HIPERSUPERFÍCIES COMPACTAS NO ESPAÇO EUCLIDIANO COM r-ÉSIMA CURVATURA MÉDIA CONSTANTE

Chiara Maria Seidel Luciano

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Ryuichi Fukuoka

Maringá - PR

2007

Aos meus pais e minha irmã, com muito carinho.

Ao Rogério, por minha imensa admiração.

Agradecimentos

Agradeço à Deus pelo dom da vida, pela força, ânimo e coragem que me dispensou a cada dia e por não deixar que o cansaço se sobrepusesse.

Agradeço ao professor Ryuichi, a quem muito considero, pela admirável dedicação e paciência durante este trabalho.

Agradeço ao professsor Armando Caputi pela valiosa participação nos seminários que convergiram para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de estudo Nazira e Jean pelas experiências compartilhadas.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Agradeço aos meus amados pais Valdir e Eldinei, pelo incentivo e pelas orações que me acompanharam.

Agradeço a minha querida irmã Anne por sua amizade e suas visitas à Maringá que muito me alegraram.

Agradeço ao meu namorado Rogério, pelo companheirismo, atenção, carinho e até mesmo pelas "broncas" que hoje posso compreender melhor.

Agradeço aos meus amigos Gilson, Marieli e Valter pelo companheirismo e pelas lágrimas e risos que compartilhamos.

Agradeço aos pais do Rogério, Eni e Onofre pelos cuidados e carinho dispensados.

Resumo

Neste trabalho mostraremos os seguintes teoremas:

1) Uma hipersuperfície mergulhada, conexa, compacta com curvatura média constante no espaço Euclidiano é a esfera de curvatura constante (Aleksandrov).

2) Uma hipersuperfície mergulhada, conexa, compacta com curvatura escalar constante no espaço Euclidiano é a esfera de curvatura constante (Ros).

Abstract

In this work we show the following theorems:

1) A compact, connected imbedding hipersurface with constant mean curvature in the Euclidian space is a round sphere.(Aleksandrov)

2) A compact, connected imbedding hipersurface with constant scalar curvature in the euclidian space is a round sphere.(Ros)

Key-words: r-th mean curvature, compact hipersurfaces, Aleksandrov theorem, Ros theorem.

Sumário

Introdução

Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície e denote as curvaturas principais de φ por $\lambda_1, ..., \lambda_n$. O polinômio simétrico elementar de grau r de $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ é chamado de r-ésima curvatura média de φ e será denotado por H_r. Por exemplo, H_1, H_2 e H_n são proporcionais à curvatura média, curvatura escalar e a curvatura de Gauss-Kronecker, respectivamente.

Em 1954, Hsiung [10] mostrou que se tivermos M^n estritamente convexa e H_r constante para algum $r = 1, ..., n$, então M^n é necessariamente uma esfera. Este resultado, juntamente com o celebrado Teorema de Hadamard para hipersuperfícies convexas, implica que toda hipersuperfície compacta com H_n constante mergulhada no espaço euclidiano é uma esfera.

Em 1958, Aleksandrov mostrou que a esfera é a única hipersuperfície conexa, compacta e mergulhada com curvatura média constante no espaço euclidiano.

Em 1988, Ros provou que a esfera é a única hipersuperfície conexa, compacta e mergulhada com curvatura escalar constante no espaço euclidiano.

Neste trabalho, demonstraremos os resultados obtidos por Aleksandrov [1] e Ros [15]. Ressaltamos que a técnica utilizada na demonstração do Teorema de Aleksandrov é diferente daquela utilizada no trabalho original.

Nosso trabalho encontra-se dividido em quatro capítulos. No primeiro introduzimos os conceitos básicos sobre tensores, variedades diferenciáveis e Geometria riemanniana. Em seguida, dedicamos o segundo capítulo à apresentação do Teorema de Hadamard para hipersuperfícies convexas e o terceiro capítulo apresenta o

Teorema da divergência, a Primeira e Segunda Fórmula de Minkowski, a Fórmula de Lichnerowicz e a Fórmula de Reilly.

Por fim, no quarto capítulo faremos a demonstração do Teorema de Aleksandrov e do Teorema de Ros seguindo as idéias de Reilly [14] e Ros [15], [16].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos conceitos e resultados que tomaremos como básicos. Com isso, estaremos fixando algumas notações que utilizaremos ao longo deste trabalho.

Na primeira seção apresentaremos uma introdução ao estudo de tensores. Em seguida será apresentada a teoria sobre Variedades Diferenciáveis e abordaremos alguns preliminares de Geometria riemanniana que são de nosso interesse. Ao final estudaremos as Imersões Isométricas e as suas Equações Fundamentais.

Ressaltamos que a teoria sobre tensores, variedades diferenciáveis e geometria riemanniana pode ser encontrada em [3], [5], [6], [9] e [18], e assim omitiremos demonstrações.

1.1 Tensores sobre um Espaço Vetorial

Ao longo desta seção consideraremos V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita n e V^* seu espaço dual.

Definição 1.1 *Um tensor do tipo (m,s) sobre V é uma forma $(m+s)$-linear*

$$T : \underbrace{V^* \times ... \times V^*}_{m fatores} \times \underbrace{V \times ... \times V}_{s fatores} \to \mathbb{R}.$$

Definição 1.2 *Defina a soma entre tensores do tipo* (m,s) *por*

$$(T+S)(\omega_1,...,\omega_m,v_1,...v_s) := T(\omega_1,...,\omega_m,v_1,...,v_s) + S(\omega_1,...,\omega_m,v_1,...,v_s)$$

e a multiplicação por um número real por

$$(c.T)(\omega_1,...,\omega_m,v_1,...,v_s) = c.T(\omega_1,...,\omega_m,v_1,...,v_s).$$

O conjunto formado pelos tensores de tipo (m,s) *sobre* V*, munido das operações acima é um* $\mathbb{R}$*-espaço vetorial* (n^{m+s})*-dimensional, o qual será denotado por* $V^{m,s}$*.*

Definição 1.3 *Seja* T *um tensor de tipo* (m_1,s_1) *e* S *um tensor de tipo* (m_2,s_2)*. O produto tensorial* $T\otimes S$ *entre* T *e* S *é um tensor de tipo* (m_1+m_2,s_1+s_2) *definido como*

$$(T\otimes S)(\omega_1,...,\omega_{m_1},...,\omega_{m_1+m_2},v_1,...,v_{s_1},...,v_{s_1+s_2})$$

$$:= T(\omega_1,...,\omega_{m_1},v_1,...,v_{s_1}).S(\omega_{m_1+1},...,\omega_{m_1+m_2},v_{s_1+1},...,v_{s_1+s_2}).$$

O espaço de tensores sobre V *munido da soma, multiplicação por escalar e produto tensorial* $\otimes$ *é uma álgebra sobre* $\mathbb{R}$*, a qual denotaremos por* $\otimes T(V)$*.*

Observação 1.4 *Observe que* $V^{1,0} = (V^*)^*$ *e por meio do isomorfismo natural entre* V *e* $(V^*)^*$*, podemos identificar* V *e* $V^{1,0}$ *da seguinte maneira: Cada* $v\in V$ *está identificado com* $T_v : V^* \to \mathbb{R}$ *dada por* $T_v(\omega) := \omega(v)$*. Além disso, temos que* $V^{0,1} = V^*$ *e por convenção,* $V^{0,0} = \mathbb{R}$*.*

Tal identificação pode ser estendida, ou seja, dado $T \in V^{m,s}$ podemos considerá-lo como uma aplicação $(k+l)$-linear

$$\overline{T} : \underbrace{V^*\times ... \times V^*}_{kfatores} \times \underbrace{V\times ... \times V}_{lfatores} \to V^{m-k,s-l}$$

definida por

$$\overline{T}(\omega_1,...,\omega_k,v_1,...,v_l) = T(\omega_1,...,\omega_k, \quad \underbrace{\cdot,...,\cdot}_{(m-k)entradas} \quad ,v_1,...,v_l, \quad \underbrace{\cdot,...,\cdot}_{(s-l)entradas} \quad). \qquad (1.1)$$

Em particular, note que $T : V^* \times V \to \mathbb{R}$ pode ser identificado com um operador linear sobre V.

Definição 1.5 *Seja $T \in T^{m,s}V$ com $m, s \geq 1$. O traço de T com relação ao par (i, j) é o tensor de tipo $(m-1, s-1)$ definido por*

$$(tr_{(i,j)}T)(\omega_1, ..., \omega_{m-1}, v_1, ..., v_{s-1}) :=$$

$$\sum_k T(\omega_1, ..., \omega_{i-1}, \beta_k, \omega_i, ..., \omega_{m-1}, v_1, ..., v_{j-1}, w_k, v_j, ..., v_{s-1})$$

onde $(w_1, ..., w_n)$ é uma base ordenada de V e $(\beta_1, ..., \beta_n)$ sua base dual. O traço de T em relação ao par $(1, 1)$ será simplesmente denotado por trT.

Observe que tal definição não depende da escolha da base em V.

1.1.1 Tensores sobre um Espaço Vetorial com Produto Interno

Agora, vamos supor que V é munido de um produto interno $\langle ., . \rangle$.

Definição 1.6 *Sejam $(e_1, ..., e_n)$ uma base ortonormal de V, $(\beta_1, ..., \beta_n)$ sua base dual e $T \in V^{m,s}$. Definimos a norma $\|T\|$ de T por*

$$\|T\|^2 = \sum_{i_1,...,i_m,j_1,...,j_s=1}^{n} T(\beta_{i_1}, ..., \beta_{i_m}, e_{j_1}, ..., e_{j_s})^2.$$

Nesta subseção indicaremos $\langle ., . \rangle$ por g. Note que $g \in V^{0,2}$.

Podemos identificar V com V^* por meio da correspondência $u \longmapsto \omega_u$, onde $\omega_u(v) = g(u, v), \forall v \in V$.

Analogamente, para todo $\omega \in V^*$ consideraremos a correspondência: $\omega \longmapsto u_\omega$, onde u_ω é o único vetor tal que $\omega(v) = g(u_\omega, v), \forall v \in V$. Isto é, também estamos identificando o funcional linear ω com o vetor u_ω.

Assim, podemos definir o tensor inverso de g, por $g^{-1}(\omega, \overline{\omega}) = g(u_\omega, u_{\overline{\omega}}), \forall \omega, \overline{\omega} \in V^*$. É imediato verificar que $g^{-1} \in V^{2,0}$.

O próximo resultado nos dá uma identificação entre tensores de tipo (m, s) com tensores de tipo $(m-1, s+1)$ em espaços vetoriais com produto interno.

Proposição 1.7 *Sejam (V, g) um espaço vetorial real V munido de produto interno g, e $T \in V^{m,s}$. Se $S = tr(g \otimes T)$, então*

$$S(\hat{\omega}_1, \omega_2, ..., \omega_m, v_{\omega_i}, v_1, ..., v_s) = T(\omega_1, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s),$$

onde $\hat{\omega}_1$ indica que estamos excluindo ω_1.

Demonstração: Consideremos uma base $(w_1, ..., w_n)$ de V e sua base dual $(\beta_1, ..., \beta_n)$.

Dado $\omega \in V^*$, afirmamos que $\sum_k \omega(w_k)\beta_k = \omega$.

De fato, dado $v \in V$ podemos escrevê-lo como $v = \sum_l \lambda_l w_l$, para certos $\lambda_l's$ em $\mathbb{R}$.

Assim,

$$\begin{aligned}
\left(\sum_k \omega(w_k)\beta_k\right)(v) &= \sum_k \omega(w_k).\beta_k \left(\sum_l \lambda_l w_l\right) \\
&= \sum_k \omega(w_k). \left(\sum_l \lambda_l \beta_k(w_l)\right) = \sum_k \lambda_k \omega(w_k) \\
&= \omega\left(\sum_k \lambda_k w_k\right) = \omega(v),
\end{aligned}$$

e pela arbitrariedade de v, segue o resultado.

Deste modo,

$$\begin{aligned}
&S(\hat{\omega}_1, \omega_2, ..., \omega_m, v_{\omega_1}, v_1, ..., v_s) \\
&= \sum_k (g \otimes T)(\beta_k, \omega_2, ..., \omega_m, w_k, v_{\omega_1}, v_1, ..., v_s) \\
&= \sum_k g(w_k, v_{\omega_1}).T(\beta_k, \omega_2, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s) \\
&= \sum_k \omega_1(w_k) T(\beta_k, \omega_2, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s) \\
&= \sum_k T(\omega_1(w_k)\beta_k, \omega_2, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s)
\end{aligned}$$

$$= T(\omega_1, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s),$$

como queríamos. ■

Do mesmo modo, em espaços vetoriais com produto interno também podemos identificar tensores de tipo (m, s) com tensores de tipo $(m+1, s-1)$, como nos mostra o seguinte resultado.

Proposição 1.8 *Sejam (V, g) um espaço vetorial real V munido de produto interno g e $T \in V^{m,s}$. Se $S = tr(g^{-1} \otimes T)$, então*

$$S(\omega_{v_1}, \omega_1 ..., \omega_m, \hat{v}_1, v_2, ..., v_s) = T(\omega_1, ..., \omega_m, v_1, ..., v_s).$$

Demonstração: Análoga à demonstração da proposição anterior.

Corolário 1.9 *Sejam ω_v e v_ω como definidos anteriormente. Então, temos que $\omega_v = tr(g \otimes v)$ e $v_\omega = tr(g^{-1} \otimes \omega)$, onde v_ω está identificado com o seu bidual.*

Demonstração: Basta notar que identificando v e v_α com o seu bidual, temos $tr(g \otimes v)(v_1) = v(\omega_{v_1}) = \omega_{v_1}(v) = g(v, v_1) = \omega_v(v_1)$, para todo $v_1 \in V$ e $tr(g^{-1} \otimes \omega)(\beta) = \omega(v_\beta) = g(v_\omega, v_\beta) = v_\omega(\beta)$, para todo $\beta \in V^*$. ■

Ressaltamos que essas identificações serão muito usadas durante a dissertação. Por exemplo, quando nos referimos ao traço de uma forma bilinear estaremos nos referindo ao traço do operador linear identificado com a forma bilinear.

1.2 Variedades Diferenciáveis

Ao longo da dissertação o termo diferenciável significará de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Definição 1.10 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M e uma família de aplicações injetoras $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos U_α de $\mathbb{R}^n$ em M tais que:*

(1)

$$\bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M.$$

(2) Se x_α e x_β são tais que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, então $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \to U_\beta$ é diferenciável.

(3) A família (x_α, U_α) é maximal em relação às condições (1) e (2).

Definição 1.11 *Dado $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ dizemos que (x_α, U_α) é uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p, e chamamos $x_\alpha(U_\alpha)$ de vizinhança coordenada em p.*

Definição 1.12 *Uma estrutura diferenciável em M é uma família de parametrizações (x_α, U_α) que satisfazem* (1) *e* (2).

Para toda estrutura diferenciável em M, existe uma única família maximal de parametrizações que a contém, o que induz uma topologia em M.

Observamos que ao indicarmos uma variedade por M^n, entendemos que o índice n indicará a dimensão de M.

A próxima definição vem introduzir a idéia de diferenciabilidade de aplicações definidas em variedades diferenciáveis.

Definição 1.13 *Sejam M^n e N^m variedades diferenciáveis. Dizemos que a aplicação $\varphi : M \to N$ é diferenciável em $p \in M$, se para cada parametrização $y_\beta : V_\beta \subset \mathbb{R}^m \to N$ em $\varphi(p)$ existir uma parametrização $x_\alpha : U_\alpha \to M$ em p com $\varphi(x_\alpha(U_\alpha)) \subset y_\beta(V_\beta)$ tal que $y_\beta^{-1} \circ \varphi \circ x_\alpha$ é diferenciável. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.*

Se observarmos a condição (2) da Definição 1.10, temos que a definição acima não depende da escolha das parametrizações.

Com relação às aplicações diferenciáveis podemos destacar as funções reais de classe $\mathcal{C}^\infty$ definidas em uma variedade M. Convém ressaltar que o conjunto destas funções torna-se um anel quando munido das operações de soma e multiplicação usuais de funções, o qual denotaremos por $\mathcal{D}(M)$.

Agora, convém apresentarmos um teorema de existência de partição da unidade.

Antes porém, necessitamos de algumas definições.

Definição 1.14 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é localmente finita se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices.*

Definição 1.15 *Dada uma função $f : M \to \mathbb{R}$ dizemos que o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero é o suporte de f.*

Definição 1.16 *Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M_\alpha \to \mathbb{R}$ é uma partição da unidade se:*

(I) Para todo α, $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$ de uma estrutura diferenciável $\{(x_\beta, U_\beta)\}$ de M.

(II) A família $\{V_\alpha\}$é localmente finita.

(III) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, para todo $p \in M$ (esta condição faz sentido, pois em cada p, $f_\alpha(p) \neq 0$ para apenas um número finito de índices).

Dizemos que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade é subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

Teorema 1.17 *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se e somente se toda componente conexa de M é Hausdorff e tem base enumerável.*

Admitiremos que as variedades mencionadas daqui em diante são Hausdorff e que sua topologia possui base enumerável, de tal forma que M admite uma partição da unidade.

Definição 1.18 *Dada uma variedade diferenciável M, dizemos que uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável em M.*

Definição 1.19 *Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável em M. Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}$ o conjunto das funções reais em M diferenciáveis em p. Então, definimos o vetor tangente à curva α em $t = 0$ como a função $\alpha'(0) : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ dada por $\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0}$, $f \in \mathcal{D}$.*

Definição 1.20 *Um vetor tangente em $p \in M$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes à M em p será indicado por T_pM.*

Dados um sistema de coordenadas (x, U) em p com $x(0) = p$, uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v \in T_pM$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, podemos escrever $f \circ x(q) = f(x_1, ..., x_n)$, $q = (x_1, ..., x_n) \in U$ e $x^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), ..., x_n(t))$.

Logo,

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f \circ \alpha)}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt} f(x_1(t), ..., x_n(t))|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0) \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) \right) =$$

$$= \left(\sum_i x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(0) \right) f$$

e sendo assim, podemos expressar $\alpha'(0) \in T_pM$ no sistema de coordenadas (x, U) por

$$\alpha'(0) = \sum_i x_i'(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(0).$$

Em outras palavras, T_pM é gerado pelo conjunto de vetores $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(0), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(0) \right\}$, onde $\frac{\partial}{\partial x_i}(0)$ é o vetor tangente à curva coordenada $x_i \mapsto x(0, ..., 0, x_i, 0, ..., 0)$.

Observamos que é possível verificar que o conjunto T_pM com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial n-dimensional e deste modo, note que $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(0), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(0)\}$ é uma base de T_pM. Em resumo, a escolha de um sistema de coordenadas (x, U) determina uma base associada $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(0), ..., \frac{\partial}{\partial x_n}(0)\}$ em T_pM.

No entanto, é importante observar que a estrutura linear definida em T_pM não depende do sistema de coordenadas escolhido.

O espaço vetorial T_pM é chamado o *espaço tangente à M em p.*

Definição 1.21 *Seja M^n uma variedade diferenciável e seja $TM = \{(p, v) : p \in M, v \in T_pM\}$. Podemos munir o conjunto TM com uma estrutura diferenciável natural, obtendo assim uma variedade diferenciável TM de dimensão $2n$, a qual é chamada de fibrado tangente de M.*

A Definição 1.13 apresentou como é estendida às variedades a noção de diferenciabilidade de uma aplicação. A seguir, definiremos a diferencial de uma aplicação em um ponto.

Definição 1.22 *Dadas M e N variedades diferenciáveis, seja $\varphi : M \to N$ diferenciável. Se $p \in M$ e $v \in T_pM$ definimos a diferencial de φ em p, $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$, calculada em v por*

$$d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0),$$

onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$.

Proposição 1.23 *A aplicação $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ é linear e não depende da escolha de α.*

Definição 1.24 *Sejam M e N variedades diferenciáveis. Uma aplicação $\varphi : M \to N$ é um difeomorfismo se ela é um homeomorfismo diferenciável com inversa φ^{-1} diferenciável.*

Do clássico *Teorema da Função Inversa* ainda temos que se $d\varphi_p : T_pM \to T_{\varphi(p)}N$ for um isomorfismo, então φ é um difeomorfismo local em $p \in M$.

Definição 1.25 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M^n \to N^m$ uma aplicação diferenciável. A aplicação φ é chamada imersão se $d\varphi_p$ é injetora para todo $p \in M$. Além disso, se $\varphi : M \to \varphi(M)$ é um homeomorfismo, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida de N, dizemos que φ é um mergulho.*

Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \to N$ é um mergulho, então dizemos que M é uma *subvariedade* de N. Se já tivermos uma imersão $\varphi : M^n \to N^m$, temos que $n \leq m$ e a diferença $m - n$ é chamada a codimensão da imersão φ.

Proposição 1.26 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M^n \to N^m$ uma imersão. Então, para todo ponto $p \in M$, existe uma vizinhança $V \subset M$ de p tal que a restrição $\varphi|_V : V \to N$ é um mergulho.*

Considere $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que um ponto $p \in U$ é um *ponto crítico* de F se a diferencial $dF_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ não é sobrejetora. A imagem $F(p)$ de um ponto crítico é chamada um *valor crítico* de F. Um ponto $a \in \mathbb{R}^m$ que não é um valor crítico é chamado um *valor regular* de F. Note que qualquer ponto $a \notin F(U)$ é um valor regular de F.

Teorema 1.27 *Seja $F : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ uma aplicação diferenciável e $a \in F(U)$ um valor regular de F. Então a imagem inversa $F^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^n$ de dimensão $n - m = k$.*

Quanto à noção de orientabilidade de uma variedade apresentamos a seguinte definição:

Definição 1.28 *Seja M uma variedade diferenciável. Se M admite uma estrutura diferenciável (x_α, U_α) tal que para todo par α, β com $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) \neq \emptyset$ a diferencial da mudança de coordenadas $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ tem determinante positivo, então dizemos que M é orientável. Caso contrário, dizemos que M é não-orientável.*

Definição 1.29 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$.*

Definição 1.30 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é dito diferenciável se e somente se $X(f)$ é diferenciável para toda f diferenciável em M.*

Utilizaremos a notação $\mathcal{X}(M)$ para representar o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis em M.

Convém observar que dado $p \in M$ e uma vizinhança coordenada (x, U) de p é possível escrever

$$X(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $a_i : U \to \mathbb{R}$.

Nesse sentido, por vezes é conveniente pensarmos em um campo de vetores X como uma aplicação $X : \mathcal{D} \to \mathcal{F}$, onde $\mathcal{F}$ representa o conjuntos das funções em M, definida do seguinte modo:

$$(Xf)(p) = \sum_i a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p), \forall f \in \mathcal{D}.$$

Com isso, verifica-se que $X(f)$ é diferenciável se e somente se, as funções $a_i's$ o forem.

Dados dois campos de vetores diferenciáveis X e Y, podemos destacar um exemplo importante de campo de vetores diferenciável, o qual é chamado de *Colchete de Lie* de X e Y, o qual denotamos por $[X, Y]$, e é dado por

$$[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f)) \quad \forall f \in \mathcal{D}(M)$$

ou simplesmente,

$$[X, Y] = XY - YX.$$

Além disso, tal campo possui as propriedades abaixo:

(I) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade);

(II) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade);

(III) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi);

(IV) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$,

onde $Z \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

1.2.1 Campos de Tensores em uma Variedade Diferenciável

Na seção 1.1 estudamos tensores sobre um $\mathbb{R}$-espaço vetorial V arbitrário. Na seção anterior, observamos que dada uma variedade diferenciável M e um ponto $p \in M$, o espaço tangente à M em p é um $\mathbb{R}$-espaço vetorial. Neste caso, vamos denotar o conjunto dos tensores de tipo (m, s) sobre T_pM por $T_p^{m,s}M$.

Definição 1.31 *Um campo de tensores T de tipo (m, s) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um tensor $T(p) \in T_p^{m,s}M$. Um campo de formas lineares é chamado de 1-forma.*

Vamos denotar por $T^{m,s}M$ o conjunto dos campos de tensores definidos em M.

Definição 1.32 *Dizemos que uma 1-forma ω em M é diferenciável se e somente se $\omega(X)$ é diferenciável, para todo campo de vetores diferenciável X em M.*

Definição 1.33 *Um campo de tensores T de tipo (m, s) em M é dito diferenciável se e somente se $T(\omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., X_s)$ é diferenciável para toda m-upla de 1-formas $\omega_1, ..., \omega_m$ em M e toda s-upla $X_1, ..., X_s$ de campos de vetores diferenciáveis em M, com $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq s$.*

Assim, encerramos esta seção já familiarizados com as definições básicas de variedades diferenciáveis, o que nos permite formalizar importantes conceitos de Geometria riemanniana necessários ao nosso trabalho. É o que estudaremos na próxima seção.

1.3 Preliminares de Geometria Riemanniana

Nesta seção estudaremos variedades diferenciáveis como objetos munidos de uma estrutura métrica. Fundamentalmente, tal estrutura é constituída ao introduzirmos um produto interno em cada espaço tangente à variedade, como vemos na seguinte definição.

Definição 1.34 *Uma métrica riemanniana em uma variedade diferenciável M é um campo de tensores de tipo $(0,2)$ diferenciável em M que a cada ponto $p \in M$ associa um produto interno $\langle , \rangle_p$ em T_pM.*

Observamos que deixaremos de escrever o índice p em $\langle , \rangle_p$ sempre que não houver possibilidade de confusão.

Definição 1.35 *Uma variedade diferenciável munida de uma métrica riemanniana é chamada de variedade riemanniana.*

Em virtude da existência de uma partição da unidade em M temos a seguinte proposição:

Proposição 1.36 *Toda variedade diferenciável M possui uma métrica riemanniana.*

A definição abaixo nos dá o conceito de equivalência entre duas variedades riemannianas.

Definição 1.37 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Um difeomorfismo $\varphi : M \to N$ é chamado uma isometria se para todo $p \in M$ e todo par $u, v \in T_pM$ temos $\langle u, v\rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v)\rangle_{f(p)}$.*

Na Seção 1.2 apresentamos a definição de campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável M. Então é natural perguntar-nos como se dá a derivação de tais campos de vetores.

Com o propósito de bem definirmos tal derivação, passamos às seguintes definições.

Definição 1.38 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$, a qual indicaremos por $(X,Y) \to \nabla_X Y$ satisfazendo as seguintes propriedades:*

(I) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(II) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(III) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$,

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ *e* $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.39 *Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é correspondência que a cada $t \in I$ associa um vetor $V(t) \in T_{c(t)}M$.*

Definição 1.40 *Dizemos que um campo de vetores V ao longo de uma curva é diferenciável se para toda função diferenciável f em M, a função $t \mapsto V(t)f$ é diferenciável em I.*

O próximo resultado mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M origina uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas bem definida.

Proposição 1.41 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Então existe uma única correspondência que associa a um campo de vetores V diferenciável ao longo da curva diferenciável $c : I \to M$ um outro campo de vetores $\frac{DV}{dt}$ ao longo de c, denominado derivada covariante de V ao longo de c, tal que:*

(a) $\frac{D}{dt}(V+W) = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$, *onde W é um campo de vetores ao longo de c.*

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\frac{DV}{dt}$, *onde f é uma função diferenciável em I.*

(c) Se V é induzido por um campo de vetores $Y \in \mathcal{X}(M)$, isto é, $V(t) = Y(c(t))$, então $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\frac{dc}{dt}} Y$.

Definição 1.42 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Um campo de vetores V ao longo de uma curva $c : I \to M$ é chamado paralelo quando $\frac{DV}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.*

Proposição 1.43 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇. Seja $c : I \to M$ uma curva diferenciável em M e V_0 um vetor tangente a M em $c(t_0), t_0 \in I$ (i.e. $V_0 \in T_{c(t_0)}M$). Então existe um único campo de vetores paralelo V ao longo de c, tal que $V(t_0) = V_0$, onde $V(t)$ é chamado o transporte paralelo de $V(t_0)$ ao longo de c.*

É de nosso interesse observar que a noção de derivada covariante de campos de vetores se estende aos campos de tensores.

Porém, antes de estudarmos tal situação é conveniente o seguinte questionamento: dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e uma 1-forma ω em M, como calcular $(\nabla_X \omega)(Y)$?

Para esclarecermos tal questão basta observarmos que $\omega(Y) \in \mathcal{D}(M)$, e pela regra de Leibniz devemos ter $\nabla_X(\omega(Y)) = \omega(\nabla_X Y) + (\nabla_X \omega)(Y)$. Logo, é natural definirmos $(\nabla_X \omega)(Y) := \nabla_X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y)$ e assim o faremos.

Analogamente podemos definir a aplicação

$$\nabla_Y : T^{m,s}M \to T^{m,s}M$$

por

$$\nabla_Y T(\omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., X_s) = Y(T(\omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., X_s))$$

$$T(\nabla_Y \omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., X_s) - ... - T(\omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., \nabla_Y X_s). \tag{1.2}$$

Chamamos $\nabla_Y T$ de *derivada covariante* de T em relação à Y.

Definição 1.44 *Dado um campo de tensores T de tipo (m, s) em M, definimos a diferencial covariante de T como um campo de tensores ∇T de tipo $(m, s+1)$ em M dado por*

$$\nabla T(\omega_1, ..., \omega_m, Y, X_1, ..., X_s) = \nabla_Y T(\omega_1, ..., \omega_m, X_1, ..., X_s).$$

Devido ao nosso interesse por determinados campos de tensores, antes de prosseguirmos nosso estudo sobre variedades riemannianas, vamos apresentar alguns exemplos.

Exemplo 1.45 *Considere g a métrica riemanniana em M. Veja que g é um campo de tensores de tipo $(0, 2)$ em M, e portanto ∇g é de tipo $(0, 3)$.*

Assim, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ obtemos $\nabla g(Z, Y, X) = Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) = Z\langle X, Y\rangle - \langle \nabla_Z X, Y\rangle - \langle X, \nabla_Z Y\rangle$.

Exemplo 1.46 *Considere $f \in \mathcal{D}(M)$. Sabemos que f é um campo de tensores de tipo $(0, 0)$, e dado $X \in \mathcal{X}(M)$, temos que $\nabla f(X) = X(f)$.*

Observação 1.47 *Veja que $\nabla f(X) = \langle \nabla f, X\rangle$, onde ∇f é o gradiente de uma função real f visto como campo de vetores. Sendo assim, o gradiente de f visto como campo de vetores pode ser identificado com a diferencial covariante da função f (ver corolário 1.9). Observe que a diferencial covariante de f coincide com a diferencial df de f e que a mesma não depende da métrica riemanniana.*

Proposição 1.48 *Sejam $T, T_1, T_2 \in T^{m,s}M$, $c \in \mathbb{R}$ e $X \in T_pM$ onde $p \in M$. Então, se ∇ é a diferencial covariante de tensores, temos que:*

(a) $\nabla_X(cT_1 + T_2) = c\nabla_X T_1 + \nabla_X T_2$.

(b) $(\nabla_X(tr_{(i,j)}T)) = (tr_{(i,j)}(\nabla_X T))$.

(c) $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$.

Demonstração: Os itens (a) e (c) seguem imediatamente das Definições 1.2, 1.3 e da igualdade (1.2).

Para obter (b) calcule $(\nabla_X(tr_{(i,j)}T))(\omega_1,...,\omega_{m-1},v_1,...,v_{s-1})$ e $(tr_{(i,j)}(\nabla_X T))(\omega_1,...,\omega_{m-1},v_1,...,v_{s-1})$ explicitamente, onde $\omega_1,...,\omega_{m-1}$ são 1-formas diferenciáveis e $v_1,...,v_{s-1}$ são campos de vetores diferenciáveis. ■

Definiremos agora um caso importante de conexão afim, o qual é denominado *conexão de Levi-Civita.*

Definição 1.49 *Uma conexão ∇ em uma variedade riemanniana M é dita compatível com a métrica se e somente se*

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle\nabla_X Y,Z\rangle + \langle Y,\nabla_X Z\rangle,$$

$\forall X,Y,Z \in \mathcal{X}(M)$.

Observação 1.50 *Pelo Exemplo* 1.45*, note que $\nabla g \equiv 0$ se e somente se ∇ é compativel com a métrica.*

Proposição 1.51 *Seja M uma variedade riemanniana. Uma conexão ∇ em M é compatível com a métrica se e só se para todo par V e W de campos de vetores ao longo da curva diferenciável $c: I \to M$ tem-se*

$$\frac{d}{dt}\langle V,W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt},W\right\rangle + \left\langle V,\frac{DW}{dt}\right\rangle, t \in I.$$

E justificada por este último resultado, apresentamos a seguinte proposição.

Proposição 1.52 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ e uma métrica riemanniana $\langle .,. \rangle$. Se a conexão é compatível com a métrica $\langle .,. \rangle$, então para toda curva diferenciável c e quaisquer pares de campos de vetores paralelos P e P' ao longo de c, temos que $\langle P,P'\rangle$ = constante.*

Definição 1.53 *Uma conexão afim* ∇ *em uma variedade diferenciável* M *é dita simétrica quando*

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

É válido ressaltar que em um sistema de coordenas $(U, \mathbf{x})$, o fato da conexão ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, ..., n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0,$$

onde X_i denota $\frac{\partial}{\partial x_i}$.

Teorema 1.54 *(Levi-Civita) Dada uma variedade riemanniana* M*, existe uma única conexão afim* ∇ *em* M *satisfazendo as condições:*

(a) ∇ *é simétrica.*

(b) ∇ *é compatível com a métrica riemanniana.*

A conexão dada pelo teorema acima é denominada *conexão de Levi-Civita* (ou riemanniana) de M. Daqui em diante, ∇ sempre indicará a conexão de Levi-Civita.

Definiremos alguns campos de tensores que serão muito importantes no decorrer do trabalho.

Definição 1.55 *Seja* $f \in \mathcal{D}(M)$. *O campo de tensores de tipo* $(0, 2)$ $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ *em* M *dado por*

$$\nabla(\nabla f)(X, Y) = X(\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y), \forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$$

é chamado de Hessiano *de* f.

Veja que $\nabla^2 f$ é simétrico, pois

$$\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) = X(\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y) - Y(\nabla f(X)) + \nabla f(\nabla_Y X) =$$

$$= X(Y(f)) - Y(X(f)) + \nabla f([Y,X]) =$$

$$= [X,Y](f) + [Y,X](f) = 0,$$

ou seja, $\nabla^2 f(X,Y) = \nabla^2 f(Y,X)$.

A seguinte proposição nos dá uma maneira alternativa de calcular o Hessiano, e sua demonstração é conseqüência direta das definições e identificações usadas.

Proposição 1.56 *Seja M uma variedade riemanniana e ∇ a sua conexão de Levi-Civita. Então*

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle \tag{1.3}$$

onde ∇f do lado direito da equação é o campo vetorial identificado com a 1-forma ∇f.

Definição 1.57 *Seja T um campo de tensores de tipo $(0,m)$ definido em uma variedade riemanniana M n-dimensional. Definimos o operador divergente de T $divT$ como um campo de tensores de tipo $(0,m-1)$ dado por*

$$divT(v_2,...,v_m) = \sum_k (\nabla_{w_k} T)(w_k, v_2, ..., v_m),$$

onde $\{w_k\}$, $k = 1,...,n$, é uma base ortonormal de V.

Definição 1.58 *Dada uma variedade riemanniana M^n, consideremos $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ e $\{Y_k\}_{i=1}^n$ uma base ortonormal de T_pM. Então definimos o divergente de X $divX$ em p como*

$$divX(p) = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{Y_k} X, Y_k \rangle.$$

Pelo que já observamos na subseção 1.1.1, é possível associarmos a cada campo de vetores $X \in M$ um funcional linear ω_X, e veja que

$$div\omega_X = \sum_k (\nabla_{Y_k} \omega_X)(Y_k) = \sum_k \nabla_{Y_k}(\omega_X(Y_k)) - \omega_X(\nabla_{Y_k} Y_k) =$$

$$= \sum_k \nabla_{Y_k} \langle X, Y_k \rangle - \langle X, \nabla_{Y_k} Y_k \rangle = \sum_k Y_k \langle X, Y_k \rangle - \langle X, \nabla_{Y_k} Y_k \rangle =$$

$$= \sum_k \langle \nabla_{Y_k} X, Y_k \rangle,$$

o qual coincide com o divergente usual de campos de vetores em M.

Definição 1.59 *Dada $f \in \mathcal{D}(M)$ definimos o laplaciano de f em $p \in M$ como*

$$\Delta f = \sum_k \nabla^2 f(Y_k, Y_k) = div(\nabla f),$$

onde $\{Y_k\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

Daremos agora a definição de geodésica e alguns conceitos que são dependentes dessa definição.

Dada uma curva diferenciável $c : I \to M$ fica naturalmente determinado um campo de vetores tangentes à M ao longo de c dado por $\frac{dc}{dt}$. No entanto, existem curvas com particularidades interessantes com respeito a este campo de vetores. Tomando como ponto de partida a noção de derivada covariante, bem como, a de transporte paralelo, podemos introduzir o conceito de curva geodésica em uma variedade riemanniana.

Definição 1.60 *Uma curva diferenciável $\gamma : I \to M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto t_0. Se γ é geodésica $\forall t \in I$, dizemos simplesmente que γ é uma geodésica.*

Definição 1.61 *Se $[a,b] \subset I$ e $\gamma : I \to M$ é uma geodésica, então $\gamma|_{[a,b]}$ é um segmento de geodésica que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 1.62 *Um segmento de geodésica $\gamma : [a,b] \to M$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(c)$, onde $l(.)$ denota o comprimento de uma curva e c é qualquer curva diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Definição 1.63 *Um conjunto $S \subset M$ é dito fortemente convexo se para quaisquer dois pontos p_1, p_2 do fecho de S existe uma única geodésica minimizante γ ligando p_1 a p_2 cujo interior está contido em S.*

É possível mostrar que todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança fortemente convexa.

Definimos agora o referencial geodésico, que será útil posteriormente.

Seja $p \in M$ e U uma vizinhança fortemente convexa de p. Fixe uma base ortonormal $\{w_1, ..., w_n\}$ de T_pM. Então existem n campos de vetores diferenciáveis $E_1, ..., E_n$ em U tais que:

a) $E_i(p) = w_i \ \forall i = 1, .., n$.

b)$\{E_1(q), ..., E_n(q)\}$ é uma base ortonormal de T_qM, $\forall q \in U$.

c) $\nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \ \forall i, j = 1, ..., n$.

Esses campos são obtidos explicitamente. Dado $q \in U$, considere $\gamma_{p,q}$ uma geodésica minimizante ligando p a q. Seja $E_i(q)$ o transporte paralelo de w_i ao longo de $\gamma_{p,q}$. Pode-se mostrar que os campos E_i assim construídos satisfazem as condições a), b) e c). Uma n-upla de campos de vetores assim construídos é chamado de *referencial geodésico* em p.

A próxima definição introduz a curvatura (ou tensor de curvatura), que é um objeto central em geometria riemanniana.

Definição 1.64 *A curvatura R de uma variedade riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z, \ Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão riemanniana de M.

Proposição 1.65 *A curvatura R de uma variedade riemanniana goza das seguintes propriedades:*

(I) R é bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, X_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(II) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, a curvatura $R(X,Y) : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$é linear, isto é,

$$R(X,Y)(Z+W) = R(X,Y)Z + R(X,Y)W,$$

$$R(X,Y)fZ = fR(X,Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

(III) (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

A Proposição 1.65 permite-nos uma observação interessante, pois dela resulta que a curvatura $R : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ de acordo com (1.1), pode ser identificada a um campo de tensores de tipo $(1,3)$ em M, o qual por abuso de notação também denotaremos por R.

Por outro lado, a Proposição 1.7 nos diz que podemos identificar R com o campo de tensores de $\tilde{R} = tr(g \otimes R)$ de tipo $(0,4)$ fazendo $\tilde{R}(W,X,Y,Z) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle$.

A próxima proposição estabelece algumas propriedades da curvatura:

Proposição 1.66 *(a)* $\langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle R(Y,Z)X, W\rangle + \langle R(Z,X)Y, W\rangle = 0$

(b) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y,X)Z, W\rangle$

(c) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = -\langle R(X,Y)W, Z\rangle$

(d) $\langle R(X,Y)Z, W\rangle = \langle R(Z,W)X, Y\rangle$

A partir da curvatura apresentamos a definição seguinte, onde indicaremos por $\|X \wedge Y\|$ a expressão $\sqrt{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$ que representa a área do paralelogramo determinado pelos vetores X e Y.

Definição 1.67 *Dada uma variedade riemanniana M, $p \in M$ e $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional de T_pM, definimos para os vetores $X(p), Y(p) \in \sigma$ linearmente independentes a curvatura seccional de σ em p como*

$$K(X(p), Y(p)) = \frac{\langle R(X, Y)Y, X\rangle}{\|X \wedge Y\|^2}.$$

É importante observar que a curvatura seccional é relativa ao subespaço $\sigma \subset T_pM$ escolhido. Então, ao invés de escrevermos $K(X, Y)$ podemos escrever $K(\sigma)$. Isto é possível pois pode-se demonstrar que $K(X, Y)$ não depende da escolha da base $\{X, Y\}$ em σ.

Lema 1.68 *Seja M uma variedade riemanniana e $p \in M$. Defina uma aplicação trilinear $R' : T_pM \times T_pM \times T_pM \to T_pM$ por*

$$\langle R'(X, Y, W), Z\rangle = \langle Y, W\rangle\langle X, Z\rangle - \langle X, W\rangle\langle Y, Z\rangle,$$

para todo $X, Y, W, Z \in T_pM$. Então M tem curvatura seccional constante igual a K_0 se e só se $R = K_0R'$, onde R é a curvatura de M.

Já identificamos a curvatura R ao tensor R de tipo $(1, 3)$ em M e note que

$$(trR)(X, Y) = \sum_{k=1}^{n}\langle R(w_k, X)Y, w_k\rangle$$

onde $\{w_1, ..., w_n\}$ é uma base ortonormal de T_pM.

A partir do tensor curvatura podemos definir outros tensores que têm papel fundamental em nosso trabalho. Sendo assim, concluiremos esta seção apresentando tais definições.

Definição 1.69 *Dada uma variedade riemanniana M e $p \in M$, consideremos uma base ortonormal $\{w_1, ..., w_n\}$ de T_pM. Então, para quaisquer $X, Y \in T_pM$ definimos o tensor de Ricci, denotado por Ric, como o tensor de tipo $(0,2)$ dado por*

$$Ric(X,Y) = (trR)(X,Y) = \sum_{k=1}^{n} \langle R(w_k, X, Y), w_k \rangle.$$

Além disso, se $\|X\| = 1$, então $Ric(X,X)$ é chamado de curvatura de Ricci na direção X.

É válido observar que esta definição não depende da escolha da base ortonormal em T_pM.

Pela Proposição 1.8 podemos identificar Ric a um tensor $\widehat{Ric}$ de tipo $(1,1)$ em M, e sendo assim, dada uma base ortonormal $(w_1, ..., w_n)$ em T_pM e sua dual $(\beta_1, ..., \beta_n)$, temos que

$$tr\widehat{Ric} = \sum_{k=1}^{n} \widehat{Ric}(\beta_k, w_k) = \sum_{k=1}^{n} Ric(w_k, w_k).$$

Com isso, apresentamos a seguinte definição.

Definição 1.70 *Dada uma variedade riemanniana M e $p \in M$, consideremos uma base ortonormal $(w_1, ..., w_n)$ de T_pM. Então, definimos a curvatura escalar S em p como sendo o tensor de tipo $(0,0)$ dado por*

$$S(p) = tr\widehat{Ric} = \sum_{j,k=1}^{n} \langle R(w_j, w_k)w_k, w_j \rangle.$$

Novamente observamos que tal definição não depende da escolha da base ortonormal em T_pM.

1.4 Imersões Isométricas e as Equações Fundamentais

Definição 1.71 *Sejam M^n e $\overline{M}^{n+k} (k \geq 1)$ variedades Riemannianas. Uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é dita isométrica se $\langle d\varphi_p(v), d\varphi_p(w) \rangle_{\overline{M}} = \langle v, w \rangle_M$, $\forall v, w \in T_pM$.*

Dada uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$, podemos estabelecer relações entre objetos definidos em ambas as variedades. Estas relações são expressas por meio das *Equações Fundamentais das Imersões Isométricas.*

Lembremo-nos que a Proposição 1.26 nos diz que se $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão, então φ é localmente um mergulho. Nestas condições, podemos identificar um aberto U de M com $\varphi(U)$, e dizer que φ é localmente a aplicação de inclusão. Mais ainda, podemos considerar U como uma subvariedade de $\overline{M}$. Em particular, estamos identificando $p \in U$ com $\varphi(p) \in \varphi(U)$.

Conseqüentemente, para cada $p \in M$, o espaço tangente T_pM é considerado um subespaço vetorial de $T_p\overline{M}$ de dimensão n (já considerando a identificação acima).

Assim, se considerarmos o espaço k-dimensional $T_pM^\perp = \{\ v \in T_p\overline{M} : \langle u, v\rangle = 0, \forall u \in T_pM\}$, podemos escrever

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^\perp.$$

O espaço $T_pM^\perp$ é chamado de *espaço normal* à M em p.

Temos deste modo, o *fibrado normal*

$$TM^\perp = \{(p, \xi_p) | p \in M, \xi_p \in T_pM^\perp\} = \bigcup_{p\in M} T_pM^\perp.$$

Um campo de vetores normal ξ é uma correspondência que a cada $p \in M$ associa um vetor em $T_pM^\perp$. Dizemos que $\xi \in TM^\perp$ é diferenciável se ele for localmente a restrição à $TM^\perp$de algum campo de vetores diferenciável em $\overline{M}$. Indicaremos por $\mathcal{X}(M)^\perp$ os campos de vetores diferenciáveis normais à M.

Tomemos agora, campos locais de vetores X e Y tangentes a M. Como $\varphi|_U$ é um mergulho, existem extensões locais $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ de X e Y, respectivamente, numa vizinhança de U em $\overline{M}$.

Assim, se $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $\overline{M}$, faz sentido calcularmos $\overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y}$, ou até mesmo $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$.

Pode-se mostrar que $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ não depende da extensão $\overline{Y}$ de Y que tomamos, e portanto, por simplicidade de notação, denotaremos $\overline{\nabla}_X\overline{Y}$ por $\overline{\nabla}_X Y$, lembrando que isso significa tomar uma extensão de Y para calcular a derivada covariante.

Temos então:

$$\overline{\nabla}_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^{\top} + (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}. \tag{1.4}$$

No entanto, é possível verificar que $(\overline{\nabla}_{.}.)^{\top}$ é a própria conexão de Levi-Civita de M (que denotaremos por ∇), isto é, $(\overline{\nabla}_X Y)^{\top} = \nabla_X Y$.

Definição 1.72 *Definimos a segunda forma fundamental da imersão φ, como sendo a aplicação bilinear $\alpha : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)^{\perp}$ dada por $\alpha(X,Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^{\perp}$.*

Deste modo, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, obtemos de (1.4) a *fórmula de Gauss*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y). \tag{1.5}$$

Proposição 1.73 *Se $X, Y \in \mathcal{X}(U)$, a aplicação $\alpha : \mathcal{X}(U) \times \mathcal{X}(U) \to \mathcal{X}(U)^{\perp}$ dada por*

$$\alpha(X,Y) = \overline{\nabla}_{\overline{X}}\overline{Y} - \nabla_X Y$$

é simétrica e bilinear em relação à $\mathcal{D}(M)$.

Além disso, se $X \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, podemos escrever

$$\overline{\nabla}_X \xi = (\overline{\nabla}_X \xi)^{\top} + (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}, \tag{1.6}$$

e com relação à componente normal, definimos

$$\nabla^{\perp}_X \xi := (\overline{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

Veja que para quaisquer $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, temos que $\nabla^{\perp} : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)^{\perp} \to \mathcal{X}(M)^{\perp}$ é por definição: $\nabla^{\perp}_{fX+gY}\xi = \overline{\nabla}_{fX+gY}\xi - (\overline{\nabla}_{fX+gY}\xi)^{\top}$.

Com isso, podemos concluir que $\nabla^{\perp}$ é $\mathcal{D}(M)$-linear em X e $\mathbb{R}$-linear em ξ, pois $\overline{\nabla}$ e $\overline{\nabla}^{\top}$ são conexões afins.

Além disso, $\forall f \in \mathcal{D}(M)$ temos $\nabla^{\perp}_X f(\xi) = f\nabla^{\perp}_X \xi + X(f)\xi$.

Assim, $\nabla^{\perp}$ é uma conexão afim em $TM^{\perp}$ chamada *conexão normal*.

Se $\eta \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, então $X\langle \xi, \eta\rangle = \langle \nabla^{\perp}_X \xi, \eta\rangle + \langle \xi, \nabla^{\perp}_X \eta\rangle$, ou seja, $\nabla^{\perp}$ é compatível com a métrica.

Quanto à componente tangencial, definimos

$$A_\xi X := -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}, \tag{1.7}$$

onde $A_\xi : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$.

Proposição 1.74 *Para todo $p \in M$, temos que $A_{\xi_p} : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto.*

Demonstração: Basta verificar que dados $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ e $\xi \in \mathcal{X}(M)^{\perp}$, temos da Proposição 1.51 e das expressões (1.6) e (1.5) que

$$\langle A_\xi(X), Y\rangle_p = \langle -(\overline{\nabla}_X \xi)^{\top}, Y\rangle = \langle -\overline{\nabla}_X \xi, Y\rangle = \langle \xi, \overline{\nabla}_X Y\rangle =$$

$$= \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle = \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle = \langle \xi, \alpha(Y,X)\rangle = ... = \langle A_\xi(Y), X\rangle_p. \blacksquare$$

Note que em particular, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$.

Veja que de (1.6) e (1.7) obtemos

$$\overline{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^{\perp}_X \xi, \tag{1.8}$$

e chamamos tal expressão de *Fórmula de Weingarten* e o operador A_ξ é chamado de *operador forma (shape operator)*, ou ainda, por abuso de linguagem, de segunda forma fundamental.

A curvatura $\overline{R}$ em $\overline{M}$ é dada por

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z, \forall Z \in \mathcal{X}(\overline{M}), \tag{1.9}$$

e em virtude dos objetos definidos até aqui observemos que ao considerarmos R e $\overline{R}$ as curvaturas de M e $\overline{M}$, respectivamente, e dados quaisquer $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, segue que:

$$\overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = \overline{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) = \overline{\nabla}_X \nabla_Y Z + \overline{\nabla}_X \alpha(Y, Z) =$$

$$= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)} X + \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z).$$

Analogamente,

$$\overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z = \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Y)} Y + \nabla_Y^{\perp} \alpha(X, Z).$$

Finalmente, também pela Fórmula de Gauss temos

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \alpha([X, Y], Z),$$

e tomando a parte tangencial em (1.9) resulta:

$$(\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} = \nabla_X \nabla_Y Z - A_{\alpha(Y,Z)} X - \nabla_Y \nabla_X Z + A_{\alpha(X,Z)} Y - \nabla_{[X,Y]} Z$$

$$\Rightarrow (\overline{R}(X, Y)Z)^{\top} = R(X, Y)Z + A_{\alpha(X,Z)} Y - A_{\alpha(Y,Z)} X.$$

Assim, $\forall W \in \mathcal{X}(M)$ temos: $\langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(Y, W), \alpha(X, Z) \rangle - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle$, obtendo assim a chamada *Equação de Gauss*:

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \overline{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle. \tag{1.10}$$

Observe que ao considerarmos $X, Y \in T_pM$ ortonormais e o subespaço σ de T_pM gerado por eles e se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\overline{K}(X, Y) = \langle \overline{R}(X, Y)Y, X \rangle$ denotam as curvaturas seccionais em M e $\overline{M}$ de σ, respectivamente, temos de (1.10) que

$$K(X, Y) = \overline{K}(X, Y) + \langle \alpha(X, X), \alpha(Y, Y) \rangle - \|\alpha(X, Y)\|^2.$$

Defina

$$(\nabla_X^{\perp} \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^{\perp} \alpha(Y, Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z), \forall X, Y, Z \in T_pM.$$

Com isso, ao considerarmos a componente normal em (1.9) obtemos a *Equação de Codazzi*:

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) - (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z).$$

Finalmente, consideramos o tensor curvatura em $TM^{\perp}$, ou seja, $R^{\perp}(X,Y)\xi = \nabla^{\perp}_{X}\nabla^{\perp}_{Y}\xi - \nabla^{\perp}_{Y}\nabla^{\perp}_{X}\xi - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}\xi$ para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^{\perp}$. Das equações (1.8) e (1.5) segue que a componente normal de $\overline{R}(X,Y)\xi$ satistaz a *Equação de Ricci*:

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\perp} = R^{\perp}(X,Y)\xi + \alpha(A_{\xi}X,Y) - \alpha(X,A_{\xi}Y).$$

Ressaltamos que se fizermos o produto escalar por $\eta \in T_pM^{\perp}$, na expressão acima, a Equação de Ricci pode ser escrita como

$$\langle\overline{R}(X,Y)\xi,\eta\rangle = \langle R^{\perp}(X,Y)\xi,\eta\rangle - \langle[A_{\xi},A_{\eta}]X,Y\rangle,$$

onde $[A_{\xi},A_{\eta}] = A_{\xi}A_{\eta} - A_{\eta}A_{\xi}$.

Analogamente, fazendo alguns cálculos, a Equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\overline{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_{Y}A)(X,\xi) - (\nabla_{X}A)(Y,\xi),$$

onde $(\nabla_{Y}A)(X,\xi) = \nabla_{Y}A_{\xi}X - A_{\xi}\nabla_{Y}X - A_{\nabla^{\perp}_{Y}\xi}X$.

Agora que formalizamos tais equações, vamos reescrevê-las para o caso de uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}_c$, onde $\overline{M}^{n+k}_c$ denota uma variedade de curvatura seccional constante igual a c.

Sabemos pelo Lema 1.68 que $\overline{R} = cR'$, e deste modo, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci podem ser escritas como:

Equação de Gauss

$$\langle R(X,Y)Z,W\rangle = c\langle R'(X,Y,Z),W\rangle + \langle\alpha(X,W),\alpha(Y,Z)\rangle - \langle\alpha(X,Z),\alpha(Y,W)\rangle, \tag{1.11}$$

Equação de Codazzi

$$(\nabla^{\perp}_{X}\alpha)(Y,Z) = (\nabla^{\perp}_{Y}\alpha)(X,Z),$$

ou equivalentemente,

$$(\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi), \tag{1.12}$$

Equação de Ricci

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(A_\xi X, Y),$$

ou equivalentemente,

$$\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y\rangle. \tag{1.13}$$

Decorre da última equação que $R^{\perp} = 0$ se e somente se $[A_\xi, A_\eta] = 0$ para todo ξ, η, isto é, se e somente se para todo $p \in M$ existe uma base de T_pM que diagonaliza simultaneamente todos os operadores A_ξ.

Em particular, se $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica onde a codimensão k de φ é igual a 1, então φ é denominada uma hipersuperfície. É imediato que dado $p \in M$, temos $dim_{\mathbb{R}}((T_pM)^{\perp}) = 1$, e neste caso, $[A_\xi, A_\eta] = 0$.

Por outro lado, vimos que $\overline{\nabla}_X\xi = \nabla^{\perp}_X\xi - A_\xi X = \nabla^{\perp}_X\xi + \overline{\nabla}_X\xi^{\top}$, e além disso, $0 = X\langle\xi,\xi\rangle = 2\langle\overline{\nabla}_X\xi,\xi\rangle$. Logo, $\overline{\nabla}_X\xi = 0$ e pela definição de $R^{\perp}(X,Y)\xi$, segue que a equação de Ricci é naturalmente satisfeita, pois teremos em (1.13) uma equação do tipo $0 = 0$. Isto é, no caso das hipersuperfícies, temos de fato somente duas equações fundamentais.

Dada uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, $x \in M$ e $\xi \in T_pM^{\perp}$ sabemos que o operador A_ξ é auto-adjunto, e portanto, existe uma base ortonormal de T_xM constituída de autovetores $e_1(x), ..., e_n(x)$ associados aos autovalores $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x)$.

Neste sentido, denominamos $\lambda_1(x), ..., \lambda_n(x)$ de curvaturas principais de φ em x, e analogamente dizemos que $e_1(x), ..., e_n(x)$ são direções principais.

Definição 1.75 *Uma imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é dita umbílica em $x_0 \in M$ quando $A_\xi = \lambda_\xi I$ para todo $\xi \in T_{x_0}M^{\perp}$, onde $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade em $T_{x_0}M$.*

Além disso, dizemos que φ é uma imersão umbílica quando é umbílica em todo $x \in M$.

Definição 1.76 *Seja A_ξ a segunda forma fundamental relativa à imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ e $x \in M$. Então, para todo $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$ definimos a r-ésima curvatura média H_r de φ em x por*

$$H_r(x) = \sum_{i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r} \lambda_{i_1}(x).\lambda_{i_2}(x)\ldots\lambda_{i_r}(x),$$

onde os índices $i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_r$ são distintos dois a dois.

Algumas r-ésimas curvaturas médias recebem nomes especiais.

Definição 1.77 *Dada uma imersão $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$ com a segunda forma fundamental A_ξ, definimos a curvatura média H de φ em x por*

$$H(x) = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} \lambda_i(x) = \frac{1}{n}(trA_\xi) = \frac{1}{n}H_1(x).$$

Quando $r = n$, chamaremos $H_n(x) = \lambda_{i_1}(x)\lambda_{i_2}(x)\ldots\lambda_{i_r}(x) = det(A_\xi)$ de curvatura de Gauss-Kronecker *de φ em x.*

Daqui em diante estudaremos um caso particular de imersão isométrica $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+1}$, a saber, quando $\overline{M}^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$.

Vamos denotar a esfera unitária n-dimensional em $\mathbb{R}^{n+1}$ por $S^n(1)$ e supor M^n orientável.

Então, fixada uma orientação em M, podemos escolher em $TM^\perp$ um campo de vetores normal unitário (global) ξ e definir a seguinte aplicação:

$$N : M^n \to S^n(1)$$

por

$$x \mapsto \xi_x.$$

Note que tal aplicação está globalmente definida (pois tomamos M orientada), e a mesma é chamada *Aplicação Normal de Gauss*. Além disso, $\xi_x \in S^n(1)$ representa a translação do vetor $\xi_x \in T_xM^{\perp}$ para a origem de $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais ainda, para todo $x \in M$, os espaços vetoriais T_xM e $T_{N(x)}S^n(1)$ são paralelos em $\mathbb{R}^{n+1}$, donde segue que existe um isomorfismo natural entre tais espaços, e nestas condições, podemos identificá-los.

Veja que N é claramente diferenciável. Além disso, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.78 *A diferencial da aplicação normal de Gauss em $p \in M$, $dN_p : T_pM \to T_pM$, é um operador linear auto-adjunto.*

Proposição 1.79 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com aplicação normal de Gauss $N : M^n \to S^n_1$. Então, para cada $x \in M$, temos*

$$(dN_x) = -A_{\xi}(x).$$

Demonstração : Consideremos $X \in T_xM$ e seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ uma curva diferenciável com $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X$.

Segue da definição de diferencial, que

$$(dN_x)(X) = \frac{d}{dt}(N \circ \gamma)(t)|_{t=0} = X(\xi_x) = (\overline{\nabla}_X \xi)_x = -A_{\xi}(x)X,$$

onde a última igualdade se dá pela Fórmula de Weingarten (1.8). ■

Deste último resultado podemos concluir que $\alpha(e_i, e_j) = -\langle dN(e_i), e_j \rangle$.

Sabemos que a curvatura seccional de $\mathbb{R}^{n+1}$ é nula, e sendo assim, a equação (1.11) pode ser escrita como

$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = \langle \alpha(X,W), \alpha(Y,Z) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle.$$

Em particular, se dado $x \in M$ o conjunto $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base ortonormal de T_xM que diagonaliza A_{ξ}, temos que

$$S(x) = \sum_{i,j=1}^{n} \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle = \sum_{i,j} \langle \alpha(e_i, e_i), \alpha(e_j, e_j) \rangle - \langle \alpha(e_i, e_j), \alpha(e_j, e_i) \rangle = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j =$$

$$= H_2(x). \tag{1.14}$$

Neste caso veja que a definição de curvatura escalar coincide com a definição da segunda curvatura média dada na Definição 1.76.

Capítulo 2

Hipersuperfícies Convexas em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo apresentaremos o *Teorema de Hadamard* para Hipersuperfícies Convexas que aponta implicações topológicas importantes da aplicação normal de Gauss. Para isso serão necessários alguns resultados de Topologia, os quais não faremos demonstração, ressaltando que podem ser consultados em [13].

Com isso, concluiremos que a esfera é a única hipersuperfície conexa e compacta com curvatura de Gauss-Kronecker constante mergulhada no espaço euclidiano.

2.1 O Teorema de Hadamard para hipersuperfícies convexas

Vamos iniciar esta seção apresentando resultados preliminares de Topologia.

Ao longo desta subseção E e B denotarão espaços topológicos.

Teorema 2.1 *Todo subespaço compacto de um espaço topológico Hausdorff é fechado.*

Teorema 2.2 *Seja $f : E \to B$ uma função contínua bijetora. Se E é compacto e B é Hausdorff, então f é um homeomorfismo.*

Definição 2.3 *Seja $\pi : E \to B$ uma aplicação contínua sobrejetora. Um conjunto aberto U de B é chamado um aberto distinguido de B por π se $\pi^{-1}(U)$ puder ser* *escrito como*

$$\bigcup_{\alpha \in J} V_\alpha,$$

onde os $V_\alpha' s$ são abertos disjuntos entre si e $\pi|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U$ é um homeomorfismo.

Definição 2.4 *Seja $\pi : E \to B$ contínua e sobrejetora. Se todo ponto b de B tem uma vizinhança U que é um aberto distinguido por π, então π é chamada uma aplicação de recobrimento e E é dito um espaço de recobrimento de B.*

Proposição 2.5 *Se $\pi : E \to B$ é uma aplicação de recobrimento, com E conexo por caminhos e B simplesmente conexo, então π é homeomorfismo.*

Proposição 2.6 *Se $f : E \to B$ é um homeomorfismo local, com E compacto e B conexo, então f é uma aplicação de recobrimento.*

Teorema 2.7 (Teorema da Separação de Jordan-Brouwer) - *Seja M uma hipersuperfície conexa e compacta de $\mathbb{R}^n$. Então $\mathbb{R}^n - M$ consiste em dois abertos conexos (regiões) D_1 e D_2, tais que $M = \overline{D_1} \cap \overline{D_2}$, isto é, M é a fronteira dos domínios $\overline{D_i}$, sendo um destes compacto.*

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser consultada em [8].

Daqui em diante, admitiremos que as imersões mencionadas são isométricas e quando for conveniente vamos denominar a imersão $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ de hipersuperfície, entendendo que φ é um mergulho e que estamos nos referindo à subvariedade $M \approx \varphi(M^n)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Vejamos agora alguns resultados auxiliares para a demonstração do Teorema de Hadamard.

Proposição 2.8 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ hipersuperfície compacta. Então existe um ponto $x_0 \in M$ e um vetor normal $\xi \in T_{x_0}M^\perp$ tal que a segunda forma fundamental A_ξ é positiva definida.*

Demonstração: Vamos considerar a função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{2}\|\varphi(x)\|^2$, que é claramente diferenciável, e note que $\varphi(x)$ pode ser vista como um vetor posição em $\mathbb{R}^{n+1}$. Assim, dado $p \in M$ e $X \in T_pM$ temos que $\overline{\nabla}_X\varphi = X$, onde $\overline{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note que pela compacidade de M, está garantida a existência de $x_0 \in M$, tal que f assume um valor máximo. Deste modo, para todo $X \in T_{x_0}M$ temos

$$0 = X(f)(x_0) = X(\frac{1}{2}\langle\varphi,\varphi\rangle)(x_0) = \langle X, \varphi(x_0)\rangle$$

e conseqüentemente, segue que $\varphi(x_0)$ é normal a M em x_0.

Além disso, considerando α a segunda forma fundamental de φ temos que

$$0 \geq X(X(f))(x_0) = X\langle X, \varphi\rangle(x_0) = \langle\overline{\nabla}_X X, \varphi(x_0)\rangle + \langle X, X\rangle =$$

$$\langle\overline{\nabla}_X X, \varphi(x_0)\rangle + \|X\|^2 = \langle\alpha(X,X), \varphi(x_0)\rangle + \|X\|^2.$$

Agora, tomando $\xi = -\varphi(x_0) \in T_{x_0}M^{\perp}$, obtemos $\langle\alpha(X,X),\xi\rangle \geq \|X\|^2$, ou seja, $\langle A_\xi X, X\rangle \geq \|X\|^2, \forall\ X \in TM$ e pela arbitrariedade de X segue o resultado. ■

Na Seção 1.3 do capítulo anterior, vimos que se $\varphi : M^n \to \overline{M}^{n+k}$ é uma imersão isométrica e $p \in M$, então T_pM é um subespaço de $T_p\overline{M}$ de dimensão n. Em particular, no caso em que $\overline{M}^{n+k} = \mathbb{R}^{n+1}$, T_pM pode ser identificado com um hiperplano de $\mathbb{R}^{n+1}$. Sendo assim, quando for conveniente, vamos nos referir a T_pM como o hiperplano tangente à M em p.

Ao considerarmos que a segunda forma A_ξ é definida em um ponto $x \in M$, é possível obter informações à respeito da posição de M com relação ao hiperplano tangente à uma vizinhança de x em M. A fim de verificarmos isso, vamos inicialmente apresentar algumas definições.

Definição 2.9 *Dada uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, dizemos que φ é localmente convexa em um ponto $x \in M$ quando existe uma vizinhança U de x em M, tal que $\varphi(U)$ está de um mesmo lado do hiperplano T_xM em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Além disso, dizemos que a imersão φ é localmente estritamente convexa em x quando $\varphi(x)$ é o único ponto em $\varphi(U) \cap (d\varphi)_x(T_xM)$.

Proposição 2.10 - *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície com segunda forma definida em um ponto $x_0 \in M$. Então φ é localmente estritamente convexa em x_0. Em particular, qualquer hipersuperfície compacta M de $\mathbb{R}^{n+1}$ é localmente estritamente convexa em algum ponto.*

Demonstração : Seja $\xi_{x_0} \in T_{x_0}M^{\perp}$ e defina $h : M \to \mathbb{R}$ dada por

$$h(x) = \langle \varphi(x) - \varphi(x_0), \xi_{x_0} \rangle.$$

Observe que h mede a distância orientada de qualquer ponto x de M ao hiperespaço que contém x_0 e é normal a ξ_{x_0}.

Note que $h \in \mathcal{D}(M)$ e para todo $X \in T_{x_0}M$,

$$X(h) = \langle X, \xi_{x_0} \rangle = 0$$

e

$$XX(h) = \langle \overline{\nabla}_X X, \xi_{x_0} \rangle = \langle \nabla_X X, \xi_{x_0} \rangle + \langle \alpha(X, X), \xi_{x_0} \rangle = \langle A_{\xi_{x_0}} X, X \rangle.$$

Veja que x_0 é um ponto crítico de h e por hipótese, $A_{\xi_{x_0}}$ é definida. Portanto, h tem um máximo ou mínimo estrito local em x_0. Logo, dada uma vizinhança U de x_0, temos que $\varphi(U) \cap T_{x_0}M = \{x_0\}$, e segue que φ é localmente estritamente convexa em x_0. Mais ainda, pela Proposição 2.8, resulta a segunda afirmação. ■

Lema 2.11 *Seja A um campo de operadores lineares auto-adjuntos diferenciáveis em uma variedade riemanniana M^n. Então existem n funções contínuas $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ tais que para todo $x \in M^n$, $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$ são os autovalores de A_x.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser consultada em [17].

Por *domínio convexo* entendemos um subconjunto aberto B de $\mathbb{R}^{n+1}$ tal que, dados dois pontos $p, q \in B$, o segmento unindo p à q está contido em B.

Definição 2.12 *Dizemos que uma hipersuperfície mergulhada $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma* hipersuperfície convexa *quando ela é a fronteira de um domínio convexo $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$.*

Uma hipersuperfície é estritamente convexa se ela for convexa e para todo $p \in T_pM$, $d\varphi_p(T_pM) \cap \varphi(M) = \{\varphi(p)\}$.

A partir daqui, já estamos em condições de demonstrar o resultado principal desta seção.

Teorema 2.13 (Teorema de Hadamard para Hipersuperfícies Convexas) *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa e compacta. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(I) A segunda forma fundamental é definida em todo ponto de M,

(II) M é orientável e a aplicação normal de Gauss $N : M^n \to S_1^n$ é um difeomorfismo.

(III) A curvatura de Gauss-Kronecker H_n é não nula em todo ponto de M.

Além disso, qualquer uma das condições acima implica que a hipersuperfície é uma hipersuperfície estritamente convexa.

Demonstração:

$(I) \Rightarrow (II)$ Escolha um vetor ξ_x unitário em $T_xM^{\perp}$ tal que A_{ξ_x} é negativa definida para todo $x \in M$. Fixe $x_0 \in M$. Agora, considere uma vizinhança U de x_0 e uma extensão η (unitário) de ξ_{x_0} em U. Note que $\eta_{x_0} = \xi_{x_0}$, e para qualquer $x \neq x_0 \in U$ temos $\eta_x = \pm\xi_x$. Mas, pela escolha de ξ devemos ter $\eta_x = \xi_x$ para todo $x \in U$ e deste modo, podemos concluir que o campo de vetores ξ é contínuo em M. Então M é orientável.

Note que a aplicação A_ξ é injetora, e segue da Proposição 1.79 a injetividade de dN_x para todo $x \in M$ e do Teorema da Função Inversa, temos que N é um difeomorfismo local.

Sendo M compacta, também temos da Proposição 2.6 que N é uma aplicação de recobrimento, e além disso, como $S^n(1)$ é simplesmente conexa para $n \geq 2$, pela Proposição 2.5 segue que N é um difeomorfismo global.

$(II) \Rightarrow (III)$ Por hipótese, N é um difeomorfismo, logo, dN_x é injetiva em todo $x \in M$ e pela Proposição 1.79 segue o resultado.

$(III) \Rightarrow (I)$ Pela Proposição 2.8 sabemos que existe $x_0 \in M$ e $\xi_{x_0} \in T_{x_0}M^\perp$ tal que $A_{\xi_{x_0}}$ é positiva definida.

Agora, consideremos arbitrariamente $x \in M$ e $\xi \in T_xM^\perp$. Sendo M conexa por caminhos, tomemos uma curva diferenciável c ligando x a x_0 e consideremos η um campo normal diferenciável ao longo de c, de modo que η coincida com ξ_{x_0}.

Note que desta maneira está definido ao longo de c um campo de operadores auto-adjuntos A_η, e pelo Lema 2.11 existem n funções contínuas $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Como $H_n(x) \neq 0$ para todo $x \in M$, segue que $\lambda_i(x) \neq 0$ para todo $i = 1, ..., n$. Por outro lado, temos por hipótese que $\lambda_1(x_0), ..., \lambda_n(x_0) > 0$ e pela continuidade das funções λ_i segue que $\lambda_i(x) > 0$.

Portanto, a segunda forma fundamental é definida em todo ponto de M e as afirmações (I),(II) e (III) são equivalentes.

Para provarmos a última afirmação, inicialmente vamos mostrar que φ é um mergulho, ou seja, que φ é um homeomorfismo sobre $\varphi(M)$. Note que para isto basta mostrarmos a injetividade de φ, pois M é compacta e $\varphi(M) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é Hausdorff.

Com efeito, vamos supor $x_1, x_2 \in M$ de modo que $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$, e escolhamos um campo de vetores ξ normal e unitário em M, de maneira que A_ξ seja negativa definida.

Agora, considere a aplicação $h : M \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \langle \varphi(x) - \varphi(x_1), \xi_{x_1} \rangle$.

Note que para todo $X \in T_{x_1}M$, $X(h) = \langle X, \xi_{x_1} \rangle = 0$, e

$$XX(h) = \langle \overline{\nabla}_X X, \xi_{x_1} \rangle = \langle \alpha(X, X), \xi_{x_1} \rangle = \langle A_{\xi_{x_1}} X, X \rangle < 0,$$

pela escolha de A_ξ.

Afirmamos que x_1 é o único máximo local de h, e conseqüentemente, um máximo global.

De fato, suponha que existe $y \in M$ tal que y é um máximo local de h.

Então, para todo $Z \in T_yM$, temos $0 = Z(h) = \langle Z, \xi_{x_1} \rangle$, donde segue que $\xi_{x_1} = \pm\xi_y$.

Além disso, devemos ter $ZZ(h) = \langle A_{\xi_{x_1}} Z, Z \rangle < 0$, e assim resulta que $\xi_{x_1} = \xi_y$.

No entanto, sendo N um difeomorfismo, onde temos $N(y) = N(x_1)$, então devemos ter $x_1 = y$.

Como x_1 é um máximo global de h e $h(x_1) = h(x_2)$, então $x_1 = x_2$, e segue o resultado.

Em particular, o espaço afim $d\varphi_{x_1}(T_{x_1}M)$, com exceção de $\varphi(x_1)$, está contido na componente ilimitada de $\mathbb{R}^{n+1} - \varphi(M)$.

Visto que φ é um mergulho, devemos mostrar que $\varphi(M)$ é fronteira de um domínio convexo em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Note que $\varphi(M)$ é compacta e conexa, e pelo Teorema 2.7, $\varphi(M)$ divide $\mathbb{R}^{n+1}$ em duas componentes conexas por caminhos, cuja fronteira comum é $\varphi(M)$. Vamos denominar por $\mathcal{B}$ a componente limitada, e consideremos arbitrariamente p e q em $int\mathcal{B}$.

Sabemos que existem pontos $p = y_0, y_1, ..., y_r = q$ tais que $\overline{y_0y_1}, \overline{y_1y_2}, ..., \overline{y_{r-1}y_r}$ formam uma poligonal unindo p à q inteiramente contida em $int\mathcal{B}$, e vamos supor que $\overline{pq} \nsubseteq int\mathcal{B}$, ou seja, que $\mathcal{B}$ não é um domínio convexo.

Então, existe $1 < j \leq r$ tal que $\overline{py_i} \subset int\mathcal{B}$ com $1 \leq i \leq j-1$, mas $\overline{py_j} \nsubseteq int\mathcal{B}$.

Agora, consideremos $\beta : [0,1] \to int\mathcal{B}$ dada por $\beta(s) = sy_j + (1-s)y_{j-1}$, e definamos para todo $s \in [0,1]$, a aplicação $\alpha_s : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ por $\alpha_s(t) = t\beta(s) + (1-t)p$.

Tomemos

$$s_1 = sup\{s \in [0,1] : \alpha_s([0,1]) \cap f(M) = \emptyset\}$$

$$t_1 = inf\{t \in [0,1] : \alpha_{s_1}([0,t]) \cap f(M) \neq \emptyset\}$$

e $\alpha_{s_1}(t_1) = z_1 \in f(M)$.

Note que $\alpha_{s_1}([0,1])$ está contida no espaço afim $d\varphi_{z_1}(T_{z_1}M)$ e portanto, $\alpha_{s_1}(0) = p$ está na componente ilimitada de $\mathbb{R}^{n+1} - \varphi(M)$, o que é um absurdo.

Portanto, $\mathcal{B}$ é convexo e M é uma hipersuperfície convexa.

Seja $x_1 \in M$ e ξ_{x_1} o vetor normal unitário a $T_{x_1}M$, tal que $A_{\xi_{x_1}}$ é negativa definida. Considere a função altura $h : M \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = \langle \varphi(x) - \varphi(x_1), \xi_{x_1} \rangle$. Por um argumento idêntico ao que foi usado nesta demonstração, temos que x_1 é o único máximo global de h. Mas isso equivale a dizer que $d\varphi_x(T_xM) \cap \varphi(M) = \varphi(x)$ para todo $x \in M$ e portanto φ é estritamente convexa. ■

Teorema 2.14 *(Hsiung) Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície estritamente convexa tal que para algum r, $1 \leq r \leq n$, a r-ésima curvatura média H_r é constante. Então M^n é uma esfera.*

Demonstração: A demonstração deste resultado pode ser consultada em [10].

Corolário 2.15 *Seja $\varphi : M^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície conexa, compacta e mergulhada com curvatura de Gauss-Kronecker H_n constante. Então M^n é uma esfera.*

De acordo com este resultado e pelo Teorema de Hadamard podemos concluir que a esfera é a única hipersuperfície compacta e conexa com curvatura de Gauss-Kronecker H_n constante no espaço euclidiano.

Para concluir, enunciamos uma proposição que será útil no decorrer do trabalho.

Proposição 2.16 *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma imersão umbílica, onde M é conexa. Então $\varphi(M)$ é um conjunto aberto de um hiperplano afim ou uma esfera.*

Uma demonstração deste resultado pode ser consultada em [5].

Observe que se acrescentarmos a hipótese de que M é compacta na proposição anterior resulta que M deve ser uma esfera.

Capítulo 3

Equações da Análise Geométrica

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados que serão utilizados na demonstração do *Teorema de Aleksandrov* [1] e do *Teorema de Ros* [15]. Estes resultados estão distribuídos em quatro seções do seguinte modo: Na primeira seção, apresentamos o *Teorema da divergência.* Como corolário, obtemos uma fórmula para o volume da região limitada por uma hipersuperfície compacta. A segunda seção é dedicada à demonstração da *Primeira e Segunda Fórmula de Minkowski.* Na terceira seção apresentamos o *Teorema de Lichnerowicz* e por fim, na quarta seção apresentamos a *Fórmula de Reilly* [14], a qual é determinante na solução do Teorema de Ros.

Tendo em vista que estamos tratando de imersões é necessário fixarmos algumas notações importantes.

Dada uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ vamos denotar por ∇ e $\overline{\nabla}$ a conexão riemanniana de M e $\mathbb{R}^{n+1}$, respectivamente.

Do mesmo modo, denotaremos a diferencial covariante de uma função (ou gradiente) definida em M por ∇ e para uma função definida em $\mathbb{R}^{n+1}$ por $\overline{\nabla}$. Nestas condições, também será denotado por ∇^2 e $\overline{\nabla}^2$ o hessiano e por Δ e $\overline{\Delta}$ o laplaciano de uma função. O gradiente ∇f de uma função diferenciável f denotará tanto a 1-forma como o campo de vetores identificado a ∇f, e o significado de ∇f ficará claro no contexto.

Seja F uma função diferenciável definida sobre um aberto $U \subset \mathbb{R}^{n+1}$ e $M \subset U$ uma hipersuperfície de $\mathbb{R}^{n+1}$. Associe a $p \in M$, uma base ortonormal $\{e_1, ..., e_n, N\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, de modo que N seja normal a M em p. Se considerarmos $f = F|_M$, então veja que $f \in \mathcal{D}(M)$ e ∇f coincide com a componente tangencial do campo $\overline{\nabla} F$, ou seja, para cada ponto $p \in M$ temos

$$\nabla f(p) = \overline{\nabla} F(p) - \langle \overline{\nabla} F(p), N(p) \rangle N(p), \tag{3.1}$$

e assim pela equação (1.3) para quaisquer $X, Y \in T_pM$, obtemos

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle \overline{\nabla}_X \nabla f, Y \rangle = \langle \overline{\nabla}_X \overline{\nabla} F, Y \rangle - \langle \overline{\nabla}_X \langle \overline{\nabla} F, N \rangle N, Y \rangle =$$

$$\overline{\nabla}^2 F(X,Y) - \langle X(\langle \overline{\nabla} F, N \rangle) N + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \overline{\nabla}_X N, Y \rangle = \overline{\nabla}^2 F(X,Y) + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \langle A_N(X), Y \rangle. \tag{3.2}$$

Além disso, ao considerarmos $\{e_1, ..., e_n\}$ direções principais associadas às curvaturas principais $\lambda_1, ..., \lambda_n$ em T_pM, $\forall p \in M$, obtemos: $\overline{\Delta} F = \sum_i \overline{\nabla}^2 F(e_i, e_i) + \overline{\nabla}^2 F(N,N)$ e por (3.2) resulta que $\overline{\Delta} F = \sum_i (\nabla^2 f(e_i, e_i) - \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \langle A_N(e_i), e_i \rangle) + \overline{\nabla}^2 F(N,N) = \Delta f - \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \sum_i \lambda_i + \overline{\nabla}^2 F(N,N)$. Ou seja,

$$\overline{\Delta} F = \Delta f - nH \langle \overline{\nabla} F, N \rangle + \overline{\nabla}^2 F(N,N). \tag{3.3}$$

A seguir, vamos apresentar dois exemplos importantes que ilustram esta situação.

Exemplo 3.1 *Consideremos $F : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \frac{1}{2}\|x - c\|^2$, para um certo ponto fixo c em $\mathbb{R}^{n+1}$.*

Note que $\overline{\nabla} F = x - c$ e $\overline{\nabla}^2 F(w,v) = \langle \overline{\nabla}_w (x - c), v \rangle = \langle w, v \rangle$, $\forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $v, w \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Suponha uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ e considere $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = F|_M = \frac{1}{2}\|x - c\|^2$.

Veja que por (3.1) e (3.2) obtemos:

$$\nabla f = (x - c) - \langle x - c, N \rangle N = (x - c)^\top \tag{3.4}$$

e

$$\nabla^2 f(X,Y) = \langle X,Y\rangle + \langle A_N(X),Y\rangle\langle x-c,N\rangle, \forall X,Y \in T_pM. \tag{3.5}$$

Exemplo 3.2 *Seja* Π *um hiperplano afim de* $\mathbb{R}^{n+1}$ *que passa por um ponto* $c \in \mathbb{R}^{n+1}$*, cuja direção normal é determinada pelo vetor unitário* $\overrightarrow{n} \in \mathbb{R}^{n+1}$*.*

Considere a função $h : M \to \mathbb{R}$ *dada por* $h(p) = \langle p-c, \overrightarrow{n}\rangle$*,* $\forall p \in M$*.*

Observe que $h \in \mathcal{D}(M)$ *é a restrição à* M *da função* $H \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$ *dada por* $H(x) = \langle x-c, \overrightarrow{n}\rangle$*.*

Note que $\overline{\nabla} H = \overrightarrow{n}$ *e* $\overline{\nabla}^2 H(v,v) = 0$*,* $\forall v \in \mathbb{R}^{n+1}$*.*

Assim,

$$\nabla h = \overrightarrow{n} - \langle \overrightarrow{n}, N\rangle N$$

e

$$\nabla^2 h(X,Y) = \langle A_N(X),Y\rangle\langle \overrightarrow{n},N\rangle, \forall X,Y \in T_pM.$$

3.1 O Teorema da divergência

Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta. Ω será a região limitada cuja fronteira é M. Denotaremos o volume de Ω por V e o volume de M por A. O elemento de volume de $\mathbb{R}^{n+1}$ será denotado por dV e o elemento de volume de M será denotado por dA.

Teorema 3.3 *(Teorema da Divergência) Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *um domínio compacto e consideremos* $M = \partial\Omega$ *a hipersuperfície compacta formada pela fronteira de* Ω*. Se* $Z : \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ *é um campo de vetores diferenciável sobre* Ω *e* N *o campo normal unitário interior de* M*, então*

$$\int_\Omega divZ dV = -\int_M \langle Z,N\rangle dA.$$

Teorema 3.4 *Sejam* $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície compacta orientada e* $X \in \mathcal{X}(M)$. *Então*

$$\int_M divXdA = 0.$$

Em particular, $\int_M \Delta f dA = 0$, *para toda função* $f \in \mathcal{D}(M)$.

Como uma aplicação do Teorema (3.3) apresentamos o seguinte lema.

Lema 3.5 *Seja* $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície compacta orientável tal que* $M = \partial\Omega$. *Então, para qualquer ponto fixo* $x_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, *temos*

$$V = -\frac{1}{n+1}\int_M \langle x - x_0, N\rangle dA, \tag{3.6}$$

onde $x \in M$ *e* N *é o campo normal unitário interior de* M.

Demonstração: Consideremos o campo de vetores Z em Ω dado por $Z(x) = x - x_0$ e $\forall x \in \Omega$. Temos que $divZ = n + 1$.

Então, por (3.3) obtemos

$$\int_\Omega divZdV = (n+1)V = -\int_M \langle x - x_0, N\rangle dA.$$

3.2 Primeira e Segunda Fórmula de Minkowski

Agora, podemos apresentar o seguinte Teorema.

Teorema 3.6 *Seja* $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ *uma hipersuperfície mergulhada, compacta e orientada. Então*

$$(I)\int_M (1 + H\langle \varphi, N\rangle)dA = 0 \tag{3.7}$$

e

$$(II)\int_M n(n-1)H + S\langle \varphi, N\rangle dA = 0, \tag{3.8}$$

onde H *é a curvatura média de* φ *e* S *é a curvatura escalar de* M.

Referimo-nos a (3.7) *e* (3.8) *como a Primeira e Segunda Fórmula de Minkowski, respectivamente.*

Demonstração: Vamos considerar $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(p) = \frac{1}{2}\|\varphi(p)\|^2$ e uma base de direções principais $\{e_i\}_p$ em T_pM. Então, pelo Exemplo 3.1 e da igualdade (3.2) temos por que

$$\nabla^2 f(e_i, e_i) = \langle e_i, e_i\rangle - \langle dN_p(e_i), e_i\rangle\langle\varphi, N\rangle = 1 + \alpha(e_i, e_i)\langle\varphi, N\rangle.$$

Assim,

$$\Delta f = \sum_i (1 + \alpha(e_i, e_i)\langle\varphi, N\rangle) = n + \sum_i \alpha(e_i, e_i)\langle\varphi, N\rangle =$$
$$= n + nH\langle\varphi, N\rangle = n(1 + H\langle\varphi, N\rangle). \tag{3.9}$$

Mas, do Teorema 3.4 resulta que

$$n\int_M (1 + H\langle\varphi, N\rangle)dA = 0,$$

e obtemos (3.7).

Para demonstrar (3.8), vamos considerar $h : M \to \mathbb{R}$ dada por $h(p) = \langle\varphi(p), N(p)\rangle$, e note que para todo $p \in M$ e $X \in T_pM$, temos

$$X(h) = \langle X, N\rangle + \langle\varphi, dN_p(X)\rangle = \langle(\varphi)^\top, -A_{N_p}(X)\rangle = -\langle A_{N_p}(\varphi)^\top, X\rangle.$$

Logo, $\nabla h = -A_{N_p}((\varphi)^\top)$. Mas pela igualdade (3.4) e como podemos identificar $\varphi(p) \in \mathbb{R}^{n+1}$ com $(x - c)$ por meio de translação, veja que $\nabla f = \varphi^\top$, donde segue que

$$\nabla h = -A_{N_p}(\nabla f),\ \forall p \in M.$$

Assim, dado $X \in T_pM$, obtemos

$$\nabla_X\nabla h = \nabla_X(-A_N(\nabla f)) = -\nabla_X(A_N(\nabla f)) =$$

$$-(\nabla_X A_N)(\nabla f) - A_{N_p}(\nabla_X\nabla f) = -(\nabla_{\nabla f} A_N)(X) - A_{N_p}(\nabla_X\nabla f),$$

onde a última igualdade é garantida por (1.12).

Portanto da igualdade (1.3) e da igualdade acima resulta que

$$\nabla^2 h(X,X) = -\langle \nabla_{\nabla f} A_N(X), X\rangle - \langle A_{N_p}(\nabla_X \nabla f), X\rangle.$$

Mas, também podemos escrever

$$-\langle \nabla_{\nabla f} A_N(X), X\rangle - \langle A_{N_p}(\nabla_X \nabla f), X\rangle = -\langle \nabla_{\nabla f} A_N(X), X\rangle - \langle (\nabla_X \nabla f), A_{N_p}(X)\rangle =$$

$$= -\langle \nabla_{\nabla f} A_N(X), X\rangle - \nabla^2 f(X, A_{N_p}(X)). \tag{3.10}$$

Além disso, da expressão (3.5) temos que

$$\nabla^2 f(X, A_{N_p}(X)) = \langle X, A_{N_p}(X)\rangle + \langle A_N(X), A_N(X)\rangle h(p) =$$

$$= \langle \alpha(X,X), N\rangle + \|A_N(X)\|^2 h(p). \tag{3.11}$$

Logo, somando as igualdades (3.10) e (3.11) resulta que

$$\nabla^2 h(X,X) = -\langle \nabla_{\nabla f} A_N(X), X\rangle - \langle \alpha(X,X), N\rangle - \|A_N(X)\|^2 h. \tag{3.12}$$

Então, considerando uma base $\{e_i\}_p$ de direções principais em p, obtemos

$$\nabla^2 h(e_i, e_i) = -\langle \nabla_{\nabla f} A_N(e_i), e_i\rangle - \lambda_i - \lambda_i^2 h.$$

Logo,

$$\Delta h = tr(\nabla^2 h) = -tr(\nabla_{\nabla f} A_N) - \sum_i \lambda_i - \sum_i \lambda_i^2 h \tag{3.13}$$

e como pela Proposição 1.48

$$tr(\nabla_{\nabla f} A_N) = \nabla f(tr(A_N))$$

resulta que

$$\Delta h = -\nabla f(tr(A_N)) - \sum_i \lambda_i - \sum_i \lambda_i^2 h = -\nabla f(nH) - nH - \|\alpha\|^2 h =$$

$$-\langle \nabla f, \nabla nH\rangle - nH - \|\alpha\|^2 h.$$

Mas,

$$n^2H^2 - \|\alpha\|^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_i = S \tag{3.14}$$

devido a (1.14). Com isso, temos que

$$\Delta h = -\langle \nabla f, \nabla nH \rangle - nH - \|\alpha\|^2 h = -n\langle \nabla f, \nabla H \rangle - nH - (n^2H^2 - S)h.$$

Além disso, pela definição do operador div, temos que

$$ndiv(H\nabla f) = n\langle \nabla f, \nabla H \rangle + nH\Delta f.$$

Mas, também temos pela igualdade (3.9) que

$$nH\Delta f = n^2H(1 + H\langle \varphi, N \rangle).$$

Deste modo, resulta que

$$ndiv(H\nabla f) = n\langle \nabla f, \nabla H \rangle + n^2H(1 + H\langle \varphi, N \rangle),$$

e resulta desta igualdade e da igualdade (3.13) que

$$div(nH\nabla f) + \Delta h = n^2H + n^2H^2\langle \varphi, N \rangle - nH - n^2H\langle \varphi, N \rangle + S\langle \varphi, N \rangle =$$

$$= n(n-1)H + S\langle \varphi, N \rangle,$$

e pelo Teorema da Divergência segue que

$$\int_M n(n-1)H + S\langle \varphi, N \rangle dA = 0. \blacksquare$$

3.3 Fórmula de Lichnerowicz

A fim de demonstrarmos a Fórmula de Reilly é necessário apresentarmos o Teorema de Lichnerowicz.

Sejam X_i, $i = 1, 2, 3$ campos de vetores em uma variedade riemanniana M e $f \in \mathcal{D}(M)$. Conforme a definição de diferencial covariante de tensores, temos que

$$X_1(f) = \nabla_{X_1} f = \nabla f(X_1)$$

$$X_2X_1(f) = X_2(\nabla f(X_1)) = \nabla^2 f(X_2, X_1) + \nabla f(\nabla_{X_2} X_1)$$

e

$$X_3X_2X_1(f) = \nabla^3 f(X_3, X_2, X_1) + \nabla^2 f(\nabla_{X_3} X_2, X_1) + \nabla^2 f(X_2, \nabla_{X_3} X_1)$$

$$+\nabla^2 f(X_3, \nabla_{X_2} X_1) + \nabla f(\nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1). \tag{3.15}$$

Dados $T, S \in T^{m,s}M$, temos pela Proposição 1.48 que $\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S$.

Então,

$$\nabla^2(\nabla f \otimes \nabla f)(X_i, X_i, X_j, X_j) = \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} (\nabla f \otimes \nabla f)(X_j, X_j)$$

$$= [\nabla_{X_i}(\nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f) + \nabla_{X_i}(\nabla f \otimes \nabla_{X_i} \nabla f)](X_j, X_j)$$

$$= [\nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f + 2\nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla_{X_i} \nabla f + \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f](X_j, X_j)$$

$$= 2\nabla^2 f \otimes \nabla^2 f(X_i, X_j, X_i, X_j) + 2\nabla^3 f \otimes \nabla f(X_i, X_i, X_j, X_j). \tag{3.16}$$

Pela Definição 1.6 temos que

$$\|\nabla f\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (\nabla f(e_j))^2,$$

e

$$\Delta \|\nabla f\|^2 = div(\nabla \|\nabla f\|^2) = \sum_i (\nabla_{e_i} \nabla \|\nabla f\|^2)(e_i) = \sum_i \nabla^2(\|\nabla f\|^2)(e_i, e_i)$$

$$= \sum_{i,j} \nabla^2(\nabla f \otimes \nabla f)(e_i, e_i, e_j, e_j), \forall f \in \mathcal{D}(M). \tag{3.17}$$

onde $(e_1, ..., e_n)$ é uma base ortonormal de T_pM.

Com isso, apresentamos o próximo resultado.

Teorema 3.7 *(Fórmula de Lichnerowicz) Seja M uma variedade riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. Então,*

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f).$$

Demonstração: Para cada $p \in M$ vamos considerar o referencial geodésico $\{E_1, ..., E_n\}$ ortonormal definido em uma vizinhança U de p. Assim, de (3.17) e (3.16) obtemos que

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\nabla^2 f\|^2 + \sum_{i,j} \nabla^3 f(E_i, E_i, E_j).\nabla f(E_j)$$

$$= \|\nabla^2 f\|^2 + \sum_{i,j} \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i).\nabla f(E_j) + (\nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i))\nabla f(E_j). \tag{3.18}$$

Primeiramente observe que

$$\nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) = (\nabla_{E_i}\nabla^2 f)(E_i, E_j)$$

$$= E_i(\nabla^2 f(E_i, E_j)) + \nabla^2 f(\nabla_{E_i} E_i, E_j) + \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_i} E_j)$$

$$= E_i(\nabla^2 f(E_i, E_j)) = E_i(\nabla^2 f(E_j, E_i))$$

pela simetria de $\nabla^2 f$ e o fato de $(E_1, ..., E_n)$ ser um referencial geodésico ortonormal. Analogamente obtemos $\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) = E_i(\nabla^2 f(E_j, E_i))$ e portanto

$$\nabla f(E_i, E_i, E_j) = \nabla^3 f(E_i, E_j, E_i). \tag{3.19}$$

Além disso, note que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i)\nabla f(E_j) = \sum_{i,j=1}^{n} (\nabla_{E_j}\nabla^2 f)(E_i, E_i)\nabla f(E_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E_j(\nabla^2 f(E_i, E_i)).\nabla f(E_j) - \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_i, E_i)\nabla f(E_j) - \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_i).\nabla f(E_j)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} E_j(\nabla^2 f(E_i, E_i)).\nabla f(E_j)$$

pois $\nabla_{E_j} E_i = 0$. Com isso, temos que

$$\sum_{i,j=1}^{n} \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) \nabla f(E_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \nabla_{E_j}(\Delta f).\nabla f(E_j) = \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle. \tag{3.20}$$

Substituindo (3.19) e (3.20) em (3.18) temos que

$$\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle$$

$$+ \sum_{i,j} (\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i)) \nabla f(E_j). \tag{3.21}$$

Agora, usando (3.15), temos que

$$\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) = E_i E_j E_i(f) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} E_j, E_i) - \nabla^2 f(E_j, \nabla_{E_i} E_i)$$

$$-\nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_i) - \nabla f(\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i) = E_i E_j E_i(f) - \nabla f(\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i). \tag{3.22}$$

Analogamente, temos que

$$\nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) = E_j E_i E_i(f) - \nabla f(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i). \tag{3.23}$$

Substituindo (3.22) e (3.23) em (3.21), temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Delta(\|\nabla f\|^2) &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j} [E_i, E_j] E_i(f).\nabla f(E_j) \\
&+ \sum_{i,j} \nabla f(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i).\nabla f(E_j) \\
&= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j} \nabla f(R(E_j, E_i) E_i) \nabla f(E_j) \\
&= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j} \langle R(E_j, E_i) E_i), \nabla f \rangle \nabla f(E_j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j} \langle R(\nabla f(E_j) E_j, E_i) E_i, \nabla f \rangle \\
&= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f)
\end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.■

3.4 Fórmula de Reilly

Teorema 3.8 *(Fórmula de Reilly) Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientável e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio compacto limitado por M, ou seja, $\partial\Omega = M$. Consideremos em M a orientação dada pelo campo normal unitário interior N. Então, para qualquer função diferenciável $F : \Omega \to \mathbb{R}$, temos que*

$$\int_\Omega (\overline{\Delta}F)^2 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2 dV = \int_M (nH\langle \overline{\nabla}F, N\rangle - 2\Delta f)\langle \overline{\nabla}F, N\rangle dA + \int_M \langle A_N(\nabla f), \nabla f\rangle dA,$$

onde $f \in \mathcal{D}(M)$ é a restrição de F à M.

Demonstração: Consideremos o campo de vetores sobre Ω dado por

$$Z(x) = \overline{\Delta}F(x)\overline{\nabla}F(x) - \frac{1}{2}\overline{\nabla}\|\overline{\nabla}F\|^2(x), \forall x \in \Omega.$$

Então, tomando a base canônica $\{e_1, ..., e_{n+1}\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, temos que

$$divZ = \sum_{i=1}^{n+1}\langle \overline{\nabla}_{e_i}Z, e_i\rangle = \langle \overline{\nabla}F, \overline{\nabla}(\overline{\Delta}F)\rangle + (\overline{\Delta}F)^2 - \frac{1}{2}\overline{\Delta}\|\overline{\nabla}F\|^2 = (\overline{\Delta}F)^2 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2$$

devido à Fórmula de Lichnerowicz. Pelo Teorema da Divergência resulta que

$$\int_\Omega (\overline{\Delta}F)^2 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2 dV = -\int_M \langle Z, N\rangle dA. \tag{3.24}$$

Assim, calculando $\langle Z, N\rangle$ nos pontos $p \in M$, temos:

$$\langle Z(p), N(p)\rangle = \langle \overline{\Delta}F(p)\overline{\nabla}F(p), N(p)\rangle - \frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}\|\overline{\nabla}F\|^2(p), N(p)\rangle =$$

$$= \overline{\Delta}F(p)\langle \overline{\nabla}F, N\rangle(p) - \frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}\|\overline{\nabla}F\|^2(p), N(p)\rangle. \tag{3.25}$$

Além disso, fazendo as devidas identificações temos que

$$\langle \overline{\nabla}\|\overline{\nabla}F\|^2, N\rangle = \overline{\nabla}_N\|F\|^2 = \overline{\nabla}_N\langle \overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F\rangle = 2\langle \overline{\nabla}_N\overline{\nabla}F, \overline{\nabla}F\rangle = 2\overline{\nabla}^2 F(N, \overline{\nabla}F).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\langle \overline{\nabla}\|\overline{\nabla}F\|^2, N\rangle = \overline{\nabla}^2 F(N, \overline{\nabla}F) = \overline{\nabla}^2 F(N, \nabla f) + \overline{\nabla}^2 F(N, \langle \nabla F, N\rangle N) =$$

$$\overline{\nabla}^2 F(N, \nabla f) + \langle \nabla F, N\rangle \overline{\nabla}^2 F(N, N). \tag{3.26}$$

Agora, para todo $p \in M$ e $X \in T_pM$, temos que

$$\overline{\nabla}^2 F(X, N) = \langle \nabla_X \overline{\nabla} F, N\rangle = X\langle \overline{\nabla} F, N\rangle - \langle \overline{\nabla} F, \nabla_X N\rangle =$$

$$= X\langle \overline{\nabla} F, N\rangle - (\langle \nabla f, \nabla_X N\rangle + \langle \langle \overline{\nabla} F, N\rangle N, A_N X\rangle) =$$

$$= X(\langle \overline{\nabla} F, N\rangle) + \langle \nabla f, A_N(X)\rangle = \langle \nabla \langle \overline{\nabla} F, N\rangle, X\rangle + \langle \nabla f, A_N(X)\rangle.$$

Em particular, se $X = \nabla f$ temos que

$$\overline{\nabla}^2 F(\nabla f, N) = \langle \overline{\nabla}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle, \nabla f\rangle + \langle \nabla f, A_N(\nabla f)\rangle. \tag{3.27}$$

Portanto, substituindo (3.3) e (3.26) em (3.25) segue que

$$\langle Z, N\rangle = \langle (\Delta f - nH\langle \overline{\nabla} F, N\rangle + \overline{\nabla}^2 F(N, N))\overline{\nabla} F, N\rangle$$

$$-[(\overline{\nabla}^2 F(N, \nabla f)) + \langle \overline{\nabla} F, N\rangle . \overline{\nabla}^2 F(N, N)] = \langle \Delta f \overline{\nabla} F, N\rangle$$

$$-\langle nH\langle \overline{\nabla} F, N\rangle \overline{\nabla} F, N\rangle + \langle \overline{\nabla}^2 F(N, N)\overline{\nabla} F, N\rangle - \overline{\nabla}^2 F(N, \nabla f) - \langle \overline{\nabla} F, N\rangle . \overline{\nabla}^2 F(N, N) =$$

$$= \Delta f\langle \overline{\nabla} F, N\rangle - nH\langle \overline{\nabla} F, N\rangle^2 - \langle A_N(\nabla f), \nabla f\rangle - \langle \overline{\nabla}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle, \nabla f\rangle.$$

Logo, (3.24) pode ser escrita como:

$$\int_\Omega (\overline{\Delta} F)^2 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2 dV$$

$$= \int_M \langle \overline{\nabla}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle \nabla f\rangle dA + \int_M (-\Delta f\langle \overline{\nabla} F, N\rangle + nH\langle \overline{\nabla} F, N\rangle^2) dA + \int_M \langle A_N(\nabla f), \nabla f\rangle dA. \tag{3.28}$$

Por outro lado, note que

$$div(\langle \overline{\nabla} F, N\rangle \nabla f) = \sum_i (\overline{\nabla} e_i \langle \overline{\nabla} F, N\rangle \nabla f)(e_i) = \sum_i \overline{\nabla}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle (e_i). \nabla f(e_i)$$

$$+\langle \overline{\nabla} F, N\rangle \nabla^2 f(e_i, e_i) = \sum_i \langle \overline{\nabla}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle, e_i\rangle \nabla f(e_i) + \langle \overline{\nabla} F, N\rangle \Delta f =$$

$$\langle \overline{\nabla} \langle \overline{\nabla} F, N \rangle, \nabla f \rangle + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \Delta f.$$

E pelo Corolário 3.4 temos que

$$\int_M \langle \overline{\nabla} \langle \overline{\nabla} F, N \rangle, \nabla f \rangle + \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \Delta f dA = 0,$$

ou seja,

$$\int_M \langle \overline{\nabla} \langle \overline{\nabla} F, N \rangle, \nabla f \rangle dA = -\int_M \langle \overline{\nabla} F, N \rangle \Delta f dA,$$

que substituindo em (3.28) fica

$$\int_\Omega (\overline{\Delta} F)^2 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2 dV = \int_M (nH \langle \overline{\nabla} F, N \rangle - 2\Delta f) \langle \overline{\nabla} F, N \rangle dA + \int_M \langle A_N(\nabla f), \nabla f \rangle dA$$

e assim, obtemos o resultado. ■

A seguir apresentaremos um resultado no qual aplicamos a Fórmula de Reilly em sua demonstração. Este resultado nos auxiliará na demonstração do Teorema de Aleksandrov.

Antes, precisamos do seguinte teorema.

Teorema 3.9 *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta tal que Ω é o domínio compacto limitado por M. Então, existe uma única função diferenciável $F : \Omega \to \mathbb{R}$ que é a solução do seguinte problema de Dirichlet: $\overline{\Delta} F = 1$ em Ω e $f = F|_M = 0$ em $M = \partial\Omega$.*

Demonstração: Uma demonstração deste resultado pode ser consultada em [7].

Teorema 3.10 *Seja $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta orientável e $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o domínio compacto limitado por M e consideremos sobre M a orientação dada pelo campo normal unitário interior N. Então, se a curvatura média H de φ é não nula em todo ponto $x \in M$, temos*

$$V \leq \frac{1}{n+1} \int_M \frac{1}{H} dA,$$

onde a igualdade é válida se e somente se M é uma esfera n-dimensional.

Demonstração: Pela Proposição 2.8 existe $x_0 \in M$ e $\xi \in T_{x_0}M^{\perp}$ tal que A_ξ é positiva definida. Decorre daí que $H(x_0) > 0$, e como H não se anula, pela conexidade de M devemos ter $H(x) > 0$ para todo $x \in M$.

Agora, seja $F : \Omega \to \mathbb{R}$ a solução do problema de Dirichlet dada pelo Lema 3.9, e considerando $f = F|_M$ temos $\nabla f(x) = 0$ e $\Delta f(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Deste modo, da fórmula de Reilly obtemos

$$\int_\Omega (1 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2) dV = n \int_M H \langle \overline{\nabla} F, N \rangle^2 dA. \tag{3.29}$$

Seja $(e_1, ..., e_{n+1})$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Note que

$$\begin{aligned}(\overline{\Delta} F)^2 &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \overline{\nabla}^2 F(e_i, e_i) \right)^2 \leq (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} (\overline{\nabla}^2 F(e_i, e_i)^2 \\ &\leq (n+1) \sum_{i,j=1}^{n+1} (\overline{\nabla}^2 F(e_i, e_j))^2 = (n+1) \|\overline{\nabla}^2 F\|^2 \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde a segunda relação é a desigualdade de Cauchy-Schwarz. A igualdade vale nessa relação se e somente se $\overline{\nabla}^2 F(e_k, e_k) = \overline{\nabla}^2 F(e_l, e_l)$ para todo par de índices k e l. A terceira relação de (3.30) é uma igualdade se e somente se $\overline{\nabla}^2 F(e_i, e_j) = 0$ para todo $i \neq j$. Portanto $(\overline{\Delta} F)^2 \leq (n+1)\|\overline{\nabla}^2 F\|^2$, e a igualdade vale em algum $x \in \Omega$ se e somente se existe um escalar $\lambda(x)$ tal que $\overline{\nabla}^2 F(.,.) = \lambda(x)\langle .,. \rangle$. Mas $\overline{\Delta} F = 1$ implica que $\lambda(x)$ deve ser $\frac{1}{n+1}$. Daí temos que

$$\|\overline{\nabla}^2 F\|^2 \geq \frac{1}{n+1}, \tag{3.31}$$

onde a igualdade é válida em algum $x \in \Omega$ se e somente se $\overline{\nabla}^2 F(.,.) = \frac{1}{n+1}\langle .,. \rangle$ neste ponto.

Assim, substituindo (3.31) em (3.29) resulta que

$$n \int_M H \langle \overline{\nabla} F, N \rangle^2 dA = \int_\Omega (1 - \|\overline{\nabla}^2 F\|^2) dV \leq \frac{n}{n+1} \int_\Omega dV,$$

isto é,

$$\int_M H \langle \overline{\nabla} F, N \rangle^2 dA \leq \frac{1}{n+1} V. \tag{3.32}$$

Por outro lado, pelo Teorema 3.3 segue que $V = \int_\Omega \overline{\Delta} F dV = -\int_M \langle \overline{\nabla} F, N\rangle dA$, e com isso aplicando a desigualdade de Schwarz em (3.32) temos que

$$V^2 = \left(\int_M \langle \overline{\nabla} F, N\rangle dA\right)^2 = \left(\int_M (\sqrt{H}\langle \overline{\nabla} F, N\rangle)\frac{1}{\sqrt{H}} dA\right)^2 \leq$$
$$\leq \int_M H\langle \overline{\nabla} F, N\rangle^2 dA \int_M \frac{1}{H} dA \leq \frac{V}{n+1}\int_M \frac{1}{H} dA,$$

ou seja,

$$V \leq \frac{1}{n+1}\int_M \frac{1}{H} dA. \tag{3.33}$$

Observe que (3.33) é uma igualdade se e somente se (3.32) é uma igualdade. Mas, (3.32) é uma igualdade se e somente se (3.31) o for, ou seja, se para todo $x \in \Omega$ a função F satisfaz a igualdade $\overline{\nabla}^2 F(.,.) = \frac{1}{n+1}\langle .,.\rangle$.

Em outras palavras, se e somente F é a solução do seguinte sistema de equações de derivadas parciais: $\frac{\partial^2 F}{\partial_{x_i}\partial_{x_j}} = 0$, quando $i \neq j$ e $\frac{\partial^2 F}{\partial_{x_i^2}} = \frac{1}{n+1}$, para $i, j = 1, ..., n+1$.

Observe que ao integrarmos explicitamente resulta que

$$F(x) = \frac{1}{2n+2}\|x\|^2 + \langle y, x\rangle + b,$$

onde $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $b \in \mathbb{R}$. Mas, completando quadrados podemos escrever F da seguinte maneira:

$$F(x) = \frac{1}{2n+2}\|x + (n+1)y\|^2 + b - \frac{n+1}{2}\|y\|^2.$$

Agora, note que 0 é um valor regular de F, e pelo Teorema 1.27 $F^{-1}(0)$ é uma subvariedade de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensão n.

Sendo assim, como $M = F^{-1}(0) \neq \emptyset$ devemos ter $b - \frac{n+1}{2}\|y\|^2 < 0$. Com isso, segue que M é uma esfera de centro $-(n+1)y$ e raio $r = \sqrt{(n+1)^2\|y\|^2 - (2n+2)b}$, como queríamos. ■

Capítulo 4

Hipersuperfícies compactas de curvatura constante

Neste capítulo apresentamos os resultados principais deste trabalho.

Já concluímos que o Teorema de Hadamard nos leva ao seguinte resultado: se $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície compacta com curvatura de Gauss-Kronecker K (n-ésima curvatura média) constante, então M deve ser uma esfera.

Temos agora o objetivo de mostrar que se $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ tem a curvatura média ou a curvatura escalar constante, obtemos o mesmo resultado.

O caso de H ser constante é demonstrado por Aleksandrov [1]. Já o caso em que S é constante foi provado por Ros [15] utilizando a Fórmula de Reilly, esta última desenvolvida no artigo [14].

4.1 Teorema de Aleksandrov

Teorema 4.1 *(Teorema de Aleksandrov) Seja uma hipersuperfície $\varphi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ conexa, compacta e mergulhada com curvatura média H constante. Então, M deve ser uma esfera n-dimensional de raio $r = \frac{1}{H}$.*

Demonstração: Já temos pela Proposição 2.8 que H deve ser uma constante positiva se tomamos a orientação do campo normal unitário interior N em M.

Deste modo, pelo Teorema 3.10 temos que $V \leq \frac{1}{(n+1)H}\int_M dA = \frac{A}{(n+1)H}$, ou seja,

$$A \geq (n+1)HV \tag{4.1}$$

e a igualdade é válida se e somente se M é uma esfera de raio $r = \frac{1}{H}$.

Mas, veja que pela 1ª fórmula de Minkowski obtemos

$$0 = \int_M (1 + H\langle \varphi, N\rangle)dA = A + H\int_M \langle \varphi, N\rangle dA,$$

isto é,

$$A = -H\int_M \langle \varphi, N\rangle dA.$$

Considerando $x_0 = 0$ no Lema 3.5 e lembrando que identificamos x com $\varphi(x)$, segue que $A = (n+1)HV$, e temos a igualdade em (4.1).

Portanto, M é uma esfera de raio $r = \frac{1}{H}$. ■

4.2 Teorema de Ros

A aplicação $dN_p : T_pM \to T_pM$ é um operador linear auto-adjunto. Então existe uma base ortonormal de T_pM formada por autovetores que diagonaliza a matriz $[dN_p]$. Desde já vamos considerar $\{e_i\}_p$ como sendo a referida base.

Considerando α a segunda forma fundamental de φ, temos que $\|\alpha\|^2 = \sum_{ij}\alpha(e_i, e_j)^2$, e então, pela fórmula (3.14), temos que

$$S = n^2H^2 - \|\alpha\|^2.$$

Afirmamos que

$$n^2\sum_{i\neq j}\lambda_i\lambda_j \leq n(n-1)\left(\sum_i \lambda_i\right)^2, \tag{4.2}$$

onde a igualdade é válida se e somente se $\lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j = 1, ..., n$, ou seja, em pontos umbílicos de M.

De fato, temos que

$$\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n)^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 + \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j$$

$$\leq \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 + \sum_{i \neq j} \frac{\lambda_i^2 + \lambda_j^2}{2} = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + ... + \lambda_n^2 + \sum_{i=1}^{n} (n-1)\lambda_i^2$$

$$= n\left(\sum_i^n \lambda_i^2\right)$$

e note que teremos a igualdade se e somente se $\lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j = 1, ..., n$.

Assim,

$$n\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 \leq n^2 \left(\sum_i \lambda_i^2\right)$$

e conseqüentemente

$$-n^2\left(\sum_i \lambda_i^2\right) \leq -n\left(\sum_i \lambda_i\right)^2.$$

Agora, somando $n^2 \left(\sum_i \lambda_i\right)^2$ a ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$n^2 \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j \leq n(n-1)\left(\sum_i \lambda_i\right)^2,$$

e a igualdade é válida se e somente se $\lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j = 1, ..., n$, ou seja, nos pontos umbílicos de M, como queríamos.

Então, veja que de (4.2) obtemos:

$$n^2 S = n^2 \left(\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j\right) \leq n(n-1) \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = n^2 \left(\sum_i \lambda_i\right)^2 - n\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 =$$

$$= n^2[n^2H^2 - nH^2] = n^2(n(n-1)H^2),$$

onde a igualdade é válida se e somente se $\lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j = 1, ..., n$.

Portanto,

$$S \leq n(n-1)H^2, \tag{4.3}$$

e note que se tivermos $\lambda_i = \lambda_j$, $\forall i, j = 1, ..., n$, então vale a igualdade $\left(\sum_i \lambda_i\right)^2 = n\left(\sum_i \lambda_i^2\right) \Rightarrow n^2H^2 = n\|\alpha\|^2 \Rightarrow \|\alpha\|^2 = nH^2$, e então teremos $S = n^2H^2 - nH^2 = n(n-1)H^2$, ou seja, a igualdade é válida somente em pontos umbílicos de M.

A seguir apresentamos um dos resultados principais de nosso trabalho.

Teorema 4.2 *(Ros) Seja M uma hipersuperfície conexa e compacta mergulhada em $\mathbb{R}^{n+1}$. Se a curvatura escalar S de M é constante, então M é uma esfera.*

Demonstração: Por hipótese, M é compacta e então existe $p_0 \in M$ e $\xi \in T_{p_0}M^{\perp}$ tal que A_ξ é positiva definida. Assim, S deve ser uma constante positiva. Além disso, devemos ter H positiva em $p_0 \in M$. Mais ainda, por (4.3) temos que H não se anula, e sendo M conexa, podemos concluir que H é positiva em todo ponto $p \in M$.

Assim, podemos escrever (4.3) do seguinte modo:

$$\sqrt{S} \leq \sqrt{n(n-1)}H, \tag{4.4}$$

e se integrarmos em M, obtemos $\sqrt{S}A \leq \sqrt{n(n-1)} \int_M HdA$, ou ainda,

$$SA^2 \leq n(n-1)\left(\int_M HdA\right)^2. \tag{4.5}$$

Novamente, temos que a igualdade é válida se e somente se, todos os pontos de M são umbílicos.

Sendo S constante, do Teorema 3.6 e da igualdade em (3.6) resulta que

$$0 = n(n-1)\int_M HdA + \int_M S\langle\varphi, N\rangle dA = n(n-1)\int_M HdA + S\int_M \langle\varphi, N\rangle dA =$$

$$= n(n-1)\int_M HdA - (n+1)SV,$$

isto é,

$$\int_M HdA = \frac{(n+1)SV}{n(n-1)}. \tag{4.6}$$

Agora, considerando (4.5) e (4.6) obtemos

$$SA^2 \leq n(n-1)\left[\frac{(n+1)SV}{n(n-1)}\right]^2 = \frac{(n+1)^2S^2V^2}{n(n-1)},$$

ou ainda,

$$A^2 \leq SV^2\frac{(n+1)^2}{n(n-1)} \Rightarrow \frac{A^2}{V^2} \leq S\frac{(n+1)^2}{n(n-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{A^2}{V^2} \leq S. \tag{4.7}$$

Além disso, teremos a igualdade se e somente se M é uma esfera em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Nosso objetivo agora é mostrar que também é válida a desigualdade contrária.

De fato, sabemos pelo Teorema 3.9 que existe uma única função diferenciável $F : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que F é a solução do seguinte problema de Dirichlet: $\overline{\Delta}F = 1$ em Ω e $f = F|_M = 0$ em $M = \partial\Omega$.

Do Teorema 3.3 temos que

$$V = \int_\Omega \overline{\Delta}F dV = -\int_M \langle\overline{\nabla}F, N\rangle dA, \tag{4.8}$$

e pela desigualdade (3.30) sabemos que $(\overline{\Delta}F)^2 \leq (n+1)\|\overline{\nabla}^2F\|^2$. Assim, pela Fórmula de Reilly obtemos

$$\int_M nH\langle\overline{\nabla}F, N\rangle^2 dA = \int_\Omega (\overline{\Delta}F)^2 - \|\overline{\nabla}^2F\|^2 dV \leq$$

$$\leq \int_\Omega (\overline{\Delta}F)^2 - \frac{(\overline{\Delta}F)^2}{(n+1)} dV = \frac{n}{n+1}V,$$

ou seja,

$$\int_M H\langle\overline{\nabla}F, N\rangle^2 dA \leq \frac{V}{n+1}. \tag{4.9}$$

Agora, note que por (4.4), (4.8) e da desigualdade de Schwarz temos

$$\int_M H\langle\overline{\nabla}F, N\rangle^2 dA \geq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n(n-1)}}\int_M \langle\overline{\nabla}F, N\rangle^2 dA \geq$$

$$\geq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n(n-1)}A}\left(\int_M \langle \overline{\nabla} F, N\rangle dA\right)^2 = \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n}(n-1)A}V^2.$$

Com isso, de (4.9) obtemos

$$\frac{V}{n+1} \geq \frac{\sqrt{S}}{\sqrt{n(n-1)}}\frac{V^2}{A},$$

ou ainda,

$$\frac{V^2}{(n+1)^2} \geq \frac{S}{n(n-1)}\frac{V^4}{A^2} \Rightarrow S \leq \frac{n(n-1)}{(n+1)^2}\frac{A^2}{V^2},$$

e obtemos a igualdade em (4.7), como queríamos. ■

Bibliografia

[1] A. D. Aleksandrov, *Uniqueness theorems for surfaces in the large*. Vestnik Leningrad Univ. Math. **13** (1958), 5-8.

[2] L. J. Alías, Análisis Geométrico y Geometría Global de Superfícies: Una Introducción Elemental, XIV Escola de Geometria Diferencial, IMPA, 2006.

[3] M. P. do Carmo, Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, 1988.

[4] F. U. Coelho e M. L. Lourenço, Um Curso de Álgebra Linear, EDUSP, 2001.

[5] M. Dajczer, Submanifolds and Isometric Immersions, Baseado em notas preparadas por Maurício Antonucci, Gilvan Oliveira, Paulo Lima Filho e Ruy Tojeiro, Publish or Perish, Houston, 1990.

[6] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, Modern Geometry, Methods and Applications, Graduate Texts in Mathematics, 93, Springer-Verlag, 1984.

[7] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, 2001.

[8] V. Guillermin, A. Pollack, Differential Topology, Prentice Hall, 1974.

[9] K. Hoffman, R. Kunze, Álgebra Linear, Livros Técnicos e Científicos, 1971.

[10] C. C. Hsiung, *Some integral formulas for closed hypersurfaces*. Math. Scand.2 **3** (1954), 286-294.

[11] E. L. Lima, Curso de Análise, Volume II, IMPA, 1981.

[12] E. L. Lima, Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento, Projeto Euclides, IMPA, 1993.

[13] J. R. Munkres, Topology, Prentice Hall, 2ªed., 2000.

[14] R. C. Reilly, *Application of the Hessian operator in a Riemannian manifold*, Indiana Univ. Math. J. **26** (1977), 459-472.

[15] A. Ros, *Compact Hypersurfaces with constant scalar curvature and a congruence theorem*, J. Differential Geometry, **27** (1988) 215-220.

[16] A. Ros, *Compact Hypersurfaces with constant higher order mean curvatures*, Rev. Mat. Iberoamericana, **3** (1987) 447-453.

[17] P. J. Ryan, *Homogeneity and some Curvature Conditions for Hypersurfaces*,Tohoku Math. Journ.,**21** (1969) 363-388.

[18] F. W. Warner, Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups, Scott, Foresman and Company, 1971.