

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Grafo Divisor de Zero de um Anel Comutativo

CLAUDIA JULIANA FANELLI GONÇALVES

Orientadora: Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2011

Grafo Divisor de Zero de um Anel Comutativo

CLAUDIA JULIANA FANELLI GONÇALVES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2011

Aos meus avós Shirley e Benedito.

Ao meu namorado Julio Cesar.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por permitir que meus sonhos se realizem a cada dia.

Agradeço à minha família que sempre me apoiou, acreditou em meu potencial e me deu forças para continuar meus planos. Em especial, à minha “mãe-avó” Shirley que me ensinou a ser quem sou, que sempre me fez pensar no futuro e em como é importante ser independente, mas que infelizmente não está mais entre nós para ver mais esta conquista.

Ao meu namorado Julio Cesar, agradeço por estar ao meu lado me incentivando a estudar mais e pela paciência diante da minha teimosia.

Agradeço minha orientadora Prof^ª. Dr^ª. Irene Naomi Nakaoka pela paciência, compreensão, sabedoria e dedicação na realização deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM por contribuírem com minha formação e por estarem sempre dispostos a ajudar.

Aos meus colegas de mestrado, agradeço a ajuda e companhia nas horas de estudo.

Às minhas amigas de república, agradeço a paciência e a companhia, principalmente nas horas em que mais precisei.

À Capes, pelo apoio financeiro.

Resumo

Sejam R um anel comutativo com identidade e $D(R)^*$ seu conjunto de divisores de zero não nulos. O grafo divisor de zero de R , denotado por $\Gamma(R)$, é um grafo cujos vértices são os elementos de $D(R)^*$ e dois vértices distintos x e y são adjacentes se, e somente se, $xy = 0$. O grafo divisor de zero é bastante útil no estudo de propriedades algébricas de anéis usando ferramentas da teoria de grafos. Nesta dissertação, estudamos propriedades de $\Gamma(R)$ bem como relações entre o anel R e o seu grafo divisor de zero.

Abstract

Let R be a commutative ring with identity and let $D(R)^*$ be its set of nonzero zero-divisors. The zero-divisor graph of R , denoted by $\Gamma(R)$, is a graph whose vertices are elements of $D(R)^*$ and two distinct vertices x and y are adjacent if and only if $xy = 0$. The zero-divisor graph helps us to study the algebraic properties of rings using graph theoretical tools. In this dissertation, we study properties of $\Gamma(R)$ as well as relations between the ring R and its zero-divisor graph.

Índice de Notações

\emptyset	conjunto vazio
$ X $	cardinalidade do conjunto X
X^*	$X \setminus \{0\}$
$X \subset Y$	X é um subconjunto próprio de Y
$X \subseteq Y$	X é um subconjunto de Y
$X \times Y$	produto direto de X por Y
$Im(f)$	imagem da função f
$Nuc(f)$	núcleo da função f
$Aut(X)$	grupo dos automorfismos de X
$m.d.c(x, y)$	máximo divisor comum entre x e y
$x y$	existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $y = qx$
$x \nmid y$	não existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $y = qx$
(X)	ideal gerado pelo conjunto X
$U(R)$	conjunto dos elementos invertíveis do anel R
$D(R)$	conjunto dos divisores de zero do anel R
$Id(R)$	conjunto dos ideais do anel R
$Spec(R)$	conjunto dos ideais primos do anel R
$Nil(R)$	$\{r \in R : r^n = 0, \text{ para algum } n \in \mathbb{N}\}$ (nilradical)
$J(R)$	radical de Jacobson do anel R
$Ann(X)$	$\{r \in R : rX = \{0\}\}$ (anulador de X)
$G = (V, E)$	grafo com conjunto de vértices V e conjunto de arestas E
$\Gamma(R)$	grafo divisor de zero do anel R
$d(u)$	grau do vértice u
$\Delta(G)$	grau máximo de vértices do grafo G
$\delta(G)$	grau mínimo de vértices do grafo G
$d(u, v)$	distância de u a v
$diam(G)$	diâmetro do grafo G

- $K^{m,n}$ grafo bipartido completo com conjunto de vértices $V = V_1 \cup V_2$ (união disjunta)
tal que $|V_1| = m$ e $|V_2| = n$
- $\omega(G)$ cardinalidade do maior clique no grafo G
- C^k k -ciclo
- $g(G)$ cintura do grafo G
- $\chi(G)$ número cromático por vértices de G
- $\chi'(G)$ índice cromático por arestas de G

SUMÁRIO

Índice de Notações	vii
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Anéis Artinianos e anéis Noetherianos	2
1.2 Conjunto de divisores de zero	5
1.3 Localização	13
1.4 Grafos	15
2 Grafos divisores de zero	19
2.1 Grafo divisor de zero	19
2.2 O que o tamanho e a forma de $\Gamma(R)$ implicam	27
2.3 Quando $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implica $R \approx S$?	34
2.4 Ideais e $D(R)$	43
2.5 Diâmetro de $\Gamma(R)$	47
2.6 Colorações de $\Gamma(R)$	52
2.7 Automorfismos de $\Gamma(R)$	64
Referências	70
Índice	71

INTRODUÇÃO

Comparado a outros assuntos na matemática, o estudo de grafos divisores de zero é recente. O termo “grafo divisor de zero” foi apresentado em 1988 por Istvan Beck no artigo “Coloring of commutative rings” [9], a fim de associar um grafo (simples) a um anel comutativo. Tal nomenclatura deve-se ao fato de que as relações de adjacências entre os vértices deste grafo são dadas pelos divisores de zero do anel. Em outras palavras, vértices distintos x e y são adjacentes se, e somente se, $xy = 0$.

O principal objetivo de Beck foi estudar colorações. Esse estudo foi continuado por D. D. Anderson e M. Naseer no artigo “Beck’s coloring of commutative rings” [3]. Mais tarde, em 1999, o irmão gêmeo de D. D. Anderson, D. F. Anderson, juntamente com P. S. Livingston, publicaram o artigo “The zero-divisor graph of a commutative ring” [5], baseado na dissertação de mestrado de P. S. Livingston. Em [5], D. F. Anderson e P. S. Livingston denotaram o grafo divisor de zero de um anel comutativo R por $\Gamma(R)$ e apresentaram uma definição para grafo divisor de zero ligeiramente diferente da definição dada por Beck. Na nova definição, o conjunto de vértices é constituído pelos divisores de zero não nulos do anel, e não mais por todos os elementos do anel.

O grafo divisor de zero é bastante útil no estudo de propriedades algébricas de anéis usando ferramentas da teoria de grafos. Um exemplo é o estudo do conjunto de divisores de zero de um anel. Sabemos que este conjunto nem sempre é fechado para a operação aditiva do anel e, por esse motivo, o conjunto de divisores de zero, em muitos casos, apresenta pouca estrutura algébrica. Diante deste fato, a análise dos grafos divisores de zero fornece uma ajuda significativa no estudo de propriedades relacionadas aos divisores de zero de um anel. Por esse motivo, após o trabalho de D. F. Anderson e P. S. Livingston [5], vários pesquisadores da teoria de anéis comutativos foram atraídos para o estudo de grafos divisores de zero.

Muitos outros artigos relacionados ao tema foram surgindo com o passar do tempo. Por exemplo, em 2001, D. F. Anderson, A. Frazier, A. Lauve e P. S. Livingston [4] revisaram e fortaleceram alguns resultados de [5] e, ainda, adicionaram resultados sobre $\omega(\Gamma(R))$ (cardinalidade do maior clique de $\Gamma(R)$) e iniciaram os estudos sobre grafos divisores de zero planares e isomorfismos de $\Gamma(R)$. Em 2002 foram publicados os artigos de S. B. Mulay [16] e F. DeMeyer e K. Schneider [11], que independentemente colaboraram com a análise da cintura de $\Gamma(R)$ iniciada em [5]. Em 2004, S. Akbari e A. Mohammadian [1] publicaram resultados sobre o índice cromático de $\Gamma(R)$ (número cromático por arestas) e sobre isomorfismos de $\Gamma(R)$. Em relação a este último, os autores apresentaram condições para que grafos divisores de zero isomorfos tenham seus respectivos anéis isomorfos. Já em 2006, T. G. Lucas [14] forneceu os possíveis diâmetros de $\Gamma(R)$ e de $\Gamma(R[x])$.

O tema aqui discutido é grafos divisores de zero de anéis comutativos. Porém, a definição de grafo divisor de zero foi estendida também para anéis não comutativos, sendo que o primeiro artigo publicado sobre este assunto é devido à S. P. Redmond [17].

O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre grafos divisores de zero de anéis comutativos com identidade. Os pré-requisitos e resultados auxiliares necessários para alcançarmos nosso objetivo são abordados no primeiro capítulo desta dissertação.

O primeiro capítulo foi dividido em quatro seções: anéis Artinianos e anéis Noetherianos, conjunto de divisores de zero, localização e grafos.

O segundo capítulo é destinado ao estudo dos grafos divisores de zero de anéis comutativos com identidade. Neste capítulo apresentamos a definição de grafo divisor de zero seguida de exemplos e resultados básicos. Na sequência, obtemos informações sobre o anel R a partir da análise do tamanho e da forma de $\Gamma(R)$. Discutimos condições para que grafos divisores de zero isomorfos tenham seus respectivos anéis isomorfos e, também, discutimos a estrutura do conjunto de divisores de zero do anel a a partir da análise do seu grafo divisor de zero. Ainda neste capítulo, apresentamos resultados sobre colorações e automorfismos de $\Gamma(R)$.

Preliminares

Apresentamos, neste capítulo, alguns conceitos e resultados sobre anéis comutativos e grafos. Não demonstramos todos os resultados, mas indicamos uma bibliografia na qual o leitor possa consultar tais demonstrações. Estamos assumindo que o leitor esteja familiarizado com tópicos básicos de Grupos e Anéis.

Vamos estabelecer, inicialmente, algumas notações que utilizaremos. Denotamos por X^* o conjunto $X \setminus \{0\}$. Dados os conjuntos X e Y escrevemos $X \subseteq Y$ se X é um subconjunto de Y e $X \subset Y$ se X é um subconjunto próprio de Y .

Em todo texto, os anéis serão anéis comutativos com identidade, salvo menção contrária. A identidade do anel será denotada por 1 e é diferente de 0 , o elemento neutro da adição. Para simplificar a notação, denotamos o conjunto de todos os ideais do anel R por $Id(R)$ e representamos o conjunto dos ideais primos de R por $Spec(R)$. O conjunto dos elementos invertíveis de R é denotado por $U(R)$. Dados $I \in Id(R)$ e $a \in R$, como usual em muitas situações escreveremos \bar{a} no lugar do elemento $a + I$ do anel quociente $\frac{R}{I}$.

Dado $P \in Spec(R)$, diremos que P é *primo minimal* se não existe outro ideal primo contido propriamente em P .

Um anel R é dito ser *decomponível* se pode ser escrito como produto direto de anéis R_1 e R_2 , isto é, $R = R_1 \times R_2$, onde R_1 e R_2 são anéis comutativos com identidade não nulos. Caso contrário, dizemos que R é *indecomponível*.

Dado um anel R , a interseção de todos os ideais maximais deste anel é um ideal chamado *Radical de Jacobson* de R , o qual denotamos por $J(R)$. Ainda em R , consideremos o conjunto

de todos os seus elementos nilpotentes, isto é,

$$\text{Nil}(R) = \{r \in R : \text{existe } n \in \mathbb{N} \text{ tal que } r^n = 0\}.$$

A este conjunto damos o nome de *nilradical de R* e facilmente mostra-se que $\text{Nil}(R)$ é um ideal de R . Na sequência, temos uma proposição que relaciona o nilradical de R com os ideais primos deste anel.

Proposição 1.1. ([6], pág. 5) *Em um anel R , temos $\text{Nil}(R) = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P$.*

1.1 Anéis Artinianos e anéis Noetherianos

Em alguns resultados deste capítulo, utilizaremos noções de módulos (à esquerda). Assim, damos sua definição. A partir da definição de módulo, introduziremos os conceitos de anéis Artinianos e de anéis Noetherianos, seguidos de resultados básicos.

Definição 1.2. Seja R um anel. Um conjunto não vazio M é um R -módulo (à esquerda) se M é um grupo abeliano e existe uma operação

$$\begin{aligned} R \times M &\rightarrow M \\ (r, m) &\mapsto rm \end{aligned}$$

tal que, para todos $r_1, r_2, r \in R$ e para todos $m_1, m_2, m \in M$, temos:

- (i) $(r_1 + r_2)m = r_1m + r_2m$;
- (ii) $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$;
- (iii) $(r_1r_2)m = r_1(r_2m)$;
- (iv) $1m = m$.

Em capítulos posteriores utilizaremos os conceitos de anéis Artinianos e anéis Noetherianos. Para isso, introduziremos definições e resultados relacionados a esses anéis.

Definição 1.3. Seja \mathcal{C} um conjunto parcialmente ordenado por uma relação \succeq (respectivamente, \preceq). Dizemos que \mathcal{C} satisfaz a *condição de cadeia descendente* (c.c.d.) (resp.,

condição de cadeia ascendente (c.c.a.)) se toda família $(S_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de elementos de \mathcal{C} onde $S_0 \supseteq S_1 \supseteq S_2 \supseteq \dots \supseteq S_i \supseteq \dots$ (resp., $S_0 \preceq S_1 \preceq S_2 \preceq \dots \preceq S_i \preceq \dots$) implicar que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $S_k = S_{k+i}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Neste caso, dizemos que a cadeia estaciona.

Definição 1.4. Seja \mathcal{C} um conjunto parcialmente ordenado por uma relação \supseteq (resp., \preceq). Dizemos que \mathcal{C} satisfaz à *condição minimal* (resp., *condição maximal*) se todo subconjunto não vazio de \mathcal{C} admite um elemento minimal (resp., maximal), com respeito à \supseteq (resp., \preceq).

A proposição a seguir nos dá uma equivalência entre condição de cadeia descendente e condição minimal. Um resultado análogo nos dá a equivalência entre condição de cadeia ascendente e condição maximal.

Proposição 1.5. ([6], pág. 74) *Seja \mathcal{C} um conjunto parcialmente ordenado por \supseteq . Então \mathcal{C} satisfaz à condição de cadeia descendente se, e somente se, \mathcal{C} satisfaz à condição minimal.*

De acordo com este resultado, temos a definição de módulo Artiniano.

Definição 1.6. Seja M um R -módulo. Dizemos que M é *Artiniano* (resp., *Noetheriano*) se o conjunto de seus submódulos, ordenado por \supseteq (resp., \subseteq), satisfaz à condição de cadeia descendente (resp., condição de cadeia ascendente) ou, equivalentemente, à condição minimal (resp., condição maximal).

Um anel R é Artiniano (resp., Noetheriano) se R , visto como um R -módulo, é Artiniano (resp., Noetheriano), isto é, se o conjunto de seus ideais $Id(R)$, ordenado por \supseteq (resp., \subseteq), satisfaz à condição de cadeia descendente (resp., condição de cadeia ascendente) ou, equivalentemente, à condição minimal (resp., condição maximal).

A seguir elencamos algumas propriedades importantes de um anel Artiniano. Lembremos que um ideal I é nilpotente se existe um inteiro positivo n tal que $I^n = \{0\}$.

Proposição 1.7. ([6], pág. 76 e 89) *Sejam R um anel Artiniano e $I \in Id(R)$. Então:*

(i) $\frac{R}{I}$ é um anel Artiniano;

(ii) Todo ideal primo é maximal;

(iii) $Nil(R) = J(R)$;

(iv) R tem somente um número finito de ideais maximais;

(v) $\text{Nil}(R)$ é nilpotente.

A definição seguinte possibilitará estabelecer uma equivalência entre anéis Artinianos e Noetherianos.

Definição 1.8. Seja R um anel. Uma *cadeia de ideais primos de R* é uma sequência finita estritamente crescente $P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots \subset P_n$ de ideais primos de R . Neste caso, o comprimento da cadeia é n . Definimos a *dimensão de Krull de R* como o supremo dos comprimentos de todas as cadeias de ideais primos de R , que é um inteiro não negativo ou $+\infty$ (supondo $R \neq \{0\}$).

Notação: $\dim_{\text{Krull}} R$.

Exemplo 1.9.

1. Um corpo K tem dimensão zero. De fato, se K é um corpo, seus únicos ideais são $\{0\}$ e K e o único que é primo é $\{0\}$. Logo, há apenas uma cadeia $P_0 = \{0\}$, a qual tem comprimento $n = 0$.
2. Se R é um domínio principal (DP) mas não é corpo, então $\dim_{\text{Krull}} R = 1$. Com efeito, os ideais primos $P \neq \{0\}$ de R são os ideais $P = (p)$ onde p é um elemento primo e, assim, irredutível. Portanto, (p) é maximal. Assim, as cadeias de ideais primos de R são da forma $\{0\} \subset (p)$, p primo.

Em particular, $\dim_{\text{Krull}} \mathbb{Z} = 1$ e $\dim_{\text{Krull}} K[x] = 1$ onde K é um corpo.

3. O anel $R = K[x_1, x_2, \dots]$, K corpo, tem dimensão ∞ , pois

$$\{0\} \subset (x_1) \subset (x_1, x_2) \subset (x_1, x_2, x_3) \subset \dots$$

é uma cadeia infinita de ideais primos.

Finalmente, podemos relacionar anéis Artinianos e Noetherianos.

Teorema 1.10. ([6], pág. 90) *Um anel R é Artiniano se, e somente se, R é Noetheriano e $\dim_{\text{Krull}} R = 0$.*

Definição 1.11. Dizemos que um anel R é *local* quando R possui um único ideal maximal.

A seguir, temos um resultado que fornece condições para que um anel seja local.

Proposição 1.12. ([6], pág. 4) *Sejam R um anel e $M \in \text{Id}(R) \setminus \{R\}$.*

- (i) *Se $R \setminus M = U(R)$, então R é um anel local e M é seu único ideal maximal;*
- (ii) *Se $R \setminus U(R)$ é um ideal, então R é um anel local com ideal maximal $R \setminus U(R)$;*
- (iii) *Se M é um ideal maximal e $1 + m \in U(R)$ para todo $m \in M$, então R é local.*

O próximo resultado descreve a estrutura dos anéis Artinianos.

Teorema 1.13. (Estrutura de Anéis Artinianos) ([6], pág. 90) *Um anel Artiniano R é de maneira única (a menos de isomorfismo) um produto direto finito de anéis locais Artinianos.*

1.2 Conjunto de divisores de zero

Nesta seção, apresentaremos um estudo sobre o conjunto de divisores de zero de um anel. Começaremos este estudo com um anel qualquer e depois restringiremos para anéis finitos. No final da seção, analisaremos o conjunto de divisores de zero de um anel de polinômios.

Definição 1.14. Seja R um anel. Dado $a \in R$, dizemos que a é um *divisor de zero* quando existe $b \in R^*$ tal que $ab = 0$. Representamos o conjunto dos divisores de zero do anel R por $D(R)$.

Uma caracterização importante de $D(R)$ que utilizaremos é que este conjunto é uma união de ideais primos do anel R ([13], pág. 3). Os ideais maximais (com respeito à inclusão) dentre os ideais primos dessa união são chamados *primos maximais dos divisores de zero*, ou simplesmente, primos maximais. Também temos

Também temos $\bigcup_{P \text{ primo minimal}} P \subseteq D(R)$, pelo Teorema 84 de [13].

Observação 1.15. Seja R um anel tal que $\{0\} = Q_1 \cap \dots \cap Q_k$, onde Q_i é ideal primo para todo $i = 1, \dots, k$. Então R possui apenas um número finito de primos minimais. Com efeito, consideremos $P_i \subseteq Q_i$ primo minimal, $i = 1, \dots, k$. Ainda temos que $\{0\} = \bigcap_{i=1}^k P_i$. Vamos supor que exista outro ideal primo minimal P_{k+1} . Então,

$$\prod_{i=1}^k P_i \subseteq \bigcap_{i=1}^k P_i = \{0\} \subseteq P_{k+1}$$

e, em particular, $\prod_{i=1}^k P_i \subseteq P_{k+1}$, donde obtemos $P_i \subseteq P_{k+1}$, para algum $i = 1, \dots, k$. Mas isso contradiz a minimalidade dos ideais.

Dizemos que um anel R é *reduzido* se $\text{Nil}(R) = \{0\}$. Caso contrário, R é não reduzido.

Proposição 1.16. *Seja R um anel reduzido. Então:*

$$(i) \quad \bigcup_{P \text{ primo minimal}} P = D(R);$$

(ii) *Se R não é domínio de integridade, então R tem pelo menos dois primos minimais.*

Demonstração. (i) Já sabemos que $\bigcup_{P \text{ primo minimal}} P \subseteq D(R)$ e, sendo R reduzido,

$$\bigcap_{P \text{ primo minimal}} P = \bigcap_{P \in \text{Spec}(R)} P = \text{Nil}(R) = \{0\}. \quad (1.1)$$

Dado $x \in D(R)^*$, existe $y \in R^*$ tal que $xy = 0$. Mas isto implica que $xy = 0 \in P$ para todo primo minimal P e, então, $x \in P$ ou $y \in P$. Se $x \notin P$ para todo primo minimal P , devemos ter $y \in P$ para todo primo minimal P , o que contradiz (1.1). Logo, existe ao menos um primo minimal P tal que $x \in P$. Portanto, se R é um anel reduzido, então $\bigcup_{P \text{ primo minimal}} P = D(R)$.

(ii) Sabemos que R reduzido implica $\bigcup_{P \text{ primo minimal}} P = D(R)$. Assim, supondo que R possui um único primo minimal P , de (1.1) obtemos $D(R) = P = \text{Nil}(R) = \{0\}$, um absurdo. \square

Dados M um R -módulo e $a \in M$, definimos o conjunto *anulador de a* por

$$\text{Ann}(a) = \{r \in R : ra = 0\}.$$

Também, se $I \in \text{Id}(R)$, definimos o *anulador de I* como sendo o conjunto

$$\text{Ann}(I) = \{r \in R : rI = \{0\}\}.$$

Facilmente mostra-se que ambos anuladores são ideais de R .

Proposição 1.17. ([13], pág. 4) *Sejam R um anel e $I \in \text{Id}(R)$ que é maximal dentre todos os anuladores de elementos de R^* . Então I é ideal primo.*

Demonstração. Seja $I = \text{Ann}(a)$, $a \in R^*$. Dado $bc \in I$, mostraremos que $b \in I$ ou $c \in I$. Suponhamos que $b \notin I$. Então $ab \neq 0$. Notemos que $I = \text{Ann}(a) \subseteq \text{Ann}(ab)$. Mas, por hipótese, I é maximal dentre os anuladores. Logo, $I = \text{Ann}(a) = \text{Ann}(ab)$ e, como $c \in \text{Ann}(ab)$, pois $bc \in \text{Ann}(a)$, obtemos $c \in \text{Ann}(a) = I$. \square

A definição de primos maximais dos divisores de zero admite uma generalização para módulos. Mas antes, precisamos definir o conjunto de divisores de zero de um módulo.

Definição 1.18. Sejam R um anel e M um R -módulo não nulo. Definimos o *conjunto de divisores de zero de M* por $D_R(M) = \{r \in R : \exists m \in M^* \text{ com } rm = 0\} \subset R$. Os ideais primos maximais (com respeito à inclusão) contidos em $D_R(M)$ são chamados *primos maximais de M* .

O resultado abaixo diz respeito aos ideais primos maximais de um módulo. Em determinadas condições, existe apenas um número finito de primos maximais.

Proposição 1.19. ([13], pág. 55) *Sejam R um anel Noetheriano e M um R -módulo não nulo finitamente gerado. Então existe apenas um número finito de primos maximais e cada um é anulador de um elemento $a \in M^*$.*

Proposição 1.20. ([13], pág. 56) *Sejam R um anel Noetheriano, M um R -módulo não nulo finitamente gerado e S um subanel de R tal que $S \subseteq D_R(M)$. Então existe $a \in M^*$ tal que $S \subseteq \text{Ann}(a)$.*

Na proposição seguinte, temos duas afirmações sobre o conjunto de divisores de zero de um anel, quando este conjunto é um ideal. Notemos que a segunda afirmação é para anéis Noetherianos e, em particular, anéis finitos.

Proposição 1.21. *Seja R um anel.*

(i) *Se $D(R)$ é um ideal, então $D(R)$ é ideal primo;*

(ii) *Se R é um anel Noetheriano e $D(R)$ é um ideal, então $D(R) = \text{Ann}(a)$, para algum $a \in R^*$.*

Demonstração. Suponhamos que $D(R)$ seja um ideal de R . É claro que $D(R) \neq R$, pois $1 \notin D(R)$. Além disso, se $ab \in D(R)$, então existe $c \in R^*$ tal que $(ab)c = 0$. Se $bc \neq 0$, então $a \in D(R)$. Se $bc = 0$, então $b \in D(R)$. Logo, $D(R)$ é um ideal primo de R .

Agora, suponhamos que R seja um anel Noetheriano e que $D(R)$ seja um ideal. Notemos que R , visto como um R -módulo, é finitamente gerado. Também, $D(R)$ é um subanel de R , pois é um ideal de R . Logo, segue da Proposição 1.20, que existe $a \in R^*$ tal que $D(R) \subseteq \text{Ann}(a)$. Como $\text{Ann}(a) \subseteq D(R)$, temos a igualdade desejada. \square

Os próximos resultados referem-se a anéis finitos.

Proposição 1.22. *Se R é um anel finito, então cada elemento de R é invertível ou divisor de zero.*

Demonstração. Seja $a \in R$. Se $a \in D(R)$ já temos o desejado. Agora, se $a \notin D(R)$, então $a \neq 0$ e, para todo $b \in R^*$, temos $ab \neq 0$. Escrevamos $R = \{0, a_2, \dots, a_n\}$. Multiplicando cada elemento de R por a obtemos $a \cdot 0 = 0$ e $aa_i \neq 0$, para todo i , $2 \leq i \leq n$. Se $i \neq j$, $aa_i \neq aa_j$, caso contrário, $a(a_i - a_j) = 0$, mas $a \notin D(R)$. Assim, existe $a_k \in R$, $2 \leq k \leq n$, tal que $aa_k = 1$ e segue que a é invertível. \square

Temos, na sequência, uma condição necessária e suficiente para que um anel finito seja local.

Proposição 1.23. *Se R é um anel finito, então R é local se, e somente se, todo elemento de R não invertível é nilpotente.*

Demonstração. Suponhamos que R seja um anel local. Como R é um anel comutativo com identidade finito, todo ideal primo é maximal e, sendo R local, R possui um único ideal

maximal, digamos M . Assim, pela Proposição 1.1, segue que $Nil(R) = \bigcap_{P \in Spec(R)} P = M$.

Logo, se $a \in R$ é não invertível, $a \in M = Nil(R)$ e, então, a é nilpotente.

Reciprocamente, vamos supor que cada $a \in R$ não invertível seja nilpotente. Neste caso, $R \setminus Nil(R) = \{r \in R : r \in U(R)\}$ e, pelo item (i) da Proposição 1.12, obtemos que R é anel local cujo ideal maximal é $Nil(R)$. \square

Proposição 1.24. *Se R é um anel local finito, então $D(R)$ é o único ideal maximal de R .*

Demonstração. Sabemos que $Nil(R) \subseteq D(R)$. Dado $a \in D(R)$, temos que $a \notin U(R)$. Logo, da Proposição 1.23, segue que $a \in Nil(R)$. Assim, $D(R) = Nil(R)$ e $D(R)$ é um ideal de R . Pela Proposição 1.22, $R \setminus D(R) = \{r \in R : r \in U(R)\}$. Portanto, segue do item (i) da Proposição 1.12, que $D(R)$ é o único ideal maximal de R . \square

Proposição 1.25. *Seja R é um anel local finito. Então:*

- (i) *A característica de R é p^n ($char(R) = p^n$), para algum primo p e algum inteiro positivo n ;*
- (ii) *$D(R)$ com a operação de adição do anel é um p -grupo, de modo que $|D(R)^*| = p^m - 1$, para algum inteiro não negativo m .*

Demonstração. Sabemos que $D(R)$ é o único ideal maximal de R pela Proposição 1.24. Logo, $R/D(R)$ é corpo finito e, então, sua característica é p , para algum primo p . Assim, $\overline{p1} = \overline{0}$, isto é, $p1 \in D(R)$. Agora, pela demonstração da Proposição 1.24, $D(R) = Nil(R)$ e, então, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(p1)^n = 0$ e $(p1)^{n-1} \neq 0$, ou ainda, $p^n 1 = 0$ e $p^{n-1} 1 \neq 0$. Portanto, $char(R) = p^n$ o que demonstra (i). Temos que $D(R)$, com a operação de adição, é um subgrupo de R , R visto como um grupo com a operação de adição. Como $char(R) = p^n$, então $p^n a = 0$ para todo $a \in R$. Em particular, se $m \in D(R)$ temos $p^n m = 0$. Assim, $o(m)$ divide p^n , isto é, $o(m) = p^k$, para algum inteiro não negativo k e, portanto, $D(R)$ é um p -grupo. Disso segue que $|D(R)^*| = p^t - 1$, para algum inteiro não negativo t . \square

Seja $I \in Id(R) \setminus \{R\}$. Dizemos que I é *ideal primário* se $ab \in I$ implicar que $a \in I$ ou $b^n \in I$, para algum $n \in \mathbb{N}$.

Vimos que se R é um anel local finito, vale a igualdade $D(R) = Nil(R)$. O resultado seguinte nos fornece essa igualdade para um anel qualquer, desde que o ideal nulo do anel seja um ideal primário.

Proposição 1.26. *Em um anel R , se $\{0\}$ é um ideal primário então $D(R) = Nil(R)$.*

Demonstração. Sabemos que $Nil(R) \subseteq D(R)$. Agora, seja $a \in D(R)$, então existe $b \in R^*$ tal que $ab = 0$. Como $\{0\}$ é ideal primário e $ab \in \{0\}$, então $a \in Nil(R)$ ou $b \in \{0\}$. Mas $b \neq 0$ e, assim, $a \in Nil(R)$ donde obtemos $D(R) = Nil(R)$. \square

Proposição 1.27. *Seja R um anel tal que $dim_{K_{rull}}(R) = 0$. Então $D(R) = Nil(R)$ se, e somente se, $D(R)$ é um ideal (primo). Além disso, se R é finito, esta afirmação é equivalente a R ser anel local.*

Demonstração. Se $D(R) = Nil(R)$, já temos que $D(R) \in Spec(R)$ pela Proposição 1.21. Vamos supor que $D(R) \in Spec(R)$. Para qualquer primo minimal Q temos $Q \subseteq D(R)$. Mas como $dim_{K_{rull}}(R) = 0$, devemos ter $D(R) = Q$ para todo primo minimal Q . Logo, $Nil(R) = \bigcap_{Q \text{ primo minimal}} Q = D(R)$. A segunda afirmação segue do fato que se R é anel local finito, então $D(R) = Nil(R)$. Agora, se $D(R) = Nil(R)$ segue das Proposições 1.22 e 1.23 que R é local. \square

Observação 1.28. Com base nos resultados anteriores, se R é um anel finito reduzido, então ao expressarmos R como um produto finito de anéis locais finitos (Teorema de Estrutura de Anéis Artinianos), esses anéis locais deverão ser constituídos exclusivamente de elementos invertíveis (e zero) e, então, eles serão corpos.

Passamos agora ao estudo do conjunto de divisores de zero de anéis de polinômios.

Proposição 1.29. *([10], pág. 9) Sejam R um anel e $R[x]$ o anel de polinômios em uma indeterminada x com coeficientes em R . Se $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in R[x]$, então:*

(i) *f é invertível em $R[x]$ se, e somente se, $a_0 \in U(R)$ e $a_1, \dots, a_n \in Nil(R)$;*

(ii) *f é nilpotente se, e somente se, a_0, a_1, \dots, a_n são nilpotentes.*

Um teorema que nos será útil é o Teorema de McCoy. Após este resultado apresentaremos a definição de anel de McCoy.

Teorema 1.30. (Teorema de McCoy) *Seja R um anel. Um polinômio $f \in R[x]$ é um divisor de zero se, e somente se, existe $r \in R^*$ tal que $rf = 0$.*

Demonstração. Seja $f \in D(R[x])^*$. Consideremos um polinômio $g \in D(R[x])^*$ de menor grau tal que $fg = 0$. Digamos que $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$. Assim, $fg = d_0 + d_1x + \dots + d_kx^k + \dots + a_nb_mx^{n+m}$, onde $d_k = \sum_{i=0}^k a_ib_{k-i}$. Então

$$\left\{ \begin{array}{l} d_0 = a_0b_0 = 0 \\ d_1 = a_0b_1 + a_1b_0 = 0 \\ d_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 \\ \vdots \\ d_{n+m} = a_nb_m = 0 \end{array} \right. \quad (1.2)$$

Provemos, por indução, que $a_{n-t}g = 0$, $0 \leq t \leq n$. Se $a_n g \neq 0$, como $a_nb_m = 0$, temos que $\partial(a_n g) < \partial(g) = m$, onde ∂ denota o grau do polinômio, e $(a_n g)f = 0$, o que contraria o fato que g é o polinômio de menor grau que anula f . Logo, $a_n g = 0$. Seja $s \in \mathbb{N}$ com $0 < s \leq n$ e suponhamos que $a_{n-t}g = 0$ para todo $0 \leq t \leq s-1$. Coloquemos $k = n - s$. Temos $a_k g = a_kb_0 + a_kb_1x + \dots + a_kb_mx^m$. Da hipótese de indução obtemos $a_ib_j = 0$ para todos i, j , $n - (s-1) \leq i \leq n$ e $0 \leq j \leq m$. Assim, do sistema (1.2) segue que $a_kb_m = 0$. Procedendo como na demonstração de $a_n g = 0$ obtemos $a_k g = 0$. Logo, $a_n g = a_{n-1}g = \dots = a_0 g = 0$; assim basta considerarmos $r = b_m \neq 0$ e temos $rf = 0$.

A recíproca é óbvia. □

Definição 1.31. Dizemos que um anel R é um *anel de McCoy* se todo ideal finitamente gerado contido em $D(R)$ tem um anulador não nulo.

Uma consequência do Teorema de McCoy é $D(R[x]) \subseteq D(R)[x]$. Também, $D(R) \subseteq D(R[x])$. Assim, se $D(R[x])$ é um ideal, então $D(R[x]) = D(R)[x]$, pois dado $f = \sum_{i=0}^n a_ix^i \in D(R)[x]$, como $a_i \in D(R) \subseteq D(R[x])$ e $D(R[x])$ é um ideal, temos $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in D(R[x])$ donde segue a outra inclusão.

Teorema 1.32. *O anel de polinômios $R[x]$ é um anel de McCoy.*

Demonstração. Seja $I = (f_1, \dots, f_p)$ um ideal de $R[x]$ tal que $I \subseteq D(R[x])$. Escrevamos $f_i = \sum_{j=0}^{n_i} a_{ij}x^j$, $a_{ij} \in R$, $n_i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq p$. Seja $f = f_1 + f_2x^{s_2} + f_3x^{s_3} + \dots + f_px^{s_p}$, onde $s_i \in \mathbb{N}$ são tais que $s_2 > n_1$ e $s_i > n_{i-1} + s_{i-1}$, $i = 3, \dots, p$. Como $I \subseteq D(R[x])$ e $f \in I^*$, temos $f \in D(R[x])^*$. Então, pelo Teorema de McCoy, existe $r \in R^*$ tal que $rf = 0$ e, assim, $ra_{ik}x^l = 0$, para todos i, k onde $l = s_i + k$. Logo, $ra_{ik} = 0$ para todos i, k e segue que $rI = \{0\}$ e $R[x]$ é um anel de McCoy. \square

Corolário 1.33. *Se $f, g \in D(R[x])$ são não nulos, então as seguintes condições são equivalentes:*

(i) $(f, g) \subseteq D(R[x]);$

(ii) f e g têm um anulador não nulo em comum em $R[x];$

(iii) Existe $r \in R^*$ tal que $rf = 0 = rg;$

(iv) Se $\partial(f) = n$, então $f + x^{n+1}g$ é um divisor de zero de $R[x].$

Demonstração. Se $(f, g) \subseteq D(R[x])$, segue do teorema anterior que f e g têm um anulador não nulo em comum em $R[x]$. Vamos supor que (ii) seja verdadeiro, ou seja, existe $l \in R[x]^*$ tal que $lf = 0 = lg$. Consideremos o polinômio $h = f + x^{n+1}g$, onde $f = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ e $g = \sum_{j=0}^m b_j x^j$. Então $lh = 0$ e segue que $h \in D(R[x])^*$. Logo, pelo Teorema de McCoy, existe $r \in R^*$ tal que $rh = rf + rx^{n+1}g = 0$, ou ainda, $r(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) + r(b_0x^{n+1} + b_1x^{n+2} + \dots + b_mx^{n+m}) = 0$ e, assim, $ra_i = 0$ e $rb_j = 0$ para todos $i = 0, \dots, n$ e $j = 0, \dots, m$. Portanto, $rf = 0 = rg$. Suponhamos que exista $r \in R^*$ com $rf = 0 = rg$. Então $r(f + x^{n+1}g) = rf + rx^{n+1}g = 0$. Logo, $f + x^{n+1}g \in D(R[x])$. Se $f + x^{n+1}g \in D(R[x])$, pelo Teorema de McCoy, existe $r \in R^*$ tal que $r(f + x^{n+1}g) = 0$. Como vimos, isto implica que $rf = 0 = rg$. Portanto, $(f, g) \subseteq D(R[x])$. \square

E para finalizar esta seção apresentamos um teorema que relaciona o conjunto de divisores de zero de R com o conjunto de divisores de zero de seu anel de polinômios.

Teorema 1.34. $D(R[x])$ é um ideal de $R[x]$ se, e somente se, R é um anel de McCoy tal que $D(R)$ é um ideal.

Demonstração. Por hipótese, $D(R[x])$ é um ideal de $R[x]$. Então, $D(R[x]) = D(R)[x]$ como vimos acima. Mas isso significa que para qualquer conjunto finito de divisores de zero em R , qualquer polinômio cujos coeficientes pertencem a este conjunto deve ser um divisor de zero. Assim, pelo Teorema de McCoy, cada conjunto deste tem um anulador não nulo. Logo, $D(R)$ deve ser um ideal e R deve ser um anel de McCoy.

Reciprocamente, suponhamos que R seja um anel de McCoy e $D(R)$ um ideal. Então cada subconjunto finito de $D(R)$ tem um anulador não nulo e cada polinômio cujos coeficientes pertencem a $D(R)$ deve ser um divisor de zero de $R[x]$. Se $f, g \in D(R[x])$, pelo Teorema de McCoy, existem $r, s \in R^*$ tais que $rf = 0 = sg$ e, com isso, os coeficientes de f e g pertencem a $D(R)$. E o mesmo ocorre com o polinômio $f + x^{n+1}g \in R[x]$, onde n é o grau de f , donde obtemos $f + x^{n+1}g \in D(R[x])$. Assim, se $f, g \neq 0$, pelo corolário anterior, $(f, g) \subseteq D(R[x])$. Se $f = 0$ ou $g = 0$ também temos $(f, g) \subseteq D(R[x])$. Logo, $f - g \in D(R[x])$. É claro que se $h \in R[x]$ e $f \in D(R[x])$ então $hf \in D(R[x])$. Portanto, $D(R[x])$ é um ideal. \square

1.3 Localização

A formação de anéis de frações e o processo de localização são, talvez, as ferramentas técnicas mais importantes em Álgebra Comutativa. Nesta seção, definiremos tais ferramentas e demonstraremos um resultado, que nos será útil no capítulo seguinte, usando localização.

Seja R um anel. Um *subconjunto multiplicativamente fechado* é um subconjunto S de R tal que $1 \in S$ e S é fechado com respeito à operação de multiplicação de R . Definimos a relação \equiv em $R \times S$ como segue:

$$(a, s) \equiv (b, t) \Leftrightarrow \text{existe } u \in S \text{ tal que } (at - bs)u = 0.$$

Tal relação é uma relação de equivalência. Denotamos a classe de equivalência do elemento $(a, s) \in R \times S$ por $\frac{a}{s}$ e definimos $S^{-1}R = \{\frac{a}{s} : a \in R \text{ e } s \in S\}$ o conjunto das classes de equivalência. Consideremos em $S^{-1}R$ as operações de adição e multiplicação dadas, respec-

tivamente, como segue:

$$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st}$$

e

$$\left(\frac{a}{s}\right) \left(\frac{b}{t}\right) = \frac{ab}{st}.$$

Verifica-se que essas operações estão bem definidas e que, com as operações acima, $S^{-1}R$ é um anel comutativo com identidade $\frac{1}{1}$, cujo elemento neutro para a operação de adição é $\frac{0}{1}$. O anel $S^{-1}R$ é chamado *anel de frações* de R com respeito a S .

Seja $P \in \text{Spec}(R)$ e consideremos $S = R \setminus P$. Notemos que $1 \in S$, pois $1 \notin P$. Dados $a, b \in S$, pela definição de S , $a, b \notin P$ e, como P é ideal primo, então $ab \notin P$. Logo, $ab \in S$ e segue que S é um subconjunto multiplicativamente fechado de R . Neste caso, denotamos tal anel de frações de R por R_P . Seja $PR_P = \{\frac{p}{s} : p \in P \text{ e } s \in S\} \subset R_P$ e mostremos que PR_P é um ideal de R_P . De fato, o elemento neutro da adição de R_P , $0_{R_P} = \frac{0}{1}$, pertence a PR_P . Dados $\frac{p}{s}, \frac{q}{t} \in PR_P$, então $\frac{p}{s} + \frac{q}{t} = \frac{pt+qs}{st} \in PR_P$, pois $p, q \in P$, P é ideal, $s, t \in S$ e S é multiplicativamente fechado. Dado $\frac{a}{u} \in R_P$, temos $\left(\frac{p}{s}\right) \left(\frac{a}{u}\right) = \frac{pa}{su} \in PR_P$, pois P é ideal. Logo, PR_P é um ideal de R_P . Agora, se $\frac{a}{s} \notin PR_P$, então $a \notin P$ e segue que $a \in S$. Como $\left(\frac{a}{s}\right) \left(\frac{s}{a}\right) = \frac{as}{sa} = \frac{1}{1}$, então $\frac{a}{s} \in U(R_P)$. Disto segue que se $I \in \text{Id}(R_P)$ é tal que I não está contido em PR_P , então I possui um elemento invertível e, portanto, $I = R_P$. Assim, PR_P é o único ideal maximal de R_P e R_P é um anel local. Por esse motivo, R_P recebe o nome de *localização* em P .

Na sequência, apresentamos três resultados importantes da teoria de localização.

Proposição 1.35. ([6], pág. 42) *Se $P \in \text{Spec}(R)$, então o nilradical de R_P é $\text{Nil}(R)R_P$. Em particular, se R é um anel reduzido, então R_P é reduzido.*

Proposição 1.36. ([6], pág. 42) *Se $P \in \text{Spec}(R)$, então os ideais primos de R_P estão em correspondência bijetiva com os ideais primos de R contidos em P .*

Proposição 1.37. *Se R é um anel reduzido e P é um primo minimal de R , então R_P é um corpo.*

Demonstração. Se $P = \{0\}$, já temos o desejado. Suponhamos $P \neq \{0\}$. Como P é primo minimal, segue da proposição anterior que PR_P é o único ideal primo de R_P . Assim, pela

Proposição 1.1, PR_P é também o nilradical de R_P . Como R é um anel reduzido, pela Proposição 1.35, R_P é reduzido e, assim, $PR_P = \{0\}$. Portanto, R_P é corpo. \square

Utilizaremos o conceito de localização no próximo resultado.

Proposição 1.38. *Seja I um ideal finitamente gerado de um anel reduzido R . Então existe $r \in R^*$ tal que $r \in \text{Ann}(I)$ se, e somente se, I está contido em, no mínimo, um primo minimal.*

Demonstração. Vamos supor que $r \in R^*$ é tal que $rI = \{0\}$. Como R é reduzido, vale a equação (1.1) e, assim, r não pode pertencer a todo primo minimal. Então existe um primo minimal P tal que $r \notin P$ e, como P é ideal primo e $rx = 0 \in P$ para todo $x \in I$, segue que $x \in P$ para todo $x \in I$. Logo, $I \subseteq P$. Agora, suponhamos que $I \subseteq P$, para algum primo minimal P . Então, $IR_P = PR_P = \{0\}$, pois pela proposição anterior, R_P é um corpo. Como I é finitamente gerado, existe um elemento $t \in R \setminus P$ tal que $tI = \{0\}$. \square

1.4 Grafos

Nesta seção, introduziremos as definições e resultados da teoria de grafos necessários para o estudo de grafos divisores de zero que faremos no capítulo seguinte.

Definição 1.39. Sejam V um conjunto e E um subconjunto de $\{\{u, v\} : u, v \in V\}$. Um *grafo* (simples) é um par ordenado do tipo $G = (V, E)$. Um elemento de V é denominado *vértice* e um elemento de E é chamado *aresta*. Dizemos que $n = |V|$ é a *ordem* do grafo $G = (V, E)$ e a denotamos por $|G|$.

Quando não houver dúvidas, vamos nos referir ao grafo $G = (V, E)$ apenas por G .

Um vértice $v \in V$ é *adjacente* a um vértice $u \in V$ se $\{u, v\} \in E$. O *grau do vértice* v é definido por $d(v) = |\{u : \{u, v\} \in E\}|$.

De acordo com a notação acima, se $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq \{\{u, v\} : u, v \in V', \{u, v\} \in E\}$, dizemos que $G' = (V', E')$ é um *subgrafo* de G . E se para todos $u, v \in V'$, $\{u, v\} \in E$ implicar que $\{u, v\} \in E'$, então dizemos que G' é um *subgrafo induzido*. Neste caso, denotamos $G' = G[V']$.

Dizemos que o grafo G é *completo* com n vértices se $|V| = n$ e $\{u, v\} \in E$ para todos $u, v \in V$ com $u \neq v$. Denotamos tal grafo por K^n . Dizemos que G é um *grafo nulo* se $V = \emptyset$. Também dizemos que G é *bipartido* se existe uma partição de V , digamos $V = V_1 \cup V_2$ e $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, tal que se $\{u, v\} \in E$, então um dos vértices está em V_1 e o outro em V_2 . Se, além disso, tivermos $\{u, v\} \in E$ para todos $u \in V_1$ e $v \in V_2$, então G é um grafo *bipartido completo*, o qual será denotado por $K^{m,n}$, onde $m = |V_1|$ e $n = |V_2|$. Os grafos da forma $K^{1,n}$, com $n \geq 1$, são chamados de *grafos estrelas*.

Dado $K \subseteq V$ não vazio, dizemos que K é um *clique* quando $G[K]$ é um grafo completo. A cardinalidade do maior clique de G é denotada por $\omega(G)$.

Um *caminho* em um grafo $G = (V, E)$ é uma sequência de vértices v_0, v_1, \dots, v_k , distintos dois a dois, tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, para todo $i = 0, \dots, k-1$. Neste caso, o número k é chamado de *comprimento do caminho*, o qual é usualmente denotado por $v_0v_1 \cdots v_k$.

Um *ciclo* de comprimento k , $k \geq 3$, em um grafo $G = (V, E)$ é um subgrafo de ordem k de G da forma $G' = (V', E')$, onde $V' = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ e $E' = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-1}, v_k\}, \{v_k, v_1\}\}$. Tal ciclo é denotado por $v_1v_2 \cdots v_kv_1$. Um *k-ciclo*, denotado por C^k , é um grafo G que é um ciclo de comprimento k quando visto como subgrafo de G .

Exemplo 1.40. Consideremos o grafo $G = (V, E)$ onde $V = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ e $E = \{\{v_0, v_1\}, \{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}, \{v_2, v_3\}, \{v_2, v_4\}, \{v_3, v_4\}, \{v_3, v_5\}, \{v_4, v_5\}, \{v_5, v_6\}\}$. O grafo G está representado na Figura 1.1. Temos que v_2v_4 , $v_0v_1v_3$ e $v_2v_3v_4v_5v_6$ são exemplos de caminhos em G . E $v_2v_3v_1v_2$, $v_5v_3v_2v_4v_5$, $v_1v_3v_4v_2v_1$ são exemplos de ciclos em G . O primeiro ciclo tem comprimento três; o segundo e o terceiro ciclos têm comprimento quatro cada.

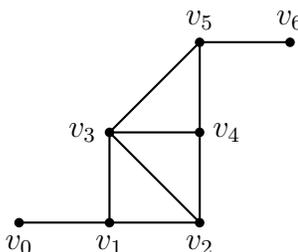


Figura 1.1: Grafo G

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *conexo* se existe um caminho ligando quaisquer dois vértices distintos. Dados $u, v \in V$, com $u \neq v$, definimos a *distância* de u a v por $d(u, v) =$

$\min\{k : \text{existe um caminho de } u \text{ a } v \text{ de comprimento } k\}$. Se não existe um caminho de u a v , então $d(u, v) = \infty$. O *diâmetro* de G é $\text{diam}(G) = \sup\{d(u, v) : u, v \in V, u \neq v\}$. A *cintura* de G , denotada por $g(G)$, é definida como o comprimento do menor ciclo em G ; se G não contém ciclos, então $g(G) = \infty$.

Proposição 1.41. ([12], pág. 8) *Todo grafo G contendo um ciclo satisfaz*

$$g(G) \leq 2 \cdot \text{diam}(G) + 1.$$

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ grafos. Dizemos que G_1 e G_2 são *isomorfos*, e escrevemos $G_1 \simeq G_2$, quando existe uma bijeção $\varphi : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $\{u, v\} \in E_1$ se, e somente se, $\{\varphi(u), \varphi(v)\} \in E_2$, para todos $u, v \in V_1$. Segue diretamente da definição de isomorfismo que $d(v) = d(\varphi(v))$, para todo $v \in V_1$, onde $d(v)$ e $d(\varphi(v))$ denotam os graus dos vértices v e $\varphi(v)$, respectivamente. Se $G_2 = G_1$, então dizemos que φ é um *automorfismo* do grafo G_1 . Denotamos por $\text{Aut}(G)$ o conjunto de todos os automorfismos de um grafo G . É fácil ver que $(\text{Aut}(G), \circ)$ forma um grupo, onde \circ é a composição de funções. Também, se $|V| = n$, então $\text{Aut}(G)$ é isomorfo a um subgrupo de S_n (grupo simétrico de grau n). Não é difícil mostrar que $\text{Aut}(G)$ é isomorfo a S_n se, e somente se, $G = K^n$.

Uma *k -coloração dos vértices* de um grafo G é uma função $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$. Colocando $V_i = c^{-1}(i)$, para $1 \leq i \leq k$, segue que V_1, V_2, \dots, V_k é uma partição de V . Uma *k -coloração* é própria se vértices adjacentes recebem cores distintas. O *número cromático* $\chi(G)$ é o menor número k tal que existe uma *k -coloração* de vértices própria de G . Analogamente, definimos uma *k -coloração de arestas* de G como sendo uma função $f : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ e dizemos que a *k -coloração* é própria se arestas adjacentes recebem cores distintas pela *k -coloração* f . Assim, definimos o *índice cromático* $\chi'(G)$ como sendo o menor k tal que existe uma *k -coloração de arestas* própria de G .

Dado um grafo G , sempre temos que $\chi(G) \geq \omega(G)$ e $\chi'(G) \geq \Delta(G)$, onde $\Delta(G)$ é o grau máximo de vértices de G . Para grafos bipartidos, temos o seguinte resultado devido à König.

Teorema 1.42. (König 1916) ([12], pág. 103) *Todo grafo bipartido satisfaz $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

No próximo resultado, intitulado como Teorema de Vizing, vemos que o índice cromático pertence a um intervalo pequeno.

Teorema 1.43. (Vizing 1964) ([12], pág. 103) *Todo grafo G satisfaz*

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Dizemos que um grafo G é *crítico* se é conexo, $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ e para qualquer aresta e de G temos $\chi'(G \setminus \{e\}) < \chi'(G)$. Na Figura 1.2 temos um exemplo de grafo crítico.

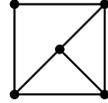


Figura 1.2: Exemplo de grafo crítico.

Juntamente com a definição de grafo crítico, temos um lema que utilizaremos posteriormente. Lembremos que $\delta(G)$ denota o grau mínimo de vértices de G .

Lema 1.44. (Lema da Adjacência de Vizing) ([18], pág. 24) *Se G é um grafo crítico, então G tem, no mínimo, $\Delta(G) - \delta(G) + 2$ vértices de grau máximo.*

Observação 1.45. Se G é um grafo com $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, então existe um subgrafo G_1 de G tal que $\chi'(G_1) = \Delta(G) + 1$ e para qualquer aresta e de G_1 temos $\chi'(G_1 \setminus \{e\}) = \Delta(G)$. Podemos obter de G_1 um subgrafo conexo H tal que $\chi'(H) = \Delta(G) + 1$. Assim, o grafo H é crítico com grau máximo $\Delta(G)$. Se x é um vértice de H com grau $\Delta(G)$, então pelo Lema da Adjacência de Vizing, H tem pelo menos $\Delta(G) - d_H(v) + 2$ vértices de grau $\Delta(G)$, para qualquer vértice v adjacente a x . Portanto, se G é um grafo tal que para todo vértice de grau máximo existe uma aresta uv tal que $\Delta(G) - d(v) + 2$ é maior que o número de vértices de grau máximo em G , então pelo argumento acima e o Teorema de Vizing, obtemos $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Grafos divisores de zero

Neste capítulo, apresentamos a definição de grafo divisor de zero de um anel comutativo com identidade, bem como os resultados relacionados ao assunto. O capítulo está dividido em sete seções. Na primeira seção apresentamos a definição de grafo divisor de zero, bem como exemplos e resultados básicos relacionados à sua estrutura, como diâmetro e cintura. Na seção seguinte, obtemos informações sobre o anel a partir do estudo do tamanho e da forma do grafo divisor de zero. Na terceira seção, relacionamos isomorfismos de anéis com isomorfismos de grafos. Mais precisamente, discutimos condições em que grafos divisores de zero isomorfos tenham seus respectivos anéis isomorfos. Na seção 4 discutimos a estrutura do conjunto de divisores de zero a partir do grafo divisor de zero do anel. Na seção seguinte veremos que a descrição dos possíveis diâmetros dos grafos divisores de zero de um anel e de seu anel de polinômios é dada em termos das propriedades do anel. A sexta seção é destinada a um breve estudo das colorações de vértices e de arestas do grafo divisor de zero. E, finalmente, na última seção apresentamos resultados relacionados a automorfismos de grafos divisores de zero.

Observamos que em todo este capítulo, o termo “anel” significa “anel comutativo com identidade”.

2.1 Grafo divisor de zero

O conceito de grafo divisor de zero foi introduzido em 1988 por Istvan Beck [9]. Beck apresentou a ideia de associar um grafo “divisor de zero” com um anel comutativo, com o intuito principal de estudar colorações. Contudo, usou uma definição ligeiramente diferente

da que apresentaremos. Na definição apresentada por Beck, os vértices do grafo divisor de zero são todos os elementos do anel comutativo R ; e distintos vértices x e y são adjacentes se $xy = 0$. Denotemos o grafo divisor de zero de Beck por $\Gamma_0(R)$ (Beck usou apenas R para denotá-lo). Em $\Gamma_0(R)$, o vértice 0 é adjacente a todos os outros vértices, mas os elementos de R que não são divisores de zero são adjacentes a 0 apenas.

Apresentamos, agora, a definição de grafo divisor de zero que usaremos. Essa definição foi dada por D. F. Anderson e P. S. Livingston em [5].

Definição 2.1. Seja R um anel. O *grafo divisor de zero* de R é definido por

$$\Gamma(R) = (V(\Gamma(R)), E(\Gamma(R)))$$

em que $V(\Gamma(R)) = D(R)^*$ e $E(\Gamma(R)) = \{\{x, y\} : x, y \in V(\Gamma(R)), x \neq y \text{ e } x \cdot y = 0\}$.

Notemos que $\Gamma(R)$ é um subgrafo induzido de $\Gamma_0(R)$. Durante este capítulo, ficará claro que $\Gamma(R)$ tem uma estrutura muito mais rica que $\Gamma_0(R)$ e reflete melhor as propriedades de $D(R)$.

Segue diretamente da definição que $\Gamma(R)$ é um grafo nulo se, e somente se, R é um domínio de integridade. Para evitar que $\Gamma(R)$ seja um grafo nulo, vamos supor implicitamente que o anel R não é um domínio de integridade.

A seguir, damos alguns exemplos de grafos divisores de zero. Tais exemplos mostram que anéis que não são isomorfos podem ter o mesmo grafo divisor de zero.

Alguns dos anéis abaixo têm como elementos classes, como por exemplo $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$. Para não sobrecarregar a notação, em muitas situações, omitiremos as barras das classes, isto é, onde se lê $x \in \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$, o correto é $\bar{x} \in \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$.

Exemplo 2.2. Consideremos os anéis $R = \mathbb{Z}_4$ e $S = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$. Então $D(R)^* = \{\bar{2}\}$ e $D(S)^* = \{x\}$ e seus respectivos grafos divisores de zero são:

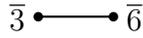
$$\begin{array}{c} \bullet \\ \hline 2 \end{array}$$

Figura 2.1: $\Gamma(\mathbb{Z}_4)$

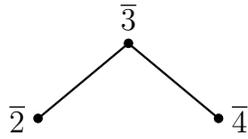
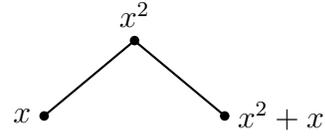
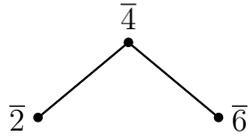
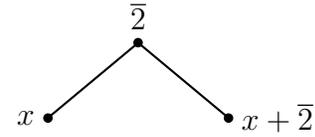
$$\begin{array}{c} \bullet \\ x \end{array}$$

Figura 2.2: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}\right)$

Exemplo 2.3. Dados $R = \mathbb{Z}_9$, $S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $T = \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, x, x + \bar{1}, x + \bar{2}, \bar{2}x, \bar{2}x + \bar{1}, \bar{2}x + \bar{2}\}$, temos que $D(R)^* = \{\bar{3}, \bar{6}\}$, $D(S)^* = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0})\}$ e $D(T)^* = \{x, \bar{2}x\}$. Seus respectivos grafos divisores de zero são:

Figura 2.3: $\Gamma(\mathbb{Z}_9)$ Figura 2.4: $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ Figura 2.5: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)}\right)$

Exemplo 2.4. Sejam $R = \mathbb{Z}_6$, $S = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$, $T = \mathbb{Z}_8$ e $V = \frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(2x, x^2 - 2)}$. Então $D(R)^* = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$, $D(S)^* = \{x, x^2, x^2 + x\}$, $D(T)^* = \{\bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ e $D(V)^* = \{\bar{2}, x, x + \bar{2}\}$ e segue que seus respectivos grafos divisores de zero são dados por:

Figura 2.6: $\Gamma(\mathbb{Z}_6)$ Figura 2.7: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}\right)$ Figura 2.8: $\Gamma(\mathbb{Z}_8)$ Figura 2.9: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(2x, x^2 - 2)}\right)$

Observação 2.5. Beck [9] mostrou que os anéis dados nos Exemplos 2.2, 2.3 e 2.4 são os únicos anéis, a menos de isomorfismos, que têm como grafo divisor de zero, respectivamente, K^1 , K^2 e $K^{1,2}$.

Exemplo 2.6. Consideremos $R = \frac{\mathbb{Z}_2[x, y]}{(x^2, xy, y^2)} = \{\bar{0}, \bar{1}, x, y, x + \bar{1}, y + \bar{1}, x + y, x + y + \bar{1}\}$ e $S = \frac{\mathbb{F}_4[x]}{(x^2)} = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, x, \alpha x, \alpha^2 x, 1 + x, 1 + \alpha x, 1 + \alpha^2 x, \alpha + x, \alpha + \alpha x, \alpha + \alpha^2 x, \alpha^2 + x, \alpha^2 + \alpha x, \alpha^2 + \alpha^2 x\}$, onde $\mathbb{F}_4 = \{0, 1, \alpha, \alpha^2\}$ e $\alpha^2 = \alpha + 1$. Então $D(R)^* = \{x, y, x + y\}$ e $D(S)^* = \{x, \alpha x, \alpha^2 x\}$. Os grafos divisores de zero de R e S podem ser vistos nas Figuras 2.10 e 2.11, respectivamente.

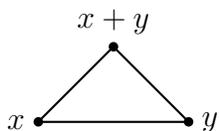


Figura 2.10: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x,y]}{(x^2,xy,y^2)}\right)$

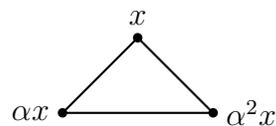


Figura 2.11: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{F}_4[x]}{(x^2)}\right)$

Como pode ser observado nos exemplos anteriores, todos os grafos conexos com menos que quatro vértices podem ser realizados como grafo divisor de zero de algum anel. Notemos que existem onze grafos com quatro vértices (a menos de isomorfismos), conforme Figura 2.12.

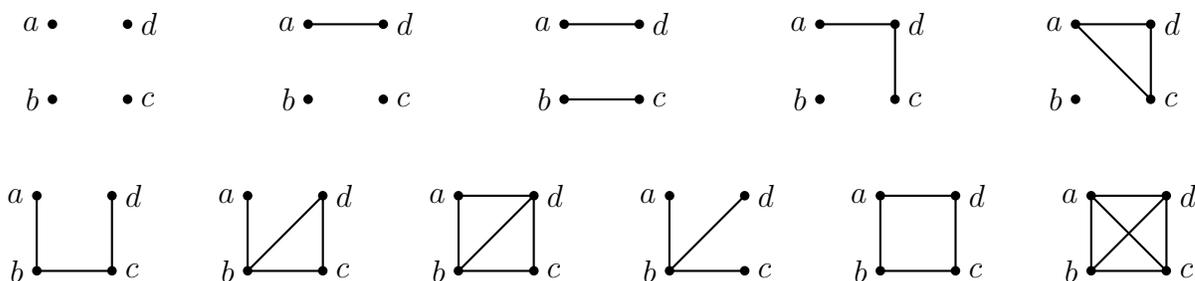


Figura 2.12: Grafos com quatro vértices (a menos de isomorfismo).

Desses onze grafos, somente os seis últimos são conexos. Dos seis conexos apenas os três últimos podem ser realizados como $\Gamma(R)$, como veremos a seguir.

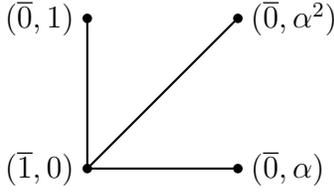
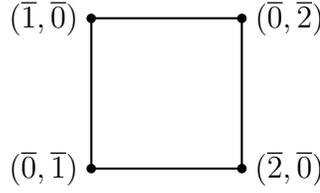
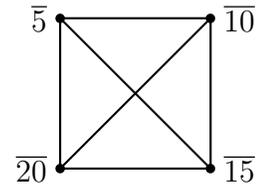
Exemplo 2.7. Consideremos

$$R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4 = \{(\bar{0}, 0), (\bar{0}, 1), (\bar{0}, \alpha), (\bar{0}, \alpha^2), (\bar{1}, 0), (\bar{1}, 1), (\bar{1}, \alpha), (\bar{1}, \alpha^2)\},$$

onde $\alpha^2 = \alpha + 1$. Temos que $D(R)^* = \{(\bar{0}, 1), (\bar{1}, 0), (\bar{0}, \alpha), (\bar{0}, \alpha^2)\}$ cujo grafo divisor é dado na Figura 2.13.

Agora, se $S = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$, então $D(S)^* = \{(\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{0})\}$ donde obtemos o grafo da Figura 2.14.

Seja $T = \mathbb{Z}_{25}$. Temos que $D(T)^* = \{\bar{5}, \bar{10}, \bar{15}, \bar{20}\}$ e seu grafo divisor de zero pode ser visualizado na Figura 2.15.

Figura 2.13: $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{F}_4)$ Figura 2.14: $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)$ Figura 2.15: $\Gamma(\mathbb{Z}_{25})$

O grafo Γ com vértices $\{a, b, c, d\}$ e arestas $\{a, b\}$, $\{b, c\}$ e $\{c, d\}$ não pode ser realizado como $\Gamma(R)$ para algum anel R . De fato, suponhamos que exista um anel R com $D(R)^* = \{a, b, c, d\}$ e somente os produtos nulos $ab = 0$, $bc = 0$ e $cd = 0$ entre os elementos de R^* . Como $(a+c)b = ab + cb = 0$, então $a+c \in D(R)$. Assim, $a+c$ deve ser 0, a , b , c ou d . Mas, notemos que se $a+c = a$ obtemos $c = 0$, se $a+c = c$ temos $a = 0$, se $a+c = d$, segue que $db = 0$ e não temos essa relação em R^* e se $a+c = 0$, então $0 = (a+c)d = ad + cd = ad$, o que não ocorre. Logo, $a+c = b$. Analogamente, como $(b+d)c = bc + dc = 0$, temos $b+d \in D(R)^*$ e procedendo como acima, obtemos $b+d = c$. Dessa forma, $b = a+c = a+b+d$ e, então, $a+d = 0$. Portanto, $bd = b(-a) = -(ab) = 0$, contradição. Para os outros dois grafos conexos com quatro vértices a demonstração é análoga.

Como vimos nos exemplos anteriores, $\Gamma(R)$ pode ser um 3-ciclo ou um 4-ciclo. Mas, na verdade, $\Gamma(R)$ não pode ser um n -ciclo para todo $n \geq 5$. De fato, suponhamos que exista um anel R tal que $D(R)^* = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $E(\Gamma(R)) = \{\{a_i, a_{i+1}\} : 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{\{a_n, a_1\}\}$ com $n \geq 5$. Para $1 \leq i \leq n-2$, temos $(a_i + a_{i+2})a_{i+1} = a_i a_{i+1} + a_{i+2} a_{i+1} = 0$, ou seja, $a_i + a_{i+2} \in D(R)$. Então $a_i + a_{i+2}$ deve ser 0, a_1, a_2, \dots, a_n . Porém, notemos que se $a_i + a_{i+2} = 0$, então $0 = (a_i + a_{i+2})a_{i+3} = a_i a_{i+3} + a_{i+2} a_{i+3} = a_i a_{i+3}$, o que não ocorre. Também, se $a_i + a_{i+2} = a_i$ então $a_{i+2} = 0$. Se $a_i + a_{i+2} = a_{i+2}$, então $a_i = 0$. Se $a_i + a_{i+2} = a_j$, $1 \leq j \leq i-1$ ou $i+3 \leq j \leq n$, então $a_{i+1} a_j = a_{i+1}(a_i + a_{i+2}) = a_{i+1} a_i + a_{i+1} a_{i+2} = 0$, donde $\{a_{i+1}, a_j\} \in E(\Gamma(R))$. Desse modo, devemos ter $a_{i+1} = a_i + a_{i+2}$. Analogamente, $a_{i+2} = a_{i+1} + a_{i+3}$. Assim, $a_{i+1} = a_i + a_{i+2} = a_i + a_{i+1} + a_{i+3}$ e, então, $a_i + a_{i+3} = 0$. Portanto, $a_{i+1} a_{i+3} = a_{i+1}(-a_i) = 0$, uma contradição.

Como vimos, $\Gamma(R)$ não pode ser um n -ciclo para todo $n \geq 5$. Porém, para cada $n \geq 3$, existe um grafo divisor de zero com um n -ciclo. De fato, seja $R_n = \frac{\mathbb{Z}_2[x_1, \dots, x_n]}{I}$, onde $I = (x_1^2, \dots, x_n^2, x_1 x_2, x_2 x_3, \dots, x_n x_1)$. Temos que $\Gamma(R_n)$ tem um n -ciclo, a saber, $\overline{x_1} \overline{x_2} \cdots \overline{x_n} \overline{x_1}$,

pois para todo $1 \leq i \leq n$, $(x_i + I)(x_{i+1} + I) = x_i x_{i+1} + I = 0 + I$ e $(x_n + I)(x_1 + I) = x_n x_1 + I = 0 + I$.

O próximo resultado fornece uma classe de anéis cujo grafo divisor de zero é um grafo bipartido completo.

Proposição 2.8. ([5]) *Sejam A e B domínios de integridade e $R = A \times B$. Então $\Gamma(R)$ é um grafo bipartido completo com $|\Gamma(R)| = |A| + |B| - 2$.*

Demonstração. Seja $x = (a_1, b_1) \in D(R)^*$, então $x \neq (0, 0)$ e existe $y = (a_2, b_2) \in R$, $y \neq (0, 0)$, tal que $xy = (0, 0)$, isto é, $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (0, 0)$ e segue que $a_1 a_2 = 0$ e $b_1 b_2 = 0$. Como A e B são domínios de integridade, obtemos $a_1 = 0$ ou $a_2 = 0$ e $b_1 = 0$ ou $b_2 = 0$. Assim, se $x \in D(R)^*$ temos $x = (a_1, 0)$ ou $x = (0, b_1)$, $a_1 \in A^*$ e $b_1 \in B^*$. Portanto,

$$V(\Gamma(R)) = D(R)^* = V_1 \cup V_2 \text{ (união disjunta)}$$

em que $V_1 = \{(a, 0) : a \in A^*\}$ e $V_2 = \{(0, b) : b \in B^*\}$.

É claro que para quaisquer $x \in V_1$ e $y \in V_2$ temos $\{x, y\} \in E(\Gamma(R))$. Além disso,

$$|\Gamma(R)| = |V(\Gamma(R))| = |V_1| + |V_2| = |A| - 1 + |B| - 1 = |A| + |B| - 2.$$

□

Observemos que se $A = \mathbb{Z}_2$ na proposição anterior, então $V(\Gamma(R)) = \{(\bar{1}, 0)\} \cup V_2$ (união disjunta) em que $V_2 = \{(\bar{0}, b) : b \in B^*\}$. Assim, $\Gamma(R)$ é um grafo estrela com $|\Gamma(R)| = |\mathbb{Z}_2| + |B| - 2 = |B|$.

Nas Figuras 2.16 e 2.17 são dados dois exemplos de grafos bipartidos completos.

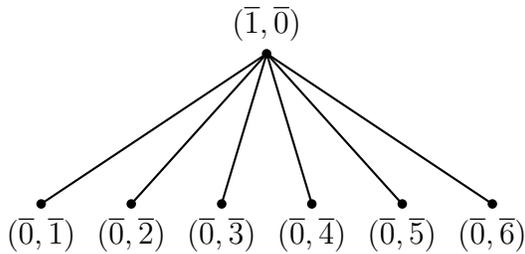


Figura 2.16: $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_7) \simeq K^{1,6}$

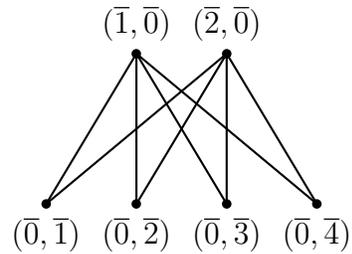


Figura 2.17: $\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5) \simeq K^{2,4}$

Teorema 2.9. ([5]) *Seja R um anel. Então $\Gamma(R)$ é finito se, e somente se, R é finito. Em particular, se $1 \leq |\Gamma(R)| < \infty$, então R é finito e não é corpo.*

Demonstração. Vamos supor que $\Gamma(R)$ é finito e não nulo, ou seja, $D(R)^*$ é finito e não vazio. Então existem $x, y \in D(R)^*$ tais que $xy = 0$.

Seja $I = \text{Ann}(x)$. Como $I \subset D(R)$, então I é finito. E como $yx = 0$, temos que $ryx = 0$ para todo $r \in R$, isto é, $ry \in I$ para todo $r \in R$.

Se R fosse infinito, existiria $i \in I$ com $J = \{r \in R : ry = i\}$ infinito. Assim, para quaisquer $r, s \in J$ teríamos $(r - s)y = ry - sy = i - i = 0$ e, então, $\text{Ann}(y)$ seria infinito e, conseqüentemente, $D(R)$ seria infinito, uma contradição. Logo, R é finito.

Agora, se R é finito, é claro que $\Gamma(R)$ é finito. □

No que segue, mostramos que os grafos divisores de zero são todos conexos e têm diâmetro pequeno. Como veremos, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. Deste modo, se $x, y \in D(R)^*$ e $x \neq y$, três casos podem ocorrer: $xy = 0$, $xz = zy = 0$ para algum $z \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$, ou $xz_1 = z_1z_2 = z_2y = 0$ para distintos $z_1, z_2 \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$. Abaixo ilustramos os três possíveis casos.

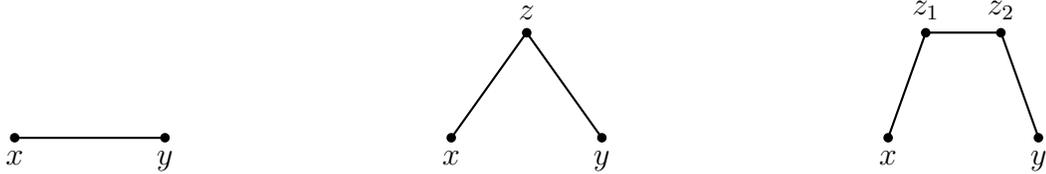


Figura 2.18: Possíveis casos para $d(x, y)$.

Teorema 2.10. ([5]) *Para todo anel R , $\Gamma(R)$ é conexo e $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$.*

Demonstração. Sejam $x, y \in D(R)^*$ distintos. Se $xy = 0$, então $d(x, y) = 1$. Assim, suponhamos $xy \neq 0$. Analisemos os possíveis casos. Se $x^2 = 0$ e $y^2 = 0$, então $x(xy) = 0$ e $(xy)y = 0$, donde $x(xy)y$ é um caminho de comprimento dois e $d(x, y) = 2$. Se $x^2 = 0$ e $y^2 \neq 0$ então existe $b \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$ tal que $by = 0$. Se $bx = 0$, temos $xb y$ um caminho de comprimento dois. Agora, se $bx \neq 0$, então $x(xb)y$ é um caminho de comprimento dois. De modo análogo, obtemos $d(x, y) = 2$ se $x^2 \neq 0$ e $y^2 = 0$. Assim, vamos supor que $xy \neq 0$, $x^2 \neq 0$ e $y^2 \neq 0$. Então existem $a, b \in D(R)^* \setminus \{x, y\}$ tais que $ax = by = 0$. Se $a = b$,

o caminho xay tem comprimento dois. Suponhamos $a \neq b$. Se $ab = 0$, temos $xaby$ um caminho de comprimento três e, assim, $d(x, y) = 3$. Se $ab \neq 0$, temos $x(ab)y$ um caminho de comprimento dois, donde $d(x, y) = 2$. Logo, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. \square

Quanto ao grafo divisor de zero de Beck, $\Gamma_0(R)$, temos $\text{diam}(\Gamma_0(R)) = 1$ para $R \approx \mathbb{Z}_2$, e $\text{diam}(\Gamma_0(R)) = 2$ para todos os outros anéis R , pois $x0y$ é um caminho de comprimento dois entre quaisquer elementos distintos $x, y \in R^*$.

Observamos que da Proposição 2.8 temos uma classe de anéis que tem grafo divisor de zero sem ciclos. Em [5], David F. Anderson e Philip S. Livingston mostraram que se $\Gamma(R)$ possui um ciclo, então sua cintura é menor ou igual a sete. Além disso, mostraram que para anéis comutativos Artinianos (em particular, para anéis comutativos finitos) tais que $\Gamma(R)$ contém um ciclo, então $g(\Gamma(R)) \leq 4$. Mas esta última afirmação é verdadeira para um caso mais geral, como veremos no próximo resultado obtido por S. B. Mulay [16] e F. DeMeyer e K. Schneider [11] independentemente. Entretanto, a demonstração aqui apresentada foi feita em 2005 por uma estudante universitária chamada Marie Jameson.

Teorema 2.11. *Se R é um anel tal que $\Gamma(R)$ contém um ciclo, então $g(\Gamma(R)) \leq 4$.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.10, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$. Logo, segue da Proposição 1.41 que $g(\Gamma(R)) \leq 2 \cdot \text{diam}(\Gamma(R)) + 1$, isto é, $g(\Gamma(R)) \leq 7$. Mas vamos supor $n = g(\Gamma(R)) = 5, 6$ ou 7 . Seja $v_1v_2 \dots v_nv_1$ um ciclo de comprimento minimal em $\Gamma(R)$. Notemos que $v_1v_3 \neq 0$ pois, caso contrário, $v_1v_3 \dots v_nv_1$ seria um ciclo de comprimento menor que $v_1v_2 \dots v_nv_1$. Assim, consideremos o subgrafo $\Gamma'(R)$ de $\Gamma(R)$ gerado pelos vértices v_1, \dots, v_n, v_1v_3 .

Se $v_1v_3 \neq v_i$ para $1 \leq i \leq n$, como $v_2(v_1v_3) = v_1(v_2v_3) = 0$ e $v_4(v_1v_3) = v_1(v_4v_3) = 0$, $\Gamma'(R)$ e, conseqüentemente, $\Gamma(R)$ contém um ciclo $v_2v_3v_4(v_1v_3)v_2$ de comprimento 4, uma contradição. Logo, $v_1v_3 = v_i$ para algum $1 \leq i \leq n$. Agora, $v_1v_3 \neq v_2$, caso contrário, $v_2v_4 = v_1v_3v_4 = 0$ e, assim, $v_2v_3v_4v_2$ seria um ciclo de comprimento menor que n , uma contradição. Analogamente, $v_1v_3 \neq v_4$ e $v_1v_3 \neq v_n$. Assim, v_1v_3 é adjacente aos vértices v_2, v_4 e v_n e, com isso, existem, no mínimo, três arestas ligadas a v_1v_3 em $\Gamma'(R)$. Logo, existe uma aresta extra em $\Gamma'(R)$ que não está no ciclo original $v_1v_2 \dots v_nv_1$. Desta forma, existe um ciclo de comprimento menor que n em $\Gamma'(R)$ e, conseqüentemente, em $\Gamma(R)$. Portanto, devemos ter $g(\Gamma(R)) \leq 4$. \square

Notemos que se R é um domínio de integridade, $R \approx \mathbb{Z}_4$ ou $R \approx \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$, então $\Gamma_0(R)$ é um grafo estrela $K^{1,\alpha}$, onde $\alpha = |R^*|$. Assim, $g(\Gamma_0(R)) = \infty$. Agora, se R não é isomorfo a algum dos anéis citados acima, então $g(\Gamma_0(R)) = 3$, pois 0 e quaisquer divisores de zero distintos x e y , com $xy = 0$, determinam um ciclo de comprimento três em $\Gamma_0(R)$.

2.2 O que o tamanho e a forma de $\Gamma(R)$ implicam

A partir da análise da forma do grafo divisor de zero de um anel, podemos obter informações a respeito do anel. Estudaremos a estrutura do anel quando seu grafo divisor de zero apresenta um vértice adjacente a todos os outros vértices do grafo. Veremos também quais anéis apresentam grafo divisor de zero completo. Por fim, mostraremos qual a única forma que um grafo estrela com no mínimo quatro vértices pode ser realizado como $\Gamma(R)$.

O primeiro resultado desta seção refere-se ao tamanho de $\Gamma(R)$. Este resultado é uma generalização do Teorema 2.9 e exige apenas que todo vértice de $\Gamma(R)$ tenha grau finito.

Teorema 2.12. ([1]) *Se R é um anel tal que R não é um domínio de integridade e cada vértice de $\Gamma(R)$ tem grau finito, então R é um anel finito.*

Demonstração. Suponhamos que R seja um anel infinito. Sejam $x, y \in R^*$ tais que $xy = 0$. Então, dado $r \in R^*$ temos $(yr)x = r(yx) = 0$, ou seja, $yR^* \subseteq \text{Ann}(x)$. Se yR^* é infinito, então x tem grau infinito em $\Gamma(R)$, uma contradição. Assim, yR^* é finito, digamos $yR^* = \{yb_1, \dots, yb_r\}$ e seja $A_i = \{a \in R : ya = yb_i\}$, $i = 1, \dots, r$. Como R é infinito, temos que $\cup_{i=1}^r A_i$ é um conjunto infinito e, então, existe j , $1 \leq j \leq r$, tal que A_j é infinito. Assim, para todo $a \in A_j$ temos $yb_j = ya$, ou ainda, $y(b_j - a) = 0$ e, com isso, $\{b_j - a : a \in A_j\} \subseteq \text{Ann}(y)$. Como A_j é infinito, o conjunto $\{b_j - a : a \in A_j\}$ é infinito e, conseqüentemente, $\text{Ann}(y)$ é infinito. Logo, y tem grau infinito em $\Gamma(R)$, uma contradição. Portanto, R é finito. \square

Como conclusão do Teorema 2.9 e do teorema anterior, temos que se R não é um domínio de integridade então $|D(R)| < \infty$ se, e somente se, $|R| < \infty$ se, e somente se, todo vértice de $\Gamma(R)$ tem grau finito.

Dado $a \in R$, dizemos que a é *idempotente* quando $a^2 = a$.

Lema 2.13. *Seja R um anel. Se $a \in R^*$ é idempotente, então $R = Ra \oplus R(1-a)$.*

Demonstração. Dado $r \in R$, temos $r = r + ra - ra = ra + r(1-a)$, donde $R = Ra + R(1-a)$. Agora, se $x \in Ra \cap R(1-a)$, então $x = ra = s(1-a) = s - sa$ com $r, s \in R$. Multiplicando por a em ambos os lados obtemos $ra = (ra)a = (s - sa)a = sa - sa^2 = sa - sa = 0$, isto é, $x = 0$ e $Ra \cap R(1-a) = \{0\}$. Portanto, $R = Ra \oplus R(1-a)$. \square

O próximo resultado refere-se à existência de vértices em $\Gamma(R)$ que são adjacentes a todos os outros vértices.

Teorema 2.14. *([5]) Seja R um anel. Então existe $a \in V(\Gamma(R))$ adjacente a qualquer outro vértice se, e somente se, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$, onde A é um domínio de integridade, ou $D(R)$ é um ideal anulador (e, portanto, um ideal primo).*

Demonstração. Suponhamos que $a \in D(R)^*$ seja adjacente a qualquer outro vértice e que $D(R)$ não seja um ideal anulador. Notemos que $Ann(a) \subseteq D(R)$ e que $a \notin Ann(a)$, caso contrário, $D(R) = Ann(a)$, ou seja, $D(R)$ seria um ideal anulador. Assim, $Ann(a)$ é maximal dentre os ideais anuladores e da Proposição 1.17 segue que $Ann(a)$ é um ideal primo. Se $a^2 \neq a$ temos $a^2a = 0$ e $a^2 \in Ann(a)$ que é ideal primo, assim, $a \in Ann(a)$, uma contradição. Logo $a^2 = a$ e $R = Ra \oplus R(1-a)$ pelo lema anterior. Note que $a = 1 \cdot a + 0(1-a)$ e podemos supor que $R = R_1 \times R_2$, com $(1,0)$ adjacente a todo vértice distinto de $(1,0)$. Assim, para qualquer $c \in R_1$, $c \neq 1$, como $(c,0)$ é um divisor de zero, temos $(c,0) = (c,0)(1,0) = (0,0)$, que é uma contradição exceto quando $c = 0$. Logo, $R_1 \approx \mathbb{Z}_2$.

Se R_2 não é domínio de integridade, então existe $b \in D(R_2)^*$. Assim, $(1,b)$ é divisor de zero de R e, como $(1,b)(1,0) = (1,0)$, temos que $(1,b)$ não é adjacente a $(1,0)$, contradição. Então, R_2 deve ser domínio de integridade e segue que $R \approx \mathbb{Z}_2 \times R_2$.

Observemos que se $D(R)$ é um ideal anulador, como $D(R) = \bigcup_{d \neq 0} Ann(d)$, então $D(R)$ é maximal dentre os ideais anuladores e, assim, é primo pela Proposição 1.17.

Reciprocamente, se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$, com A um domínio de integridade, segue da Proposição 2.8 que $(\bar{1},0)$ é adjacente a qualquer outro vértice. Se $D(R) = Ann(a)$ para algum $a \in R^*$, então $ba = 0$ para todo $b \in D(R)$, donde obtemos que a é adjacente a qualquer outro vértice. \square

De acordo com o teorema acima, se R é um anel reduzido, isto é, $\text{Nil}(R) = \{0\}$ e $\Gamma(R)$ tem um vértice adjacente a qualquer outro vértice, então R é da forma $\mathbb{Z}_2 \times A$, com A um domínio de integridade. De fato, suponhamos, por absurdo, que $D(R) = \text{Ann}(a)$ em que $a \in R^*$ é adjacente a qualquer outro vértice de $\Gamma(R)$. Como $a \in D(R) = \text{Ann}(a)$, temos $a^2 = 0$ e, com isso, $a \in \text{Nil}(R) = \{0\}$, um absurdo!

Corolário 2.15. *Seja R um anel Noetheriano. Existe um vértice de $\Gamma(R)$ que é adjacente a qualquer outro vértice se, e somente se, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$, onde A é um domínio de integridade (Noetheriano), ou $D(R)$ é um ideal (primo) de R . Além disso, se $\dim_{K\text{rull}} R = 0$, então ou $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$, onde A é um corpo, ou $D(R) = \text{Nil}(R)$.*

Demonstração. A primeira parte decorre do Teorema 2.14 e da Proposição 1.21 em que $D(R)$ é ideal anulador se, e somente se, $D(R)$ é ideal primo. Agora, suponhamos que $\dim_{K\text{rull}} R = 0$. Supondo que seja falso que $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$, com A um corpo, segue que $\Gamma(R)$ possui um vértice adjacente a qualquer outro vértice se, e somente se, $D(R)$ é um ideal primo. Mas, como $\dim_{K\text{rull}} R = 0$, isso ocorre se, e somente se, $D(R) = \text{Nil}(R)$, pela Proposição 1.27. \square

Corolário 2.16. *Seja R um anel finito. Existe um vértice de $\Gamma(R)$ adjacente a qualquer outro vértice se, e somente se, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, onde K é um corpo finito, ou R é local. Além disso, para algum número primo p e inteiro $n \geq 1$, $|\Gamma(R)| = |K| = p^n$ se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, e $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ se R é local.*

Demonstração. A primeira parte segue do corolário anterior, usando o fato que domínio de integridade finito é um corpo e a Proposição 2.8. Se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, onde K é um corpo finito, pela Proposição 2.8, $\Gamma(R)$ é um grafo estrela e $|\Gamma(R)| = |K| = p^n$, para algum primo p e inteiro $n \geq 1$. Se R é um anel local finito, segue do item (ii) da Proposição 1.25 que $|\Gamma(R)| = |D(R)^*| = p^n - 1$, para algum primo p e algum inteiro $n \geq 1$. \square

Exemplo 2.17. Para cada inteiro $n \geq 1$, seja $R_n = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^{n+1})}$. É fácil ver que R_n é um anel local finito cujo ideal maximal é $D(R_n) = M = \frac{(x)}{(x^{n+1})}$. Dado $\bar{f} \in M^*$, $\bar{f} = a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + (x^{n+1})$, temos que se $\overline{x^n} = x^n + (x^{n+1})$, então

$$\overline{f x^n} = (a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + (x^{n+1}))(x^n + (x^{n+1})) =$$

$$= a_1x^{n+1} + a_2x^{n+2} + \dots + a_nx^{2n} + (x^{n+1}) = \bar{0}.$$

Assim, \bar{x}^n é um vértice de $\Gamma(R_n)$ que é adjacente aos demais vértices. E mais, é o único vértice com esta propriedade. Basta notarmos que se $\bar{g} = b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + (x^{n+1}) \in M$ é adjacente aos demais, então dado $\bar{x} = x + (x^{n+1}) \in M$ devemos ter $\bar{x}\bar{g} = b_1x^2 + b_2x^3 + \dots + b_nx^{n+1} + (x^{n+1}) = \bar{0}$, ou seja, se $b_1x^2 + b_2x^3 + \dots + b_{n-1}x^n \in (x^{n+1})$. Logo, $\bar{g} = \bar{x}^n$.

Para $n \geq 3$ temos que $\Gamma(R_n)$ não é um grafo estrela, uma vez que os vértices $x^{n-1} + x^n + (x^{n+1})$ e $x^{n-1} + (x^{n+1})$ são adjacentes, pois

$$(x^{n-1} + x^n + (x^{n+1}))(x^{n-1} + (x^{n+1})) = x^{2n-2} + x^{2n-1} + (x^{n+1}) = \bar{0}$$

se $n \geq 3$. Observemos que, pelo Corolário 2.16, $|\Gamma(R_n)| = 2^n - 1$. Para ilustrar este exemplo, consideremos dois casos particulares:

(i) Se $n = 2$, obtemos $R_2 = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$ cujo grafo divisor de zero pode ser visto no Exemplo 2.4.

(ii) Se $n = 3$, então $R_3 = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4)}$ cujo ideal maximal é

$$M = D(R_3) = \frac{(x)}{(x^4)} = \{a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + (x^4) : a_i \in \mathbb{Z}_2\} = \{0, x, x^2, x^3, x + x^2, x + x^3, x^2 + x^3, x + x^2 + x^3\}.$$

E $\Gamma(R_3)$ está representado na Figura 2.19. Como podemos observar, existe um vértice adjacente a todo outro vértice mas $\Gamma(R_3)$ não é um grafo estrela.

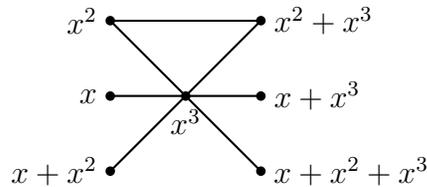


Figura 2.19: $\Gamma\left(\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4)}\right)$

No próximo resultado, determinamos quando $\Gamma(R)$ é um grafo completo. Exceto para o caso em que $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, o próximo resultado mostra que devemos ter $x^2 = 0$ para todo $x \in D(R)$, isto é, $D(R)^2 = \{0\}$ quando $\Gamma(R)$ é completo.

Teorema 2.18. ([5]) *Seja R um anel. Então $\Gamma(R)$ é completo se, e somente se, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $xy = 0$ para todos $x, y \in D(R)$.*

Demonstração. Vamos supor que $\Gamma(R)$ seja completo e que exista $a \in D(R)$ com $a^2 \neq 0$. Mostraremos que $a^2 = a$. Se $a^2 \neq a$, então $a^3 = a^2a = 0$, pois $\Gamma(R)$ é completo. Assim, $a^2(a + a^2) = 0$, com $a^2 \neq 0$ de modo que $a + a^2 \in D(R)$. Se $a + a^2 = a$ então $a^2 = 0$, uma contradição. Daí, $a + a^2 \neq a$ e, assim, como $\Gamma(R)$ é completo, segue que $a^2 = a^2 + a^3 = a(a + a^2) = 0$, uma contradição pois $a^2 \neq 0$. Logo, $a^2 = a$ e como na demonstração do Teorema 2.14 temos que $R \approx \mathbb{Z}_2 \times A$ onde A é um domínio de integridade. Pela Proposição 2.8, $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times A)$ é um grafo bipartido completo. Assim, como $\Gamma(R)$ é completo, devemos ter $A = \mathbb{Z}_2$. Se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, segue da Proposição 2.8 que $\Gamma(R)$ é completo. E se $xy = 0$ para todos $x, y \in D(R)$, por definição, $\Gamma(R)$ é completo. \square

Seja R um anel comutativo finito que não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Pelo Corolário 2.16 e Teorema 2.18, $\Gamma(R)$ é completo se, e somente se, R é um anel local com ideal maximal M e $M^2 = \{0\}$. Contudo, isso não é verdadeiro se R não é finito. Por exemplo, se $D(R)^2 = \{0\}$, então pelo Teorema de McCoy, $D(R[x])^2 = \{0\}$. Como $D(\mathbb{Z}_4)^2 = (\{\bar{0}, \bar{2}\})^2 = \{\bar{0}\}$ temos $D(\mathbb{Z}_4[x])^2 = \{\bar{0}\}$ e, então, $\Gamma(\mathbb{Z}_4[x])$ é um grafo completo infinito, porém $\mathbb{Z}_4[x]$ não é local. Com efeito, digamos que $\mathbb{Z}_4[x]$ seja anel local com ideal maximal M . Pela Proposição 1.29 $x, x + \bar{1} \notin U(\mathbb{Z}_4[x])$, pois $\bar{1}$ não é nilpotente, então $x, x + \bar{1} \in M$. Logo, $\bar{1} = (x + \bar{1}) - x \in M$, um absurdo. Portanto, $\mathbb{Z}_4[x]$ não é anel local.

Teorema 2.19. ([5]) *Seja R um anel finito. Se $\Gamma(R)$ é um grafo completo, então $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou R é local com $\text{char}(R) = p$ ou p^2 , e $|\Gamma(R)| = p^n - 1$, para algum primo p e algum inteiro $n \geq 1$.*

Demonstração. Segue da Proposição 2.8 que se K é um corpo, então o grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times K)$ não é completo exceto se $K = \mathbb{Z}_2$. Assim, vamos supor que R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Pelo Corolário 2.16, R deve ser local com ideal maximal $M = D(R)$. Segue da Proposição 1.25 que $\text{char}(R) = p^m$ para algum primo p e algum inteiro $m \geq 1$. Se $m \geq 3$, então dado $a \in R^*$, $p^m 1 = 0$ mas $p^2 1 \neq 0$ e, pelo Teorema 2.18, isso implicaria que $\Gamma(R)$ não seria completo pois haveria vértices não adjacentes, uma contradição. Logo, $\text{char}(R) = p$ ou p^2 . Além disso,

$D(R)$ é um p -grupo pela Proposição 1.25 e, então, $|\Gamma(R)| = p^n - 1$ para algum primo p e algum inteiro $n \geq 1$. \square

Exemplo 2.20. Consideremos um corpo finito K e o anel $R = \frac{K[x]}{(x^2)}$. Observemos que R é local com ideal maximal $M = \frac{(x)}{(x^2)}$. De fato, M é um ideal maximal de R e dados $\bar{1} = 1 + (x^2) \in R$ e $\bar{m} = bx + (x^2) \in M$, temos que $\bar{1} + \bar{m} = (1 + bx) + (x^2)$ é invertível em R , pois

$$[(1 - bx) + (x^2)][(1 + bx) + (x^2)] = (1 - bx)(1 + bx) + (x^2) = 1 + (x^2) = \bar{1}.$$

Assim, pelo item (iii) da Proposição 1.12, R é um anel local com ideal maximal M . Logo, $M = D(R)$ pela Proposição 1.24. Além disso, para quaisquer $\bar{m}_1, \bar{m}_2 \in M$, temos que $\overline{m_1 m_2} = \bar{0}$. Assim, pelo Teorema 2.18, $\Gamma(R)$ é um grafo completo com $|\Gamma(R)| = |M^*| = |K| - 1 = p^n - 1$, para algum primo p e algum inteiro $n \geq 1$.

Este exemplo mostra que dados um primo p e um inteiro $n \geq 1$, existe um anel R tal que $\Gamma(R)$ é completo e $|\Gamma(R)| = p^n - 1$. Deste modo, o grafo completo K^m pode ser realizado como $\Gamma(R)$ se, e somente se, $m = p^n - 1$ para algum primo p e inteiro $n \geq 1$.

Exemplo 2.21. Sejam p um primo e $R = \mathbb{Z}_{p^2}$. É fácil ver que $(\bar{p}) = \mathbb{Z}_{p^2} \setminus U(\mathbb{Z}_{p^2})$. Assim, pela Proposição 1.12, R é um anel local com ideal maximal (\bar{p}) e, como R é também finito, temos $D(R) = (\bar{p})$. Agora, dados $\bar{a}, \bar{b} \in D(R)^* = (\bar{p})^*$, então $\bar{a} = \overline{pq_1}$ e $\bar{b} = \overline{pq_2}$, com $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$. Logo, $\overline{ab} = (\overline{pq_1})(\overline{pq_2}) = \bar{0}$, e segue que $\Gamma(R)$ é um grafo completo. Também, $|\Gamma(R)| = |(\bar{p})^*| = p - 1$.

Notemos que, a partir dos últimos exemplos, obtemos que os anéis \mathbb{Z}_{p^2} e $\frac{\mathbb{Z}_p[x]}{(x^2)}$ têm o mesmo grafo divisor de zero K^{p-1} , apesar de não serem anéis isomorfos.

Observação 2.22. Seja R um anel local com ideal maximal $M \neq \{0\}$. Suponhamos que exista um menor inteiro positivo k tal que $M^k = \{0\}$. Notemos que $D(R) \subseteq M$ e, dado $m \in M$, temos $m^k = 0$ e, então, $m \in D(R)$. Logo, $M = D(R)$. Como $M^k = \{0\}$, dados $a \in M^{k-1} \setminus \{0\}$ e $m \in M$, temos que $am = 0$, donde $D(R) = M \subseteq \text{Ann}(a)$ para qualquer $a \in M^{k-1}$ não nulo. Além disso, como M é ideal maximal e $\text{Ann}(a) \neq R$ (pois $1a \neq 0$), segue que $D(R) = M = \text{Ann}(a)$, para qualquer $a \in M^{k-1}$ não nulo.

Os próximos resultados caracterizam os anéis finitos cujos grafos divisores de zero são grafos estrelas.

Lema 2.23. ([5]) *Seja R um anel finito. Se $\Gamma(R)$ tem exatamente um vértice adjacente a cada outro vértice e não tem outros vértices adjacentes, então $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, onde K é um corpo finito com $|K| \geq 3$, ou R é local com ideal maximal M satisfazendo $\frac{R}{M} \approx \mathbb{Z}_2$, $M^3 = \{0\}$ e $|M^2| \leq 2$. Assim, $|\Gamma(R)| = p^n$ ou $|\Gamma(R)| = 2^n - 1$, para algum primo p e algum inteiro $n \geq 1$.*

Demonstração. Suponhamos que R não seja um anel local. Então, pelo Corolário 2.16, devemos ter $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, onde K é um corpo finito. Se $|K| = 2$ então $K = \{0, 1\}$ e segue que $\Gamma(R) \simeq K^2$. Daí, existem dois vértices distintos de $\Gamma(R)$ adjacente a cada outro vértice, uma contradição. Logo, $|K| \geq 3$. Neste caso, $|\Gamma(R)| = |K| = p^n$ para algum primo p e inteiro $n \geq 1$.

Agora, supondo que R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times K$, pelo Corolário 2.16, temos que R é anel local (finito) com ideal maximal M . Então, pela Proposição 1.24, temos $M = D(R)$ e, como R é Noetheriano, segue do item (ii) da Proposição 1.21 que $D(R) = \text{Ann}(a)$, para algum $a \in M^*$. Seja k o menor inteiro positivo tal que $M^k = \{0\}$. Então, segue da Observação 2.22 que $M = \text{Ann}(b)$ para todo $b \in M^{k-1}$ não nulo. Mas, notemos que, em $\Gamma(R)$, o vértice a é adjacente a todos os outros vértices e da hipótese segue que é o único com essa propriedade. Assim, devemos ter $M^{k-1} = \{0, a\}$ e, então, $|\frac{M^{k-1}}{M^k}| = 2$. Agora, observamos que para cada $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, $\frac{M^{i-1}}{M^i}$ é um espaço vetorial sobre $\frac{R}{M}$ com as operações de adição e de multiplicação por escalar dadas por:

$$(x + M^i) + (y + M^i) = (x + y) + M^i, \quad x, y \in M^{i-1} \quad \text{e}$$

$$(r + M) \cdot (x + M^i) = rx + M^i, \quad r \in R, \quad x \in M^{i-1}.$$

Logo, de $|\frac{M^{k-1}}{M^k}| = 2$, obtemos $\frac{R}{M} \approx \mathbb{Z}_2$.

Se $k \geq 4$, temos $|\frac{M^{k-2}}{M^{k-1}}| = \frac{|M^{k-2}|}{2}$ e, então, $|M^{k-2}| = 2q$, $q \in \mathbb{N}^*$ e $q > 1$, pois $M^{k-1} = \{0, a\} \subset M^{k-2}$. Logo, $|M^{k-2}| \geq 4$. Então, para distintos $b, c \in M^{k-2} \setminus M^{k-1}$, como $M^{2k-4} = (M^{k-2})^2 = M^{k-2}M^{k-2} \subset M^{k-2}$, temos $bc \in M^{2k-4} \subset M^k = \{0\}$, pois $2k - 4 \geq k$. Logo, $bc = 0$, uma contradição. Portanto, $M^3 = \{0\}$ e, assim, $|M^2| \leq 2$. Neste caso, como $\frac{R}{M} \approx \mathbb{Z}_2$,

então $|M| = \frac{|R|}{2}$. Mas, pela Proposição 1.25, M é um p -grupo e, assim, $p = 2$ e $|M| = 2^t$, com $t \in \mathbb{N}$. Logo, $|\Gamma(R)| = |M^*| = 2^t - 1$. \square

Vimos que $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times K)$ é um grafo estrela tal que $|\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times K)| = |K|$ quando K é um corpo finito. No próximo resultado, usaremos o lema anterior para mostrar que, exceto para grafos estrelas de ordem pequena (como nos exemplos no início deste capítulo), esta é a única forma que um grafo estrela é realizado como $\Gamma(R)$.

Teorema 2.24. ([5]) *Seja R um anel finito com $|\Gamma(R)| \geq 4$. Então $\Gamma(R)$ é um grafo estrela se, e somente se, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, onde K é um corpo finito. Em particular, se $\Gamma(R)$ é um grafo estrela, então $|\Gamma(R)| = p^n$ para algum primo p e inteiro $n \geq 0$. Reciprocamente, cada grafo estrela de ordem p^n pode ser realizado como $\Gamma(R)$.*

Demonstração. Se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$, com K um corpo finito, segue da Proposição 2.8 que $\Gamma(R)$ é um grafo estrela.

Suponhamos que $\Gamma(R)$ seja um grafo estrela tal que R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times K$. Pelo Corolário 2.16 e lema anterior, R é um anel local com ideal maximal $M = D(R)$ tal que $\frac{R}{M} \approx \mathbb{Z}_2$. Da demonstração do lema anterior, temos que M é um 2-grupo donde $|M| = 2^t$, $t \in \mathbb{N}$. Mas, por hipótese, $|\Gamma(R)| = |M^*| \geq 4$ e, então, $t \geq 3$. Também, $|M^2| = 2$.

Seja $M = \text{Ann}(x)$ e escolhamos $a, b, c, d \in M^* \setminus \{x\}$ distintos dois a dois. Como $M^2 = \{0, x\}$ e $\Gamma(R)$ é um grafo estrela em que $x \in V(\Gamma(R))$ é o único vértice adjacente aos demais vértices, segue que $ab = ac = ad = x$ (pois $m_1 m_2 \in M^2 = \{0, x\}$). Assim, $a(b - c) = a(b - d) = 0$. Notemos que $\text{Ann}(a) = \{0, x\}$, pois x é o único vértice adjacente aos demais e $a \notin \text{Ann}(a)$ uma vez que $\text{Ann}(a)$ tem ordem par. Então, $b - c = b - d = x$, ou ainda, $c = d$, uma contradição. Logo, $R \approx \mathbb{Z}_2 \times K$. \square

2.3 Quando $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implica $R \approx S$?

Uma questão natural que surge com o estudo de grafos divisores de zero é se são únicos a menos de isomorfismos, isto é, se é verdade que $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ se, e somente se, $R \approx S$. Veremos que se dois anéis são isomorfos, então seus respectivos grafos divisores de zero

também são isomorfos. Porém, nem sempre $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implica $R \approx S$. Por exemplo, os grafos divisores de zero de \mathbb{Z}_6 e $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$ são isomorfos (veja Exemplo 2.4), mas, claramente, esses dois anéis não são isomorfos. Esta seção será dedicada ao estudo de condições para que $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implique $R \approx S$.

Sejam R e S anéis tais que $R \approx S$. Então, existe um isomorfismo de anéis $f : R \rightarrow S$. Primeiro, notemos que $f(D(R)^*) \subseteq D(S)^*$, pois dado $x \in D(R)^*$, existe $y \in D(R)^*$ tal que $xy = 0$ e, assim, $0 = f(0) = f(xy) = f(x)f(y)$, isto é, $f(x) \in D(S)$. Além disso, como $\text{Nuc}(f) = \{0\}$, $x, y \neq 0$ implicam $f(x) \neq 0$ e $f(y) \neq 0$. Logo, $f(x) \in D(S)^*$ e $f(D(R)^*) \subseteq D(S)^*$. Assim, faz sentido considerarmos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma = f|_{D(R)^*} : D(R)^* &\longrightarrow D(S)^* \\ x &\longmapsto f(x). \end{aligned}$$

Mostremos que γ induz um isomorfismo de grafos. Claramente, γ é injetora. Além disso, dado $z \in D(S)^*$, $\{z, w\} \in E(\Gamma(S))$ para algum $w \in D(S)^*$. Como f é sobrejetor e $f(0) = 0$, existem $x, y \in R^*$ tais que $f(x) = z$ e $f(y) = w$. Mas $zw = 0$ implica $f(x)f(y) = f(xy) = 0$ e sendo f injetor, obtemos $xy = 0$, isto é, $x \in D(R)^*$. Logo, γ é bijetora. É fácil ver que $\{x, y\} \in E(\Gamma(R))$ se, e somente se, $\{\gamma(x), \gamma(y)\} \in E(\Gamma(S))$. Portanto, $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$.

Na sequência, a questão apresentada no título desta seção será respondida num teorema para anéis reduzidos finitos que não são corpos. Esse teorema afirma que para tais anéis, o comportamento dos divisores de zero determina unicamente o anel. Para isso, precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.25. ([4]) *Sejam R_1, \dots, R_n domínios de integridade ($n \geq 2$) e $R = R_1 \times \dots \times R_n$. Então $\omega(\Gamma(R)) = n$.*

Demonstração. Sabemos que $\omega(\Gamma(R)) \geq n$, pois o subgrafo induzido pelos vértices $(1, 0, \dots, 0)$, $(0, 1, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, 1)$ é completo. Então é suficiente mostrarmos que $\omega(\Gamma(R)) \leq n$, que faremos por indução sobre n .

O caso em que $n = 2$ é claro pois, neste caso, $\Gamma(R)$ é um grafo bipartido completo e seus únicos subgrafos induzidos completos são isomorfos a K^2 .

Assim, sejam $n \geq 3$ e $X = \{x_1, \dots, x_m\}$ um subgrafo completo de $\Gamma(R)$ onde $x_i = (x_{i1}, \dots, x_{in})$, $i = 1, \dots, m$. Com isso, $x_i x_j = 0$ para todo i, j , $1 \leq i, j \leq m$ e $i \neq j$, ou seja,

$(x_{i1}y_{j1}, \dots, x_{in}y_{jn}) = (0, \dots, 0)$. Podemos supor que $x_{11} \neq 0$ e como $x_{11}y_{j1} = 0$ para todo $j = 2, \dots, m$, segue que $x_{21} = \dots = x_{m1} = 0$, pois cada R_i é domínio de integridade. Então, podemos considerar $X \setminus \{x_1\}$ como um subgrafo completo de $\Gamma(R_2 \times \dots \times R_n)$ e temos, pela hipótese de indução, que $m - 1 \leq n - 1$ e, então, $m \leq n$, o que implica $\omega(\Gamma(R)) \leq n$. \square

Teorema 2.26. ([4]) *Sejam R e S anéis reduzidos finitos tais que R e S não são corpos. Então $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ se, e somente se, $R \approx S$.*

Demonstração. Sabemos que se $R \approx S$ então $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$. Deste modo, basta mostrarmos que $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implica $R \approx S$.

Seja $\varphi : \Gamma(R) \longrightarrow \Gamma(S)$ um isomorfismo de grafos. Segue da Observação 1.28 que, sendo R e S anéis finitos reduzidos que não são corpos, podemos escrever $R = F_1 \times \dots \times F_n$ e $S = K_1 \times \dots \times K_m$, onde F_i, K_j são corpos finitos, $i = 1, \dots, n$ e $j = 1, \dots, m$ e $m, n \geq 2$. Podemos dispor os F_i 's e K_j 's de modo que $|F_1| \leq \dots \leq |F_n|$ e $|K_1| \leq \dots \leq |K_m|$.

Pelo lema anterior, $\omega(\Gamma(R)) = n$ e $\omega(\Gamma(S)) = m$. Como $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ e, assim, preservam adjacências, devemos ter $m = n$. Agora, o menor grau de um vértice de $\Gamma(R)$ (respectivamente, $\Gamma(S)$) é $|F_1| - 1$ (resp., $|K_1| - 1$), pois um vértice de menor grau em $\Gamma(R)$ é da forma $x = (0, a_2, \dots, a_n)$, com $a_i \neq 0$ para todo $i = 2, \dots, n$, tal que os únicos vértices não nulos adjacentes a x são do tipo $(a, 0, \dots, 0)$, $a \in F_1^*$. Logo, $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ implica $|F_1| = |K_1|$. Assim, $F_1 \approx K_1$. Também, o maior grau de um vértice de $\Gamma(R)$ (resp., $\Gamma(S)$) é $|F_2| \cdots |F_n| - 1$ (resp., $|K_2| \cdots |K_n| - 1$), pois se y é um vértice de maior grau em $\Gamma(R)$ então $y = (a, 0, \dots, 0)$, $a \in F_1^*$, e y é adjacente a todos os vértices do tipo $(0, a_2, \dots, a_n)$, com $a_i \in F_i$, $i = 2, \dots, n$. Novamente, $|F_2| \cdots |F_n| = |K_2| \cdots |K_n|$ e, então, $|F_1| \cdot |F_2| \cdots |F_n| = |K_1| \cdot |K_2| \cdots |K_n|$, ou seja, $|R| = |S|$.

Vamos mostrar que $R \approx S$ por indução sobre n .

Se $n = 2$, temos que $|F_2| = |K_2|$. Assim, $F_2 \approx K_2$ e segue que $R \approx S$. Suponhamos $n \geq 3$. Como $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$, temos $|\Gamma(R)| = |\Gamma(S)|$, isto é, $|D(R)| = |D(S)|$. Mas $|R| = |S|$ e, então,

$$|R| - |D(R)| = |S| - |D(S)| \quad (2.1)$$

Como todos os F'_i s e K'_i s são corpos, de (2.1) obtemos

$$(|F_1| - 1)(|F_2| - 1) \cdots (|F_n| - 1) = (|K_1| - 1)(|K_2| - 1) \cdots (|K_n| - 1).$$

Sejam $R' = F_2 \times \dots \times F_n$ e $S' = K_2 \times \dots \times K_n$. Como $|K_1| = |F_1|$, temos

$$(|F_2| - 1) \cdots (|F_n| - 1) = (|K_2| - 1) \cdots (|K_n| - 1)$$

e, assim, $|\Gamma(R')| = |\Gamma(S')|$. Vamos mostrar que $\Gamma(R') \simeq \Gamma(S')$, pois disso seguirá que $R' \approx S'$ pela hipótese de indução e, como $F_1 \approx K_1$, obteremos $R \approx S$.

Podemos considerar $\varphi(1, 0, \dots, 0) = (a, 0, \dots, 0)$ para algum $a \in K_1^*$. Como φ preserva adjacência e grau, para cada $b \in F_1^*$ devemos ter $\varphi(b, 0, \dots, 0) = (c, 0, \dots, 0)$ para algum $c \in K_1^*$. Defina

$$\begin{aligned} \sigma : \quad \Gamma(R') &\longrightarrow K_2 \times \dots \times K_n \\ (r_2, \dots, r_n) &\longmapsto \varphi(0, r_2, \dots, r_n) = (0, s_2, \dots, s_n) := (s_2, \dots, s_n). \end{aligned}$$

Notemos que como $\varphi(1, 0, \dots, 0) = (a, 0, \dots, 0)$, $a \in K_1^*$, então não ocorre $\varphi(0, r_2, \dots, r_n) = (d, s_2, \dots, s_n)$ com $d \in K_1^*$. Caso contrário, como $\{(1, 0, \dots, 0), (0, r_2, \dots, r_n)\} \in E(\Gamma(R))$ e φ é isomorfismo de grafos, teríamos que $\{\varphi(1, 0, \dots, 0), \varphi(0, r_2, \dots, r_n)\} \in E(\Gamma(S))$, isto é, $(a, 0, \dots, 0)(d, s_2, \dots, s_n) = (ad, 0, \dots, 0) = (0, 0, \dots, 0)$, um absurdo. Assim, $\varphi(0, r_2, \dots, r_n)$ é da forma $\varphi(0, r_2, \dots, r_n) = (0, s_2, \dots, s_n)$. É fácil ver que $Im(\sigma) \subseteq \Gamma(S')$. Notemos, também, que o motivo de σ estar bem definida, preservar adjacências e ser injetora segue de sua definição e do fato de φ satisfazer tais condições. E como $|\Gamma(R')| = |\Gamma(S')| < \infty$, $\sigma : \Gamma(R') \rightarrow \Gamma(S')$ deve ser, também, sobrejetora e, portanto, um isomorfismo de grafos. Logo, $\Gamma(R') \simeq \Gamma(S')$ e, pela hipótese de indução, $R' \approx S'$. \square

Exemplo 2.27. R e S serem finitos é uma condição necessária no teorema acima. Consideremos os anéis reduzidos $R = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}$ e $S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Q}$. Sabemos que existe uma bijeção $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$. Se considerarmos $\varphi : \Gamma(R) \rightarrow \Gamma(S)$ definida por $\varphi(\bar{1}, 0) = (\bar{1}, 0)$ e $\varphi(\bar{0}, a) = (\bar{0}, f(a))$, teremos que φ é um isomorfismo de grafos. No entanto, os anéis R e S não são isomorfos.

Exemplo 2.28. R e S serem reduzidos é uma condição necessária no teorema anterior. Para os anéis finitos $R = \mathbb{Z}_9$ e $S = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, temos $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ (como pode ser visto no Exemplo

2.3). Porém, os anéis R e S não são isomorfos. O mesmo ocorre se consideramos $R = \mathbb{Z}_4$ e $S = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$.

Observação 2.29. Suponhamos que R seja um anel finito decomponível, isto é, $R = R_1 \times \dots \times R_n$. Notemos que se $x = (x_1, \dots, x_n)$ tem grau máximo em $\Gamma(R)$, então x tem exatamente uma coordenada não nula, digamos x_1 . Agora, vamos supor que R_1 seja um anel local. Consideremos dois casos:

- . Se R_1 é um corpo, então $\Delta(\Gamma(R)) = d(x) = |R_2| \cdots |R_n| - 1$;
- . Se R_1 não é um corpo, temos $x_1 \in \text{Ann}(D(R_1))^*$ e

$$\Delta(\Gamma(R)) = d(x) = |D(R_1)| \cdot |R_2| \cdots |R_n| - 2.$$

Dados os anéis finitos R e S , segue do Teorema de Estrutura de Anéis Artinianos que $R \approx R_1 \times \dots \times R_n$ e $S \approx S_1 \times \dots \times S_m$, com $m, n \geq 2$, em que R_i e S_j são anéis locais finitos, para todos $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$. Assim, o próximo resultado afirma que $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$ se, e somente se, $R \approx S$.

Teorema 2.30. ([1]) *Se R_1, \dots, R_n e S_1, \dots, S_m são anéis locais finitos, então as seguintes condições são verdadeiras:*

- (i) *Para $n \geq 2$, $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_1)$ se, e somente se, $n = 2$ e $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. No primeiro caso, $S_1 \approx \mathbb{Z}_9$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)}$ e, no último caso, S_1 é isomorfo a um dos anéis \mathbb{Z}_8 , $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$ ou $\frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(2x, x^2 - 2)}$.*
- (ii) *Para $n, m \geq 2$, $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)$ se, e somente se, $n = m$ e existe uma permutação π sobre $\{1, \dots, n\}$ tal que para qualquer $i = 1, \dots, n$, $|R_i| = |S_{\pi(i)}|$ e $\Gamma(R_i) \simeq \Gamma(S_{\pi(i)})$.*

Demonstração. (i) Suponhamos $n \geq 2$ e $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_1)$. Então $\Gamma(S_1)$ é não nulo e, assim, S_1 não é um corpo. Também, como S_1 é um anel local finito, segue do item (ii) da Proposição 1.21 que $\text{Ann}(D(S_1)) \neq \{0\}$. Então $\Gamma(S_1)$ possui um vértice que é adjacente a todos os demais vértices em $\Gamma(S_1)$ e como $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_1)$, o grafo $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$

também possui esta propriedade. Logo, pelo Corolário 2.16, $R_1 \times \dots \times R_n \approx \mathbb{Z}_2 \times F$, onde F é um corpo finito. Logo, devemos ter $n = 2$.

Deste modo, temos $\Gamma(S_1) \simeq \Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F)$, isto é, $\Gamma(S_1)$ é um grafo estrela e segue do Teorema 2.24 que $|\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times F)| < 4$, pois S_1 é anel local. Logo, $|F| \leq 3$ e $F \approx \mathbb{Z}_2$ ou $F \approx \mathbb{Z}_3$. Agora, os grafos divisores de zero de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ são, respectivamente, K^2 e $K^{1,2}$. Portanto, se $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, devemos ter $S_1 \approx \mathbb{Z}_9$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)}$, pelo Exemplo 2.3 e Observação 2.5. E se $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, então $S_1 \approx \mathbb{Z}_8$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(2x, x^2-2)}$, pelo Exemplo 2.4 e Observação 2.5.

Reciprocamente, se $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $S_1 \approx \mathbb{Z}_9$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_3[x]}{(x^2)}$, obtemos $\Gamma(R_1 \times R_2) \simeq \Gamma(S_1)$, pelo Exemplo 2.3. Também, se $R_1 \times R_2 \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ e $S_1 \approx \mathbb{Z}_8$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^3)}$ ou $S_1 \approx \frac{\mathbb{Z}_4[x]}{(2x, x^2-2)}$, obtemos o resultado desejado pelo Exemplo 2.4.

(ii) Seja $f : \Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \longrightarrow \Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)$ um isomorfismo de grafos. Notemos que se x tem grau máximo em $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$, então x tem exatamente uma coordenada não nula. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x = (r, 0, \dots, 0)$ é um vértice de grau máximo em $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$. Assim, $f(x)$ em $\Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)$ tem grau máximo. Sem perda de generalidade, podemos supor $y = f(x) = (s, 0, \dots, 0)$.

Vamos mostrar que $|R_1| = |S_1|$ e $\Gamma(R_1) \simeq \Gamma(S_1)$. Primeiro, suponhamos $R_1 \approx \mathbb{Z}_2$ e, por contradição, vamos supor que S_1 não seja isomorfo a \mathbb{Z}_2 . Se

$$\mathcal{B} = (S_1 \setminus (D(S_1) \cup \{s\})) \times \{0\} \times \dots \times \{0\},$$

então todo vértice em \mathcal{B} tem grau máximo dentre todos os vértices em $\Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)$ que não são adjacentes a $y = (s, 0, \dots, 0)$. Mas dentre todos os vértices de $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$ distintos de x que não são adjacentes a x , os vértices tendo grau máximo são aqueles cujas primeiras coordenadas são iguais a 1 e têm apenas uma outra coordenada não nula distinta da primeira coordenada. Por exemplo, suponhamos que $(1, t, 0, \dots, 0)$ seja um destes vértices. Temos que $d((1, t, 0, \dots, 0)) = |D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| - 1$ e o grau de cada vértice em \mathcal{B} é $|S_2| \cdots |S_m| - 1$. Como esses graus são iguais, devemos ter

$$|D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| - 1 = |S_2| \cdots |S_m| - 1. \quad (2.2)$$

Também, temos que $d(x) = |R_2| \cdots |R_n| - 1$. Se S_1 é um corpo, então $d(y) = |S_2| \cdots |S_m| - 1$

e segue que

$$|R_2| \cdots |R_n| - 1 = |S_2| \cdots |S_m| - 1. \quad (2.3)$$

Comparando (2.2) e (2.3) obtemos $|R_2| = |D(R_2)|$, uma contradição uma vez que $1 \in R_2$ e $1 \notin D(R_2)$. Assim, concluímos que S_1 não é um corpo. Então, $d(y) = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m| - 2$ e isso implica que $|R_2| \cdots |R_n| - 1 = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m| - 2$, ou seja,

$$|D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| (|D(S_1)| - |R_2/D(R_2)|) = 1.$$

Portanto, $n = 2$ e $|D(R_2)| = 1$. Disso segue que R_2 é um corpo. Assim, x é adjacente a todo vértice em $\Gamma(R_1 \times R_2)$ e, como $\mathcal{B} \neq \emptyset$, chegamos a uma contradição. Logo, $S_1 \approx \mathbb{Z}_2$ e para este caso o resultado está provado.

Agora, vamos considerar o caso em que R_1 e S_1 não são isomorfos a \mathbb{Z}_2 . Se

$$\mathcal{A} = (R_1 \setminus (D(R_1) \cup \{r\})) \times \{0\} \times \dots \times \{0\},$$

então todo vértice de \mathcal{A} tem grau máximo dentre todos os vértices em $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$ que não são adjacentes a x . O grau de qualquer vértice em \mathcal{A} é igual a $|R_2| \cdots |R_n| - 1$. Também, como S_1 não é isomorfo a \mathbb{Z}_2 , \mathcal{B} é o conjunto de todos os vértices em $\Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)$ com grau máximo dentre todos os vértices que não são adjacentes a y . Como o grau de cada vértice em \mathcal{B} é $|S_2| \cdots |S_m| - 1$, devemos ter

$$|R_2| \cdots |R_n| - 1 = |S_2| \cdots |S_m| - 1. \quad (2.4)$$

Se R_1 é um corpo e S_1 não é um corpo, como vimos no caso anterior, temos $d(x) = |R_2| \cdots |R_n| - 1$ e $d(y) = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m| - 2$, logo $d(x) = d(y)$ implica $|R_2| \cdots |R_n| - 1 = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m| - 2$, que juntamente com a equação (2.4) implicam $|R_2| \cdots |R_n| - 1 = |D(S_1)| \cdot |R_2| \cdots |R_n| - 1$, ou ainda, $|R_2| \cdots |R_n| (|D(S_1)| - 1) = 1$. Contradição, pois como $n \geq 2$, $|R_2| \geq 2$. Assim, ambos R_1 e S_1 são corpos ou nenhum deles é corpo.

Primeiro, vamos considerar o caso em que R_1 e S_1 são corpos. Sabemos que $|\mathcal{A}| = |R_1| - 2$ e $|\mathcal{B}| = |S_1| - 2$ são iguais e, então, $|R_1| = |S_1|$. Como, neste caso, $\Gamma(R_1)$ e $\Gamma(S_1)$ são grafos nulos, pois R_1 e S_1 são corpos, não há o que provar.

Agora, suponhamos que R_1 e S_1 não sejam corpos. Então $d(x) = |D(R_1)| \cdot |R_2| \cdots |R_n| - 2$ e $d(y) = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m| - 2$ e, uma vez que $d(x) = d(y)$, obtemos

$$|D(R_1)| \cdot |R_2| \cdots |R_n| = |D(S_1)| \cdot |S_2| \cdots |S_m|. \quad (2.5)$$

Como o grau de cada vértice em \mathcal{A} é $|R_2| \cdots |R_n| - 1$ e o grau de cada vértice em \mathcal{B} é $|S_2| \cdots |S_m| - 1$ obtemos $|R_2| \cdots |R_n| = |S_2| \cdots |S_m|$. Assim, de (2.5) segue que $|D(R_1)| = |D(S_1)|$. Sabemos que $|\mathcal{A}| = |R_1| - |D(R_1)|$ e $|\mathcal{B}| = |S_1| - |D(S_1)|$ são iguais, logo $|R_1| = |S_1|$. Agora, a restrição de f a \mathcal{A} é uma correspondência biunívoca entre \mathcal{A} e \mathcal{B} . Então, podemos supor que $f(1, 0, \dots, 0) = (u, 0, \dots, 0)$, onde $u \in S_1 \setminus D(S_1)$. Se $a \in D(R_1)^*$ e $f(a, 0, \dots, 0) = (b_1, \dots, b_m)$, mostraremos que $b_2 = \dots = b_m = 0$. Uma vez que cada vértice adjacente a $(1, 0, \dots, 0)$ em $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$ é adjacente a $(a, 0, \dots, 0)$, todo vértice adjacente a $(u, 0, \dots, 0)$ é adjacente a (b_1, \dots, b_m) . Como, para qualquer $i = 2, \dots, m$, os vértices e_i são adjacentes a $(u, 0, \dots, 0)$, temos $b_2 = \dots = b_m = 0$, onde e_i é o elemento que tem 1 na i -ésima coordenada e 0 nas demais. Assim, $b_1 \neq 0$. Isto implica que a função

$$\begin{aligned} f_1 : \Gamma(R_1) &\longrightarrow \Gamma(S_1) \\ a &\longmapsto b \end{aligned}$$

onde b é tal que $f(a, 0, \dots, 0) = (b, 0, \dots, 0)$, é um isomorfismo de grafos e, então, $\Gamma(R_1) \simeq \Gamma(S_1)$.

Se $(0, a_2, \dots, a_n)$ é não nulo, então $f(0, a_2, \dots, a_n)$ é adjacente a $(u, 0, \dots, 0)$. Assim, podemos escrever $f(0, a_2, \dots, a_n) = (0, b_2, \dots, b_m)$. Agora, afirmamos que a função

$$\begin{aligned} f' : \Gamma(R_2 \times \dots \times R_n) &\longrightarrow \Gamma(S_2 \times \dots \times S_m) \\ (a_2, \dots, a_n) &\longmapsto (b_2, \dots, b_m) \end{aligned}$$

onde (b_2, \dots, b_m) é tal que $f(0, a_2, \dots, a_n) = (0, b_2, \dots, b_m)$, está bem definida. De fato, se (a_2, \dots, a_n) é um vértice em $\Gamma(R_2 \times \dots \times R_n)$, existe um índice i , $i = 2, \dots, m$, tal que b_i é um divisor de zero. Caso contrário, teríamos $d((0, b_2, \dots, b_m)) = |S_1| - 1$, enquanto que $d((0, a_2, \dots, a_n)) > |R_1| - 1$, pois ao menos um dos a'_i s é divisor de zero. Não é difícil ver que f' é um isomorfismo de grafos e, portanto, $\Gamma(R_2 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_2 \times \dots \times S_m)$. Se $m, n \geq 3$, repetimos este processo.

Suponhamos que $n > m$. Rearranjando, se necessário, podemos supor que $\Gamma(R_m \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_m)$. Pelo item (i), temos $R_m \times \dots \times R_n \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $R_m \times \dots \times R_n \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$, $|S_m| = 8$ ou $|S_m| = 9$ e $n = m + 1$. Como $\{0\} \times \dots \times \{0\} \times R_m \times \{0\}$ contém um vértice de grau máximo em $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$, pela Observação 2.29 temos $R_1 \approx \dots \approx R_{m-1} \approx \mathbb{Z}_2$, o que implica $S_1 \approx \dots \approx S_{m-1} \approx \mathbb{Z}_2$. Deste modo, $\Delta(\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)) = 2^{n-1} - 1$ ou

$\Delta(\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)) = 3 \cdot 2^{n-2} - 1$ e $\Delta(\Gamma(S_1 \times \dots \times S_m)) = 2^{m-2} \cdot |S_m| - 1$. Assim, como $\Delta(\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)) = \Delta(\Gamma(S_1 \times \dots \times S_m))$ devemos ter $2^{n-1} - 1 = 2^{m-2} \cdot |S_m| - 1$, ou seja, $|S_m| = 4$ ou $3 \cdot 2^{n-2} - 1 = 2^{m-2} \cdot |S_m| - 1$, isto é, $|S_m| = 6$. Em qualquer caso, temos uma contradição. Logo, $n = m$.

Repetindo o argumento acima e rearranjando, se necessário, temos $\Gamma(R_i) \simeq \Gamma(S_i)$ para qualquer $i = 1, \dots, n$, e $|R_i| = |S_i|$ para qualquer $i = 1, \dots, n-1$. Mas como $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n)$ e $\Gamma(S_1 \times \dots \times S_n)$ têm o mesmo grau máximo, concluímos que $|R_n| = |S_n|$, o que completa esta parte da demonstração.

Reciprocamente, suponhamos $n = m$, $|R_i| = |S_i|$ e $\Gamma(R_i) \simeq \Gamma(S_i)$ para qualquer $i = 1, \dots, n$. Para cada $i = 1, \dots, n$ seja $f'_i : D(R_i)^* \rightarrow D(S_i)^*$ um isomorfismo de grafos. Estendendo cada f'_i para uma função $f_i : R_i \rightarrow S_i$ de modo que $f_i(0) = 0$ e f_i seja uma correspondência biunívoca entre $R_i \setminus D(R_i)$ e $S_i \setminus D(S_i)$, obtemos que a função

$$\begin{aligned} f : \Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) &\longrightarrow \Gamma(S_1 \times \dots \times S_n) \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (f_1(x_1), \dots, f_n(x_n)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de grafos. Com efeito, primeiro observemos que f é injetora pois cada f_i é injetora. Seja $(y_1, \dots, y_n) \in D(S_1 \times \dots \times S_n)^*$. Então, existe $(z_1, \dots, z_n) \in D(S_1 \times \dots \times S_n)^*$ tal que $(y_1, \dots, y_n)(z_1, \dots, z_n) = (y_1 z_1, \dots, y_n z_n) = (0, \dots, 0)$, ou seja, $y_i \in D(S_i)$, para todo $i = 1, \dots, n$, com ao menos um y_i não nulo. Como $f_i|_{D(R_i)} : D(R_i) \rightarrow D(S_i)$ é uma bijeção e $y_i \in D(S_i)$, existe $x_i \in D(R_i)$ tal que $f_i(x_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Novamente, devemos ter algum x_i não nulo, pois $y_i \neq 0$ e f_i é bijeção. Como cada f'_i preserva adjacências e $y_i z_i = 0$, temos $(x_1, \dots, x_n) \in D(R_1 \times \dots \times R_n)^*$ e $f(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$. Portanto, f é sobrejetora. Sejam $(x_1, \dots, x_n), (w_1, \dots, w_n) \in D(R_1 \times \dots \times R_n)^*$ tais que $(x_1, \dots, x_n)(w_1, \dots, w_n) = (x_1 w_1, \dots, x_n w_n) = (0, \dots, 0)$. Como cada $f_i|_{D(R_i)^*}$ é um isomorfismo de grafos e $f_i(0) = 0$, então $f(x_1, \dots, x_n)f(w_1, \dots, w_n) = (0, \dots, 0)$ se, e somente se, $(f_1(x_1), \dots, f_n(x_n))(f_1(w_1), \dots, f_n(w_n)) = (f_1(x_1)f_1(w_1), \dots, f_n(x_n)f_n(w_n)) = (0, \dots, 0)$ e isto ocorre se, e somente se, $(x_1 w_1, \dots, x_n w_n) = (x_1, \dots, x_n)(w_1, \dots, w_n) = (0, \dots, 0)$. Ou seja, f preserva adjacências. Logo, f é um isomorfismo de grafos e, assim, $\Gamma(R_1 \times \dots \times R_n) \simeq \Gamma(S_1 \times \dots \times S_n)$. \square

De acordo com o resultado anterior, com exceção dos anéis listados no item (i), temos

que $\Gamma(R)$ classifica o anel R .

Finalmente, temos condições de generalizar o Teorema 2.26. Observamos que no próximo resultado não é necessário que um dos anéis seja finito, mas que apenas não seja um domínio de integridade.

Teorema 2.31. *([1]) Sejam R um anel reduzido finito e S um anel que não seja um domínio de integridade. Se $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$, então $R \approx S$, exceto quando $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $R \approx \mathbb{Z}_6$ e S é um anel local.*

Demonstração. Como R é finito, $\Gamma(R)$ é finito e segue que $\Gamma(S)$ é finito. Então, pelo Teorema 2.9, S é um anel finito. Uma vez que S não é domínio de integridade, $\Gamma(S)$ não é um grafo nulo e, como $\Gamma(R) \simeq \Gamma(S)$, obtemos $\Gamma(R)$ também não nulo. Assim, R não é domínio de integridade e, então, R não é um corpo. Sendo R e S anéis finitos, R e S são anéis Artinianos. Logo, pelo Teorema de Estrutura de Anéis Artinianos, podemos escrever $R \approx F_1 \times \dots \times F_n$ e $S \approx S_1 \times \dots \times S_m$, onde $n \geq 2$, F_i é corpo finito (Observação 1.28), $i = 1, \dots, n$, e S_j é anel local finito, $j = 1, \dots, m$.

Se $m = 1$, pelo item (i) do teorema anterior, obtemos $n = 2$ e $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \approx \mathbb{Z}_6$. Mas nestes casos não temos $R \approx S$.

Suponhamos $n, m \geq 2$. Pelo item (ii) do teorema anterior, temos $n = m$ e existe uma permutação π sobre $\{1, \dots, n\}$ tal que $\Gamma(S_i) \simeq \Gamma(F_{\pi(i)})$ e $|S_i| = |F_{\pi(i)}|$. E como os F_i 's são corpos finitos, segue que $S_i \approx F_{\pi(i)}$ para todo $i = 1, \dots, n$. Logo, $R \approx S$ e a demonstração está completa. \square

2.4 Ideais e $D(R)$

Dado um anel, nem sempre podemos afirmar que seu conjunto de divisores de zero é um ideal. Embora $rx \in D(R)$ para todos $r \in R$ e $x \in D(R)$, em alguns anéis R temos que $D(R)$ não é fechado para a operação de adição. Por exemplo, em \mathbb{Z}_6 , $\bar{2} + \bar{3} = \bar{5} \notin D(\mathbb{Z}_6) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. Portanto, uma questão natural que surge é: quando $D(R)$ forma um ideal em R ? Com base na relação entre o anel R e seu grafo divisor de zero, mais especificamente o diâmetro de $\Gamma(R)$, é possível responder esta questão. Se para algum anel R temos $\text{diam}(\Gamma(R)) = 0$, então

$D(R) = \{0\}$ ou $D(R) = \{0, a\}$ com $a^2 = 0$. No último caso devemos ter $a + a = 0$ pois $a(a + a) = a^2 + a^2 = 0$. Em ambos os casos temos que $D(R)$ é um ideal. Agora, se R é um anel tal que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$, então $\Gamma(R)$ é um grafo completo e segue do Teorema 2.18 que $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ ou $xy = 0$ para todos $x, y \in D(R)$. Se $R \approx \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então $D(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)$ não é um ideal. Mas se $xy = 0$ para todos $x, y \in D(R)$, então $D(R)$ é um ideal, pois dados $x, y \in D(R)$, temos $x(x + y) = x^2 + xy = 0$, donde $x + y \in D(R)$.

O resultado seguinte refere-se a anéis cujos grafos divisores têm diâmetro igual a 2.

Proposição 2.32. ([8]) *Seja R um anel. Se $\Gamma(R)$ não é um grafo bipartido completo, mas tem um subgrafo bipartido completo induzido por remoção apenas de arestas de $\Gamma(R)$, então $D(R)$ é um ideal de R .*

Demonstração. Sejam $a, b \in D(R)^*$ e mostremos que $a + b \in D(R)$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $a + b \neq 0$, caso contrário, não há o que fazer. Como é possível, por hipótese, obtermos um grafo bipartido completo por remoção apenas de arestas de $\Gamma(R)$, então devem existir conjuntos não vazios P e Q tais que $P \cup Q = D(R)^*$, $P \cap Q = \emptyset$ e $pq = 0$ para todos $p \in P$ e $q \in Q$.

Se $a, b \in P$, então para qualquer $q \in Q$ temos $q(a + b) = qa + qb = 0$, ou seja, $a + b \in D(R)$. Analogamente, se $a, b \in Q$, então $a + b \in D(R)$. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que $a \in P$ e $b \in Q$. Como $\Gamma(R)$ não é bipartido completo, deve existir uma aresta adicional que conecta, sem perda de generalidade, dois vértices distintos p_1 e p_2 de P . Então $p_1(b + p_2) = p_1b + p_1p_2 = 0$. Com isso, existem três possibilidades: $b + p_2 = 0$, $b + p_2 \in Q$ ou $b + p_2 \in P$. Se $b + p_2 = 0$, então $0 = b(b + p_2) = b^2 + bp_2 = b^2$ e, assim, $b(a + b) = ba + b^2 = 0$ e $a + b \in D(R)$. Se $b + p_2 \in Q$, então $0 = a(b + p_2) = ab + ap_2 = ap_2$, logo $p_2(a + b) = p_2a + p_2b = 0$ e obtemos $a + b \in D(R)$. Agora, se $b + p_2 \in P$, para qualquer $q \in Q$ temos $0 = q(b + p_2) = qb + qp_2 = qb$ e, com isso, $q(a + b) = qa + qb = 0$ donde segue que $a + b \in D(R)$.

Portanto, em todos os casos obtemos $a + b \in D(R)$ e segue que $D(R)$ é um ideal. \square

Vimos no Exemplo 2.17 (ii) o anel $R_3 = \frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^4)}$. Observemos que $\Gamma(R_3)$ satisfaz a hipótese da proposição anterior, e como vimos neste exemplo, $D(R_3)$ é um ideal (maximal) de R_3 .

Proposição 2.33. ([15]) *Seja R um anel tal que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$. Então $D(R)$ é um ideal se, e somente se, para todos os pares $x, y \in D(R)$ existe um elemento não nulo z (não necessariamente distinto) tal que $xz = yz = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $D(R)$ seja um ideal e sejam $x, y \in D(R)$. Notemos que se $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = y$, não há o que fazer, pois nos três casos vale a igualdade desejada. Assim, vamos supor que x e y são distintos e não nulos. Como $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$, sempre que $xy \neq 0$, existe $z \in D(R)^*$ tal que $xz = yz = 0$. Então, suponhamos que $xy = 0$. Se $x^2 = 0$ (respectivamente, y^2), consideremos $z = x$ (respectivamente, $z = y$) e obtemos $xx = xy = 0$ (respectivamente, $xy = yy = 0$).

Assim, vamos supor que $x^2 \neq 0$ e $y^2 \neq 0$. Sejam $X' = \{x' \in D(R)^* : xx' = 0\}$ e $Y' = \{y' \in D(R)^* : yy' = 0\}$. Notemos que $x \in Y'$ e $y \in X'$, pois $xy = 0$. Logo, X' e Y' são não vazios. Se $X' \cap Y' \neq \emptyset$, escolhendo $z \in X' \cap Y'$, obtemos a igualdade desejada. Suponhamos $X' \cap Y' = \emptyset$ e consideremos $x + y$. Observemos que $x + y \neq x$, caso contrário, $y = 0$, mas supomos $y \neq 0$. Analogamente, $x + y \neq y$. Também, se $x + y = 0$, então $0 = x(x + y) = x^2$, logo $x + y \neq 0$. De $x, y \in D(R)$ e $D(R)$ um ideal, obtemos $x + y \in D(R)^*$. Como $x^2 \neq 0$ e $y^2 \neq 0$, temos que $x + y \notin X'$ e $x + y \notin Y'$. Mas $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$ implica que existe $w \in X'$ tal que o caminho $xw(x + y)$ existe. Então $0 = w(x + y) = wx + wy = wy$ e, assim, $w \in Y'$, uma contradição. Portanto, devemos ter $X' \cap Y' \neq \emptyset$.

Reciprocamente, dados $x, y \in D(R)$, existe, por hipótese, $z \in R^*$ tal que $xz = yz = 0$ e, assim, $z(x + y) = 0$. Logo, $x + y \in D(R)$ para todos $x, y \in D(R)$. Portanto, $D(R)$ é um ideal. \square

Proposição 2.34. ([15]) *Seja R um anel finito que não é corpo. Então $D(R)$ é um ideal se, e somente se, existe $a \in D(R)^*$ tal que $ad = 0$, para todo $d \in D(R)$. Neste caso, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$.*

Demonstração. Suponhamos que $D(R)$ seja um ideal. Como R é finito, então R é Noetheriano. Logo, pela Proposição 1.21, $D(R) = \text{Ann}(a)$ para algum $a \in R^*$. Reciprocamente, suponhamos que exista $k \in D(R)^*$ tal que $kd = 0$ para todo $d \in D(R)$. Dados $x, y \in D(R)$, temos $k(x + y) = 0$, ou seja, $x + y \in D(R)$ e segue que $D(R)$ é um ideal. \square

Lema 2.35. ([6], pág.8) Sejam $P, P_1, \dots, P_n \in \text{Spec}(R)$ e $I, I_1, \dots, I_r \in \text{Id}(R)$.

(i) Se $I \subseteq \bigcup_{i=1}^n P_i$, então $I \subseteq P_i$ para algum i , $1 \leq i \leq n$;

(ii) Se $\bigcap_{j=1}^r I_j \subseteq P$, então para algum j , $1 \leq j \leq r$, $I_j \subseteq P$.

Lembremos que dado um anel R podemos escrever seu conjunto de divisores de zero como uma união de ideais primos de R . Fazendo pequenas restrições em $\Gamma(R)$, esta união apresenta um pequeno número de ideais primos.

Proposição 2.36. ([7]) Seja R um anel com $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$ e seja $D(R) = \bigcup_{i \in \Lambda} P_i$, onde P_i é ideal primo de R , $i \in \Lambda$. Se existe um elemento em $D(R)$ que pertence a um único primo maximal P_i , então $|\Lambda| \leq 2$.

Demonstração. Por hipótese, existe um elemento em $D(R)$ que pertence a um único primo maximal P_i . Fazendo uma nova enumeração, se necessário, podemos supor que $p_1 \in P_1$ seja tal elemento. Suponhamos, por absurdo, que temos pelo menos dois outros primos maximais os quais denotamos como P_2 e P_3 . Como $P_2 \not\subseteq P_1$ e $P_2 \not\subseteq P_3$, segue do item (i) do Lema 2.35, que $P_2 \not\subseteq (P_1 \cup P_3)$. Logo, existe $p_2 \in P_2 \setminus (P_1 \cup P_3)$.

Observemos que o ideal (p_1, p_2) não está contido em P_i , para todo $i \in \Lambda$. De fato, caso contrário, $(p_1, p_2) \subseteq \bigcup_{i \in \Lambda} P_i$ e, pelo item (i) do Lema 2.35, teríamos $(p_1, p_2) \subseteq P_j$, para algum $j \in \Lambda$. Mas, então, $p_1, p_2 \in P_j$ o que nos dá uma contradição uma vez que $p_1 \in P_1 \setminus \bigcup_{\substack{i \in \Lambda \\ i \neq 1}} P_i$ e $p_2 \in P_2 \setminus (P_1 \cup P_3)$. Logo, $(p_1, p_2) \not\subseteq D(R)$.

Seja $r \in (p_1, p_2) \setminus D(R)$ e escrevamos $r = ap_1 + bp_2$, com $a, b \in R$. Notemos que se existe $x \in R$ tal que $p_1x = p_2x = 0$, então $rx = (ap_1 + bp_2)x = 0$ e, então, $x = 0$ pois $r \notin D(R)$. Como $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$, devemos ter $p_1p_2 = 0 \in P_3$. Mas como $p_1 \notin P_3$ e P_3 é ideal primo, devemos ter $p_2 \in P_3$ contradizendo a escolha de p_2 . Portanto, $|\Lambda| \leq 2$. \square

Corolário 2.37. Seja R um anel com $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$ e seja $D(R) = \bigcup_{i \in \Lambda} P_i$. Se Λ é finito (em particular, se R é Noetheriano), então $|\Lambda| \leq 2$.

Demonstração. Primeiro observemos que a Proposição 1.19 mostra que qualquer anel Noetheriano satisfaz as condições do corolário (pois, neste caso, R possui um número finito de primos maximais). Vamos supor $D(R) = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n$. Comutando e reenumerando, se necessário, podemos supor que P_1 é um primo maximal. Suponhamos que todo elemento de P_1 pertence a um dos outros primos maximais. Então temos que $P_1 \subseteq P_2 \cup \dots \cup P_n$ e, pelo Lema 2.35, segue que $P_1 \subseteq P_i$ para algum $i = 2, \dots, n$, contradizendo a maximalidade de P_1 . Logo, existe um elemento de P_1 que não pertence a nenhum dos outros primos maximais em $D(R)$. Agora o resultado segue da proposição anterior. \square

2.5 Diâmetro de $\Gamma(R)$

Vimos que $\Gamma(R)$ é sempre conexo e seu diâmetro é no máximo 3. Em [14], T. Lucas apresentou uma caracterização dos possíveis diâmetros de $\Gamma(R)$ e de $\Gamma(R[x])$ em termos de propriedades do anel R .

O objetivo, nesta seção, é apresentar essa caracterização de Lucas. Começaremos com dois resultados para anéis reduzidos, sendo que o primeiro fornece uma condição suficiente para que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$ e o segundo descreve em quais condições temos $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$.

Teorema 2.38. ([14]) *Seja R um anel reduzido. Se R tem mais que dois primos minimais e existem elementos $a, b \in D(R)^*$ tais que (a, b) não tem anulador não nulo, então $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$.*

Demonstração. Suponhamos que R tenha mais que dois primos minimais e que existam $a, b \in D(R)^*$ tais que $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$. Se $ab \neq 0$, como, pelo Teorema 2.10, $\Gamma(R)$ é conexo e $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 3$, temos $d(a, b) = 3$ e, assim, $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. Suponhamos que $ab = 0$. Como $ab = 0 \in P$, para todo primo minimal P , então $a \in P$ ou $b \in P$. Porém, nenhum primo minimal contém ambos. De fato, se existisse um primo minimal P tal que $a, b \in P$ então $(a, b) \subset P$ e, pela Proposição 1.38, teríamos $\text{Ann}((a, b)) \neq \{0\}$, uma contradição. Assim, sem perda de generalidade, podemos supor que existem primos minimais P, Q e N tais que $a \in (Q \cap N) \setminus P$ e $b \in P \setminus (Q \cup N)$. Observemos que $Q \cap P$ não está contido em N pois, caso contrário, teríamos pelo Lema 2.35 (ii) que $Q \subseteq N$ ou $P \subseteq N$, contrariando a minimalidade

de N . Assim, $(Q \cap P) \setminus N \neq \emptyset$. Seja $q \in (Q \cap P) \setminus N$ e consideremos o par $a + bq$ e b . Como R é um anel reduzido, $ab = 0$, $b \notin N$ e $q \notin N$, temos $0 \neq b^2q = b(a + bq)$. Também, $(a, b) = (a + bq, b)$ e, então, $(a + bq, b)$ não tem anulador não nulo. Logo, $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. \square

Teorema 2.39. ([14]) *Seja R um anel reduzido tal que $D(R)$ não é um ideal. Então R tem exatamente dois primos minimais se, e somente se, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$.*

Demonstração. Sejam P e Q os únicos primos minimais de R . Uma vez que $D(R)$ é a união dos primos minimais de R (Proposição 1.16), temos $D(R) = P \cup Q$ e, como R é reduzido, $P \cap Q = \text{Nil}(R) = \{0\}$. Sejam $r, s \in D(R)$ distintos. Como $D(R) = P \cup Q$ e $P \cap Q = \{0\}$, devemos ter $rs = 0$ ou, então, $(r, s) \subseteq P$ ou $(r, s) \subseteq Q$. Se $rs = 0$, então $d(r, s) = 1$. Agora, se $rs \neq 0$, sem perda de generalidade, suponhamos $(r, s) \subseteq P$. Então, para qualquer $a \in Q$, temos $ar, as \in P \cap Q$, isto é, $ar = as = 0$ e segue que $d(r, s) = 2$. Portanto, $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$.

Reciprocamente, seja R um anel reduzido tal que $D(R)$ não é um ideal e $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$. Então, existem $a, b \in D(R)^*$ tais que $a + b \notin D(R)$ e, assim, o ideal (a, b) não tem anulador não nulo. Também, como R é reduzido, segue do item (ii) da Proposição 1.16 que R deve ter, no mínimo, dois primos minimais. Desta forma, como $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$, pelo Teorema 2.38, R deve ter exatamente dois primos minimais. \square

Lema 2.40. *Seja R um anel não reduzido e seja I um ideal de R . Se I tem um anulador não nulo e $q \in \text{Nil}(R)$, então o ideal $(q) + I$ tem um anulador não nulo. Em particular, se $a \in D(R)$ e $q \in \text{Nil}(R)$, então $a + q \in D(R)$ e $\text{Ann}((a, q)) \neq \{0\}$.*

Demonstração. Seja $q \in \text{Nil}(R)$ com $q \neq 0$ e seja $c \in R^*$ tal que $cI = \{0\}$. Como q é um elemento nilpotente, existe um inteiro positivo m tal que $cq^m = 0$ e $cq^{m-1} \neq 0$. Então, cq^{m-1} é um anulador não nulo de $(q) + I$. No caso particular, basta fazer $I = (a)$. \square

O próximo resultado é uma versão do Teorema 2.38 para anéis não reduzidos. Aqui não supomos que R tem mais que dois primos minimais.

Teorema 2.41. ([14]) *Seja R um anel não reduzido. Se existe um par de divisores de zero $a, b \in D(R)$ tal que $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$, então $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$.*

Demonstração. Sejam $a, b \in D(R)$ tais que $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$. Com isso, $d(a, b) \neq 2$. Pelo caso particular do Lema 2.40, segue que $a \notin \text{Nil}(R)$ e $b \notin \text{Nil}(R)$. Se $ab \neq 0$, então $d(a, b) = 3$ e o resultado segue. Assim, suponhamos $ab = 0$. Notemos que o ideal (a^2, b^2) não tem anulador não nulo. De fato, se existe $x \in R$ tal que $xa^2 = 0 = xb^2$, então $(xa - xb)a = xa^2 - xab = 0$ e $(xa - xb)b = xab - xb^2 = 0$ e, como $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$, obtemos $xa - xb = 0$, ou seja, $xa = xb$. Uma vez que $(xa)a = 0 = (xb)b$ temos $(xb)a = 0 = (xb)b$, isto é, xb é anulador de (a, b) e, assim, $xb = 0$. Analogamente, $xa = 0$. Com isso, x é anulador de (a, b) e segue que $x = 0$. Então, sem perda de generalidade, podemos supor que existe um nilpotente q tal que $b^2q \neq 0$. Como a é um divisor de zero e q é nilpotente, pelo Lema 2.40 temos $a + bq \in D(R)$. Consideremos o par $a + bq$ e b . Temos que $(a, b) = (a + bq, b)$ não tem anulador não nulo e, então, $d(a + bq, b) \neq 2$. Mas $(a + bq)b = b^2q \neq 0$ implica $d(a + bq, b) \neq 1$. Portanto, $d(a + bq, b) = 3$ e segue que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. \square

Corolário 2.42. *Se R é um anel não reduzido tal que $D(R)$ não é ideal, então $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$.*

Demonstração. Se $D(R)$ não é um ideal, existem $a, b \in D(R)$ tais que $a + b \notin D(R)$. Assim, $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$ e, pelo teorema anterior, $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. \square

O próximo resultado caracteriza os possíveis diâmetros de $\Gamma(R)$ em termos dos ideais do anel R .

Teorema 2.43. *([14]) Seja R um anel tal que $D(R) \neq \{0\}$.*

- (1) $\text{diam}(\Gamma(R)) = 0$ se, e somente se, R é não reduzido e isomorfo a \mathbb{Z}_4 ou $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$;
- (2) $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$ se, e somente se, $xy = 0$ para cada par distinto de divisores de zero e $|D(R)^*| \geq 2$;
- (3) $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$ se, e somente se, (i) R é reduzido com exatamente dois primos mínimos e $|D(R)^*| \geq 3$, ou (ii) $D(R)$ é um ideal tal que $D(R)^2 \neq \{0\}$ e cada par de divisores de zero distintos tem um anulador não nulo;

(4) $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$ se, e somente se, existem $a, b \in D(R)$ com $a \neq b$ tais que $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$ e (i) R é um anel reduzido com mais que dois primos minimais, ou (ii) R é não reduzido.

Demonstração. (1) Segue do Exemplo 2.2 e Observação 2.5.

(2) Se $xy = 0$ para cada $x, y \in D(R)$, $x \neq y$, e R tem pelo menos dois divisores de zero não nulos, então $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$. A recíproca é óbvia.

(3) Suponhamos que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$. Primeiro vamos considerar o caso em que R é um anel reduzido. Se $D(R)$ não é um ideal, pelo Teorema 2.39, R tem exatamente dois primos minimais e é claro que devemos ter $|D(R)^*| \geq 3$. Assim, (i) ocorre. Se $D(R)$ é um ideal, segue da Proposição 2.33 que cada par de divisores de zero tem um anulador não nulo e, como $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$, $D(R)^2 \neq \{0\}$. Logo, (ii) acontece.

Agora, suponhamos que R seja não reduzido. Pelo Corolário 2.42, devemos ter $D(R)$ um ideal. Além disso, pelo Teorema 2.41, cada par de divisores de zero tem um anulador não nulo. Também $D(R)^2 \neq \{0\}$. Portanto, em qualquer caso, se $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$, então R satisfaz (i) ou (ii).

Reciprocamente, se R é um anel satisfazendo a condição (i), então $D(R)$ não é um ideal, $\text{diam}(\Gamma(R)) \neq 0$ e R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Assim, pelo Teorema 2.39, $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$ ou $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$. Afirmamos que $\text{diam}(\Gamma(R)) \neq 1$. De fato, se $\text{diam}(\Gamma(R)) = 1$, então $\Gamma(R)$ seria um grafo completo. Assim, como R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ e $\Gamma(\mathbb{Z}_2 \times A)$ não é completo se A é um domínio de integridade com $|A| \geq 3$, seguiria do Teorema 2.14 que $D(R)$ é um ideal, uma contradição. Portanto, $\text{diam}(\Gamma(R)) \neq 1$ e, conseqüentemente, $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$.

Se R satisfaz (ii), então $D(R)^2 \neq \{0\}$ e dos itens (1) e (2) obtemos $\text{diam}(\Gamma(R)) \neq 0$ e $\text{diam}(\Gamma(R)) \neq 1$. Assim, como cada par de divisores de zero tem um anulador não nulo, devemos ter $\text{diam}(\Gamma(R)) = 2$.

(4) Seja R um anel tal que $\text{diam}(\Gamma(R)) = 3$. Primeiro notemos que se $\text{Ann}((a, b)) \neq \{0\}$ para todo par $a, b \in D(R)$, $a \neq b$, então $\text{diam}(\Gamma(R)) \leq 2$, uma contradição. Logo, existem $a, b \in D(R)$, com $a \neq b$, tais que $\text{Ann}((a, b)) = \{0\}$. Se R é reduzido, então R tem pelo menos dois primos minimais (Proposição 1.16). Assim, por (3) obtemos que R tem mais que dois primos minimais. A recíproca segue dos Teoremas 2.38 e 2.41. \square

Agora, apresentamos um resultado auxiliar para depois demonstrarmos um teorema que caracteriza o diâmetro de $\Gamma(R[x])$ em termos dos ideais de R .

Lema 2.44. *Se R é um anel que não é isomorfo ao anel $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, então $\Gamma(R[x])$ é completo se, e somente se, $\Gamma(R)$ é completo.*

Demonstração. Como $D(R) \subseteq D(R[x])$ temos que $\Gamma(R[x])$ completo implica $\Gamma(R)$ completo. Vamos supor que $\Gamma(R)$ seja um grafo completo. Como R não é isomorfo a $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, segue do Teorema 2.18 que $xy = 0$ para todos $x, y \in D(R)$. Portanto, $\Gamma(R)$ completo implica $D(R)^2 = \{0\}$. Sejam $f, g \in D(R[x])^*$. Pelo Teorema de McCoy, existem $r, s \in R^*$ tais que $rf = sg = 0$. Assim, todos os coeficientes de f e g são divisores de zero e, sendo $\Gamma(R)$ completo, temos $fg = 0$. Portanto, $\Gamma(R[x])$ é completo. \square

No lema anterior devemos considerar R um anel não isomorfo ao anel $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ pois, caso contrário, teríamos $\Gamma(R)$ completo, porém $\Gamma(R[x])$ não é completo. Para verificarmos isto, consideremos $f = (1, 0) + (1, 0)x$ e $g = (1, 0) + (1, 0)x^2$. Então $fg \neq 0$.

Agora temos condições para caracterizar $\text{diam}(\Gamma(R[x]))$.

Teorema 2.45. *([14]) Seja R um anel.*

- (1) $\text{diam}(\Gamma(R[x])) \geq 1$;
- (2) $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 1$ se, e somente se, R é um anel não reduzido com $D(R)^2 = \{0\}$;
- (3) $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 2$ se, e somente se, (i) R é um anel reduzido com exatamente dois primos minimais ou (ii) R é um anel de McCoy e $D(R)$ é um ideal com $D(R)^2 \neq \{0\}$.

Demonstração. (1) Temos que $\text{diam}(\Gamma(R[x])) \geq 1$ pois, pelo item (1) do Teorema 2.43, os únicos anéis T tais que $\text{diam}(\Gamma(T)) = 0$ são os anéis isomorfos a \mathbb{Z}_4 ou a $\frac{\mathbb{Z}_2[x]}{(x^2)}$.

(2) Segue do Teorema 2.18 e do lema anterior.

(3) Seja R um anel reduzido com exatamente dois primos minimais, digamos P e Q . Então $R[x]$ é reduzido e tem exatamente dois primos minimais, a saber, $P[x]$ e $Q[x]$. Notemos que $P[x]$ e $Q[x]$ e, conseqüentemente, $D(R[x])$ contém uma infinidade de elementos. Portanto, pelo Teorema 2.43 (item (3)) segue que $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 2$.

Agora, se R é reduzido com mais que dois primos minimais ou R é não reduzido, segue do item (3) do Teorema 2.43 que $\text{diam}(\Gamma(T)) = 2$ se, e somente se, $D(T)$ é ideal tal que $D(T)^2 \neq \{0\}$ e cada par de divisores de zero tem um anulador não nulo. Assim, se R é um anel reduzido com mais que dois primos minimais ou R é não reduzido, então $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 2$ se, e somente se, $D(R[x])$ é um ideal tal que $D(R[x])^2 \neq \{0\}$ e cada par de divisores de zero de $R[x]$ tem um anulador não nulo. Mas $D(R[x])$ é um ideal se, e somente se, (f, g) tem anulador não nulo para cada par $f, g \in R[x]$, pelo Corolário 1.33. Então, $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 2$ se, e somente se, $D(R[x])$ é um ideal tal que $D(R[x])^2 \neq \{0\}$. Mas, pelo Teorema 1.34, $D(R[x])$ é um ideal tal que $D(R[x])^2 \neq \{0\}$ se, e somente se, R é um anel de McCoy e $D(R)$ é um ideal de R tal que $D(R)^2 \neq \{0\}$. \square

Os anéis R tais que $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 3$, são obtidos observando-se os itens (1), (2) e (3) do teorema anterior. Neste caso, $\text{diam}(\Gamma(R[x])) = 3$ se, e somente se, R é um anel não reduzido com exatamente dois primos minimais e, ou R não é um anel de McCoy ou $D(R)$ não é um ideal.

2.6 Colorações de $\Gamma(R)$

Sabemos que, para qualquer grafo G , $\chi(G) \geq \omega(G)$. Em 1988, Istvan Beck em seu artigo “Coloring of commutative rings” [9] conjecturou que para anéis R tais que $\chi(\Gamma(R)) < \infty$, $\chi(\Gamma(R)) = \omega(\Gamma(R))$. Contudo, neste artigo Beck não provou tal afirmação, mas mostrou que para anéis reduzidos o resultado é verdadeiro. Apresentaremos este resultado, porém antes veremos outros que utilizaremos para demonstrá-lo. Veremos também o contraexemplo à conjectura de Beck dado por D. D. Anderson e M. Naseer em [3]. No final da seção, apresentaremos o estudo do índice cromático por arestas ($\chi'(\Gamma(R))$) do grafo divisor de zero realizado por S. Akbari e A. Mohammadian em [1].

Lema 2.46. *Se R é um anel reduzido tal que $\Gamma(R)$ não contém um clique infinito, então R satisfaz a condição de cadeia ascendente (c.c.a.) sobre ideais da forma $\text{Ann}(a)$.*

Demonstração. Vamos supor que exista uma cadeia

$$\text{Ann}(a_1) \subset \text{Ann}(a_2) \subset \dots$$

que não estaciona. Seja $x_i \in \text{Ann}(a_i) \setminus \text{Ann}(a_{i-1})$, $i = 1, 2, \dots$. Assim, para todo $n \geq 2$, $y_n = x_n a_{n-1} \neq 0$ e os elementos y_n formam um clique. De fato, se $i < j$ temos

$$y_i y_j = (x_i a_{i-1})(x_j a_{j-1}) = 0$$

pois $x_i \in \text{Ann}(a_k)$ para todo $k = i, i+1, \dots, j, \dots$. Também, se $i \neq j$ temos $y_i \neq y_j$, pois caso contrário, teríamos $y_i^2 = y_j^2 = y_i y_j = 0$, uma contradição com o fato de R ser reduzido. Assim, $\Gamma(R)$ possui um clique infinito, contrariando a hipótese. Portanto, R satisfaz a condição de cadeia ascendente sobre ideais da forma $\text{Ann}(a)$. \square

Dados $a \in R$ e $I \in \text{Id}(R)$, definimos o *quociente* de I por a como sendo o conjunto $(I : a) = \{r \in R : ra \in I\}$. Facilmente mostra-se que este conjunto é um ideal de R .

Lema 2.47. *Se $x, y \in D(R)$ são tais que $\text{Ann}(x)$ e $\text{Ann}(y)$ são ideais primos distintos, então $xy = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que $xy \neq 0$. Então $x \notin \text{Ann}(y)$ e $y \notin \text{Ann}(x)$. Notemos que $\text{Ann}(x) = (\text{Ann}(x) : y)$, pois dado $z \in \text{Ann}(x)$ então $zy \in \text{Ann}(x)$, isto é, $z \in (\text{Ann}(x) : y)$. Agora, dado $z \in (\text{Ann}(x) : y)$, por definição, $zy \in \text{Ann}(x)$ e como $\text{Ann}(x)$ é ideal primo e $y \notin \text{Ann}(x)$, obtemos $z \in \text{Ann}(x)$. Logo, $\text{Ann}(x) = (\text{Ann}(x) : y)$. Analogamente, $(\text{Ann}(y) : x) = \text{Ann}(y)$.

Mas, temos que $z \in (\text{Ann}(x) : y)$ se, e somente se, $zyx = 0$. Mas isto é equivalente a $z \in (\text{Ann}(y) : x)$. Logo, $(\text{Ann}(x) : y) = (\text{Ann}(y) : x) = \text{Ann}(xy)$. Assim, seguem as igualdades $\text{Ann}(x) = (\text{Ann}(x) : y) = (\text{Ann}(y) : x) = \text{Ann}(y)$, e obtemos um absurdo. Portanto, devemos ter $xy = 0$. \square

Teorema 2.48. *([9]) Para um anel reduzido R as seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $\chi(\Gamma(R))$ é finito;
- (ii) $\omega(\Gamma(R))$ é finito;
- (iii) O ideal nulo de R é uma interseção finita de ideais primos;
- (iv) $\Gamma(R)$ não contém um clique infinito.

Demonstração. Como $\omega(\Gamma(R)) \leq \chi(\Gamma(R))$, segue que $\chi(\Gamma(R))$ finito implica que $\omega(\Gamma(R))$ é finito. Também, se $\omega(\Gamma(R))$ é finito, claramente temos que R não contém um clique infinito. Assim, já temos que (i) implica (ii) e que (ii) implica (iv).

Suponhamos que o ideal nulo de R seja uma interseção finita de ideais primos, isto é, $\{0\} = P_1 \cap \dots \cap P_k$, onde P_i é ideal primo, $1 \leq i \leq k$. Vamos mostrar que $\chi(\Gamma(R))$ é finito. Definamos uma coloração f em $\Gamma(R)$ colocando $f(x) = \min\{i : x \notin P_i\}$, para todo $x \in D(R)^*$. Notemos que dados $x, y \in D(R)^*$, $x \neq y$, tais que $xy = 0$ então $f(x) \neq f(y)$, isto é, f é uma k -coloração própria. De fato, se $f(x) = f(y) = \min\{i : x \notin P_i\} = k$ então $x, y \notin P_k$, mas $0 = xy \in P_k$ o que implica que $x \in P_k$ ou $y \in P_k$, pois P_k é ideal primo, uma contradição. Logo, usando esta coloração obtemos $\chi(\Gamma(R)) \leq k < \infty$.

Vamos supor que R seja um anel reduzido tal que $\Gamma(R)$ não contém um clique infinito. Mostraremos que o ideal nulo de R é uma interseção finita de ideais primos.

Temos pelo Lema 2.46 que R satisfaz c.c.a. sobre ideais da forma $Ann(a)$. Seja $Ann(x_i)$, $i \in \Lambda$, os elementos maximais da família $\{Ann(a) : a \neq 0\}$ distintos dois a dois. Assim, segue da Proposição 1.17, que $Ann(x_i)$ é ideal primo, para todo $i \in \Lambda$. Como $\Gamma(R)$ não contém um clique infinito, pelo Lema 2.47 temos que o conjunto de índices Λ é finito. Com efeito, se Λ fosse infinito, teríamos infinitos $Ann(x_i)$ e o Lema 2.47 implicaria que $x_i x_j = 0$ para todos $i \neq j$ e, com isso, $\Gamma(R)$ teria um clique infinito, uma contradição.

Agora, suponhamos que exista um elemento não nulo $x \in \bigcap_{i \in \Lambda} Ann(x_i)$. É claro que $x \in D(R)^*$. Da escolha dos $Ann(x_i)$, $i \in \Lambda$, $Ann(x) \subseteq Ann(x_j)$, para algum $j \in \Lambda$. Se $xx_j = 0$, então $x_j \in Ann(x) \subseteq Ann(x_j)$ e, assim, $x_j^2 = 0$ donde obtemos $x_j = 0$ porque R é reduzido. Logo, $xx_j \neq 0$ e, então, $x \notin Ann(x_j)$, uma contradição. Portanto, $\bigcap_{i \in \Lambda} Ann(x_i) = \{0\}$ como queríamos. \square

Finalmente, segue o Teorema de Beck para anéis reduzidos.

Teorema 2.49. ([9]) *Para um anel reduzido R com $\chi(\Gamma(R)) < \infty$, $\chi(\Gamma(R)) = \omega(\Gamma(R))$.*

Demonstração. Como $\chi(\Gamma(R))$ é finito, segue do Teorema 2.48 que $\{0\} = Q_1 \cap \dots \cap Q_k$, onde Q_i é ideal primo para todo $i = 1, \dots, k$. Assim, da Observação 1.15, obtemos $\{0\} = P_1 \cap \dots \cap P_k$ onde cada P_i é um ideal primo minimal com $P_i \subseteq Q_i$. E como visto na

demonstração do Teorema 2.48 temos que $\chi(\Gamma(R)) \leq k$. Observemos que $\bigcap_{j \neq i} P_j \neq \{0\}$, pois caso contrário, $\bigcap_{j \neq i} P_j \subset P_i$ e, conseqüentemente, pelo Lema 2.35 (ii), $P_j \subseteq P_i$, para algum $j \neq i$, contrariando a minimalidade de P_i . Para cada $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, escolhamos x_i tal que $x_i \in P_j$ para $j \neq i$ e $x_i \notin P_i$. Então, os vértices correspondentes a x_1, \dots, x_k formam um clique. Com efeito, se $i \neq j$ temos $x_i x_j \in P_1 \cap \dots \cap P_k = \{0\}$, pois $x_i \in P_1 \cap \dots \cap P_{i-1} \cap P_{i+1} \cap \dots \cap P_k$ e $x_j \in P_1 \cap \dots \cap P_{j-1} \cap P_{j+1} \cap \dots \cap P_k$ e sendo cada P_l ideal primo, segue que $x_i x_j \in P_1 \cap \dots \cap P_k = \{0\}$. Com isso, $x_i x_j = 0$ para todo $i \neq j$. Logo, $\omega(\Gamma(R)) \geq k$. Finalmente, $k \leq \omega(\Gamma(R)) \leq \chi(\Gamma(R)) \leq k$ implica $\chi(\Gamma(R)) = \omega(\Gamma(R)) = k$. \square

Apresentamos, na seqüência, o contraexemplo para a conjectura de Beck, dado por D. D. Anderson e M. Naseer no artigo “Beck’s coloring of a commutative ring” [3]. No exemplo original é mostrado que $\omega(\Gamma(R)) = 5$ e $\chi(\Gamma(R)) = 6$ pois em [3] o conjunto de vértices de $\Gamma(R)$ é definido como sendo $D(R)$. Aqui, adequamos tal exemplo para nossa definição de grafo divisor de zero em que $V(\Gamma(R)) = D(R)^*$.

Exemplo 2.50. Seja

$$R = \frac{\mathbb{Z}_4[x, y, z]}{(x^2 - 2, y^2 - 2, z^2, 2x, 2y, 2z, xy, xz, yz - 2)}.$$

Mostremos que R é um anel tal que $\omega(\Gamma(R)) = 4$, mas $\chi(\Gamma(R)) = 5$. Para facilitar a notação, omitiremos a barra que denota a classe nos elementos de R , por exemplo, o elemento $\bar{2} \in R$ será identificado apenas por 2.

Temos que R é um anel local com 32 elementos cujo ideal maximal é $M = D(R) = \{0, 2, x, x+2, y, y+2, x+y, x+y+2, z, z+2, x+z, x+z+2, y+z, y+z+2, x+y+z, x+y+z+2\}$. Os demais elementos de R são invertíveis. Assim, $U(R) = R \setminus M = 1 + M = \{1 + m : m \in M\}$. Apresentamos a tábua da multiplicação em M (Tabela 2.1) no final deste exemplo.

Para mostrar que $\omega(\Gamma(R)) = 4$ é suficiente mostrar que $\omega(M) = 4$. Entende-se por um clique maximal como um clique de M que não pode ser ampliado. O fato que $\omega(\Gamma(R)) = 4$ segue da seqüência de passos que podem ser verificados usando a tábua de multiplicação em M .

1. Todo clique maximal contém o vértice 2.

2. $\{2, x, y, y + z\}$ é um clique maximal e, assim, $\omega(\Gamma(R)) \geq 4$.

3. Qualquer clique contendo x ou $x + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

Como $x(x+2) \neq 0$, um clique não pode conter, simultaneamente, x e $x+2$. Suponhamos que contenha x (o caso em que contém $x + 2$ é análogo). Os candidatos para o clique, além de 2 e x , incluem um do par y e $y + 2$ e um do par $y + z$ e $y + z + 2$, ou incluem os vértices z e $z + 2$. Notemos que se incluimos z e $z + 2$, devemos excluir y , $y + 2$, $y + z$ e $y + z + 2$, pois não existe aresta ligando z e $z + 2$ aos vértices excluídos. Em qualquer caso, nosso clique contém, no máximo, 4 elementos.

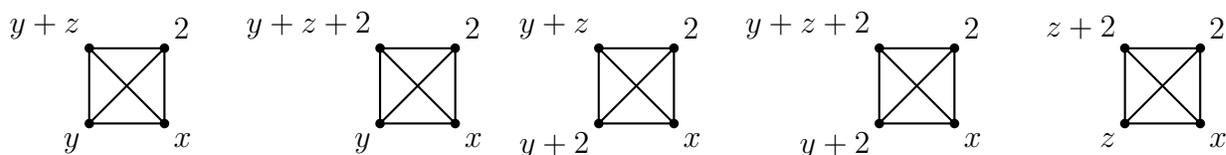


Figura 2.20: Cliques contendo x .

4. Qualquer clique contendo y ou $y + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

Suponhamos que o clique contenha y . Pelo item 3, podemos considerar que o clique não contém x ou $x + 2$ (pois o caso que contém um desses vértices já foi estudado). Os candidatos para o clique, além de 2 e y , incluem $y + z$, $y + z + 2$, $x + y + z$ e $x + y + z + 2$. Entretanto, dentre esses quatro candidatos, apenas os vértices $x + y + z$ e $x + y + z + 2$ são adjacentes. Então, temos, no máximo, 4 elementos. O caso em que o clique contém $y + 2$ é análogo.

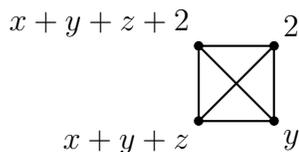


Figura 2.21: Clique contendo y .

5. Qualquer clique contendo $x + y$ ou $x + y + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

Podemos considerar que nosso clique contém 2 , $x+y$ e $x+y+2$, pois $(x+y)(x+y+2) = 0$. Podemos incluir, no máximo, um do par $x + z$ e $x + z + 2$ e, no máximo, um do par

$y + z$ e $y + z + 2$. Como o produto dois a dois dentre os elementos $x + z$, $x + z + 2$, $y + z$ e $y + z + 2$ é não nulo, podemos incluir apenas um elemento dentre os quatro citados. E o resultado segue.

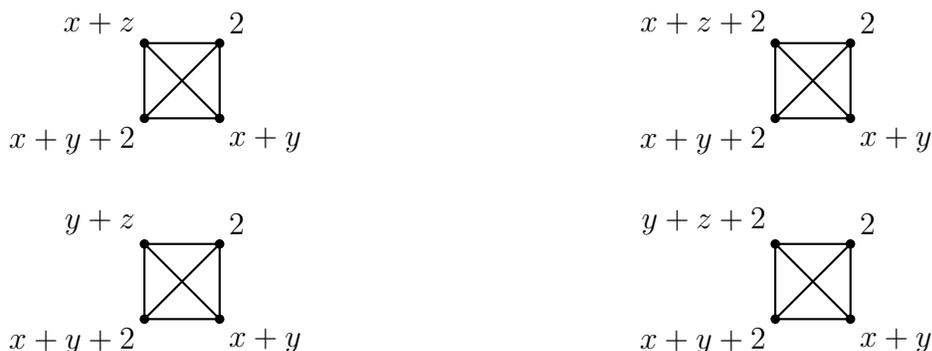


Figura 2.22: Cliques contendo $x + y$ e $x + y + 2$.

6. Qualquer clique contendo z ou $z + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

Suponhamos que nosso clique contenha 2 , z e $z + 2$, mas não contenha x ou $x + 2$. Como o único candidato é um do par $x + z$ e $x + z + 2$, temos, no máximo, 4 elementos.



Figura 2.23: Cliques contendo z e $z + 2$.

7. Qualquer clique contendo $x + z$, $x + z + 2$, $y + z$ ou $y + z + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

Vamos supor que o clique contenha $x + z$. Como $x + z$ está ligado aos elementos $x + y + 2$, $x + y$, z , $z + 2$, $x + y + z$ e $x + y + z + 2$ e os quatro primeiros já foram estudados anteriormente, podemos considerar que nosso clique não contém esses elementos. Assim, além de 2 e $x + z$, nosso clique pode conter apenas $x + y + z$ e $x + y + z + 2$ e obtemos, então, um clique com, no máximo, 4 elementos. Os demais casos são análogos.

8. Qualquer clique contendo $x + y + z$ ou $x + y + z + 2$ tem, no máximo, 4 elementos.

É análogo aos itens anteriores.

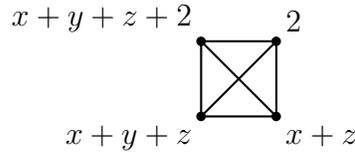


Figura 2.24: Clique contendo $x + z$.

Agora, mostremos que $\chi(\Gamma(R)) = 5$. Como $\{2, x, y, y + z\}$ é um clique, devemos ter, pelo menos, 4 cores, as quais definimos como 1, 2, 3 e 4. Vamos colorir os elementos deste clique na ordem em que são vistos no conjunto. Os três item seguintes mostram que o subgrafo induzido de $\Gamma(R)$ com conjunto de vértices $V' = \{2, x, y, y + z, z, z + 2, x + y, x + y + 2, x + z\}$ não pode ser colorido com 4 cores e, então, $\chi(\Gamma(R)) \geq 5$. Veja Figura 2.25.

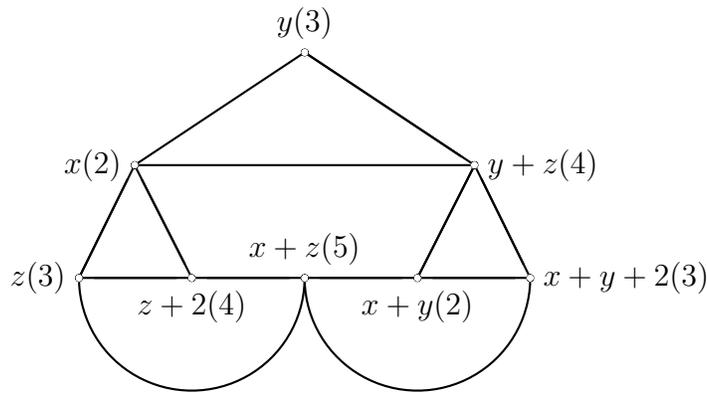


Figura 2.25: Coloração de $\{x, y, y + z, z, z + 2, x + y, x + y + 2, x + z\}$.

9. Como $xz = x(z + 2) = 0$, $z(z + 2) = 0$, $zy \neq 0$, $z(y + z) \neq 0$, $zy \neq 0$ e $(z + 2)(y + z) \neq 0$, devemos colorir um do par z e $z + 2$ com 3 e um com 4 e não importa qual deles é colorido com 3 ou qual é colorido com 4. Vamos colorir z com 3 e $z + 2$ com 4.
10. Uma vez que $(x + y)(x + y + 2) = 0$, $x + y$ e $x + y + 2$ devem ser coloridos com cores distintas. Também, $(y + z)(x + y) = (y + z)(x + y + 2) = 0$, $(x + y)x \neq 0$ e $(x + y + 2)y \neq 0$, assim, podemos colorir $x + y$ com 2 e $x + y + 2$ com 3, ou vice-versa. Vamos colorir $x + y$ com 2 e $x + y + 2$ com 3.
11. Agora, consideremos $x + z$. Como $(x + z)2 = (x + z)(x + y) = (x + z)z = (x + z)(z + 2) = 0$, $x + z$ não pode receber as cores 1, 2, 3 e 4. Isto mostra que $\chi(\Gamma(R)) \geq 5$.

Na verdade, temos $\chi(\Gamma(R)) = 5$. A seguinte partição de R nos fornece uma coloração própria de R usando 5 cores: $\{2\} \cup U(R)$, $\{x, x + 2, x + y, x + y + z\}$, $\{y, y + 2, z, x + y + 2\}$, $\{y + z, y + z + 2, z + 2, x + y + z + 2\}$, $\{x + z, x + z + 2\}$.

	x	x+2	y	y+2	x+y	x+y+2	z	z+2	x+z	x+z+2	y+z	y+z+2	x+y+z	x+y+z+2
x	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
x+2	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2
y	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
y+2	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2	0	0	0	0
x+y	2	2	2	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
x+y+2	2	2	2	2	0	0	2	2	0	0	0	0	2	2
z	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2
z+2	0	0	2	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2
x+z	2	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0
x+z+2	2	2	2	2	0	0	0	0	2	2	2	2	0	0
y+z	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
y+z+2	0	0	0	0	0	0	2	2	2	2	2	2	2	2
x+y+z	2	2	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	0	0
x+y+z+2	2	2	0	0	2	2	2	2	0	0	2	2	0	0

Tabela 2.1: Tábua da multiplicação em M

Passamos, agora, ao estudo do índice cromático por arestas ($\chi'(\Gamma(R))$) do grafo divisor de zero de um anel comutativo R , feito por S. Akbari e A. Mohammadian no artigo “On the zero-divisor graph of a commutative ring” [1]. O objetivo aqui é mostrar que se R é um anel finito tal que $\Gamma(R)$ não é um grafo completo de ordem ímpar, então $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$.

Teorema 2.51. ([1]) *Se R é um anel local finito o qual não é um corpo, então $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$, exceto se $\Gamma(R)$ é um grafo completo de ordem ímpar.*

Demonstração. Como R é um anel local finito, temos que $D(R)$ é o ideal maximal de R e, assim, $\text{Ann}(D(R)) \neq \{0\}$, pelo item (ii) da Proposição 1.21.

Se $\Gamma(R)$ é um grafo completo, digamos $\Gamma(R) \simeq K^n$, com n par, então $\chi'(\Gamma(R)) = n - 1 = \Delta(\Gamma(R))$. Assim, vamos supor que $\Gamma(R)$ não seja um grafo completo e, então, $\text{Ann}(D(R)) \neq D(R)$. Se $x \in D(R) \setminus \text{Ann}(D(R))$, existe $a \in D(R)$ tal que $ax \neq 0$. Notemos que dado $y \in a + \text{Ann}(D(R))$, ou seja, y é da forma $y = a + d$ com $d \in \text{Ann}(D(R))$, temos $xy = x(a + d) = xa \neq 0$, isto é, x não é adjacente a vértices de $a + \text{Ann}(D(R))$. Portanto,

$$d(x) \leq |D(R)^*| - |\text{Ann}(D(R))|.$$

Assim, podemos dizer que $d(x) \leq \Delta(\Gamma(R)) - |\text{Ann}(D(R))| + 1$, ou ainda, $\Delta(\Gamma(R)) - d(x) + 2 \geq |\text{Ann}(D(R))| + 1$. Como $\text{Ann}(D(R))^*$ é o conjunto de todos os vértices de grau máximo em $\Gamma(R)$, segue da Observação 1.45 que $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$. \square

Na sequência temos um teorema para anéis finitos decomponíveis.

Teorema 2.52. ([1]) *Se R é um anel finito decomponível, então $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$.*

Demonstração. Como R é um anel finito, então R é Artiniano. Logo, pelo Teorema de Estrutura de Anéis Artinianos, temos $R = R_1 \times \dots \times R_n$, onde $n \geq 2$ (pois R é decomponível) e cada R_i é um anel local. Pela Observação 2.29, podemos supor, sem perda de generalidade, que as componentes não nulas dos vértices de grau máximo em $\Gamma(R)$ ocorram em R_1, \dots, R_k , $1 \leq k \leq n$. Primeiro afirmamos que todos os anéis R_1, \dots, R_k são corpos ou nenhum deles é um corpo. De fato, por contradição, vamos supor que R_1 seja um corpo, mas R_2 não seja um corpo. Agora, segue da Observação 2.29 que todo vértice com grau máximo em $R_1 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ tem grau $|R_2| \cdots |R_n| - 1$ e cada vértice de grau máximo em $\{0\} \times R_2 \times$

$\{0\} \times \dots \times \{0\}$ tem grau $|R_1| \cdot |D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| - 2$. Assim, se $x \in R_1 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ e $y \in \{0\} \times R_2 \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ são vértices de grau máximo, temos $d(x) = \Delta(\Gamma(R)) = d(y)$, ou seja, $d(y) - d(x) = 0$ o que implica

$$|R_1| \cdot |D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| - 2 - |R_2| \cdots |R_n| + 1 = 0,$$

isto é,

$$|D(R_2)| \cdot |R_3| \cdots |R_n| (|R_1| - |R_2/D(R_2)|) = 1$$

o que nos dá $|D(R_2)| = 1$, uma contradição.

Portanto, pela Observação 2.29, para qualquer $i = 1, \dots, k$,

$$\Delta(\Gamma(R)) = |R_1| \cdots |R_{i-1}| \cdot |D(R_i)| \cdot |R_{i+1}| \cdots |R_n| - \varepsilon$$

onde $\varepsilon = 1$ se R_i é corpo, e $\varepsilon = 2$, caso contrário. Com isso, obtemos

$$\left| \frac{R_1}{D(R_1)} \right| = \dots = \left| \frac{R_k}{D(R_k)} \right| \quad (2.6)$$

pois se $i < j$, $1 \leq i, j \leq k$, então

$$|R_1| \cdots |R_{i-1}| \cdot |D(R_i)| \cdot |R_{i+1}| \cdots |R_n| = |R_1| \cdots |R_{j-1}| \cdot |D(R_j)| \cdot |R_{j+1}| \cdots |R_n|,$$

ou ainda, $|D(R_i)| \cdot |R_j| = |R_i| \cdot |D(R_j)|$.

Além disso, como para cada $j = k + 1, \dots, n$, o grau de qualquer vértice em $\{0\} \times \dots \times \{0\} \times R_j \times \{0\} \times \dots \times \{0\}$ é menor que $\Delta(\Gamma(R))$, temos

$$\left| \frac{R_j}{D(R_j)} \right| \geq \left| \frac{R_1}{D(R_1)} \right| \quad (2.7)$$

Para cada $t \in \{1, \dots, n\}$, seja e_t o elemento cuja t -ésima coordenada é igual a 1 e as demais coordenadas são iguais a 0. Agora, vamos dividir em dois casos: R_1, \dots, R_k não são corpos e R_1, \dots, R_k são corpos.

Supondo que R_1, \dots, R_k não sejam corpos, então $\Gamma(R)$ tem $\sum_{t=1}^k |\text{Ann}(D(R_t))^*|$ vértices de grau máximo, pois os vértices de grau máximo são do tipo $(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0)$ com $x_i \neq 0$ e, para cada coordenada i , temos $|\text{Ann}(D(R_i))|$ vértices. Observemos que cada

vértice de grau máximo em $\Gamma(R)$ é adjacente a pelo menos um dos e'_t s. Agora, para qualquer $i = 1, \dots, n$, temos

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma(R)) - d(e_i) + 2 &\geq (|R_1| \cdots |R_{i-1}| \cdot |D(R_i)| \cdot |R_{i+1}| \cdots |R_n| - 2) \\ &\quad - (|R_1| \cdots |R_{i-1}| \cdot |R_{i+1}| \cdots |R_n| - 1) + 2 \\ &= |R_1| \cdots |R_{i-1}| (|D(R_i)| - 1) |R_{i+1}| \cdots |R_n| + 1 \\ &> \sum_{t=1}^k |Ann(D(R_t))^*|. \end{aligned}$$

Assim, pela Observação 1.45, concluímos que $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$.

Agora, suponhamos que R_1, \dots, R_k sejam corpos. Então $\Gamma(R)$ tem $\sum_{t=1}^k |R_t^*|$ vértices de grau máximo. Se $n > 2$, cada vértice de grau máximo em $\Gamma(R)$ é adjacente a $1 - e_t$, para algum $t \in \{1, \dots, k\}$. Notemos que, neste caso, $|R_1| = \dots = |R_k|$ pela Equação (2.6). Coloquemos $|R_1| = a$. Pela mesma equação temos $|R_j| \geq a$ para qualquer $j > k$. Como $a^{n-1} - a + 2 > n(a - 1)$ então, para qualquer $i, i = 1, \dots, k$, temos

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma(R)) - d(1 - e_i) + 2 &= (|R_1| \cdots |R_{i-1}| \cdot |R_{i+1}| \cdots |R_n| - 1) - (|R_i| - 1) + 2 \\ &\geq a^{n-1} - a + 2 \\ &> k(a - 1) \\ &= \sum_{t=1}^k |R_t^*|. \end{aligned}$$

Novamente, pela Observação 1.45, concluímos que $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$. Assim, vamos supor que $n = 2$. Se $k = 1$ e R_2 não é um corpo temos $|D(R_2)| \geq 2$ e de (2.7) obtemos $\frac{|R_2|}{2} \geq |R_2/D(R_2)| \geq |R_1|$, ou seja, $|R_2| \geq 2|R_1|$. Como, neste caso, qualquer vértice de grau máximo em $\Gamma(R)$ é adjacente a $e_2 = (0, 1)$ e

$$\begin{aligned} \Delta(\Gamma(R)) - d(e_2) + 2 &= (|R_2| - 1) - (|R_1| - 1) + 2 \\ &= |R_2| - |R_1| + 2 \\ &\geq 2|R_1| - |R_1| + 2 \\ &> |R_1^*|, \end{aligned}$$

segue da Observação 1.45 que $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$. Mas, se $k = 1$ e R_2 é um corpo ou $k = 2$, então $\Gamma(R)$ é um grafo completo bipartido. Portanto, pelo Teorema de König 1.42, $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$, o que completa a demonstração do teorema. \square

Por fim, utilizando os teoremas anteriores, segue o seguinte resultado.

Teorema 2.53. *Se R é um anel finito, então $\chi'(\Gamma(R)) = \Delta(\Gamma(R))$, exceto se $\Gamma(R)$ é um grafo completo de ordem ímpar.*

2.7 Automorfismos de $\Gamma(R)$

Nesta seção mostraremos que $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é um produto direto (finito) de grupos simétricos. A partir desse resultado, obteremos os inteiros positivos n para os quais $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é um grupo abeliano. Por fim, veremos alguns exemplos de $\text{Aut}(\Gamma(R))$.

É fácil ver que cada automorfismo de um anel R induz um automorfismo de grafo de $\Gamma(R)$. Desta forma, temos um homomorfismo de grupo natural

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Aut}(R) &\longrightarrow \text{Aut}(\Gamma(R)). \\ f &\longmapsto \varphi(f) = f|_{D(R)^*} \end{aligned}$$

Veremos a seguir que se R é um anel finito o qual não é um corpo, então φ é injetora.

Teorema 2.54. *([5]) Seja R um anel finito o qual não é um corpo e seja $f \in \text{Aut}(R)$. Se $f(x) = x$ para todo $x \in D(R)$, então $f = I_R$. Assim, $\varphi : \text{Aut}(R) \longrightarrow \text{Aut}(\Gamma(R))$ é um homomorfismo de grupos injetor.*

Demonstração. Sabemos que por R ser um anel finito, cada elemento de R é invertível ou divisor de zero, pela Proposição 1.22. Já temos $f(x) = x$ para todo $x \in D(R)$. Então basta mostrarmos que $f(x) = x$ para todo $x \in U(R)$.

Primeiro vamos supor que R tenha pelo menos dois ideais maximais distintos M e N . Observemos que dado $x \in M \cup N$, temos que $x \notin U(R)$ e, assim, $x \in D(R)$. Com isso, $M \subset D(R)$ e $N \subset D(R)$. Como $M \subset M + N \subseteq R$ e M é ideal maximal, obtemos $M + N = R$. Dado $x \in U(R)$, então $x = m + n$ com $m \in M$ e $n \in N$. Logo, $f(x) = f(m + n) = f(m) + f(n) = m + n = x$ e segue que $f = I_R$.

Assim, podemos supor que R é um anel local com ideal maximal $M = D(R)$. Neste caso, pela Proposição 1.25, $\text{char}(R) = p^n$ e $|R/M| = p^m$ para algum primo p e inteiros $m, n \geq 1$. Vamos mostrar que $f(u) = u$ para cada $u \in U(R)$. Para todo $a \in M$, como

$ua \in M = D(R)$ e $f(x) = x$ para cada $x \in D(R)$, temos $ua = f(ua) = f(u)f(a) = f(u)a$, ou seja, $(f(u) - u)a = 0$, donde segue que $f(u) - u \in D(R) = M$. Então, $f(u) = u + b$ para algum $b \in M$ com $bM = \{0\}$. Como $|R/M| = p^m$, temos que $(R/M) \setminus \{\bar{0}\}$ é um grupo multiplicativo de ordem $p^m - 1$ e, então, a ordem de $\bar{u} \in R/M$ divide $p^m - 1$. Assim, $\overline{u^{p^m-1}} = \bar{1}$, ou seja, $u^{p^m-1} - 1 \in M$ e, então, $u^{p^m-1} = 1 + y$, para algum $y \in M$. Logo,

$$f(u^{p^m-1}) = f(1 + y) = f(1) + f(y) = 1 + y = u^{p^m-1}.$$

E mais,

$$\begin{aligned} u^{p^m-1} &= f(u^{p^m-1}) = f(u)^{p^m-1} = (u + b)^{p^m-1} = \sum_{k=0}^{p^m-1} \binom{p^m-1}{k} u^{p^m-1-k} b^k = \\ &= u^{p^m-1} + \frac{(p^m-1)!}{(p^m-2)!} u^{p^m-2} b + \frac{(p^m-1)!}{2(p^m-3)!} u^{p^m-3} b^2 + \dots + \frac{(p^m-1)!}{(p^m-2)!} u b^{p^m-2} + b^{p^m-1} = \\ &= u^{p^m-1} + (p^m-1)(u^{p^m-2})b, \end{aligned}$$

pois $bM = \{0\}$. E segue que $(p^m-1)(u^{p^m-2})b = 0$ e, uma vez que $u^{p^m-2} \in U(R)$, obtemos $(p^m-1)b = 0$. Temos que $p^n b = 0$ implica que a ordem de b divide p^n e, como $m.d.c(p^n, p^m-1) = 1$, de $(p^m-1)b = 0$ obtemos $b = 0$. Portanto, $f(u) = u$ para todo $u \in U(R)$ e obtemos o resultado desejado. \square

Observamos que para um anel R qualquer e $x \in D(R)^*$, temos $d(x) = |Ann(x) \setminus \{0, x\}|$. De fato, basta observar que $\{x, y\} \in E(\Gamma(R))$ se, e somente se, $xy = 0$ com $y \neq x$ e $x, y \in D(R)^*$, donde $y \in Ann(x)$.

O objetivo agora é considerarmos $R = \mathbb{Z}_n$ e provarmos que $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é um produto direto (finito) de grupos simétricos. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 2.55. *Dado um inteiro $n \geq 4$ que não é primo, seja $X = \{a \in \mathbb{Z} : 1 < a < n \text{ e } a|n\}$ e, para cada $a \in X$, seja $V_a = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_n : 1 < x < n \text{ e } m.d.c(x, n) = a\}$. Então:*

(i) $D(\mathbb{Z}_n)^*$ é a união disjunta dos V_a 's;

(ii) Se $a \in X$, então $Ann(\bar{x}) = Ann(\bar{a})$, para todo $\bar{x} \in V_a$. Em particular, $d(\bar{x}) = d(\bar{a})$ para todo $\bar{x} \in V_a$;

(iii) Se $a \in X$, $|Ann(\bar{a})| = a$. E mais, se $n \nmid a^2$, então $d(\bar{a}) = a - 1$; se $n|a^2$, então $d(\bar{a}) = a - 2$;

(iv) Para $a, b \in X$, $d(\bar{a}) = d(\bar{b})$ se, e somente se, $a = b$;

(v) Para $\bar{x}, \bar{y} \in V(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$, $d(\bar{x}) = d(\bar{y})$ se, e somente se, $\bar{x}, \bar{y} \in V_a$, para algum $a \in X$.

Demonstração. (i) É claro que $V_a \subset D(\mathbb{Z}_n)^*$, para todo $a \in X$. Agora, dado $\bar{x} \in D(\mathbb{Z}_n)^*$, temos $m.d.c(x, n) = a$, com $a \neq 1$ e $a \neq n$ e, assim, $\bar{x} \in V_a$. Também, se $\bar{x} \in V_a \cap V_b$, temos $m.d.c(x, n) = a$ e $m.d.c(x, n) = b$ e, então, $a = b$.

(ii) Dado $\bar{x} \in V_a$, como $a|x$, podemos escrever $\bar{x} = \bar{a}\bar{b}$, para algum $\bar{b} \in \mathbb{Z}_n$. Como $m.d.c(x, n) = a$, existem inteiros p e q tais que $a = px + qn$. Se $\bar{y} \in Ann(\bar{x})$, então $\bar{y}\bar{x} = \bar{0}$ e, assim, $\bar{y}\bar{x}\bar{p} = \bar{0}$ o que implica $\bar{y}(\overline{a - qn}) = \bar{0}$, ou ainda, $\bar{y}\bar{a} = \bar{0}$. Logo, $Ann(\bar{x}) \subseteq Ann(\bar{a})$. Agora, seja $\bar{y} \in Ann(\bar{a})$. Então, $\bar{y}\bar{a} = \bar{0}$ e segue que $\bar{y}\bar{a}\bar{b} = \bar{0}$, donde obtemos $\bar{y}\bar{x} = \bar{0}$ e $\bar{y} \in Ann(\bar{x})$. Assim, $Ann(\bar{a}) \subseteq Ann(\bar{x})$.

(iii) Observamos que $Ann(\bar{a})$ é o subgrupo cíclico de \mathbb{Z}_n gerado por $\frac{n}{a}$, o qual tem ordem a em \mathbb{Z}_n . Assim, concluímos que a ordem de $Ann(\bar{a})$ é igual a a . Notemos que se $n \nmid a^2$, ou seja, $\bar{a}\bar{a} \neq \bar{0}$ e, assim, $\bar{a} \notin Ann(\bar{a})$, temos $d(\bar{a}) = a - 1$, pois $d(\bar{x}) = |Ann(\bar{x}) \setminus \{\bar{0}, \bar{x}\}|$. Se $n|a^2$ temos $d(\bar{a}) = a - 2$.

(iv) Suponhamos $d(\bar{a}) = d(\bar{b})$ com $a < b$. Então, pelo item (iii), $a - 1 = b - 2$, isto é, $b = a + 1$. Mas, como $d(\bar{b}) = b - 2$, temos que $n|b^2$, ou seja, $n|(a + 1)^2$. Como $a|n$, $(a + 1)|n$ (pois $b|n$) e $m.d.c(a, a + 1) = 1$ obtemos $a(a + 1)|n$. De $n|(a + 1)^2$ e $a(a + 1)|n$ segue que $a|(a + 1)$, uma contradição. Logo, $a = b$. A recíproca é óbvia.

(v) Basta notarmos que se $\bar{x} \in V_a$ e $\bar{y} \in V_b$, então $d(\bar{a}) = d(\bar{x}) = d(\bar{y}) = d(\bar{b})$ se, e somente se, $a = b$, pelo item anterior. \square

A demonstração do próximo teorema fornece a construção explícita de $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$. Denotaremos o isomorfismo de grupos por “ \cong ”.

Teorema 2.56. ([5]) Se $n \geq 4$ é um inteiro que não é primo, então $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é um produto direto (finito) de grupos simétricos. Mais especificamente, $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) \cong \prod_{a_i \in X} S_{n_{a_i}}$,

onde $X = \{a \in \mathbb{Z} : 1 < a < n \text{ e } a|n\} = \{a_1, \dots, a_r\}$ e n_{a_i} é o número de elementos do conjunto $V_{a_i} = \{\bar{x} \in \mathbb{Z}_n : 1 < x < n \text{ e } m.d.c(x, n) = a_i\}$.

Demonstração. Primeiro, notemos que $f(V_{a_i}) = V_{a_i}$ para cada $f \in \text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ e $a_i \in X$. De fato, dado $\bar{y} \in f(V_{a_i})$ existe $\bar{x} \in V_{a_i}$ tal que $f(\bar{x}) = \bar{y}$. Como f é um automorfismo de grafos então f preserva grau, isto é, $d(\bar{x}) = d(f(\bar{x}))$ ou ainda $d(\bar{x}) = d(\bar{y})$ e isto ocorre se, e somente se, $\bar{x}, \bar{y} \in V_{a_i}$, pelo Lema 2.55 (v). Logo, $f(V_{a_i}) \subseteq V_{a_i}$. Agora, suponhamos que exista $\bar{x} \in V_{a_i}$ tal que $\bar{x} \notin f(V_{a_i})$. Então $f(\bar{y}) \neq \bar{x}$ para todo $\bar{y} \in V_{a_i}$. Como f é sobrejetora, existe $\bar{z} \in D(\mathbb{Z}_n)^* = V(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ tal que $f(\bar{z}) = \bar{x}$, assim, $d(\bar{z}) = d(f(\bar{z})) = d(\bar{x})$ e obtemos que $\bar{z} \in V_{a_i}$, uma contradição pois $f(\bar{z}) = \bar{x}$ e $f(\bar{y}) \neq \bar{x}$ para qualquer $\bar{y} \in V_{a_i}$. Logo, $V_{a_i} \subseteq f(V_{a_i})$.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi : \text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) &\longrightarrow S_{V_{a_1}} \times \dots \times S_{V_{a_r}}. \\ f &\longmapsto (f|_{V_{a_1}}, \dots, f|_{V_{a_r}}) \end{aligned}$$

onde $S_{V_{a_i}}$ denota o grupo de todas as permutações de V_{a_i} , $i = 1, \dots, r$. Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de grupos. Disso seguirá o isomorfismo desejado uma vez que $S_{V_{a_i}} \cong S_{n_{a_i}}$, $i = 1, \dots, r$. Sejam $f, g \in \text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$. Como

$$\phi(f \circ g) = ((f \circ g)|_{V_{a_1}}, \dots, (f \circ g)|_{V_{a_r}}) = (f|_{V_{a_1}} \circ g|_{V_{a_1}}, \dots, f|_{V_{a_r}} \circ g|_{V_{a_r}}) = \phi(f) \circ \phi(g),$$

então ϕ é um homomorfismo de grupos. Além disso, se $\phi(f) = \phi(g)$, então $f|_{V_{a_i}} = g|_{V_{a_i}}$, $i = 1, \dots, r$. Mas, pelo item (i) do Lema 2.55, $D(\mathbb{Z}_n)^*$ é a união disjunta dos $V_{a_i}'s$, logo segue que $f = g$. Logo, ϕ é um homomorfismo injetor. Para mostrarmos que ϕ é sobrejetor, é suficiente mostrarmos que para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ fixo e cada permutação α_i de V_{a_i} , existe $f_i \in \text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ com $f_i|_{V_{a_i}} = \alpha_i$ e $f_i|_{V_{a_j}} = I_{V_{a_j}}$ para todo $a_j \neq a_i$ em X . Mas isto segue do fato que para quaisquer $\bar{x}, \bar{y} \in V_{a_i}$ e $\bar{m} \in \mathbb{Z}_n$, temos $\bar{m}\bar{x} = \bar{0}$ se, e somente se, $\bar{m}\bar{y} = \bar{0}$. Assim, basta considerarmos $f = f_1 \circ \dots \circ f_r$ e teremos $f|_{V_{a_i}} = \alpha_i$. \square

Exemplo 2.57. Para $n = 4, 6, 8, 9$ e 12 , vamos determinar $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ utilizando o teorema anterior.

Se $n = 4$, temos $X = \{2\}$ e $|V_2| = |\{\bar{2}\}| = 1 = n_2$ e, então, $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_4)) \cong S_1$, ou seja, é o grupo trivial.

Seja $n = 6$. Neste caso, $X = \{2, 3\}$, $V_2 = \{\bar{2}, \bar{4}\}$ e $V_3 = \{\bar{3}\}$ e, assim, $n_2 = 2$ e $n_3 = 1$. Logo, $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_6)) \cong S_2 \times S_1 \cong \mathbb{Z}_2$. Também, para $n = 8$, $X = \{2, 4\}$ donde $V_2 = \{\bar{2}, \bar{6}\}$ e $V_4 = \{\bar{4}\}$. Assim, $n_2 = 2$ e $n_4 = 1$. Portanto, $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_8)) \cong S_2 \times S_1 \cong \mathbb{Z}_2$.

Agora, se $n = 9$ obtemos $X = \{3\}$ e $V_3 = \{\bar{3}, \bar{6}\}$ donde segue $n_3 = 2$ e $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_9)) \cong S_2 \cong \mathbb{Z}_2$. E, finalmente, para $n = 12$ temos $X = \{2, 3, 4, 6\}$, $V_2 = \{\bar{2}, \bar{10}\}$, $V_3 = \{\bar{3}, \bar{9}\}$, $V_4 = \{\bar{4}, \bar{8}\}$ e $V_6 = \{\bar{6}\}$ e, assim, obtemos $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_{12})) \cong S_2 \times S_2 \times S_2 \times S_1 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.

Os grafos $\Gamma(\mathbb{Z}_n)$ para $n = 4, 6, 8$ e 9 podem ser vistos nos Exemplos 2.2, 2.3 e 2.4. Já o grafo $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$ está representado na Figura 2.26.

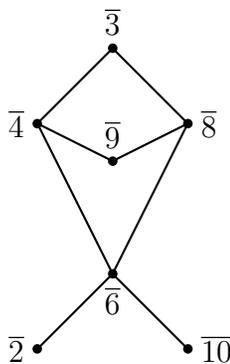


Figura 2.26: $\Gamma(\mathbb{Z}_{12})$

Corolário 2.58. *Se $n \geq 4$ é um inteiro que não é primo, então:*

- (i) $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é trivial se, e somente se, $n = 4$.
- (ii) $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é abeliano se, e somente se, $n = 4, 6, 8, 9$ ou 12 .

Demonstração. Vimos no exemplo anterior que se $n = 4$, então $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é trivial e que se $n = 4, 6, 8, 9$ ou 12 , $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é abeliano. Mostraremos que $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ não é abeliano para todo inteiro $n \geq 4$ não primo e distinto de $4, 6, 8, 9$ e 12 . Como $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n)) \cong S_{n_{a_1}} \times \dots \times S_{n_{a_r}}$, basta mostrarmos que, em cada caso, algum $n_{a_i} = |V_{a_i}| \geq 3$ e, com isso, $\text{Aut}(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ tem em um dos fatores $S_{n_{a_i}}$ com $n_{a_i} \geq 3$, o qual não é abeliano.

Se $n = 2^r$ com $r \geq 4$, para $\bar{x} \in V_2$ temos $m.d.c(x, 2^r) = 2$ e, então, $\{\bar{2}, \bar{6}, \bar{10}\} \subset V_2$. Se $n = 3^r$ com $r \geq 3$, então $\{\bar{3}, \bar{6}, \bar{12}\} \subset V_3$. Se $n = p^r$ com $p \geq 5$ primo, temos $\{\bar{p}, \bar{2p}, \bar{3p}\} \subset V_p$, pois $m.d.c(2p, p^r) = p$ e $m.d.c(3p, p^r) = p$.

Seja $n = p_1^{s_1} \cdots p_k^{s_k}$ a fatoraço de n em potêcia de primos. Se $p_1 \geq 3$ e $k \geq 2$, então $\{\overline{p_1}, \overline{2p_1}, \overline{4p_1}\} \subset V_{p_1}$.

Em todos esse casos obtemos $|V_{a_i}| \geq 3$ para algum i . Assim, podemos supor que $p_1 = 2$ com $s = s_1 \geq 1$ e $k \geq 2$. Se $n > 2^s \cdot 3$, então $m.d.c(2^{s+1}, 2^s \cdot 3^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k}) = 2^s$ e $m.d.c(2^{s+2}, 2^s \cdot 3^{s_2} \cdot p_3^{s_3} \cdots p_k^{s_k}) = 2^s$, ou seja, $\{\overline{2^s}, \overline{2^{s+1}}, \overline{2^{s+2}}\} \subset V_{2^s}$. Logo, suponhamos $n = 2^s \cdot 3$. Se $s \geq 3$ obtemos $m.d.c(10, 2^s \cdot 3) = 2$ e $m.d.c(14, 2^s \cdot 3) = 2$ e, então, $\{\overline{2}, \overline{10}, \overline{14}\} \subset V_2$.

Portanto, os casos em que $|V_{a_i}| \leq 2$ para todo a_i são: $n = 2^s$ com $s \leq 3$; $n = 3^s$ com $s \leq 2$; $n = 2^s \cdot 3$ com $s \leq 2$. Logo, $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_n))$ é abeliano somente se $n = 4, 6, 8, 9$ ou 12 . \square

A seguir, apresentamos alguns exemplos específicos de $Aut(\Gamma(R))$.

Exemplo 2.59. Vimos nos Exemplos 2.6 e 2.7 que os grafos divisores de zero de $\frac{\mathbb{F}_4[x]}{(x^2)}$ e de $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3$ são um 3-ciclo e um 4-ciclo, respectivamente. Assim, $Aut\left(\Gamma\left(\frac{\mathbb{F}_4[x]}{(x^2)}\right)\right) \cong D_6 \cong S_3$ e $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3)) \cong D_8$, onde D_n denota o grupo diedral de ordem n .

Exemplo 2.60. Sejam K_1 e K_2 corpos finitos com ordens distintas m e n , respectivamente. Da Observaço 2.8 temos que $\Gamma(K_1 \times K_2)$ é um grafo completo bipartido $K^{m-1, n-1}$. Então $Aut(\Gamma(K_1 \times K_2)) \cong S_{m-1} \times S_{n-1}$ e, assim, tem ordem $(m-1)!(n-1)!$. De fato, digamos que $K_1 = \{a_1, \dots, a_m\}$ e $K_2 = \{b_1, \dots, b_n\}$. Da Observaço 2.8, $V(\Gamma(K_1 \times K_2)) = W_1 \cup W_2$ onde $W_1 = \{(a_i, 0) : a_i \in K_1^*\}$ e $W_2 = \{(0, b_i) : b_i \in K_2^*\}$. Definindo a aplicaço $\phi : Aut(\Gamma(K_1 \times K_2)) \longrightarrow S_{W_1} \times S_{W_2}$ por $\phi(f) = (f|_{W_1}, f|_{W_2})$, obtemos um isomorfismo de grupos.

Exemplo 2.61. Seja $R = \mathbb{Z}_{1225}$ com $|\Gamma(R)| = 384$. Como $1225 = 5^2 \cdot 7^2$, temos $X = \{5, 7, 25, 35, 49, 175, 245\}$ e pode-se calcular que $|V_5| = 168$, $|V_7| = 120$, $|V_{25}| = 42$, $|V_{35}| = 24$, $|V_{49}| = 20$, $|V_{175}| = 6$ e $|V_{245}| = 4$. Logo, $Aut(\Gamma(\mathbb{Z}_{1225})) \cong S_{168} \times S_{120} \times S_{42} \times S_{24} \times S_{20} \times S_6 \times S_4$, cuja ordem é $168! \cdot 120! \cdot 42! \cdot 24! \cdot 20! \cdot 6! \cdot 4!$.

REFERÊNCIAS

- [1] AKBARI, S., MOHAMMADIAN, A., On the zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **274** (2), (2004), 847-855 .
- [2] AKHTAR, R., AXTELL, M., STICKLES, J., Survey of zero-divisor graphs in commutative rings, 2007.
- [3] ANDERSON, D. D., NASEER, M., Beck's coloring of a commutative ring, *J. Algebra*, **159**, (1993), 504-514.
- [4] ANDERSON, D. F., FRAZIER, A., LAUVE, A., LIVINGSTON, P. S., The zero-divisor graph of a commutative ring, II, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, **220**, (2001), 61-72.
- [5] ANDERSON, D. F., LIVINGSTON, P. S., The zero-divisor graph of a commutative ring, *J. Algebra* **217**, (1999), 434-447.
- [6] ATIYAH, M. F., MACDONALD, I. G., *Introduction to commutative algebra*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1969.
- [7] AXTELL, M., COYKENDALL, J., STICKLES, J., Zero-divisor graphs of polynomial and power series over commutative rings, *Comm. Alg.* **33** (6), (2005), 2043-2050.
- [8] AXTELL, M., STICKLES, J. e WARFEL, J., Zero-divisor graphs of direct products of commutative rings, *Houston J. of Math.*, **32**, (2006), 985-994.
- [9] BECK, I., Coloring of commutative rings, *J. Algebra*, **116** (1), (1988), 208-226.
- [10] BINI, G., FLAMINI, F., *Finite commutative rings and their applications*, Kluwer Academic Publishers, 2002.

-
- [11] DEMEYER, F., SCHNEIDER, K., Automorphisms and zero divisor graphs of commutative rings, *Int'l J. of Comm. Rings* **1 (3)**, (2002), 93-106.
- [12] DIESTEL, R., *Graph theory*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [13] KAPLANSKY, I., *Commutative rings*, ed. rev., University of Chicago Press, Chicago, 1974.
- [14] LUCAS, T. G., The diameter of a zero-divisor graph, *J. Algebra* **301 (1)**, (2006), 174-193.
- [15] MARTINEZ, M., SKALAK, M., When do the zero divisors form an ideal, based on the zero divisor graphs, submetido.
- [16] MULAY, S. B., Cycles and symmetries of zero-divisors, *Comm. Alg.* **30 (7)**, (2002), 3533-3558.
- [17] REDMOND, S. P., The zero-divisor graph of a non-commutative ring, *Int. J. Comm. Rings* **1 (4)**, (2002), 203-211.
- [18] YAP, H. P., Some topics in graph theory, in: *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, vol. 108, 1986.

ÍNDICE

- k -ciclo, 16
- anel Artiniano, 3
- anel de McCoy, 11
- anel decomponível, 1
- anel Noetheriano, 3
- anel reduzido, 6
- automorfismo de grafo, 17
- caminho, 16
- ciclo, 16
- cintura do grafo, 17
- clique, 16
- diâmetro do grafo, 17
- dimensão de Krull, 4
- divisor de zero, 5
- divisor de zero de um módulo, 7
- Estrutura de Anéis Artinianos, 5
- grafo, 15
- grafo bipartido, 16
- grafo bipartido completo, 16
- grafo completo, 16
- grafo conexo, 16
- grafo crítico, 18
- grafo divisor de zero, 20
- grafo estrela, 16
- grafo nulo, 16
- ideal anulador, 7
- ideal primário, 9
- ideal quociente, 53
- índice cromático, 17
- isomorfismo de grafos, 17
- localização, 14
- módulo, 2
- módulo Artiniano, 3
- módulo Noetheriano, 3
- número cromático, 17
- nilradical, 2
- primos maximais, 5
- primos maximais de um módulo, 7
- primos minimais, 1
- radical de Jacobson, 1
- subgrafo, 15
- subgrafo induzido, 15