UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

Conjuntos Engelianos em um Grupo

CLEILTON APARECIDO CANAL

Orientadora: Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR

2012

Conjuntos Engelianos em um Grupo

CLEILTON APARECIDO CANAL

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Álgebra

Orientadora: Profª. Drª. Irene Naomi Nakaoka

Maringá - PR
2012

Conjuntos Engelianos em um Grupo

Cleilton Aparecido Canal

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof^{a}. Dr^{a}. Irene Naomi Nakaoka - UEM ....
(Orientadora)

Prof. Dr. Noraí Romeu Rocco - UnB ....

Prof^{a}. Dr^{a}. Érica Zancanella Fornaroli - UEM ....

Maringá - PR

2012

À minha mãe Lourdes Thiesen

Agradecimentos

Primeiramente, quero agradecer minha mãe Lourdes Thiesen por toda sua dedicação e incentivo para minha formação. Também agradeço minhas irmãs Sharlene e Gabriela e meu irmão Cleverton, por sempre me apoiarem.

À minha namorada Eralcilene, que é uma dádiva em minha vida.

Agradeço à professora Maria Cândida Soares Klein por toda sua ajuda durante minha graduação.

Ao meu grande amigo Willian Menq e os demais amigos de Peabiru. Aos meus amigos de mestrado: Camila, Ginnara, João, Juliana, Patrícia, Rafael, Simone, Stephanie, Thales, Alex, André, Arthur, Djeison, Jorge, Guilherme, Tiago, Victor, Alisson, Altair, Amanda, Fabrício, Saulo, César, Fausto, Otávio e Ewerton.

Aos meus professores de graduação e mestrado. Também agradeço aos funcionários do setor de licitação da UEM que me ajudaram muito durante o estágio que fiz neste setor.

À minha orientadora Professora Doutora Irene Naomi Nakaoka, cuja especial paciência, sabedoria, compreensão, dedicação e ajuda foram cruciais na elaboração deste trabalho.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Resumo

Dado um grupo G, dizemos que $g \in G$ é um elemento engeliano à esquerda de G se para todo $x \in G$, existe um inteiro não negativo $n = n(g, x)$ tal que $[x, {}_n g] = 1$. Denotamos o conjunto de todos os elementos engelianos à esquerda de G por $\mathrm{L}(G)$. Quando o inteiro n não depende de x, dizemos que g é um elemento engeliano à esquerda limitado. Denotamos o conjunto de todos os elementos engelianos à esquerda limitados por $\overline{\mathrm{L}}(G)$. No artigo [1], Abdollahi fornece uma generalização destes elementos, os quais chamamos de elementos $\mathcal{L}$-engelianos e elementos $\mathcal{L}$-engelianos limitados. Denotamos os conjuntos de todos os elementos $\mathcal{L}$-engelianos e $\mathcal{L}$-engelianos limitados por $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$, respectivamente. Um subconjunto não vazio S de G é dito ser um conjunto engeliano se para todos $x, y \in S$, existe um inteiro não negativo $n = n(x, y)$ tal que $[x, {}_n y] = 1$. O objetivo desta dissertação é apresentar condições para que os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$, $\overline{\mathrm{L}}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$ sejam subgrupos de G, bem como condições para que um grupo gerado por um conjunto engeliano finito seja nilpotente.

Palavras-chave: Elementos engelianos, conjuntos engelianos, grupos engelianos, grupos nilpotentes, grupos localmente nilpotentes

Abstract

Let G be a group. We say $g \in G$ is a left Engel element of G if for all $x \in G$ there is a nonnegative integer $n = n(g, x)$ such that $[x, {}_n g] = 1$. We denote the set of all the left Engel elements of G by $\mathrm{L}(G)$. When the integer n does not depend of x, we say g is a bounded left Engel element of G. We denote the set of all the bounded left Engel elements of G by $\overline{\mathrm{L}}(G)$. In the paper [1], Abdollahi provides a generalization these elements, which we call $\mathcal{L}$-Engel elements and bounded $\mathcal{L}$-Engel elements. We denote the sets of all $\mathcal{L}$-Engel and bounded $\mathcal{L}$-Engel elements by $\mathcal{L}(G)$ and $\overline{\mathcal{L}}(G)$, respectively. A nonempty subset S of G is said to be an Engel set if for all $x, y \in S$ there is a nonnegative integer $n = n(x, y)$ such that $[x, {}_n y] = 1$. The purpose of this dissertation is to present conditions for the subsets $\mathrm{L}(G)$, $\overline{\mathrm{L}}(G)$, $\mathcal{L}(G)$ and $\overline{\mathcal{L}}(G)$ to be subgroups of G as well as conditions for a group generated by a finite Engel set to be nilpotent.

Key-worlds: Engel elements, Engel sets, Engel groups, nilpotent groups, locally nilpotent groups

Índice de Notações

$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
$\mathbb{Z}$	conjunto dos números inteiros
$\mathbb{Z}_n$	conjunto dos inteiros módulo n
$X \subseteq Y$	X é um subconjunto de Y
$X \subsetneq Y$	X é um subconjunto próprio de Y
$X \times Y$	produto cartesiano de X por Y
$X \setminus Y$	$\{x \in X; x \notin Y\}$
$\|G\|$	ordem do grupo G
$\|g\|$	ordem do elemento g
$H \leq G$	H é subgrupo de G
$H < G$	H é subgrupo próprio de G
$H \lhd G$	H é subgrupo normal de G
$\langle X \rangle$	subgrupo gerado por X
G/H	grupo quociente de G por H
H^G	fecho normal de H em G
$G \simeq H$	o grupo G é isomorfo ao grupo H
$\mathrm{Sym}(G)$	grupo de permutações de G
S_n	grupo simétrico de grau n
D_{2n}	grupo diedral de ordem $2n$
$\mathrm{Aut}(G)$	grupo dos automorfismos de G
$\mathrm{Z}(G)$	$\{g \in G;\ gx = xg,\ \forall\ x \in G\}$, centro de G
$\mathrm{C}_G(x)$	$\{g \in G;\ gx = xg\}$, centralizador de x em G
$\mathrm{C}_G(H)$	$\{g \in G;\ gx = xg,\ \forall\ x \in H\}$, centralizador de H em G
$\mathrm{N}_G(H)$	$\{g \in G;\ H^g = H\}$, normalizador de H em G
$\underset{i \in I}{\mathrm{Dr}}\, H_i$	produto direto da família de grupos $\{H_i\}_{i \in I}$
$H \ltimes N$	produto semidireto de N e H
$H \wr K$	produto wreath de H e K

g^h	$h^{-1}gh$, conjugado de g por h
$[g,h]$	$g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$, comutador de g e h
a^G	$\{a^g;\ g \in G\}$
G'	$[G,G]$, subgrupo derivado de G
G_{ab}	G/G', abelianizado de G
$\mathrm{Fit}(G)$	subgrupo de Fitting de G
$\mathrm{Frat}(G)$	subgrupo de Frattini de G
$\mathrm{L}(G)$	conjunto dos elementos engelianos à esquerda de G
$\overline{\mathrm{L}}(G)$	conjunto dos elementos engelianos à esquerda limitados de G
$\mathrm{R}(G)$	conjunto dos elementos engelianos à direita de G
$\overline{\mathrm{R}}(G)$	conjunto dos elementos engelianos à direita limitados de G
$\mathcal{L}(G)$	conjunto dos elementos $\mathcal{L}$-engelianos de G
$\overline{\mathcal{L}}(G)$	conjunto dos elementos $\mathcal{L}$-engelianos limitados de G
$\mathrm{mdc}(m,n)$	máximo divisor comum entre os inteiros m e n
$\mathrm{mmc}(m,n)$	mínimo múltiplo comum entre os inteiros m e n
$\mathrm{GL}(V;F)$	conjunto de todas as transformações F-lineares de V
$\mathrm{GL}_n(F)$	conjunto de todas as matrizes invertíveis com entradas em F
$\mathrm{GL}_n(p)$	conjunto de todas as matrizes invertíveis com entradas em $\mathbb{Z}_p$

Sumário

Introdução

A classe dos grupos nilpotentes desempenha um importante papel na Teoria de Grupos. No caso finito, esta classe pode ser caracterizada de diversas maneiras, porém, ao passarmos para o caso infinito, estas caracterizações podem ser perdidas. Entretanto, isto faz surgir generalizações para este conceito. Entre os principais nomes que deram origem a estas generalizações, podemos citar: R. Baer, S. N. Černikov, K. A. Hirsch, A. G. Kuroš, O. J. Schmidt e H. Wielandt. Uma importante classe de grupos que generaliza a classe dos grupos nilpotentes é a dos grupos localmente nilpotentes, estes sendo definidos pela propriedade de que todos os subgrupos finitamente gerados são nilpotentes.

Uma outra classe de grupos que estende a dos grupos nilpotentes é a classe dos grupos engelianos, os quais têm origem no estudo de grupos e álgebras de Lie. Dado um grupo G, dizemos que $g \in G$ é um elemento engeliano à esquerda de G quando para todo $x \in G$, existe um inteiro não negativo $n = n(g, x)$ tal que $[x, {}_n g] = 1$. Denotamos o conjunto de todos os elementos engelianos à esquerda de G por $\mathrm{L}(G)$. Quando o inteiro n não depende de x, dizemos que g é um elemento engeliano à esquerda limitado. O conjunto de todos os elementos engelianos à esquerda limitados é denotado por $\overline{\mathrm{L}}(G)$. De modo análogo, definimos os elemento engelianos à direita colocando o elemento variável x à direita do elemento g e denotamos os conjuntos de elementos engelianos à direita e de elementos engelianos à direita limitados por $\mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$, respectivamente. Dizemos que um grupo G é engeliano quando $G = \mathrm{L}(G)$ ou, equivalentemente, $G = \mathrm{R}(G)$.

Ainda é um problema em aberto saber se os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$, $\overline{\mathrm{L}}(G)$, $\mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$ sempre são subgrupos de G. Um dos maiores objetivos da teoria de grupos engelianos é encontrar condições para que estes subconjuntos sejam subgrupos de G e, se possível, coincidam com o radical de Hisch-Plotkin, o radical de Baer, o hipercentro e o ω-centro de G, respectivamente.

No artigo [14], Gruenberg demonstra que no caso em que o grupo G é solúvel, todos os quatro subconjuntos engelianos de G são subgrupos de G. Mais ainda, os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ coincidem com o radical de Hirsch-Plotkin e o radical de Baer, respectivamente. Um outro objetivo é encontrar condições para que um grupo engeliano seja nilpotente. Por exemplo, Zorn obteve que todo grupo engeliano finito é nilpotente. Isto motiva a buscar outras condições de finitude. A condição de ser finitamente gerado não é suficiente, como mostra os exemplos de Golod (Veja [11]). Entretanto, a condição maximal sobre os subgrupos abelianos garante que os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ coincidem com o subgrupo de Fitting de G e, em particular, se o grupo satisfazer a condição maximal, teremos que o subgrupo de Fitting é nilpotente, de onde, grupos engelianos satisfazendo condição maximal são nilpotentes.

Uma generalização dos elementos engelianos é apresentada por Abdollahi no artigo *"Engel graphs associated with a group"* [1]. Chamamos estes elementos de elementos $\mathcal{L}$-engelianos e são definidos da seguinte forma: dado um grupo G, dizemos que $g \in G$ é um elemento $\mathcal{L}$-engeliano de G se para todo $a \in G$, existem $g_1, \cdots, g_k$ em $\langle g \rangle$, com $\langle g_i \rangle = \langle g \rangle$ para todo $i = 1, \cdots, k$, tais que $[g_1^a, g_2, \cdots, g_k] = 1$ ou $[g_1, g_2^a, \cdots, g_k^a] = 1$. Denotamos por $\mathcal{L}(G)$ o conjunto de todos os elementos $\mathcal{L}$-engelianos de G e por $\mathcal{L}_k(G)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(G)$ em que o inteiro k é o mesmo para todo $a \in G$. Escrevamos $\overline{\mathcal{L}}(G)$ para a união de todos os $\mathcal{L}_k(G)$, com k inteiro positivo. Então, Abdollahi demonstra que os conjuntos $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$ satisfazem propriedades análogas à algumas satisfeitas pelos conjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$. Por exemplo, ele mostra que se G é um grupo solúvel, então $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$ coincidem com o radical de Hirsch-Plotkin e o radical de Baer, respectivamente. Além disso, mostra que se G satisfaz a condição max-ab, então $\mathcal{L}(G)$ coincide com o subgrupo de Fitting de G.

No artigo *"Groups that are pairwise nilpotent"* [8], os autores Endimioni e Traustason consideram um grupo G gerado por um conjunto X em que para todos $x, y \in X$, o subgrupo $\langle x, y \rangle$ é nilpotente e investigam condições para que estes grupos, no caso solúvel, sejam nilpotentes. Um ponto de partida para suas investigações começa com o seguinte resultado.

Teorema A. *Seja $G = \langle a_1, a_2, \cdots, a_t \rangle$ um grupo nilpotente-por-abeliano tal que cada par a_i, a_j gera um subgrupo nilpotente de G. Então, G é nilpotente.*

A seguir, eles trabalham com grupos abelianos-por-nilpotentes e obtêm

Teorema B. *Seja $G = \langle a_1, a_2, \cdots, a_t \rangle$ um grupo que é abeliano-por-(nilpotente de classe 2), tal que cada para de geradores de G gera um subgrupo nilpotente. Se nenhum dos geradores tem ordem que é divisível por 2 ou 3, então G é nilpotente.*

Posteriormente, Abdollahi, Brandl e Tortora, no artigo *"Groups generated by a finite Engel set"* [5], investigam condições para que um grupo gerado por um conjunto engeliano finito seja nilpotente. Aqui, um subconjunto não vazio S de um grupo G é dito ser um conjunto engeliano quando para todos $x, y \in S$, existe um inteiro não negativo $n = n(x, y)$ tal que $[x, {}_n y] = 1$. O primeiro resultado nesta direção é dado pelo

Teorema C. *Seja G um grupo nilpotente-por-abeliano gerado por um conjunto engeliano finito. Então, G é nilpotente.*

Claramente, um conjunto em que quaisquer dois elementos geram um grupo nilpotente é um conjunto engeliano e, portanto, este resultado generaliza o Teorema A obtido por Endimioni e Traustason. Então, eles restringem o problema para o caso em que o conjunto engeliano possui apenas dois elementos e obtém o seguinte

Teorema D. *Seja G um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos. Então, G é nilpotente.*

Utilizando o Teorema B obtido por Endimioni e Traustason, este resultado pode ser estendido para o caso em que o grupo é abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por um conjunto engeliano finito tal que a ordem de cada gerador não é divisível por 2 ou 3.

A seguir, faremos um resumo dos capítulos que compõem esta dissertação.

O Capítulo 1 é destinado a fornecer conceitos, notações e resultados de Teoria de Grupos necessários ao desenvolvimento desta dissertação. Neste capítulo, abordaremos produto semidireto, apresentações livres, grupos solúveis, grupos nilpotentes e representações de grupos.

No Capítulo 2, trabalharemos com os grupos localmente nilpotentes.

O Capítulo 3 trata dos elementos engelianos. Neste capítulo, apresentaremos os grupos engelianos e condições sobre um grupo G para que seus subconjuntos engelianos sejam subgrupos de G. Também consideraremos a generalização dos elementos engelianos que é fornecida por Abdollahi no artigo [1].

Por fim, no Capítulo 4, iremos considerar grupos gerados por conjuntos engelianos finitos e apresentar as demonstrações dos Teoremas B, C e D.

Capítulo 1

Preliminares

Este capítulo é destinado a fornecer alguns conceitos e resultados em Teoria dos Grupos que serão utilizados nos capítulos seguintes. Não faremos as demonstrações dos resultados apresentados aqui, porém indicaremos as referências onde tais demonstrações podem ser encontradas.

Ao longo de todo o texto, os grupos serão considerados com a notação multiplicativa e denotaremos o elemento neutro, bem como o subgrupo trivial formado por apenas este elemento, por 1. Em alguns momentos, quando estivermos trabalhando com grupos abelianos, será utilizada a notação aditiva e o elemento neutro passará a ser denotado por 0. Funções $\varphi : G \longrightarrow H$ serão aplicadas à direita, em particular, quando φ for um homomorfismo de grupos utilizaremos, também, a notação exponencial $(g)\varphi = g^{\varphi}$.

Dados G um grupo e H um subconjunto não vazio de G, convencionaremos utilizar as seguintes notações: $|G|$ é a ordem (cardinalidade) de G; $H \leq G$ diz que H é subgrupo de G; $H < G$ diz que H é subgrupo próprio de G; $H \lhd G$ diz que H é subgrupo normal de G; $\langle H \rangle$ é o subgrupo de G gerado por H; H^G é o *fecho normal* de H em G, o qual é definido como sendo a interseção de todos os subgrupos normais de G que contém H e pode ser obtido como $H^G = \langle g^{-1}hg;\, h \in H, g \in G \rangle$.

Se x pertence a um grupo G, então a *ordem* de x é dada por $|\langle x \rangle|$ e denotada por $|x|$. Um grupo G é dito ser de *torção* ou *periódico* quando todos os seus elementos têm ordem finita e é dito ser *livre de torção* quando o único elemento de ordem finita é o elemento neutro. Dado π um conjunto não vazio de números primos, dizemos que $n \in \mathbb{N}$ é um π-*número* quando seus fatores primos pertencem a π. Denotamos o complementar de π em relação ao conjunto dos números primos por π'. Um elemento $x \in G$ é um π-*elemento* quando a ordem de x é um π-número; um grupo G é um π-*grupo* quando todos seus elementos são π-elementos; se G é um grupo finito, um subgrupo H de G é um π-*subgrupo de Hall* quando H é um π-grupo e seu índice em G é um π'-número. Em particular, considerando π formado por apenas um elemento p, obtemos os conceitos de p-*elemento* e p-*grupo*. No caso finito, não é difícil ver que se G é um p-grupo, então a ordem de G é uma potência de p.

Dado p um número primo, dizemos que G é um p-*grupo abeliano elementar* quando G é um p-grupo abeliano e todo elemento de G tem ordem p. Quando G é um p-grupo abeliano elementar finito, então G é isomorfo a um produto direto de um número finito de grupos cíclicos de ordem p. Neste caso, podemos munir G com uma estrutura de espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{Z}_p$, com a multiplicação por escalar dada por: para cada $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_p$ e cada $g \in G$, definimos $\overline{\alpha}g = g^{\alpha}$. Notamos que esta operação está bem definida, pois se $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$, então p divide $(\alpha - \beta)$ e, assim, $1 = g^{\alpha-\beta} = g^{\alpha}g^{-\beta}$, ou seja, $g^{\alpha} = g^{\beta}$.

É fácil ver que o conjunto de todos os automorfismos de um grupo G tem uma estrutura de grupo com a operação de composição de funções, o qual chamamos de *grupo de automorfismos* de G e denotamos por $\mathrm{Aut}(G)$. Dado H um subgrupo de G, dizemos que H é um subgrupo *característico* de G quando $H^{\varphi} \leq H$, para todo $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$. Com relação a estes conceitos, nos será útil os seguintes resultados.

Proposição 1.1. ([24], pág. 104) *Seja G um grupo. Se H é subgrupo característico de K e $K \lhd G$, então $H \lhd G$.*

Proposição 1.2. ([13], pág. 30) *Se um p-grupo abeliano elementar G é visto como $\mathbb{Z}_p$-espaço vetorial, então* $\mathrm{Aut}(G)$ *é isomorfo ao grupo das transformações lineares invertíveis de G.*

Lembramos que o grupo das transformações lineares invertíveis de um espaço vetorial V sobre um corpo F é denotado por $\mathrm{GL}(V;F)$, ou simplesmente $\mathrm{GL}(V)$ quando não há dúvidas quanto ao corpo em que estamos trabalhando. Se V tem dimensão n, este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes quadradas de ordem n com entradas em F que são invertíveis, denotadas por $\mathrm{GL}_n(F)$. Caso $F = \mathbb{Z}_p$, utilizamos a notação $\mathrm{GL}_n(p)$.

1.1 Produtos Semidiretos

Suponhamos que N seja um subgrupo normal de G e que exista um subgrupo H tal que $G = HN$ e $H \cap N = 1$. Neste caso, dizemos que G é o *produto semidireto interno* de N e H, denotado por $G = H \ltimes N$. Facilmente vemos que cada elemento de G tem uma expressão única da forma hn, com $h \in H$ e $n \in N$. Além disso, a aplicação

$$\begin{aligned} \alpha : H &\longrightarrow \mathrm{Aut}(N), \\ h &\longmapsto \quad h^\alpha \end{aligned}$$

onde $h^\alpha : N \longrightarrow N$ é dada por $(n)h^\alpha = n^h$, é um homomorfismo de grupos.

Agora, suponhamos que sejam dados dois grupos H e N junto com um homomorfismo $\alpha : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(N)$. Definimos o *produto semidireto externo* com respeito à ação α, denotado por $G = H \ltimes_\alpha N$, como sendo o conjunto dos pares (h, n), $h \in H$, $n \in N$, com a operação dada por

$$(h_1, n_1)(h_2, n_2) = (h_1 h_2, n_1^{h_2^\alpha} n_2).$$

Não é difícil ver que G, com esta operação, é um grupo em que o elemento identidade é $(1_H, 1_N)$ e $(h, n)^{-1} = (h^{-1}, (n^{-1})^{(h^\alpha)^{-1}})$. Notamos que as aplicações $\varphi : H \longrightarrow G$, com $(h)\varphi = (h, 1)$ e $\psi : N \longrightarrow G$, com $(n)\psi = (1, n)$ são monomorfismos de H e N em G, respectivamente. Denotando por H^* e N^* suas respectivas imagens, naturalmente temos $H^* \simeq H$ e $N^* \simeq N$. Como $(h, 1)(1, n) = (h, n)$, para todos $h \in H$ e $n \in N$, segue que $G = H^* N^*$, com $H^* \cap N^* = 1$. Além disso, $(h, 1)^{-1}(1, n)(h, 1) = (1, n^{h^\alpha})$ mostra que $N^* \lhd G$ e, com isso, G é o produto semidireto interno de N^* e H^*. Observamos ainda que a conjugação de elementos de N^* por $(h, 1)$ induz o automorfismo h^α de N. Usualmente, é conveniente não distinguir entre N^* e N bem como entre H^* e H; assim, G pode ser pensado como o produto semidireto interno de N e H. No que segue, iremos dizer simplesmente o produto semidireto $H \ltimes N$.

Sejam $H \leq \mathrm{Sym}(X)$ e $K \leq \mathrm{Sym}(Y)$, onde $\mathrm{Sym}(S)$ denota o grupo de permutações sobre o conjunto S. Para cada $h \in H$, $y \in Y$ e $k \in K$ definimos as aplicações

$$\begin{aligned} h(y) : X \times Y &\longrightarrow \quad X \times Y \\ (x, y_1) &\longmapsto (x, y_1)h(y) = \begin{cases} (xh, y_1), \text{ se } y = y_1 \\ (x, y_1), \text{ se } y \neq y_1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k^* : X \times Y &\longrightarrow \ X \times Y \\ (x, y_1) &\longmapsto (x, y_1)k^* = (x, y_1 k) \end{aligned}$$

que pertencem a $\mathrm{Sym}(X \times Y)$, uma vez que $(h^{-1})(y) = (h(y))^{-1}$ e $(k^{-1})^* = (k^*)^{-1}$. Para cada $y \in Y$ fixado, as aplicações $\varphi : H \longrightarrow \mathrm{Sym}(X \times Y)$ e $\psi : K \longrightarrow \mathrm{Sym}(X \times Y)$ dadas por $(h)\varphi = h(y)$ e $(k)\psi = k^*$, respectivamente, são monomorfismos. Denotando suas imagens por $H(y)$ e K^*, respectivamente, definimos o *produto wreath* de H e K como sendo o subgrupo de $\mathrm{Sym}(X \times Y)$ gerado por K^* e todos os $H(y)$, $y \in Y$. Escrevemos

$$H \wr K = \langle H(y), K^* \mid y \in Y \rangle.$$

Agora, se considerarmos $B = \langle H(y) \mid y \in Y \rangle$, podemos ver que B é o produto direto dos $H(y)$'s; além disso, B é um subgrupo normal de $H \wr K$, $B \cap K^* = 1$ e $H \wr K = K^* B$, de onde $H \wr K = K^* \ltimes B$. Chamamos B de *subgrupo base* do produto wreath.

É fácil ver que para qualquer grupo G, a aplicação

$$\begin{aligned} \tau : G &\longrightarrow \mathrm{Sym}(G) \\ g &\longmapsto \quad \tau_g : G \longrightarrow G \\ & \qquad\qquad x \longmapsto (x)\tau_g = xg \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetor. Portanto, se H e K são grupos arbitrários, podemos vê-los como grupos de permutações sobre seus conjuntos subjacentes via a aplicação acima e formar o produto wreath de H e K: o grupo base é dado por $B = \underset{k \in K}{\mathrm{Dr}}\, H_k$, onde H_k é uma cópia isomórfica de H, para todo $k \in K$, e se $(h_k) \in B$ e $k' \in K$, então $(h_k)^{k'} = (h_{kk'})$. Este é chamado de *produto wreath canônico*.

1.2 Apresentação Livre

Nesta seção iremos definir grupos livres, isto nos será útil para descrevermos grupos através de seus geradores e relações sobre estes. Para mais detalhes veja [17] e [20].

Definição 1.3. Um grupo F é dito *livre* sobre um subconjunto $X \subseteq F$ se, para qualquer grupo G e qualquer função $\theta : X \longrightarrow G$, existe um único homomorfismo $\theta' : F \longrightarrow G$ tal que $x^{\theta'} = x^{\theta}$, para todo $x \in X$, ou seja, θ' estende θ.

Se F_1 é um grupo livre sobre um conjunto X_1 e F_2 é um grupo livre sobre um conjunto X_2, então F_1 é isomorfo à F_2 se, e somente se, os conjuntos X_1 e X_2 têm a mesma cardinalidade (Veja [17], pág. 3). Isto nos permite definir o *posto* de um grupo livre F sobre X como sendo a cardinalidade de X. Além disso, dado qualquer conjunto não vazio X, é possível construir um grupo livre F sobre X e, assim, podemos obter grupos livres de qualquer posto (Veja [17], pág. 4). Um resultado que torna importante o estudo de grupos livres é a

Proposição 1.4. ([17], pág. 7) *Todo grupo é uma imagem homomórfica de algum grupo livre.*

Sejam G um grupo e $\varphi : F \longrightarrow G$ um epimorfismo de um grupo livre $F = F(X)$ sobre G. Temos que $G \simeq F/N$, onde N é o núcleo de φ. Agora, seja R um subconjunto de F que gera N como subgrupo normal de F, isto é, $\langle R\rangle^F = N$. Observamos que X e R determinam G a menos de isomorfismo. Assim, escrevemos $G = \langle X|\, R\rangle$ e chamamos este par de uma *apresentação livre* do grupo G. Os elementos de X são chamados de *geradores* e os de R de *relatores*. Dizemos que G é *finitamente apresentado* se existe uma apresentação $G = \langle X|\, R\rangle$, onde X e R são finitos. Quando $X = \{x_1, \cdots, x_n\}$ e $R = \{r_1, \cdots, r_m\}$, é comum escrevermos $G = \langle x_1, \cdots, x_n \mid r_1 = 1, \cdots, r_m = 1\rangle$. Neste caso, chamamos $r_i = 1$, $1 \leq i \leq m$, de *relações definidoras* para G.

Exemplo 1.5. Se $G = \langle x\rangle$ é um grupo cíclico de ordem n, então é fácil ver que uma apresentação livre de G é $\langle x \mid x^n = 1\rangle$. Dado $n \geq 2$, o *grupo diedral* de ordem $2n$ possui uma apresentação livre dada por

$$D_{2n} = \langle x, y \mid x^n = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle.$$

Seja p um número primo e consideremos G o grupo dado pela apresentação livre

$$G = \langle x_1, x_2, \cdots \mid x_1^p = 1,\ x_{i+1}^p = x_i,\ x_i x_j = x_j x_i\rangle,$$

onde o conjunto de geradores $\{x_1, x_2, \cdots\}$ é infinito. Claramente G é um p-grupo e a relação $x_i x_j = x_j x_i$ nos garante que G é um grupo abeliano. Este grupo desempenha um importante papel no estudo de grupos abelianos e recebe o nome de *p-grupo quasicíclico* ou *grupo de Prüfer do tipo p^∞*. Para cada $n \geq 1$, o grupo G possui um único subgrupo de ordem p^n, o qual é cíclico. Além disso, o conjunto de todos os subgrupos de G é bem ordenado com a relação de inclusão e cada subgrupo próprio de G é finito.

1.3 Condições de Cadeia

Ao trabalharmos com um grupo G, podemos considerar uma família de subgrupos de G que satisfazem determinadas propriedades e tal família pode ser parcialmente ordenada através da relação de inclusão de conjuntos. Nesta família, podemos olhar para as cadeias ascendentes e descendentes. Uma das mais importantes condições de finitude em teoria dos grupos são as condições de cadeias, as quais excluem a possibilidade de que uma família como considerada acima possua cadeias ascendentes ou descendentes infinitas.

Definição 1.6. Seja Λ um conjunto parcialmente ordenado com a ordem parcial $\leq$. Dizemos que Λ satisfaz a *condição maximal* se cada subconjunto não vazio Λ_0 contém pelo menos um *elemento maximal*, ou seja, existe $m \in \Lambda_0$ tal que se $x \in \Lambda_0$ e $m \leq x$, então $x = m$. Dizemos que Λ satisfaz a *condição de cadeia ascendente* quando não existe uma cadeia ascendente própria infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ em Λ.

Vejamos que a condição maximal e a condição de cadeia ascendente são equivalentes. De fato, se algum subconjunto não vazio Λ_0 não possui elemento maximal, então dado qualquer elemento em Λ_0 podemos encontrar um elemento sucessor deste e, portanto, podemos construir uma cadeia ascendente própria infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ em Λ. Reciprocamente, se $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$ é uma cadeia ascendente própria infinita em Λ, então o subconjunto $\Lambda_0 = \{\lambda_1, \lambda_2, \cdots\}$ não possui elemento maximal.

De modo análogo, definimos a *condição minimal* e a *condição de cadeia descendente*, que também são equivalentes.

Definição 1.7. Seja G um grupo.

(i) Se $\mathscr{S}$ consiste de todos os subgrupos de G, dizemos que G satisfaz a *condição maximal* quando $\mathscr{S}$ satisfaz a condição maximal; analogamente, dizemos que G satisfaz a *condição minimal* quando $\mathscr{S}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por max e min, respectivamente.

(ii) Se $\mathscr{N}$ consiste de todos os subgrupos normais de G, dizemos que G satisfaz a *condição maximal sobre os subgrupos normais* quando $\mathscr{N}$ satisfaz a condição maximal; analogamente, dizemos que G satisfaz a *condição minimal sobre os subgrupos normais* quando $\mathscr{N}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por max-n e min-n, respectivamente.

(iii) Se $\mathscr{A}$ consiste de todos os subgrupos abelianos de G, dizemos que G satisfaz a *condição maximal sobre subgrupos abelianos* quando $\mathscr{A}$ satisfaz a condição maximal; analogamente, dizemos que G satisfaz a *condição minimal sobre subgrupos abelianos* quando $\mathscr{A}$ satisfaz a condição minimal. Denotamos estas condições por max-ab e min-ab, respectivamente.

Exemplo 1.8. Qualquer grupo finito satisfaz todas as condições maximais e minimais definidas acima. O grupo $\mathbb{Z}$ satisfaz a condição max, mas não satisfaz a condição min, enquanto que os grupos quasicíclicos satisfazem min, mas não satisfazem max.

Dizemos que um grupo G é uma *extensão* de um grupo N por um grupo Q se existe um subgrupo normal M de G isomorfo a N tal que G/M é isomorfo a Q. Em particular, se $N \lhd G$, então G é uma extensão de N por G/N.

As principais propriedades a respeito das condições de maximalidade e minimalidade que serão utilizadas no decorrer do texto são apresentadas no seguinte

Teorema 1.9. ([20], pág. 68-69)

1. *As condições* max, max-*ab,* min *e* min-*ab são fechadas por formação de subgrupos;*

2. *As condições* max, max-*n,* min *e* min-*n são fechadas por formação de extensão, ou seja, se N é um subgrupo normal de G e N e G/N satisfazem a condição em questão, então G também a satisfaz.*

3. *Um grupo G satisfaz a condição maximal se, e somente se, todo subgrupo de G é finitamente gerado.*

Exemplo 1.10. Dizemos que um grupo G é *policíclico* quando G possui uma série subnormal $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ em que cada fator G_{i+1}/G_i é um grupo cíclico. Desde que todo grupo cíclico satisfaz max e um grupo policíclico é obtido por sucessivas extensões de grupos cíclicos, segue do item 2 do teorema acima que todo grupo policíclico satisfaz max. Consequentemente, pelo item 3 do teorema acima, todo grupo policíclico é finitamente gerado.

1.4 Grupos Solúveis e Nilpotentes

Esta seção é dedicada a fornecer resultados e conceitos de duas classes de grupos que serão intensamente usadas no decorrer do texto, a saber, grupos solúveis e nilpotentes. Antes de discutirmos essas classes de grupos, apresentaremos alguns resultados com relação aos comutadores de um grupo.

Sejam G um grupo e $g, h \in G$. Definimos o *conjugado* de g por h como sendo $g^h := h^{-1}gh$ e o *comutador* de g e h como sendo $[g,h] := g^{-1}h^{-1}gh = g^{-1}g^h$. Mais geralmente, se $g_1, \cdots, g_n \in G$, com $n > 1$, definimos indutivamente $[g_1, \cdots, g_n] = \big[[g_1, \cdots, g_{n-1}], g_n\big]$. Por convenção, $[g_1] = g_1$. Além disso, é usual escrever $[g, {}_n h] = [g, h, \cdots, h]$, onde o elemento h aparece n vezes. Na proposição a seguir, listamos as principais propriedades dos comutadores, as quais são de fácil verificação.

Proposição 1.11. *Sejam x, y, z elementos de um grupo. Então:*

1. $[x,y]^{-1} = [y,x]$;
2. $[xy,z] = [x,z]^y[y,z]$ *e* $[x,yz] = [x,z][x,y]^z$;
3. $[x,y^{-1}] = ([x,y]^{y^{-1}})^{-1}$ *e* $[x^{-1},y] = ([x,y]^{x^{-1}})^{-1}$;
4. *Se x comuta com $[x,y]$, então $[x^m,y] = [x,y]^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$. Analogamente, se y comuta com $[x,y]$, então $[x,y^m] = [x,y]^m$, para todo $m \in \mathbb{Z}$;*
5. (Identidade de Hall-Witt) $[x,y^{-1},z]^y[y,z^{-1},x]^z[z,x^{-1},y]^x = 1$.

Sejam $X_1, X_2, \cdots, X_n$ subconjuntos não vazios de um grupo G. Definimos o *subgrupo comutador* de X_1 e X_2 como sendo $[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] \mid x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$. Mais geralmente,

$$[X_1, \cdots, X_n] = \big[[X_1, \cdots, X_{n-1}], X_n\big].$$

Convencionamos escrever $[X, {}_nY] = [X, Y, \cdots, Y]$, onde o conjunto Y aparece n vezes. Ainda, definimos

$$X^Y = \langle x^y \mid x \in X, \ y \in Y \rangle.$$

Se H é um subgrupo de G, então $X \subseteq X^H \lhd \langle X, H \rangle$. Portanto, $X^H = X^{\langle X, H \rangle}$ é precisamente o fecho normal de X em $\langle X, H \rangle$. Listamos algumas propriedades de subgrupos comutadores no

Teorema 1.12. ([20], pág. 124) *Sejam G um grupo, X, Y subconjuntos de G e H, K, L subgrupos de G. Então*

(i) $X^K = \langle X, [X, K] \rangle$;

(ii) Se $K = \langle Y \rangle$, então $[X, K] = [X, Y]^K$;

(iii) Se $H = \langle X \rangle$ e $K = \langle Y \rangle$, então $[H, K] = [X, Y]^{HK}$;

(iv) Se H, K, L são subgrupos normais de G, então $[HK, L] = [H, L][K, L]$.

1.4.1 Grupos Solúveis

Um grupo G é *solúvel* se existe uma série normal

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

em que $G_i \lhd G$, para todo $i = 0, 1, \cdots, n$ e cada fator G_{i+1}/G_i é abeliano, para $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Uma série com tal propriedade recebe o nome de *série abeliana* de G. Se G é um grupo solúvel, então o comprimento da menor série abeliana de G é chamado de *comprimento derivado* de G. Vemos que um grupo G é solúvel de comprimento derivado 1 se, e somente se, G é abeliano não trivial. Um grupo solúvel de comprimento derivado 2 recebe o nome de *grupo metabeliano*.

Dado G um grupo, o subgrupo comutador $[G, G]$ é denotado por G' e o chamamos de *subgrupo derivado* de G. De modo indutivo, para cada inteiro não negativo n, definimos

$$G^{(0)} = G \quad \text{e} \quad G^{(n+1)} = [G^{(n)}, G^{(n)}] = (G^{(n)})'.$$

É fácil verificar que esses subgrupos são característicos em G. Além disso, considerando a série

$$G = G^{(0)} \geq G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \cdots \geq G^{(n)} \geq \cdots,$$

vemos que todos os fatores $G^{(n)}/G^{(n+1)}$ são abelianos. Esta série recebe o nome de *série derivada* de G. Em particular, o primeiro fator G/G' é o maior grupo quociente de G que é abeliano, ou seja, se H é um subgrupo normal de G com G/H abeliano, então $G' \leq H$. Por sua importância, o grupo G/G' é chamado de *abelianizado* de G e denotado por G_{ab}.

Embora a série derivada de um grupo não termina necessariamente em 1, vale a seguinte

Proposição 1.13. ([20], pág. 124) *Se $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ é uma série abeliana de um grupo solúvel G, então $G^{(i)} \leq G_{n-i}$. Em particular, $G^{(n)} = 1$. Portanto, o comprimento derivado de G é igual ao comprimento da série derivada de G.*

A partir desta proposição, é possível verificar que a classe de grupos solúveis é fechada para formação de subgrupos, imagens homomórficas, produtos diretos e por extensões. Além destas propriedades, precisaremos de mais duas, as quais são enunciadas a seguir.

Proposição 1.14. ([24], pág. 105) *Se G é um grupo solúvel finito, então todo subgrupo normal minimal de G é um p-grupo abeliano elementar, para algum p primo.*

Proposição 1.15. ([20], pág. 152) *Um grupo de torção solúvel finitamente gerado é finito.*

1.4.2 Grupos Nilpotentes

Um grupo G é *nilpotente* se existe uma série normal

$$1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$$

tal que $G_i \lhd G$, para todo $i = 0, 1, \cdots, n$ e $G_{i+1}/G_i \leq \mathrm{Z}(G/G_i)$, para todo $i = 0, 1, \cdots, n-1$. Uma série normal com esta propriedade recebe o nome de *série central*. O comprimento da menor série central de um grupo nilpotente G é chamado de *classe de nilpotência* de G.

É fácil ver que todo grupo abeliano não trivial é nilpotente de classe 1. Um outro tipo importante de grupos nilpotentes são os p-grupos finitos, com p um número primo (Veja [20], pág. 122). Também é claro da definição que todo grupo nilpotente é solúvel, entretanto, o grupo simétrico S_3 é um exemplo de grupo solúvel que não é nilpotente.

A seguir, vamos apresentar duas formas de construir séries centrais, as quais nos auxiliarão no estudo dos grupos nilpotentes. Dado um grupo G, definimos indutivamente os seguintes subgrupos de G

$$\gamma_1(G) = G; \quad \gamma_{n+1}(G) = [\gamma_n(G), G],$$
$$\zeta_0(G) = 1; \quad \zeta_{n+1}(G) \text{ é o subgrupo de } G \text{ tal que } \frac{\zeta_{n+1}(G)}{\zeta_n(G)} = \mathrm{Z}\left(\frac{G}{\zeta_n(G)}\right).$$

Por indução, podemos demonstrar que cada um dos subgrupos definidos acima são característicos em G e, consequentemente, eles são subgrupos normais de G. Claramente a série

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \cdots \leq \zeta_n(G) \leq \cdots$$

é uma série central de G, a qual chamamos de *série central superior* de G. Por outro lado, observamos que se $K \lhd G$ e $K \leq H \leq G$, então $[H, G] \leq K$ se, e somente se, $H/K \leq \mathrm{Z}(G/K)$. Com isso, $[\gamma_n(G), G] = \gamma_{n+1}(G)$ implica que $\gamma_n(G)/\gamma_{n+1}(G) \leq \mathrm{Z}(G/\gamma_{n+1}(G))$, para todo $n \geq 1$. Portanto, a série

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_n(G) \geq \cdots$$

é uma série central de G, a qual chamamos de *série central inferior* de G.

Embora a série central inferior não termina necessariamente em 1 e a série central superior não termina necessariamente em G, temos a seguinte

Proposição 1.16. ([20], pág. 125) *Seja $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ uma série central de um grupo nilpotente G. Então,*

(i) $\gamma_i(G) \leq G_{n-i+1}$ e, assim, $\gamma_{n+1}(G) = 1$;

(ii) $G_i \leq \zeta_i(G)$ e, assim, $\zeta_n(G) = G$;

(iii) A classe de nilpotência de G é o menor inteiro n tal que $\gamma_{n+1}(G) = 1$ e $\zeta_n(G) = G$.

Este resultado nos fornece modos de investigar quando um grupo é nilpotente através das séries centrais superior e inferior. Por exemplo, se G é um grupo nilpotente não trivial, então temos a série central superior $1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \cdots \leq \zeta_n(G) = G$, com $1 \neq \zeta_1(G) = \mathrm{Z}(G)$, ou seja, grupos nilpotentes têm centro não trivial. Alguns critérios para nilpotência são apresentados na seguinte

Proposição 1.17. ([24], pág. 115-116 e [23])

1. *Subgrupos e imagens homomórficas de grupos nilpotentes são nilpotentes. Também, produto direto de um número finito de grupos nilpotentes é nilpotente;*

2. *Se $N \leq \mathrm{Z}(G)$ e G/N é nilpotente, então G é nilpotente. Em particular, se $G/\mathrm{Z}(G)$ é nilpotente de classe no máximo n, então G é nilpotente de classe no máximo $n+1$;*

3. *Se $G = \langle X \rangle$, então $\gamma_{n+1}(G) = \langle [x_0, x_1, \cdots, x_n]^g;\ x_i \in X,\ i = 0, 1, \cdots, n,\ g \in G \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Em particular, se $[x_0, x_1, \cdots, x_n] = 1$ para quaisquer $x_0, x_1, \cdots, x_n \in X$, então G é nilpotente de classe no máximo n;*

Algumas das propriedades básicas satisfeitas por um grupo nilpotente são listadas na seguinte

Proposição 1.18. ([24], pág. 116-117 e [20], pág. 129-132) *Seja G um grupo nilpotente. Então,*

1. *Todo subgrupo maximal de G é normal em G;*

2. *Todo subgrupo de G é subnormal;*

3. *O grupo G satisfaz a condição normalizadora, isto é, se $H < G$, então $H < \mathrm{N}_G(H)$;*

4. *Se G é finito, então G é o produto direto de seus subgrupos de Sylow;*

5. *Se $1 \neq N \lhd G$, então $N \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$;*

6. *Todo subgrupo normal minimal de G está contido no centro de G;*

7. *O conjunto T formado por todos os elementos de ordem finita de G é um subgrupo normal de G.*

No caso em que o grupo G é finito, as condições 1, 2, 3 e 4 da proposição acima são todas equivalentes ao fato de G ser nilpotente, conforme [20], pág. 130. O subgrupo T do item 7 é chamado de *subgrupo de torção* de G.

O próximo resultado desempenha um papel fundamental no estudo de grupos nilpotentes.

Teorema 1.19 (Fitting, cf. [20], pág.133)**.** *Sejam M e N subgrupos normais nilpotentes de um grupo G. Então, o produto MN também é um subgrupo nilpotente de G.*

Agora, dado um grupo G definimos o *subgrupo de Fitting* de G, denotado por $\mathrm{Fit}(G)$, como sendo o subgrupo gerado por todos os subgrupos normais nilpotentes de G. Pelo teorema acima, vemos que se G é um grupo finito, então $\mathrm{Fit}(G)$ é um subgrupo nilpotente, o qual é o maior subgrupo normal nilpotente de G. Naturalmente, $\mathrm{Fit}(G)$ pode ser trivial.

Seguindo a terminologia usada por Robinson no artigo [22], dizemos que um resultado é do *tipo Hall* quando dado um subgrupo normal nilpotente H de um grupo G, podemos passar uma propriedade de G/H' para G. O principal resultado nesta direção fornece um critério de nilpotência, a saber

Teorema 1.20 (P. Hall, cf. [20], pág. 134)**.** *Seja $N \lhd G$. Se N e G/N' são nilpotentes, então G é nilpotente.*

O *subgrupo de Frattini* de um grupo qualquer G é a interseção de todos os subgrupos maximais de G, e deve ser igual ao próprio grupo G no caso em que G não possui subgrupo maximal. Denotaremos o subgrupo de Frattini de G por $\mathrm{Frat}(G)$.

Definição 1.21. Um elemento x de um grupo G é um *gerador supérfluo* de G se sempre que um subconjunto T satisfaz $G = \langle T, x\rangle$, então $G = \langle T\rangle$.

O subgrupo de Frattini de G pode ser caracterizado em termos dos geradores supérfluos de G, como vemos na

Proposição 1.22. ([20], pág.135) *Em qualquer grupo não trivial G, o subgrupo de Frattini é igual ao conjunto de todos os geradores supérfluos de G.*

Observação 1.23. Não é difícil ver que se um subgrupo maximal M de um grupo G é normal, então G/M tem ordem prima e $G' \leq M$. Assim, $M \lhd G$ se, e somente se, $G' \leq M$.

Com isso, todo grupo maximal de G é normal se, e somente se, $G' \leq \mathrm{Frat}(G)$. Segue do item 1 da Proposição 1.18 que se G é um grupo nilpotente, então $G' \leq \mathrm{Frat}(G)$. No caso finito, vale a recíproca.

Para finalizar esta seção, apresentaremos dois resultados, em que o primeiro fornece um critério necessário para decidir se um grupo nilpotente é finitamente gerado e o segundo fornece um critério suficiente para decidir se um grupo finito é solúvel em termos de seus subgrupos maximais.

Teorema 1.24 (Baer, cf. [20], pág.137)**.** *Se G é um grupo nilpotente e G_{ab} é finitamente gerado, então G satisfaz a condição maximal.*

Teorema 1.25 (Schmidt, cf. [20], pág. 258)**.** *Se todo subgrupo maximal de um grupo finito G é nilpotente, então G é solúvel.*

1.5 Módulos e Representações de Grupos

Nesta seção, iremos apresentar os conceitos de módulos e representações de grupos, mas apenas o que será necessário para o desenvolvimento da Seção 4.2. Para mais detalhes, veja [12] e [27]. Inicialmente, vamos apresentar um dos principais objetos no estudo de representações de grupos, a saber, o *anel de grupo*. Dados A um anel (com unidade) e G um grupo, seja AG o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum_{g\in G} \alpha_g g$, com $\alpha_g \in A$, para todo $g \in G$. Temos que AG possui uma estrutura de anel com as operações definidas por

$$\sum_{g\in G} \alpha_g g + \sum_{g\in G} \beta_g b = \sum_{g\in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \qquad \sum_{g\in G} \alpha_g g \cdot \sum_{h\in G} \beta_h h = \sum_{k\in G} \gamma_k k,$$

onde $\gamma_k = \sum \alpha_g \beta_h$, com somatório sobre todo $(g,h) \in G \times G$ tal que $gh = k$. O anel AG é chamado de *anel de grupo de G sobre A*.

Seja A um anel. Um *A-módulo (à esquerda)* é um grupo abeliano $(M,+)$ junto com uma função

$$\begin{aligned} f : A \times M &\longrightarrow \quad M \\ (a,m) &\longmapsto (a,m)f = a \cdot m \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(i) $(a+b) \cdot m = a \cdot m + b \cdot m$;

(ii) $a \cdot (m+n) = a \cdot m + a \cdot n$;

(iii) $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$;

(iv) $1 \cdot m = m$.

para todos $a, b \in A$ e todos $m, n \in M$.

Seja M um A-módulo. Um subconjunto não vazio N de M é um A-*submódulo* de M (ou simplesmente *submódulo*) quando:

(i) $(\forall\, m, n \in N)(m + n \in N)$;

(ii) $(\forall\, a \in A)(\forall\, n \in N)(a \cdot n \in N)$.

Um A-módulo não nulo M é dito ser *simples*, ou *irredutível*, se os únicos submódulos de M são M e $\{0\}$. Se S é um subconjunto não vazio de um A-módulo M, então o submódulo de M gerado por S é dado por $\langle S \rangle = \bigcap N$, onde N percorre o conjunto de todos os submódulos de M que contém S. Notamos que $\langle S \rangle$ pode ser obtido como

$$\langle S \rangle = \{a_1 s_1 + \cdots + a_n s_n;\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in A,\ s_i \in S,\ i = 1, \cdots, n\}.$$

É fácil verificar que um A-módulo M é irredutível se $\langle m \rangle = M$, para todo elemento não nulo m de M.

Sejam F um corpo, G um grupo e $n \geq 1$ um inteiro. Uma F-*representação matricial* de G é um homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(F)$. Se V é um F-espaço vetorial de dimensão finita, então uma F-*representação* de G em V é um homomorfismo de grupos $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$. Se φ é injetor, então a representação é dita ser *fiel*.

Sejam $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma F-representação de G e B uma base de V fixada. Então a aplicação $\varphi^* : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(F)$, dada por $g^{\varphi^*} = [g^\varphi]_B$, onde $[g^\varphi]_B$ é a matriz de g^φ na base B para todo $g \in G$, é uma F-representação matricial de G, chamada de F-*representação matricial associada a* φ *com respeito à base* B. Duas representações matriciais φ e ψ de G são *equivalentes* se existe $M \in \mathrm{GL}_n(F)$ tal que $g^\psi = M^{-1} g^\varphi M$, para todo $g \in G$. Utilizando a matriz mudança de bases, podemos verificar que representações matriciais associadas a uma representação φ de G por bases distintas são equivalentes.

Dada $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ uma F-representação de um grupo G, podemos definir uma estrutura de FG-módulo sobre V com a multiplicação por escalar dada por

$$\left(\sum_{g\in G}\alpha_g g\right)\cdot v = \sum_{g\in G}\alpha_g v^{(g)\varphi}.$$

Reciprocamente, se V é um FG-módulo, então a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi : G &\longrightarrow \mathrm{GL}(V) \\ g &\longmapsto \quad g^{\varphi} : \begin{array}{rcl} V & \to & V \\ v & \mapsto & g\cdot v \end{array} \end{aligned}$$

é uma F-representação de G. Consequentemente, os conceito de F-representação de G e FG-módulo são equivalentes.

Dizemos que a F-representação $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}(V)$ é *irredutível* quando V com a estrutura de FG-módulo dada acima é irredutível. Para o que será feito na Seção 4.2, precisaremos do seguinte resultado.

Proposição 1.26. ([12], pág. 49) *Se $\varphi : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(F)$ é uma F-representação irredutível de um grupo G, então*

$$\mathrm{C}_F(\varphi) = \{S \in M_n(F);\ Sg^{\varphi} = g^{\varphi}S,\ \forall\ g \in G\}$$

é um anel com divisão.

1.6 Indução Transfinita e Números Ordinais

Nesta seção apresentaremos de modo breve alguns conceitos e resultados de teoria de conjuntos. Para mais detalhes, veja [15].

Definição 1.27. Um conjunto parcialmente ordenado X é dito *bem ordenado* quando todo subconjunto não vazio de X possui um elemento mínimo ou menor elemento.

Uma primeira observação que fazemos é que todo conjunto bem ordenado X é totalmente ordenado. De fato, se $x, y \in X$, então o subconjunto $\{x, y\}$ não vazio de X possui um elemento mínimo, de onde, $x \leq y$ ou $y \leq x$.

A vantagem de se estudar conjuntos bem ordenados é que podemos mostrar propriedades sobre seus elementos de modo análogo ao processo de indução finita. Mais precisamente, temos o seguinte resultado

Teorema 1.28 (Princípio de Indução Transfinita). *Seja X um conjunto bem ordenado e suponhamos que S é um subconjunto de X satisfazendo a seguinte propriedade: para todo $x \in X$, se $y \in S$, para todo $y < x$, então $x \in S$. Nestas condições, S é igual ao conjunto X.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que $X \setminus S$ é não vazio. Como X é bem ordenado, $X \setminus S$ possui um menor elemento, digamos x. Logo, todo elemento $y < x$ pertence a S e, por hipótese, segue que $x \in S$, o que é um absurdo. $\square$

Outra vantagem é que podemos estender o processo de contagem além dos números naturais, que é feito através dos números ordinais, que definimos a seguir.

Definição 1.29. Um conjunto X é *transitivo* quando para todo $x \in X$ tivermos que $x \subseteq X$. Um *número ordinal* é um conjunto bem ordenado α tal que para todo $x \in \alpha$ vale que $x = \{y \in \alpha; y < x\}$, ou seja, α é transitivo.

Para ilustrar estes conceitos, lembremos como é construído o conjunto dos números naturais. Para todo conjunto x, definimos o *sucessor* x^+ de x como sendo o conjunto $x \cup \{x\}$. Começamos definindo o número zero como sendo o conjunto $\emptyset$ e definimos cada número natural como sendo igual ao conjunto que contém todos os seus predecessores, ou seja, devemos ter $1 = 0^+ = \{0\}$, $2 = 1^+ = \{0, 1\}$, $3 = 2^+ = \{0, 1, 2\}$ e assim por diante. Então, o conjunto dos números naturais ω é tomado como sendo o menor conjunto que contém 0 e contém x^+ sempre que contiver x. Dado um número natural $n = \{0, 1, \cdots, n-1\}$ junto com a relação de ordem dada pela pertinência, vemos da definição de número natural que este é um conjunto totalmente ordenado e transitivo, ou seja, todo número natural é um número ordinal, os quais são *ordinais finitos*. Ordinais que não são finitos são denominados *ordinais* *transfinitos*. Claramente, o conjunto ω dos números naturais com a ordem usual é totalmente ordenado e transitivo, isto é, é um número ordinal, o qual é um ordinal transfinito.

Um fato importante no estudo de números ordinais, é que todo conjunto formado de números ordinais pode ser munido de uma ordem que o torna bem ordenado. Notamos que cada número natural diferente de zero possui um antecessor imediato. Da mesma forma como acontece com os números naturais, se um número ordinal α possui um antecessor imediato β, então $\alpha = \beta^+$. Entretanto, nem todo número ordinal possui antecessor imediato e, neste caso, chamamos esse ordinal de *ordinal limite*.

Capítulo 2

Generalização de Grupos Nilpotentes

Para grupos finitos, vimos na Proposição 1.18 que podemos caracterizar grupos nilpotentes de diversos modos. Porém, quando passamos para grupos infinitos perdemos essas caracterizações. Mas nem tudo está perdido, pois esta situação faz surgir generalizações para nilpotência. Entre elas, veremos neste capítulo grupos que satisfazem a condição normalizadora, grupos hipercentrais, grupos de Gruenberg e grupos de Baer. Todas estas classes de grupos pertencem a classe dos grupos localmente nilpotentes, a qual iremos estudar neste capítulo. Para mais detalhes, veja [20] e [21].

2.1 Grupos Localmente Nilpotentes

Seja $\mathscr{P}$ uma propriedade de grupos. Dizemos que um grupo G é *localmente* $\mathscr{P}$ quando todo subconjunto finito de G está contido em um subgrupo de G que satisfaz a propriedade $\mathscr{P}$. É fácil ver que se a propriedade $\mathscr{P}$ é inerente para subgrupos, então um grupo G é localmente $\mathscr{P}$ se, e somente se, todo subgrupo finitamente gerado tem a propriedade $\mathscr{P}$. Em particular, temos a

Definição 2.1. Um grupo G é *localmente nilpotente* se cada subgrupo finitamente gerado é nilpotente.

Não é difícil ver que a classe dos grupos localmente nilpotentes é fechada para a formação de subgrupos e imagens homomórficas.

Vimos no Teorema 1.19, que o produto de subgrupos normais nilpotentes de um grupo é ainda um subgrupo normal nilpotente deste grupo. Um resultado análogo para grupos localmente nilpotentes é dado pelo

Teorema 2.2 (Hirsch-Plotkin). *Sejam H e K subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo G. Então, o produto HK é localmente nilpotente.*

Demonstração. Escolhamos um subgrupo finitamente gerado $J = \langle h_1k_1, \cdots, h_mk_m\rangle$ de HK, onde $h_i \in H$ e $k_i \in K$, para $i = 1, \cdots, m$. Devemos provar que J é nilpotente. Para isso, vamos considerar os seguintes subgrupos: $X = \langle h_1, \cdots, h_m\rangle$, $Y = \langle k_1, \cdots, k_m\rangle$ e $Z = \langle X, Y\rangle$. Vemos que $J \leq Z$ e, assim, basta mostrarmos que Z é nilpotente. Definimos o conjunto $C = \{[h_i, k_j]; i, j = 1, \cdots, m\}$. Desde que H e K são normais, temos que $C \subseteq H \cap K$. Assim, $\langle X, C\rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de H e, então, nilpotente. Mas $\langle X, C\rangle_{ab}$ também é finitamente gerado e, pelo Teorema 1.24, o subgrupo $\langle X, C\rangle$ satisfaz a condição maximal. Portanto, pelo Teorema 1.9, todo subgrupo de $\langle X, C\rangle$ é finitamente gerado. Em particular, o subgrupo C^X é finitamente gerado. Além disso, o fato de que $C^X \leq H \cap K$, implica que $\langle Y, C^X\rangle \leq K$ é finitamente gerado e, consequentemente, nilpotente. Agora, pela Proposição 1.12, temos que $[X, Y] = C^{XY}$ e

$$\langle Y, C^X\rangle = \langle Y, C^{XY}\rangle = \langle Y, [X, Y]\rangle = Y^X.$$

Segue que Y^X é nilpotente e, por simetria, X^Y também o é. Logo, o subgrupo $Z = \langle X, Y\rangle = X^YY^X$ é nilpotente pelo Teorema 1.19. $\square$

Por indução, podemos ver que o produto de um número finito de subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo ainda é um subgrupo localmente nilpotente. Em geral, seja H o produto de uma família qualquer $\{H_i\}_{i\in I}$ de subgrupos normais localmente nilpotentes de um grupo G. Dado um subgrupo $K = \langle g_1, \cdots, g_n\rangle$ finitamente gerado de H, para cada $j = 1, \cdots, n$, existe $i_j \in I$ tal que $g_j \in H_{i_j}$. Logo, obtemos $K \leq H_{i_1} \cdots H_{i_n}$, o qual é localmente nilpotente. Portanto, K é nilpotente e, consequentemente, o grupo H é localmente nilpotente.

Corolário 2.3. *Em qualquer grupo G existe um único subgrupo normal localmente nilpotente maximal contendo todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G.*

Demonstração. Dado N um subgrupo normal localmente nilpotente de G, consideremos a família

$$\mathfrak{F} = \{M;\ N \leq M,\ M \lhd G \text{ e } M \text{ é localmente nilpotente}\}.$$

Temos que $N \in \mathfrak{F}$ e, então, $\mathfrak{F} \neq \emptyset$. Além disso, dado um subconjunto totalmente ordenado $\{M_i\}_{i\in I}$ de $\mathfrak{F}$, podemos ver que $J = \bigcup_{i\in I} M_i$ é um limitante superior de $\{M_i\}_{i\in I}$ em $\mathfrak{F}$. Pelo Lema de Zorn, a família $\mathfrak{F}$ possui um elemento maximal. Dados N_1 e N_2 subgrupos normais localmente nilpotentes de G, sejam H_1 e H_2 subgrupos localmente nilpotentes maximais de G tais que $N_1 \leq H_1$ e $N_2 \leq H_2$. Pelo teorema anterior, temos que H_1H_2 é um subgrupo normal localmente nilpotente contendo N_1 e N_2. Logo, a maximalidade de H_1 e H_2 garante que $H_1H_2 \leq H_1$ e $H_1H_2 \leq H_2$, de onde $H_1 = H_2$ e, portanto, existe um único subgrupo localmente nilpotente maximal que contém todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G. □

Isto nos permite fazer a seguinte

Definição 2.4. Dado um grupo G, o *radical de Hirsch-Plotkin* de G é o único subgrupo normal localmente nilpotente maximal de G que contém todos os subgrupos normais localmente nilpotentes de G.

Observamos que o subgrupo de Fitting de qualquer grupo sempre está contido no radical de Hirsch-Plotkin e, mais ainda, estes subgrupos coincidem no caso finito.

Antes de prosseguirmos no estudo de grupos localmente nilpotentes, precisaremos do conceito de série ascendente que generaliza séries normais.

Definição 2.5. Uma *série ascendente* em um grupo G é um conjunto $\{H_\alpha; \alpha \leq \beta\}$ de subgrupos de G indexado por ordinais menores do que ou iguais a um ordinal β tal que:

a) $H_{\alpha_1} \leq H_{\alpha_2}$, quando $\alpha_1 \leq \alpha_2$;

b) $H_0 = 1$ e $H_\beta = G$;

c) $H_\alpha \lhd H_{\alpha+1}$;

d) $H_\lambda = \bigcup\limits_{\alpha<\lambda} H_\alpha$, quando λ é um ordinal limite.

Naturalmente, os subgrupos H_α são chamados os *termos* da série, enquanto que $H_{\alpha+1}/H_\alpha$ são os *fatores*. O ordinal β é o *comprimento* da série. Escrevemos a série acima na forma:

$$1 = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\beta = G.$$

Algumas vezes será conveniente falar de uma série *começando no subgrupo* K; neste caso, teremos $H_0 = K$ e as demais condições mantidas.

Definição 2.6. Um subgrupo que é termo de alguma série ascendente de um grupo G é chamado *subgrupo ascendente*.

Exemplo 2.7. Este exemplo serve para ilustrar o fato de que o conceito de subgrupo ascendente é uma generalização não trivial dos subgrupos subnormais. Sejam A um grupo do tipo 2^∞ e $X = \langle x \rangle$ um grupo de ordem 2. Tomamos $G = X \ltimes A$, com $a^x = a^{-1}$, para todo $a \in A$. Este grupo é chamado 2-*grupo localmente diedral*. Denotamos por A_i o único subgrupo de A com ordem 2^i. Temos que $A_i \lhd A_{i+1}$ e, consequentemente, $XA_i \lhd XA_{i+1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Logo, existe uma série ascendente

$$X \lhd XA_1 \lhd XA_2 \lhd \cdots XA = G.$$

É fácil ver que $\bigcup_{i<\omega} XA_i = XA$ e, portanto, X é ascendente em G. Por outro lado,

$$X^G = X^{XA} = X^{\langle X,A\rangle} = X^A = \langle X, [X,A]\rangle = \langle X, A\rangle = XA = G,$$

ou seja, o subgrupo X não é subnormal em G.

Algumas propriedades das séries ascendentes que utilizaremos são apresentadas na próxima proposição.

Proposição 2.8. *Sejam H e K subgrupos de um grupo G, com $H \leq K$. Se H é ascendente em K e K é ascendente em G, então H é ascendente em G. Além disso, se H é um subgrupo ascendente de K e φ é um homomorfismo de G em um grupo qualquer, então H^φ é ascendente em K^φ. Em particular, se $N \lhd G$, então NH é ascendente em NK.*

Demonstração. Sejam

$$H = H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots H_\alpha = K \quad \text{e} \quad K = K_1 \lhd K_2 \lhd \cdots K_\beta = G$$

séries ascendentes de H em K e de K em G, respectivamente. Então, fazendo $K_\gamma = K_{\alpha+\gamma}$, para cada ordinal $\gamma = 1, 2, \cdots, \beta$, temos que

$$H = H_1 \lhd H_2 \lhd \cdots H_\alpha = K = K_{\alpha+1} \lhd K_{\alpha+2} \lhd \cdots K_{\alpha+\beta} = G$$

é uma série ascendente entre H e G, de onde H é ascendente em G.

Agora, se $\varphi : G \longrightarrow \widetilde{G}$ é um homomorfismo do grupo G em um grupo qualquer $\widetilde{G}$, é fácil ver que

$$H^\varphi = H_1^\varphi \lhd H_2^\varphi \lhd \cdots H_\alpha^\varphi = K^\varphi$$

é uma série ascendente entre H^φ e K^φ. Em particular, se $N \lhd G$, então tomando o homomorfismo canônico $\varphi : G \longrightarrow G/N$, temos que $H^\varphi = NH/N$ é ascendente em $K^\varphi = NK/N$ e, consequentemente, NH é ascendente em NK. $\square$

A seguir, veremos que o radical de Hirsh-Plotkin, além de conter todos os subgrupos normais localmente nilpotentes, também contém todos os subgrupos ascendentes localmente nilpotentes.

Proposição 2.9. *Se G é um grupo qualquer, então o radical de Hirsch-Plotkin contém todos os subgrupos ascendentes localmente nilpotentes de G.*

Demonstração. Seja H um subgrupo ascendente localmente nilpotente de G. Então, existe uma série ascendente

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\beta = G.$$

Definindo $\overline{H}_\alpha = H^{H_\alpha}$, é fácil ver que

$$H = \overline{H}_1 \lhd \overline{H}_2 \lhd \cdots \overline{H}_\beta = H^G$$

é uma série ascendente. Argumentamos por indução transfinita que $\overline{H}_\alpha$ é localmente nilpotente, para todo ordinal α. Suponhamos que isto seja falso e consideremos α o primeiro ordinal tal que $\overline{H}_\alpha$ não é localmente nilpotente. Se α é um ordinal limite, então $\overline{H}_\alpha = \bigcup_{\gamma<\alpha} \overline{H}_\gamma$ e, sendo $\overline{H}_\gamma$ localmente nilpotente para todo $\gamma < \alpha$, segue que $\overline{H}_\alpha$ é localmente nilpotente. Portanto, α não pode ser um ordinal limite; logo, $\alpha - 1$ existe e $\overline{H}_{\alpha-1}$ é localmente nilpotente. Agora,

$$\langle \overline{H}_{\alpha-1}^x \mid x \in H_\alpha \rangle = (\overline{H}_{\alpha-1})^{H_\alpha} = (H^{H_{\alpha-1}})^{H_\alpha} = H^{H_\alpha} = \overline{H}_\alpha.$$

Além disso, para qualquer $x \in H_\alpha$ temos que $\overline{H}_{\alpha-1}^{x} \lhd \overline{H}_{\alpha}^{x} = \overline{H}_\alpha$. Consequentemente, $\overline{H}_\alpha$ é um produto de subgrupos normais localmente nilpotentes e, portanto, é localmente nilpotente. Por esta contradição, temos que $\overline{H}_\beta = H^G$ é localmente nilpotente. Logo, H^G está contido no radical de Hirsch-Plotkin e, então, H também está. □

Foi visto na Observação 1.23, que se G é um grupo nilpotente, então $G' \leq \mathrm{Frat}(G)$. Em direção a obter um resultado análogo para grupos localmente nilpotentes, precisaremos do

Lema 2.10. *Sejam G um grupo, H um subgrupo de G e x um elemento de G tal que $x \notin H$. Então, existe um subgrupo K que é maximal com respeito a propriedade de conter H e $x \notin K$.*

Demonstração. Seja $\mathscr{S} = \{S;\ H \leq S \leq G, x \notin S\}$. Uma vez que $x \notin H$, temos que $H \in \mathscr{S}$ e, então, $\mathscr{S} \neq \emptyset$. A relação de inclusão torna $\mathscr{S}$ parcialmente ordenado. Além disso, dado um subconjunto totalmente ordenado $\{S_i\}_{i\in I}$ de $\mathscr{S}$, seja $J = \bigcup_{i\in I} S_i$. É claro que $x \notin J$. Dados $g, h \in J$, temos que $g \in S_j$ e $h \in S_k$, para alguns $j, k \in I$. Desde que $\{S_i\}_{i\in I}$ é totalmente ordenado, podemos considerar que $S_j \subseteq S_k$ e, com isso, $g, h \in S_k$. Como $S_k \leq G$, temos que $gh^{-1} \in S_k \subseteq J$, de onde, J é subgrupo de G. Claramente $H \leq J$ e $S_i \leq J$, para todo $i \in I$. Portanto, $J \in \mathscr{S}$ é um limitante superior para $\{S_i\}_{i\in I}$. Pelo Lema de Zorn, segue que $\mathscr{S}$ possui um elemento maximal K, como queríamos. □

Com isso, estamos aptos a demonstrar o

Teorema 2.11 (Baer, McLain)**.** *Se M é um subgrupo maximal de um grupo localmente nilpotente G, então M é normal em G. Equivalentemente, $G' \leq \mathrm{Frat}(G)$.*

Demonstração. Se M não é normal, então $G' \nleq M$ e existe $c \in G' \setminus M$. Logo, a maximalidade de M implica que $G = \langle c, M\rangle$. Desde que $c \in G'$, então $c \in \langle g_1, \cdots, g_n\rangle'$, com $g_1, \cdots, g_n$ pertencendo a $L = \langle c, F\rangle$, onde F é um subgrupo adequado finitamente gerado de M. Visto que $c \notin F$, pelo Lema 2.10, o grupo L possui um subgrupo N que é maximal com respeito a conter F e $c \notin N$. Notemos que um subgrupo de L que contém N propriamente deve conter F e c, logo, este subgrupo deve ser igual a L; isto equivale a dizer que N é um subgrupo maximal de L. Desde que L é um subgrupo de G finitamente gerado, temos que L é nilpotente. Pela Proposição 1.18, temos que $N \lhd L$ e, consequentemente, L/N é abeliano. Contudo, isto nos diz que $c \in L' \leq N$, o que contradiz a escolha de N. □

Outra propriedade satisfeita para grupos nilpotentes que também é satisfeita para grupos localmente nilpotentes é o fato de que subgrupos normais minimais estão contidos no centro do grupo, como vemos no resultado abaixo.

Teorema 2.12 (Mal'cev, McLain)**.** *Um subgrupo normal minimal N de um grupo localmente nilpotente G é central.*

Demonstração. Suponhamos que $N \nleq \mathrm{Z}(G)$, logo, existem $a \in N$ e $g \in G$ tais que $b = [a, g] \neq 1$. Como N é normal em G, $b \in N$ e a minimalidade de N garantem que $\langle b \rangle^G = N$. Portanto, $a \in \langle b^{g_1}, \cdots, b^{g_n} \rangle$, para alguns $g_1, \cdots, g_n \in G$. Definimos $H = \langle a, g, g_1, \cdots, g_n \rangle$ e $A = \langle a \rangle^H$. Visto que $a \in A$ e $g \in H$, então $b = [a, g] \in [A, H]$. Desta forma, $b^{g_i} \in [A, H]$, para todo $i = 1, \cdots, n$ e, então, $a \in [A, H]$. Logo, $A \leq [A, H]$ e $[A, H] \leq A$, uma vez que A é normal em H, ou seja, $A = [A, H]$ e, consequentemente, $A = [A, {}_rH]$ para todo r inteiro positivo. Como H é um subgrupo finitamente gerado de G, segue que H é nilpotente de classe c, digamos. Assim, $A = [A, {}_cH] \leq [H, {}_cH] = \gamma_{c+1}(H) = 1$. Portanto, $a = 1$ e, então, $b = 1$, o que é um absurdo. $\square$

Um fato interessante que ocorre para grupos localmente nilpotentes é que eles podem ser forçados a serem nilpotentes quando impomos condições de finitude. Um exemplo trivial disto, é que todo grupo finito localmente nilpotente é nilpotente. Outro resultado nesta direção é apresentado abaixo.

Teorema 2.13 (McLain)**.** *Se um grupo localmente nilpotente G satisfaz a condição* max-*n, então G é um grupo nilpotente e finitamente gerado.*

Demonstração. Temos que G/G' satisfaz a condição max-n e, então, G/G' satisfaz max, pois este grupo é abeliano. Logo, pelo Teorema 1.9, o grupo G/G' é finitamente gerado, digamos que $G/G' = \langle x_1G', \cdots, x_kG' \rangle$. Se considerarmos $X = \langle x_1, \cdots, x_k \rangle$, então dado $g \in G$, temos que $gG' = xG'$, com $x \in X$, ou seja, $g = xg'$, onde $g' \in G'$. Portanto, podemos escrever $G = XG'$, com X um subgrupo de G finitamente gerado, o qual deve ser nilpotente de classe c, digamos. Dado um subgrupo H de G, colocamos $\overline{H} = \pi(H)$, onde $\pi : G \longrightarrow G/\gamma_{c+2}(G)$ é o homomorfismo canônico. Portanto, o grupo $\overline{G} = \overline{X}\,\overline{G'}$ é nilpotente, uma vez que $\gamma_{c+2}(\overline{G}) = 1$. Pela Observação 1.23, vemos que $\overline{G'} \leq \mathrm{Frat}(\overline{G})$ e, assim, $\overline{G} = \overline{X}\,\mathrm{Frat}(\overline{G})$. Notamos que $\overline{G}_{ab}$

é finitamente gerado, pois é isomorfo a X, logo, pelo Teorema 1.24, o grupo $\overline{G}$ satisfaz max e, em particular, o subgrupo $\mathrm{Frat}(\overline{G})$ é finitamente gerado. Pela Proposição 1.22, sabemos que os elementos de $\mathrm{Frat}(\overline{G})$ são geradores supérfluos. Assim, obtemos $\overline{G} = \overline{X}$ e, então, $\overline{G}$ é nilpotente de classe no máximo c, de onde, $\gamma_{c+1}(G) = \gamma_{c+2}(G)$. Colocando $L = \gamma_{c+1}(G)$, temos $L = [L, G]$. Se $L \neq 1$, então pela condição max-n existe um subgrupo normal N de G que é maximal satisfazendo $N < L$. Mas L/N é um subgrupo normal minimal de G/N e, pela Proposição 2.12, temos que L/N é central, ou seja, $L/N \leq \mathrm{Z}(G/N)$. Visto que $N \lhd G$, isto equivale a $L = [L, G] \leq N$, o que é um absurdo. Portanto, $L = 1$ e, então, G é nilpotente. Para finalizar, como $\overline{G} = \overline{X}$, $\gamma_{c+2}(G) = 1$ e X é finitamente gerado, então G é finitamente gerado. □

Como veremos mais adiante no Lema 3.12, todo grupo nilpotente finitamente gerado é policíclico e, pelo Exemplo 1.10, todo grupo policíclico satisfaz a condição max. Portanto, pelo teorema acima, as condições max-n e max são equivalentes para grupos localmente nilpotentes.

Exemplo 2.14. Vamos ilustrar que a condição min-n sobre um grupo localmente nilpotente G não implica que G é nilpotente. Consideremos $G = X \ltimes A$ o 2-grupo localmente diedral. Dado $H = \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ um subgrupo finitamente gerado de G, podemos ver que para algum subgrupo A_i de A com ordem 2^i devemos ter que $H \leq XA_i$ e este é um 2-grupo finito, de onde, XA_i é nilpotente e, consequentemente, H é nilpotente. Portanto, o grupo G é localmente nilpotente. Além disso, como A e $G/A \simeq X$ satisfazem a condição min-n, pelo Teorema 1.9, segue que G satisfaz min-n. Entretanto, $G' = A = [A, G]$ de onde $\gamma_2(G) = [G, G] = G' = A$, $\gamma_3(G) = [G', G] = [A, G] = A$ e, assim por diante, obtemos que $\gamma_n(G) = A$, para todo n. Logo, o grupo G não é nilpotente.

2.1.1 Condição Normalizadora e Grupos Hipercentrais

Sabemos que a condição normalizadora é satisfeita para grupos nilpotentes, mais ainda, esta condição caracteriza grupos nilpotentes no caso finito. Embora, no caso geral, grupos que satisfazem a condição normalizadora não são necessariamente nilpotentes, veremos que tais grupos são localmente nilpotentes. Primeiramente, vamos caracterizar a condição normalizadora em termos de subgrupos ascendentes.

Proposição 2.15. *Um grupo G satisfaz a condição normalizadora se, e somente se, todo subgrupo é ascendente.*

Demonstração. Suponhamos que G satisfaz a condição normalizadora. Dado H um subgrupo qualquer, podemos definir uma cadeia de subgrupos $\{H_\alpha\}$ pelas seguintes regras:

$$H_0 = H, \quad H_{\alpha+1} = \mathrm{N}_G(H_\alpha) \quad \text{e} \quad H_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} H_\beta,$$

onde α é um ordinal e λ é um ordinal limite. Se $H_\alpha < H_{\alpha+1}$ para todo α, segue que a cardinalidade de G não é menor do que a cardinalidade do ordinal α, para qualquer α, o que é um absurdo. Portanto, $H_\alpha = H_{\alpha+1} = \mathrm{N}_G(H_\alpha)$ para algum α e, assim, $H_\alpha = G$ pela condição normalizadora. Portanto, H é ascendente em G.

Reciprocamente, dado $H < G$, existe uma série ascendente

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\beta = G.$$

Excluindo os termos repetidos, podemos supor que $H \neq H_1$. Portanto, $H_1 \leq \mathrm{N}_G(H)$ e $H < \mathrm{N}_G(H)$. □

Com isso, obtemos a

Proposição 2.16 (Plotkin)**.** *Se um grupo G satisfaz a condição normalizadora, então G é localmente nilpotente.*

Demonstração. Dado $g \in G$, pela proposição anterior temos que $\langle g \rangle$ é ascendente em G. Desde que $\langle g \rangle$ é abeliano, temos que $\langle g \rangle$ é localmente nilpotente e, então, $\langle g \rangle$ é subgrupo do radical de Hirsch-Plotkin de G. Logo, o grupo G coincide com seu radical de Hirsch-Plotkin e, claramente, é localmente nilpotente. □

Exemplo 2.17. A recíproca da proposição anterior é falsa. Consideremos o grupo $W = H \wr K$, onde $|H| = p$ e K é um p-grupo abeliano elementar infinito. Como H e K são abelianos, segue que eles são solúveis e, assim, W é um p-grupo solúvel, pois W é uma extensão de grupos solúveis. Afirmamos que todo p-grupo solúvel G é localmente nilpotente. De fato, dado $S = \langle g_1, \cdots, g_n \rangle$ um subgrupo finitamente gerado de G, como S é um grupo de torção, a Proposição 1.15 garante que S é finito. Com isso, S é um p-grupo finito e, consequentemente, é nilpotente, como queríamos. Logo, o grupo W é localmente nilpotente. Entretanto, W não satisfaz a condição normalizadora, pois $\mathrm{N}_W(K) = K$. Com efeito, temos que

$$H \wr K = K \ltimes \left(\underset{k \in K}{\mathrm{Dr}}\, H_k \right), \quad \text{com} \quad (h_k)^{k'} = (h_{kk'}).$$

Dado $(x, (h_k)) \in \mathrm{N}_W(K)$, para todo $(y, 1) \in K$, devemos ter

$$(x, (h_k))^{-1}(y, 1)(x, (h_k)) = (x^{-1}yx, (h_k^{-1})^{x^{-1}yx}(h_k))$$

pertencendo a K, ou seja, $1 = (h_k^{-1})^{\lambda}(h_k) = (h_{k\lambda}^{-1}h_k)$ para todo $\lambda \in K$. Segue que $h_{k\lambda} = h_k$, para todo $\lambda \in K$. Neste caso, $(h_k) = (h)$ para algum $h \in H$. Mas, como o produto direto $\underset{k \in K}{\mathrm{Dr}}\, H_k$ tem infinitos fatores, devemos ter que $h = 1$ e, portanto, $(h_k) = 1$. Logo, $(x, (h_k)) \in K$ e, então, $\mathrm{N}_W(K) = K$ como afirmamos.

Vejamos, agora, a classe dos grupos hipercentrais.

Definição 2.18. Uma série ascendente $1 = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots G_\beta = G$ de um grupo G é dita *central* se $G_\alpha \lhd G$ e $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq \mathrm{Z}(G/G_\alpha)$, para todo ordinal $\alpha < \beta$. Um grupo que possui uma série ascendente central é chamado *hipercentral*.

Podemos caracterizar esta classe de grupos em termos de *série central superior estendida transfinitamente*, que é definida da seguinte forma: se G é um grupo qualquer, os termos $\zeta_\alpha(G)$ da série central superior são definidos como

$$\zeta_0(G) = 1, \quad \zeta_{\alpha+1}(G) \text{ é o subgrupo de } G \text{ tal que } \frac{\zeta_{\alpha+1}(G)}{\zeta_\alpha(G)} = \mathrm{Z}\left(\frac{G}{\zeta_\alpha(G)}\right) \quad \text{e}$$

$$\text{se } \lambda \text{ é um ordinal limite, } \zeta_\lambda(G) = \bigcup_{\alpha < \lambda} \zeta_\alpha(G).$$

Desde que a cardinalidade de G não pode ser excedida, existe um ordinal β tal que $\zeta_\beta(G) = \zeta_{\beta+1}(G) = \cdots$ e este subgrupo é chamado de *hipercentro* de G. Será conveniente chamarmos $\zeta_\alpha(G)$ de *α-centro* de G. É imediato ver que um grupo G é hipercentral se, e somente se, ele coincide com seu hipercentro.

Proposição 2.19. *Um grupo hipercentral G satisfaz a condição normalizadora e, portanto, é localmente nilpotente.*

Demonstração. Seja $\{G_\alpha; \alpha < \beta\}$ uma série central ascendente de G e seja $H \leq G$. Para todo α, como $G_{\alpha+1}/G_\alpha \leq \mathrm{Z}(G/G_\alpha)$, temos que $[G, G_{\alpha+1}] \leq G_\alpha$. Assim, $HG_\alpha \lhd HG_{\alpha+1}$. Portanto, $H = HG_0$ é ascendente em $G = HG_\beta$. Logo, todo subgrupo de G é ascendente, de onde G satisfaz a condição normalizadora e, consequentemente, G é localmente nilpotente. □

2.1.2 Grupos de Gruenberg e de Baer

Antes de definirmos os próximos dois tipos de grupos localmente nilpotentes, apresentaremos o seguinte resultado fundamental.

Teorema 2.20. *Sejam H e K subgrupos nilpotentes finitamente gerados de um grupo G e escrevamos $J = \langle H, K\rangle$.*

(i) (Gruenberg). *Se H e K são ascendentes em G, então J é ascendente em G;*

(ii) (Baer). *Se H e K são subnormais em G, então J é subnormal em G.*

Demonstração. (i) Como H e K são ascendentes e nilpotentes, pela Proposição 2.9, obtemos que H e K estão contidos no radical de Hirsch-Plotkin de G e, consequentemente, temos que J também está contido no radical de Hirsch-Plotkin de G. Visto que J é finitamente gerado, este deve ser nilpotente. Agora, vamos mostrar que J é ascendente em G. Inicialmente, vejamos que podemos reduzir o problema para o caso em que H é um subgrupo normal de J. Seja

$$H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\alpha = G$$

uma série ascendente de H em G, com $\alpha > 0$. O fato de que J é finitamente gerado garante que J_{ab} é finitamente gerado e, sendo J nilpotente, o Teorema 1.24 fornece que J satisfaz a condição max. Pelo Teorema 1.9, todo subgrupo de J é finitamente gerado e, em particular, obtemos que H^J é finitamente gerado. Procederemos por indução transfinita sobre α para mostrarmos que H^J é ascendente em G. Se α é um ordinal limite, então $H^J \leq H_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} H_\beta$ implica que $H^J \leq H_\beta$, para algum $\beta < \alpha$. Por hipótese de indução, temos que H^J é ascendente em H_β e, sendo H_β ascendente em H_α, segue que H^J é ascendente em H_α. Por outro lado, se α não é um ordinal limite, então $H \leq H_{\alpha-1} \lhd H_\alpha$ e $H^J \leq H_{\alpha-1}$. Novamente por hipótese de indução, obtemos que H^J é ascendente em $H_{\alpha-1}$ e, consequentemente, ascendente em H_α. Este argumento nos permite trocar H por H^J e, assim, podemos supor que $H \lhd J$ e $J = HK$.

Definindo $\overline{H_\alpha} = H^{H_\alpha}$, sabemos que

$$H = \overline{H_0} = \overline{H_1} \lhd \overline{H_2} \lhd \cdots \overline{H_\alpha} = H^G$$

é uma série ascendente. Vamos modificar esta série de modo a obter uma nova série com a propriedade de que cada termo é invariante por conjugação de elementos de K. Para isso, consideremos

$$H^*_\beta = \bigcap_{k \in K} (\overline{H_\beta})^k.$$

É fácil ver que $H = H^*_0 = H^*_1$, $H^G = H^*_\alpha$ e $H^*_\beta \lhd H^*_{\beta+1}$. Além disso, dado λ um ordinal limite, temos que

$$H^*_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} H^*_\beta.$$

De fato, a inclusão $\bigcup_{\beta<\lambda} H^*_\beta \subseteq H^*_\lambda$ é óbvia. Para a inclusão contraria, dado $x \in H^*_\lambda$, temos que $\langle x\rangle^K \leq (H^*_\lambda)^K = H^*_\lambda \leq \overline{H}_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} \overline{H}_\beta$, uma vez que λ é um ordinal limite e os $\overline{H}_\beta$'s formam uma série ascendente, para $\beta < \lambda$. Consequentemente $\langle x\rangle^K \leq \overline{H}_\beta$, para algum $\beta < \lambda$ e, como $\langle x\rangle^K \leq (\overline{H}_\beta)^k$, para todo $k \in K$, vem que $\langle x\rangle^K \leq H^*_\beta$. Em particular, conseguimos que $x \in H^*_\beta$, como desejado.

Agora, para cada $\beta < \alpha$, os fatos de que $H^*_\beta \lhd H^*_{\beta+1}$ e H^*_β ser invariante por conjugação de elementos de K implicam que $H^*_\beta \lhd H^*_{\beta+1}K$. Além disso, se $K = K_0 \lhd K_1 \lhd \cdots K_\mu = G$ é uma série ascendente de K em G, vemos que

$$K = K \cap H^*_{\beta+1}K = K_0 \cap H^*_{\beta+1}K \lhd K_1 \cap H^*_{\beta+1}K \lhd \cdots K_\mu \cap H^*_{\beta+1}K = H^*_{\beta+1}K$$

é uma série ascendente de K em $H^*_{\beta+1}K$. Pela Proposição 2.8, devemos ter que $H^*_\beta K$ é ascendente em $H^*_{\beta+1}K$. Com isso, deduzimos que $J = HK = H^*_0 K$ é ascendente em $H^*_\alpha K = H^G K$. Mas, sendo K ascendente em G e $H^G \lhd G$, a Proposição 2.8 implica que $H^G K$ é ascendente em G. Portanto, concluímos que J é ascendente em G.

(ii) Análogo ao item anterior, mas considerando ordinais finitos. □

Corolário 2.21. *Se todo subgrupo cíclico de um grupo é ascendente (subnormal), então todo subgrupo finitamente gerado deste grupo é ascendente (subnormal) e nilpotente.*

Definição 2.22. Dizemos que um grupo G é de *Gruenberg* (*Baer*) quando todo subgrupo cíclico de G é ascendente (subnormal) em G.

Todo grupo de Baer é um grupo de Gruenberg e, pelo corolário anterior, todo grupo de Gruenberg é localmente nilpotente. Além disso, todo grupo que satisfaz a condição normalizadora é um grupo de Gruenberg, visto que todo subgrupo seu é ascendente, conforme Proposição 2.15.

Sabemos que para um grupo qualquer, o produto de subgrupos normais nilpotentes é ainda nilpotente, bem como o produto de subgrupos normais localmente nilpotentes é ainda localmente nilpotente. O análogo para grupos de Gruenberg e de Baer é dado no seguinte

Teorema 2.23. *Sejam H e K subgrupos normais de Gruenberg (Baer) de um grupo G. Então, o produto HK também é um subgrupo de Gruenberg (Baer) de G.*

Demonstração. Seja $x \in HK$ e escrevamos $x = hk$, com $h \in H$ e $k \in K$. Desde que $\langle k \rangle$ é ascendente em K e $K \lhd HK$, temos que $\langle k \rangle$ é ascendente em HK. Considerando o homomorfismo canônico $\pi : HK \longrightarrow HK/H$, a Proposição 2.8 garante que $(\langle k \rangle H)/H = \langle k \rangle^\pi$ é ascendente em $(HK)^\pi = HK/H$, de onde, $\langle k, H \rangle = \langle k \rangle H$ é ascendente em HK. Resta provarmos que $\langle x \rangle$ é ascendente em $\langle k, H \rangle$. Com efeito, é claro que $\langle h \rangle$ e $\langle k \rangle$ são subgrupos finitamente gerados nilpotentes e ascendentes em $\langle k, H \rangle$. Assim, pelo Teorema 2.20, obtemos que $\langle h, k \rangle$ é ascendente em $\langle k, H \rangle$. Sendo H e K grupos de Gruenberg, em particular, eles são localmente nilpotentes e, pelo Teorema 2.2, temos que HK é localmente nilpotente. Logo, $\langle h, k \rangle$ é nilpotente, pois $\langle h, k \rangle$ é um subgrupo finitamente gerado de HK. Uma vez que $\langle x \rangle$ é subgrupo de $\langle h, k \rangle$, pela Proposição 1.18, vale que $\langle x \rangle$ é subnormal em $\langle h, k \rangle$ e, portanto, $\langle x \rangle$ é ascendente em $\langle k, H \rangle$, como queríamos. □

Corolário 2.24. *Todo grupo G possui um único subgrupo normal de Gruenberg (Baer) maximal, o qual contém todos os subgrupos de Gruenberg ascendentes (de Baer subnormais).*

Demonstração. Seja H um subgrupo de Gruenberg ascendente de G e considere a família

$$\mathfrak{F} = \{N;\ H \leq N, \text{ e } N \text{ é subgrupo normal de Gruenberg de } G\}.$$

Vamos mostrar que esta família é não vazia. Seja $H = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\alpha = G$ uma série ascendente de H em G. Definindo $\overline{H}_\beta = H^{H_\beta}$, para todo ordinal $\beta \leq \alpha$, sabemos que $H = \overline{H}_0 = \overline{H}_1 \lhd \overline{H}_2 \lhd \cdots \overline{H}_\alpha = H^G$ é uma série ascendente de H em H^G. Provaremos por indução transfinita sobre α que H^G é subgrupo de Gruenberg. Suponhamos que $\overline{H}_\beta$ seja subgrupo de Gruenberg, para todo ordinal $\beta < \gamma$. Se β é um ordinal limite, então $\overline{H}_\beta = \bigcup_{\lambda<\beta} \overline{H}_\lambda$ deve ser subgrupo de Gruenberg e, por indução, obtemos que $\overline{H}_\gamma$ é subgrupo de Gruenberg. Agora, se β não é um ordinal limite, então existe $\overline{H}_{\beta-1}$ e este é um subgrupo de Gruenberg. Além disso, para todo $x \in H_\beta$ temos que $\overline{H}_{\beta-1}^x \lhd \overline{H}_\beta$ e, consequentemente, $\overline{H}_\beta = \langle \overline{H}_{\beta-1}^x;\ x \in H_\beta \rangle = \prod_{x \in H_\beta} \overline{H}_{\beta-1}^x$, com cada $\overline{H}_{\beta-1}^x$ subgrupo normal de Gruenberg de $\overline{H}_\beta$. Dado $y \in \overline{H}_\beta$, temos que $y \in \overline{H}_{\beta-1}^{x_1} \cdots \overline{H}_{\beta-1}^{x_n}$, para alguns $x_1, \cdots, x_n \in \overline{H}_\beta$. Pelo teorema anterior, sabemos que o produto de um número finito de subgrupos normais de Gruenberg ainda é um subgrupo normal de Gruenberg. Logo, o subgrupo $\langle y \rangle$ é ascendente em $\overline{H}_{\beta-1}^{x_1} \cdots \overline{H}_{\beta-1}^{x_n}$ e, portanto, ascendente em $\overline{H}_\beta$. Assim, $\overline{H}_\beta$ é subgrupo de Gruenberg e, por indução, vem que $\overline{H}_\gamma$ é subgrupo de Gruenberg. Em qualquer caso, conseguimos que H^G é subgrupo de Gruenberg. Portanto, o subgrupo H^G pertence à $\mathfrak{F}$, assegurando que $\mathfrak{F} \neq \emptyset$.

Agora, dado um subconjunto totalmente ordenado $\{M_i\}_{i \in I}$ de $\mathfrak{F}$, podemos ver que $J = \bigcup_{i \in I} M_i$ é um limitante superior de $\{M_i\}_{i \in I}$ em $\mathfrak{F}$. Pelo Lema de Zorn, a família $\mathfrak{F}$ possui um elemento maximal. Dados H_1 e H_2 subgrupos ascendentes de Gruenberg de G, sejam M_1 e M_2 subgrupos normais de Gruenberg maximais de G tais que $H_1 \leq M_1$ e $H_2 \leq M_2$. Pelo teorema anterior, temos que M_1M_2 é um subgrupo normal de Gruenberg contendo H_1 e H_2. Logo, a maximalidade de M_1 e M_2 garante que $M_1M_2 \leq M_1$ e $M_1M_2 \leq M_2$, de onde $M_1 = M_2$ e, portanto, existe um único subgrupo normal de Gruenberg maximal que contém todos os subgrupos ascendentes de Gruenberg de G. □

Isto nos motiva a seguinte

Definição 2.25. Em qualquer grupo G, seu *radical de Gruenberg (Baer)* é o único subgrupo normal de Gruenberg (Baer) maximal de G.

Capítulo 3

Elementos Engelianos em um Grupo

A partir do estudo de grupos e álgebras de Lie, surge o conceito de elementos engelianos em um grupo. Isto conduz a definição de grupos engelianos, que por sua vez fornecem uma outra generalização dos grupos nilpotentes, sem serem necessariamente localmente nilpotentes. Dado um grupo G, é possível definir diferentes tipos de elementos engelianos e um dos maiores objetivos no estudo destes elementos é fornecer condições para que os subconjuntos de G formado pelos elementos engelianos sejam subgrupos de G. Este capítulo é dedicado a tratar destes elementos. Começamos apresentando as definições e algumas condições para que os subconjuntos formados por elementos engelianos sejam subgrupos, em particular, consideraremos condições de finitude. Por fim, vamos apresentar um tipo de elemento engeliano mais geral que satisfaz propriedades análogas aos elementos apresentados anteriormente. Tais elementos são definidos por Abdollahi no artigo [1].

3.1 Grupos Engelianos

Seja G um grupo qualquer. Um elemento $g \in G$ é um *elemento engeliano à esquerda* de G, se para cada $x \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ tal que $[x, {}_n g] = 1$. Quando n pode ser escolhido independentemente de x, dizemos que g é um *elemento n-engeliano à esquerda* de G ou, menos precisamente, é um *elemento engeliano à esquerda limitado* de G. Denotamos os conjuntos de elementos engelianos à esquerda e de elementos engelianos à esquerda limitados por $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$, respectivamente.

Notamos que na definição de elemento engeliano à esquerda g em G, o elemento variável x aparece à esquerda de g. Assim, podemos definir de modo análogo quando um elemento

$g \in G$ é um elemento engeliano à direita colocando o elemento variável x à direita. Mais especificamente, dizemos que um elemento $g \in G$ é um *elemento engeliano à direita* de G, se para cada $x \in G$, existe um inteiro positivo $n = n(g, x)$ tal que $[g, {}_n x] = 1$. Quando n pode ser escolhido independentemente de x, dizemos que g é um *elemento n-engeliano à direita* de G ou, menos precisamente, é um *elemento engeliano à direita limitado* de G. Denotamos os conjuntos de elementos engelianos à direita e de elementos engelianos à direita limitados por $\mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$, respectivamente.

Observação 3.1. Embora ainda seja um problema em aberto saber se os subconjuntos $\mathrm{R}(G)$, $\overline{\mathrm{R}}(G)$, $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ são sempre subgrupos de G, é fácil verificar que todos eles são invariantes por automorfismos de G. Em particular, tais subconjuntos são *normais*, ou seja, são invariantes por conjugação de elementos de G.

Algumas questões interessantes podem surgir quando se investiga a relação entre os elementos engelianos à esquerda e os elementos engelianos à direita. Por exemplo, ainda é um problema em aberto saber se um elemento engeliano à direita de um grupo qualquer sempre é um elemento engeliano à esquerda. Um famoso resultado nesta linha de investigação diz que o inverso de um elemento engeliano à direita é engeliano à esquerda. Apresentamos tal resultado abaixo, o qual é devido a Heineken (1960).

Proposição 3.2 (Heineken). *Em qualquer grupo G, o inverso de um elemento engeliano à direita é um elemento engeliano à esquerda e o inverso de um elemento n-engeliano à direita é um elemento $(n+1)$-engeliano à esquerda. Portanto,* $\mathrm{R}(G)^{-1} \subseteq \mathrm{L}(G)$ *e* $\overline{\mathrm{R}}(G)^{-1} \subseteq \overline{\mathrm{L}}(G)$.

Demonstração. Sejam x e g elementos de G. Então

$$[x, {}_{n+1}g] = \big[[x, g], {}_n g\big] = \big[[g^{-1}, x]^g, {}_n g\big] = \big[[g^{-1}, x], {}_n g\big]^g = [g(g^{-1})^x, {}_n g]^g = [(g^{-1})^x, {}_n g]^g.$$

Agora, suponhamos que $g^{-1} \in \mathrm{R}(G)$. Logo, para cada $h \in G$, existe um inteiro $m = m(g^{-1}, h)$ tal que $[g^{-1}, {}_m h] = 1$. Dado $x \in G$, escolha $h \in G$ tal que $h^x = g$, então

$$[(g^{-1})^x, {}_m g] = [(g^{-1})^x, {}_m h^x] = [g^{-1}, {}_m h]^x = 1.$$

Assim, se g^{-1} é um elemento engeliano à direita, para cada $x \in G$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $[(g^{-1})^x, {}_m g] = 1$, o que implica que $[x, {}_{m+1}g] = 1$, ou seja, o inverso de g^{-1} é um elemento engeliano à esquerda. A outra parte é análoga. $\square$

Por definição, é imediato ver que $G = \mathrm{L}(G)$ é equivalente a $G = \mathrm{R}(G)$. Isto nos motiva a seguinte definição:

Definição 3.3. Dizemos que um grupo G é um *grupo engeliano* quando $G = \mathrm{L}(G)$ ou, equivalentemente, quando $G = \mathrm{R}(G)$. No caso em que $[x, {}_n y]$, para quaisquer $x, y \in G$, dizemos que G é um *grupo n-engeliano.*

O principal objetivo da Teoria Engelianos é procurar condições sobre um grupo G para que os conjuntos $\mathrm{L}(G), \overline{\mathrm{L}}(G), \mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$ sejam subgrupos de G e, se possível, coincidam com o radical de Hirsch-Plotkin, o radical de Baer, o hipercentro e o ω-centro, respectivamente. Uma motivação disto reside na seguinte

Proposição 3.4. *Seja G um grupo qualquer. Então:*

(i) O conjunto $\mathrm{L}(G)$ contém o radical de Hirsch-Plotkin e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ contém o radical de Baer;

(ii) O conjunto $\mathrm{R}(G)$ contém o hipercentro e $\overline{\mathrm{R}}(G)$ contém o ω-centro.

Demonstração. (i) Sejam g pertencente ao radical de Hirsch-Plotkin de G e $x \in G$ qualquer. Então $[x, g]$ pertence ao radical de Hirsch-Plotkin e $K = \langle g, [x, g]\rangle$ é subgrupo deste. Como K é finitamente gerado, vem que K é nilpotente. Se n é a classe de nilpotência de K, então é fácil ver que $[x, {}_{n+1}g] \in \gamma_{n+1}(K) = 1$, de onde $g \in \mathrm{L}(G)$. Agora, suponhamos que g pertence ao radical de Baer de G. Então, o subgrupo $\langle g\rangle$ é subnormal em G. Consideremos $\langle g\rangle = G_0 \lhd G_1 \lhd \cdots \lhd G_n = G$ uma série subnormal de $\langle g\rangle$ em G. Para qualquer $x \in G$, vale que $[x, g] \in G_{n-1}$, $[x, {}_2 g] \in G_{n-1}$ e, seguindo desta forma, temos que $[x, {}_n g] \in G_0 = \langle g\rangle$. Assim, obtemos que $[x, {}_{n+1}g] = 1$ e $g \in \overline{\mathrm{L}}(G)$.

(ii) Seja g pertencente ao hipercentro de G. Suponhamos, por absurdo, que existe $x \in G$ tal que $[g, {}_n x] \neq 1$, para todo inteiro positivo n. Tomemos α o primeiro ordinal tal que $g \in \zeta_\alpha(G)$, o qual não pode ser um ordinal limite, pois neste caso teríamos que $\zeta_\alpha(G) = \bigcup_{\beta<\alpha} \zeta_\beta(G)$, o que implicaria que $g \in \zeta_\beta(G)$, para algum ordinal $\beta < \alpha$. Portanto, temos $g \in \zeta_\alpha(G) \setminus \zeta_{\alpha-1}(G)$. Visto que $\zeta_\alpha(G)/\zeta_{\alpha-1}(G) = \mathrm{Z}(G/\zeta_{\alpha-1}(G))$, segue que $[g, x] \in \zeta_{\alpha-1}(G)$. Pelo mesmo argumento, obtemos um ordinal $\alpha' < \alpha$ tal que $[g, x] \in \zeta_{\alpha'}(G) \setminus \zeta_{\alpha'-1}(G)$ e $[g, {}_2 x] \in \zeta_{\alpha'-1}(G)$. Como $[g, {}_n x] \neq 1$, para todo inteiro positivo n, este processo não pode terminar e vamos obter uma cadeia descendente infinita de ordinais $\cdots < \alpha'' < \alpha' < \alpha$, o que é um absurdo, visto que qualquer conjunto de números ordinais é bem ordenado. Portanto, o elemento $g \in \mathrm{R}(G)$. Finalmente, se $g \in \zeta_n(G)$ e $x \in G$, então $[g, {}_n x] = 1$ e $g \in \overline{\mathrm{R}}(G)$. □

Uma vez que um grupo localmente nilpotente coincide com seu radical de Hirsch-Plotkin e este está contido em $\mathrm{L}(G)$, todo grupo localmente nilpotente é um grupo engeliano. Porém, Golod em seu artigo [11], apresenta um exemplo de um grupo que é engeliano, mas não é localmente nilpotente. Isto permite afirmar que grupos engelianos fornecem uma generalização mais forte para grupos nilpotentes. Além disso, todo grupo nilpotente de classe n é um grupo n-engeliano.

No artigo [14], Gruenberg demonstrou que para um grupo solúvel G, os subconjuntos $\mathrm{L}(G), \overline{\mathrm{L}}(G), \mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$ são todos subgrupos de G. Para nossos interesses futuros, apresentaremos o resultado apenas para os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$.

Teorema 3.5 (Gruenberg)**.** *Seja G um grupo solúvel. Então:*

(i) O conjunto $\mathrm{L}(G)$ coincide com o radical de Hirsch-Plotkin de G;

(ii) O conjunto $\overline{\mathrm{L}}(G)$ coincide com o radical de Baer de G.

Demonstração. (i) Pela Proposição 3.4, sabemos que $\mathrm{L}(G)$ contém o radical de Hirsch-Plotkin de G. Para a inclusão contrária, dado $g \in \mathrm{L}(G)$, pela Proposição 2.9, é suficiente mostrarmos que $\langle g \rangle$ é ascendente em G. Seja d o comprimento derivado de G. Se $d \leq 1$, então G é abeliano e $\langle g \rangle \lhd G$. Seja $d > 1$ e escrevamos $A = G^{(d-1)}$. Suponhamos, por indução, que para todo grupo solúvel H com comprimento derivado menor do que d, dado $h \in \mathrm{L}(H)$, vale que $\langle h \rangle$ é ascendente em H. Como G/A tem comprimento derivado $d-1$ e $gA \in \mathrm{L}(G/A)$, por hipótese de indução, temos que $\langle gA \rangle$ é ascendente em G/A. Se

$$\langle gA \rangle = \frac{\langle g \rangle A}{A} = \frac{H_0}{A} \lhd \frac{H_1}{A} \lhd \cdots \frac{H_\alpha}{A} = \frac{G}{A}$$

é uma série ascendente de $\langle gA \rangle$ em G/A, temos que $\langle g, A \rangle = \langle g \rangle A = H_0 \lhd H_1 \lhd \cdots H_\alpha = G$ é uma série ascendente de $\langle g, A \rangle$ em G. Resta mostrarmos que $\langle g \rangle$ é ascendente em $\langle g, A \rangle$. Desde que A é abeliano, a aplicação $\varphi : A \longrightarrow A$ dada por $a^\varphi = [a, g]$ é um endomorfismo de A. Se $F \neq 1$ é um subconjunto finito de A, existe um inteiro positivo n tal que $[x, {}_n g] = 1$, para todo $x \in F$. Portanto, obtemos $F^{\varphi^n} = 0$ e isto implica que $\mathrm{C}_A(g) \neq 1$. Agora, definimos os seguintes subgrupos de A:

$$A_0 = 1, \quad \frac{A_{\alpha+1}}{A_\alpha} = \mathrm{C}_{A/A_\alpha}(gA_\alpha) \quad \text{e} \quad A_\lambda = \bigcup_{\beta<\lambda} A_\beta,$$

onde α é um ordinal e λ é um ordinal limite. De modo análogo ao que fizemos acima, vemos que se $A/A_\alpha \neq 1$, então $\mathrm{C}_{A/A_\alpha}(gA_\alpha) \neq 1$. Logo, deve existir um ordinal μ tal que $A/A_\mu = 1$, isto é, tal que $A = A_\mu$, caso contrário, a cardinalidade de A seria maior do que a cardinalidade de qualquer ordinal. Como $A_{\alpha+1}/A_\alpha = \mathrm{C}_{A/A_\alpha}(gA_\alpha)$, obtemos $[A_{\alpha+1}, g] \leq A_\alpha$ e isto implica que $\langle g, A_\alpha\rangle \lhd \langle g, A_{\alpha+1}\rangle$. Com efeito, basta mostrarmos que $x^y \in \langle g, A_\alpha\rangle$, para todo x gerador de $\langle g, A_\alpha\rangle$ e todo y em $\langle g, A_{\alpha+1}\rangle$. Notamos que dado $y \in \langle g, A_{\alpha+1}\rangle$, então $y = y_1^{\beta_1} \cdots y_r^{\beta_r}$, onde $y_i = g$ ou $y_i \in A_{\alpha+1}$, $\beta_i = \pm 1$, $i = 1, \cdots, r$ e $r \in \mathbb{N}$. Assim, obtemos

$$x^y = x^{y_1^{\beta_1} \cdots y_r^{\beta_r}} = (x^{y_1^{\beta_1}})^{y_2^{\beta_2} \cdots y_r^{\beta_r}}.$$

Então, basta verificarmos que $x^y \in \langle g, A_\alpha\rangle$ para todo gerador x de $\langle g, A_\alpha\rangle$ e $y = g^\delta$ ou $y \in A_{\alpha+1}$, com $\delta = \pm 1$. Os casos em que $x = g$ e $y = g^\delta$, $x \in A_\alpha$ e $y = g^\delta$ ou $x \in A_\alpha$ e $y \in A_{\alpha+1}$, são imediatos. Para o caso em que $x = g$ e $y \in A_{\alpha+1}$, notamos que $x^y = x[x, y]$ e, desde que $[A_{\alpha+1}, g] \leq A_\alpha$, temos que $[x, y] \in A_\alpha$, o que mostra que $x^y \in A_\alpha$, como desejado. Agora, se λ é um ordinal limite, então $\langle g, A_\lambda\rangle = \langle g, \bigcup_{\beta<\lambda} A_\beta\rangle = \bigcup_{\beta<\lambda}\langle g, A_\beta\rangle$. Logo, o subgrupo $\langle g\rangle = \langle g, A_0\rangle$ é ascendente em $\langle g, A_\mu\rangle = \langle g, A\rangle$, como queríamos.

(ii) Pela Proposição 3.4, sabemos que $\overline{\mathrm{L}}(G)$ contém o radical de Baer de G. Para a inclusão contrária, seja $g \in \overline{\mathrm{L}}(G)$ um elemento n-engeliano de G. Mantendo as notações da demonstração acima, por indução sobre d temos que $\langle g, A\rangle$ é subnormal em G. Vamos mostrar que $\langle g, A\rangle$ é nilpotente, pois disso e da Proposição 1.18, seguirá que $\langle g\rangle$ é subnormal em $\langle g, A\rangle$. Inicialmente, observamos que $[a, {}_n g] = 1$, para todo $a \in A$. Seja $c = [x_0, x_1, \cdots, x_n]$, com $x_i = g$ ou $x_i \in A$. Se $x_0 = g = x_1$, então $c = 1$. Caso $x_0 = g$ e $x_1 \in A$, então $c = [x_1^{-1}, x_0, x_2, \cdots, x_n]$, pois uma vez que A é abeliano e é normal em G, temos que $[g, x_1] = (g^{-1}x_1^{-1}g)x_1 = x_1(g^{-1}x_1^{-1}g) = [x_1^{-1}, g]$. Logo, podemos supor que $x_0 \in A$. Mas, se $x_1 = \cdots = x_n = g$ ou algum $x_i \in A$, então $c = 1$. Em qualquer caso, devemos ter que $c = 1$ e, pela Proposição 1.17, o grupo $\langle g, A\rangle$ é nilpotente. Concluímos, assim, que o subgrupo $\langle g\rangle$ é subnormal em A e, consequentemente, g está no radical de Baer de G, como desejado. $\square$

Observação 3.6. Na demonstração do item (ii) do teorema acima, obtemos o seguinte resultado: Seja G um grupo e suponhamos que A é um subgrupo abeliano de G, com $A \lhd \langle g, A\rangle$, para algum $g \in G$. Se existe um inteiro n tal que $[a,\, _n g] = 1$, para todo $a \in A$, então $\langle g, A\rangle$ é nilpotente. Mais ainda, por simplicidade, basta verificarmos que $[b,\, _n g] = 1$, para todo gerador b de A. De fato, todo elemento $a \in A$ é da forma $a = b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k}$, com $\alpha_i = \pm 1$, b_i gerador de A, $i = 1, \cdots, k$ e $k \in \mathbb{N}$. Como A é subgrupo abeliano e normal de $\langle g, A\rangle$, pela Proposição 1.11, dados $c, d \in A$. vale

$$\begin{aligned}
[cd,\, _2 g] &= \big[[cd, g], g\big] = \big[[c,g]^d[d,g], g\big] = \big[[c,g][d,g], g\big] = \big[[c,g],g\big]^{[d,g]}\big[[d,g],g\big] \\
&= \big[[c,g],g\big]\big[[d,g],g\big] = [c,\, _2 g][d,\, _2 g]
\end{aligned}$$

e, indutivamente, $[cd,\, _n g] = [c,\, _n g][d,\, _n g]$. Assim,

$$[a,\, _n g] = [b_1^{\alpha_1} \cdots b_k^{\alpha_k},\, _n g] = [b_1^{\alpha_1},\, _n g][b_2^{\alpha_2} \cdots b_k^{\alpha_k},\, _n g] = [b_2^{\alpha_2} \cdots b_k^{\alpha_k},\, _n g]$$

e, prosseguindo desta forma, obtemos $[a,\, _n g] = 1$.

Para finalizar esta seção, veremos que grupos engelianos finitos são necessariamente nilpotentes.

Proposição 3.7 (Zorn)**.** *Todo grupo finito engeliano é nilpotente.*

Demonstração. Suponhamos que isto seja falso e considere G um grupo finito engeliano de menor ordem que não é nilpotente. Então, todo subgrupo próprio de G é nilpotente e, pelo Teorema 1.25, temos que G é solúvel. Como G é engeliano, o Teorema 3.5 garante que G é igual ao seu radical de Hirsch-Plotkin, o que implica que G é nilpotente, uma vez que G é finito. □

3.2 Grupos com Condições de Finitude

Em direção a obter condições de finitude sobre um grupo G para que os conjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ sejam subgrupos de G e, se possível, coincidam com o radical de Hirsch-Plotkin e o radical de Baer, respectivamente, vamos apresentar alguns resultados técnicos.

Definição 3.8. Um grupo G é dito ser *radical* quando possui uma série ascendente cujos fatores são localmente nilpotentes.

O próximo resultado será assumido sem demonstração, pois foge ao escopo da dissertação.

Teorema 3.9. ([21], Parte I pág. 82) *Um grupo radical de automorfismos de um grupo policíclico-por-finito é policíclico.*

Nosso objetivo, com estes resultados técnicos, é obter a equivalência entre a condição max-ab e a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes. Para isso, vamos precisar dos seguintes lemas.

Lema 3.10. *Sejam H um subgrupo normal de G e $C = \mathrm{C}_G(H)$. Então G/C pode ser visto como um grupo de automorfismos de H.*

Demonstração. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \varphi : G/C & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(H) \\ gC & \longmapsto & \varphi_g : H \to H \\ & & \qquad h \mapsto h^g \end{array}$$

É fácil ver que esta aplicação está bem definida e é um homomorfismo. Além disso, se gC está no núcleo de φ, devemos ter que $(h)\varphi_g = h$, ou seja, $h^g = h$, para todo $h \in H$. Consequentemente $g \in C$ e, então, $gC = 1C$. Portanto, o núcleo é trivial e o homomorfismo é injetor, de onde segue o desejado. □

Lema 3.11. *Se H é um subgrupo normal abeliano maximal de um grupo hipercentral G, então $H = \mathrm{C}_G(H)$.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar a seguinte afirmação: se M é um subgrupo normal não trivial de um grupo hipercentral G, então $M \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$. Com efeito, consideremos a série central superior de G dada por

$$1 = \zeta_0(G) \lhd \zeta_1(G) \lhd \cdots \zeta_\beta(G) = G.$$

Seja α o menor ordinal em que $M \cap \zeta_\alpha(G) \neq 1$. Se α é um ordinal limite, então $\zeta_\alpha(G) = \bigcup_{\lambda<\alpha} \zeta_\lambda(G)$ e, consequentemente, $M \cap \zeta_\lambda(G) \neq 1$, para algum $\lambda < \alpha$, absurdo. Portanto, existe $\alpha - 1$ e $M \cap \zeta_{\alpha-1}(G) = 1$. Desde que $\zeta_\alpha(G)/\zeta_{\alpha-1}(G) \leq \mathrm{Z}(G/\zeta_{\alpha-1}(G))$, então $[\zeta_\alpha(G), G] \leq \zeta_{\alpha-1}(G)$ e, assim, $[M \cap \zeta_\alpha(G), G] \leq M \cap \zeta_{\alpha-1}(G)$; logo,

$$\frac{M \cap \zeta_\alpha(G)}{M \cap \zeta_{\alpha-1}(G)} \leq \mathrm{Z}\left(\frac{G}{M \cap \zeta_{\alpha-1}(G)}\right).$$

Como $M \cap \zeta_{\alpha-1}(G) = 1$, obtemos $1 \neq M \cap \zeta_\alpha(G) \leq \mathrm{Z}(G)$ e, então, $M \cap \mathrm{Z}(G) \neq 1$.

Claramente $H \leq \mathrm{C}_G(H)$. Suponhamos, por absurdo, que $H < \mathrm{C}_G(H)$ e denotemos $C = \mathrm{C}_G(H)$. Como $H \lhd G$, temos que $C \lhd G$ e, consequentemente, $C/H \lhd G/H$. Sendo G hipercentral, temos G/H hipercentral e, pela afirmação acima, segue que $C/H \cap \mathrm{Z}(G/H) \neq 1$. Seja zH um elemento não trivial de $C/H \cap \mathrm{Z}(G/H)$. Como $z \in C$, então $\langle z, H\rangle$ é abeliano. Além disso, como $zH \in \mathrm{Z}(G/H)$, temos que $[z, g] \in H$, para todo $g \in G$. Consequentemente, $z^g \in \langle z, H\rangle$, para todo $g \in G$ e, portanto, $\langle z, H\rangle \lhd G$. Logo, $\langle z, H\rangle$ é um subgrupo normal abeliano de G contendo H. Pela maximalidade de H, obtemos $\langle z, H\rangle = H$, ou seja, $z \in H$, o que contradiz como z foi escolhido. □

Lema 3.12. *Se G é um grupo nilpotente finitamente gerado, então G é policíclico.*

Demonstração. Suponhamos que $G = \langle X\rangle$, com X um subconjunto finito de G. Pela Proposição 1.17, sabemos que $\gamma_i(G) = \langle [x_1, \cdots, x_i]^g;\ x_1, \cdots, x_i \in X, g \in G\rangle$. Como $[x_1, \cdots, x_i]^g = [x_1, \cdots, x_i][x_1, \cdots, x_i, g]$ e $[x_1, \cdots, x_i, g] \in \gamma_{i+1}(G)$, segue que

$$\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) = \langle [x_1, \cdots, x_i]\gamma_{i+1}(G);\ x_1, \cdots, x_i \in X\rangle.$$

Desde que X é finito, obtemos que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ é finitamente gerado. Seja n a classe de nilpotência de G, então

$$G = \gamma_1(G) \geq \gamma_2(G) \geq \cdots \geq \gamma_{n+1}(G) = 1.$$

Temos que cada fator $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ é abeliano finitamente gerado. Digamos que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G) = \langle a_{i1}, \cdots, a_{ik_i}\rangle\gamma_{i+1}(G)$, para cada $i = 1, \cdots, n$, com $k_i \in \mathbb{N}$. Então,

$$\gamma_i(G) \geq \langle a_{i1}, \cdots, a_{i(k_i-1)}\rangle\gamma_{i+1}(G) \geq \cdots \geq \langle a_{i1}\rangle\gamma_{i+1}(G) \geq \gamma_{i+1}(G)$$

é uma série entre $\gamma_i(G)$ e $\gamma_{i+1}(G)$, cujos fatores são cíclicos, uma vez que $\gamma_i(G)/\gamma_{i+1}(G)$ é abeliano. Portanto, podemos refinar a série central inferior de G de modo a obter uma série cujos fatores são cíclicos e, consequentemente, o grupo G é policíclico. $\square$

Não é difícil ver que a condição max-ab é equivalente a propriedade de que todo subgrupo abeliano satisfaz max, ou seja, é finitamente gerado. Esta observação será utilizada no próximo resultado, o qual fornece uma condição para que o quociente de um grupo satisfazendo a condição max-ab também satisfaça a condição max-ab.

Proposição 3.13. *Se um grupo G satisfaz* max-*ab e N é um subgrupo normal policíclico de G, então G/N satisfaz a condição* max-*ab.*

Demonstração. Seja A/N um subgrupo abeliano de G/N e vamos mostrar que A/N é finitamente gerado. Consideremos $C = \mathrm{C}_A(N)$. Desde que $N \lhd A$, temos $C \lhd A$. Como A é policíclico-por-abeliano, segue que A é solúvel e, consequentemente, A/C é solúvel. É claro que todo grupo solúvel é um grupo radical, uma vez que, por definição, todo grupo solúvel possui uma série abeliana. Assim, pelo Lema 3.10, A/C é isomorfo a um grupo radical de automorfismos de N. Como todo grupo policíclico é policíclico-por-finito, o subgrupo N é policíclico-por-finito e, pelo Teorema 3.9, o grupo A/C é policíclico. Visto que A/N é abeliano, temos que $A' \leq N$ e, consequentemente, $C' \leq N$. Desta forma, $\gamma_3(C) = [C', C] \leq [N, C] = 1$ e, então, C é nilpotente. Seja M um subgrupo normal abeliano maximal de C. Então, M é finitamente gerado, pois G satisfaz max-ab e, pelo Lema 3.11, $M = \mathrm{C}_C(M)$. Pelo Lema 3.12, sabemos que M é policíclico e, assim, é policíclico-por-finito. Portanto, pelo Lema 3.10, C/M é isomorfo a um grupo radical de automorfismos do grupo policíclico-por-finito M. Com isto, o Teorema 3.9 garante que C/M é policíclico. Pelo Exemplo 1.10, sabemos que todo grupo policíclico é finitamente gerado; logo, A/C e C/M são finitamente gerados. Sendo M também finitamente gerado, A pode ser obtido por extensões de grupos finitamente gerados e, então, A é finitamente gerado, de onde A/N é finitamente gerado, como desejado. $\square$

Para o próximo teorema, ainda precisamos de mais um lema, o qual apresentamos abaixo.

Lema 3.14. *Se o centro de um grupo G é livre de torção, então cada fator da série central superior de G é livre de torção. Em particular, se G é um grupo nilpotente com centro livre de torção, então $G/Z(G)$ é livre de torção.*

Demonstração. Inicialmente, vamos mostrar que $\zeta_2(G)/\zeta_1(G)$ é livre de torção. Sabemos que $\mathrm{Z}(G) = \zeta_1(G)$ e, por hipótese, $\zeta_1(G)$ é livre de torção. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in \zeta_2(G) \setminus \zeta_1(G)$ satisfazendo $x^m \in \zeta_1(G)$, para algum inteiro $m > 0$. Como $\zeta_2(G)/\zeta_1(G) = \mathrm{Z}(G/\zeta_1(G))$, temos que $[g, x] \in \zeta_1(G)$, para todo $g \in G$. Pela Proposição 1.11, obtemos $[g, x]^m = [g, x^m] = 1$. Mas, $\zeta_1(G)$ é livre de torção, de onde $[g, x] = 1$, para todo $g \in G$ e, consequentemente, $x \in \zeta_1(G)$, o que é um absurdo. Claramente $\zeta_2(G)$ é livre de torção e, assim, podemos mostrar, por indução, que $\zeta_{i+1}(G)/\zeta_i(G)$ é livre de torção, para cada $i \geq 1$.

Notamos que $\zeta_3(G)/\zeta_1(G)$ também é livre de torção, visto que é extensão de $\zeta_2(G)/\zeta_1(G)$ por $\zeta_3(G)/\zeta_2(G)$, os quais são livres de torção. Indutivamente, temos que $\zeta_k(G)/\zeta_1(G)$ é livre de torção, para cada $k \geq 2$. Em particular, se G é nilpotente de classe n, então

$$1 = \zeta_0(G) \leq \zeta_1(G) \leq \cdots \leq \zeta_n(G) = G$$

e, portanto, $G/\mathrm{Z}(G) = \zeta_n(G)/\zeta_1(G)$ é livre de torção. □

Isto nos torna aptos a demonstrar o

Teorema 3.15. *Se G é um grupo localmente nilpotente satisfazendo a condição* max-*ab, então G é nilpotente finitamente gerado e, consequentemente, policíclico.*

Demonstração. É suficiente mostrarmos que existe um subgrupo M de G o qual é maximal com relação à propriedade de ser finitamente gerado, pois neste caso, se $g \in G$, então $\langle g, M\rangle$ é finitamente gerado e, pela maximalidade de M, obtemos $g \in M$, ou seja, $G = M$. Assim, G é finitamente gerado e, sendo localmente nilpotente, é nilpotente. Portanto, o Lema 3.12 garante que G deve ser policíclico.

Suponhamos, por absurdo, que G não possua um subgrupo finitamente gerado maximal. Então, existe uma cadeia ascendente infinita de subgrupos finitamente gerados de G

$$N_1 < N_2 < \cdots < N_i < \cdots.$$

Notamos que cada N_i é nilpotente, pois G é localmente nilpotente. Denotando por $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, vemos que N não pode ser finitamente gerado, pois caso contrário, a cadeia acima estacionaria.

Vamos mostrar que $\mathrm{Z}(N)$ não é trivial. Denotemos por Z_i o centro de N_i. Claramente $H = \langle Z_i;\ i = 1, 2, \cdots\rangle$ é um subgrupo abeliano de G. Como G satisfaz max-ab, o subgrupo H é finitamente gerado e, consequentemente, deve existir um inteiro i tal que $Z_j \leq \langle Z_1, \cdots, Z_i\rangle$, para todo $j \geq i$. Se $i \leq j \leq k$, então $Z_k \leq \langle Z_1, \cdots, Z_i\rangle \leq N_i \leq N_j \leq N_k$, de onde $Z_k \leq Z_j$. Portanto,

$$Z_i \geq Z_{i+1} \geq Z_{i+2} \geq \cdots .$$

Primeiramente, vamos supor que N não é livre de torção. Então, para todo j suficientemente grande, N_j não é livre de torção. Desde que N_j é nilpotente, pelo item 7 da Proposição 1.18, temos que o subgrupo de torção de N_j é normal e, pelo item 5 desta mesma proposição, este subgrupo tem interseção não trivial com Z_j. Portanto, Z_j também não é livre de torção. Seja T_j o subgrupo de torção de Z_j. Então,

$$T_j \geq T_{j+1} \geq T_{j+2} \geq \cdots > 1.$$

Contudo, sendo T_j um grupo de torção abeliano finitamente gerado, este é finito. Segue que existe um inteiro k satisfazendo $T_k = T_{k+1} = \cdots$ e, consequentemente, $\mathrm{Z}(N) \geq T_k > 1$. Agora, suponhamos que N é livre de torção. Como cada N_{p+1} é um subgrupo nilpotente livre de torção, o Lema 3.14 assegura que N_{p+1}/Z_{p+1} é livre de torção e, então, o subgrupo Z_p/Z_{p+1} é livre de torção. Visto que Z_p é subgrupo abeliano de G, com G satisfazendo max-ab, temos que Z_p e Z_p/Z_{p+1} são finitamente gerados. Portanto, Z_p/Z_{p+1} é um grupo abeliano livre de torção finitamente gerado e, consequentemente, é abeliano livre de posto finito. Além disso, se $Z_p \neq Z_{p+1}$, então Z_{p+1} tem posto menor do que o posto de Z_p. Mas, os postos dos Z_p's são inteiros positivos e não podem decrescer infinitamente. Portanto, existe um p tal que $Z_p = Z_{p+1} = \cdots$ e $\mathrm{Z}(N) \geq Z_p > 1$.

Em qualquer caso, obtemos que $\mathrm{Z}(N)$ é não trivial. Como G satisfaz max-ab, temos que $\mathrm{Z}(N)$ é finitamente gerado e, pelo Lema 3.12, também é policíclico. Então, a Proposição 3.13 garante que $N/\mathrm{Z}(N)$ também satisfaz a condição max-ab. Consideremos a cadeia $\{N_i\zeta_1(N)/\zeta_1(N);\ i = 1, 2, \cdots\}$. Omitindo qualquer termo repetido, podemos supor que

$$\frac{N_1\zeta_1(N)}{\zeta_1(N)} < \frac{N_2\zeta_1(N)}{\zeta_1(N)} < \cdots < \frac{N_i\zeta_1(N)}{\zeta_1(N)} < \cdots ,$$

ou seja, obtemos uma cadeia ascendente de subgrupos finitamente gerados de $N/\mathrm{Z}(N)$. Notemos que esta cadeia não estaciona, pois caso contrário, como $\zeta_1(N)$ satisfaz max, a cadeia

$$N_1 \cap \zeta_1(N) \leq N_2 \cap \zeta_1(N) \leq \cdots \leq N_i \cap \zeta_1(N) \leq \cdots$$

deve estacionar e, portanto, existe um inteiro positivo k tal que

$$N_k \cap \zeta_1(N) = N_{k+1} \cap \zeta_1(N) \quad \text{e} \quad N_k\zeta_1(N) = N_{k+1}\zeta_1(N),$$

de onde teríamos $N_k = N_{k+1}$, o que é um absurdo. O mesmo argumento utilizado no parágrafo acima nos assegura que $N/\mathrm{Z}(N)$ tem centro não trivial. Mas, então

$$\frac{\zeta_2(N)}{\zeta_1(N)} = \mathrm{Z}\left(\frac{N}{\zeta_1(N)}\right) \neq 1$$

implica que $\zeta_1(N) < \zeta_2(N)$. Prosseguindo indutivamente desta forma, teremos

$$\zeta_1(N) < \zeta_2(N) < \cdots < \zeta_i(N) < \zeta_{i+1}(N) < \cdots,$$

onde i é finito. Denotemos $L = \zeta_\omega(N)$, o qual é um grupo hipercentral. Seja A um subgrupo normal abeliano maximal de L. Pelo Lema 3.11, sabemos que $A = \mathrm{C}_L(A)$. Como G satisfaz max-ab, vem que A é finitamente gerado e, pelo Lema 3.10, L/A é isomorfo a um grupo de automorfismos de A. Claramente L/A é radical, pois é localmente nilpotente, e A é policíclico-por-finito, visto que é abeliano finitamente gerado. Portanto, pelo Teorema 3.9, L/A é policíclico e, então, finitamente gerado. Sendo A finitamente gerado, obtemos que L é finitamente gerado. Mas, isto implica que $L = \zeta_i(N)$, para algum i finito, o que contradiz a escolha de L. □

Corolário 3.16. *Se G é um grupo satisfazendo* max-ab, *então G satisfaz a condição maximal sobre os subgrupos nilpotentes.*

Demonstração. Seja G um grupo satisfazendo a condição max-ab e considere

$$N_1 \leq N_2 \leq \cdots \leq N_k \leq \cdots \tag{3.1}$$

uma cadeia ascendente de subgrupos nilpotentes de G. Considerando $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, facilmente vemos que N é localmente nilpotente e satisfaz a condição max-ab. Assim, pelo

Teorema 3.15, o subgrupo N é policíclico e, consequentemente, pelo Exemplo 1.10, N satisfaz a condição max. Desta forma, a cadeia (3.1) deve estacionar. Logo, o grupo G satisfaz a condição maximal sobre os subgrupos nilpotentes. □

A recíproca do corolário acima é óbvia. Portanto, a condição max-ab e a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes são equivalentes. Em particular, para grupos localmente nilpotentes, o Teorema 3.15 juntamente com seu corolário e a observação feita após o Teorema 2.13, fornecem que as condições max, max-n, max-ab e a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes são todas equivalentes.

É notável que a condição de finitude citada na introdução desta seção que estamos interessados é a condição max-ab. O principal resultado que obtemos diz que em um grupo G satisfazendo a condição max-ab, os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ coincidem com o subgrupo de Fitting de G. Para demonstrarmos tal resultado, precisamos do

Lema 3.17 (Peng). *Seja G um grupo satisfazendo a condição* max-*ab e seja $a \in G$ tal que para cada $g \in G$ exista um inteiro $n = n(g)$ com $[a^g, {}_n a] = 1$. Então $\langle a \rangle^G$ é nilpotente e satisfaz a condição* max.

Demonstração. Inicialmente, vamos fixar a notação $a^G = \{a^g; g \in G\}$ e vamos chamar um subgrupo X de G de *a-gerado* quando $X = \langle X \cap a^G \rangle$.
Afirmação: Se X e Y são subgrupos nilpotentes a-gerados de G e $X < Y$, então $\mathrm{N}_Y(X)$ contém um conjugado de a, o qual não está em X.
De fato, sendo X subgrupo de Y, o qual é nilpotente, a Proposição 1.18 fornece que X é subnormal em Y, isto é, existe uma série subnormal $X = X_0 \lhd X_1 \lhd \cdots \lhd X_s = Y$. Desde que $X \neq Y$ e Y é a-gerado, existe um conjugado de a em Y que não pertence a X. Logo, existe um inteiro i, com $0 \leq i < s$, tal que

$$X \cap a^G = X_i \cap a^G \subsetneq X_{i+1} \cap a^G.$$

Seja $y \in (X_{i+1} \cap a^G) \setminus X_i$. Como $X_i \lhd X_{i+1}$, temos que y normaliza X_i e $(X \cap a^G)^y = X \cap a^G$. Uma vez que X é a-gerado, isto implica que y normaliza X, como desejado.

Agora, o grupo G possui pelo menos um subgrupo nilpotente a-gerado, a saber, $\langle a \rangle$. Sabemos, pelo Corolário 3.16, que a condição max-ab implica a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes. Portanto, todo subgrupo nilpotente a-gerado de G está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado maximal de G. Notamos que se existe um único subgrupo maximal deste tipo, digamos M, então $M \lhd G$; além disso, $\langle a \rangle \leq M$, de onde $\langle a \rangle^G \leq M$ e, portanto, $\langle a \rangle^G$ é nilpotente e satisfaz a condição max, uma vez que M é nilpotente e a condição max-ab é fechada para subgrupos.

Vamos supor, por absurdo, que U e V sejam dois subgrupos distintos nilpotentes a-gerados maximais de G. Podemos escolher U e V de modo que

$$I = \langle U \cap V \cap a^G \rangle$$

seja maximal, pois G satisfaz a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes e cada subgrupo da forma $\langle U \cap V \cap a^G \rangle$ é nilpotente. É claro que I é nilpotente a-gerado e está contido propriamente em U e V. Seja

$$W = \langle \mathrm{N}_U(I) \cap a^G \rangle.$$

Como $I < U$ e ambos são nilpotentes a-gerados, a afirmação feita acima garante que $I < W$. Analogamente, existe $v \in (\mathrm{N}_V(I) \cap a^G) \setminus I$. Vemos que $v \notin U$, pois caso contrário, teríamos $v \in U \cap V \cap a^G \subseteq I$, o que é um absurdo.

Suponhamos que $v \in \mathrm{N}_G(W)$. Visto que W satisfaz a condição max-ab, este satisfaz a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes. Mas W é nilpotente, portanto, esta condição é equivalente a condição max. Pelo Teorema 1.9, o subgrupo W é finitamente gerado, digamos $W = \langle a^{g_1}, \cdots, a^{g_m} \rangle$. Como $v = a^h$, para algum $h \in G$, por hipótese temos que para cada $i = 1, \cdots, m$, existe um inteiro $n_i = n(g_i h^{-1})$ tal que $[a^{g_i h^{-1}}, {}_{n_i} a] = 1$, de onde $[a^{g_i}, {}_{n_i} v] = [a^{g_i h^{-1}}, {}_{n_i} a]^h = 1$. Como $\{a^{g_1}, \cdots, a^{g_m}\}$ é finito, podemos escolher um inteiro n tal que $[a^{g_i}, {}_n v] = 1$, para todo $i = 1, \cdots, m$. Seja $H = \langle v, W \rangle$. Uma vez que $v \in \mathrm{N}_G(W)$, conseguimos que $W \lhd H$. Pela Observação 3.6, temos que H/W' é nilpotente e, pelo Teorema 1.20, segue que H é nilpotente. Agora, sendo W subgrupo a-gerado e $v \in a^G$, temos que H é a-gerado. Pelo que vimos, o subgrupo H está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado maximal T de G. Desde que $v \in T \setminus U$, vemos que $T \neq U$. Além disso, o fato de que $W \leq H \leq T$ garante que $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G \subseteq U \cap T \cap a^G$, pois $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G \subseteq H \subseteq T$. Logo, $I < W \leq \langle U \cap T \cap a^G \rangle$, o que contradiz a maximalidade de I.

Por esta contradição, temos que $v \notin \mathrm{N}_G(W)$. Como $I < W$, existe $u \in (\mathrm{N}_U(I) \cap a^G) \setminus I$. Por hipótese, existe um inteiro n tal que $[v,\, _n u] = 1$, pois $u, v \in a^G$. É claro que $[v,\, _n u] \in \mathrm{N}_G(W)$. Seja k o menor inteiro tal que $[v,\, _k u] \in \mathrm{N}_G(W)$. Notamos que $k > 0$, pois $[v,\, _0 u] = v \notin \mathrm{N}_G(W)$. Definamos $z = [v,\, _{k-1} u]$, então $(u^z)^{-1} u = [z, u] = [v,\, _k u] \in \mathrm{N}_G(W)$ e $u \in W \leq \mathrm{N}_G(W)$, de onde, $u^z \in \mathrm{N}_G(W)$. Como feito no paragrafo anterior, obtemos que $K = \langle u^z, W \rangle$ é um subgrupo nilpotente a-gerado de G. Seja S um subgrupo nilpotente a-gerado maximal de G que contém K. Se $S \neq U$, então $I < W \leq \langle U \cap S \cap a^G \rangle$, o que contradiz a maximalidade de I. Portanto $S = U$ e $u^z \in U$. Por construção, sabemos que $u, v \in \mathrm{N}_G(I)$, de onde $z = [v,\, _{k-1} u] \in \mathrm{N}_G(I)$; além disso, $u \in a^G$ fornece que $u^z \in a^G$. Portanto $u^z \in (\mathrm{N}_U(I) \cap a^G) \subseteq W$. Mas u foi tomado em $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G$, assim, $u \in W$ e $u^z \in W^z$. Logo, $u^z \in U \cap W^z \cap a^G$. Agora, $I \leq W$ e $I = I^z \leq W^z$, pois z normaliza I. Assim, $I \leq \langle U \cap W^z \cap a^G \rangle$. Mas $u \notin I$ implica que $u^z \notin I$. Segue que $I < \langle U \cap W^z \cap a^G \rangle$. Se $W^z \nleq U$, então W^z está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado diferente de U, o que contradiz a maximalidade de I. Logo, $W^z \leq U$ e $(\mathrm{N}_U(I) \cap a^G)^z \subseteq \mathrm{N}_U(I) \cap a^G$, pois $z \in \mathrm{N}_G(I)$, o que mostra que $W^z \leq W$. Como $z \notin \mathrm{N}_G(W)$, então $W^z \neq W$, isto é, $W^z < W$. Com isso, obtemos uma cadeia infinita de subgrupos nilpotentes de G

$$W < W^{z^{-1}} < W^{z^{-2}} < \cdots < W^{z^{-n}} < \cdots,$$

o que contradiz o fato de que G satisfaz a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes. $\square$

Com isso, obtemos o

Teorema 3.18 (Peng)**.** *Seja G um grupo satisfazendo a condição* max-*ab. Então* $\mathrm{L}(G)$ *e* $\overline{\mathrm{L}}(G)$ *coincidem com o subgrupo de Fitting de G.*

Demonstração. Dado $a \in \mathrm{L}(G)$, para todo $g \in G$ existe $n = n(g)$ tal que $[a^g,\, _n g] = 1$. Assim, pelo Lema 3.17, o subgrupo $\langle a \rangle^G$ é nilpotente e, portanto, está contido no subgrupo de Fitting de G. Pelo Teorema 3.4, os subconjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ coincidem com o subgrupo de Fitting de G. $\square$

Finalizamos esta seção com o conceito de conjunto engeliano, que será muito utilizado no próximo capítulo.

Definição 3.19. Um subconjunto não vazio S de um grupo G é chamado um *conjunto engeliano* se para quaisquer $x, y \in S$, existe $n = n(x, y) \in \mathbb{N}$ tal que $[x, {}_n y] = 1$.

Teorema 3.20. *Seja G um grupo satisfazendo a condição* max-*ab. Então, um subconjunto normal de G é um conjunto engeliano se, e somente se, ele está contido no subgrupo de Fitting de G.*

Demonstração. Suponhamos que um subconjunto normal S de G é um conjunto engeliano e seja $a \in S$. Dado $g \in G$, temos que $a^g \in S$ e $[a^g, {}_n a] = 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Pelo Lema 3.17, o subgrupo $\langle a \rangle^G$ é nilpotente e, portanto, $a \in \langle a \rangle^G \leq \mathrm{Fit}(G)$. Logo, S está contido no subgrupo de Fitting de G. A recíproca é clara, uma vez que todo elemento de $\mathrm{Fit}(G)$ é engeliano à esquerda. $\square$

3.3 Elementos $\mathcal{L}$-Engelianos

Em 1975, Paul Erdös propôs o seguinte problema: Para um grupo G, consideremos um grafo Δ_G cujo conjunto de vértices é o conjunto G e ligamos dois elementos distintos $x, y \in G$, formando a aresta $\{x, y\}$, se eles não comutam, ou seja, se $[x, y] \neq 1$. Será que existe um limitante para a cardinalidade do número de cliques em Δ_G, se Δ_G não possui infinitos cliques? Pouco tempo depois, uma resposta positiva para o problema de Erdös foi dada por Neumann em seu artigo [19], provando que tais grupos são exatamente os grupos centro-por-finitos e o índice do centro pode ser considerado como um limitante para o número de cliques.

Motivado por este problema, Abdollahi em seu artigo *"Engel graphs associated with a group"* [1], associou a um grupo não engeliano G um grafo $\mathcal{E}_G$, o qual chamou de grafo engeliano, cujo conjunto de vértices é formado por $G \setminus \mathrm{L}(G)$ e ligou dois elementos distintos $x, y \in G \setminus \mathrm{L}(G)$, se $[x, {}_k y] \neq 1$ e $[y, {}_k x] \neq 1$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, ele estudou as propriedades teóricas destes grafos. Em particular, no estudo da conexidade destes grafos, ele introduziu um novo tipo de elemento engeliano e, para este novo tipo de elemento, obteve resultados análogos aos resultados sobre os elementos engelianos à esquerda. O objetivo desta seção é apresentar estes elementos e os resultados associados a estes.

Seja G um grupo. Denotamos por $\mathcal{L}(G)$ o conjunto de todos os elementos $g \in G$ que satisfazem a seguinte condição: para todo $a \in G$, existem $g_1, \cdots, g_k$ em $\langle g \rangle$, com $\langle g_i \rangle = \langle g \rangle$ para todo $i = 1, \cdots, k$, tais que $[g_1^a, g_2, \cdots, g_k] = 1$ ou $[g_1, g_2^a, \cdots, g_k^a] = 1$. Estes elementos são chamados de *elementos $\mathcal{L}$-engelianos* de G. Denotamos por $\mathcal{L}_k(G)$ o subconjunto de $\mathcal{L}(G)$ em que o inteiro k é o mesmo para todo $a \in G$ e consideramos $\overline{\mathcal{L}}(G)$ a união de todos os $\mathcal{L}_k(G)$, com k inteiro positivo. Estes elementos são chamados de *elementos $\mathcal{L}$-engelianos limitados* de G. Claramente temos que $\mathrm{L}(G) \subseteq \mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G) \subseteq \overline{\mathcal{L}}(G)$, confirmando que estes tipos de elementos generalizam os elementos engelianos à esquerda. Além disso, é fácil ver que os conjuntos $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$ são normais em G.

No que segue, precisaremos dos seguintes lemas técnicos.

Lema 3.21. *Sejam a e g elementos de um grupo tais que $\langle a \rangle^{\langle a,g \rangle}$ é abeliano. Se $[a, g^{t_1}, \cdots, g^{t_k}] = 1$ para alguns $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{N}$, então $[a, {}_k g^m] = 1$, onde m é qualquer inteiro positivo divisível pelo mínimo múltiplo comum de $t_1, \cdots, t_k$.*

Demonstração. Inicialmente, notamos que

$$\begin{aligned}
[a, g^m] &= a^{-1} g^{-m} a g^m \\
&= a^{-1} (g^{t_1})^{1-\frac{m}{t_1}} (g^{t_1})^{-1} a (g^{t_1}) (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} \\
&= a^{-1} (g^{t_1})^{1-\frac{m}{t_1}} a \left(a^{-1} g^{-t_1} a g^{t_1}\right) (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} \\
&= \left(a^{-1} (g^{t_1})^{1-\frac{m}{t_1}} a (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1}\right) (g^{t_1})^{1-\frac{m}{t_1}} [a, g^{t_1}] (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} \\
&= [a, (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1}] [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1}}.
\end{aligned}$$

Prosseguindo por indução e sendo $\langle a \rangle^{\langle a,g \rangle}$ abeliano, obtemos que

$$\begin{aligned}
[a, g^m] &= [a, g^{t_1}][a, g^{t_1}]^{g^{t_1}} \cdots [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-2}} [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1}} \\
&= [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1}} [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-2}} \cdots [a, g^{t_1}]^{g^{t_1}} [a, g^{t_1}] \\
&= [a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} + (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-2} + \cdots + g^{t_1} + 1}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
[a, g^m, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}] &= \left[[a, g^{t_1}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} + (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-2} + \cdots + g^{t_1} + 1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right] \\
&= [a, g^{t_1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}]^{(g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-1} + (g^{t_1})^{\frac{m}{t_1}-2} + \cdots + g^{t_1} + 1} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Desde que $\langle [a, g^m] \rangle^{\langle a,g \rangle}$ é abeliano, aplicando indução sobre k obtemos $[a,\, _k g^m] = 1$, como desejado. $\square$

Lema 3.22. *Seja A um subgrupo abeliano e normal de um grupo G. Se $a \in A$ e $g_1, \cdots, g_n \in G$, com $n \in \mathbb{N}$, então $[a^{-1}, g_1, \cdots, g_n] = [a, g_1, \cdots, g_n]^{-1}$. Em particular, temos $[a^{-1},\, _n g] = [a,\, _n g]^{-1}$, para todo $g \in G$ e todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Procederemos por indução sobre n. Para $n = 1$, como A é um subgrupo abeliano e normal de G temos

$$[a^{-1}, g_1] = a(g_1^{-1} a^{-1} g_1) = (g_1^{-1} a^{-1} g_1) a = [g_1, a] = [a, g_1]^{-1}.$$

Suponhamos que o resultado vale para $n - 1$. Sendo A um subgrupo normal de G, então $[a, g_1, \cdots, g_{n-1}] \in A$ e

$$\begin{aligned} [a^{-1}, g_1, \cdots, g_n] &= \big[[a^{-1}, g_1, \cdots, g_{n-1}], g_n\big] = \big[[a, g_1, \cdots, g_{n-1}]^{-1}, g_n\big] \\ &= \big[[a, g_1, \cdots, g_{n-1}], g_n\big]^{-1} = [a, g_1, \cdots, g_n]^{-1}, \end{aligned}$$

como desejado. $\square$

Deste modo, obtemos o

Teorema 3.23 (Abdollahi)**.** *Seja A um subgrupo normal e abeliano de um grupo G e seja $g \in G$. Então:*

(i) Se $g \in \mathcal{L}(\langle g, A \rangle)$, então $\langle g, A \rangle$ é localmente nilpotente;

(ii) Se $g \in \mathcal{L}_k(\langle g, A \rangle)$, então $\langle g, A \rangle$ é nilpotente de classe no máximo $k + 1$.

Demonstração. (i) É suficiente provarmos que $g \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$, pois neste caso, dado $H = \langle g^{t_1} a_1, \cdots, g^{t_k} a_k \rangle$ um subgrupo finitamente gerado de $\langle g, A \rangle$, vemos que H é um subgrupo de $\langle g, A_1 \rangle$, com $A_1 = \langle a_1^{g^t}, \cdots, a_k^{g^t}; t \in \mathbb{Z} \rangle$ um subgrupo normal e abeliano de $\langle g, A_1 \rangle$. De fato, sendo A um subgrupo abeliano e normal de G, é claro que $A_1 \leq A$ e, consequentemente, A_1 é abeliano. Além disso, pela forma como A_1 foi tomado, facilmente verificamos que $x^y \in A_1$, para todo x gerador de A_1 e todo $y = g^\delta$ ou $y \in A_1$, com $\delta = \pm 1$, de onde $A_1 \lhd \langle g, A_1 \rangle$. Como $g \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$ e o conjunto $\{a_1, \cdots, a_k\}$ é finito, existe $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $[a_i,\, _n g] = 1$, para todo $i = 1, \cdots, k$; logo, dado $a_i^{g^t}$ gerador de A_1 obtemos $[a_i^{g^t}, {}_n g] = [a_i, {}_n g]^{g^t} = 1$. Agora, pela Observação 3.6, o subgrupo $\langle g, A_1 \rangle$ é nilpotente e, portanto, H é nilpotente, de onde $\langle g, A \rangle$ é localmente nilpotente.

Vamos mostrar que $g \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$. Sejam $a \in A$, $k \in \mathbb{N}$ e $t_1, \cdots, t_k \in \mathbb{Z}$. Como A é um subgrupo normal e abeliano de G, podemos escrever:

$$\begin{aligned}[(g^{t_1})^a, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}] &= \left[g^{t_1}[g^{t_1}, a], g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right] = \left[[g^{t_1}, a], g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right] \\ &= \left[[a, g^{t_1}]^{-1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right] \overset{(*)}{=} [a, g^{t_1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}]^{-1},\end{aligned}$$

onde $(*)$ é garantida pelo Lema 3.22. Ainda,

$$\begin{aligned}[g^{t_1}, (g^{t_2})^a, \cdots, (g^{t_k})^a] &= [(g^{t_1})^{a^{-1}}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}]^a = \left[[g^{t_1}, a^{-1}], g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right]^a \\ &= \left[[a, g^{t_1}], g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}\right]^a = [a, g^{t_1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}].\end{aligned}$$

Destas igualdades e da hipótese que $g \in \mathcal{L}(\langle g, A \rangle)$, obtemos que para qualquer $a \in A$, existem inteiros $t_1, \cdots, t_k$, com $\langle g^{t_i} \rangle = \langle g \rangle$ para todo $i = 1, \cdots, k$, tais que

$$[a, g^{t_1}, g^{t_2}, \cdots, g^{t_k}] = 1. \tag{3.2}$$

Se g tem ordem infinita, então $t_1, \cdots, t_k \in \{1, -1\}$ e, pela Equação (3.2), para todo $a \in A$ existe um inteiro k tal que $[a, {}_k g] = 1$. Mas, sendo A normal e abeliano, para qualquer $g^t a \in \langle g, A \rangle$, temos que $[g^t a, {}_k g] = [a, {}_k g] = 1$, ou seja, $g \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$. Agora, se g tem ordem finita, considere m o produto dos inteiros positivos $t \leq |g|$ tais que $\mathrm{mdc}(t, |g|) = 1$. Uma vez que $\langle g \rangle = \langle g^{t_i} \rangle$ se, e somente se, $\mathrm{mdc}(t_i, |g|) = 1$, então é claro que $\mathrm{mmc}(t_1, \cdots, t_k)$ divide m; além disso, $\mathrm{mdc}(m, |g|) = 1$. Segue da Equação (3.2) e do lema anterior que $[a, {}_k g^m] = 1$. De modo análogo ao feito acima, temos $g^m \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$. Como $1 \lhd A \lhd \langle g, A \rangle$ é uma série normal com todos os fatores abelianos, o subgrupo $\langle g, A \rangle$ é solúvel. Assim, pelo Teorema 3.5, vem que $\mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$ é um subgrupo de $\langle g, A \rangle$. Como $\mathrm{mdc}(m, |g|) = 1$, pelo Teorema de Bezout, existem inteiros r e s satisfazendo $1 = rm + s|g|$ e, sendo $\mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$ um subgrupo, temos que $g = g^{rm+s|g|} = (g^m)^r \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$. Em qualquer caso, conseguimos que $g \in \mathrm{L}(\langle g, A \rangle)$, como desejado.

(ii) Da mesma forma como feito no item anterior, é suficiente mostrar que g é um elemento k-engeliano à esquerda de $\langle g, A \rangle$. Mais ainda, a demonstração acima pode ser empregada aqui com os devidos ajustes. $\square$

Como vimos na Seção 3.1, um dos problemas centrais no estudo dos elementos engelianos é determinar condições sobre um grupo G para que os conjuntos $\mathrm{L}(G), \overline{\mathrm{L}}(G), \mathrm{R}(G)$ e $\overline{\mathrm{R}}(G)$ sejam subgrupos de G e, se possível, coincidam com o radical de Hirsch-Plotkin, o radical de Baer, o hipercentro e o ω-centro, respectivamente. Em tal oportunidade, pudemos ver algumas condições sobre G para garantirmos que os conjuntos $\mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathrm{L}}(G)$ sejam subgrupos de G. A partir deste ponto, forneceremos os resultados análogos para os subconjuntos $\mathcal{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G)$.

Começamos apresentando o análogo do Teorema 3.5.

Teorema 3.24 (Abdollahi)**.** *Seja G um grupo solúvel. Então:*

(i) O conjunto $\mathcal{L}(G)$ coincide com o radical de Hirsch-Plotkin de G;

(ii) O conjunto $\overline{\mathcal{L}}(G)$ coincide com o radical de Baer de G.

Demonstração. (i) Seja $g \in \mathcal{L}(G)$. Pelo Teorema 3.5, é suficiente mostrarmos que $g \in \mathrm{L}(G)$. Procederemos por indução sobre d, o comprimento derivado de G. Se $d \leq 1$, então G é abeliano e, claramente, $g \in \mathrm{L}(G)$. Suponhamos que $d > 1$ e consideremos $A = G^{(d-1)}$. Como G/A tem comprimento derivado $d-1$ e $gA \in \mathcal{L}(G/A)$, segue da hipótese de indução que $gA \in \mathrm{L}(G/A)$. Além disso, sendo A subgrupo abeliano e normal de G e $g \in \mathcal{L}(\langle g, A\rangle)$, pelo Teorema 3.23, obtemos $g \in \mathrm{L}(\langle g, A\rangle)$. Com isso, dado $x \in G$, existe $n = n(x,g) \in \mathrm{N}$ satisfazendo $[xA, {}_n gA] = A$, ou melhor, $[x, {}_n g] \in A$. Mas $g \in \mathrm{L}(\langle g, A\rangle)$ e $[x, {}_n g] \in A \leq \langle g, A\rangle$, logo, existe $m = m([x, {}_n g], g)$ satisfazendo $[x, {}_{n+m} g] = \big[[x, {}_n g], {}_m g\big] = 1$. Portanto, conseguimos $g \in \mathrm{L}(G)$, como queríamos.

A demonstração do item (ii) é análoga à do item (i). □

Portanto, quando um grupo G é solúvel, o Teorema 3.5 junto com o teorema acima garantem que $\mathcal{L}(G) = \mathrm{L}(G)$ e $\overline{\mathcal{L}}(G) = \overline{\mathrm{L}}(G)$.

O próximo teorema é o análogo ao Teorema 3.18.

Teorema 3.25 (Abdollahi)**.** *Se G é um grupo satisfazendo a condição* max-*ab, então* $\mathcal{L}(G) = \mathrm{L}(G)$*. Em particular, o subconjunto $\mathcal{L}(G)$ coincide com o subgrupo de Fitting de G.*

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{L}(G)$. Para mostrar que $a \in \mathrm{L}(G)$, é suficiente mostrarmos que $\langle a \rangle^G$ é nilpotente, pois neste caso, teremos que $a \in \mathrm{L}(G)$. Para isso, adaptaremos a demonstração do Lema 3.17.

Como feito na demonstração daquele lema, se existir um único subgrupo nilpotente a-gerado nilpotente maximal, então o resultado segue. Vamos mostrar que somente esta situação ocorre. Para isso, suponhamos, por absurdo, que existam dois subgrupos U e V distintos nilpotentes a-gerados maximais de G, de modo que

$$I = \langle U \cap V \cap a^G \rangle$$

seja maximal. É claro que I é nilpotente a-gerado e está contido propriamente em U e V. Sejam

$$W_U = \langle \mathrm{N}_U(I) \cap a^G \rangle \quad \text{e} \quad W_V = \langle \mathrm{N}_V(I) \cap a^G \rangle.$$

Pela afirmação feita no início da demonstração do Lema 3.17, existem $u \in (\mathrm{N}_U(I) \cap a^G) \setminus I$ e $v \in (\mathrm{N}_V(I) \cap a^G) \setminus I$. É claro que $v \notin U$, $u \notin V$, $I < W_U$ e $I < W_V$.

Afirmamos que $v \notin \mathrm{N}_G(W_U)$ e $u \notin \mathrm{N}_G(W_V)$. Suponhamos que $v \in \mathrm{N}_G(W_U)$. Visto que W_U satisfaz a condição max-ab, o Corolário 3.16 garante que W_U também satisfaz a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes. Mas W_U é nilpotente, portanto, esta condição é equivalente a condição max. Pelo Teorema 1.9, o subgrupo W_U é finitamente gerado, digamos $W_U = \langle a^{g_1}, \cdots, a^{g_m} \rangle$. Seja $H = \langle v, W_U \rangle$. Uma vez que $v \in \mathrm{N}_G(W_U)$, conseguimos que $W_U \lhd H$ e, então, H é solúvel. Desta forma, pelo Teorema 3.24, temos que $\mathcal{L}(H) = \mathrm{L}(H)$. Mas $a \in \mathcal{L}(G)$, o qual é um subconjunto normal de G e $v \in a^G$, de onde $v \in \mathcal{L}(G)$. Portanto, $v \in \mathcal{L}(H) = \mathrm{L}(H)$. Assim, para cada $i = 1, \cdots, m$, existe $n_i = n(a^{g_i}) \in \mathbb{N}$ tal que $[a^{g_i}, {}_{n_i}v] = 1$. Sendo $\{a^{g_1}, \cdots, a^{g_m}\}$ um conjunto finito, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $[a^{g_i}, {}_n v] = 1$, para todo $i = 1, \cdots, m$. Pela Observação 3.6, temos que H/W_U' é nilpotente e, pelo Teorema 1.20, segue que H é nilpotente. Agora, sendo W_U um subgrupo a-gerado e $v \in a^G$, temos que H é a-gerado. Pelo que vimos no Lema 3.17, todo subgrupo nilpotente a-gerado de G está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado maximal de G. Portanto, o subgrupo H está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado maximal T de G. Como $v \in T \setminus U$, vemos que $T \neq U$. Além disso, o fato de que $W_U \leq H \leq T$ garante que $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G \subseteq U \cap T \cap a^G$, pois $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G \subseteq H \subseteq T$. Logo, $I < W_U \leq \langle U \cap T \cap a^G \rangle$, o que contradiz a maximalidade de I. Por esta contradição, temos que $v \notin \mathrm{N}_G(W_U)$. De modo análogo, mostramos que $u \notin \mathrm{N}_G(W_V)$.

Como $u, v \in a^G$, existem $g, h \in G$ tais que $u = a^g$ e $v = a^h$. Uma vez que $a \in \mathcal{L}(G)$, existem $a^{t_1}, a^{t_2}, \cdots, a^{t_n} \in \langle a \rangle$, com $t_i \in \mathbb{Z}$ e $\langle a^{t_i} \rangle = \langle a \rangle$, para $i = 1, 2, \cdots, n$, de modo que

$$[(a^{t_1})^{hg^{-1}}, a^{t_2}, \cdots, a^{t_n}] = 1 \quad \text{ou} \quad [a^{t_1}, (a^{t_2})^{hg^{-1}}, \cdots, (a^{t_n})^{hg^{-1}}] = 1.$$

Mas, isto é equivalente a

$$[v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_n}] = 1 \quad \text{ou} \quad [u^{t_1}, v^{t_2}, \cdots, v^{t_n}] = 1.$$

Observamos que de $\langle a^{t_i} \rangle = \langle a \rangle$, $u = a^g$ e $v = a^h$, obtemos $\langle u^{t_i} \rangle = \langle u \rangle$ e $\langle v^{t_i} \rangle = \langle v \rangle$, para $i = 1, 2, \cdots, n$.

Suponhamos que $[v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_n}] = 1$ e seja k o menor inteiro tal que $[v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_k}] \in \mathrm{N}_G(W_U)$. Notamos que $k > 1$ pois, caso contrário, teríamos $v^{t_1} \in \mathrm{N}_G(W_U)$ e, consequentemente, $\langle v \rangle = \langle v^{t_1} \rangle \leq \mathrm{N}_G(W_U)$, o que é uma contradição. Colocando $z = [v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_{k-1}}]$, temos que $z \notin \mathrm{N}_G(W_U)$ e

$$(u^{t_k})^{-z} u^{t_k} = [z, u^{t_k}] = [v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_k}] \in \mathrm{N}_G(W_U).$$

Uma vez que $u \in W_U \leq \mathrm{N}_G(W_U)$, obtemos $u^{t_k} \in \mathrm{N}_G(W_U)$ e, consequentemente, $(u^{t_k})^z \in \mathrm{N}_G(W_U)$. Como $\langle u^{t_k} \rangle = \langle u \rangle$, existe $s \in \mathbb{Z}$ tal que $u = u^{t_k s}$, de onde $u^z = (u^{t_k s})^z \in \mathrm{N}_G(W_U)$. De modo análogo ao feito acima, mostramos que $K = \langle u^z, W_U \rangle$ é um subgrupo nilpotente a-gerado de G. Seja S um subgrupo nilpotente a-gerado maximal de G que contém K. Se $S \neq U$, então $I < W_U \leq \langle U \cap S \cap a^G \rangle$, o que contradiz a maximalidade de I. Portanto, $S = U$ e $u^z \in U$. Por construção, sabemos que $v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_{k-1}} \in \mathrm{N}_G(I)$, de onde $z = [v^{t_1}, u^{t_2}, \cdots, u^{t_{k-1}}] \in \mathrm{N}_G(I)$; além disso, $u \in a^G$ fornece que $u^z \in a^G$. Logo, $u^z \in (\mathrm{N}_U(I) \cap a^G) \subseteq W$. Mas u foi tomado em $\mathrm{N}_U(I) \cap a^G$, assim, $u \in W_U$ e $u^z \in W_U^z$. Desta forma, temos $u^z \in U \cap W_U^z \cap a^G$. Agora, $I \leq W_U$ e $I = I^z \leq W_U^z$, pois z normaliza I. Assim, $I \leq \langle U \cap W_U^z \cap a^G \rangle$. Mas $u \notin I$ implica $u^z \notin I$ e, então, $I < \langle U \cap W_U^z \cap a^G \rangle$. Se $W_U^z \not\leq U$, então W_U^z está contido em um subgrupo nilpotente a-gerado Y diferente de U e, assim, $I < \langle U \cap Y \cap a^G \rangle$, o que contradiz a maximalidade de I. Logo, $W_U^z \leq U$ e $(\mathrm{N}_U(I) \cap a^G)^z \subseteq \mathrm{N}_U(I) \cap a^G$, pois $z \in \mathrm{N}_G(I)$, o que mostra que $W_U^z \leq W$. Como $z \notin \mathrm{N}_G(W)$, então $W_U^z \neq W_U$, isto é, $W_U^z < W_U$. Com isso, obtemos uma cadeia infinita de subgrupos nilpotentes de G

$$W_U < W_U^{z^{-1}} < W_U^{z^{-2}} < \cdots < W_U^{z^{-n}} < \cdots ,$$

o que contradiz o fato de que G satisfaz a condição maximal sobre subgrupos nilpotentes.

O caso em que $[u^{t_1}, v^{t_2}, \cdots, v^{t_n}] = 1$ é análogo ao feito no parágrafo acima. Portanto, conseguimos $\mathcal{L}(G) = \mathrm{L}(G)$ e, em particular, o Teorema 3.18 garante que $\mathcal{L}(G)$ coincide com o subgrupo de Fitting de G. □

Para finalizar esta seção, vejamos o conceito de conjunto $\mathcal{L}$-engeliano.

Definição 3.26. Um subconjunto S de um grupo G é chamado um *conjunto $\mathcal{L}$-engeliano* se para quaisquer $x, y \in S$, existe $n = n(x, y) \in \mathbb{N}$ tal que $[x, {}_n y] = 1$ ou $[y, {}_n x] = 1$.

Notamos que um conjunto $\mathcal{L}$-engeliano pode não ser um conjunto engeliano. Por exemplo, considere o subconjunto $\{(1\ 2), (1\ 2\ 3)\}$ do grupo simétrico S_3. Facilmente vemos que este conjunto é $\mathcal{L}$-engeliano, porém não é engeliano. A seguir, veremos o análogo do Teorema 3.20.

Teorema 3.27 (Abdollahi)**.** *Seja G um grupo satisfazendo a condição* max-*ab. Então, um subconjunto normal de G é um conjunto $\mathcal{L}$-engeliano se, e somente se, ele está contido no subgrupo de Fitting de G. Em particular, um elemento x de G está no subgrupo de Fitting de G se, e somente se, para todo $g \in G$ existe $k \in \mathbb{N}$ satisfazendo $[x^g, {}_k x] = 1$ ou $[x, {}_k x^g] = 1$.*

Demonstração. Suponhamos que um subconjunto normal S de G é um conjunto $\mathcal{L}$-engeliano e seja $a \in S$. Dado $g \in G$, temos que $a^g \in S$ e $[a^g, {}_n a] = 1$ ou $[a, {}_n a^g] = 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $a \in \mathcal{L}(G)$ e, pela demonstração do Teorema 3.25, o subgrupo $\langle a \rangle^G$ é nilpotente e, então, $a \in \langle a \rangle^G \leq \mathrm{Fit}(G)$. Logo, S está contido no subgrupo de Fitting de G. A recíproca é clara, uma vez que todo elemento de $\mathrm{Fit}(G)$ é engeliano à esquerda. □

Capítulo 4

Grupos Gerados por um Conjunto Engeliano Finito

Como vimos no Teorema 3.20, para um grupo G satisfazendo max-ab, um subconjunto normal S é engeliano se, e somente se, S está contido no subgrupo de Fitting de G e, portanto, neste caso, $\langle S\rangle$ é nilpotente sempre que S é finito. Entretanto, grupos gerados por conjuntos engelianos nem sempre são nilpotentes, como poderemos ver nos exemplos deste capítulo.

Este capítulo é destinado a encontrar condições para que um grupo gerado por um conjunto engeliano finito seja nilpotente. O primeiro resultado nesta direção garante que todo grupo nilpotente-por-abeliano gerado por um conjunto engeliano finito é nilpotente. A seguir, restringimos o problema para o caso em que o conjunto gerador engeliano possui apenas dois elementos e obtemos que todo grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) é nilpotente. Veremos, então, que este resultado pode ser estendido para o caso em que o grupo G é gerado por um conjunto engeliano finito S tal que a ordem de cada elemento de S não é divisível por 2 ou 3. Na última seção, apresentaremos um exemplo de um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 3) gerado por um conjunto engeliano com dois elementos, o qual não é nilpotente. Com exceção dos resultados da Seção 4.2, que foram obtidos por Endimioni e Traustason e podem ser encontrados no artigo [8], todos os resultados deste capítulo foram obtidos por Abdollahi, Brandl e Tortora e podem ser encontrados no artigo [5].

Iniciamos com um lema que generaliza algumas propriedades de comutadores para o caso em que o grupo é metabeliano.

Lema 4.1. *Seja G um grupo metabeliano e sejam $x, y, z \in G$. Para todo inteiro positivo n, temos:*

(i) $[x^{-1},\, _ny] = \left([x,\, _ny]^{x^{-1}}\right)^{-1}$;

(ii) $[xy,\, _nz] = [x,\, _nz][x,\, _nz, y][y,\, _nz]$.

Demonstração. Como G é metabeliano, para todo $g \in G$, a aplicação $-1+g : G' \longrightarrow G'$ dada por $u^{-1+g} = u^{-1}u^g = [u, g]$, para todo $u \in G'$, é um endomorfismo. Além disso, quaisquer dois desses endomorfismos comutam. Com efeito, dados $g, h \in G$ temos que

$$u^{(-1+g)(-1+h)} = (u^{-1}u^g)^{-1+h} = (u^{-1})^g u (u^{-1})^h (u^g)^h$$

e

$$u^{(-1+h)(-1+g)} = (u^{-1}u^h)^{-1+g} = (u^{-1})^h u (u^{-1})^g (u^h)^g.$$

Sendo G' abeliano, basta verificarmos que $u^{gh} = u^{hg}$. Mas $[g^{-1}, h^{-1}] \in G'$ implica que $u = u^{[g^{-1},h^{-1}]} = u^{ghg^{-1}h^{-1}}$ e, então, $u^{gh} = u^{hg}$, como desejado. Mais ainda, por indução $[u,\, _ng] = u^{(-1+g)^n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[x^{-1},\, _ny] &= [x^{-1}, y]^{(-1+y)^{n-1}} = \left(\left([x,y]^{x^{-1}}\right)^{-1}\right)^{(-1+y)^{n-1}} = \left([x,y]^{x^{-1}(-1+y)^{n-1}}\right)^{-1} \\
&= \left([x,y]^{(-1+y)^{n-1}x^{-1}}\right)^{-1} = \left([x,\, _ny]^{x^{-1}}\right)^{-1},
\end{aligned}$$

o que prova o item (i). Para o item (ii), temos

$$\begin{aligned}
[xy,\, _nz] &= [xy, z]^{(-1+z)^{n-1}} = ([x,z][x,z,y][y,z])^{(-1+z)^{n-1}} \\
&= [x,z]^{(-1+z)^{n-1}}[x,z,y]^{(-1+z)^{n-1}}[y,z]^{(-1+z)^{n-1}} \\
&= [x,\, _nz][x,\, _nz, y][y,\, _nz],
\end{aligned}$$

como queríamos. □

Com isto, obtemos o

Lema 4.2. *Se G é um grupo metabeliano gerado por um conjunto engeliano S, então qualquer elemento $x \in S$ é um elemento engeliano à esquerda de G. Além disso, o grupo G é localmente nilpotente.*

Demonstração. Seja $x \in S$ e considere $g \in G$ qualquer. Como $G = \langle S \rangle$, podemos escrever $g = s_1^{\alpha_1} \cdots s_t^{\alpha_t}$, com $s_i \in S, \alpha_i = \pm 1, i = 1, \cdots, t$ e $t \in \mathbb{N}$. Sendo S um conjunto engeliano, para cada $i = 1, \cdots, t$, existe $n_i = n(s_i)$ tal que $[s_i, {}_{n_i}x] = 1$. Mas G é metabeliano, então para $n = \max\{n_i; 1 \leq i \leq t\}$, o lema anterior garante que $[g, {}_n x] = 1$ e, portanto, obtemos $x \in \mathrm{L}(G)$.

Para que G seja localmente nilpotente é suficiente mostrarmos que $\langle T \rangle$ é nilpotente, para todo subconjunto finito T de S, uma vez que qualquer subgrupo finitamente gerado de G está contido em um subgrupo desta forma. Seja $T = \{x_1, \cdots, x_r\}$ um subconjunto finito de S. Então, existe $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $[x_i, {}_n x_j] = 1$, para todos $1 \leq i, j \leq n$. Pelo lema anterior, cada x_i é um elemento n-engeliano à esquerda de $\langle T \rangle$. Portanto, para cada endomorfismo $-1 + x_i$ de $\langle T \rangle'$ obtemos $(-1 + x_i)^n = 0$. Como temos r endomorfismos deste tipo, o princípio da casa dos pombos garante que se tomarmos quaisquer $(n-1)r+1$ endomorfismos destes, pelo menos um deles será escolhido pelo menos n vezes e, portanto, o produto de $(n-1)r+1$ endomorfismos destes deve ser trivial, pois como tais endomorfismos comutam deve aparecer um termo $(-1 + x_i)^n = 0$. Assim, para quaisquer elementos $y_1, y_2, \cdots, y_m$ de T, onde $m = (n-1)r + 3$, conseguimos

$$[y_1, y_2, \cdots, y_m] = [y_1, y_2]^{(-1+y_3)\cdots(-1+y_m)} = 1,$$

e, pela Proposição 1.17, o subgrupo $\langle T \rangle$ é nilpotente de classe no máximo $m - 1$, como queríamos. □

Agora, estamos em condições de demonstrar o

Teorema 4.3 (Abdollahi, Brandl, Tortora)**.** *Se G é um grupo nilpotente-por-abeliano gerado por um conjunto engeliano finito, então G é nilpotente.*

Demonstração. Seja N um subgrupo normal nilpotente de G tal que G/N é abeliano. Notamos que G/N' é metabeliano gerado por um conjunto engeliano finito. Pelo lema anterior, obtemos que G/N' é nilpotente e, pelo Teorema 1.20, o grupo G é nilpotente. □

4.1 Conjuntos Engelianos de Tamanho 2

Como mencionado na introdução do capítulo, iremos restringir o problema para o caso em que o conjunto engeliano considerado tem apenas dois elementos.

Seja $G = \langle x, y\rangle$ um grupo e suponhamos que $\{x, y\}$ é um conjunto engeliano. Então, existem inteiros positivos n e m tais que $[x,\, _n y] = 1 = [y,\, _m x]$. Neste caso, dizemos que x e y são elementos *mutuamente engelianos* e quando $n \geq m$, dizemos que x e y são *mutuamente n-engelianos*. Observamos que se $n = m = 2$, então $[y, x, x] = 1 = [x, y, y]$ e, consequentemente,

$$[x, y, x] = \big[[y, x]^{-1}, x\big] = \big([y, x, x]^{[y,x]^{-1}}\big)^{-1} = 1$$

e

$$[y, x, y] = \big[[x, y]^{-1}, y\big] = \big([x, y, y]^{[x,y]^{-1}}\big)^{-1} = 1.$$

Assim, a Proposição 1.17 fornece que G é nilpotente de classe no máximo 2.

O próximo resultado garante que G ainda é nilpotente quando $n = 2$ e $m = 3$.

Proposição 4.4. *Seja $G = \langle x, y\rangle$ um grupo qualquer satisfazendo $[x, y, y] = 1$ e $[y, x, x, x] = 1$. Então, G é nilpotente de classe no máximo 3.*

Demonstração. Pela identidade de Hall-Witt, temos

$$\big[[y, x], x^{-1}, y\big]^x \big[x, y^{-1}, [y, x]\big]^y \big[y, [y, x]^{-1}, x\big]^{[y,x]} = 1.$$

A igualdade $[x, y, y] = 1$ implica que

$$[x, y^{-1}] = [x, y]^{-1} \quad \text{e} \quad \big[y, [y, x]^{-1}\big] = \big[[y, x]^{-1}, y\big]^{-1} = \big[x, y, y\big]^{-1} = 1.$$

Assim, a identidade dada acima garante que $[y, x, x^{-1}, y] = 1$. Agora, a igualdade $[y, x, x, x] = 1$ nos fornece $[y, x, x] = [y, x, x]^{x^{-1}}$ e, portanto, $[y, x, x^{-1}] = ([y, x, x]^{x^{-1}})^{-1} = [y, x, x]^{-1}$. Logo,

$$1 = [y, x, x^{-1}, y] = \big[[y, x, x^{-1}], x\big] = \big[[y, x, x]^{-1}, x\big] = \big([y, x, x, y]^{[y,x,x]^{-1}}\big)^{-1}$$

e, então, $[y, x, x, y] = 1$. Portanto, $\big[[y, x, x], x\big] = 1 = \big[[y, x, x], y\big]$, ou seja, $[y, x, x] \in \mathrm{Z}(G)$. Assim,

$$[y, x, x]\mathrm{Z}(G) = \mathrm{Z}(G) = [x, y, y]\mathrm{Z}(G),$$

e, pela observação feita acima, segue que $G/\mathrm{Z}(G)$ é nilpotente de classe no máximo 2. Consequentemente, pela Proposição 1.18, o grupo G é nilpotente de classe no máximo 3. □

Exemplo 4.5. Consideremos o grupo diedral $D_8 = \langle x, y \mid x^4 = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle$. Notamos que

$$[x,y] = x^{-1}x^y = x^{-1}x^{-1} = x^{-2} \quad \text{e} \quad [y,x] = [x,y]^{-1} = x^2,$$

assim,

$$[y,x,x] = [x^2,x] = 1 \quad \text{e} \quad [x,y,y] = [x^{-2},y] = x^2(x^{-2})^y = x^2x^2 = x^4 = 1.$$

Pela observação feita acima, temos que D_8 é nilpotente de classe no máximo 2, mais precisamente é de classe 2, uma vez que não é abeliano.

Agora, se considerarmos o grupo diedral $D_{16} = \langle x, y \mid x^8 = y^2 = 1, x^y = x^{-1}\rangle$, então de modo análogo ao feito acima, obtemos $[x,y] = x^{-2}$ e $[y,x] = x^2$. Assim,

$$[y,x,x] = [x^2,x] = 1 \quad \text{e} \quad [x,y,y,y] = [x^{-2},y,y] = [x^4,y] = x^{-4}(x^4)^y = x^{-8} = 1.$$

Pela proposição acima, temos que D_{16} é nilpotente de classe no máximo 3.

Objetivando obter o resultado principal desta seção, precisaremos do conceito de grupos *hiper-(abeliano ou finito)* e do resultado que garante que todo grupo hiper-(abeliano ou finito) finitamente gerado e não nilpotente possui uma imagem homomórfica finita não nilpotente. Tais requisitos são apresentados a seguir e a demonstração do teorema será omitida, uma vez que foge ao escopo da dissertação.

Definição 4.6. Seja $\mathscr{P}$ uma propriedade de grupos. Dizemos que um grupo G é um *grupo hiper-$\mathscr{P}$* quando existe uma série ascendente de G com todos os fatores satisfazendo $\mathscr{P}$. Quando a propriedade $\mathscr{P}$ é inerente por subgrupos, podemos verificar que um grupo G ser hiper-$\mathscr{P}$ é equivalente a exigir que toda imagem homomórfica não trivial de G contém um subgrupo normal não trivial com a propriedade $\mathscr{P}$.

Teorema 4.7 (cf. [21], Volume 2, Teorema 10.51)**.** *Seja G um grupo hiper-(abeliano ou finito) finitamente gerado e suponha que G não é nilpotente. Então, G possui uma imagem homomórfica finita não nilpotente.*

Voltando ao nosso objetivo, seja G qualquer grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos x e y. Então $[x, {}_n y] = 1 = [y, {}_n x]$, para algum $n \in \mathbb{N}$. Suponhamos, por absurdo, que G não é nilpotente. Como G é solúvel, então ele é hiperabeliano. Portanto, pelo Teorema 4.7, o grupo G possui uma imagem homomórfica finita não nilpotente. Além disso, esta imagem homomórfica é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) e gerado por dois elementos mutuamente engelianos. Com efeito, seja $\varphi : G \longrightarrow H$ um epimorfismo em que H é um grupo finito não nilpotente. Claramente H é gerado por x^{φ} e y^{φ}, que são mutuamente engelianos. Se N é um subgrupo normal abeliano de G com G/N nilpotente de classe 2, então N^{φ} é um subgrupo normal abeliano de H com H/N^{φ} nilpotente de classe no máximo 2, pois sendo G/N é nilpotente de classe 2, então $1 = \gamma_3(G/N) = \gamma_3(G)N/N$ e, consequentemente, $\gamma_3(G) \subseteq N$, implicando que $\gamma_3(H) = (\gamma_3(G))^{\varphi} \leq N^{\varphi}$. Agora, H/N^{φ} não pode ser abeliano, pois, caso contrário, H seria nilpotente-por-abeliano gerado por um conjunto finito engeliano e, do Teorema 4.3, seguiria que H é nilpotente, uma contradição. Logo, H é abeliano-por-(nilpotente de classe 2). Assim, podemos considerar que G é finito.

Usando indução sobre a ordem do grupo G, podemos supor que G é um contraexemplo minimal, ou seja, G é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos finito de menor ordem que não é nilpotente.

Afirmamos que se A é um subgrupo normal minimal de G, então G/A é nilpotente. De fato, inicialmente, como G é solúvel, segue da Proposição 1.14 que A é um p-grupo abeliano elementar, para algum p primo. Agora, seja N um subgrupo normal abeliano de G tal que G/N é nilpotente de classe 2. Como A e N são subgrupos normais de G, pela minimalidade de A, devemos ter $A \cap N = A$ ou $A \cap N = 1$. Se $A \cap N = A$, então $A \lhd N$ e N/A é um subgrupo abeliano normal de G/A, com $\dfrac{G/A}{N/A} \simeq G/N$ nilpotente de classe 2, ou seja, G/A é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos com ordem menor do que $|G|$ e, pela minimalidade de G, o grupo G/A é nilpotente. Se $A \cap N = 1$, então AN é um produto direto de dois grupos abelianos e, portanto, abeliano. Como vimos acima, vale que $\gamma_3(G) \subseteq N$. Assim, o grupo $\dfrac{G/A}{AN/A} \simeq G/AN$ é nilpotente de classe no máximo 2. Se for de classe 2, então G/A é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos e, pela minimalidade de G, obtemos que G/A é nilpotente. Se for de classe 1, então G/AN é abeliano e, como AN/A é nilpotente, vem que G/A é nilpotente-por-abeliano gerado por dois elementos mutuamente engelianos e, pelo Teorema 4.3, temos que G/A é nilpotente.

Agora, sendo G/A nilpotente, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $1 = \gamma_m(G/A) = \gamma_m(G)A/A$ e, então, $\gamma_m(G) \subseteq A$. Assim, se B for um outro subgrupo normal minimal de G, existirá um $k \in \mathbb{N}$ tal que $\gamma_k(G) \subseteq A$ e $\gamma_k(G) \subseteq B$. Mas o fato de G não ser nilpotente implica que $\gamma_k(G) \neq 1$. Logo, $A \cap B \neq 1$ e, consequentemente, $A = B$. Portanto, existe um único subgrupo normal minimal A de G e, desta forma, todo subgrupo normal não trivial de G deve conter A.

Como G é um grupo finito não nilpotente, a Proposição 1.18 assegura que existe um subgrupo maximal H de G, o qual não é normal. Sendo G/A nilpotente, então $A \nleq H$, caso contrário, H/A seria um subgrupo maximal de G/A e, assim, $H/A \lhd G/A$, mas isto implicaria $H \lhd G$, absurdo. Pela maximalidade de H, obtemos $G = AH$. Além disso, o subgrupo $A \cap H$ é normal em G, pois claramente $A \cap H \lhd A$ e $A \cap H \lhd H$. Como $A \cap H < A$, a minimalidade de A força $A \cap H = 1$.

Já sabemos que A é um p-grupo abeliano elementar, para p um número primo. Mais ainda, o subgrupo H é nilpotente, pois $H \simeq G/A$. Seja P o p-subgrupo de Sylow de H. Então AP/A é um p-subgrupo de Sylow do grupo nilpotente G/A, de onde $AP/A \lhd G/A$ e, assim, $AP \lhd G$ é o p-subgrupo de Sylow de G. Como AP é nilpotente, pois é um p-grupo finito, temos que $[A, AP] < A$. Caso contrário, isto é, se $[A, AP] = A$, teríamos $A = [A, AP] \leq [AP, AP]$ e, portanto, $A \leq [AP, {}_nAP] = \gamma_{n+1}(AP)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, o que é um absurdo. Sendo $A, AP \lhd G$, temos que $[A, AP]$ é um subgrupo normal de G contido propriamente em A; logo, a minimalidade de A força $[A, AP] = 1$ e, em particular, obtemos $[A, P] = 1$. Portanto, $P^G = P^{AH} = P^H = P$ implicando que $P \lhd G$. Mas $A \nleq P$ e, então, pela unicidade de A vem que $P = 1$ e, consequentemente, o subgrupo H é um p'-subgrupo de Hall de G.

Definição 4.8. Dizemos que um endomorfismo $\varphi : G \longrightarrow G$ de um um grupo G age *livre de pontos fixos* sobre G quando $g^\varphi \neq g$, para todo $g \in G \setminus \{1\}$.

Para os próximos resultados, iremos considerar que o grupo $G = AH$ é um contraexemplo minimal como descrito nos parágrafos anteriores, onde A é o único subgrupo normal minimal de G e, portanto, está contido em todo subgrupo normal não trivial de G e é um p-subgrupo abeliano elementar, para algum p primo. Além disso, o subgrupo H é maximal não normal e é um p'-subgrupo de Hall de G.

Lema 4.9. *Todo elemento não trivial de* $\mathrm{Z}(H)$ *age livre de pontos fixos sobre* A *por conjugação.*

Demonstração. Seja $z \in \mathrm{Z}(H)$ um elemento não trivial. É fácil ver que $\mathrm{C}_A(z)^h = \mathrm{C}_A(z)$. Agora, dados $a \in \mathrm{C}_A(z)$ e $g = bk \in G$, com $b \in A$ e $k \in H$, como A é abeliano, conseguimos

$$a^g = k^{-1}b^{-1}abk = k^{-1}ak = a^k \in \mathrm{C}_A(z),$$

e, assim, $\mathrm{C}_A(z) \lhd G$. Notamos que $\mathrm{C}_A(z) \neq A$, pois caso $\mathrm{C}_A(z) = A$, então para todo $g = bk \in G$, com $b \in A$ e $k \in H$ teríamos, $z^g = z^{bk} = z^k = z$, de onde, $\langle z \rangle$ seria um subgrupo normal não trivial de G com $A \nleq \langle z \rangle$, o que é um absurdo. Pela minimalidade de A, segue que $\mathrm{C}_A(z) = 1$. Portanto, para todo $a \neq 1$ em A, temos $a^z \neq a$, como desejado. □

O próximo resultado mostra que H é nilpotente de classe 2 e que podemos restringir nossa atenção para o caso $n = 3$.

Lema 4.10. *Sejam* $G = AH = \langle x, y \rangle$ *um contraexemplo minimal abeliano-por-(nilpotente de classe 2) e* n *um inteiro positivo satisfazendo* $[x, {}_n y] = 1 = [y, {}_n x]$. *Então,* $A = \gamma_3(G)$ *e* $[x, y, y, y] = 1 = [y, x, x, x]$.

Demonstração. Sendo $\gamma_3(G)$ um subgrupo normal não trivial de G, então $A \leq \gamma_3(G)$. Seja $q \neq p$ um primo. Como $\gamma_3(G) \leq N$ e N é abeliano, temos que $\gamma_3(G)$ é um grupo nilpotente; logo, um q-subgrupo de Sylow Q de $\gamma_3(G)$ deve ser normal em $\gamma_3(G)$, mais ainda, deve ser característico em $\gamma_3(G)$ e, uma vez que $\gamma_3(G) \lhd G$, a Proposição 1.1 garante que $Q \lhd G$. Visto que $A \nleq Q$, então $Q = 1$. Logo, todo q-subgrupo de $\gamma_3(G)$ é trivial, com q diferente de p. Entretanto, o grupo G/A é um p'-grupo e $\gamma_3(G)/A \leq G/A$. Assim, $\gamma_3(G)/A = 1$ implica que $\gamma_3(G) = A$. Além disso, como $H \simeq G/A = G/\gamma_3(G)$, então H é nilpotente de classe 2.

Suponhamos que $[x, {}_{n-1}y] \neq 1$ e vamos mostrar que $n \leq 3$. Para isso, vamos supor, por absurdo, que $n > 3$ e escrevamos $y = ah$, onde $a \in A$ e $h \in H$. Como $[x, y, y] \in \gamma_3(G) = A$, $n - 2 \geq 2$ e $A \lhd G$, então $[x, {}_{n-2}y]$ e $[x, {}_{n-2}y, y]$ pertencem a A. Notamos que y comuta com $[x, {}_{n-2}y, y]$, pois $\big[[x, {}_{n-2}y, y], y\big] = [x, {}_n y] = 1$. Portanto, pela Proposição 1.11 e sendo A um p-grupo abeliano elementar, temos $[x, {}_{n-2}y^p] = [x, {}_{n-2}y]^p = 1$. Agora, visto que $ah =$

$h(h^{-1}ah) = hb$, com $b \in A$, é fácil ver que $y^p = a_1 h^p$, com $a_1 \in A$. Além disso, como H é um p'-grupo, então $\mathrm{mdc}(p, |H|) = 1$ e, portanto, existem inteiros α e β satisfazendo $1 = \alpha p + \beta|H|$, de onde $h = h^{\alpha p}$. Assim,

$$1 = [x,\ _{n-2}y, y^p] = [x,\ _{n-2}y, a_1 h^p] = [x,\ _{n-2}y, h^p].$$

É claro que $[x,\ _{n-2}y]$ comuta com $[x,\ _{n-2}y, h]$ e, sendo

$$1 = [x,\ _n y] = [x,\ _{n-2}y, y, y] = [x,\ _{n-2}y, ah, ah] = [x,\ _{n-2}y, h, h],$$

segue que h também comuta com $[x,\ _{n-2}y, h]$. Pela Proposição 1.11, obtemos

$$1 = [x,\ _{n-2}y, h^p]^\alpha = [x,\ _{n-2}y, h]^{p\alpha} = [x,\ _{n-2}y, h^{\alpha p}] = [x,\ _{n-2}y, h].$$

Mas, então,

$$1 \neq [x,\ _{n-2}y, y] = [x,\ _{n-2}y, ah] = [x,\ _{n-2}y, h] = 1,$$

o que é um absurdo. □

Para demonstração do resultado principal, precisamos de apenas mais um resultado técnico, a saber o

Lema 4.11. *Sejam $x = ah$ e $y = bk$, onde $a, b \in A$ e $h, k \in H$. Se $[x, y] = [h, k]$, então*

$$[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}] \quad e \quad [a, h] = 1 = [b, k],$$

com $a \neq 1$ e $b \neq 1$.

Demonstração. Temos

$$[h, k] = [x, y] = [ah, bk] = [a, bk]^h [h, bk] = ([a, k][a, b]^k)^h [h, k][h, b]^k = [a, k]^h [h, k][h, b]^k,$$

de onde

$$1 = [a, k]^h [h, k][h, b]^k [h, k]^{-1} = [a, k]^h [h, b]^{k[k,h]} = [a, k]^h [h, b]^{h^{-1}kh},$$

o que implica que $([a, k]^{-1})^h = [h, b]^{h^{-1}kh}$, ou melhor, $[k, a]^{k^{-1}} = [h, b]^{h^{-1}}$ e, portanto, $[a, k^{-1}] = [b, h^{-1}]$, seguindo a primeira parte do lema.

Como $G \neq H$, devemos ter a ou b não trivial. Sem perda de generalidade, suponhamos $a \neq 1$. Como $A = \gamma_3(G)$ e H é nilpotente de classe 2, então $[y,x,x] \in A$ e $1 \neq [y,x] \in \mathrm{Z}(H)$. Pelo Lema 4.10, sabemos que $1 = [y,x,x,x]$. Logo, $1 = [y,x,x,x] = [y,x,x,ah] = [y,x,x,h]$, de onde $[y,x,x]^{-1} = ([y,x,x]^{-1})^{x^{-1}}$, Mais ainda, notamos que $x^{[y,x]} = ([y,x,x]^{-1}x)^{x^{-1}} = [y,x,x]^{-1}x$ e, assim,

$$\begin{aligned}[x,h]^{[y,x]} &= [x^{[y,x]},h] = \big[[y,x,x]^{-1}x,h\big] = x^{-1}[y,x,x]h^{-1}[y,x,x]^{-1}xh \\ &= x^{-1}\big[[y,x,x]^{-1},h\big]h^{-1}xh = x^{-1}\big([y,x,x,h]^{[y,x,x]^{-1}}\big)^{-1}h^{-1}xh \\ &= x^{-1}h^{-1}xh = [x,h].\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 = [x,h]^{-1}[x,h]^{[y,x]} = \big[[x,h],[y,x]\big] = \big[[ah,h],[y,x]\big] = \big[[a,h]^h,[y,x]\big] = \big[[a,h],[y,x]\big]^h,$$

implica que $1 = \big[[a,h],[y,x]\big]$, ou ainda, $[a,h]^{[y,x]} = [a,h]$. Assim, $[a,h]$ é fixo pela conjugação de $[y,x]$, o qual é um elemento não trivial de $\mathrm{Z}(H)$. Pelo Lema 4.9, vem que $[a,h] = 1$. Consequentemente, devemos ter $b \neq 1$, caso contrário

$$[a,k] = ([a,k^{-1}]^k)^{-1} = ([b,h^{-1}]^k)^{-1} = 1,$$

e, então a comuta com h e k, de onde $\big[a,[h,k]\big] = 1$, com $[h,k]$ um elemento não trivial de $\mathrm{Z}(H)$. Pelo Lema 4.9 temos que $a = 1$, o que é um absurdo. De modo análogo ao feito para a, conseguimos que $[b,k] = 1$, como queríamos. □

Finalmente, temos o

Teorema 4.12 (Abdollahi, Brandl, Tortora)**.** *Seja G um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) gerado por dois elementos mutuamente engelianos x e y. Então, G é nilpotente.*

Demonstração. Seja $G = AH = \langle x,y\rangle$ um contraexemplo minimal como descrito acima. Consideremos $x = ah$ e $y = bk$, onde $a,b \in A$ e $h,k \in H$. Então,

$$[x,y] = [ah,bk] = [a,k]^h[h,k][h,b]^k = [h,k]([a,k]^{h[h,k]}[h,b]^k),$$

de onde, $[x,y] = [h,k]c$, com $[h,k] \in \mathrm{Z}(H)$ e $c \in A$. Pelo Lema 4.10, obtemos

$$[x,y,y],[y,x,x] \in A \quad \text{e} \quad [x,y,y,y] = 1 = [y,x,x,x].$$

Logo, y comuta com $[x,y,y]$ e x comuta com $[y,x,x]$, assim, pela Proposição 1.11 temos

$$[x,y,y^p]=[x,y,y]^p=1,$$

$$[x,y,x^p]=\big[[y,x]^{-1},x^p\big]=(\big[[y,x],x^p\big]^{[y,x]^{-1}})^{-1}=\big(([y,x,x]^p)^{[y,x]^{-1}}\big)^{-1}=1.$$

Se $\langle x^p,y^p\rangle\cap A\neq 1$, então $[x,y]$ comuta com um elemento não trivial de A, digamos $d\in A$, ou seja,

$$1=\big[[x,y],d\big]=\big[[h,k]c,d\big]=\big[[h,k],d\big].$$

Pelo Lema 4.9, obtemos $[h,k]=1$ e, então, $[x,y]\in A$. Logo, $G'\leq A$ e sendo A abeliano, então G é metabeliano. Mais ainda, como G é gerado por um conjunto engeliano finito, segue do Lema 4.2 que G é nilpotente.

Assim, $\langle x^p,y^p\rangle\cap A=1$ e podemos supor que $H=\langle x^p,y^p\rangle$, pois $G=AH=A\langle h,k\rangle$, uma vez que $x=ah$ e $y=bk$ pertencem a $A\langle h,k\rangle$, e

$$\langle h,k\rangle\simeq\frac{\langle h,k\rangle A}{A}=\frac{\langle x^p,y^p\rangle A}{A}\simeq\langle x^p,y^p\rangle.$$

Como $[x,y]$ comuta com x^p e y^p, então

$$1=\big[[x,y],x^p\big]=\big[[h,k]c,x^p\big]=\big[[h,k],x^p\big]^c[c,x^p],$$

de onde $([c,x^p]^{-1})^{c^{-1}}=\big[[h,k],x^p\big]\in A\cap H=1$, o que implica $[c,x^p]=1$. De modo análogo, obtemos $[c,y^p]=1$ e, consequentemente, $c\in \mathrm{C}_A(H)$. Em particular, $c\in\mathrm{C}_A([h,k])$ com $1\neq[h,k]\in \mathrm{Z}(H)$. Mas pelo Lema 4.9, temos $\mathrm{C}_A([h,k])=1$ e, portanto, $c=1$. Então $1\neq[x,y]=[h,k]\in\mathrm{Z}(H)$ e, pelo lema anterior, temos

$$[a,k^{-1}]=[b,h^{-1}]\quad\text{e}\quad[a,h]=1,\tag{4.1}$$

com $a\neq 1$.

Pela identidade de Hall-Witt,

$$[a,k^{-1},h]^k[k,h^{-1},a]^h[h,a^{-1},k]^a=1.$$

Por (4.1), temos $[h,a^{-1},k]^a=1$, logo $[a,k^{-1},h]^k=([k,h^{-1},a]^h)^{-1}$. Mas $[k,h^{-1},a]$ comuta com h. De fato, de (4.1) temos que $a^{h^{-1}}=a$ e como $[h,k]\in\mathrm{Z}(H)$, então $[k,h^{-1}]^{h^{-1}}=[k,h^{-1}]$ e, assim

$$h[k,h^{-1},a]=[k,h^{-1},a]^{h^{-1}}h=\big[[k,h^{-1}]^{h^{-1}},a^{h^{-1}}\big]h=[k,h^{-1},a]h.$$

Com isso, $[a,k^{-1},h]^k = [k,h^{-1},a]^{-1}$. De (4.1) temos $\big[[a,k^{-1}],h\big] = \big[[b,h^{-1}],h\big]$ e, assim, $\big[[b,h^{-1}],h\big]$ comuta com $h^{k^{-1}}$. Então $[b,h,h]^{h^{-1}} = [b,h^{-1},h]^{-1}$ comuta com $h^{k^{-1}}$ e, em particular, $[b,h,h]$ comuta com $h^{k^{-1}h} = h^{k^{-1}}$. Portanto, $[b,h,h] \in \mathrm{C}_A(h^{k^{-1}})$.

Sejam $B = \mathrm{C}_A(h^{k^{-1}})$ e $K = \langle h, h^{k^{-1}}\rangle A$. Então $B \lhd K$. Seja q a ordem de h. Como $[b,h,h] \in B$, então as classes $[b,h]B$ e bB comutam, portanto $B = [b,h^q]B = [b,h]^q B$, ou seja, $[b,h]^q \in B$. Contudo, a ordem de $[b,h]$ é p, a qual é coprimo com q, logo, existem inteiros α e β tais que $1 = \alpha p + \beta q$, de onde $[b,h] = [b,h]^{\alpha p+\beta q} = ([b,h]^q)^\beta \in B$. Mais ainda, de (4.1) temos $[a,k^{-1}] = [b,h^{-1}] \in B$. Assim, $[a,k^{-1},h^{k^{-1}}] = 1$, ou ainda,

$$1 = [a,h^{-1},h^{k^{-1}}] = \big[[a,h^{-1}]^k,h\big]^{k^{-1}} = [k,a,h]^{k^{-1}},$$

de onde $[k,a,h] = 1$.

Pela identidade de Hall-Witt,

$$[a,k,h]^{k^{-1}}[k^{-1},h^{-1},a]^h[h,a^{-1},k^{-1}]^a = 1.$$

Mas $[a,k,h] = \big[[k,a]^{-1},h\big] = ([k,a,h]^{[a,k]})^{-1} = 1$ e $[h,a^{-1},k^{-1}] = 1$, pois $[a,h] = 1$. Segue que $1 = [k^{-1},h^{-1},a]^h = \big[[k^{-1},h^{-1}]^h,a^h\big] = [h,k^{-1},a]$, o que é um absurdo, pois $1 \neq [h,k^{-1}] \in \mathrm{Z}(H)$ e $a \neq 1$, contrariando o Lema 4.9. □

Como consequência do Teorema 4.12, apresentamos um critério em termos dos subgrupos de Sylow para que um grupo solúvel finito seja nilpotente.

Corolário 4.13. *Seja $G = \langle x, y\rangle$ um grupo solúvel finito com x e y mutuamente engelianos. Se todos os subgrupos de Sylow de G são nilpotentes de classe menor do que ou igual a 2, então G é nilpotente.*

Demonstração. Seja G um contraexemplo de menor ordem possível e seja N um subgrupo normal minimal de G. Então, pela minimalidade de G, obtemos G/N nilpotente. Além disso, todo subgrupo de Sylow de G/N é nilpotente de classe menor do que ou igual a 2, de onde G/N é nilpotente de classe menor do que ou igual a 2. Por outro lado, segue da Proposição 1.14 que N é abeliano, uma vez que G é solúvel. Portanto, o grupo G é abeliano-por-(nilpotente de classe 2) e, pelo Teorema 4.12, obtemos que G é nilpotente, o que é um absurdo. □

4.2 Grupos com todos os subgrupos 2-gerados nilpotentes

O resultado do Teorema 4.12 pode ser estendido para o caso em que o grupo G é gerado por um conjunto engeliano finito S tal que a ordem de cada elemento de S não é divisível por 2 ou 3. Para isso, precisamos estudar os grupos finitamente gerados em que todo subgrupo gerado por um par de geradores de G é nilpotente. Isto é feito por Endimioni e Traustason no artigo [8].

Dado um grupo G gerado por um conjunto X, dizemos que (G, X) é uma *apresentação nilpotente aos pares* de G se qualquer par de elementos $x, y \in X$ gera um subgrupo nilpotente. Vale observar que, neste caso, o conjunto X é engeliano.

Em particular, estaremos interessados no caso em que o número de geradores é três. Assim, suponhamos que $G = \langle a, b, c\rangle$ com $\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle$ e $\langle b, c\rangle$ nilpotentes de classes r, s e t, respectivamente. Neste caso, dizemos que a apresentação é do *tipo* (r, s, t). Dizemos que um grupo G é do *tipo* (r, s, t) se ele tem um apresentação do tipo (r, s, t).

Queremos encontrar condições para que um grupo $G = \langle a, b, c\rangle$ do tipo (r, s, t) que é abeliano-por-(nilpotente de classe 2) seja nilpotente. Suponhamos que exista um grupo nestas condições que não é nilpotente. Sendo G um grupo solúvel, então G é hiperabeliano e, pelo Teorema 4.7, G possui uma imagem homomórfica finita não nilpotente. Como na seção anterior, podemos verificar que esta imagem homomórfica está nas mesmas condições do grupo G. Portanto, podemos restringirmos ao caso finito e trabalharmos com os contraexemplos minimais.

Seja $G = \langle a, b, c\rangle$ um grupo do tipo (r, s, t) que é abeliano-por-(nilpotente de classe 2) um contraexemplo minimal, no sentido de que G não é nilpotente, mas qualquer quociente próprio é nilpotente e qualquer subgrupo próprio do tipo (r_1, s_1, t_1) é nilpotente, onde $r_1 \leq r, s_1 \leq s$ e $t_1 \leq t$. Suponhamos que os geradores a, b e c são $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$-elementos, onde cada p_i é um número primo. Desde que os subgrupos $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ e $\langle c\rangle$ são abelianos finitos, segue do Teorema da Decomposição Primária que eles são produtos diretos de suas componentes primárias. Como a, b e c são $\{p_1, p_2, \cdots, p_n\}$-elementos, podemos considerar que

$$\langle a\rangle = A_1A_2\cdots A_n, \quad \langle b\rangle = B_1B_2\cdots B_n \quad \text{e} \quad \langle c\rangle = C_1C_2\cdots C_n,$$

onde A_i, B_i e C_i são p_i-grupos ou triviais. Sejam

$$a = a_1a_2\cdots a_n, \quad b = b_1b_2\cdots b_n \quad \text{e} \quad c = c_1c_2\cdots c_n$$

as fatorações únicas de a, b e c nos grupos $\langle a\rangle$, $\langle b\rangle$ e $\langle c\rangle$, respectivamente, onde a_i, b_i e c_i são p_i-elementos. Se $i \neq j$, então $\langle a_i, b_j\rangle = \langle a^l, b^m\rangle \leq \langle a, b\rangle$, para alguns $l, m \in \mathbb{Z}$, de onde $\langle a_i, b_j\rangle$ é nilpotente e, portanto, é o produto direto de seus subgrupos de Sylow. Se P é o p_i-subgrupo de Sylow de $\langle a_i, b_j\rangle$ e Q é o p_j-subgrupo de Sylow de $\langle a_i, b_j\rangle$, então $a_i \in P$ e $b_j \in Q$. Como $P, Q \lhd \langle a_i, b_j\rangle$ e $P \cap Q = 1$, então $[a_i, b_j] = 1$, ou seja, a_i e b_j comutam. De modo análogo, obtemos que a_i e b_i comutam com c_j quando $i \neq j$.

Para cada $i = 1, 2, \cdots, n$, definimos

$$G_i = \langle a_i, b_i, c_i\rangle.$$

Pelo parágrafo anterior, temos que $a_i^x, b_i^x, c_i^x \in G_i$, para todo $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}, c, c^{-1}\}$. Portanto, cada G_i é um subgrupo normal de G. Com isso, temos que

$$G = G_1G_2\cdots G_n,$$

visto que $a, b, c \in G_1G_2\cdots G_n$. Logo,

$$\gamma_m(G) = \gamma_m(G_1)\gamma_m(G_2)\cdots\gamma_m(G_n),$$

para todo inteiro $m \geq 1$. Como G não é nilpotente, devemos ter que algum G_i não é nilpotente. Pela minimalidade de G, temos que $G = G_i$. Portanto, G é gerado por p-elementos, para algum número primo p.

Seja N um subgrupo normal minimal de G. Pela minimalidade de G, o grupo G/N é nilpotente. De modo análogo ao feito na seção anterior, o subgrupo N é o único subgrupo normal minimal de G. Consequentemente, todo subgrupo normal não trivial de G deve conter N. Como G/N é um subgrupo nilpotente gerado por p-elementos, então G/N é um p-grupo. Com efeito, vamos verificar que todo grupo finito H nilpotente gerado por p-elementos é um

p-grupo. Sendo H nilpotente, existe um único p-subgrupo de Sylow, o qual deve conter todos os geradores de H, uma vez que estes são p-elementos. Portanto, H é igual ao seu p-subgrupo de Sylow e, consequentemente, é um p-grupo, como queríamos.

Visto que G é solúvel, a Proposição 1.14 garante que N é um q-grupo abeliano elementar, para algum número primo q. Devemos ter $q \neq p$, caso contrário, G seria um p-grupo, e, consequentemente, G seria nilpotente, o que seria um absurdo.

Se P é um p-subgrupo de Sylow de G, então $G = PN$. Com efeito, consideremos o homomorfismo canônico $\pi : G \longrightarrow G/N$. Claramente $|G/N|$ divide $|G|$ e $|P| = |P^\pi|$, pois $P \cap N = 1$. Sendo P um p-subgrupo de Sylow de G, segue que P^π é p-subgrupo de Sylow de G/N e, como G/N é um p-grupo, então $P^\pi = G/N$. Consequentemente, $|P| = |G/N|$, de onde obtemos o desejado.

Notemos que $N \leq \mathrm{C}_G(P \cap \mathrm{C}_G(N))$ e $P \leq \mathrm{N}_G(P \cap \mathrm{C}_G(N))$. Portanto, $P \cap \mathrm{C}_G(N) \lhd G$. Como N é o único subgrupo normal minimal de G e $N \nleq P \cap \mathrm{C}_G(N)$, obtemos $P \cap \mathrm{C}_G(N) = 1$. Isto implica que P age fielmente sobre N por conjugação, isto é, a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : P &\longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \\ x &\longmapsto \quad \gamma_x : \quad \begin{aligned} N &\to N \\ n &\mapsto n^x \end{aligned} \end{aligned}$$

é um homomorfismo injetor. De fato, é fácil ver que é um homomorfismo. Se x pertence ao núcleo de γ, então γ_x é igual a aplicação identidade de N, ou seja, $n^x = n$, para todo $n \in N$ e, consequentemente, $x \in P \cap \mathrm{C}_G(N) = 1$, de onde o núcleo de γ é trivial e, desta forma, γ é injetora. Além disso, pela Proposição 1.2, sabemos que $\mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}(N; \mathbb{Z}_q)$. Logo, $P \simeq P^\gamma$ pode ser visto como um subgrupo de $\mathrm{GL}(N; \mathbb{Z}_q)$.

Afirmamos que $\mathrm{N}_G(P) = P$. Com efeito, claramente $P \leq \mathrm{N}_G(P)$. Suponhamos que $P \nleq \mathrm{N}_G(P)$. Logo, existe $g = xy \in NP = G$, com $x \neq 1$, que normaliza P, ou seja, existe $x \in N$ que normaliza P. Então, para qualquer $y \in P$, temos $[y, x] \in P \cap N = 1$, ou seja, x centraliza P. Assim, $x \in \mathrm{Z}(G)$ e, consequentemente, $\langle x \rangle \lhd G$. Como $1 \neq \langle x \rangle \leq N$ e N é o único subgrupo normal minimal de G, temos que $\langle x \rangle = N$. Mas neste caso, teríamos $N \leq \mathrm{Z}(G)$ e G/N nilpotente. Pela Proposição 1.17, teríamos que G é nilpotente, o que é um absurdo. Disto segue o desejado.

Pelo Segundo Teorema de Sylow, existem $|G : \mathrm{N}_G(P)| = |G : P| = |N|$ p-subgrupos de Sylow de G, a saber, $\{P^u;\ u \in N\}$. Além disso, se N visto como $\mathbb{Z}_q$-espaço vetorial tem dimensão n, então $|N| = q^n$ e, pelo Terceiro Teorema de Sylow, $q^n \equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

Lema 4.14. *Se $f \in P \cap P^x$, com $x \in N$, então $f^x = f$.*

Demonstração. Seja $e \in P$ tal que $f = e^x$. Como $e, e^x \in P$, temos que $e^{-1}e^x = [e, x] \in P \cap N = 1$, de onde, $f = e^x = e$. Assim, $f^x = e^x = f$. □

Lema 4.15. *Suponhamos que $G = \langle a, b, c\rangle$, onde a, b e c são p-elementos, como descrito acima. Então, existem elementos $\mathbb{Z}_q$-linearmente independentes $x, y \in N$ tais que*

$$a^x = a, \quad b^y = b \quad e \quad c^{xy} = c.$$

Demonstração. Como $\langle a, c\rangle$ é nilpotente gerado por p-elementos, segue que $\langle a, c\rangle$ é um p-grupo. Assim, existe um p-subgrupo de Sylow P de G que contém a e c. De modo análogo, existe um p-subgrupo de Sylow Q de G que contém a e b, ou seja, existe $x \in N$ tal que $a, b \in P^x$. Como $a \in P \cap P^x$, segue do lema anterior que $a^x = a$. Seja $d \in P$ com $b = d^x$, logo

$$G = \langle a, d^x, c\rangle = \langle a^x, d^x, c\rangle.$$

Seja $y \in N$ satisfazendo $\langle d, c^{x^{-1}}\rangle = \langle b, c\rangle^{x^{-1}} \leq P^y$. Então, $d \in P \cap P^y$ e, pelo lema anterior, d comuta com y e, consequentemente, $b = d^x$ também comuta com y, isto é, $b^y = b$. Como $c^{x^{-1}} \in P^{x^{-1}} \cap P^y$, segue que $c \in P \cap P^{xy}$ e, pelo lema anterior, $c^{xy} = c$. Portanto,

$$G = \langle a, d^x, c\rangle = \langle a^x, d^x, c\rangle = \langle a, d^{xy}, c^{xy}\rangle.$$

Finalmente, devemos ter $\{x, y\}$ linearmente independente, pois caso contrário, existiria $\overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_q$ tal que $y = x^\alpha$ e, consequentemente, a comutaria com y e $G = \langle a^{xy}, d^{xy}, c^{xy}\rangle = \langle a, d, c\rangle^{xy} \leq P^{xy}$ seria nilpotente, o que é um absurdo. □

Observemos que na demonstração deste lema obtemos $G = \langle a, d^x, c\rangle$, onde $a, d, c \in P$ e $x \in N$. Uma vez que $P \simeq G/N$ e $G/N = \langle a, d^x, c\rangle N/N = \langle a, d, c\rangle N/N$, segue que $P = \langle a, d, c\rangle$.

Lema 4.16. *Se G é um contraexemplo minimal que é abeliano-por-(nilpotente de classe c), então $\gamma_{c+1}(G) = N$. Em particular, P é nilpotente de classe no máximo c.*

Demonstração. Se A é um subgrupo normal abeliano de G tal que G/A é nilpotente de classe c, então $1 = \gamma_{c+1}(G/A) = \gamma_{c+1}(G)A/A$ e, consequentemente, $\gamma_{c+1}(G) \leq A$ é abeliano. Seja R o p-subgrupo de Sylow de $\gamma_{c+1}(G)$. Notamos que R é um subgrupo característico de $\gamma_{c+1}(G)$ e $\gamma_{c+1}(G) \lhd G$; logo, a Proposição 1.1 implica que $R \lhd G$. Como N é o único subgrupo normal minimal de G e $N \nleq R$, obtemos $R = 1$. Portanto, $\gamma_{c+1}(G) \leq N$. Como G não é nilpotente, temos que $\gamma_{c+1}(G) \neq 1$ e, então, a minimalidade de N força $\gamma_{c+1}(G) = N$. Em particular, $\gamma_{c+1}(P) \leq \gamma_{c+1}(G) = N$, de onde $\gamma_{c+1}(P) \leq N \cap P = 1$, ou seja, P é nilpotente de classe no máximo c. □

Já vimos que se n é a dimensão de N como $\mathbb{Z}_q$-espaço vetorial, então $q^n \equiv 1(\text{mod } p)$. Seja r a ordem de $\overline{q}$ em $\mathbb{Z}_p^*$, assim, r divide n. Consideremos $F = GF(q^r)$ o corpo de Galois de ordem q^r. Desde que

$$N \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_q}_{n \text{ vezes}} \quad \text{e} \quad F \simeq \underbrace{\mathbb{Z}_q \oplus \mathbb{Z}_q \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_q}_{r \text{ vezes}},$$

podemos ver N como um espaço vetorial sobre F com dimensão n/r. Suponhamos que F tem base $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ visto como $\mathbb{Z}_q$-espaço vetorial, com $e_1 = 1$. Escrevendo $m = n/r$, temos

$$N \simeq \underbrace{F \oplus F \oplus \cdots \oplus F}_{m \text{ vezes}}.$$

Para cada $i = 1, \cdots, m$, coloquemos $v_i = (\delta_{1i}, \cdots, \delta_{mi})$, onde $\delta_{ii} = 1$ e $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$. Para $0 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq r$, coloquemos $u_{ir+j} = e_j v_{i+1}$. Temos que $u_1, u_2, \cdots, u_n$ formam uma base para N como $\mathbb{Z}_q$-espaço vetorial. Com efeito, basta mostrarmos que o conjunto $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ é linearmente independente. Suponhamos que existam escalares f_{ir+j} em $\mathbb{Z}_q$ satisfazendo

$$\sum_{i=0}^{m-1} \sum_{j=1}^{r} f_{ir+j} u_{ir+j} = 0.$$

Então,

$$\sum_{i=0}^{m-1} \left(\sum_{j=1}^{r} f_{ir+j} e_j \right) v_{i+1} = 0,$$

e, sendo $\{v_1, \cdots, v_m\}$ uma base para N como F-espaço vetorial, obtemos

$$\sum_{j=1}^{r} f_{ir+j} e_j = 0, \quad \text{para todo} \quad i = 0, 1, \cdots, m-1.$$

Mas $\{e_1, e_2, \cdots, e_r\}$ é uma base de N visto como $\mathbb{Z}_q$-espaço vetorial, de onde $f_{ir+j} = 0$, para todos $0 \leq i \leq m-1$ e $1 \leq j \leq r$, como desejado.

Além disso, $v_1 = u_1, v_2 = u_{r+1}, \cdots, v_m = u_{(m-1)r+1}$ formam uma base de N como F-espaço vetorial. Desta forma, podemos ver $\mathrm{GL}_{n/r}(F)$ imerso em $\mathrm{GL}_n(q)$. Seja D o subgrupo diagonal de $\mathrm{GL}_{n/r}(F)$ com respeito à base $B = \{u_1, u_{r+1}, \cdots, u_{(m-1)r+1}\}$. Notamos que $D \simeq (F^*)^m$ e, portanto, D é nilpotente. Agora, cada elemento σ em S_m age de modo natural sobre N por

$$f_1 v_1 + \cdots + f_m v_m \longmapsto f_1 v_{(1)\sigma} + \cdots + f_m v_{(m)\sigma}.$$

Assim, para cada $\sigma \in S_m$ fixado, a aplicação

$$\begin{aligned} T_\sigma : N &\longrightarrow N \\ v_i &\longmapsto v_{(i)\sigma} \end{aligned}$$

define um operador F-linear de N invertível e, portanto, $[T_\sigma]_B \in \mathrm{GL}_{n/r}(F)$. Consequentemente, podemos ver S_m como um subgrupo de $\mathrm{GL}_{n/r}(F)$.

Sejam $D(p)$ o p-subgrupo de Sylow de D e $S_m(p)$ um p-subgrupo de Sylow de S_m. Consideremos o homomorfismo

$$\begin{array}{rcccl} \alpha : S_m(p) & \longrightarrow & \mathrm{Aut}(D(p)) & & \\ \sigma & \longmapsto & \alpha_\sigma : & D(p) \to & D(p) \\ & & & M \mapsto & [T_\sigma]_B^{-1} M [T_\sigma]_B \end{array}$$

Logo, podemos considerar o produto semidireto $S_m(p) \ltimes_\alpha D(p)$, que pode ser visto como subgrupo de $\mathrm{GL}_{n/r}(F)$ e, consequentemente, como subgrupo de $\mathrm{GL}_n(q)$. O próximo resultado garante que para $p > 2$, este subgrupo é um p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{GL}_n(q)$.

Lema 4.17. *Se $p > 2$ é um número primo, então o produto semidireto $S_m(p) \ltimes_\alpha D(p)$ é um p-subgrupo de Sylow de $\mathrm{GL}_n(q)$.*

Demonstração. Utilizando argumentos combinatórios, obtemos

$$|\mathrm{GL}_n(q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \cdots (q^n - q^{n-1}).$$

(Veja [20], pág. 74). Como r é a ordem de $\overline{q}$ em $\mathbb{Z}_p^*$ e $q^n \equiv 1(\text{mod } p)$, então p divide $(q^n - q^i)$ se, e somente se, r divide i. Logo, a maior potência de p que divide $|\text{GL}_n(q)|$, também divide $(q^n - 1)(q^n - q^r) \cdots (q^n - q^{(m-1)r})$. Agora,

$$
\begin{aligned}
&(q^n - 1)(q^n - q^r) \cdots (q^n - q^{(m-1)r}) = \\
&(q^n - 1)q^r(q^{n-1} - 1) \cdots q^{(m-1)r}(q^{n-(m-1)r} - 1) = \\
&(q^r)^{1+\cdots+(m-1)}(q^n - 1)(q^{n-r} - 1) \cdots (q^{n-(m-1)r} - 1) = \\
&(q^r)^{\frac{m(m-1)}{2}}(q^{mr} - 1)(q^{(m-1)r} - 1) \cdots (q^r - 1) = \\
&(q^r)^{\frac{m(m-1)}{2}}(q^r - 1)(q^{(m-1)r} + \cdots + q^r + 1) \cdots (q^r - 1)(q^r + 1)(q^r - 1) = \\
&(q^r)^{\frac{m(m-1)}{2}}(q^r - 1)^m(q^r + 1)(q^{2r} + q^r + 1) \cdots (q^{(m-1)r} + \cdots + q^r + 1).
\end{aligned}
$$

Claramente, a maior potência de p que divide $(q^r - 1)^m$ é igual a $|D(p)|$. Assim, é suficiente mostrarmos que

$$(q^r + 1)(q^{2r} + q^r + 1) \cdots (q^{(m-1)r} + \cdots + q^r + 1)$$

e $m!$ possuem a mesma maior potência de p como divisor. Como $q^r \equiv 1(\text{mod } p)$, o número p divide $q^{(s-1)r} + \cdots + q^r + 1$ se, e somente se, p divide s. Mostraremos que $q^{(s-1)r} + \cdots + q^r + 1$ e s possuem a mesma maior potência de p como divisor. Suponhamos que $q^r = 1 + px$ e $s = p^i y$, com $\text{mdc}(p, y) = 1$. É suficiente mostrarmos que

$$\sum_{k=0}^{p^i y - 1} (1 + px)^k \equiv p^i y \ (\text{mod } p^{i+1}).$$

Vemos que

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{p^i y-1} (1 + px)^k &= 1 + (1 + px) + (1 + px)^2 + \cdots + (1 + px)^{p^i y - 1} \\
&= 1 + \sum_{j=0}^{1} \binom{1}{j} (px)^j + \sum_{j=0}^{2} \binom{1}{j} (px)^j + \cdots + \sum_{j=0}^{1} \binom{p^i y - 1}{j} (px)^j \\
&= \sum_{j=0}^{p^i y-1} \binom{j}{0} (px)^0 + \sum_{j=1}^{p^i y-1} \binom{j}{1} (px)^1 + \cdots + \sum_{j=p^i y-1}^{p^i y-1} \binom{j}{p^i y - 1} (px)^{p^i y - 1} \\
&\overset{(*)}{=} p^i y + \binom{p^i y}{2} (px) + \binom{p^i y}{3} (px)^2 + \cdots + \binom{p^i y}{p^i y} (px)^{p^i y - 1},
\end{aligned}
$$

onde utilizamos em $(*)$ a identidade das colunas dada por

$$\binom{i}{i} + \binom{i+1}{i} + \cdots + \binom{n}{i} = \binom{n+1}{i+1}.$$

Agora, vamos mostrar que todos os termos da soma acima, exceto p^iy, são divisíveis por p^{i+1}. Para tanto, considere
$$\binom{p^iy}{p^jz}(px)^{p^jz-1},$$
com $\mathrm{mdc}(p,z)=1$ e $2 \leq p^jz \leq p^iy$. Notamos que
$$\binom{p^iy}{p^jz}(px)^{p^jz-1} = \frac{(p^iy)!}{(p^jz)!(p^iy-p^jz)!}p^{p^jz-1}x^{p^jz-1} = p^{i-j+p^jz-1}\frac{y(p^iy-1)}{z(p^jz-1)!(p^iy-p^jz)!}x^{p^jz-1},$$
de onde, p^{i-j+p^jz-1} divide $\binom{p^iy}{p^jz}(px)^{p^jz-1}$. Quando $j=0$, então $z \geq 2$ e, portanto,
$$i-j+p^jz-1 \geq i+z-1 \geq i+1.$$

Quando $j \geq 1$, então
$$i-j+p^jz-1 \geq i-j+p^j-1 \overset{(\star)}{\geq} i-j+(1+2)^j-1 \geq i-j+1+2j-1 \geq i+j \geq i+1,$$
em que $(\star)$ vale pois $p>2$. Em qualquer caso, obtemos $i-j+p^jz-1 \geq i+1$, de onde segue o desejado. $\square$

Já vimos que P pode ser visto como subgrupo de $\mathrm{GL}(N;\mathbb{Z}_q)$. Assim, se $p>2$ é um número primo, então podemos ver P como um subgrupo do p-subgrupo de Sylow dado no lema anterior. Mas também podemos ver $S_m(p) \ltimes_\alpha D(p)$ como subgrupo de $\mathrm{GL}_{n/r}(F)$ e, assim, cada elemento de P age como uma aplicação F-linear sobre N.

Antes de prosseguirmos, vamos listar o que temos até aqui.

Seja $G=\langle a,b,c\rangle$ um grupo do tipo (r,s,t) abeliano-por-(nilpotente de classe 2) que é um contraexemplo minimal. Temos que a,b e c são p-elementos, para algum p primo. Além disso, $G=PN$, onde P é um p-subgrupo de Sylow de G e N é um q-subgrupo abeliano elementar de G, com q um número primo distinto de p. Pelo Lema 4.16, temos que P é nilpotente de classe 2 e, consequentemente, $P' \leq \mathrm{Z}(P)$. A partir de agora, vamos utilizar a notação aditiva para o subgrupo N. Por fim, sejam a,d,c,x,y como no Lema 4.15 satisfazendo
$$d^x=b, \quad P=\langle a,d,c\rangle, \quad x^a=x, \quad y^b=y, \quad (x+y)^c=x+y$$
e
$$G=\langle a,d^x,c\rangle=\langle a^x,d^x,c\rangle=\langle a,d^{x+y},c^{x+y}\rangle.$$

Lema 4.18. *N é um FP-módulo irredutível.*

Demonstração. É fácil verificar que N munido da multiplicação por escalar dada por

$$\begin{aligned} \cdot : \quad FP \times N &\longrightarrow N \\ \left(\sum_{w \in P} f_w w, n\right) &\longmapsto \left(\sum_{w \in P} f_w w\right) \cdot n = \sum_{w \in P} f_w n^w. \end{aligned}$$

é um FP-módulo. Agora, dado $n \in N$, com $n \neq 0$, temos que o conjunto $\{n^w;\ w \in P\}$ é um subconjunto normal de G. Portanto, o submódulo $\langle n \rangle$ é um subgrupo normal de G que está contido em N. Desde que N é um subgrupo normal minimal de G, obtemos $\langle n \rangle = N$. Logo, N é um FP-módulo irredutível. $\square$

Lema 4.19. *Com as notações dadas acima, temos que*

$$a^p = d^p = c^p = [a, d]^p = [c, d]^p = [a, c]^p = 1.$$

Demonstração. Primeiro, mostraremos que $[a, d]^p = 1$. Pela minimalidade de G, o subgrupo $H = \langle a, b^p, c \rangle = \langle a, d^{px}, c \rangle$ é nilpotente. Sendo nilpotente gerado por p-elementos, H é um p-subgrupo de G. Seja P^z, com $z \in N$, um p-subgrupo de Sylow de G que contém H. Como $a, c \in P \cap P^z$, segue do Lema 4.14 que $a^z = a$ e $c^z = c$. De $d \in P$ e $d^{px} \in P^z$ resulta que $d^p \in P \cap P^{z-x}$ e, assim, $d^{p(z-x)} = d^p$. Vejamos que $c^x \neq c$. Caso contrário, teríamos que $G = \langle a, d, c \rangle^x$ é um p-grupo e, consequentemente, nilpotente, o que seria um absurdo. Disto, devemos ter $z - x \neq 0$. Sendo N um FP-módulo irredutível, obtemos $G = \langle a, d, c, z - x \rangle$. Como a e d^p comutam com $z - x$ e $P' \leq \mathrm{Z}(P)$, segue que $[a, d^p] = [a, d]^p \in \mathrm{Z}(G)$. Visto que N é o único subgrupo normal minimal de G e $N \nleq \langle [a, d]^p \rangle$, temos que $[a, d]^p = 1$. Um argumento análogo mostra que $[a, c]^p = [c, d]^p = 1$. Agora, como a^p comuta com x, z, a, d e c, então $a^p \in \mathrm{Z}(G)$. Sendo N o único subgrupo normal minimal de G e $N \nleq \langle a^p \rangle$, devemos ter $a^p = 1$. Analogamente, $d^p = c^p = 1$. $\square$

Vamos supor que p é um número primo ímpar, de modo a podemos aplicar o Lema 4.17, ou seja, podemos ver cada elemento de P agindo sobre N como uma transformação F-linear. Notemos que $a, d, c \notin \mathrm{Z}(P)$. De fato, suponhamos sem perda de generalidade que $a \in \mathrm{Z}(P)$, então a comuta com a, d, c e x, os quais geram o grupo G; logo, teríamos $a \in \mathrm{Z}(G)$, o que contradiz o fato de N ser o único subgrupo normal minimal de G. Disto, no máximo um dos comutadores $[a, d], [d, c]$ e $[c, a]$ pode ser trivial. Primeiramente, vamos trabalhar no caso em que exatamente um dos comutadores é trivial. Sem perda de generalidade, vamos supor que $[a, d] = 1$.

Para o próximo lema, vamos precisar de um resultado bem conhecido da teoria de corpos, o qual nos diz: Dado G um subgrupo finito do grupo multiplicativo F^* de um corpo F, então G é cíclico. Em particular, se F é um corpo finito, então o grupo multiplicativo F^* é cíclico. (Veja [25], pág. 229). Lembramos também que todo subgrupo de um grupo cíclico é cíclico e se G é um grupo cíclico finito e k divide $|G|$, então G possui exatamente um subgrupo de ordem k. (Veja [20], pág. 13). Por fim, vamos precisar do

Teorema 4.20 (Wedderburn, cf. [16], pág. 318)**.** *Todo anel com divisão finito é um corpo.*

Deste modo, podemos demonstrar o

Lema 4.21. *Se $p > 2$, então cada elemento de $\mathrm{Z}(P)$ com ordem p age sobre N como multiplicação por um escalar em F^* de ordem p.*

Demonstração. Como cada elemento de P age como uma transformação F-linear sobre N, podemos considerar a F-representação de P dada por

$$\begin{aligned} \gamma : P &\longrightarrow \mathrm{GL}(N; F) \\ y &\longmapsto \quad \gamma_y : \quad \begin{aligned} N &\to N \\ x &\mapsto x^y \end{aligned} \end{aligned}$$

a qual é fiel. Sendo N um FP-módulo irredutível, a F-representação γ de P é irredutível. Consideremos $B = \{v_1, v_2, \cdots, v_{n/r}\}$ uma base de N como F espaço vetorial. Desta forma, a F-representação matricial associada a γ dada por

$$\begin{aligned} \varphi : P &\longrightarrow \mathrm{GL}_{n/r}(F) \\ y &\longmapsto y^{\varphi} = [\gamma_y]_B \end{aligned}$$

é claramente F-irredutível e fiel. Pela Proposição 1.26, o conjunto

$$\mathrm{C}_F(\varphi) = \{S \in \mathrm{M}_{n/r}(F);\ Sg^{\varphi} = g^{\varphi}S,\ \forall\ g \in P\}.$$

é um anel com divisão e, sendo finito, pelo Teorema de Wederburn, $\mathrm{C}_F(\varphi)$ é um corpo. Uma vez que $\mathrm{C}_F(\varphi)$ é finito, segue da observação feita antes do lema que $\mathrm{C}_F(\varphi)^*$ é cíclico.

Agora, se $y \in \mathrm{Z}(P)$, então $y^\varphi \in \mathrm{C}_F(\varphi)$, pois

$$y^\varphi g^\varphi = (yg)^\varphi = (gy)^\varphi = g^\varphi y^\varphi,$$

para todo $g \in P$. Portanto, $\mathrm{Z}(P^\varphi) \leq \mathrm{C}_F(\varphi)^*$. Visto que $\mathrm{C}_F(\varphi)^*$ é cíclico, $\mathrm{Z}(P^\varphi)$ também o é. Como p divide $|\mathrm{Z}(P^\varphi)|$, então $\mathrm{Z}(P^\varphi)$ possui um único subgrupo de ordem p, digamos Q. Mas $\mathrm{Z}(P^\varphi) \leq \mathrm{C}_F(\varphi)^*$, implica que p divide $|\mathrm{C}_F(\varphi)^*|$ e, portanto, $\mathrm{C}_F(\varphi)^*$ também possui um único subgrupo de ordem p, o qual deve ser igual a Q. Por outro lado, é fácil ver que toda multiplicação por escalar de F está em $\mathrm{C}_F(\varphi)$ e, assim, podemos ver $F^* \leq \mathrm{C}_F(\varphi)^*$. Como p divide $|F^*|$, concluímos que o subgrupo Q é formado pelas transformações F-lineares de N que são multiplicação por um escalar de F^* com ordem p. Consequentemente, todo elemento de ordem p em $\mathrm{Z}(P^\varphi)$ age sobre N como multiplicação por algum escalar de F^* de ordem p. O resultado segue pois $\mathrm{Z}(P) \simeq \mathrm{Z}(P^\varphi)$, uma vez que φ é fiel. □

Em particular, a demonstração acima fornece que $\mathrm{Z}(P)$ possui um único subgrupo de ordem p. Agora, como $[c, a]$ tem ordem p e $[c, a] \in \mathrm{Z}(P)$, pelo lema acima, $[c, a]$ age como multiplicação por algum escalar $\lambda \in F^*$ com ordem p. Analogamente, $[d, c]$ também age como multiplicação por algum escalar em F^* com ordem p. Como $\mathrm{Z}(P)$ possui um único subgrupo de ordem p, temos que $[c, a] = [d, c]^t = [d^t, c]$, para algum $t \in \mathbb{Z}$. Assim, se necessário, podemos trocar d por d^t e, então, podemos supor $[c, d] = [c, a]$.

Consideremos

$$W = \{w \in N;\ w^a = w\}.$$

Este é o subespaço de N fixado por a. Notemos que W não é o subespaço nulo, pois $0 \neq x \in W$. Visto que a e d comutam, dado $w \in W$ temos $(w^d)^a = (w^a)^d = w^d$, ou seja, $w^d \in W$ e, então, W é d-invariante, de onde d induz um operador linear sobre W, digamos T_d. Visto que o polinômio $f = x^p - 1$ anula o operador T_d, então o polinômio minimal m_d de T_d divide f. Agora, como λ é um elemento de ordem p em F^*, então alguma potência de λ é um autovalor de T_d. Notamos que T_d não é o operador identidade, pois $x \in W$ e $x^d \neq x$. Assim, existe um inteiro j, com $1 \leq j \leq p-1$, tal que λ^j é autovalor de T_d. Seja $u \in W$ um autovetor de T_d associado ao autovalor λ^j. Então

$$u^d = \lambda^j u.$$

Desde que N é um FP-módulo irredutível, temos que N é gerado por u como FP-módulo; logo, N é gerado como F-espaço vetorial por

$$u, u^c, \cdots, u^{c^{p-1}},$$

uma vez que

$$u^{c^i a} = u^{ac^i[c^i,a]} = (u^{[c,a]^i})^{ac^i} = \lambda^i u^{ac^i} = \lambda^i u^{c^i}$$

e

$$u^{c^i d} = u^{dc^i[c^i,d]} = (u^{[c,d]^i})^{dc^i} = \lambda^i u^{dc^i} = \lambda^{i+j} u^{c^i}.$$

Visto que $[c,b] = [c,d^x] = [c^{x+y}, d^{x+y}] = [c,d]^{x+y}$ e $x+y \in N$, obtemos

$$u^{c^i b} = u^{d^x c^i[c^i,d^x]} = u^{([c,d]^i)^{x+y} d^x c^i} = u^{[c,d]^i d^x c^i} = \lambda^i u^{d^x c^i} = \lambda^{i+j} u^{c^i}.$$

Em particular, $u, u^c, \cdots, u^{c^{p-1}}$ são autovetores associados aos autovalores distintos de a e, portanto, formam uma base para N como F espaço vetorial.

Sejam $\alpha_0, \cdots, \alpha_{p-1}, \beta_0, \cdots, \beta_{p-1} \in F$ tais que

$$x = \alpha_0 u + \alpha_1 u^c \cdots + \alpha_{p-1} u^{c^{p-1}} \quad \text{e} \quad y = \beta_0 u + \beta_1 u^c \cdots + \beta_{p-1} u^{c^{p-1}}.$$

Assim,

$$x^a = \alpha_0 u + \alpha_1 \lambda u^c \cdots + \alpha_{p-1} \lambda^{p-1} u^{c^{p-1}} \quad \text{e} \quad y^b = \beta_0 \lambda^j u + \beta_1 \lambda^{j+1} u^c \cdots + \beta_{p-1} \lambda^{j+p-1} u^{c^{p-1}}.$$

Como $x^a = x$, $y^b = y$, $u^{c^{-j}} \in \{u, u^c, \cdots, u^{c^{p-1}}\}$ e $\lambda \neq 1$, temos

$$x = \alpha u \quad \text{e} \quad y = \beta u^{c^{-j}},$$

para alguns $\alpha, \beta \in F^*$. Mas $(x+y)^c = x+y$, de onde

$$\alpha u + \beta u^{c^{-j}} = x + y = (x+y)^c = \alpha u^c + \beta u^{c^{-j+1}}.$$

Disto, devemos ter $j = 1$ e $c^{-1} = c$, o que é um absurdo, pois c tem ordem $p > 2$. Portanto, quando $p > 2$, não temos contraexemplo no caso em que exatamente um dos comutadores $[a,d], [d,c], [c,a]$ é trivial. Com isto, temos apenas $p = 2$ como uma possibilidade para contraexemplos. Esta possibilidade é ilustrada no seguinte

Exemplo 4.22. Seja N um espaço vetorial de dimensão 2 sobre $\mathbb{Z}_q$, com $q \neq 2$. Seja $B = \{(1,0),(0,1)\}$ a base canônica de N e consideremos em $\mathrm{GL}_2(q)$ os elementos

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad d = a^c = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Seja $P = \langle a, d, c\rangle$. Temos que P é um 2-grupo de ordem 8 e seu centro é dado por $\mathrm{Z}(P) = \{\mathrm{Id}_2, -\mathrm{Id}_2\}$, onde Id_2 é a matriz identidade de ordem 2. Desta forma, utilizando argumentos sobre a ordem de $\zeta_2(P)$ é fácil verificar que $\zeta_2(P) = P$ e, portanto, P é nilpotente de classe 2.

Vamos considerar $G = P \ltimes_\alpha N$, onde $\alpha : P \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}_2(q)$ é definido de modo natural. Assim,

$$G = P \ltimes_\alpha N = \{(M,(k,l));\ M \in P, (k,l) \in N\},$$

com a operação

$$(M_1,(k_1,l_1))(M_2,(k_2,l_2)) = (M_1M_2,(k_1,l_1)M_2 + (k_2,l_2)),$$

e o elemento inverso é dado por

$$(M,(k,l))^{-1} = (M^{-1},(-k,-l)M^{-1}).$$

É claro que

$$G = \big\langle (a,(0,0)),(d,(0,0)),(c,(0,0)),(1,(1,0)),(1,(0,1))\big\rangle.$$

Vamos verificar que $G = G_1$, onde

$$G_1 = \big\langle (a,(0,0)),(d,(0,0))^{(1,(1,0))},(c,(0,0))\big\rangle.$$

Notamos que $(d,(0,0))^{(1,(0,0))} = (d,(2,0))$ e $(a,(0,0))^{(c,(0,0))} = (d,(0,0))$. Assim,

$$(1,(2,0)) = (d,(0,0))(d,(2,0)) \in G_1,$$

$$(1,(1,0)) = (1,(2,0))^{\frac{q+1}{2}} \in G_1,$$

e

$$(1,(0,1)) = (1,(1,0))^{(c,(0,0))} \in G_1.$$

Como todos os geradores de G pertencem a G_1, segue que $G = G_1$. Se $x = (1, 0) \in N$, fazendo as devidas identificações, podemos escrever

$$G = \langle a, d^x, c \rangle.$$

Claramente $G = P \ltimes_\alpha N$ é abeliano-por-(nilpotente de classe 2). Vamos verificar que G é do tipo $(1, 2, 2)$. Com efeito, é fácil ver que $(a, (0, 0))$ e $(d, (2, 0))$ comutam e, portanto, $\langle a, d^x \rangle$ é nilpotente de classe 1. Agora, vamos verificar que $\langle a, c \rangle$ é nilpotente de classe 2. Para isto, observemos que

$$[(a, (0, 0)), (c, (0, 0))] = (ad, (0, 0))$$
$$[(a, (0, 0)), (c, (0, 0)), (c, (0, 0))] = [(ad, (0, 0)), (c, (0, 0))] = (1, (0, 0))$$
$$[(c, (0, 0)), (a, (0, 0)), (a, (0, 0))] = [(da, (0, 0)), (a, (0, 0))] = (1, (0, 0)).$$

Assim, pela observação feita no início da Seção 4.1, segue que $\langle a, c \rangle$ é nilpotente de classe 2. Analogamente, obtemos que $\langle d^x, c \rangle$ é nilpotente de classe 2, como queríamos.

Entretanto, G não é nilpotente, pois $\mathrm{Z}(G) = 1$. Com efeito, um elemento $(M, (k, l)) \in \mathrm{Z}(G)$ deve satisfazer as seguintes condições

$$(M, (k, l))(a, (0, 0)) = (a, (0, 0))(M, (k, l)) \;\Rightarrow\; (Ma, (k, -l)) = (aM, (k, l))$$

$$(M, (k, l))(d, (2, 0)) = (d, (2, 0))(M, (k, l)) \;\Rightarrow\; (Md, (2 - k, l)) = (dM, (2, 0)M + (k, l))$$

$$(M, (k, l))(c, (0, 0)) = (c, (0, 0))(M, (k, l)) \;\Rightarrow\; (Mc, (l, k)) = (cM, (k, l)),$$

de onde $M \in \mathrm{Z}(P)$ e $(k, l) = (0, 0)$. Mas se $M \neq 1$, a segunda condição não é satisfeita. Portanto, $(M, (k, l)) = (1, (0, 0))$, como desejado.

Observação 4.23. O Teorema 4.12 estabelece que se um grupo $G = \langle x, y \rangle$ é abeliano-por-(nilpotente de classe 2), com $\{x, y\}$ um conjunto engeliano, então G é nilpotente. O exemplo acima mostra que o resultado não vale se o grupo for gerado por um conjunto engeliano de tamanho 3.

De agora em diante, vamos assumir que todos os comutadores $[a, d]$, $[d, c]$ e $[c, a]$ são não triviais. Como vimos acima, cada um destes comutadores age como multiplicação por algum escalar de ordem p. Suponhamos que $[c,a]=\lambda$, então existem $i,j\in\mathbb{Z}$ satisfazendo $[a,d]=\lambda^i$ e $[d,c]=\lambda^j$; logo

$$\begin{aligned}\left[c^i,a^j\right]&=[c,a]^{ij}=\lambda^{ij},\\ \left[a^j,d\right]&=[a,d]^j=\lambda^{ij},\\ \left[d,c^i\right]&=[d,c]^i=\lambda^{ij}.\end{aligned}$$

Assim, se necessário, trocando a por a^j e c por c^i, para alguns $i,j\in\mathbb{Z}$, podemos supor que

$$[a,d]=[d,c]=[c,a],$$

ou seja, que todos eles agem por um mesmo escalar $\lambda\in F^*$ de ordem p. Disto e do fato que $P=\langle a,d,c\rangle$, obtemos $adc\in\mathrm{Z}(P)$. Para mostrar isto, basta verificar que adc comutam com os geradores de P. Por exemplo,

$$(adc)a=aaa^{-1}dad^{-1}da^{-1}cac^{-1}a^{-1}ac=aa[a,d^{-1}]da^{-1}[c^{-1},a^{-1}]ac=aadc[a,d]^{-1}[c,a]=a(adc).$$

Como já temos contraexemplos para o caso $p=2$, vamos supor que $p\geq 3$. Sabemos que em um grupo H nilpotente de classe no máximo 2, vale $(xy)^m=x^my^m[y,x]^{\frac{m(m-1)}{2}}$, para todos $x,y\in H$ e $m\in\mathbb{N}$. (Veja [20], pág. 141). Logo, como $[a,dc]=1$,

$$(adc)^p=a^p(dc)^p=d^pc^p[c,d]^{\frac{p(p-1)}{2}}=1.$$

Portanto, adc é uma potência de $[a,d]$. Consequentemente, $P=\langle a,d\rangle$ e N é gerado como F-espaço vetorial por

$$x,x^d,\cdots,x^{d^{p-1}}.$$

Da mesma forma como feito antes, obtemos

$$x^{d^ia}=\lambda^ix^{d^i}$$

e $x,x^d,\cdots,x^{d^{p-1}}$ são autovetores de a associados a autovalores distintos. Logo, estes vetores formam uma base para N como F-espaço vetorial. Como y é fixado por d, devemos ter

$$y=e(x+x^d+\cdots+x^{d^{p-1}}),$$

para algum elemento não trivial $e \in F$. Visto que $(adc)^{-1} = c^{-1}d^{-1}a^{-1} \in \mathrm{Z}(P)$, este deve ser uma potência de $[a, d]$ e, assim,

$$c^{-1} = ad[a, d]^r,$$

para algum $0 \leq r \leq p-1$. Sendo $x + y$ fixado por c, segue que

$$((1+e)x + ex^d + \cdots + ex^{d^{p-1}})^{ad[a,d]^r} = (1+e)x + ex^d + \cdots + ex^{d^{p-1}}.$$

Disto, obtemos a seguintes equações

$$\begin{aligned} e + 1 &= e\lambda^{r+p-1} \\ e &= (e+1)\lambda^r \\ e &= e\lambda^{r+1} \\ &\vdots \\ e &= e\lambda^{r+p-2}. \end{aligned}$$

Como $\lambda \neq 1$, devemos ter $p = 3$. Segue destas equações que $r = -1$ e $e = 1/(\lambda - 1)$. Assim, se $p \geq 3$, então p deve ser 3 e a situação é como no seguinte exemplo.

Exemplo 4.24. Seja $q \neq 3$ um número primo e suponhamos que a ordem de q módulo 3 é r. Consideremos F o corpo de q^r elementos e seja $\lambda \in F^*$ de ordem 3. Tomemos N um espaço vetorial de dimensão 3 sobre F e, com respeito a base canônica $B = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de N, consideremos os seguintes elementos de $GL_3(F)$

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad c = ad[a, d] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então, $P = \langle a, d \rangle$ é um 3-grupo de ordem 27, cujo centro é dado por $\mathrm{Z}(P) = \{\mathrm{Id}_3, \lambda\mathrm{Id}_3, \lambda^2\mathrm{Id}_3\}$, onde Id_3 é a matriz identidade de ordem 3. Utilizando argumentos sobre a ordem de $\zeta_2(P)$, é fácil verificar que $\zeta_2(P) = P$ e, portanto, P é nilpotente de classe 2. Sejam $x = (1, 0, 0)$ e $y = \frac{1}{\lambda - 1}(1, 1, 1)$. Então a fixa x, d fixa y e c fixa $x+y$. Seja $G = P \ltimes_\alpha N$ o produto semidireto de P e N, onde $\alpha : P \longrightarrow \mathrm{Aut}(N) \simeq \mathrm{GL}_3(q)$ é definido de modo natural. Procedendo como no Exemplo 4.22, podemos ver que $G = \langle a, d^x, c \rangle$ é abeliano-por-(nilpotente de classe 2) e não é nilpotente.

Disso tudo que foi discutido até agora, obtemos que não existe contraexemplo minimal para o caso em que $G = \langle a, b, c \rangle$ é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) do tipo (r, s, t), quando 2 e 3 não são divisores das ordens de a, b e c. Portanto, todo grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 2) do tipo (r, s, t), tal que 2 e 3 não são divisores das ordens de a, b e c é um grupo nilpotente. Isto nos permite demonstrar o seguinte resultado mais geral.

Teorema 4.25 (Endimioni, Traustason). *Seja $G = \langle a_1, \cdots, a_t \rangle$ um grupo que é abeliano-por-(nilpotente de classe 2), tal que cada par de geradores gera um grupo nilpotente. Se nenhum dos geradores tem ordem que é divisível por 2 ou 3, então G é nilpotente.*

Demonstração. Suponhamos que exista um grupo não nilpotente $G = \langle a_1, \cdots, a_t \rangle$ abeliano-por-(nilpotente de classe 2), tal que cada par de geradores gera um grupo nilpotente. De modo análogo ao feito para o caso em que G é gerado por 3 elementos, temos que G possui uma imagem homomórfica finita não nilpotente nas mesmas condições do grupo G. Portanto, podemos trabalhar com o caso finito e considerar um contraexemplo minimal. Além disso, podemos supor que os geradores são p-elementos, para algum número primo p. Mais ainda, temos que $G = PN$, onde P é um p-subgrupo de Sylow de G e N é um q-grupo abeliano elementar, com q um número primo distinto de p. Pelo Lema 4.16, temos que $\gamma_3(G) = N$ e P é nilpotente de classe no máximo 2. Portanto, $[a_i, a_j, a_k] \in N$, para todos $1 \leq i, j, k \leq t$. Afirmamos que se $\langle a_i, a_j, a_k \rangle$ é nilpotente, então $[a_i, a_j, a_k] = 1$. Com efeito, sendo $\langle a_i, a_j, a_k \rangle$ nilpotente gerado por p-elementos, então $\langle a_i, a_j, a_k \rangle$ é um p-grupo e, consequentemente, $[a_i, a_j, a_k] \in \langle a_i, a_j, a_k \rangle$ é um p-elemento. Mas $[a_i, a_j, a_k] \in N$ e N é um q-grupo, portanto, $[a_i, a_j, a_k] = 1$, como desejado. Agora, vamos provar que $[a_i, a_j, a_k] = 1$, para todos $1 \leq i, j, k \leq t$. Suponhamos, por absurdo, que $[a_i, a_j, a_k] \neq 1$, para alguns $1 \leq i, j, k \leq t$. Pela afirmação feita, teríamos que $\langle a_i, a_j, a_k \rangle$ não é nilpotente. Mas, por hipótese, os elementos a_i, a_j, a_k são p-elementos com $p \neq 2, 3$. Portanto, obtemos um grupo não nilpotente $\langle a_i, a_j, a_k \rangle$ abeliano-por-(nilpotente de classe 2) do tipo (r, s, t) em que 2 e 3 não são divisores das ordens de a_i, a_j e a_k, contrariando o que obtemos acima. $\square$

Finalmente, obtemos a generalização do Teorema 4.12, como dito no início desta seção.

Corolário 4.26 (Abdollahi, Brandl, Tortora). *Seja S um conjunto engeliano finito e suponha* *que $G = \langle S \rangle$ é abeliano-por-(nilpotente de classe 2). Se todo elemento de S tem ordem que não é divisível por 2 ou 3, então G é nilpotente.*

Demonstração. Para quaisquer $x, y \in S$, o Teorema 4.12 garante que $\langle x, y\rangle$ é nilpotente. Agora, o resultado segue do teorema acima. $\square$

4.3 Exemplos

Começamos apresentando um exemplo que ilustra que para todo inteiro positivo n é possível encontrar um grupo que é gerado por dois elementos mutuamente n-engelianos, os quais não são mutuamente $(n-1)$-engelianos, a saber, o grupo diedral de ordem 2^{n+1}.

Exemplo 4.27. Consideremos o grupo $G = \langle x, y \mid x^2 = y^2 = 1, (xy)^{2^n} = 1\rangle$. Se denotarmos $z = xy$, então

$$[x, y] = z^2 \quad \text{e} \quad z^x = z^y = z^{-1}.$$

Para qualquer $k \geq 1$, obtemos por indução que $[x,\, _ky] = z^{-(-2)^k}$ e $[y,\, _kx] = z^{(-2)^k}$. Portanto, $[x,\, _{n-1}y]$ e $[y,\, _{n-1}x]$ são não triviais e $[x,\, _ny] = 1 = [y,\, _nx]$, ou seja, os elementos x e y são mutuamente n-engelianos mas não são mutuamente $(n-1)$-engelianos.

A seguir, apresentamos um exemplo de um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 3) gerado por dois elementos mutuamente engelianos, o qual não é nilpotente. Para a construção deste exemplo, foi utilizado o GAP (Group, Algorithms and Programming), um *software* livre para computação em álgebra abstrata discreta, com particular ênfase em teoria de grupos. Para mais detalhes do GAP, veja [9].

Exemplo 4.28. Seja $W = S_3 \wr \mathbb{Z}_4$ o produto wreath canônico entre o grupo simétrico de grau 3 e o grupo cíclico de ordem 4, o qual tem ordem $2^6 3^4 = 5184$.

```
> S3 := Group((1,2), (1,2,3));
[ Group([ (1,2), (1,2,3) ])
> f := FreeGroup("a");
[ <free group on the generators [ a ]>
> Z4 := f/[f.1^4];
[ <fp group on the generators [ a ]>
> W := WreathProduct(S3, Z4);
```

```
[ <group with 3 generators>
> Size(W);
[ 5184
```

Ordenando os elementos de W no GAP, consideremos os elementos $x :=$ ele[2] e $y :=$ ele[238]. Temos que os elementos x e y têm ordem 4 e xy^{-1} tem ordem 6. Além disso, notamos que x e y são mutuamente 3-engelianos, com $[x, {}_3y] = 1 = [y, {}_3x]$.

```
> ele := Elements(W);;
> x := ele[2];
[ WreathProductElement((),(),(),(),(1,2,4,3))
> Order(x);
> 4
> y := ele[238];
[ WreathProductElement((),(2,3),(1,2,3),(1,3),(1,2,4,3))
> Order(y);
[ 4
> Order(x*y^-1);
[ 6
> com := function(x,n,y) # função para calcular os comutadores
local f1, f2, f3, i;
f1 := x; f2 := y;
for i in [1..n] do
f3 := Comm(f1, f2);
f1 := Comm(f1, f2);
f2 := f2;
od;
return f1;
end;
[ function( x, n, y ) ...  end
> com(x,3,y);
[ WreathProductElement((),(),(),(),())
> com(y,3,x);
[ WreathProductElement((),(),(),(),())
```

Tomando o subgrupo $G = \langle x, y\rangle$ de W, vemos que G é um grupo gerado por dois elementos mutuamente engelianos mas não é nilpotente. Mais ainda, ordenando os elementos de G no GAP, se considerarmos $a :=$ ele1[2] e $b :=$ ele1[14], vemos que o subgrupo $S = \langle a, b\rangle$ de G é nilpotente de classe 3 e $G = S \ltimes N$, onde N é o 3-subgrupo de Sylow de G. Como N é um 3-subgrupo abeliano elementar, G é um grupo abeliano-por-(nilpotente de classe 3) gerado por dois elementos mutuamente 3-engelianos, mas não é nilpotente.

```
> G := Subgroup(W, [x,y]);
<group with 2 generators>
```

```
> Size(G);
[ 2592
> IsNilpotentGroup(G);
[ false
> ele1 := Elements(G);;
> a := ele1[2];
[ WreathProductElement((),(),(),(),(1,2,4,3))
> b := ele1[14];
[ WreathProductElement((),(),(2,3),(2,3),(1,2,4,3))
> S := Subgroup(G, [a,b]);
[ <group with 2 generators>
> Size(S);
[ 32
> IsNilpotentGroup(S);
[ true
> NilpotencyClassOfGroup(S);
[ 3
> N := SylowSubgroup(G, 3);
[ <group of size 81 with 4 generators>
> IsElementaryAbelian(N);
[ true
> autN := AutomorphismGroup(N);
[ <group with 4 generators>
> alpha := GroupHomomorphismByImages(S, autN, [a,b],
[ConjugatorIsomorphism(N,a), ConjugatorIsomorphism(N,b)]);;
> G1 := SemidirectProduct(S, alpha, N);
[ <pc group with 9 generators>
> IsomorphismGroups(G, G1);
[ WreathProductElement((1,3,2),(2,3),(),(1,2),(1,2,4,3)),
WreathProductElement((1,2),(),(2,3),(1,2,3),(1,4)(2,3)) ] ->
[ f2*f4*f5*f6*f8, f1*f3 ]
> Size(G1);
[ 2592
```

Para finalizar o exemplo, notamos que se considerarmos o elemento $z :=$ ele[229], que tem ordem 6, então os elementos x e z são mutuamente 4-engelianos, com $[x, {}_3z] = 1 = [z, {}_4x]$. Além disso, vemos que $W = \langle x, z\rangle$ é gerado por dois elementos mutuamente 4-engelianos, mas não é nilpotente.

```
> z := ele[229];
[ WreathProductElement((),(2,3),(1,2,3),(1,2,3),())
> Order(z);
[ 6
> com(x,3,z);
```

```
[ WreathProductElement((),(),(),(),())
> com(z, 4, x);
[ WreathProductElement((),(),(),(),())
> W = Subgroup(W, [x,z]);
[ true
> IsNilpotentGroup(W);
[ false
```

Referências

[1] ABDOLLAHI, A., *Engel graph associated with a group*, J. Algebra 318 (2007) 680-691.

[2] ABDOLLAHI, A., *Engel elements in groups*, Groups St Andrews 2009 in Bath. Volume 1, 94–117, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 387, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2011.

[3] ABDOLLAHI, A., *Some Engel conditions on finite subsets of certain groups*, Houston J. Math., 27 (2001) 511-522.

[4] ABDOLLAHI, A., *Groupes satisfaisant une condition d'Engel*, J. Algebra, 283 (2005) 431-446.

[5] ABDOLLAHI, A., BRANDL, R., TORTORA, A., *Groups generated by a finite Engel set*, J. Algebra 347 (2011) 53-59.

[6] DISTEL, R., *Graph Theory*, Eletronic Edition 2005, Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2005.

[7] ENDIMIONI, G., *Groups covered by finitely many nilpotent subgroups*, Bull. Austral. Soc. 50 (1994) 459-464.

[8] ENDIMIONI, G., TRAUSTASON, G., *Groups that are pairwise nilpotent*, Comm. Algebra 36 (2008) 4413-4435.

[9] The GAP Group, GAP - Groups, Algorithms, and Programming, Version 4.4.12; 2008, http://www.gap-system.org

[10] GARCIA, A., LEQUAIN, Y., *Elementos de Álgebra*, 5ª ed., Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

[11] GOLOD, E. S., *On nil-algebras and residually finite p-groups*, Izv. Akad Nauk SSSR Ser. Mat. 28 (1964), 273-276 = Amer. Math. Soc. Translations (2)48(1965), 103-106.

[12] GONÇALVES, A., *Tópicos em Representação de Grupos*, 9º colóquio Brasileiro de Matemática, Poços de Caldas, 1973.

[13] GORENSTEIN, D., *Finite Groups*, segunda edição, Chelsea Publishing Company, Nova York, 1980.

[14] GRUENBERG, K. W., *The Engel elements of a soluble group*, Illinois J. Math. Z. 87 (1959) 151-168.

[15] HALMOS, P. R., *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Ciência Moderna, Rio de Janeiro, 2001.

[16] HERSTEIN, I. N., *Topics in Algebra*, Ginn e Company, Chicago, 1964.

[17] JOHNSON, D. L., *Topics in the Theory of Group Presentations*. Cambridge University Press, 1980.

[18] LONGOBARDI, P., MAJ, M., *Finitely generated soluble groups with an Engel condition on infinite subsets*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 89 (1993) 97-102.

[19] NEUMANN, B. H., *A problem of Paul Erdös on groups*, J. Aust. Math. Soc. Ser. A 21 (4) (1976) 467-472.

[20] ROBINSON, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Springer-Verlag, New York, 1995.

[21] ROBINSON, D. J. S., *Finiteness Conditions and Generalized Soluble Groups*, Parts 1 and 2, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[22] ROBINSON, D. J., *A property of lower series of a group*, Math. Zeitschr, 107(1968) 225-231.

[23] ROCCO, N. R., *Métodos de Lie em Teoria dos Grupos*, In: Said Najati Sidki; Noraí Romeu Rocco. (Org.). ATAS DA IX ESCOLA DE ÁLGEBRA - VOL. 2. BRASÍLIA: SBM, 1987, v. 2, p. 129-213.

[24] ROTMAN, J. J., *An Introduction to the Theory of Groups*, 4nd ed., Springer-Verlag, New York, 1994.

[25] STEWART, I., *Galois Theory*, 3nd ed., Chapman& Hall/CRC, New York, 2003.

[26] ŠUNKOV, V. P., *Periodic group with almost regular involutions.* (Russian) Algebra i Logika 7 (1968) no. 1, 113–121.

[27] WEINTRAUB, S. H., *Representation Theory of Finite Groups: Algebre and Arithmetic*, AMS-Graduate studies in mathematics, Providence, 2003.

Índice