X_1^{n+m}} \cdot \sigma(f \cdot g) = \frac{1}{X_1^{n+m}} \cdot \sigma(f) \cdot \sigma(g) = \frac{1}{X_1^n} \cdot \sigma(f) \cdot \frac{1}{X_1^m} \cdot \sigma(g) = \sigma^*(f) \cdot \sigma^*(g),$$

sendo a segunda igualdade válida, pois σ é um homomorfismo de $\mathbb{C}[[X, Y]]$.

Observação 2.8 *Sejam $f, g \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Então, $\text{mult}(\sigma^*(f)) \leq \text{mult}(f)$.*

De fato, primeiramente note que basta mostrarmos que $\text{mult}(F_n(1, Y_1)) \leq \text{mult}(f)$, pois caso a multiplicidade de $\sigma^*(f)$ seja dada pela multiplicidade de algum $X^i F_{n+i}(1, Y_1)$, teremos então que $\text{mult}(X^i F_{n+i}(1, Y_1)) \leq \text{mult}(F_n(1, Y_1)) \leq \text{mult}(f)$. Observe que os termos de $F_n(1, Y_1)$ são de grau menor ou igual a $n = \text{mult}(f)$. E mais, nenhum destes termos são cancelados com algum outro termo de $\sigma^*(f)$, uma vez que todos os outros são múltiplos de X_1 . Logo, $\text{mult}(\sigma^*(f)) \leq \text{mult}(f)$.

Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irredutível de multiplicidade n e regular em Y . Como vimos na Seção 1.2, C_f admite uma parametrização de Newton-Puiseux $(T^n, \varphi(T))$, tal que $m = \text{mult}(\varphi(T)) > n$. Considere $f^{(1)}(X_1, Y_1) = \sigma^*(f) = X_1^{-n} f(X_1, X_1 Y_1)$. Note que, como f é regular em Y , temos que $f^{(1)}(X_1, Y_1)$ é regular em Y_1 de ordem n e

$$f^{(1)}\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right) = (T^n)^{-n} f(T^n, \varphi(T)) = 0,$$

isto é,

$$(T^n, \psi(T)) = \left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)$$

é uma parametrização de Newton-Puiseux de $f^{(1)} = \sigma^*(f)$.

A proposição abaixo, nos dá a descrição do termo necessário para obter a igualdade no Teorema 2.4.

Proposição 2.9 *Sejam C_f e C_g duas curvas algebróides planas, com f irredutível. Então,*

$$I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)}).$$

Demonstração: Suponha que as multiplicidades de f e g são, respectivamente, n e n' . Podemos, pelo item (3) do Teorema 2.2, realizar uma mudança de coordenadas de modo a obter f regular em Y . Considerando $(T^n, \varphi(T))$ uma parametrização de Newton-Puiseux de C_f , temos, pelo que observamos acima, que $\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)$ é uma parametrização de $f^{(1)}$. Então, pelo Teorema 2.3,

$$I(f^{(1)}, g^{(1)}) = \text{mult}\left(g^{(1)}\left(T^n, \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)\right) = \text{mult}\left(\frac{1}{(T^n)^{n'}} \cdot g\left(T^n, T^n \cdot \frac{\varphi(T)}{T^n}\right)\right) =$$

$$\text{mult}\left(\frac{1}{(T^n)^{n'}}\right) + \text{mult}(g(T^n, \varphi(T))) = -n \cdot n' + v_f(g) = -\text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I(f, g).$$

Logo, $I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) + I(f^{(1)}, g^{(1)})$. \square

O próximo resultado garante que toda curva algebróide plana irredutível, após um número finito de transformadas estritas, torna-se uma curva suave.

Teorema 2.10 *Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irredutível e $f^{(i)}$ a transformada estrita de $C_{f^{(i-1)}}$, onde $f^{(0)} = f$. Então, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\text{mult}(f) \geq \text{mult}(f^{(1)}) \geq \dots \geq \text{mult}(f^{(N)}) = 1.$$

Demonstração: Veja Seção 5.2 de [H]. \square

Consideremos agora, $f = \prod_{i=1}^n f_i \in M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$ reduzida e $f^{(1)}$ a transformada estrita de C_f . Denotemos $O = (0, 0)$. Os pontos de interseção do divisor excepcional E e $Z_{f^{(1)}}$ são chamados de pontos da 1ª vizinhança de O e o conjunto destes pontos será denotado por $N_O^{(1)}(f)$. Podemos repetir o processo para cada ponto de $N_O^{(1)}(f)$ e assim, os pontos de interseção de $Z_{f^{(2)}}$ com o novo divisor excepcional são chamados de pontos da 2ª vizinhança de O , que serão denotados por $N_O^{(2)}(f)$. Pelo teorema acima, após um número finito de transformadas estritas, cada ramo se torna suave. Tomemos $M \in \mathbb{N}$, tal que $C_{f_i^{(M)}}$ é suave, para todo $i = 1, \dots, n$, e denotamos

$$N_O(f) = \bigcup_{i=0}^M N_O^{(i)}(f),$$

onde $N_O^{(0)}(f) = \{(0, 0)\}$.

Com as notações acima, estamos aptos a apresentar a conhecida fórmula de Noether.

Corolário 2.11 (Fórmula de Noether) *Sejam f e g duas curvas algebróides planas. Então,*

$$I(f, g) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f) \cdot \text{mult}_p(g),$$

onde $\text{mult}_p(f)$ indica a multiplicidade de $f^{(i)}$ em $p \in N_O^{(i)}(f)$.

Demonstração: Seja $f = \prod_{i=1}^n f_i$, então $I(f, g) = I\left(\prod_{i=1}^n f_i, g\right) = \sum_{i=1}^n I(f_i, g)$, sendo a última igualdade válida pelos itens (2) e (4) do Teorema 2.2.

Considerando o ramo f_i de f , temos, pela Proposição 2.9, que

$$I(f_i, g) = \text{mult}_O(f_i) \cdot \text{mult}_O(g) + I(f_i^{(1)}, g^{(1)}).$$

Por outro lado,

$$I(f_i^{(1)}, g^{(1)}) = \text{mult}_p(f_i^{(1)}) \cdot \text{mult}_p(g^{(1)}) + I(f_i^{(2)}, g^{(2)}),$$

onde $p \in N_O^{(1)}(f_i)$, ou seja,

$$I(f_i, g) = \sum_{p \in N_O^{(0)}(f_i) \cup N_O^{(1)}(f_i)} \text{mult}_p(f_i^{(j)}) \cdot \text{mult}_p(g^{(j)}) + I(f_i^{(2)}, g^{(2)}).$$

Como f_i é irredutível, pelo Teorema 2.10, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{(N)}$ é suave. Mais ainda, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que $f_i^{(N')}$ é uma unidade. Logo,

$$I(f_i, g) = \sum_{p \in N_O(f_i)} \text{mult}_p(f_i) \cdot \text{mult}_p(g).$$

Note agora que,

$$I(f_i, g) = \sum_{p \in N_O(f_i)} \text{mult}_p(f_i) \cdot \text{mult}_p(g) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f_i) \cdot \text{mult}_p(g),$$

sendo a última igualdade válida, pois se $p \in N_O(f)$ e $p \notin N_O(f_i)$, então $\text{mult}_p(f_i) = 0$, o que não altera a soma acima.

Deste modo,

$$\begin{aligned} I(f, g) &= \sum_{i=1}^n \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f_i) \cdot \text{mult}_p(g) \\ &= \sum_{p \in N_O(f)} \left(\sum_{i=1}^n \text{mult}_p(f_i) \right) \cdot \text{mult}_p(g) \\ &= \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f) \cdot \text{mult}_p(g). \end{aligned}$$

□

2.3 Semigrupo de Valores

Nesta seção, introduziremos o conceito de semigrupo de valores de uma curva algebróide plana irredutível, sendo este um invariante por equivalência de curvas.

Definição 2.12 *Seja f um elemento irredutível de $M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$. Chamamos de **semigrupo de valores** associado à curva C_f , o conjunto*

$$S(f) = \{I(f, g); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\} \subset \mathbb{N}.$$

Como vimos no Teorema 2.3, se f é irredutível, então $I(f, g) = v_f(g)$. Isto nos motiva a definir semigrupo de valores $S(f)$ da maneira que segue:

Considerando f uma série de potências irredutível em $\mathbb{C}[[X, Y]]$, regular em Y e com parametrização de Newton-Puiseux $(T^n, \varphi(T))$, temos que

$$S(f) = \{v_f(g); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\} = \{\text{mult}(g(T^n, \varphi(T))); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\}.$$

A noção de semigrupo de valores nos permite introduzir o conceito de ramos equisingulares. Dados C_f e C_g duas curvas algebróides planas irredutíveis, dizemos que elas são *equisingulares*, se $S(f) = S(g)$.

Note que, se C_f e C_g são curvas algebróides planas irredutíveis e equivalentes, então C_f e C_g são equisingulares. De fato, veja que basta verificarmos se $S(f) = S(g)$, isto é, que semigrupo de valores é invariante por equivalência de curvas. Para isto, devemos garantir que, para todo $h' \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle g \rangle$, existe $p' \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle g \rangle$, tal que $I(f, h') = I(g, p')$. Como C_f e C_g são equivalentes, existe um \mathbb{C} -automorfismo φ de $\mathbb{C}[[X, Y]]$ e uma unidade $u \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, tal que $\varphi(f) = ug$. Assim, temos que

$$I(f, h') = I(\varphi(f), \varphi(h')) = I(u^{-1}\varphi(f), u^{-1}\varphi(h')) = I(g, u^{-1}\varphi(h')),$$

sendo a primeira e a segunda igualdade válidas pelo item (3) do Teorema 2.2. Observe que, como $u^{-1}\varphi(h')$ é um elemento de $\mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle g \rangle$, basta tomar $p' = u^{-1}\varphi(h')$ e teremos a igualdade desejada. Logo, curvas equivalentes são equisingulares.

Seja $S(f)$ o semigrupo de valores associado a curva C_f . Chamamos os elementos de $\mathbb{N} \setminus S(f)$, de *lacunas* de $S(f)$. Temos que o número de lacunas de $S(f)$ é finito (veja Seção 6.2 de [H]), e assim existe um único elemento $c \in S(f)$, que chamamos de *condutor* de $S(f)$, que satisfaz as duas condições que seguem:

1. $c - 1 \notin S(f)$;
2. se $a \in \mathbb{N}$ e $a \geq c$, então $a \in S(f)$.

Vejamos duas maneiras interessantes, e que serão úteis no próximo capítulo, de expressar o condutor do semigrupo de valores de uma curva algebróide plana irredutível.

Observação 2.13 Consideremos C_f uma curva algebróide plana irredutível e c o condutor do semigrupo de valores $S(f)$ de C_f .

1. Se β_0, \dots, β_g são os expoentes característicos de C_f , então podemos obter o condutor c de $S(f)$ pela fórmula (veja Corolário 7.4.1 de [H])

$$c = \sum_{i=1}^g (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i - \beta_0 + 1,$$

onde $\epsilon_0 = \beta_0$ e $\epsilon_i = \text{mdc}(\beta_0, \dots, \beta_i)$.

2. Denotando por $\text{mult}_p(f)$ a multiplicidade de $f^{(i)}$ em $p \in N_O^{(i)}(f)$, como já fizemos na seção anterior, temos (veja Seção 6.5 de [H])

$$c = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1).$$

Outra informação importante sobre o semigrupo de valores $S(f)$, é que ele é finitamente gerado, isto é, existem $v_0, \dots, v_g \in S(f)$ tais que todo elemento de $S(f)$ pode ser escrito da forma

$$a_0 v_0 + \dots + a_g v_g, \quad \text{com } a_i \in \mathbb{N}.$$

Se $v_i \notin \langle v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_g \rangle$ para todo $i = 0, \dots, g$, então o conjunto $\{v_0, \dots, v_g\}$ será chamado de *sistema mínimo de geradores de $S(f)$* e denotemos, nesta situação, $S(f) = \langle v_0, \dots, v_g \rangle$.

Sejam β_0, \dots, β_g os expoentes característicos da curva C_f e v_0, \dots, v_g os elementos do sistema mínimo de geradores de $S(f)$. Não é ao acaso que estamos utilizando o mesmo número natural g para representarmos tanto o número de expoentes característicos, quanto o de elementos geradores de $S(f)$. Na verdade, podemos estabelecer uma relação entre o sistema mínimo de geradores de $S(f)$ e os expoentes característicos de C_f . Dito de outro modo, podemos obter o sistema mínimo de geradores através dos expoentes característicos de C_f .

A primeira observação que faremos com o intuito de apresentar a relação mencionada acima, é que o menor elemento de $S(f) \setminus \{0\}$ é o inteiro que corresponde a multiplicidade de C_f . De fato, temos, pelos Teoremas 2.3 e 2.4, que $v_f(g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g)$ para todo $g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$, isto é, $v_f(g) \geq \text{mult}(f)$, para todo $g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle$. Agora, se tomarmos C_h uma reta que não pertence ao cone tangente de C_f , teremos, novamente pelo Teorema 2.4, que $v_f(h) = \text{mult}(f)$.

Dando prosseguimento ao nosso objetivo, que é descrever o sistema mínimo de geradores através dos expoentes característicos, suponha $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irredutível com multiplicidade n e regular em Y . Como vimos na Seção 1.2, C_f admite uma parametrização de Newton-Puiseux da forma

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i, \end{cases}$$

com $b_m \neq 0, m > n$ e n não divide m . Nestas condições, temos que $m = \min(S(f) \setminus \langle n \rangle)$. De fato, primeiramente observe que m é um elemento de $S(f)$, uma vez que $I(f, Y) = m$. Por outro lado, se $g(X, Y) = \sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} X^\alpha Y^\beta \in \mathbb{C}[[X, Y]]$, então,

$$I(f, g) = \text{mult} \left(\sum_{\alpha, \beta \in \mathbb{N}} T^{n\alpha} \cdot \varphi(T)^\beta \right),$$

o que deixa claro que $\min(S(f) \setminus \langle n \rangle) \geq m$. Mas, como $I(f, Y) = m$, temos a igualdade.

Desta maneira, se v_0, \dots, v_g representam o sistema mínimo de geradores de $S(f)$, temos que $v_0 = n = \text{mult}(f)$ e $v_1 = m$, lembrando que, $m = \text{mult}(\varphi(T))$ e m não é divisível por n . Com isto e pela definição de expoentes característicos apresentada no Capítulo 2, podemos concluir que $\beta_0 = v_0$ e $\beta_1 = v_1$.

Quanto aos v'_i s, com $2 \leq i \leq g$, necessitamos da seguinte igualdade provada por Zariski, (veja Teorema 6.2.1 de [H])

$$v_i = \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\epsilon_{k-1} - \epsilon_k}{\epsilon_{i-1}} \beta_k + \beta_i = \frac{\epsilon_0 - \epsilon_1}{\epsilon_{i-1}} \beta_1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_{i-1}} \beta_2 + \dots + \frac{\epsilon_{i-2} - \epsilon_{i-1}}{\epsilon_{i-1}} \beta_{i-1} + \beta_i. \quad (2.1)$$

Como $\eta_{i+1}\eta_{i+2}\dots\eta_g = \epsilon_i$, onde $\eta_j = \frac{\epsilon_{j-1}}{\epsilon_j}$ para todo $j \in \{i+1, \dots, g\}$, podemos expressar a igualdade acima da forma

$$v_i = \frac{(\eta_1 \dots \eta_g) - (\eta_2 \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_1 + \frac{(\eta_2 \dots \eta_g) - (\eta_3 \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_2 + \dots + \frac{(\eta_{i-1} \dots \eta_g) - (\eta_i \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_{i-1} + \beta_i,$$

isto é,

$$v_i = \frac{(\eta_1 - 1)(\eta_2 \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_1 + \frac{(\eta_2 - 1)(\eta_3 \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_2 + \dots + \frac{(\eta_{i-1} - 1)(\eta_i \dots \eta_g)}{\eta_i \dots \eta_g} \beta_{i-1} + \beta_i.$$

E por fim, temos

$$v_i = (\eta_1 - 1)\eta_2 \dots \eta_{i-1} \beta_1 + (\eta_2 - 1)\eta_3 \dots \eta_{i-1} \beta_2 + \dots + (\eta_{i-1} - 1)\beta_{i-1} + \beta_i,$$

para todo $i \in \{2, \dots, g\}$. Note ainda que,

$$v_i = \eta_{i-1}((\eta_1 - 1)\eta_2 \dots \eta_{i-2} \beta_1 + (\eta_2 - 1)\eta_3 \dots \eta_{i-2} \beta_2 + \dots + \beta_{i-1}) - \beta_{i-1} + \beta_i,$$

onde

$$v_{i-1} = (\eta_1 - 1)\eta_2 \dots \eta_{i-2} \beta_1 + (\eta_2 - 1)\eta_3 \dots \eta_{i-2} \beta_2 + \dots + \beta_{i-1},$$

isto é,

$$v_i = \eta_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i.$$

Concluindo, podemos obter o sistema mínimo de geradores de uma curva algebróide plana irreduzível conhecendo apenas os seus expoentes característicos, através da seguinte relação:

$$v_0 = \beta_0, \quad v_1 = \beta_1, \quad e \quad v_i = \eta_{i-1}v_{i-1} - \beta_{i-1} + \beta_i, \quad (2.2)$$

para $2 \leq i \leq g$.

Observe que também podemos obter os expoentes característicos a partir do sistema mínimo de geradores, fazendo uso da relação 2.2 acima.

Curvas Polares

Neste capítulo, estamos interessados em definir curvas polares de uma curva algebróide plana, objeto central de nossos estudos a partir deste momento. Apresentaremos também algumas propriedades e informações sobre elas, como por exemplo a fórmula de Plücker e o número de Milnor. O estudo dos objetos apresentados neste capítulo se baseou na teoria desenvolvida em Casas [C].

3.1 Definições e Primeiras Propriedades de Curvas Polares

Sejam $f, g \in M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$ tal que a curva algebróide plana C_g seja suave. Denotaremos por $P_g(f)$ o determinante do jacobiano

$$\frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix}.$$

Com estas notações, definimos o objeto central deste trabalho.

Definição 3.1 *Se $P_g(f) \neq 0$, então $P_g(f)$ define uma curva, a qual chamamos de **curva polar** de f com respeito à g , ou g -polar, e denotamos por $C_{P_g(f)}$.*

Vejam algumas propriedades das curvas polares.

Lema 3.2 *A curva polar $C_{P_g(f)}$ é invariante por mudança de coordenadas.*

Demonstração: Sejam $f, g \in M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$ com C_g uma curva suave e consideremos o seguinte \mathbb{C} -automorfismo

$$\begin{aligned} T: \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto u(X, Y) \\ Y &\mapsto v(X, Y). \end{aligned}$$

Lembre-se que, pela Proposição 1.5, as formas lineares iniciais de $u(X, Y)$ e $v(X, Y)$ devem ser linearmente independentes. Com isso, temos

$$T(f) = f \circ T(X, Y) = f(u(X, Y), v(X, Y)) \in \mathbb{C}[X, Y] \text{ e}$$

$$T(g) = g \circ T(X, Y) = g(u(X, Y), v(X, Y)) \in \mathbb{C}[X, Y].$$

Primeiramente mostremos que

$$P_{T(g)}(T(f)) = T(P_g(f)) \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}.$$

De fato, por definição, temos que

$$\begin{aligned} P_{T(g)}(T(f)) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial T(f)}{\partial X} & \frac{\partial T(f)}{\partial Y} \\ \frac{\partial T(g)}{\partial X} & \frac{\partial T(g)}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial f(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial Y} \\ \frac{\partial g(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial X} & \frac{\partial g(u(X, Y), v(X, Y))}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial Y} + \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \left(\frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{pmatrix} \\ \left(\frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \right) \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{pmatrix} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = T(P_g(f)) \frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}. \end{aligned}$$

Agora, observe que as curvas determinadas por $T(P_g(f))$ e $P_{T(g)}(T(f))$ são as mesmas, uma vez que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}$ é uma unidade. Com efeito, consideremos

$$u(X, Y) = aX + bY + h_1(X, Y) \text{ e } v(X, Y) = cX + dY + h_2(X, Y),$$

onde $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[X, Y]$ são singulares. Sabemos que as formas lineares iniciais de $u(X, Y)$ e $v(X, Y)$ são linearmente independentes, ou seja,

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Agora calculemos,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} \\ \frac{\partial v}{\partial X} & \frac{\partial v}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a + \frac{\partial h_1}{\partial X} & b + \frac{\partial h_1}{\partial Y} \\ c + \frac{\partial h_2}{\partial X} & d + \frac{\partial h_2}{\partial Y} \end{vmatrix} = ad - bc + h(X, Y),$$

onde $h(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ e possui multiplicidade maior ou igual a um. Como $ad - bc \neq 0$, podemos concluir que $\frac{\partial(u, v)}{\partial(X, Y)}$ é uma unidade de $\mathbb{C}[[X, Y]]$. \square

Usando o lema anterior, temos o seguinte resultado para o caso analítico.

Proposição 3.3 *Se $\varphi^* : U \rightarrow V$ é um isomorfismo analítico, onde U e V são vizinhanças da origem de \mathbb{C}^2 , podemos então considerar um \mathbb{C} -automorfismo $\varphi : \mathbb{C}[[X, Y]] \rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]]$ dado por $\varphi(f) = f \circ (\varphi^*)^{-1}$, para todo $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$. Com isso, se a curva polar $C_{P_g(f)}$ está definida, então $C_{P_{\varphi(g)}(\varphi(f))}$ também está e*

$$\varphi^*(C_{P_g(f)}) = C_{P_{\varphi(g)}(\varphi(f))}.$$

Demonstração: Temos, pela Observação 1.17, que $\varphi^*(Z_f) = Z_{\varphi(f)}$. Daí, utilizando o Lema 3.2, temos

$$\varphi^*(Z_{P_g(f)}) = Z_{\varphi(P_g(f))} = Z_{\varphi(P_g(f))} \cdot u = Z_{P_{\varphi(g)}(\varphi(f))}.$$

\square

Observação 3.4 *Seja $g(X, Y) = aY - bX$, com $a, b \in \mathbb{C}$ não ambos nulos. Então, a equação da curva polar de f com respeito à g apresenta-se da seguinte maneira*

$$P_g(f) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y}.$$

A observação anterior não é uma restrição. Na verdade, qualquer curva polar de f admite uma equação como acima, basta realizarmos mudanças de coordenadas adequadas. De fato, como C_g é suave, temos $g(X, Y) = bX + aY + h(X, Y)$, onde $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ e $h(X, Y) \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ com $\text{mult}(h(X, Y)) \geq 2$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $b \neq 0$ e consideremos o seguinte \mathbb{C} -automorfismo

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}[[X, Y]] &\rightarrow \mathbb{C}[[X, Y]] \\ X &\mapsto \frac{aY - g(X, Y)}{b} \\ Y &\mapsto Y. \end{aligned}$$

Desta maneira, temos que $T^{-1}(g(X, Y)) = aY - bX$ e então

$$P_{T^{-1}(g)}(T^{-1}(f)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(X)} & \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(Y)} \\ \frac{\partial T^{-1}(g)}{\partial T^{-1}(X)} & \frac{\partial T^{-1}(g)}{\partial T^{-1}(Y)} \end{vmatrix} = a \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(X)} + b \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(Y)}.$$

Observação 3.5 *A partir deste momento, e sempre que não houver confusão, quando fizermos uma mudança de coordenadas como acima por exemplo, por abuso de linguagem indicaremos $T^{-1}(g(X, Y)) = aY - bX$ e $P_{T^{-1}(g)}(T^{-1}(f)) = a \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(X)} + b \frac{\partial T^{-1}(f)}{\partial T^{-1}(Y)}$, simplesmente por $g(X, Y) = aY - bX$ e $P_g(f) = a \frac{\partial f}{\partial X} + b \frac{\partial f}{\partial Y}$, respectivamente.*

É válido comentar ainda, que se realizarmos uma mudança de coordenadas de modo a considerar $g(X, Y) = X$, teremos $P_g(f) = \frac{\partial f}{\partial Y}$.

Embora a curva polar de f com respeito à g seja invariante por mudança de coordenadas, ela depende de f , ou seja, do representante da curva escolhido. De fato, sabemos que a equação da curva polar de f com respeito à g é dada por $P_g(f)$. Agora, tomemos um outro representante da curva algebróide plana C_f , digamos uf , onde u é uma unidade em $\mathbb{C}[[X, Y]]$ e calculemos a equação da curva polar de uf com respeito à g . Temos,

$$\begin{aligned} P_g(uf) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial(uf)}{\partial X} & \frac{\partial(uf)}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial X} f + u \frac{\partial f}{\partial X} & \frac{\partial u}{\partial Y} f + u \frac{\partial f}{\partial Y} \\ \frac{\partial g}{\partial X} & \frac{\partial g}{\partial Y} \end{vmatrix} \\ &= f \frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} + u \frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} - f \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} - u \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} \\ &= u \left(\frac{\partial f}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial f}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} \right) + f \left(\frac{\partial u}{\partial X} \frac{\partial g}{\partial Y} - \frac{\partial u}{\partial Y} \frac{\partial g}{\partial X} \right) \\ &= u \frac{\partial(f, g)}{\partial(X, Y)} + f \frac{\partial(u, g)}{\partial(X, Y)} \\ &= uP_g(f) + fP_g(u). \end{aligned}$$

Na busca de propriedades da curva polar, temos o seguinte resultado.

Teorema 3.6 (Casas [C]) *Sejam $f, g \in M_{\mathbb{C}[[X, Y]]}$ tais que a curva algebróide plana C_g seja suave. Considerando $P_g(f)$ a equação da curva polar de f com respeito à g , temos:*

1. $I(P_g(f), g) = I(f, g) - 1$;
2. $\text{mult}(P_g(f)) \geq \text{mult}(f) - 1$, sendo estritamente maior se, e somente se, todos os ramos de f são tangentes à g ;
3. Se nenhum ramo de f é tangente à g , então nenhum ramo da polar $P_g(f)$ é tangente à g .

Demonstração: Como curva polar, multiplicidade e índice de interseção são invariantes por

mudança de coordenadas, podemos considerar $g(X, Y) = X$. Com isso, pela Observação 3.5, temos que a equação da curva polar de f com respeito à g pode ser considerada $\frac{\partial f}{\partial Y}$.

Com estas considerações, mostraremos o item (1).

Como $f(0, 0) = 0$, temos que $\text{mult}_Y(f(0, Y)) > 0$ e então,

$$I(f, g) = I(f, X) = \text{mult}_Y(f(0, Y)) = \text{mult}_Y\left(\frac{\partial f(0, Y)}{\partial Y}\right) + 1 = I(P_g(f), g) + 1.$$

Logo, $I(P_g(f), g) = I(f, g) - 1$.

Vejamos agora o item (2).

Consideremos a seguinte expansão de f em polinômios homogêneos,

$$f = F_n + F_{n+1} + \cdots,$$

onde $F_n = \prod_{i=1}^s c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i}$, $\sum_{i=1}^s r_i = n$, e $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$, ou seja, as formas lineares $a_i X + b_i Y$ e $a_j X + b_j Y$ de F_n , com $i \neq j$, são linearmente independentes. Sendo assim,

$$\frac{\partial f}{\partial Y} = \frac{\partial F_n}{\partial Y} + \frac{\partial F_{n+1}}{\partial Y} + \cdots,$$

com

$$\frac{\partial F_n}{\partial Y} = \sum_{i=1}^s r_i b_i c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j}.$$

Agora, note que duas parcelas de $\frac{\partial F_n}{\partial Y}$ nunca se cancelam. Com efeito, suponhamos que $b_i \neq 0$, $b_k \neq 0$ com $i \neq k$ e que

$$r_i b_i c_i (a_i X + b_i Y)^{r_i-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j} = -r_k b_k c_k (a_k X + b_k Y)^{r_k-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^s c_j (a_j X + b_j Y)^{r_j},$$

ou seja, $r_i b_i (a_k X + b_k Y) = -r_k b_k (a_i X + b_i Y)$, isto é,

$$(a_i X + b_i Y) = \frac{-r_i b_i}{r_k b_k} \cdot (a_k X + b_k Y),$$

o que é uma contradição, pois como estamos assumindo $i \neq k$, $b_i \neq 0$ e $b_k \neq 0$, temos que $(a_i X + b_i Y)$ e $(a_k X + b_k Y)$ são linearmente independentes. Logo, duas parcelas de $\frac{\partial F_n}{\partial Y}$ nunca se cancelam.

Desta forma,

$$\text{mult}\left(\frac{\partial F_n}{\partial Y}\right) = r_i - 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^s r_j = \sum_{j=1}^s r_j - 1 = \text{mult}(f) - 1,$$

se $b_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \dots, s\}$, ou então $\frac{\partial F_n}{\partial Y} = 0$, se $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$. Assim, $\text{mult}\left(\frac{\partial F_n}{\partial Y}\right) > \text{mult}(f) - 1$, se, e somente se, $b_i = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, s\}$.

Portanto,

$$\text{mult}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) \geq \text{mult}(f) - 1,$$

sendo que,

$$\text{mult}\left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right) > \text{mult}(f) - 1,$$

se, e somente se, $b_i = 0$, para todo $i \in \{1, \dots, s\}$, ou seja, se, e somente se, o cone tangente de C_f é da forma $\prod_{i=1}^s (a_i X)^{r_i}$, isto é, todos os ramos de C_f possuem mesma tangente que C_g .

E por fim, mostremos o item (3).

Como estamos assumindo $g(X, Y) = X$, temos que $\text{mult}(g) = 1$. Assim,

$$\text{mult}(P_g(f)) = \text{mult}(P_g(f)) \cdot \text{mult}(g) \leq I(P_g(f), g) \stackrel{(1)}{=} I(f, g) - 1 = \text{mult}(f) - 1,$$

sendo a desigualdade válida pelo Teorema 2.4 e a última igualdade válida, pois, por hipótese, f e g tem tangentes distintas. Mas, pelo item (2), temos $\text{mult}(P_g(f)) \geq \text{mult}(f) - 1$. Logo,

$$\text{mult}(P_g(f)) = \text{mult}(f) - 1.$$

Portanto, $I(P_g(f), g) = \text{mult}(P_g(f)) \cdot \text{mult}(g)$, isto é, $C_{P_g(f)}$ e C_g têm tangentes distintas, como garante o Teorema 2.4. \square

3.2 Fórmula de Plücker e Número de Milnor

Nesta seção, teremos como objetivo principal apresentar dois resultados importantes no estudo de curvas polares: fórmula de Plücker e número de Milnor. No entanto, primeiramente introduziremos algumas definições e resultados que serão utilizados no decorrer desta seção.

Sejam C_f uma curva algebróide plana irredutível, $n = \beta_0, \beta_1, \dots, \beta_g$ os expoentes característicos de uma parametrização de Puiseux de C_f e η_j e ϵ_j os inteiros correspondentes aos expoentes característicos, como definidos no Capítulo 1.

Denotando por U_n o grupo multiplicativo das n -ésimas raízes da unidade em \mathbb{C} , definimos,

para $j = 0, 1, \dots, g$, o conjunto

$$G_j = U_{\epsilon_j} = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^{\epsilon_j} = 1\}.$$

Temos assim,

$$U_n = G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_g = \{1\},$$

e ainda, a cardinalidade de G_j é ϵ_j , a qual denotaremos por $\sharp G_j$.

Os dois resultados a seguir, serão mencionados várias vezes no trabalho.

Lema 3.7 *Se $\zeta \in G_j \setminus G_{j+1}$ com $j \in \{0, \dots, g-1\}$, então $\zeta^{\beta_{j+1}} \neq 1$.*

Demonstração: Primeiramente observe que como $\zeta \in G_j \setminus G_{j+1}$, temos que $\zeta^{\epsilon_j} = 1$ e $\zeta^{\epsilon_{j+1}} \neq 1$. Agora, vamos supor que $\zeta^{\beta_{j+1}} = 1$. Temos então que $\zeta^{\epsilon_j} = \zeta^{\beta_{j+1}} = 1$. Mas, $\epsilon_{j+1} = \text{mdc}(\epsilon_j, \beta_{j+1})$, ou seja, podemos expressar ϵ_{j+1} como $\epsilon_{j+1} = a\epsilon_j + b\beta_{j+1}$, para algum $a, b \in \mathbb{C}$. Desta forma, temos que

$$\zeta^{\epsilon_{j+1}} = (\zeta^{\epsilon_j})^a \cdot (\zeta^{\beta_{j+1}})^b = 1,$$

o que contradiz a hipótese de $\zeta \notin G_{j+1}$. Logo, $\zeta^{\beta_{j+1}} \neq 1$. □

Se C_f é regular em Y , então podemos considerar que uma parametrização de Newton-Puiseux de C_f seja dada por

$$\begin{cases} X = T^n \\ Y = \varphi(T) = \sum_{i \geq m} b_i T^i. \end{cases}$$

O resultado que segue, nos chama a atenção para o fato de que se estivermos considerando C_f uma curva algebróide plana irredutível, então a ordem de coincidência entre duas parametrizações de C_f será sempre um expoente característico de C_f .

Proposição 3.8 *Seja C_f uma curva algebróide plana irredutível, com multiplicidade n . Se $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$ e $\mu \in G_i \setminus G_{i+1}$ com $i \geq k$ e $\zeta \neq \mu$, então*

$$\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(\mu T)) = \beta_{k+1}.$$

Demonstração: Sejam $\zeta, \mu \in U_n$, com $\zeta \neq \mu$. Como $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$ e $\mu \in G_i \setminus G_{i+1}$ com $i \geq k$, então $\zeta^j = \mu^j = 1$, para todo $j < \beta_{k+1}$, isto é, $\zeta^j b_j T^j = \mu^j b_j T^j$, para todo $j < \beta_{k+1}$. E mais, como $\zeta \neq \mu$, temos que $\zeta^{\beta_{k+1}} \neq \mu^{\beta_{k+1}}$. Logo, $\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(\mu T)) = \beta_{k+1}$. □

Corolário 3.9 *Seja C_f uma curva algebróide plana irredutível, com multiplicidade n . Se $\zeta \in G_k \setminus G_{k+1}$, então*

$$\text{mult}(\varphi(\zeta T) - \varphi(T)) = \beta_{k+1}.$$

Demonstração: Basta tomarmos $\mu = 1 \in U_n$ na Proposição 3.8. \square

O resultado seguinte será de grande valia na demonstração de um dos teoremas mais importantes desta seção, a saber, o Teorema da fórmula de Plücker.

Teorema 3.10 (Dickenstein e Sessa) *Seja $f \in \mathbb{C}[[X, Y]]$ irredutível, de multiplicidade n e regular em Y . Sejam j, k inteiros tais que $1 \leq j \leq n$ e $0 \leq k \leq g - 1$. Se $\epsilon_{k+1} \leq j \leq \epsilon_k$, então*

$$I(f, f_Y^{(j)}) = (n - \epsilon_1)\beta_1 + \cdots + (\epsilon_{k-1} - \epsilon_k)\beta_k + (\epsilon_k - j)\beta_{k+1},$$

onde $f_Y^{(j)}$ denota $\frac{\partial^j f}{\partial Y^j}$.

Demonstração: Tomemos $u(X, Y)$ uma unidade em $\mathbb{C}[[X, Y]]$. Então,

$$I(uf, (uf)_Y) = I(uf, u_Y f + u f_Y) = I(uf, u f_Y) = I(f, f_Y),$$

sendo a segunda e a terceira igualdade válidas pelos itens (6) e (3), respectivamente, do Teorema 2.2.

Como f é regular em Y , a menos de unidade podemos assumir que f é um polinômio de Weierstrass. Assim, pelo Teorema de Newton-Puiseux que apresentamos no Capítulo 1, temos que

$$f(X, Y) = \prod_{\alpha \in G_0} (Y - \varphi(\alpha X^{\frac{1}{n}})),$$

onde $(T^n, \varphi(T) = \sum_{i \geq \beta_1} b_i T^i)$ é uma parametrização de Newton-Puiseux de C_f .

Desta maneira, calculando $f_Y^{(j)}(X, Y)$ obtemos,

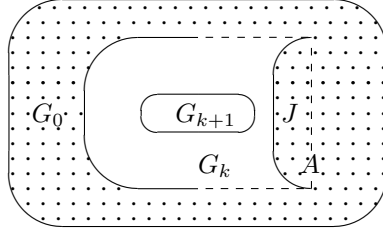
$$f_Y^{(j)}(X, Y) = j! \sum_{\substack{A \subset G_0 \\ \#A = n-j}} \left(\prod_{\alpha \in A} (Y - \varphi(\alpha X^{\frac{1}{n}})) \right),$$

e então, pelo Teorema 2.3,

$$I(f, f_Y^{(j)}) = \text{mult} \left(\sum_{\substack{A \subset G_0 \\ \#A = n-j}} \left(\prod_{\alpha \in A} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \right) \right).$$

Note que, pelo Corolário 3.9, a multiplicidade de $\prod_{\alpha \in A} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T))$ depende do conjunto $G_i \setminus G_{i+1}$ no qual α pertence. E mais, como os expoentes característicos β_i 's são crescentes, a multiplicidade será menor quanto menor for i .

Como $\epsilon_{k+1} \leq j \leq \epsilon_k$, temos que, $n - \epsilon_k \leq n - j \leq n - \epsilon_{k+1}$ e portanto, a menor multiplicidade da expressão acima acontece quando $A = (G_0 \setminus G_k) \cup J$, onde $J \subset G_k \setminus G_{k+1}$ é tal que $\#J = \epsilon_k - j$.



Desta maneira, basta analisarmos a multiplicidade da seguinte expressão,

$$\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_k) \cup J} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \right) =$$

$$\prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_k)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \cdot \sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (\varphi(T) - \varphi(\xi T)) \right).$$

Note que,

$$\prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_k)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) =$$

$$\prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_1)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \cdot \prod_{\alpha \in (G_1 \setminus G_2)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \cdots \prod_{\alpha \in (G_{k-1} \setminus G_k)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)).$$

Logo,

$$\text{mult} \prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_k)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) =$$

$$\text{mult} \left(\prod_{\alpha \in (G_0 \setminus G_1)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \right) + \cdots + \text{mult} \left(\prod_{\alpha \in (G_{k-1} \setminus G_k)} (\varphi(T) - \varphi(\alpha T)) \right) =$$

$$(n - \epsilon_1)\beta_1 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)\beta_2 + \cdots + (\epsilon_{k-1} - \epsilon_k)\beta_k,$$

sendo a última igualdade válida pelo Corolário 3.9.

Por fim, analisemos a multiplicidade da expressão

$$\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (\varphi(T) - \varphi(\xi T)) \right).$$

Observe que, pelo Corolário 3.9, cada somando da expressão acima tem multiplicidade $(\epsilon_k - j)\beta_{k+1}$.

Com isso, já temos que

$$\text{mult} \left(\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (\varphi(T) - \varphi(\xi T)) \right) \right) \geq (\epsilon_k - j) \beta_{k+1}.$$

Agora, mostraremos a igualdade na expressão acima. Para isso, veja que como

$$\varphi(T) - \varphi(\xi T) = (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) b_{\beta_{k+1}} T^{\beta_{k+1}} + \dots,$$

temos que o coeficiente líder de $\varphi(T) - \varphi(\xi T)$ é $(1 - \xi^{\beta_{k+1}}) b_{\beta_{k+1}}$, e então, o coeficiente líder do produto $\prod_{\xi \in J} (\varphi(T) - \varphi(\xi T))$ é $b_{\beta_{k+1}}^{\epsilon_k - j} \prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}})$.

Desta maneira, se mostrarmos que $b_{\beta_{k+1}}^{\epsilon_k - j} \sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) \right)$ é não-nulo, teremos a igualdade desejada.

Primeiramente note que $b_{\beta_{k+1}} \neq 0$, pois ele é coeficiente do termo de grau β_{k+1} , que, por sua vez, é um expoente característico de C_f . Assim, para finalizarmos a demonstração, resta-nos mostrar que $\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) \right)$ é não nulo.

Observe que, $1 - \xi^{\beta_{k+1}} = 0$ para todo $\xi \in G_{k+1}$, pois sabemos que $\epsilon_{k+1} | \beta_{k+1}$ e $\xi^{\epsilon_{k+1}} = 1$. Segue daí que,

$$\sum_{\substack{J \subset G_k \setminus G_{k+1} \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) \right) = \sum_{\substack{J \subset G_k \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) \right).$$

Denotaremos $\sum_{\substack{J \subset G_k \\ \#J = \epsilon_k - j}} \left(\prod_{\xi \in J} (1 - \xi^{\beta_{k+1}}) \right)$ por M .

Como $\xi \in G_k$, temos que $\xi = w^k$, com $k = 0, \dots, \epsilon_k - 1$, onde w é uma raiz ϵ_k -ésima primitiva da unidade. Assim, se $\xi_i, \xi_j \in G_k$, onde $\xi_i = w^a, \xi_j = w^b$ são tais que $a \equiv b \pmod{\eta_{k+1} = \frac{\epsilon_k}{\epsilon_{k+1}}}$, então

$$\begin{aligned} \xi_i^{\beta_{k+1}} &= (w^a)^{\beta_{k+1}} = (w^{b+c\eta_{k+1}})^{\beta_{k+1}} = (w^b)^{\beta_{k+1}} \cdot (w^{c\eta_{k+1}})^{\beta_{k+1}} = (w^b)^{\beta_{k+1}} \cdot (w^{c\eta_{k+1}\beta_{k+1}}) = \\ &= (w^b)^{\beta_{k+1}} \cdot (w^{\epsilon_k})^{cd} = (w^b)^{\beta_{k+1}} \cdot 1 = \xi_j^{\beta_{k+1}}, \end{aligned}$$

onde $d = \frac{\beta_{k+1}}{\epsilon_{k+1}} \in \mathbb{N}$ e $c \in \mathbb{Z}$.

Daí, como $\sharp G_k$ é $\epsilon_k = \eta_{k+1}\epsilon_{k+1}$, temos ϵ_{k+1} elementos pertencentes a uma mesma classe residual módulo η_{k+1} . Dito de outro modo, $\xi^{\beta_{k+1}}$ assume η_{k+1} valores distintos e cada um destes se repete ϵ_{k+1} vezes.

Agora, vamos interpretar M como um coeficiente, a menos de sinal, do seguinte polinômio,

$$g(u) = ((1 - u)^{\eta_{k+1}} - 1)^{\epsilon_{k+1}} \in \mathbb{C}[u].$$

Veja que $\deg(g(u)) = \eta_{k+1}\epsilon_{k+1} = \epsilon_k$, isto é, $g(u)$ possui ϵ_k raízes complexas. Além disto, tomando $1 - \alpha^{\beta_{k+1}}$, com $\alpha \in G_k$, temos

$$g(1 - \alpha^{\beta_{k+1}}) = \left((1 - (1 - \alpha^{\beta_{k+1}}))^{\eta_{k+1}} - 1 \right)^{\epsilon_{k+1}} = (\alpha^{\beta_{k+1}\eta_{k+1}} - 1)^{\epsilon_{k+1}} = (1 - 1)^{\epsilon_{k+1}} = 0,$$

ou seja, $1 - \alpha^{\beta_{k+1}}$, com $\alpha \in G_k$, é raiz de $g(u)$ e portanto, pelas relações de Girard, M corresponde, a menos de sinal, ao coeficiente de u^j de $g(u)$.

Vamos determinar tal coeficiente. Temos que

$$g(u) = \left[\binom{\eta_{k+1}}{0} 1^{\eta_{k+1}} \cdot u^0 + \dots + (-1)^l \binom{\eta_{k+1}}{l} \cdot u^l + \dots + (-1)^{\eta_{k+1}} \binom{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}} \cdot u^{\eta_{k+1}} - 1 \right]^{\epsilon_{k+1}} =$$

$$\left[(-1)^1 \binom{\eta_{k+1}}{1} + (-1)^2 \binom{\eta_{k+1}}{2} u^2 + \dots + (-1)^l \binom{\eta_{k+1}}{l} u^l + \dots + (-1)^{\eta_{k+1}} \binom{\eta_{k+1}}{\eta_{k+1}} u^{\eta_{k+1}} \right]^{\epsilon_{k+1}}.$$

Neste produto de ϵ_{k+1} fatores, para obtermos o coeficiente de u^j devemos efetuar todos os possíveis produtos de ϵ_{k+1} fatores da forma $(-1)^l \binom{\eta_{k+1}}{l} u^l$, de modo que a potência de u seja j , isto é,

$$(-1)^{\alpha_1} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_1} u^{\alpha_1} \cdot (-1)^{\alpha_2} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_2} u^{\alpha_2} + \dots + (-1)^{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} u^{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} =$$

$$(-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\epsilon_{k+1}}} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_1} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_2} \dots \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} u^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\epsilon_{k+1}}} =$$

$$(-1)^j \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_1} \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_2} \dots \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} u^j.$$

Além disto, devemos somar todas as possibilidades para obter $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{\epsilon_{k+1}} = j$ e assim, o coeficiente de $g(u)$ do termo de grau j é

$$\sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{\epsilon_{k+1}} = j} (-1)^j \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_1} \dots \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_{\epsilon_{k+1}}}.$$

Portanto, a menos de sinal, o coeficiente de u^j , isto é, M é

$$M = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{\epsilon_{k+1}} = j} (-1)^j \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_1} \dots \binom{\eta_{k+1}}{\alpha_{\epsilon_{k+1}}} \neq 0.$$

□

Vejamos agora o Teorema que precede o resultado sobre a fórmula de Plücker.

Teorema 3.11 *Seja $f = \prod_{i=1}^n f_i$, então para qualquer g – polar temos*

$$I(f_i, P_g(f)) = \sum_{p \in N_O(f_i)} \text{mult}_p(f_i)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f_i, g) - 1.$$

Demonstração: Primeiramente, vamos supor que f seja irredutível, ou seja, $f = f_i$ e analisemos as seguintes situações:

(a) Suponha que f e g tenham tangentes distintas, digamos $g(X, Y) = aX + bY + \dots$ e $f(X, Y) = (cX + dY)^n + \dots$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Supondo $a \neq 0$ e $d \neq 0$, consideremos a seguinte aplicação,

$$\begin{aligned} T_1 : \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ X &\mapsto g(X, Y) \\ Y &\mapsto Y \end{aligned}$$

Note que T_1 é um \mathbb{C} –automorfismo de $\mathbb{C}[X, Y]$, uma vez que a forma linear de $g(X, Y)$ e Y são linearmente independentes.

Assim,

$$T_1^{-1}(g(X, Y)) = X$$

e

$$T_1^{-1}(f) = (cT_1^{-1}(X) + dY)^n + \dots = \left(\frac{c}{a}X + \frac{ad - bc}{a}Y \right)^n + \dots.$$

Consideremos

$$\begin{aligned} T_2 : \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ X &\mapsto X \\ Y &\mapsto \frac{a}{ad - cb}Y - \frac{c}{ad - cb}X, \end{aligned}$$

que também é um \mathbb{C} –automorfismo de $\mathbb{C}[X, Y]$, uma vez que $ad - cb \neq 0$ já que f e g têm tangentes distintas.

Desta maneira,

$$T_2 \circ T_1^{-1}(g(X, Y)) = X$$

e

$$T_2 \circ T_1^{-1}(f(X, Y)) = Y^n + \text{termos de grau maior ou igual a } n + 1.$$

É válido comentar que nos casos em que $a \neq 0$, $d = 0$ e $b \neq 0$, e quando $a = 0$ e $c \neq 0$, basta considerarmos \mathbb{C} -automorfismos análogos aos citados anteriormente, para também podermos assumir $g(X, Y) = X$ e $f(X, Y) = Y^n + \text{termos de grau maior ou igual a } n + 1$, isto é, f regular em Y de ordem n .

Daí, pela Observação 3.5, a equação da curva polar de f com respeito à g , isto é $P_g(f)$, pode ser considerada $\frac{\partial f}{\partial Y}$.

Pelo Teorema 3.10, temos que

$$I(f, P_g(f)) = I(f, P_X(f)) = I(f, f_Y) = \prod_{i=0}^{g-1} (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \beta_{i+1}.$$

No entanto, pelo item (1) da Observação 2.13, temos que

$$\prod_{i=0}^{g-1} (\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) \beta_{i+1} = c + n - 1,$$

onde c é o condutor do semigrupo de C_f . E mais, pelo item (2) da mesma observação, temos que

$$c = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1).$$

Como f e g possuem tangentes distintas, temos $I(f, g) = \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g) = n \cdot 1 = n$.

Portanto,

$$I(f, P_g(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, g) - 1.$$

Vejamos agora a segunda situação.

(b) Suponha que f e g tenham mesmas tangentes, digamos que $g(X, Y) = aX + bY + \dots$ e que $f(X, Y) = k^n(aX + bY)^n + \dots$, com $k \in \mathbb{C} - \{0\}$ e $b \neq 0$. Considerando o \mathbb{C} -automorfismo inverso de

$$\begin{aligned} T : \mathbb{C}[X, Y] &\rightarrow \mathbb{C}[X, Y] \\ X &\mapsto X \\ Y &\mapsto g(X, Y), \end{aligned}$$

podemos assumir $g(X, Y) = Y$ e $f = k^n Y^n + \dots$.

Como f é irredutível, temos que f admite uma parametrização de Puiseux, digamos $\begin{cases} X = \varphi(T) \\ Y = \psi(T), \end{cases}$

e assim, $f(\varphi(T), \psi(T)) = 0$. Derivando temos

$$\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial T} = \frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial X} \cdot \frac{\partial \varphi(T)}{\partial T} + \frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \psi(T)}{\partial T} = 0,$$

isto é,

$$\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial X} \cdot \frac{\partial \varphi(T)}{\partial T} = - \frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial Y} \cdot \frac{\partial \psi(T)}{\partial T}.$$

Note que,

$$\text{mult}_T \left(\frac{\partial \varphi(T)}{\partial T} \right) = \text{mult}_T(\varphi(T)) - 1$$

e

$$\text{mult}_T \left(\frac{\partial \psi(T)}{\partial T} \right) = \text{mult}_T(\psi(T)) - 1.$$

Assim, como calcular o índice de interseção de f e f_X é o mesmo que calcular $v_f(f_X)$, temos que

$$I(f, f_X) + I(f, X) - 1 = I(f, f_Y) + I(f, Y) - 1,$$

ou seja,

$$I(f, f_X) = I(f, f_Y) - I(f, X) + I(f, Y).$$

Observe que, $f_X = P_Y(f) = P_g(f)$, $f_Y = P_X(f)$ e pelo caso (a), temos

$$I(f, f_Y) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + n - 1,$$

onde, neste caso, $n = I(f, X)$. Logo,

$$I(f, P_g(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, g) - 1.$$

Agora, vejamos o caso em que $f = \prod_{i=1}^r f_i$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $g(X, Y) = X$, $f_i = f_1$ e tomemos $\begin{cases} X = \varphi(T) \\ Y = \psi(T), \end{cases}$ uma parametrização de Puiseux de f_1 .

Como $f_1(\varphi(T), \psi(T)) = 0$, temos

$$\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial Y} = \prod_{j=2}^r f_j(\varphi(T), \psi(T)) \cdot \frac{\partial f_1(\varphi(T), \psi(T))}{\partial Y},$$

e então

$$I(f_1, f_Y) = \sum_{j=2}^r I(f_1, f_j) + I(f_1, (f_1)_Y).$$

Como f'_j s são irredutíveis, pela Fórmula de Noether (Corolário 2.11), temos que

$$I(f_1, f_j) = \sum_{p \in N_O(f_1)} \text{mult}_p(f_1) \cdot \text{mult}_p(f_j)$$

e portanto, usando o teorema para f_1 que é irredutível,

$$\begin{aligned} I(f_1, f_Y) &= \sum_{j=2}^r \sum_{p \in N_O(f_1)} \text{mult}_p(f_1) \text{mult}_p(f_j) + \sum_{p \in N_O(f_1)} \text{mult}_p(f_1)(\text{mult}_p(f_1) - 1) + I(f_1, g) - 1 \\ &= \sum_{p \in N_O(f_1)} \text{mult}_p(f_1) \left(\sum_{j=2}^r \text{mult}_p(f_j) + \text{mult}_p(f_1) - 1 \right) + I(f_1, g) - 1 \\ &= \sum_{p \in N_O(f_1)} \text{mult}_p(f_1)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f_1, g) - 1. \end{aligned}$$

□

Com os resultados apresentados até então, estamos aptos a obter como Corolário, a fórmula de Plücker.

Corolário 3.12 (Fórmula de Plücker) *Sejam C_f uma curva algebróide plana e C_g uma curva suave. Se r denota o número de ramos de C_f , então*

$$I(f, P_g(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, g) - r.$$

Demonstração: Considerando $f = \prod_{i=1}^r f_i$, temos que

$$I(f, P_g(f)) = I\left(\prod_{i=1}^r f_i, P_g(f)\right) = \sum_{i=1}^r I(f_i, P_g(f)),$$

e então, pelo Teorema 3.11,

$$\begin{aligned} I(f, P_g(f)) &= \sum_{i=1}^r I(f_i, P_g(f)) = \sum_{i=1}^r \left(\sum_{p \in N_O(f_i)} \text{mult}_p(f_i)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f_i, g) - 1 \right) \\ &= \sum_{p \in N_O(f)} \left(\sum_{i=1}^r \text{mult}_p(f_i) \right) \cdot (\text{mult}_p(f) - 1) + \sum_{i=1}^r I(f_i, g) - r \\ &= \sum_{p \in N_O(f)} \left(\sum_{i=1}^r \text{mult}_p(f_i) \right) \cdot (\text{mult}_p(f) - 1) + \sum_{i=1}^r I(f_i, g) - r \end{aligned}$$

$$= \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, g) - r,$$

sendo a penúltima igualdade válida, pois se $p \in N_O(f)$ e $p \notin N_O(f_i)$, então $\text{mult}(f_i) = 0$, o que não altera a soma acima. \square

O número de Milnor é uma informação importante sobre a curva C_f e suas curvas polares, $C_{P_X(f)}$ e $C_{P_Y(f)}$, amplamente estudado na Teoria de Singularidades e Geometria Algébrica. Para demonstrar o próximo teorema que trata deste invariante, utilizaremos o Corolário 3.12, isto é, a fórmula de Plücker.

Teorema 3.13 *Seja C_f uma curva algebróide plana com r ramos. Então,*

$$I(P_X(f), P_Y(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + 1 - r.$$

Demonstração: Assumindo $P_X(f) = \prod_{j=1}^s h_j$, consideremos h_i um ramo de $P_X(f)$ e $\begin{cases} X = \varphi(T) \\ Y = \psi(T) \end{cases}$ uma parametrização de Puiseux de h_i . Pela Observação 3.5, podemos considerar $P_X(f) = \frac{\partial f}{\partial Y}$, onde $\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial Y} = 0$. Por outro lado, temos

$$\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial T} = \frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial X} \cdot \frac{\partial \varphi(T)}{\partial T}.$$

Agora, observe que

$$\text{mult}_T \left(\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial T} \right) = \text{mult}_T(f(\varphi(T), \psi(T))) - 1$$

e

$$\text{mult}_T \left(\frac{\partial \varphi(T)}{\partial T} \right) = \text{mult}_T(\varphi(T)) - 1.$$

Assim, como calcular o índice de interseção de f e h_i é o mesmo que calcular $v_{h_i}(f)$, temos que

$$I(f, h_i) = \text{mult}_T \left(\frac{\partial f(\varphi(T), \psi(T))}{\partial X} \right) + \text{mult}_T(\varphi(T)) = I(P_Y(f), h_i) + I(X, h_i).$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} I(f, P_X(f)) &= I(f, \prod_{j=1}^s h_j) = \sum_{j=1}^s I(f, h_j) = \sum_{j=1}^s (I(P_Y(f), h_j) + I(X, h_j)) \\ &= I(P_Y(f), \prod_{i=1}^s h_j) + I(X, \prod_{j=1}^s h_j) = I(P_Y(f), P_X(f)) + I(X, P_X(f)). \end{aligned}$$

Mas, pela Proposição 3.6 e pelo Corolário 3.12, temos, respectivamente,

$$I(X, P_X(f)) = I(f, X) - 1 \text{ e}$$

$$I(f, P_X(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, X) - r.$$

Logo, $I(P_X(f), P_Y(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + I(f, X) - r - I(f, X) + 1$.

Portanto,

$$I(P_X(f), P_Y(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + 1 - r.$$

□

Definição 3.14 *O número de Milnor de uma curva algebróide plana C_f é dado por*

$$\mu(f) = I(P_X(f), P_Y(f)) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) + 1 - r,$$

onde r é o número de ramos de f .

Como, por definição, o índice de interseção de duas curvas algebróides planas C_f e C_g é dado por $I(f, g) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{\langle f, g \rangle}$, podemos dizer então que

$$\mu(f) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X, Y]]}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial X}, \frac{\partial f}{\partial Y} \right\rangle}.$$

O número $\sum_{p \in N_O(f)} \frac{\text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1)}{2}$ é uma informação importante sobre a curva C_f que é denotado por $\delta(f)$. Deste modo, podemos reescrever o número de Milnor da seguinte maneira

$$\mu(f) = 2\delta(f) - r + 1.$$

Observe ainda que se f é irredutível, então

$$\mu(f) = 2\delta(f) = \sum_{p \in N_O(f)} \text{mult}_p(f)(\text{mult}_p(f) - 1) = c,$$

onde c é o condutor de $S(f)$ e a última igualdade decorre da Observação 2.13.

Decomposição da Curva Polar

Finalizaremos nosso trabalho, apresentando uma decomposição da curva polar em conjuntos, os quais chamaremos de *pacotes*, de tal forma que todos os ramos da curva polar pertencentes a um mesmo pacote possuem dados em comum, como por exemplo, o contato com cada ramo da curva C_f . Com este intuito, incluiremos neste capítulo ferramentas que facilitarão muito o nosso estudo, entre elas o diagrama de Eggers. As principais fontes consultadas durante a formulação deste capítulo foram os trabalhos de Evelia G. Barroso $[B_1],[B_2]$ e de Eggers $[E]$.

4.1 A noção de Contato

Nesta seção, estudaremos o contato entre dois ramos que, grosseiramente falando, é uma maneira de medir a coincidência das parametrizações de Newton-Puiseux de duas curvas algebróides planas irredutíveis. A inclusão deste novo conceito em nosso trabalho, nos permitirá calcular o índice de interseção de duas curvas algebróides planas irredutíveis, quando ambas são dadas pelas suas parametrizações de Newton-Puiseux. A fórmula de contato, assim como os resultados que apresentaremos nesta seção, serão de grande importância em nossos estudos no decorrer deste capítulo.

Sejam C_f e C_g duas curvas algebróides planas irredutíveis, com multiplicidades n e m , respectivamente. Considerando $\{y_i(X^{\frac{1}{n}})\}_{i=1}^n$ o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_f e $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ o conjunto das parametrizações de Newton-Puiseux de C_g , definimos como *contato* entre C_f e C_g o número

$$\text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}.$$

Vejamos um exemplo.

Exemplo 4.1 *Sejam C_f e C_g , curvas algebróides planas, cujas parametrizações de Newton-*

Puiseux são, respectivamente,

$$\begin{cases} y_1 = X^{\frac{3}{2}} + 2X^{\frac{9}{4}} \\ y_2 = -X^{\frac{3}{2}} + 2iX^{\frac{9}{4}} \\ y_3 = X^{\frac{3}{2}} - 2X^{\frac{9}{4}} \\ y_4 = -X^{\frac{3}{2}} - 2iX^{\frac{9}{4}}, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} z_1 = 3X^{\frac{5}{2}} + X^6 \\ z_2 = -3X^{\frac{5}{2}} + X^6 \end{cases}$$

Temos que, $\text{cont}(C_f, C_g) = 4 \cdot \frac{3}{2} = 6$ e $\text{cont}(C_g, C_f) = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$.

Em geral, e como é o caso do exemplo acima, o número racional $\text{cont}(C_f, C_g)$ é diferente do número racional $\text{cont}(C_g, C_f)$. Na verdade, pela definição de contato que apresentamos, temos a seguinte igualdade

$$\frac{\text{cont}(C_f, C_g)}{\text{mult}(f)} = \frac{\text{cont}(C_g, C_f)}{\text{mult}(g)}.$$

Veremos no próximo resultado que se fixarmos uma parametrização da curva C_f , digamos $y(X^{\frac{1}{n}})$, e calcularmos a ordem de coincidência com todas as parametrizações $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ da curva C_g , teremos

$$\max_{1 \leq j \leq m} \{\text{mult}(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}.$$

Lema 4.2 *Sejam $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ o conjunto de parametrizações de Newton-Puiseux de C_g e $y(X^{\frac{1}{n}})$ uma parametrização de Newton-Puiseux de C_f . Então*

$$\text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \{\text{mult}(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}.$$

Demonstração: Considerando $\{y_i(X^{\frac{1}{n}})\}_{i=1}^n$ o conjunto de parametrizações de C_f , temos, pelo Teorema de Newton-Puiseux, que

$$\{y(\xi X^{\frac{1}{n}})\}_{\xi \in U_n} = \{y_i(X^{\frac{1}{n}})\}_{i=1}^n. \quad (4.1)$$

Denote $p_j(X^{\frac{1}{nm}}) = y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}})$.

Assim, se $p_j(X^{\frac{1}{nm}}) = \sum_{i \geq i_0} a_i X^{\frac{i}{nm}}$, então $p_j(\xi X^{\frac{1}{nm}}) = \sum_{i \geq i_0} \xi^i a_i X^{\frac{i}{nm}}$, com $\xi \in U_n$, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{mult}(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}})) &= \text{mult}(p_j(X^{\frac{1}{nm}})) \\ &= \text{mult}(p_j(\xi X^{\frac{1}{nm}})) \\ &= \text{mult}(y(\xi X^{\frac{1}{n}}) - z_j(\xi X^{\frac{1}{m}})). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Agora, escolhendo $z(X^{\frac{1}{m}})$ uma parametrização de C_g , temos, novamente pelo Teorema de Newton-Puiseux, que

$$\{z(\zeta X^{\frac{1}{m}})\}_{\zeta \in U_m} = \{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m. \quad (4.3)$$

Note que se $\xi \in U_n$, então

$$z_j(\xi X^{\frac{1}{m}}) = z(\zeta \cdot \xi X^{\frac{1}{m}}), \text{ para algum } \zeta \in U_m. \quad (4.4)$$

E mais, $\zeta \cdot \xi \in U_{nm}$, pois $(\zeta \cdot \xi)^{nm} = \zeta^{nm} \cdot \xi^{nm} = 1^n \cdot 1^m = 1$. Assim,

$$(\zeta \cdot \xi)^n \in U_m. \quad (4.5)$$

Observe que, $\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m = \{z(\gamma X^{\frac{1}{m}})\}_{\gamma \in U_{nm}}$. De fato, obviamente temos que

$$\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m \subset \{z(\zeta \cdot \xi X^{\frac{1}{m}})\}_{\substack{\zeta \in U_m \\ \xi \in U_n}} = \{z(\gamma X^{\frac{1}{m}})\}_{\gamma \in U_{nm}}.$$

Agora, se $z(X^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j \geq j_0} b_j X^{\frac{j}{m}} = \sum_{j \geq j_0} b_j X^{\frac{nj}{nm}}$, então

$$z(\gamma X^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j \geq j_0} \gamma^{nj} b_j X^{\frac{nj}{nm}}, \quad (4.6)$$

e como $\gamma \in U_{nm}$, por (4.5), temos que $\gamma^n \in U_m$, ou seja, $z(\gamma X^{\frac{1}{m}}) \in \{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m$ e portanto

$$\{z_j(X^{\frac{1}{m}})\}_{j=1}^m = \{z(\zeta \cdot \xi X^{\frac{1}{m}})\}_{\substack{\zeta \in U_m \\ \xi \in U_n}}.$$

Veja ainda que, para todo $\xi \in U_n \subset U_{nm}$ temos

$$z_j(X^{\frac{1}{m}}) \stackrel{(4.3)}{=} z(\zeta X^{\frac{1}{m}}) \stackrel{(4.6)}{=} z(\zeta \cdot \xi X^{\frac{1}{m}}) \stackrel{(4.4)}{=} z_j(\xi X^{\frac{1}{m}}), \quad (4.7)$$

onde $\zeta \in U_m \subset U_{nm}$.

Deste modo,

$$\begin{aligned} \text{cont}(C_f, C_g) &= n \cdot \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} \stackrel{(4.1)}{=} n \cdot \max_{\substack{\xi \in U_n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}(y(\xi X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\} \\ &\stackrel{(4.7)}{=} n \cdot \max_{\substack{\xi \in U_n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}(y(\xi X^{\frac{1}{n}}) - z_j(\xi X^{\frac{1}{m}}))\} \stackrel{(4.2)}{=} n \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \{\text{mult}(y(X^{\frac{1}{n}}) - z_j(X^{\frac{1}{m}}))\}. \end{aligned}$$

□

É válido observar, que se fixarmos $z(X^{\frac{1}{m}})$ uma parametrização de C_g , então obtemos resultado análogo ao que acabamos de provar.

Utilizando o lema anterior, faremos uma comparação entre os contatos de três ramos.

Lema 4.3 *Sejam C_f, C_g e C_h , curvas algebróides planas irredutíveis tais que*

$$\alpha = \min\{\text{cont}(C_f, C_g), \text{cont}(C_f, C_h)\}.$$

Então,

1. $\frac{\text{cont}(C_h, C_g)}{\text{mult}(h)} \geq \frac{\alpha}{\text{mult}(f)}$;
2. Se $\text{cont}(C_f, C_g) \neq \text{cont}(C_f, C_h)$, então $\frac{\text{cont}(C_h, C_g)}{\text{mult}(h)} = \frac{\alpha}{\text{mult}(f)}$.

Demonstração: Sejam n, m e r as multiplicidades de C_f, C_g e C_h , respectivamente. Consideremos $y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}})$ uma parametrização de C_f e $z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})$ uma parametrização de C_g , tais que

$$\text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) = \max_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq k \leq m}} \text{mult}(y_l(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})),$$

isto é,

$$\text{cont}(C_f, C_g) = n \cdot \text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})). \quad (4.8)$$

Do mesmo modo, tomemos $w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}})$ uma parametrização de C_h tal que

$$\text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}})) = \max_{1 \leq q \leq r} \text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_q(X^{\frac{1}{r}})).$$

Então, pelo Lema 4.2,

$$\text{cont}(C_f, C_h) = n \cdot \text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}})). \quad (4.9)$$

Note que,

$$w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}}) = (y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) - (y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}})),$$

o que nos dá,

$$\begin{aligned} \text{mult}(w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) &\geq \min\{\text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})), \text{mult}(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}}))\} \\ &\stackrel{(4.8), (4.9)}{=} \min\left\{\frac{1}{n} \cdot \text{cont}(C_f, C_g), \frac{1}{n} \cdot \text{cont}(C_f, C_h)\right\}. \end{aligned}$$

Desta maneira, temos

$$n \cdot \text{mult}(w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \geq \min\{\text{cont}(C_f, C_g), \text{cont}(C_f, C_h)\}. \quad (4.10)$$

Considerando $z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})$, temos, pelo Lema 4.2, que

$$\begin{aligned} \text{cont}(C_h, C_g) &= r \cdot \max_{1 \leq q \leq r} \{ \text{mult}(w_q(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \} \\ &\geq r \cdot \text{mult}(w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Assim, por (4.10) e (4.11), temos

$$\begin{aligned} \text{cont}(C_h, C_g) &\geq \frac{r}{n} \cdot \min\{ \text{cont}(C_f, C_g), \text{cont}(C_f, C_h) \} \\ &= \frac{\text{mult}(h)}{\text{mult}(f)} \cdot \min\{ \text{cont}(C_f, C_g), \text{cont}(C_f, C_h) \}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Podemos repetir os mesmos argumentos iniciais fixando a parametrização $z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})$ de C_g , ou seja, pelo Lema 4.2, temos

$$\text{cont}(C_h, C_g) = r \cdot \max_{1 \leq q \leq r} \{ \text{mult}(w_q(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \},$$

e então, para algum $k \in \{1, \dots, r\}$,

$$\text{cont}(C_h, C_g) = r \cdot \text{mult}(w_k(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})). \quad (4.13)$$

Do mesmo modo, existe $a \in \{1, \dots, n\}$ tal que

$$\text{cont}(C_f, C_h) = n \cdot \text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}})). \quad (4.14)$$

Como $y_a(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}}) = (w_k(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) + (y_a(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}}))$, então

$$\text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \geq \min\{ \text{mult}(w_k(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})), \text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}})) \}.$$

Logo, por (4.13) e (4.14),

$$\text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \geq \min \left\{ \frac{1}{r} \cdot \text{cont}(C_h, C_g), \frac{1}{n} \cdot \text{cont}(C_f, C_h) \right\},$$

o que nos dá,

$$n \cdot \text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \geq \min \left\{ \frac{n}{r} \cdot \text{cont}(C_h, C_g), \text{cont}(C_f, C_h) \right\}. \quad (4.15)$$

E mais,

$$\text{cont}(C_f, C_g) \stackrel{(4.8)}{\geq} n \cdot \text{mult}(y_a(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) \stackrel{(4.15)}{\geq} \min \left\{ \frac{n}{r} \cdot \text{cont}(C_h, C_g), \text{cont}(C_f, C_h) \right\}. \quad (4.16)$$

Temos ainda que $y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}}) = (y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})) - (w_k(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}}))$ isto é,
 $mult(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}})) \geq \min\{mult(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}})), mult(w_k(X^{\frac{1}{r}}) - z_{j_0}(X^{\frac{1}{m}}))\}$,

e por (4.8) e (4.13),

$$n \cdot mult(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}})) \geq \min \left\{ cont(C_f, C_g), \frac{n}{r} \cdot cont(C_h, C_g) \right\}. \quad (4.17)$$

Agora, por (4.9), temos

$$\begin{aligned} cont(C_f, C_h) &= n \cdot mult(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_{s_0}(X^{\frac{1}{r}})) \\ &\geq n \cdot mult(y_{i_0}(X^{\frac{1}{n}}) - w_k(X^{\frac{1}{r}})) \\ &\stackrel{(4.17)}{\geq} \min \left\{ cont(C_f, C_g), \frac{n}{r} \cdot cont(C_h, C_g) \right\}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Concluindo,

$$cont(C_f, C_g) \stackrel{(4.16)}{\geq} \min \left\{ \frac{n}{r} \cdot cont(C_h, C_g), cont(C_f, C_h) \right\}, \quad (4.19)$$

$$cont(C_f, C_h) \stackrel{(4.18)}{\geq} \min \left\{ \frac{n}{r} \cdot cont(C_h, C_g), cont(C_f, C_g) \right\} \quad (4.20)$$

e

$$\frac{mult(f)}{mult(h)} \cdot cont(C_h, C_g) \stackrel{(4.12)}{\geq} \min\{cont(C_f, C_g), cont(C_f, C_h)\},$$

isto é,

$$\frac{cont(C_h, C_g)}{mult(h)} \geq \frac{1}{mult(f)} \cdot \min\{cont(C_f, C_g), cont(C_f, C_h)\},$$

o que prova o item (1).

Agora, se $cont(C_f, C_g) \neq cont(C_f, C_h)$, vamos supor que $cont(C_f, C_g) < cont(C_f, C_h)$ e então

$$cont(C_f, C_g) \stackrel{(4.19)}{\geq} \frac{n}{r} \cdot cont(C_h, C_g) \stackrel{(4.20)}{\geq} cont(C_f, C_g),$$

o que nos dá, $\frac{cont(C_f, C_g)}{n} = \frac{cont(C_h, C_g)}{r}$, isto é,

$$\frac{cont(C_h, C_g)}{mult(h)} = \frac{1}{mult(f)} \cdot \min\{cont(C_f, C_g), cont(C_f, C_h)\}.$$

Procedendo de maneira análoga quando $cont(C_f, C_h) < cont(C_f, C_g)$, mostra-se a igualdade acima, provando o item (2).

□

Considerando C_f e C_g curvas algebróides planas irredutíveis, com multiplicidades n e n' respectivamente, β_0, \dots, β_g os expoentes característicos de C_f e $\beta'_0, \dots, \beta'_{g'}$ os expoentes característicos de C_g (veja página 12), enunciamos o próximo resultado.

Proposição 4.4 *Seja α o contato entre C_f e C_g , tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$ para algum $q \geq 1$. Então,*

$$\frac{n}{n'} = \frac{\epsilon_i}{\epsilon'_i} = \frac{\beta_i}{\beta'_i} \quad \text{para} \quad \begin{cases} 0 \leq i \leq q-1, & \text{se } \alpha = \beta_q, \\ 0 \leq i \leq q, & \text{se } \alpha > \beta_q. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam

$$y(X^{\frac{1}{n}}) = a_{i_0} X^{\frac{i_0}{n}} + \dots + a_{i_r} X^{\frac{i_r}{n}} + a_{i_{r+1}} X^{\frac{i_{r+1}}{n}} + \dots$$

e

$$z(X^{\frac{1}{n'}}) = b_{j_0} X^{\frac{j_0}{n'}} + \dots + b_{j_s} X^{\frac{j_s}{n'}} + b_{j_{s+1}} X^{\frac{j_{s+1}}{n'}} + \dots,$$

com $a_{i_0} \dots a_{i_{r+1}} \neq 0$, $b_{j_0} \dots b_{j_{s+1}} \neq 0$, parametrizações de Newton-Puiseux de C_f e C_g respectivamente, tais que

$$\text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z(X^{\frac{1}{n'}})) = \max_{\substack{1 \leq l \leq n \\ 1 \leq k \leq n'}} \{\text{mult}_X(y_l(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{n'}}))\}.$$

Suponhamos que $i_r < \alpha \leq i_{r+1}$ e ainda, $\alpha = \min\{i_{r+1}, j_{s+1}\}$. Sendo assim, temos que $r = s$

e

$$\frac{i_p}{n} = \frac{j_p}{n'}, \quad (4.21)$$

para $p = 0, \dots, r$. E mais, se $\frac{i_{r+1}}{n} = \frac{j_{s+1}}{n'}$, então $a_{i_{r+1}} \neq b_{j_{s+1}}$.

Agora, observe que $\text{mdc}(n'n, n'i_0, n'i_1, \dots, n'i_p) = n' \cdot \text{mdc}(n, i_0, i_1, \dots, i_p)$. Mas, por outro lado, $\text{mdc}(n'n, n'i_0, n'i_1, \dots, n'i_p) \stackrel{(4.21)}{=} \text{mdc}(n'n, nj_0, nj_1, \dots, nj_p) = n \cdot \text{mdc}(n', j_0, j_1, \dots, j_p)$. Logo,

$$\frac{\text{mdc}(n, i_0, i_1, \dots, i_p)}{n} = \frac{\text{mdc}(n', j_0, j_1, \dots, j_p)}{n'}$$

e como $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, o resultado segue das definições de $\epsilon_i, \epsilon'_j, \beta_i$ e β'_j .

□

Segue, diretamente da Proposição 4.4, a seguinte observação.

Observação 4.5 *Sejam C_f e C_g curvas algebróides planas irredutíveis como dadas acima. Considerando (η_k, μ_k) , com $1 \leq k \leq g$ e (η'_l, μ'_l) , com $1 \leq l \leq g'$ os pares característicos de Puiseux de C_f e C_g , respectivamente, temos que:*

1. Se $\text{cont}(C_f, C_g) = \beta_q$, então $(\eta_k, \mu_k) = (\eta'_k, \mu'_k)$, para todo $1 \leq k \leq q-1$. E ainda, os q

primeiros expoentes característicos de C_g podem ser expressos da forma $\beta'_k = \frac{n'\beta_k}{n}$, assim como, $\epsilon'_k = \frac{n'\epsilon_k}{n}$, para todo $0 \leq k \leq q-1$.

2. Se $\text{cont}(C_f, C_g) > \beta_q$, então $(\eta_k, \mu_k) = (\eta'_k, \mu'_k)$, para todo $1 \leq k \leq q$. E mais, os $q+1$ primeiros expoentes característicos de C_g podem ser escritos como $\beta'_k = \frac{n'\beta_k}{n}$, assim como, $\epsilon'_k = \frac{n'\epsilon_k}{n}$, para todo $0 \leq k \leq q$.

Vejamos como calcular o índice de interseção de duas curvas algebróides planas irredutíveis, conhecendo apenas as suas parametrizações de Newton-Puiseux.

Proposição 4.6 *Sejam C_f e C_g duas curvas algebróides planas irredutíveis e regulares em Y . Considere β_0, \dots, β_g os expoentes característicos da curva C_f e seja α um número racional, tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, onde $\beta_{g+1} = \infty$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g)$;
2. $\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdot \dots \cdot \eta_q}$, onde $\eta_i = \frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}$, v_q é o q -ésimo elemento do sistema mínimo de geradores de $S(f)$, e, por convenção, $\eta_0 = 1$.

Demonstração: Consideremos as seguintes parametrizações de Newton-Puiseux de C_f e C_g , respectivamente,

$$y(X^{\frac{1}{n}}) = \sum_{i \geq \beta_1} b_i X^{\frac{i}{n}}, \quad z(X^{\frac{1}{m}}) = \sum_{j \geq \beta'_1} b'_j X^{\frac{j}{m}},$$

onde $n = \text{mult}(f)$ e $m = \text{mult}(g)$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $y(X^{\frac{1}{n}})$ e $z(X^{\frac{1}{m}})$ são as parametrizações de Newton-Puiseux, tais que

$$\text{mult}_X(y(X^{\frac{1}{n}}) - z(X^{\frac{1}{m}})) = \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \{\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - (z_j(X^{\frac{1}{m}})))\}. \quad (4.22)$$

Pelo Teorema de Newton-Puiseux apresentado no Capítulo 1, podemos expressar f da forma

$$f(X, Y) = \prod_{\zeta \in G_0} (Y - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})),$$

e então

$$\begin{aligned} I(f, g) &= m \cdot \text{mult}_X f(X, z(X^{\frac{1}{m}})) = m \cdot \text{mult}_X \left(\prod_{\zeta \in G_0} (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right) \\ &= m \cdot \sum_{\zeta \in G_0} \text{mult}_X (z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \end{aligned}$$

$$= m \cdot \sum_{i=1}^{g+1} \sum_{\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i} \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})), \quad (4.23)$$

sendo a última igualdade válida, pois $G_0 \supset G_1 \supset \dots \supset G_g = \{1\}$, onde $G_i = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^{\epsilon_i} = 1\}$ e, por convenção, $G_{g+1} = \emptyset$.

Mostremos agora que (1) implica em (2).

Suponha que α é o contato entre C_f e C_g e, por hipótese, $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$. Note que, se $q = 0$, ou seja, $\beta_0 \leq \alpha < \beta_1$, então

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n},$$

para todo $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$ e todo $i \in \{1, \dots, g+1\}$. De fato, como ϵ_{i-1} divide j , para todo j tal que $\frac{j}{n}$ é expoente de $y(X^{\frac{1}{n}})$ e $j < \beta_i$, temos que $\zeta^j = 1$, isto é, $\zeta^j b^j X^{\frac{j}{n}} = b^j X^{\frac{j}{n}}$ para todo $j < \beta_i$. Assim, como $\alpha < \beta_1$, temos que

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(X^{\frac{1}{n}})) \stackrel{(4.22)}{=} \frac{\alpha}{n}.$$

Logo, pela igualdade (4.23), $I(f, g) = m \cdot \alpha$, e como $\beta_0 = v_0$ podemos escrever

$$\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_0 v_0 + \alpha - \beta_0}{\eta_0}.$$

Agora, suponha que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, onde $q = 1, \dots, g$. Tomemos $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$, com $i = 1, \dots, q-1$. Temos, pelo Lema 3.7, que $\zeta^{\beta_i} \neq 1$, ou seja, o termo $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ é diferente de $b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$. E mais, o termo $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ não se cancela com nenhum termo de $z(X^{\frac{1}{m}})$, pois, como $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$, $b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ se cancela com algum termo de $z(X^{\frac{1}{m}})$, para $i = 1, \dots, q-1$. Por outro lado, note que $\zeta^j = 1$ para todo $j < \beta_i$, isto é, todos os termos de $y(\zeta X^{\frac{1}{n}})$ anteriores à $\zeta^{\beta_i} b_i^{\beta_i} X^{\frac{\beta_i}{n}}$ se cancelam com algum termo de $z(X^{\frac{1}{m}})$. Logo,

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\beta_i}{n}. \quad (4.24)$$

Separamos, a partir deste momento, a demonstração de (1) implica em (2) em dois casos.

Primeiro caso: Consideremos $\alpha = \text{cont}(C_f, C_g) = \beta_q$.

Observe que nesta situação, quando $\zeta \in G_{q-1}$, temos que

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(X^{\frac{1}{n}})) \stackrel{(4.22)}{=} \frac{\alpha}{n}, \quad (4.25)$$

sendo a primeira igualdade válida, pois $\zeta^j = 1$ para todo $j < \beta_q$.

Como $\sharp(G_{i-1} \setminus G_i) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i$, temos

$$\sum_{\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i} \text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \stackrel{(4.24)}{=} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n}, \quad (4.26)$$

com $i = 1, \dots, q-1$.

Logo, pela igualdade (4.23),

$$\begin{aligned} I(f, g) &\stackrel{(4.26)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \sum_{\zeta \in G_{q-1}} \text{mult}(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right) \\ &\stackrel{(4.25)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \right), \end{aligned}$$

onde, na última igualdade, $\epsilon_{q-1} = \sharp G_{q-1}$.

Como consequência,

$$\begin{aligned} \frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\epsilon_{q-1}}{\epsilon_{q-1}} \cdot \sum_{i=1}^{q-1} (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i + \epsilon_{q-1} \cdot \frac{\alpha}{n} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{\epsilon_{q-1}}{n} (v_q - \beta_q) + \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \alpha \\ &= \frac{\epsilon_{q-1}}{n} v_q - \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \beta_q + \frac{\epsilon_{q-1}}{n} \beta_q \\ &= \frac{\epsilon_{q-1}}{n} v_q = \frac{v_q}{\eta_0 \cdots \eta_{q-1}}, \end{aligned}$$

lembrando que $\eta_i = \frac{\epsilon_{i-1}}{\epsilon_i}$.

Segundo caso: Consideremos $\beta_q < \alpha < \beta_{q+1}$.

Note que, se tomarmos ζ um elemento de G_q , então a igualdade (4.25) é válida, ou seja,

$$\text{mult}_X(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) = \frac{\alpha}{n}, \quad (4.27)$$

pois $\zeta \in G_q \subset G_{q-1}$.

Com argumentos análogos aos utilizados anteriormente, obtém-se

$$I(f, g) = m \cdot \left(\sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \sum_{\zeta \in G_q} \text{mult}(z(X^{\frac{1}{m}}) - y(\zeta X^{\frac{1}{n}})) \right)$$

$$\stackrel{(4.27)}{=} m \cdot \left(\sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \right).$$

Como conseqüência,

$$\begin{aligned} \frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} &= \sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \frac{\beta_i}{n} + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \\ &= \frac{1}{n} \cdot \frac{\epsilon_q}{\epsilon_q} \cdot \sum_{i=1}^q (\epsilon_{i-1} - \epsilon_i) \beta_i + \epsilon_q \cdot \frac{\alpha}{n} \\ &\stackrel{(2.1)}{=} \frac{\epsilon_q}{n} (v_{q+1} - \beta_{q+1}) + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \frac{\epsilon_q}{n} (\eta_q v_q - \beta_q) + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\ &= \frac{\epsilon_q \eta_q v_q - \epsilon_q \beta_q}{n} + \frac{\epsilon_q}{n} \alpha \\ &= \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_0 \cdots \eta_q}. \end{aligned}$$

E por fim, demonstremos que (2) implica em (1).

Suponha que α é um número racional, tal que $\beta_q \leq \alpha < \beta_{q+1}$ e a seguinte igualdade é satisfeita,

$$\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_1 \cdots \eta_q}.$$

Note que, pelo que acabamos de mostrar, se $\tilde{\alpha}$ é o contato entre C_f e C_g , com $\beta_{\tilde{q}} \leq \tilde{\alpha} < \beta_{\tilde{q}+1}$, então

$$\frac{I(f, g)}{\text{mult}(g)} = \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_1 \cdots \eta_{\tilde{q}}},$$

isto é,

$$\frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_1 \cdots \eta_q} = \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_1 \cdots \eta_{\tilde{q}}}. \quad (4.28)$$

Queremos mostrar que α é o contato entre C_f e C_g , ou seja, $\alpha = \tilde{\alpha}$. Para isto, suponha que $\alpha \neq \tilde{\alpha}$ e analisemos as seguintes situações: $q = \tilde{q}$ e $q \neq \tilde{q}$.

Se $q = \tilde{q}$ e considerando, sem perda de generalidade, $\alpha < \tilde{\alpha}$, temos

$$\frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_1 \cdots \eta_q} < \frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_1 \cdots \eta_{\tilde{q}}},$$

o que contradiz a igualdade (4.28).

Agora, se $q \neq \tilde{q}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{q} = q + 1$, e então

$$\frac{\eta_{\tilde{q}} v_{\tilde{q}} + \tilde{\alpha} - \beta_{\tilde{q}}}{\eta_1 \cdots \eta_{\tilde{q}}} = \frac{\eta_{q+1} v_{q+1} + \tilde{\alpha} - \beta_{q+1}}{\eta_1 \cdots \eta_{q+1}} \geq \frac{v_{q+1}}{\eta_1 \cdots \eta_q} \stackrel{(2.2)}{=} \frac{\eta_q v_q + \beta_{q+1} - \beta_q}{\eta_1 \cdots \eta_q} > \frac{\eta_q v_q + \alpha - \beta_q}{\eta_1 \cdots \eta_q},$$

sendo que a primeira desigualdade é devida ao fato de que $\beta_{q+1} = \beta_{\tilde{q}} \leq \tilde{\alpha}$ e a última é válida, pois $\beta_{q+1} > \alpha$. No entanto, isto contradiz a igualdade 4.28.

Portanto, $\alpha = \tilde{\alpha}$, ou seja, α é o contato entre as curvas C_f e C_g .

□

4.2 Diagrama de Eggers

Nesta seção, priorizaremos o estudo do diagrama de Eggers: uma representação gráfica dos expoentes característicos dos diferentes ramos de uma curva algebróide plana, bem como do contato entre eles. Este conceito é importantíssimo na obtenção dos resultados deste capítulo.

Seja C_f uma curva algebróide plana reduzida, com multiplicidade n . Considere a seguinte decomposição de f em fatores irredutíveis, $f = f_1 \cdots f_r$. Denotemos por $\{\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\}$ os expoentes característicos de C_{f_i} e $\epsilon_k^i = \text{mdc}(\beta_0^i, \dots, \beta_k^i)$, com $i \in \{1, \dots, r\}$ e $k \in \{0, \dots, g_i\}$, os inteiros relacionados aos expoentes característicos de C_{f_i} . E por fim, denotemos o contato entre dois ramos C_{f_i} e C_{f_j} de C_f , por α_{ij} .

Para cada ramo C_{f_i} de C_f , definimos o conjunto $S_i := S_i^1 \cup S_i^2$, onde

$$S_i^1 = \left\{ \frac{\beta_k^i}{\text{mult}(f_i)} \right\}_1^{g_i} \text{ e } S_i^2 = \left\{ \frac{\alpha_{ij}}{\text{mult}(f_i)} \right\}_{i \neq j}.$$

Com estas considerações, definimos o diagrama de Eggers.

Tomando C_{f_i} um ramo de C_f , chamamos de *cadeia elementar de C_{f_i}* , o grafo K_i constituído por pontos pretos e um ponto branco, que chamamos de *vértices*. Os vértices pretos estão em correspondência bijetora com os elementos de S_i , por uma aplicação v , que chamamos de *valoração*. Já o vértice branco não tem valoração.

Os vértices em K_i são ligados da seguinte maneira: o vértice branco é ligado ao vértice preto de maior valoração através de uma aresta que pode ser *descontínua* ou *contínua*. Esta aresta é descontínua quando a valoração do vértice preto for um elemento de $S_i^2 - S_i^1$. Dito de outro modo, teremos uma aresta descontínua quando a valoração do vértice preto não for o quociente de um expoente característico de C_{f_i} pela multiplicidade. Caso contrário, a aresta será contínua.

Agora, se tomarmos um vértice preto, então ele é ligado ao vértice Q de valoração imediatamente inferior, por uma aresta que será descontínua caso $v(Q)$ seja um elemento de $S_i^2 - S_i^1$.

Se tomarmos C_{f_i} e C_{f_j} dois ramos de C_f , chamamos de *grafo parcial K_{ij} de C_{f_i} e C_{f_j}* , o

maior grafo conexo de K_i que contém os vértices $Q \in K_i$, tais que $v(Q) \leq \frac{\alpha_{ij}}{\text{mult}(f_i)}$. Observe que K_{ij} e K_{ji} são iguais.

Finalmente, definimos *diagrama de Eggers* $T(C_f)$ de C_f como o grafo obtido da identificação dos grafos parciais K_{ij} , na reunião disjunta das cadeias elementares K_1, \dots, K_r . O vértice de $T(C_f)$ de menor valoração é chamado de *ponto base de $T(C_f)$* .

Vejamos um exemplo que ilustra estes novos conceitos.

Exemplo 4.7 *Seja C_f uma curva algebróide plana, onde $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$ e*

$$f_1(X, Y) = Y^4 - 4Y^3X^2 + (6X^2 - 2X^3)Y^2 + (4X^5 - 8X^6)Y + X^6 - 2X^7 + 5X^8 - X^9,$$

$$f_2(X, Y) = Y^4 + 4Y^3X^2 + (6X^4 - 2X^3)Y^2 + (-4X^5 + 4X^6 - 4X^7)Y + X^6 - 2X^7 + X^8 - 4X^9 - X^{11}$$

e

$$f_3(X, Y) = (Y^2 - X^3)^2 - 4YX^6 - X^9.$$

As parametrizações de Puiseux de C_{f_1} são

$$\begin{cases} y_1 = X^{\frac{3}{2}} + X^2 + X^{\frac{9}{4}} \\ y_2 = -X^{\frac{3}{2}} + X^2 + iX^{\frac{9}{4}} \\ y_3 = X^{\frac{3}{2}} + X^2 - X^{\frac{9}{4}} \\ y_4 = -X^{\frac{3}{2}} + X^2 - iX^{\frac{9}{4}}, \end{cases}$$

temos então $\{\beta_0^1, \beta_1^1, \beta_2^1\} = \{4, 6, 9\}$.

As parametrizações de Puiseux de C_{f_2} são

$$\begin{cases} z_1 = X^{\frac{3}{2}} - X^2 + X^{\frac{11}{4}} \\ z_2 = -X^{\frac{3}{2}} - X^2 + iX^{\frac{11}{4}} \\ z_3 = X^{\frac{3}{2}} - X^2 - X^{\frac{11}{4}} \\ z_4 = -X^{\frac{3}{2}} - X^2 - iX^{\frac{11}{4}}, \end{cases}$$

logo, $\{\beta_0^2, \beta_1^2, \beta_2^2\} = \{4, 6, 11\}$.

As parametrizações de Puiseux de C_{f_3} são

$$\begin{cases} w_1 = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{9}{4}} \\ w_2 = -X^{\frac{3}{2}} + iX^{\frac{9}{4}} \\ w_3 = X^{\frac{3}{2}} - X^{\frac{9}{4}} \\ w_4 = -X^{\frac{3}{2}} - iX^{\frac{9}{4}}, \end{cases}$$

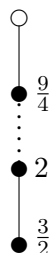
e $\{\beta_0^3, \beta_1^3, \beta_2^3\} = \{4, 6, 9\}$.

Agora, note que $\alpha_{12} = \alpha_{13} = \alpha_{23} = 4 \cdot 2 = 8$.

Deste modo, temos que

$$S_1^1 \cup S_1^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\} \cup \{2\}$$

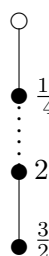
e a cadeia elementar K_1 de C_{f_1} é



Da mesma maneira, temos que

$$S_2^1 \cup S_2^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{11}{4} \right\} \cup \{2\}$$

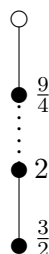
e a cadeia elementar K_2 de C_{f_2} é



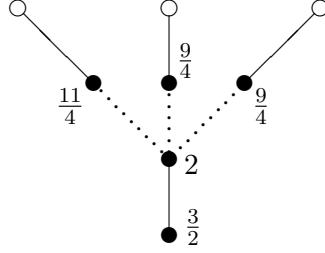
E por fim,

$$S_3^1 \cup S_3^2 = \left\{ \frac{3}{2}, \frac{9}{4} \right\} \cup \{2\}$$

e a cadeia elementar K_3 de C_{f_3} é



Logo, o diagrama de Eggers de C_f é



Com o intuito de explorar ainda mais o diagrama de Eggers, para cada vértice preto Q de $T(C_f)$, vamos definir três números que estão relacionados com as arestas de $T(C_f)$ que partem de Q .

Denotemos por:

1. $d(Q)$, o número de arestas *descontínuas* de $T(C_f)$ que partem de Q em direção a um vértice de maior valoração ou a um vértice branco;
2. $c(Q)$, o número de arestas *contínuas* de $T(C_f)$ que partem de Q em direção a um vértice de maior valoração ou a um vértice branco;
3. $k(Q)$, o número de arestas *contínuas* de $T(C_f)$ entre Q e o ponto base.

Vejam estas três definições aplicadas em um vértice preto do diagrama de Eggers do Exemplo 4.7.

Exemplo 4.8 Considere o vértice Q de $T(C_f)$ do Exemplo 4.7 tal que $v(Q) = 2$. Então

$$d(Q) = 3, \quad c(Q) = 0 \quad e \quad k(Q) = 1.$$

Observação 4.9 Seja Q um vértice preto de $T(C_f)$ tal que $c(Q) > 0$. Note que, o fato da aresta que parte de Q em uma cadeia elementar K_i de $T(C_f)$ ser contínua, é equivalente a dizer que a valoração de Q é igual a $\frac{\beta_{k+1}^i}{\text{mult}(f_i)}$, onde $k := k(Q)$.

Ainda com relação aos vértices pretos de $T(C_f)$, introduzimos a seguinte definição.

Definição 4.10 Seja Q um vértice preto de $T(C_f)$. Dizemos que Q é um **vértice simples** de $T(C_f)$, se $d(Q) + c(Q) = 1$. Caso contrário, dizemos que Q é um **vértice de bifurcação**.

Observação 4.11 Na Definição 4.10, temos que $d(Q) + c(Q) = 1$ é equivalente a $d(Q) = 0$ e $c(Q) = 1$.

De fato, suponha que $d(Q) = 1$, isto é, existe $i \in \{1, \dots, r\}$ tal que $Q \in K_i$ e $v(Q) \in S_i^2 - S_i^1$. Com isto, temos que $v(Q)\text{mult}(f_i)$ é o contato entre, pelo menos, dois ramos de C_f , ou seja, o

número de arestas que partem de Q em direção a um vértice de maior valoração ou a um vértice branco é maior ou igual a dois. Dito de outro modo, $d(Q) + c(Q) > 1$, o que contradiz a hipótese. Logo, $d(Q) = 0$ e $c(Q) = 1$.

O próximo resultado, relaciona algumas características de vértices de $T(C_f)$ com informações sobre o cone tangente de C_f .

Lema 4.12 1. A curva C_f contém dois ramos transversais se, e somente se, a valoração do ponto base de $T(C_f)$ é igual a um;

2. Se Q é um vértice de $T(C_f)$ tal que $v(Q) = 1$, então $c(Q) = 0$ e $d(Q) = t$, onde t é o número de tangentes distintas de C_f .

Demonstração: Mostremos inicialmente o item (1).

Considere a seguinte decomposição de f em fatores irredutíveis, $f = f_1 \cdots f_r$. Sejam C_{f_i} e C_{f_j} com $i \neq j$, ramos de C_f tais que C_{f_i} e C_{f_j} são transversais. Pelo Teorema 2.4, temos

$$I(f_i, f_j) = \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(f_j),$$

ou então,

$$\frac{I(f_i, f_j)}{\text{mult}(f_j)} = \text{mult}(f_i).$$

Considerando $\{v_0^i, \dots, v_{g_i}^i\}$ o sistema mínimo de geradores de $S(f_i)$, o semigrupo de C_{f_i} , temos

$$\frac{I(f_i, f_j)}{\text{mult}(f_j)} = \text{mult}(f_i) = v_0^i.$$

Por outro lado, se $\beta_q^i \leq \alpha_{ij} < \beta_{q+1}^i$, onde $\{\beta_0^i, \dots, \beta_{g_i}^i\}$ são os expoentes característicos de C_{f_i} e α_{ij} é o contato entre C_{f_i} e C_{f_j} , então, pela Proposição 4.6,

$$v_0^i = \frac{I(f_i, f_j)}{\text{mult}(f_j)} = \frac{\eta_q^i v_q^i + \alpha_{ij} - \beta_q^i}{\eta_0^i \cdots \eta_q^i},$$

lembrando que $\eta_k^i = \frac{\epsilon_{k-1}^i}{\epsilon_k^i}$ para $k \in \{1, \dots, q\}$ e $\eta_0^i = 1$.

Agora, observe que $q = 0$. De fato, temos que

$$v_0^i = \frac{I(f_i, f_j)}{\text{mult}(f_j)} = \frac{\eta_q^i v_q^i + \alpha_{ij} - \beta_q^i}{\eta_0^i \cdots \eta_q^i} \geq \frac{\eta_q^i v_q^i}{\eta_0^i \cdots \eta_q^i},$$

isto é,

$$\eta_0^i \cdots \eta_q^i v_0^i \geq \eta_q^i v_q^i.$$

Suponha que $q > 0$, então

$$\begin{aligned} \eta_0^i \cdots \eta_q^i v_0^i &\geq \eta_q^i v_q^i \stackrel{(2.2)}{=} \eta_q^i (\eta_{q-1}^i v_{q-1}^i + \beta_q^i - \beta_{q-1}^i) > \eta_q^i \eta_{q-1}^i v_{q-1}^i \\ &\stackrel{(2.2)}{=} \eta_q^i \eta_{q-1}^i (\eta_{q-2}^i v_{q-2}^i + \beta_{q-1}^i - \beta_{q-2}^i) > \eta_q^i \eta_{q-1}^i \eta_{q-2}^i v_{q-2}^i > \cdots > \eta_0^i \cdots \eta_q^i v_0^i, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\eta_0^i \cdots \eta_q^i v_0^i > \eta_0^i \cdots \eta_q^i v_0^i,$$

o que é uma contradição. Logo, $q = 0$.

Desta maneira, temos que $\alpha_{ij} = v_0^i = \beta_0^i$, isto é, existe um vértice preto Q de $T(C_f)$, tal que $v(Q) = \frac{\alpha_{ij}}{\text{mult}(f_i)} = 1$, e por definição de ponto base, este é necessariamente o ponto base de $T(C_f)$.

Para mostrar que, se a valoração do ponto de base de $T(C_f)$ é igual a um, então C_f possui dois ramos transversais, basta fazer o raciocínio inverso ao apresentado.

E por fim, mostremos o item (2).

Como $v(Q) = 1 \neq \frac{\beta_k^i}{\text{mult}(f_i)}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$ e todo $k \in \{1, \dots, g_i\}$, então $c(Q) = 0$.

Agora, as cadeias elementares K_i e K_j de C_{f_i} e C_{f_j} , respectivamente, são separadas no vértice Q , se, e somente se, $\alpha_{ij} = \beta_0^i$. Logo, $\beta_0^i \leq \alpha_{ij} < \beta_1^i$ e, pela Proposição 4.6,

$$I(f_i, f_j) = \text{mult}(f_i) \cdot \text{mult}(f_j),$$

isto é, C_{f_i} e C_{f_j} são transversais.

Portanto, as cadeias K_i e K_j são separadas em Q se, e somente se, C_{f_i} e C_{f_j} são transversais. Dito de outro modo, $d(Q)$ é igual ao número de tangentes distintas de C_f .

□

4.3 Multiplicidade de um Conjunto de Ramos da Polar

Nesta seção, calcularemos a multiplicidade de um conjunto de ramos da curva polar associado a um vértice preto Q do diagrama de Eggers $T(C_f)$ de C_f , conhecendo apenas os valores $d(Q)$, $c(Q)$ e η_q^i , com $q \leq k(Q)$ e C_{f_i} um ramo de C_f tal que $Q \in K_i$.

A partir desta seção, estaremos considerando C_f e C_g duas curvas algebróides planas, com C_g suave e, através de uma mudança de coordenadas, assumiremos $g(X, Y) = X$. Nestas condições, pela Observação 3.5, temos que a curva polar de f com respeito à g é definida pela equação $P_g(f) = f_Y$, a qual denotaremos por Γ para aliviar a notação.

O resultado que segue, estabelece uma relação entre as ordens de coincidência de duas parametrizações de Newton-Puiseux de uma curva algebróide plana C_f e as ordens de coincidência

de uma parametrização de C_f com uma parametrização da curva polar $C_{f_Y} := C_\Gamma$.

Proposição 4.13 (Kuo e Lu [K-L]) *Sejam $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ e $y_j(X^{\frac{1}{n'}})$ parametrizações de Newton-Puiseux de C_f , onde $i \neq j$. Então, existe uma parametrização $z_k(X^{\frac{1}{m}})$ de C_Γ que satisfaz as seguintes igualdades,*

$$\text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = \text{mult}_X(y_j(X^{\frac{1}{n'}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - y_j(X^{\frac{1}{n'}})).$$

Reciprocamente, dada uma parametrização de Newton-Puiseux $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ de C_f e uma parametrização $z_k(X^{\frac{1}{m}})$ de C_Γ , existe uma parametrização $y_j(X^{\frac{1}{n'}})$ de C_f que satisfaz as igualdades acima.

E mais, dada uma parametrização de Newton-Puiseux $y_i(X^{\frac{1}{n}})$ de C_f e um número racional $d > 0$, temos que

$$\begin{aligned} & \#\{y_j(X^{\frac{1}{n'}}) \in P(C_f); \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - y_j(X^{\frac{1}{n'}})) = d\} \\ &= \#\{z_k(X^{\frac{1}{m}}) \in P(C_\Gamma); \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - z_k(X^{\frac{1}{m}})) = d\}, \end{aligned}$$

onde $P(C_f)$ e $P(C_\Gamma)$ são os conjuntos de parametrizações de Newton-Puiseux de C_f e C_Γ , respectivamente.

Demonstração: Veja [K-L] e [B₁]. □

Observação 4.14 *É válido chamar a atenção para o fato de que, se na Proposição 4.13 C_f for irredutível e $\#\{y_j(X^{\frac{1}{n'}}) \in P(C_f); \text{mult}_X(y_i(X^{\frac{1}{n}}) - y_j(X^{\frac{1}{n'}})) = d\} \neq \emptyset$, então, pela Proposição 3.8, o número racional $d > 0$, citado no resultado em questão, é sempre o quociente de um expoente característico da curva C_f pela sua multiplicidade.*

Vejamos um exemplo para o caso em que a curva C_f é irredutível.

Exemplo 4.15 *Seja C_f a curva algebróide plana irredutível, com*

$$f(X, Y) = Y^4 - 2X^3Y^2 - 4X^5Y + X^6 - X^7$$

e que admite as seguintes parametrizações de Newton-Puiseux

$$\begin{cases} y_1(X^{\frac{1}{4}}) = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{7}{4}} \\ y_2(X^{\frac{1}{4}}) = X^{\frac{3}{2}} - X^{\frac{7}{4}} \\ y_3(X^{\frac{1}{4}}) = -X^{\frac{3}{2}} - iX^{\frac{7}{4}} \\ y_4(X^{\frac{1}{4}}) = -X^{\frac{3}{2}} + iX^{\frac{7}{4}}. \end{cases}$$

Note que os expoentes característicos de C_f são 4, 6 e 7.

Fixemos $y_1(X^{\frac{1}{4}})$ e calculemos as ordens de coincidência entre esta e as demais parametrizações de C_f . Temos então,

$$\text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - y_2(X^{\frac{1}{4}})) = \frac{7}{4} = \frac{\beta_2}{4},$$

e

$$\text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - y_3(X^{\frac{1}{4}})) = \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - y_4(X^{\frac{1}{4}})) = \frac{6}{4} = \frac{\beta_1}{4}.$$

Agora, se considerarmos a curva polar C_{f_Y} , temos que $f_Y = f_{Y_1} \cdot f_{Y_2} = 4(Y^3 - X^3Y - X^5)$, cujas parametrizações de Newton-Puiseux de $C_{f_{Y_1}}$ e $C_{f_{Y_2}}$ são

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(X) = -X^2 + \dots \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(X^{\frac{1}{2}}) = X^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}X^2 + \dots \\ \varphi_2(X^{\frac{1}{2}}) = -X^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}X^2 + \dots, \end{array} \right.$$

respectivamente.

Considerando $y_1(X^{\frac{1}{4}})$ e calculando a ordem de coincidência entre esta e as parametrizações da curva polar, temos

$$\text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - \varphi(X)) = \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - \varphi_2(X^{\frac{1}{2}})) = \frac{3}{2} = \frac{\beta_1}{4}$$

e

$$\text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - \varphi_1(X^{\frac{1}{2}})) = \frac{7}{4} = \frac{\beta_2}{4}$$

Concluindo, se tomarmos $d = \frac{7}{4}$ na Proposição 4.13, temos

$$\begin{aligned} & \# \left\{ y_j(X^{\frac{1}{4}}) \in P(C_f); \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - y_j(X^{\frac{1}{4}})) = \frac{7}{4} \right\} = 1 \\ & = \# \left\{ \varphi_j(X^{\frac{1}{2}}) \in P(C_{f_{Y_2}}) \subset P(C_{f_Y}); \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - \varphi_j(X^{\frac{1}{2}})) = \frac{7}{4} \right\}. \end{aligned}$$

Do mesmo modo, se $d = \frac{3}{2}$ temos

$$\begin{aligned} & \# \left\{ y_j(X^{\frac{1}{4}}) \in P(C_f); \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - y_j(X^{\frac{1}{4}})) = \frac{3}{2} \right\} = 2 \\ & = \# \left\{ \varphi_j(X^{\frac{1}{2}}) \in P(C_{f_Y}); \text{mult}_X(y_1(X^{\frac{1}{4}}) - \varphi_j(X^{\frac{1}{2}})) = \frac{3}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Consideremos a partir deste ponto, as seguintes decomposições em fatores irredutíveis de f

e de Γ , respectivamente,

$$f = \prod_{i=1}^r f_i \text{ e } \Gamma = \prod_{l=1}^s \Gamma_l.$$

O próximo resultado será fundamental para demonstrarmos o teorema central desta seção.

Lema 4.16 (Eggers [E]) *Seja C_{f_i} um ramo de C_f , com $\text{mult}(f_i) = n_i$. Para todo número racional $d > 0$, denote por $C_{B_i^d}$ a curva formada por todos os ramos C_{Γ_l} da curva polar C_Γ , tais que $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_i d$. Denote ainda, $C_{D_i^d}$ a curva formada por todos os ramos C_{f_j} de C_f , com $i \neq j$, tais que $\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j}) = n_i d$. Então,*

$$\text{mult}(B_i^d) = \begin{cases} \text{mult}(D_i^d) + \eta_1^i \cdots \eta_{q-1}^i (\eta_q^i - 1) & \text{se } d = \frac{\beta_q^i}{n_i}; \\ \text{mult}(D_i^d) & \text{se } d \neq \frac{\beta_k^i}{n_i}, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, g_i\}, \end{cases}$$

onde $\beta_{g_i}^i$ é o último expoente característico da curva C_{f_i} .

Demonstração: Veja [E] e [B₁]. □

Antes de apresentarmos o próximo resultado, introduziremos algumas notações que facilitarão nossos estudos. Considerando Q um vértice preto de $T(C_f)$, denotemos por:

1. I , o conjunto $\{1, \dots, r\}$, lembrando que $f = \prod_{i=1}^r f_i$;
2. I_Q , o conjunto $\{i \in I; Q \in K_i\}$;
3. A_Q , o conjunto $\{C_{\Gamma_l} \subset C_\Gamma; \text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_i v(Q) \text{ para todo } i \in I_Q\}$, onde n_i denota a multiplicidade de C_{f_i} .
4. C_{Γ^Q} , a curva formada por todos os ramos C_{Γ_l} de C_Γ que pertencem a A_Q . Em outras palavras, $\Gamma^Q := \prod_{C_{\Gamma_l} \in A_Q} \Gamma_l$.

O lema abaixo indica que o conjunto A_Q é não vazio.

Lema 4.17 *Se Q é um vértice preto de $T(C_f)$, então A_Q é não vazio.*

Demonstração: Sejam $i \in I_Q$ e $C_{B_i^{v(Q)}}$ a curva formada pelos ramos C_{Γ_l} de C_Γ que verificam $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_i v(Q)$ e seja $C_{D_i^{v(Q)}}$ a curva formada por todos os ramos de C_{f_j} de C_f tais que

$\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j}) = n_i v(Q)$. Temos, pelo Lema 4.16,

$$\text{mult}(B_i^{v(Q)}) = \begin{cases} \text{mult}(D_i^{v(Q)}) + \eta_1^i \cdots \eta_{q-1}^i (\eta_q^i - 1) & \text{se } v(Q) = \frac{\beta_q^i}{n_i}; \\ \text{mult}(D_i^{v(Q)}) & \text{se } v(Q) \neq \frac{\beta_k^i}{n_i}, \text{ para todo } k \in \{1, \dots, g_i\}. \end{cases}$$

Note que $\text{mult}(D_i^{v(Q)}) + \eta_1^i \cdots \eta_{q-1}^i (\eta_q^i - 1) > 0$, pois $\eta_k^i > 1$ para todo $k \in \{1, \dots, g_i\}$.

Agora, se $v(Q) \neq \frac{\beta_k^i}{n_i}$ para todo $k \in \{1, \dots, g_i\}$, então existe $j \in I$ tal que $v(Q) = \frac{\alpha_{ij}}{n_i}$, ou seja, $n_i v(Q) = \alpha_{ij}$. Logo, pela maneira que definimos $C_{D_i^{v(Q)}}$, temos que C_{f_j} é uma componente de $C_{D_i^{v(Q)}}$, isto é, $\text{mult}(D_i^{v(Q)}) > 0$.

Portanto, em qualquer caso $\text{mult}(B_i^{v(Q)}) > 0$, ou seja, A_Q é não vazio.

□

Finalizamos esta seção com um teorema que nos fornece precisamente a multiplicidade de um conjunto de ramos da curva polar.

Teorema 4.18 (Eggers [E]) *Sejam Q um vértice preto de $T(C_f)$, $i_0 \in I_Q$ e $k := k(Q)$.*

1. *Se $c(Q) > 0$ e a aresta que parte de Q em direção a cadeia K_{i_0} for contínua, então*

$$\sum_{C_{\Gamma_l} \in A_Q} \text{mult}(\Gamma_l) = \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (d(Q) + c(Q) \eta_{k+1}^{i_0} - 1).$$

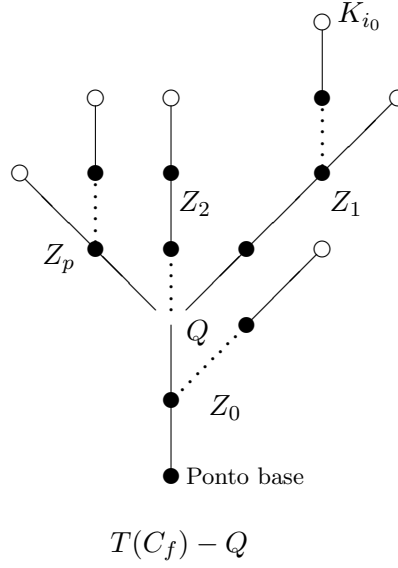
2. *Se $c(Q) = 0$, então*

$$\sum_{C_{\Gamma_l} \in A_Q} \text{mult}(\Gamma_l) = \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (d(Q) - 1).$$

Demonstração: Primeiramente, considerando T um grafo parcial de $T(C_f)$, definimos

$$\Gamma^T := \prod_{Q' \in T} \Gamma^{Q'}. \quad (4.29)$$

Incluiremos o diagrama abaixo, apesar de ser de uma curva algebróide plana particular, com o intuito de auxiliar na compreensão das próximas notações.



Consideremos as componentes conexas de $T(C_f) - Q$. Denotaremos por Z_0 a componente conexa de $T(C_f) - Q$ que contém o ponto base de $T(C_f)$. Se Q for o ponto base de $T(C_f)$, então $Z_0 = \emptyset$. Note que o número de componentes conexas de $T(C_f) - Q - Z_0$ é $p = d(Q) + c(Q)$, as quais denotemos por Z_1, \dots, Z_p .

Sem perda de generalidade, suponhamos que $K_{i_0} \cap Z_1 \neq \emptyset$ e $K_{i_0} \cap Z_j = \emptyset$, para todo $j \in \{2, \dots, p\}$, isto é, Z_1 é a componente conexa de $T(C_f) - Q - Z_0$ que contém os vértices de K_{i_0} que pertencem à $T(C_f) - Q - Z_0$.

Sejam $C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$ a curva formada por todas as componentes irredutíveis C_{Γ_l} de C_Γ que satisfazem a igualdade $\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l}) = n_{i_0}v(Q)$ e $C_{D_{i_0}^{v(Q)}}$ a curva formada por todos os ramos C_{f_j} de C_f que verificam $\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j}) = n_{i_0}v(Q)$, onde $n_{i_0} = \text{mult}(f_{i_0})$.

Observe que, como $\Gamma^{Z_u} = \prod_{Q' \in Z_u} \Gamma^{Q'}$, temos, para todo $2 \leq u \leq p$, que $C_{\Gamma^{Z_u}} \subset C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$ e $C_{\Gamma^{Z_1}}$ não está contido em $C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$. De fato, observe que se tomarmos $Q' \in K_{i_0} \cap Z_1$, então $\Gamma^{Q'} = \prod_{C_{\Gamma_{l'}} \in A_{Q'}} \Gamma_{l'} \subset \Gamma^{Z_1}$ e $\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_{l'}}) = n_j v(Q')$ para todo $j \in I_{Q'}$, onde $n_j = \text{mult}(f_j)$. Em particular,

$$\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_{l'}}) = n_{i_0} v(Q') > n_{i_0} v(Q)$$

e portanto $C_{\Gamma^{Q'}}$ não está contido em $C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$, se $Q' \in K_{i_0} \cap Z_1$. Agora, se $P \in K_j \cap Z_u$, com $u \in \{1, \dots, p\}$ e $P \notin K_{i_0}$, então considerando $C_{\Gamma_l} \subset C_{\Gamma^P}$, temos que $\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l}) = n_j v(P)$, para todo $j \in I_P$. Como $P \notin K_{i_0}$, temos

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = v(P) > \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} \geq v(Q), \quad (4.30)$$

sendo que é estritamente maior se $K_j \cap Z_1 \neq \emptyset$. Deste modo, pelo Lema 4.3,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} \geq v(Q),$$

sendo novamente estritamente maior se $K_j \cap Z_1 \neq \emptyset$. Logo, se $K_j \cap Z_1 = \emptyset$, isto é, $P \in Z_u$ com $u \in \{2, \dots, p\}$, então

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} = v(Q)$$

e portanto, $C_{\Gamma^P} \subset C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$ para todo $P \in Z_u$, com $2 \leq u \leq p$, ou seja, $C_{\Gamma^{Z_u}} \subset C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$ para todo $u \in \{2, \dots, p\}$. Agora, se $P \in K_j \cap Z_1$, então

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} > v(Q)$$

e portanto, C_{Γ^P} não está contido em $C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$.

Desta maneira, temos que

$$B_{i_0}^{v(Q)} = \Gamma^Q \cdot \Gamma^{Z_2} \dots \Gamma^{Z_c},$$

pois por definição $C_{\Gamma^Q} \subset C_{B_{i_0}^{v(Q)}}$, o que nos dá,

$$\text{mult}(\Gamma^Q) = \text{mult}(B_{i_0}^{v(Q)}) - \text{mult}(\Gamma^{Z_2}) - \dots - \text{mult}(\Gamma^{Z_p}). \quad (4.31)$$

Observe que no item (1), como $c(Q) > 0$ e a aresta que parte de Q na cadeia K_{i_0} é contínua, pela Observação 4.9, temos que $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^{i_0}}{n_{i_0}}$, onde $k := k(Q)$, e então, pelo Lema 4.16,

$$\text{mult}(B_{i_0}^{v(Q)}) = \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) + \eta_1^{i_0} \dots \eta_k^{i_0} (\eta_{k+1}^{i_0} - 1),$$

onde $\eta_j^{i_0} = \frac{\epsilon_j^{i_0}}{\epsilon_j^{i_0}}$, para todo $1 \leq j \leq k+1$.

Veja que para o item (2), temos que $\frac{\beta_k^{i_0}}{n_{i_0}} < v(Q) < \frac{\beta_{k+1}^{i_0}}{n_{i_0}}$, onde $k := k(Q)$ e, pelo Lema 4.16

$$\text{mult}(B_{i_0}^{v(Q)}) = \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}).$$

Sendo assim, para demonstrarmos o teorema resta-nos calcular a multiplicidade de Γ^{Z_u} para $u \in \{2, \dots, p\}$. Para isto, tomemos Z uma componente conexa de $T(C_f) - Q - Z_0$. Provemos que:

(a) Se Z é ligada à Q por uma aresta contínua, então

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \sum_{\{j; K_j \cap Z \neq \emptyset\}} n_j - \eta_1^{i_0} \dots \eta_{k+1}^{i_0},$$

onde $n_j = \text{mult}(f_j)$ e $\eta_r^{i_0}$, para todo $r \in \{1, \dots, k+1\}$, são os inteiros correspondentes aos expoentes característicos do ramo $C_{f_{i_0}}$.

(b) Se Z é ligada à Q por uma aresta descontínua, então

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \sum_{\{j; K_j \cap Z \neq \emptyset\}} n_j - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}.$$

Inicialmente note que, se C_{f_a} é um ramo de C_f tal que $K_a \cap Z \neq \emptyset$, então podemos escrever

$$\Gamma^Z = \prod \Gamma_l, \quad (4.32)$$

onde C_{Γ_l} é um ramo da polar que satisfaz a seguinte desigualdade,

$$\text{cont}(C_{f_a}, C_{\Gamma_l}) > n_a v(Q), \quad (4.33)$$

e $n_a = \text{mult}(f_a)$. De fato, para podermos escrever Γ^Z como acima, precisamos garantir a desigualdade (4.33) para todo ramo $C_{\Gamma_{Q'}}$ de $C_{\Gamma^{Q'}}$, onde Q' é um vértice de Z (veja (4.29)). É fácil ver que, se P é um vértice preto de $K_a \cap Z$, então todos os ramos C_{Γ_l} de C_{Γ^P} satisfazem a desigualdade (4.33). Resta-nos verificar para os vértices de Z que não pertencem a K_a . Para isto, consideremos $Q' \in K_j \cap Z$ tal que $Q' \notin K_a$. Seja C_{Γ_l} um ramo de $C_{\Gamma^{Q'}}$, ou seja, $\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l}) = n_j v(Q')$. Como $Q' \notin K_a$, então $\text{cont}(C_{f_j}, C_{f_a}) < n_j v(Q') = \text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})$. Assim, pelo Lema 4.3, temos

$$\frac{\text{cont}(C_{f_a}, C_{\Gamma_l})}{n_a} = \frac{\text{cont}(C_{f_a}, C_{f_j})}{n_a} > v(Q), \quad (4.34)$$

sendo a desigualdade válida, pois $K_j \cap Z \neq \emptyset$ e $K_a \cap Z \neq \emptyset$. Logo, todos os ramos C_{Γ_l} de $\Gamma^{Q'}$, com $Q' \in Z$, satisfazem a desigualdade (4.33), mostrando (4.32).

Agora, observe que também podemos escrever

$$\Gamma^Z = \prod_{Q' \in Z \cap K_a} B_a^{v(Q')}. \quad (4.35)$$

De fato, claramente $B_a^{v(Q')} \subset \Gamma^Z$. Mostremos então que $\Gamma^Z \subset \prod_{Q' \in Z \cap K_a} B_a^{v(Q')}$. Para isto, em virtude de (4.32), precisamos mostrar que os fatores de Γ^P , com $P \in K_j \cap Z$ e $P \notin K_a$, também ocorre em $B_a^{v(Q')}$, para algum $Q' \in Z \cap K_a$. Assim, seja $P \in K_j \cap Z$, tal que $P \notin K_a$. Considere C_{Γ^P} e seja C_{Γ_l} um ramo de C_{Γ^P} , ou seja, $C_{\Gamma_l} \in A_P$. Então, $\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l}) = n_j v(P)$. Como $K_j \cap Z \neq \emptyset$ e $K_a \cap Z \neq \emptyset$, temos que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{f_a})}{n_j} = v(R) < \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j},$$

para algum $R \in K_a \cap K_j$. Daí, pelo Lema 4.3,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_a}, C_{\Gamma_l})}{n_a} = v(R) > v(Q).$$

Logo, para todo ramo C_{Γ_l} de C_{Γ^P} temos que $C_{\Gamma_l} \in B_a^{v(R)}$, para algum $R \in K_a \cap Z$, o que mostra (4.35).

Definimos agora C_D como sendo a curva formada por todos os ramos C_{f_j} de C_f , tais que

$$\text{cont}(C_{f_a}, C_{f_j}) > n_a v(Q). \quad (4.36)$$

Então,

$$D = \prod_{Q' \in K_a \cap Z} D_a^{v(Q')},$$

onde $D_a^{v(Q')} = \prod f_j$, tal que $\text{cont}(C_{f_a}, C_{f_j}) = n_a v(Q')$.

Assim, por (4.35), temos

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \sum_{Q' \in Z \cap K_a} \text{mult}(B_a^{v(Q')}),$$

onde, pelo Lema 4.16,

$$\text{mult}(B_a^{v(Q')}) = \begin{cases} \text{mult}(D_a^{v(Q')}) + \eta_1^a \cdots \eta_{q-1}^a (\eta_q^a - 1) & \text{se } v(Q') = \frac{\beta_q^a}{n_a}; \\ \text{mult}(D_a^{v(Q')}) & \text{se } v(Q') \neq \frac{\beta_q^a}{n_a}, \text{ para todo } q \in \{1, \dots, g_a\}. \end{cases}$$

E mais, se Z é ligada à Q por uma aresta contínua, então $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a}$, onde $k := k(Q)$, e

$$v(K_a \cap Z) = \left\{ \frac{\beta_{k+2}^a}{n_a}, \dots, \frac{\beta_{g_a}^a}{n_a} \right\} \cup \left\{ \frac{\alpha_{aj}}{n_a}; K_j \cap Z \neq \emptyset \right\},$$

onde $v(K_a \cap Z)$ é o conjunto das valorações de todos os vértices $P \in K_a \cap Z$ e α_{aj} denota o contato entre os ramos C_{f_a} e C_{f_j} que não é um expoente característico de C_{f_a} . Logo,

$$\begin{aligned} \text{mult}(\Gamma^Z) &= \sum_{Q' \in K_a \cap Z} \text{mult}(B_a^{v(Q')}) \\ &= \sum_{q=k+2}^{g_a} \text{mult} \left(B_a^{\frac{\beta_q^a}{n_a}} \right) + \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} \text{mult} \left(B_a^{\frac{\alpha_{aj}}{n_a}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{q=k+2}^{g_a} \text{mult} \left(D_a^{\frac{\beta_q^a}{n_a}} \right) + \sum_{q=k+2}^{g_a} \eta_1^a \cdots \eta_{q-1}^a (\eta_q^a - 1) + \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} \text{mult} \left(D_a^{\frac{\alpha_{aj}}{n_a}} \right) \\
&= \text{mult}(D) + \sum_{q=k+2}^{g_a} \eta_1^a \cdots \eta_{q-1}^a (\eta_q^a - 1).
\end{aligned}$$

Como $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a} = \frac{\beta_{k+1}^{i_0}}{n_{i_0}}$ e $K_a \cap Z_u \neq \emptyset$ para algum $u \in \{1, \dots, p\}$, temos que se $a \neq i_0$, então $\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_a}) \geq n_{i_0} v(Q) = \beta_{k+1}^{i_0}$, sendo válida a desigualdade se $K_a \cap Z_1 \neq \emptyset$. Assim, pela Observação 4.5, temos que $\eta_j^{i_0} = \eta_j^a$, para todo $1 \leq j \leq k+1$, lembrando que $\eta_j^{i_0} = \frac{\epsilon_{j-1}^{i_0}}{\epsilon_j^{i_0}}$.

Desta maneira,

$$\begin{aligned}
\sum_{q=k+2}^{g_a} \eta_1^a \cdots \eta_{q-1}^a (\eta_q^a - 1) &= \sum_{q=k+2}^{g_a} \frac{\epsilon_0^a}{\epsilon_{q-1}^a} \left(\frac{\epsilon_{q-1}^a}{\epsilon_q^a} - 1 \right) = \sum_{q=k+2}^{g_a} \epsilon_0^a \left(\frac{1}{\epsilon_q^a} - \frac{1}{\epsilon_{q-1}^a} \right) \\
&= \epsilon_0^a \left(\frac{1}{\epsilon_{k+2}^a} - \frac{1}{\epsilon_{k+1}^a} + \frac{1}{\epsilon_{k+3}^a} - \frac{1}{\epsilon_{k+2}^a} + \frac{1}{\epsilon_{k+4}^a} - \frac{1}{\epsilon_{k+3}^a} + \cdots + \frac{1}{\epsilon_{g_a}^a} - \frac{1}{\epsilon_{g_a-1}^a} \right) \\
&= \epsilon_0^a \left(\frac{-1}{\epsilon_{k+1}^a} + 1 \right) = \epsilon_0^a - \eta_1^a \cdots \eta_{k+1}^a \\
&= n_a - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_{k+1}^{i_0},
\end{aligned}$$

sendo a quarta igualdade válida, pois $\epsilon_{g_a}^a = 1$, uma vez que $\beta_{g_a}^a$ é o último expoente característico de C_{f_a} .

No entanto, se Z é ligada a Q por uma aresta descontínua, então

$$\frac{\beta_k^a}{n_a} < v(Q) < \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a},$$

onde $k := k(Q)$. Desta maneira,

$$v(K_a \cap Z) = \left\{ \frac{\beta_{k+1}^a}{n_a}, \dots, \frac{\beta_{g_a}^a}{n_a} \right\} \cup \left\{ \frac{\alpha_{aj}}{n_a}; K_j \cap Z \neq \emptyset \right\},$$

onde α_{aj} denota o contato entre os ramos C_{f_a} e C_{f_j} que não é um expoente característico de C_{f_a} .

Com cálculos e raciocínios análogos aos anteriores, obtém-se

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \text{mult}(D) + n_a - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}.$$

Logo,

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \begin{cases} \text{mult}(D) + \text{mult}(f_a) - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_{k+1}^{i_0}, & \text{se } Q \text{ é ligado a } Z \text{ por uma aresta contínua;} \\ \text{mult}(D) + \text{mult}(f_a) - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}, & \text{se } Q \text{ é ligado a } Z \text{ por uma aresta descontínua.} \end{cases}$$

Observando que, para todo ramo C_{f_j} de C_f tal que $K_j \cap Z \neq \emptyset$, $\text{cont}(C_{f_a}, C_{f_j}) > n_a v(Q)$, e por (4.36), podemos escrever

$$f_a \cdot \prod_{Q' \in K_a \cap Z} D_a^{v(Q')} = \prod_{K_j \cap Z \neq \emptyset} f_j,$$

isto é,

$$\text{mult}(D) + \text{mult}(f_a) = \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} \text{mult}(f_j) = \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} n_j.$$

Portanto,

$$\text{mult}(\Gamma^Z) = \begin{cases} \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} n_j - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_{k+1}^{i_0}, & \text{se } Q \text{ é ligado a } Z \text{ por uma aresta contínua;} \\ \sum_{K_j \cap Z \neq \emptyset} n_j - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}, & \text{se } Q \text{ é ligado a } Z \text{ por uma aresta descontínua,} \end{cases}$$

provando as afirmações (a) e (b) da página 65.

Considerando o caso (1) e supondo que no conjunto $\{Z_2, \dots, Z_p\}$, temos r componentes ligadas à Q por uma aresta descontínua e s componentes ligadas à Q por uma aresta contínua, temos que,

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^p \text{mult}(\Gamma^{Z_k}) &= \sum_{k=2}^p \left(\sum_{K_j \cap Z_k \neq \emptyset} n_j \right) - r \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} - s \eta_1^{i_0} \cdots \eta_{k+1}^{i_0} \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - r \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} - s \eta_1^{i_0} \cdots \eta_{k+1}^{i_0} \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (r + s \eta_{k+1}^{i_0}) \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (d(Q) + (c(Q) - 1) \eta_{k+1}^{i_0}), \end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida, pois a aresta que parte de Q na cadeia elementar K_{i_0} é contínua.

Por (4.31), $\text{mult}(\Gamma^Q) = \text{mult}(B_{i_0}^{v(Q)}) - \sum_{k=2}^p \text{mult}(\Gamma^{Z_k})$ e pelo Lema 4.16, temos

$$\begin{aligned} \text{mult}(\Gamma^Q) &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) + \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (\eta_{k+1}^{i_0} - 1) - \left(\text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (d(Q) + (c(Q) - 1) \eta_{k+1}^{i_0}) \right) \\ &= \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (\eta_{k+1}^{i_0} - 1 + d(Q) + c(Q) \eta_{k+1}^{i_0} - \eta_{k+1}^{i_0}) \end{aligned}$$

$$= \eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1} - 1)$$

o que conclui o caso (1).

Já no caso (2), como $c(Q) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^p \text{mult}(\Gamma^Z) &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - r\eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - (p-1)\eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0} \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - (d(Q) - 1)\eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}, \end{aligned}$$

sendo a segunda igualdade válida, pois $p = d(Q) + c(Q)$ e, na situação em questão, $c(Q) = 0$.

Portanto,

$$\begin{aligned} \text{mult}(\Gamma^Q) &= \text{mult}(B_{i_0}^{v(Q)}) - \sum_{k=2}^p \text{mult}(\Gamma^{Z_k}) \\ &= \text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - (\text{mult}(D_{i_0}^{v(Q)}) - (d(Q) - 1)\eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}) \\ &= (d(Q) - 1)\eta_1^{i_0} \cdots \eta_k^{i_0}. \end{aligned}$$

□

Observação 4.19 *Sejam K_i e K_j cadeias elementares de $T(C_f)$ e Q um vértice de $T(C_f)$ tal que as aretas que partem de Q nas cadeias elementares K_i e K_j são contínuas. Então,*

$$\eta_q^i = \eta_q^j, \quad \text{para todo } 1 \leq q \leq k+1,$$

onde $k := k(Q)$ e $\eta_q^i = \frac{\epsilon_{q-1}^i}{\epsilon_q^i}$. De fato, pelo Teorema 4.18, temos que

$$\eta_1^j \cdots \eta_k^j (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^j - 1) = \sum_{C_{\Gamma_l} \in A_Q} \text{mult}(\Gamma_l) = \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i - 1).$$

Como $\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j}) \geq \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$, onde $n_i = \text{mult}(f_i)$, temos, pela Observação 4.5, que para todo $0 \leq l \leq k$, $\eta_l^i = \eta_l^j$. Logo,

$$(d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^j - 1) = (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i - 1).$$

Mas, $d(Q)$ e $c(Q)$ são valores que dependem apenas de Q , portanto $\eta_{k+1}^i = \eta_{k+1}^j$.

4.4 Decomposição da Curva Polar em Pacotes

Nesta seção, apresentaremos uma decomposição da curva polar, sendo esta caracterizada por uma relação de equivalência que veremos a seguir. Além disto, mostraremos que cada classe de equivalência está associada a um vértice preto do diagrama de Eggers, de modo que a valoração deste vértice nos permite, não apenas calcular dados dos ramos da curva polar, como por exemplo o contato deles com os ramos da curva C_f , mas também expressar parametrizações de Puiseux de ramos da curva polar, até um certo termo, a partir de parametrizações de Puiseux de ramos da curva C_f .

Sejam $\{C_{\Gamma_l}\}_l$ as componentes irredutíveis da curva polar C_{Γ} . A decomposição da curva polar é definida em termos da seguinte relação de equivalência:

$$C_{\Gamma_l} \sim C_{\Gamma_k} \text{ se, e somente se, } \text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = \text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_k}),$$

para todo ramo C_{f_i} da curva C_f . A classe de equivalência de C_{Γ_l} será denotada por $[C_{\Gamma_l}]$ e chamaremos cada uma destas classes de equivalência de *pacote*. Assim, a decomposição em pacotes da curva polar C_{Γ} é caracterizada pelo fato de que todos os ramos de um mesmo pacote possuem o mesmo contato com cada ramo da curva C_f .

Vejam agora um resultado que associa os pacotes da decomposição da curva polar C_{Γ} com os vértices pretos do diagrama de Eggers $T(C_f)$ de C_f .

Teorema 4.20 (Evelia G. Barroso [B₂]) *Existe uma correspondência bijetora entre o conjunto das classes de equivalência $\{[C_{\Gamma_k}]\}_k$, e o conjunto de vértices pretos de $T(C_f)$.*

Demonstração: Considere as notações da página 61 e a seguinte aplicação,

$$\begin{array}{ccc} \sigma : \{Q, \text{vértice preto de } T(C_f)\} & \longrightarrow & \{A_Q; Q \text{ é um vértice preto de } T(C_f)\} \\ & & \longmapsto \\ & & A_Q. \end{array}$$

Claramente σ está bem definida e é sobrejetora. Para verificarmos que σ é injetora, tomemos Q e Q' dois vértices pretos de $T(C_f)$, tais que $A_Q = A_{Q'}$ e analisemos duas situações:

Caso 1: $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$.

Sejam $i \in I_Q \cap I_{Q'}$ e C_{Γ_i} um ramo da curva polar C_{Γ} , tal que $C_{\Gamma_i} \in A_Q = A_{Q'}$. Então, sendo n_i a multiplicidade de C_{f_i} , temos que

$$n_i v(Q) = \text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_i}) = n_i v(Q'),$$

ou seja, $v(Q) = v(Q')$. Logo, $Q = Q'$, uma vez que $Q, Q' \in K_i$, isto é, σ é injetora.

Caso 2: $I_Q \cap I_{Q'} = \emptyset$.

Sejam $i \in I_Q, j \in I_{Q'}$ e $C_{\Gamma_l} \in A_Q = A_{Q'}$. Então,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i} = \frac{\text{cont}(C_{\Gamma_l}, C_{f_i})}{\text{mult}(\Gamma_l)} = v(Q)$$

e

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_{\Gamma_l}, C_{f_j})}{\text{mult}(\Gamma_l)} = v(Q').$$

Como $Q \in K_i$ e $Q \notin K_j$, temos que

$$v(Q) = \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i} > \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j})}{n_i}.$$

Assim, pelo Lema 4.3, temos

$$v(Q') = \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j})}{n_i}.$$

Mas, por outro lado, como $Q' \in K_j$ e $Q' \notin K_i$, temos que

$$v(Q') = \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} > \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{f_j})}{n_i},$$

o que é uma contradição. Logo, a única situação que pode acontecer é $I_Q \cap I_{Q'} \neq \emptyset$ e portanto, σ é injetora.

Observe que, se mostrarmos a seguinte igualdade

$$M := \{A_Q; Q \text{ é um vértice preto de } T(C_f)\} = \{[C_{\Gamma_l}]; C_{\Gamma_l} \text{ é um ramo de } C_\Gamma\} =: N,$$

então concluiremos nossa demonstração.

Primeiramente, mostraremos que $M \subset N$, isto é, cada elemento de M é uma classe de equivalência. Seja $A_Q \in M$ e tomemos $C_{\Gamma_l} \in A_Q$, isto é,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i} = v(Q), \quad (4.37)$$

para todo $i \in I_Q$.

Note que $A_Q = [C_{\Gamma_l}]$. De fato, para verificarmos que $A_Q \subset [C_{\Gamma_l}]$, tomemos $C_{\Gamma_k} \in A_Q$ e mostremos que $C_{\Gamma_l} \sim C_{\Gamma_k}$. Como $C_{\Gamma_k} \in A_Q$, e pela igualdade (4.37), temos que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_k})}{n_i} = v(Q) = \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i}, \quad (4.38)$$

para todo $i \in I_Q$. Mas, para termos $C_{\Gamma_l} \sim C_{\Gamma_k}$, devemos mostrar a igualdade (4.38) para todo

elemento de I . Sendo assim, seja $j \in I - I_Q$, isto é, $Q \notin K_j$. Então,

$$v(Q) > \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{f_i})}{n_j},$$

para todo $i \in I_Q$. Logo, pelo Lema 4.3 e pela igualdade (4.38),

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{f_i})}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_k})}{n_j},$$

para todo $j \in I - I_Q$, ou seja, $\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l}) = \text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_k})$, para todo $j \in I - I_Q$. Portanto, $A_Q \subset [C_{\Gamma_l}]$.

Por outro lado, se $C_{\Gamma_p} \sim C_{\Gamma_l} \in A_Q$, então, para todo $i \in I$, temos

$$\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_p}) = \text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}).$$

Em particular,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_p})}{n_i} = \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i} = v(Q),$$

para todo $i \in I_Q$, isto é, $C_{\Gamma_p} \in A_Q$, o que nos dá, $[C_{\Gamma_l}] \subset A_Q$.

Portanto, A_Q é uma classe de equivalência e, conseqüentemente, $M \subset N$.

Para concluirmos que $M = N$, consideremos a seguinte aplicação que claramente está bem definida,

$$\begin{aligned} \psi : M &\longrightarrow N \\ A_Q &\longmapsto [C_{\Gamma_l}], \end{aligned}$$

onde $C_{\Gamma_l} \in A_Q$.

Note que, como M e N são finitos e $M \subset N$, para mostrarmos que $M = N$, basta verificarmos que ψ é sobrejetora. Para isto, tomemos $[C_{\Gamma_l}] \in N$ e consideremos $i_0 \in I$, tais que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = \max_{j \in I} \left\{ \frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} \right\}. \quad (4.39)$$

Temos, pelo Teorema 4.13 e pela Observação 4.14, que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} \in S_{i_0}^1 \cup S_{i_0}^2,$$

ou seja, existe $Q \in K_{i_0}$ tal que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = v(Q). \quad (4.40)$$

Desta maneira, tomando $j \in I_Q$, isto é, $Q \in K_j$, temos

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} \geq v(Q).$$

Analisemos separadamente cada caso:

Caso 1: $\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} > v(Q) \stackrel{(4.40)}{=} \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}}.$

Pelo Lema 4.3,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = v(Q),$$

isto é, $C_{\Gamma_l} \in A_Q$, o que nos dá a sobrejetividade de ψ .

Caso 2: $\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} = v(Q) \stackrel{(4.40)}{=} \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}}.$

Pelo Lema 4.3,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} \geq v(Q).$$

Assim, se $\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} = v(Q)$, imediatamente temos que $C_{\Gamma_l} \in A_Q$, uma vez que $j \in I_Q$.

Agora, se $\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} > v(Q) = \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}}$, então, pelo Lema 4.3, temos que

$$\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}} = \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} = v(Q),$$

ou seja,

$$\frac{\text{cont}(C_{f_j}, C_{\Gamma_l})}{n_j} > \frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l})}{n_{i_0}},$$

o que contradiz a igualdade (4.39). Logo, $\frac{\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{f_j})}{n_{i_0}} > v(Q)$ e então, $C_{\Gamma_l} \in A_Q$.

Portanto ψ é sobrejetora e, conseqüentemente, $M = N$. □

Observação 4.21 *Pelo que acabamos de demonstrar, $\Gamma^Q := \prod_{C_{\Gamma_l} \in \sigma(Q)} \Gamma_l = \prod_{C_{\Gamma_l} \in A(Q)} \Gamma_l$ é o pacote de ramos da curva polar associado ao vértice preto Q de $T(C_f)$. Sendo assim, pelo Teorema 4.18, sabemos dizer qual é a multiplicidade de cada pacote.*

Considerando $i \in I_Q$, temos que

$$\text{mult}(\Gamma^Q) = \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i - 1),$$

se $c(Q) > 0$ e a aresta que parte de Q em direção a cadeia K_i for contínua. Ou então,

$$\text{mult}(\Gamma^Q) = \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) - 1), \text{ se } c(Q) = 0.$$

Para finalizarmos esta seção, apresentaremos um resultado que permite obter a parametrização de Newton-Puiseux dos ramos de um pacote $C_{\Gamma Q}$, a partir da parametrização de Newton-Puiseux de um ramo $C_{f_{i_0}}$, onde $i_0 \in I_Q$.

Teorema 4.22 (Evelia G. Barroso [B₂]) *Seja $\{\Gamma^{Q_j}\}_j$ o conjunto de pacotes da decomposição da curva polar C_Γ . Então, todos os ramos C_{Γ_l} de $C_{\Gamma Q_j}$ apresentam uma parametrização de Newton-Puiseux da forma:*

$$\left\{ \begin{array}{l} X = T^{m_l} \\ Y = \varphi(T) = a_{n_{i_0}} T^{m_l} + \cdots + a_{sn_{i_0}} T^{sm_l} + a_{\beta_1^{i_0}} T^{\frac{m_l \beta_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots + a_{\beta_k^{i_0}} T^{\frac{m_l \beta_k^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots + \\ \quad + a_{n_{i_0} v(Q_j) - 1} T^{\frac{m_l (n_{i_0} v(Q_j) - 1)}{n_{i_0}}} + \sum_{p \geq m_l v(Q_j)} b_p T^p, \end{array} \right.$$

onde $m_l = \text{mult}(\Gamma_l)$, $i_0 \in I_{Q_j}$, $k := k(Q_j)$ e $(a_{n_{i_0}}, \dots, a_{sn_{i_0}}, a_{\beta_1^{i_0}}, \dots, a_{\beta_q^{i_0}}, \dots, a_{n_{i_0} v(Q_j) - 1})$ são os coeficientes de uma parametrização de Newton-Puiseux do ramo $C_{f_{i_0}}$. Já os coeficientes b_s , são desconhecidos. No entanto, o menor q tal que b_q aparece na parametrização é $q = m_l v(Q_j)$ se este for um número inteiro e, caso contrário, $q = [m_l v(Q_j)] + 1$, onde $[m_l v(Q_j)]$ denota a parte inteira do número $m_l v(Q_j)$.

Demonstração: Como $C_{\Gamma_l} \subset C_{\Gamma Q_j}$, ou seja, $C_{\Gamma_l} \in A_{Q_j}$, temos que $\text{cont}(C_{f_{i_0}}, C_{\Gamma_l}) = n_{i_0} v(Q_j)$, com $\beta_k^{i_0} < n_{i_0} v(Q_j) \leq \beta_{k+1}^{i_0}$, onde $k = k(Q_j)$ e quando $k > 0$.

Desta maneira, existe uma parametrização ψ de $C_{f_{i_0}}$ e uma parametrização φ de C_{Γ_l} tais que a ordem máxima de coincidência entre ψ e φ seja $v(Q_j)$. Assim, se

$$\psi(X^{\frac{1}{n_{i_0}}}) = a_{n_{i_0}} X + \cdots + a_{sn_{i_0}} X^s + a_{\beta_1^{i_0}} X^{\frac{\beta_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \sum_{j=1}^h a_{\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0}} X^{\frac{\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots + a_{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}} X^{\frac{\beta_{g_{i_0}}^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots,$$

então,

$$\begin{aligned} \varphi(X^{\frac{1}{m_l}}) &= a_{n_{i_0}} X + \cdots + a_{sn_{i_0}} X^s + a_{\beta_1^{i_0}} X^{\frac{\beta_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \sum_{j=1}^h a_{\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0}} X^{\frac{\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots + a_{\beta_q^{i_0}} X^{\frac{\beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots \\ &\quad + a_{n_{i_0} v(Q_j) - 1} X^{\frac{n_{i_0} v(Q_j) - 1}{n_{i_0}}} + \sum_{\frac{p}{m} \geq v(Q_j)} b_p X^{\frac{p}{m_l}}. \end{aligned}$$

Considerando $X = T^{m_l}$, temos

$$\begin{aligned} \varphi(T) = & a_{n_{i_0}} T^{m_l} + \cdots + a_{sn_{i_0}} T^{sm_l} + a_{\beta_1^{i_0}} T^{\frac{m_l \beta_1^{i_0}}{n_{i_0}}} + \sum_{j=1}^h a_{\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0}} T^{\frac{m_l(\beta_1^{i_0} + j \epsilon_1^{i_0})}{n_{i_0}}} + \cdots + a_{\beta_q^{i_0}} T^{\frac{m_l \beta_q^{i_0}}{n_{i_0}}} + \cdots \\ & + a_{n_{i_0} v(Q_j) - 1} T^{\frac{m_l(n_{i_0} v(Q_j) - 1)}{n_{i_0}}} + \sum_{p \geq m_l v(Q)} b_p T^p. \end{aligned}$$

Agora, se $k = 0$ e $v(Q_j) = 1$, como $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_{i_0} v(Q_j)$, temos que ψ e φ não possuem nenhum termo em comum. Além disto, como os expoentes que aparecem em $\varphi(T)$ são números inteiros, o resultado segue. \square

Finalizemos esta seção, apresentando a decomposição da curva polar C_Γ de uma curva algebróide plana C_f .

Exemplo 4.23 *Seja C_f a curva algebróide plana do Exemplo 4.7, ou seja, $f = f_1 \cdot f_2 \cdot f_3$, onde*

$$\begin{aligned} f_1(X, Y) &= Y^4 - 4Y^3X^2 + (6X^2 - 2X^3)Y^2 + (4X^5 - 8X^6)Y + X^6 - 2X^7 + 5X^8 - X^9, \\ f_2(X, Y) &= Y^4 + 4Y^3X^2 + (6X^4 - 2X^3)Y^2 + (-4X^5 + 4X^6 - 4X^7)Y + X^6 - 2X^7 + X^8 - 4X^9 - X^{11} \\ &\text{e } f_3(X, Y) = (Y^2 - X^3)^2 - 4YX^6 - X^9. \end{aligned}$$

Como vimos, as parametrizações de Newton-Puiseux de C_{f_1} , C_{f_2} e C_{f_3} são, respectivamente,

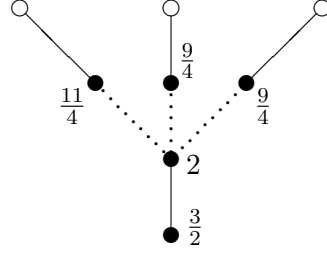
$$\begin{cases} y_1 = X^{\frac{3}{2}} + X^2 + X^{\frac{9}{4}} \\ y_2 = -X^{\frac{3}{2}} + X^2 + iX^{\frac{9}{4}} \\ y_3 = X^{\frac{3}{2}} + X^2 - X^{\frac{9}{4}} \\ y_4 = -X^{\frac{3}{2}} + X^2 - iX^{\frac{9}{4}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} z_1 = X^{\frac{3}{2}} - X^2 + X^{\frac{11}{4}} \\ z_2 = -X^{\frac{3}{2}} - X^2 + iX^{\frac{11}{4}} \\ z_3 = X^{\frac{3}{2}} - X^2 - X^{\frac{11}{4}} \\ z_4 = -X^{\frac{3}{2}} - X^2 - iX^{\frac{11}{4}} \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} w_1 = X^{\frac{3}{2}} + X^{\frac{9}{4}} \\ w_2 = -X^{\frac{3}{2}} + iX^{\frac{9}{4}} \\ w_3 = X^{\frac{3}{2}} - X^{\frac{9}{4}} \\ w_4 = -X^{\frac{3}{2}} - iX^{\frac{9}{4}}. \end{cases}$$

E mais, o diagrama de Eggers $T(C_f)$ é



Calculando os diferentes ramos da curva polar C_Γ , temos que $\Gamma = \Gamma_1 \cdot \Gamma_2 \cdot \Gamma_3 \cdot \Gamma_4 \cdot \Gamma_5 \cdot \Gamma_6$, onde as parametrizações de Newton-Puiseux de cada ramo C_{Γ_i} , com $i \in \{1, \dots, 6\}$, são

$$\Gamma_1 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,1} = -\frac{2}{3}X^3 - X^4 + \dots; \end{array} \right.$$

$$\Gamma_2 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,2} = X^{\frac{3}{2}} + X^2 + \frac{3}{2}X^{\frac{5}{2}} - \frac{11}{4}X^3 + \frac{203}{16}X^{\frac{7}{2}} - 81X^4 + \dots \\ y_{2,2} = -X^{\frac{3}{2}} + X^2 - \frac{3}{2}X^{\frac{5}{2}} - \frac{11}{4}X^3 - \frac{203}{16}X^{\frac{7}{2}} - 81X^4 + \dots; \end{array} \right.$$

$$\Gamma_3 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,3} = X^{\frac{3}{2}} - X^2 - \frac{3}{2}X^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{8}X^4 - \frac{9}{32}X^{\frac{9}{2}} + \frac{623}{128}X^5 + \dots \\ y_{2,3} = -X^{\frac{3}{2}} - X^2 + \frac{3}{2}X^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{8}X^4 + \frac{9}{32}X^{\frac{9}{2}} + \frac{623}{128}X^5 + \dots; \end{array} \right.$$

$$\Gamma_4 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,4} = X^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}X^3 - 2X^{\frac{7}{2}} + \frac{11}{4}X^4 - \frac{15}{4}X^{\frac{9}{2}} + \dots \\ y_{2,4} = -X^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}X^3 + 2X^{\frac{7}{2}} + \frac{11}{4}X^4 + \frac{15}{4}X^{\frac{9}{2}} + \dots; \end{array} \right.$$

$$\Gamma_5 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,5} = X^{\frac{3}{2}} + aX^2 + \left(-\frac{7}{12} - \frac{a}{4}\right)X^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{31}{24} + \frac{41a}{16}\right)X^3 + \left(-\frac{1387}{288} - \frac{759a}{64}\right)X^{\frac{7}{2}} + \dots \\ y_{2,5} = -X^{\frac{3}{2}} + aX^2 + \left(\frac{7}{12} + \frac{a}{4}\right)X^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{31}{24} + \frac{41a}{16}\right)X^3 + \left(\frac{1387}{288} + \frac{759a}{64}\right)X^{\frac{7}{2}} + \dots; \end{array} \right.$$

e por fim

$$\Gamma_6 : \left\{ \begin{array}{l} y_{1,6} = X^{\frac{3}{2}} - aX^2 + \left(-\frac{7}{12} + \frac{a}{4}\right)X^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{31}{24} - \frac{41a}{16}\right)X^3 + \left(-\frac{1387}{288} + \frac{759a}{64}\right)X^{\frac{7}{2}} + \dots \\ y_{2,6} = -X^{\frac{3}{2}} - aX^2 + \left(\frac{7}{12} - \frac{a}{4}\right)X^{\frac{5}{2}} + \left(\frac{31}{24} - \frac{41a}{16}\right)X^3 + \left(\frac{1387}{288} - \frac{759a}{64}\right)X^{\frac{7}{2}} + \dots, \end{array} \right.$$

onde $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Pela Observação 4.21 e pelo Teorema 4.20, temos que:

1. Se $Q^1 \in T(C_f)$ é tal que $v(Q^1) = \frac{3}{2}$, então

$$\text{mult}(\Gamma^{Q^1}) = \eta_1^1 - 1 = 2 - 1 = 1,$$

e como apenas o ramo Γ_1 de Γ possui esta multiplicidade, temos que o pacote Γ^{Q^1} é composto pelo ramo Γ_1 .

2. Se $Q^2 \in K_1$ é tal que $v(Q^2) = \frac{9}{4}$, então

$$\text{mult}(\Gamma^{Q^2}) = \eta_1^1(\eta_2^1 - 1) = 2(2 - 1) = 2,$$

e como

$$\text{cont}(C_{f_1}, C_{\Gamma_2}) = 9 = \text{mult}(f_1) \cdot v(Q^2),$$

temos que Γ^{Q^2} contém apenas o ramo Γ_2 ;

3. Se $Q^3 \in T(C_f)$ é tal que $v(Q^3) = \frac{11}{4}$, então

$$\text{mult}(\Gamma^{Q^3}) = \eta_1^2(\eta_2^2 - 1) = 2(2 - 1) = 2,$$

e como

$$\text{cont}(C_{f_2}, C_{\Gamma_3}) = 11 = \text{mult}(f_2) \cdot v(Q^3),$$

temos que o pacote Γ^{Q^3} é composto pelo ramo Γ_3 .

4. Se $Q^4 \in K_3$ é tal que $v(Q^4) = \frac{9}{4}$, então

$$\text{mult}(\Gamma^{Q^4}) = \eta_1^3(\eta_2^3 - 1) = 2(2 - 1) = 2,$$

e como

$$\text{cont}(C_{f_3}, C_{\Gamma_4}) = 9 = \text{mult}(f_3) \cdot v(Q^4),$$

temos que o pacote Γ^{Q^4} contém apenas o ramo Γ_4 ;

5. Se $Q^5 \in T(C_f)$ é tal que $v(Q^5) = 2$, então

$$\text{mult}(\Gamma^{Q^5}) = (3 - 1)\eta_1^1 = 2 \cdot 2 = 4,$$

e como

$$\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_5}) = 8 = \text{mult}(f_i) \cdot v(Q^5) \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, 3\},$$

e

$$\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_6}) = 8 = \text{mult}(f_i) \cdot v(Q^5) \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, 3\},$$

temos que o pacote Γ^{Q^5} é formada pelas ramos Γ_5 e Γ_6 .

Concluindo, a curva polar Γ se decompõe nos seguintes pacotes,

$$\Gamma = \Gamma^{Q^1} \cdot \Gamma^{Q^2} \cdot \Gamma^{Q^3} \cdot \Gamma^{Q^4} \cdot \Gamma^{Q^5},$$

onde $\Gamma^{Q^i} = \Gamma_i$ para todo $i \in \{1, \dots, 4\}$ e $\Gamma^{Q^5} = \Gamma_5 \cdot \Gamma_6$.

4.5 Propriedades de Ramos e de Pacotes de uma Curva Polar

Finalizaremos o nosso trabalho, apresentando algumas propriedades de um ramo de um pacote, assim como propriedades de um pacote da decomposição da curva polar apresentada anteriormente. Todos os resultados desta seção foram provados por Evelia G. Barroso [B₂].

Sejam Q um vértice preto de $T(C_f)$, C_{f_i} um ramo de C_f , tal que $i \in I_Q$, e C_{Γ_i} um ramo do

pacote C_{Γ_Q} da curva polar C_Γ . Temos, pelo Teorema 4.4, que se $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$, então

$$\frac{\beta_q^i}{n_i} = \frac{\beta_q^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}, \quad \text{para todo } 0 \leq q \leq k = k(Q), \quad (4.41)$$

onde $\beta_q^{\Gamma_l}$ é o q -ésimo expoente característico de C_{Γ_l} e n_i é a multiplicidade de C_{f_i} . E quanto aos demais expoentes característicos, o que podemos dizer? Difícil responder, no entanto, o resultado que veremos a seguir, nos dará uma relação entre $\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$ e $\frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$.

Lema 4.24 *Seja Q um vértice preto de $T(C_f)$ tal que $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$, onde C_{f_i} é um ramo de C_f e $k = k(Q)$. Então, para cada ramo C_{Γ_l} do pacote C_{Γ_Q} temos*

$$\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} \leq \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}.$$

E mais, se o vértice preto for simples, então

$$\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} < \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}.$$

Demonstração: Vamos supor que

$$\frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)} < \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} = \frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i},$$

sendo válida a igualdade, pois C_{Γ_l} é ramo C_{Γ_Q} e então, $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_i v(Q)$ uma vez que $C_{\Gamma_l} \in A_Q$.

Note que, como $\frac{\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l})}{n_i} > \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$, então $\frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$ é o expoente de um termo de uma parametrização de Newton-Puiseux de C_{f_i} , e mais

$$\frac{\beta_k^i}{n_i} \stackrel{(4.41)}{=} \frac{\beta_k^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)} < \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)} < \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}.$$

Sendo assim, existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)} = \frac{\beta_k^i + \lambda \epsilon_k^i}{n_i}$. Como $\mu_k^i = \frac{\beta_k^i}{\epsilon_k^i}$, temos

$$\frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)} = \frac{\mu_k^i \epsilon_k^i + \lambda \epsilon_k^i}{\eta_1^i \cdots \eta_k^i \epsilon_k^i} \stackrel{\text{Obs 4.5}}{=} \frac{\mu_k^{\Gamma_l} + \lambda}{\eta_1^{\Gamma_l} \cdots \eta_k^{\Gamma_l}} = \frac{\beta_k^{\Gamma_l} + \lambda \epsilon_k^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)},$$

ou seja, $\beta_{k+1}^{\Gamma_l} = \beta_k^{\Gamma_l} + \lambda \epsilon_k^{\Gamma_l}$, isto é, $\epsilon_k^{\Gamma_l}$ divide $\beta_{k+1}^{\Gamma_l}$, o que é, pela definição de expoente caracterís-

tico, um absurdo. Logo, $\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} \leq \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$.

Agora, se Q é um vértice simples, então, pela Observação 4.11, $d(Q) = 0$ e $c(Q) = 1$. Observe que pela primeira parte do lema, temos que $\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} \leq \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$. Sendo assim, vamos supor que $\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} = \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$. Com isto, e pela Observação 4.5, temos que $(\eta_q^i, \mu_q^i) = (\eta_q^{\Gamma_l}, \mu_q^{\Gamma_l})$ para todo $1 \leq q \leq k+1$. Desta maneira,

$$\text{mult}(\Gamma_l) = \eta_1^{\Gamma_l} \cdots \eta_{k+1}^{\Gamma_l} \epsilon_{k+1}^{\Gamma_l} = \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i \epsilon_{k+1}^{\Gamma_l} \geq \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i.$$

Por outro lado,

$$\text{mult}(\Gamma_l) \leq \text{mult}(\Gamma^Q) \stackrel{\text{Teo 4.18}}{=} \eta_1^i \cdots \eta_k^i (\eta_{k+1}^i - 1) < \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i,$$

o que é uma contradição. Logo, $\frac{\beta_{k+1}^i}{n_i} < \frac{\beta_{k+1}^{\Gamma_l}}{\text{mult}(\Gamma_l)}$.

□

Considerando $\varphi(T)$ a parametrização de Newton-Puiseux de C_{Γ_l} dada no Teorema 4.22, vejamos o próximo resultado.

Proposição 4.25 *Sejam Q um vértice preto de $T(C_f)$ e C_{Γ_l} um ramo do pacote C_{Γ^Q} .*

1. *Se Q for um vértice simples, então o termo $T^{mv(Q)}$, onde $m = \text{mult}(\Gamma_l)$, não aparece na parametrização de Newton-Puiseux $\varphi(T)$ do ramo C_{Γ_l} ;*
2. *Se $d(Q) = c(Q) = 1$, $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$ e o termo $T^{mv(Q)}$ aparece na parametrização de Newton-Puiseux $\varphi(T)$ de C_{Γ_l} , então o pacote C_{Γ^Q} é irredutível, isto é, $C_{\Gamma_l} = C_{\Gamma^Q}$.*

Demonstração: Primeiramente mostremos o item (1).

Como Q é um vértice simples de $T(C_f)$, então existe um ramo C_{f_i} da curva C_f tal que $v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$, onde $k := k(Q)$. Vamos supor que o termo $T^{mv(Q)}$ apareça em $\varphi(T)$. Pelo Lema 4.24, temos que $mv(Q) = \frac{m\beta_{k+1}^i}{n_i} < \beta_{k+1}^{\Gamma_l}$, isto é, $\epsilon_k^{\Gamma_l}$ divide $mv(Q)$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{m\beta_{k+1}^i}{n_i} = \lambda \epsilon_k^{\Gamma_l}$. Pela Observação 4.5, temos que $\frac{m\beta_{k+1}^i}{n_i} = \frac{\lambda m \epsilon_k^i}{n_i}$, o que nos dá que $\frac{\beta_{k+1}^i}{\epsilon_k^i} = \lambda \in \mathbb{N}$, ou seja, $\frac{\beta_{k+1}^i}{\epsilon_k^i}$ é um número inteiro, o que é uma contradição. Logo, o termo $T^{mv(Q)}$ não aparece na parametrização de Newton-Puiseux $\varphi(T)$ de C_{Γ_l} .

Por fim, mostremos o item (2).

Como o termo $T^{mv(Q)}$ aparece em $\varphi(T)$, então

$$mv(Q) = \frac{m\beta_{k+1}^i}{n_i} = \frac{m\mu_{k+1}^i}{\eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i} = \frac{\mu_{k+1}^i \epsilon_k^{\Gamma_l}}{\eta_{k+1}^i},$$

é um número inteiro. Como, por (1.2), $mdc(\eta_{k+1}^i, \mu_{k+1}^i) = 1$, temos, na igualdade acima, que η_{k+1}^i divide $\epsilon_k^{\Gamma_l}$. Então, existe $\lambda \in \mathbb{N}$ tal que $\epsilon_k^{\Gamma_l} = \lambda \eta_{k+1}^i$. E mais,

$$mult(\Gamma_l) = \eta_1^{\Gamma_l} \cdots \eta_k^{\Gamma_l} \epsilon_k^{\Gamma_l} \stackrel{Obs\ 4.5}{=} \eta_1^i \cdots \eta_k^i \cdot \lambda \eta_{k+1}^i \leq mult(\Gamma^Q) = \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i,$$

sendo a última igualdade válida pelo Teorema 4.18, com $d(Q) = c(Q) = 1$. Logo $\lambda = 1$, o que nos dá que $mult(\Gamma_l) = mult(\Gamma^Q)$ e portanto, C_{Γ^Q} é irredutível. \square

E como último resultado de nosso trabalho, vejamos algumas relações entre a multiplicidade dos pacotes da curva polar C_Γ e a multiplicidade dos ramos da curva C_f .

Proposição 4.26 *Seja Q um vértice preto de $T(C_f)$. Então,*

1. $mult(\Gamma^Q) < \sum_{i \in I_Q} mult(f_i);$

2. *Se Q for simples, então $mult(\Gamma^Q) < mult(f_i)$, para todo ramo C_{f_i} de C_f tal que $i \in I_Q$.*

Demonstração: Mostremos o item (1).

Se $k = k(Q)$, então $\frac{\beta_k^i}{n_i} < v(Q) \leq \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}$ para todo C_{f_i} de C_f , tal que $i \in I_Q$. Com base nisto, vamos definir os seguintes conjuntos:

$$M_1 := \{C_{f_i}; v(Q) = \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}\} \text{ e } M_2 := \{C_{f_i}; v(Q) < \frac{\beta_{k+1}^i}{n_i}\}.$$

Observe que,

$$\# M_1 \geq c(Q) \text{ e } \# M_2 \geq d(Q). \quad (4.42)$$

Seja $C_{f_i} \in M_1$, então, pelo Teorema 4.18,

$$\begin{aligned} mult(\Gamma_Q) &= \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i - 1) \\ &= (d(Q) - 1)\eta_1^i \cdots \eta_k^i + c(Q)\eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i \\ &\stackrel{(4.42)}{<} (\# M_2)\eta_1^i \cdots \eta_k^i + (\# M_1)\eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i \\ &\stackrel{Obs\ 4.19}{=} \sum_{i \in M_2} \eta_1^i \cdots \eta_k^i + \sum_{i \in M_1} \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i \\ &\leq \sum_{i \in M_2} \eta_1^i \cdots \eta_{g_i}^i + \sum_{i \in M_1} \eta_1^i \cdots \eta_{g_i}^i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i \in M_2} \text{mult}(f_i) + \sum_{i \in M_1} \text{mult}(f_i) \\
&= \sum_{i \in I_Q} \text{mult}(f_i).
\end{aligned}$$

Logo, $\text{mult}(\Gamma^Q) < \sum_{i \in I_Q} \text{mult}(f_i)$. Se $M_1 = \emptyset$, então $c(Q) = 0$ e é suficiente fixar $C_{f_i} \in M_2$.

Para finalizar, mostremos o item (2).

Seja C_{f_i} um ramo de C_f tal que $i \in I_Q$. Como Q é simples, pela Observação 4.11, $d(Q) = 0$ e $c(Q) = 1$, e então, pelo Teorema 4.18,

$$\text{mult}(\Gamma^Q) = \eta_1^i \cdots \eta_1^i (\eta_{k+1}^i - 1) < \eta_1^i \cdots \eta_{k+1}^i \leq \eta_1^i \cdots \eta_{g_i}^i = \text{mult}(f_i).$$

□

Observação 4.27 *Seja Q um vértice preto de $T(C_f)$ e consideremos o pacote C_{Γ^Q} de C_Γ . Se P denota o número de ramos da curva polar que estão no pacote C_{Γ^Q} , então $P < d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i$, onde $k = k(Q)$ e $i \in I_Q$. De fato, tomemos $C_{\Gamma_l} \subset C_{\Gamma^Q}$ tal que $\text{mult}(\Gamma_l) = \min\{\text{mult}(\Gamma_1), \dots, \text{mult}(\Gamma_P)\}$. Então,*

$$P \cdot \text{mult}(\Gamma_l) \leq \text{mult}(\Gamma^Q) \stackrel{\text{Teo } 4.18}{=} \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i - 1) < \eta_1^i \cdots \eta_k^i (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i).$$

Mas, $\text{mult}(\Gamma_l) = \eta_1^{\Gamma_l} \cdots \eta_k^{\Gamma_l} \epsilon_k^{\Gamma_l} \stackrel{\text{Obs } 4.5}{=} \eta_1^i \cdots \eta_k^i \epsilon_k^{\Gamma_l}$, o que nos dá

$$P < \frac{1}{\epsilon_k^{\Gamma_l}} \cdot (d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i) \leq d(Q) + c(Q)\eta_{k+1}^i.$$

Com esta informação, podemos determinar, em algumas situações, se o pacote C_{Γ^Q} da curva polar C_Γ é irredutível, isto é, se existe apenas um ramo C_{Γ_l} da curva polar que satisfaz a igualdade $\text{cont}(C_{f_i}, C_{\Gamma_l}) = n_i v(Q)$, para todo $i \in I_Q$, a saber:

1. Se Q é um vértice preto de $T(C_f)$ tal que $c(Q) = 0$ e $d(Q) = 2$, então o pacote C_{Γ^Q} é irredutível;
2. Se Q é um vértice simples de $T(C_f)$, $i \in I_Q$ e $\eta_{k+1}^i = 2$, então o pacote C_{Γ^Q} é irredutível.

BIBLIOGRAFIA

- [B₁] BARROSO, E. G. **Invariants des Singularités de Courbes Planes et Courbure des Fibres de Milnor**, doctoral thesis. La Laguna University, 1996.
- [B₂] BARROSO, E. G. **Sur les Courbes Polaires d'une Courbe Plane Réduite**. London Mathematical Society, 81, 1-28, 2000.
- [C] CASAS-ALVERO, E. **Singularities of Plane Curve**. London Mathematical Society Lectures Note Series, 276. Cambridge University Press, 2000.
- [E] EGGERS, H. **Polarinvarianten und die Topologie von Kurvensingularitäten**. Bonner Mathematische Schriften, 147. Universität Bonn, 1983.
- [H] HEFEZ, A. **Irreducible Plane Curve Singularities**. Real and Complex Singularities. Lectures Notes in Pure and Appl. Math., 232 Dekker, 1-120. New York, 2003.
- [K-L] KUO-LU, T. C. e Y. C. **On Analytic Function Germs of Two Complex Variables**. Topology, 16, 299-310, 1977.
- [M] MERLE, M. **Invariants Polaires des Courbes Planes**. Inventiones Mathematicae, 41, 103-111, 1977.
- [S] SMITH, H.J.S. **On the Righer Singularities of Plane Curves**. London Mathematical Society, Vol VI, 1875, 153-182.