UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

(Mestrado)

CLEVERSON GONÇALVES DOS SANTOS

Estimativas de Carleman para uma classe de operadores parabólicos que podem degenerar

Maringá - PR

2009

CLEVERSON GONÇALVES DOS SANTOS

Estimativas de Carleman para uma classe de operadores parabólicos que podem degenerar

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientadora: Valéria Neves Domingos Cavalcanti.

Maringá - PR

2009

À minha esposa, que durante todo este tempo foi, paciente e compreensiva, confiando e acreditando em mim.

CLEVERSON GONÇALVES DOS SANTOS

Estimativas de Carleman para uma classe de operadores parabólicos que podem degenerar

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Profa. Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Profa. Dra. Helena Judith Nussenzveig Lopes
Universidade Estadual de Campinas

Marcelo Moreira Cavalcanti

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em: 12 de março de 2009.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

À Universidade Estadual de Maringá, ao Departamento de Pós-Graduação em Matemática, especialmente a minha orientadora Doutora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, pelo apoio e incentivo na elaboração deste. A quem deixo minha gratidão pela confiança e credibilidade.

Aos meus professores do primeiro e segundo semestre, ao professor Marcelo Moreira Cavalcanti, Juan Amadeo Soriano Palomino, pela dedicação, incentivo e por compartilhar seus valiosos conhecimentos, ajudando a concluir este trabalho, a vocês meus sinceros agradecimentos.

Ainda destacando meu carinho a Lucia, secretaria do departamento, Silvana, pelos cafezinhos.

Quero ainda, agradecer a grandes mestre que tive durante toda esta minha jornada como estudante, aqueles que sempre incentivaram-me a buscar um melhor conhecimento em matemática, ao professor Emílio, professor da 5ª e 6ª, que logo cedo incentivou a graduar-me em matemática, ao professor Fernando Múcio Bando, meu professor e orientador na graduação, o qual me potencializou a fazer o mestrado, Emerson Lazzarotto, professor da graduação, entre outros. A todos vocês dedico a epígrafe deste.

Aos meus amigos que aqui fiz, certamente sentirei saudades.

À Deus, por me dar conhecimentos necessários para realizar meus objetivos.

A minha mãe, pelo dom da vida, sem ela não estaria aqui.

A minha querida esposa, a quem devo agradecer imensamente, pois sempre acreditou e confiou em mim. Soube ser compreensiva quando teve que abdicar de suas vontade pra fazer as minhas. Sem você certamente tudo isso não seria possível. Muito grato por tudo, pelo amor, carinho, filha e confiança, não sei se sou merecedor de tudo isso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

E a todos aqueles que acreditaram em mim por alguns segundos de suas vidas.

Cleverson Gonçalves dos Santos.

Alguns mestres, simplesmente passam por nossas vidas e nos deixam algum conhecimento, outros porém, nos potencializam e, humildemente nos incentivam a superar o mestre. A esses mestres, se um dia isso acontecer, eu humildemente direi, vocês sempre serão os melhores.

Cleverson Gonçalves dos Santos.

Resumo

Neste trabalho mostramos a existência e unicidade de soluções regulares e fracas bem como a controlabilidade para a equação parabólica degenerada abaixo, utilizando estimativas de Carleman.

$$\begin{cases} u_t - (au_x)_x = h\chi_\omega & (t,x) \in (0,T) \times (0,1) \\ u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases}$$

onde $a(x) = x^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2$.

Palavras-chave: Equação do Calor, Operador parabólico degenerado, Estimativas de Carleman, Controlabilidade.

Abstract

In this work we prove the existence of smooth and weak solutions as well as the controllability for the degenerate parabolic equation below, using Carleman estimates.

$$
\begin{cases}
u_t - (au_x)_x = h\chi_\omega & (t,x) \in (o,T) \times (0,1) \\
u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\
\text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\
u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1)
\end{cases}
$$

where $a(x) = x^\alpha, \quad 0 \leq \alpha < 2.$

Key words: Heat equation, Degenerate parabolic operator, Carleman estimates, Controllability.

Sumário

Introdução

O estudo de controlabilidade para equações parabólicas não degeneradas tem atraído o interesse de muitos autores na década passada. Trabalhos pioneiros como [11, 12, 13], entre outros, deram um progresso substancial para o entendimento das propriedades de controlabilidade de equações parabólicas não degeneradas com coeficientes variáveis.

Por outro lado, poucos resultados são conhecidos para equações que podem degenerar, embora muitos problemas que são relevantes em aplicações são descritos por equações parabólicas que degeneram na fronteira do domínio.

Nosso objetivo neste trabalho, é apresentar de forma mais didática os resultados obtidos por P. Cannarsa, P. Martinez e J. Vancostenoble em [6]. Nesse artigo os autores estudaram a controlabilidade exata de um modelo simples de equação parabólica degenerada, dada por

$$u_t - (x^\alpha u_x)_x = h\chi_\omega \quad x \in (0,1), t \in (0,T),$$

onde o controle h está agindo sobre um subintervalo não vazio ω de $(0,1)$ e $\alpha \in [0,2)$. De modo a estudar as propriedades de controlabilidade para o problema em questão, os autores necessitaram obter estimativas Carleman para o problema adjunto.

O resultado apresentado é ótimo posto que, para $\alpha \geq 2$, o problema considerado não é exatamente controlável.

No capítulo 1, apresentamos os resultados preliminares, os quais serão úteis no decorrer de todo este trabalho, além dos conceitos teóricos relevantes ao objetivo proposto.

No capítulo 2, apresentamos o problema sugerido. Definimos o espaço de Hilbert onde buscamos a existência e unicidade de solução. Para a obtenção da existência e unicidade de solução no caso regular, utilizamos o Método de Faedo-Galerkin. Para o caso fraco, foi utilizado o Método Direto.

No capítulo 3, apresentamos o problema adjunto ao problema proposto para o qual obtivemos uma estimativa de Carleman. A estimativa de Carleman foi provada inicialmente para o caso regular e usando argumentos de densidade foi provada para o caso fraco.

No capítulo 4, realizamos o estudo da controlabilidade do problema. Após a obtenção da estimativa de Carleman feita no Capítulo 3, concluímos duas desigualdades de observabilidade que foram fundamentais para a mostrar que o problema em questão é exatamente controlável.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. No entanto, por serem resultados familiares, omitiremos assim as suas demonstrações, as quais podem facilmente serem encontradas em nossas referências.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\,\nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes , e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca , cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora, tal conceito de derivada ter sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada distribucional, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty}\int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [20].

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|, \; para\ p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.2. (Desigualdade de Young) *Sejam* $1 < p\,,q < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$. *Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3].

Da desigualdade de Young, segue a $\epsilon - desigualdade$, dada por

$$a_1 b_1 \leq \frac{\epsilon a_1^p}{p} + \frac{b_1^q}{\epsilon^{\frac{q}{p}} q} \tag{1.1}$$

onde $a = \sqrt[p]{\epsilon} a_1$ e $b = \dfrac{b_1}{\sqrt[p]{\epsilon}}$ na desigualdade de Young.

Proposição 1.3. (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* f, g *em* $L^p(\Omega)$, *então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [20].

Proposição 1.4. (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3].

Segue como corolário da proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.5. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ *e* $\dfrac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.6. (Desigualdade de Interpolação) *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [22].

Além dos resultados acima, temos ainda os seguintes resultados:

i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.7. (Teorema da Representação de Riesz) *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.8. *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Proposição 1.9. (Lema de Du Bois Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = 0$ se, e somente se, $u = 0$ quase sempre em Ω. Aqui, T_u é a distribuição definida por $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [21].

Desta proposição tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.10. *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [21].

Lema 1.11. (Lema de Gronwall)*Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds},\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [19].

Proposição 1.12. *Seja $u \in L^p(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ com $1 < p \leq \infty$. As seguintes propriedades são equivalentes.*

(i) $u \in W^{1,p}(I)$

(ii) Existe um constante $c > 0$ tal que

$$\left| \int_I u\varphi' \right| \leq c||\varphi||_{L^{p'}(I)}\ \forall\, \varphi \in C_0^\infty(I),$$

onde p' é o expoente conjugado de p.

(iii) Existe uma constante $c > 0$ tal que para todo aberto $\omega \subset\subset I$ e todo $h \in \mathbb{R}$ com $|h| < dist(\omega, \complement I)$ se verifica

$$||\mathrm{T}_h u - u||_{L^p(\omega)} \leq c|h|.$$

Ainda mais, pode-se tomar $c = ||u'||_{L^p}$ em (ii) e (iii).

Demonstração: Ver [3].

Observação 1.13. *De acordo com [3] temos os seguintes resultados.*

(a) Quando $p = 1$, permanecem válidas as seguintes implicações $(i) \Rightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii)$.

(b) Supondo I limitado. As funções que verificam (i), ou seja, funções de $W^{1,1}$ são as funções absolutamente contínuas . Estas são caracterizadas pela seguinte propriedade.

Para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda sucessão finita de intervalos disjuntos $]a_k, b_k[$ de I com

$$\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta, \quad \textit{implica} \quad \sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \epsilon$$

Proposição 1.14. *Seja $F \subset E$ um espaço vetorial tal que $\overline{F} \neq E$. Então, existe $f \in E'$, $f \not\equiv 0$ tal que $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in F$.*

Demonstração: Ver [3].

Segue do Corolário acima a seguinte resultado.

Observação 1.15. *Seja E um espaço normado e $F \subset E$ um subespaço vetorial, se para toda $f \in E'$ tal que $\langle f, x \rangle = 0$ para todo $x \in F$ tivermos $f \equiv 0$. Então F é denso em E.*

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev . Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$ com $p < +\infty$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega),\ s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos o espaço de Schwartz,

$$S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim_{\|x\|\to\infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0\ \forall \text{ polinômio } p \text{ de } n \text{ variáveis reais e } \alpha \in \mathbb{N}^n\}.$$

Denominado por espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S^{'};\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)^{'}$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

que leva u na sua restrição a Ω. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H^s_0(\Omega)\right)^{'} \text{ onde } H^s_0(\Omega) = \overline{C_0^\infty}^{H^s(\Omega)}.$$

Teorema 1.16. (Imersão de Sobolev) *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\ \textit{se } m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [19].

Proposição 1.17. *Sejam Ω um conjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m e m um inteiro tal que $m \geq 1$; e $1 \leq p < \infty$. Então temos as seguintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [7].

Teorema 1.18. (Teorema de Rellich Kondrachov) *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*[$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [7].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

Proposição 1.19. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Se* $1 \leq p < n$*, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

onde p^* *vem dado por* $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$*, existe uma constante* $C = C(p,n)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.20. *Quando* $n > 2$ *temos a inclusão* $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ *para todo* ρ *satisfazendo* $2 \leq \rho \leq p$*, onde* p *é dado por:* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$.

Demonstração: Ver [10].

1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que são levados em conta as variáveis temporal e espacial, o qual é necessário para dar sentido a problemas de evolução.

Para cada $t \in [0,T]$ fixo, interpretamos a função $x \mapsto u(x,t)$ como um elemento do espaço X. Denotaremos este elemento como $u(t) \in X$ com valores no espaço X.

Seja X um espaço de Banach, $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (a,b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a,b;X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a,b]$ com imagem em X, as funções $u : (a,b) \to X$ limitadas quase sempre em (a,b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess\|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a,b];X)$, $m = 0,1,\dots,$ consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [30]

Proposição 1.21. *Sejam $m = 0,1,\dots,$ e $1 \leq p < +\infty$, X e Y espaços de Banach.*

(a) $C^m([a,b];X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) O conjunto de todas as funções degrau é denso em $L^p(a,b;X)$.

(d) $C([a,b];X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(e) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t))_X dt.$$

(f) $L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(g) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e limitadas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. Temos a seguinte noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$. Seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S,\theta_\mu\rangle \to \langle S,\theta\rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu,\theta\rangle \to \langle S,\theta\rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida com um único elemento deste espaço a qual satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt}, \varphi \right\rangle = -\left\langle S, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f}, \varphi \rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b)$$

a função $f \mapsto \tilde{f}$ de $L^2(a,b;X) \to \mathcal{D}'(a,b;X)$ é linear e contínua, e ainda é injetor e desta forma identificamos $\tilde{f}$ com f e obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X).$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $u\chi_{_K}$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde $\chi_{_K}$ denota a função característica de K.

Definição 1.22. *Seja $J \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, tal que $J \geq 0$ e $\int_{\mathbb{R}} J(t)dt = 1$. Dado $\epsilon > 0$, definamos*

$$J_\epsilon = \frac{1}{\epsilon} J\left(\frac{t}{\epsilon}\right) \quad e \quad (J_\epsilon * u)(t) = \int_{\mathbb{R}} J_\epsilon(t-s)u(s)ds$$

para as funções u em que o lado direito da última igualdade faz sentido.

Proposição 1.23. *Seja u uma função definida sobre $\mathbb{R}$, que anula-se fora de um intervalo I.*
(a) Se $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R};X)$, então $J_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R};X)$.
(b) Se $u \in L^2(\mathbb{R};X)$, então $J_\epsilon * u \in L^2(\mathbb{R};X)$. Além disso, $\|J_\epsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R};X)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R};X)}$ e $\lim\limits_{\epsilon \longrightarrow 0^+} \|J_\epsilon * u\|_{L^2(\mathbb{R};X)} = u$.

Fazendo as devidas adaptações, encontramos a demonstração desta proposição por exemplo em [15]

O espaço dual de $L^p(a,b;X)$. Consideremos $Y = L^p(a,b;X)$, temos a seguinte relação de dualidade $Y' = L^q(a,b;X')$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Devido ao Teorema seguinte.

Teorema 1.24. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*
(a) Cada função $v \in L^q(a, b; X')$ corresponde a um único funcional $\overline{v} \in Y'$ dada por

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.2}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ corresponde a exatamente uma função $v \in L^q(a, b; X')$ dada por (2.12). Além disso

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a, b; X)$ é reflexivo e separável.

Demonstração: Ver [30].

Assim podemos identificar Y' com $L^q(a, b; X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|_{X'}^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \quad \forall u \in Y \quad \forall v \in Y'$$

O espaço $W(a, b)$, sejam a e b dois números reais finitos ou não, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a, b) := \{u \in L^2(a, b; X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a, b; Y)\}$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a, b; X)$. A norma é dada por

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|_{L^2(a,b;X)}^2 + \|u^{(m)}\|_{L^2(a,b;Y)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Segue daí que $W(a, b)$ é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a, b; X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (a, b) \mapsto X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em (a, b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a, b; X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a, b) tal que *supp* (φ_ν) e *supp* (φ) estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a, b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é denso em $\mathcal{D}(a,b;X)$.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b:X), v' \in L^2(a,b:X), \quad v(a) = v(b) = 0\}$$

munido com o produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b:X)$ com o seu dual $[L^2(a,b:X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b:X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$

Proposição 1.25. *Seja $u \in L^2(a,b:X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X$$

Demonstração: Ver [24].

Da proposição anterior podemos identificar f com u', de posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b:X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$

Proposição 1.26. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b:X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X)$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [24].

Proposição 1.27. *O espaço $\mathcal{D}(a,b;X)$ e denso em $W(a,b)$*

Demonstração: Ver [18].

Da proposição acima, tomando $X = L^2(\Omega) = Y$ vem que $\mathcal{D}(a,b;X)$ é denso em $H^m(a,b;L^2(\Omega))$

1.2.1 Funções Escalarmente Contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x\rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall\, x \in X'$, onde X' é dual de X. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}$.

Observação: Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.

Lema 1.28. *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração: Ver [18].

1.3 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no capítulo 2. O Teorema nos fornece a existência de solução local para um problema de Cauchy em um intervalo $[0,t]$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [9].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.3}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.29. (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x = x(t)$ de (1.3) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Corolário 1.30. *Sejam $\Omega = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x = x(t)$ é uma solução de (1.3) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

1.4 Topologias Fraca e Fraca $\star$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Definição 1.31. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.32. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [3].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.33. *A topologia fraca $\star$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.34. *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E', então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.35. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E, então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } E.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.36. *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E', então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.37. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo, $A \subset E$ um convexo fechado, não vazio e $\varphi : A \to]-\infty, +\infty]$. Seja φ uma função convexa, semicontínua inferiormente, $\varphi \not\equiv +\infty$ tal que*

$$\lim_{\|x\|\to+\infty} \varphi(x) = +\infty, \ \forall x \in A.$$

Então φ atinge seu minímo sobre A, isto é, existe $x_0 \in A$ tal que $\varphi(x_0) = \min_{x\in A} \varphi(x)$

Demonstração: Ver [3].

Definição 1.38. *Seja* $J : E \to]-\infty, +\infty]$. *Se existir*

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{J(u + \lambda v) - J(u)}{\lambda} = J'(u, v).$$

$J'(u, v)$ *é denominada a primeira variação de* J *em* u *na direção de* v.

Se existir $u^* \in E'$ *tal que* $\langle u^*, v \rangle_{E',E} = J'(u, v)$ $\forall v \in E$, *dizemos que* J *é diferenciável à Gâteaux em* u *e* u^* *é denominado a diferencial de Gâteaux de* J *em* u. *Denotamos*

$$\langle u^*, v \rangle = \langle J'(u), v \rangle \ \forall\, v \in E.$$

Proposição 1.39. *Seja* E *um espaço normado,* K *um convexo de* E, $J : K \to \mathbb{R}$ *convexo e diferenciável à Gâteaux.*

Seja $u \in K$, *então as seguintes expressões são equivalentes:*

(i) $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$

(ii) $\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0;\ \forall\, v \in K$.

Demonstração:

$(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $u \in K$ tal que $J(u) = \min_{v \in K} J(v)$. Assim,

$$J(u) \leq J((1 - \lambda)u + \lambda v),\ \forall\, v \in K \text{ e } \forall\, \lambda \in [0, 1].$$

Logo,

$$\frac{J(u + \lambda(v - u)) - J(u)}{\lambda} \geq 0.$$

No limite obtemos

$$\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \ \forall\, v \in K.$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $u \in K$ tal que $\langle J'(u), v - u \rangle \geq 0 \ \forall\, v \in K$.

Como J é convexo temos que se $\lambda \in [0, 1]$ então

$$J((1 - \lambda)u + \lambda v) \leq (1 - \lambda)J(u) + \lambda J(v),\ \forall v \in K,$$

ou seja,

$$J(u + \lambda(v - u)) \leq J(u) + \lambda(J(v) - J(u)).$$

Logo,

$$\frac{J(u+\lambda(v-u))-J(u)}{\lambda} \leq J(v)-J(u).$$

Tomando o limite quando $\lambda \to 0$, segue que

$$\langle J'(u), v-u\rangle \leq J(v)-J(u),\ \forall v \in K.$$

Portanto, $J(u) \leq J(v),\ \forall v \in K$ $\square$

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

Neste capítulo estudaremos a existência e unicidade de solução do problema abaixo, via método de Faedo-Galerkin.

Dado $0 \leq \alpha < 2$, definamos

$$\forall x \in [0,1] \quad a(x) := x^\alpha.$$

Para $T > 0$, ponhamos

$$Q_T = (0,T) \times (0,1)$$

e consideremos o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} u_t - (au_x)_x = f & (t,x) \in Q_T \\ u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde u_0 é definido em $L^2(0,1)$ e $f \in L^2(Q_T)$.

Antes, porém, de investigarmos a existência e unicidade de solução, estudaremos as propriedades do espaço onde encontraremos tal solução.

2.1 O Espaço $H_a^1(0,1)$

Definição 2.1. *Para $0 \leq \alpha < 1$, definimos o espaço $H_a^1(0,1)$ por*

$$H_a^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1); u \text{ é absol. cont. em } [0,1],\ \sqrt{a}u_x \in L^2(0,1) \text{ e } u(0) = u(1) = 0\},$$

e para $1 \leq \alpha < 2$,

$$H_a^1(0,1) := \{u \in L^2(0,1); u \text{ é local. absol. cont. em } (0,1],\ \sqrt{a}u_x \in L^2(0,1) \text{ e } u(1) = 0\}.$$

Proposição 2.2. *O espaço $H_a^1(0,1)$ é um espaço de Hilbert, com produto interno definido por*

$$(u,v)_{H_a^1(0,1)} = \int_0^1 (uv + au_xv_x)dx.$$

Demonstração: É imediato que a função bilinear $(.,.)_{H_a^1(0,1)}$ acima, define um produto interno. A norma proveniente deste produto interno é dada por

$$||u||_{H_a^1(0,1)} = \left(\int_0^1 (|u|^2 + |\sqrt{a}u_x|^2)dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Mostremos então, que o espaço $H_a^1(0,1)$ munido desta norma é completo.

De fato, sendo $\{u_\mu\} \subset H_a^1(0,1)$ uma sequência de Cauchy, temos

$$||u_\mu - u_\nu||^2_{H_a^1(0,1)} \to 0 \quad \text{em} \quad H_a^1(0,1),$$

assim,

$$\begin{aligned} ||u_\mu - u_\nu||^2 + ||\sqrt{a}u_{\mu x} - \sqrt{a}u_{\nu x}||^2 &= \int_0^1 \left[|u_\mu - u_\nu|^2 + |\sqrt{a}u_{\mu x} - \sqrt{a}u_{\nu x}|^2\right] dx \\ &= ||u_\mu - u_\nu||^2_{H_a^1(0,1)} \to 0 \quad \text{quando} \quad \mu,\nu \to \infty. \end{aligned}$$

Segue daí que $\{u_\mu\}$ e $\{\sqrt{a}u_{\mu x}\}$ são sequências de Cauchy em $L^2(0,1)$. Logo, existem $u, v \in L^2(0,1)$ tais que

$$u_\mu \to u \quad \text{e} \quad \sqrt{a}u_{\mu x} \to v \text{ em } L^2(0,1).$$

Da imersão de $L^2(0,1)$ em $\mathcal{D}'(0,1)$, temos da primeira convergência acima que

$$u_{\mu x} \to u_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,1).$$

Como $\sqrt{a} \in C^\infty([0,1])$, então $\sqrt{a}u_{\mu x} \to \sqrt{a}u_x$ em $\mathcal{D}'(0,1)$.

Por outro lado, da segunda convergência, vem que

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \to v \text{ em } \mathcal{D}'(0,1),$$

donde, pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,1)$, decorre que $v = \sqrt{a}u_x$. Portanto, segue que $\{u_\mu\} \subset H_a^1(0,1)$ é tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{e} \quad \sqrt{a}u_{\mu x} \to \sqrt{a}u_x \quad \text{em} \quad L^2(0,1). \tag{2.2}$$

Resta-nos provar que $u \in H_a^1(0,1)$. Para tal provaremos inicialmente que

$$u_x \in L^1(0,1),$$

o que nos permitirá concluir que $u \in W^{1,1}(0,1)$.

Com efeito, sejam $0 \le \alpha < 1$ e $\epsilon > 0$. Então

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 x^{-\alpha} dx = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\epsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right] = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Logo,

$$\int_0^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx = \frac{1}{1-\alpha}. \tag{2.3}$$

De (2.2), (2.3) e lembrando que $\sqrt{a} = x^{\frac{\alpha}{2}}$ vem que $u_x \in L^1(0,1)$, pois

$$\begin{aligned} \int_0^1 |u_x| dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 |x^{-\frac{\alpha}{2}} x^{\frac{\alpha}{2}} u_x| dx \quad &\le \left(\int_0^1 |x^{\frac{\alpha}{2}} u_x|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lim_{\epsilon \to 0} \int_\epsilon^1 \left(x^{-\frac{\alpha}{2}}\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|\sqrt{a}u_x\| \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Sendo assim $u_x \in L^1(0,1)$ e, consequentemente, $u \in W^{1,1}(0,1)$. Além disso, temos as seguintes desigualdades:

$$||u||_{L^1(0,1)} \le c_1 ||u||$$

$$||u_x||_{L^1(0,1)} \le c_2 ||\sqrt{a}u_x||.$$

Tomando $c = \max\{c_1, c_2\}$ concluímos que

$$||u||_{L^1(0,1)} + ||u_x||_{L^1(0,1)} \le c[||u|| + ||\sqrt{a}u_x||].$$

Notemos ainda que, utilizando os mesmos cálculos de (2.4), decorre que

$$\|u_{\mu x}\|_{L^1(0,1)} \le c_3 \|\sqrt{a}u_{\mu x}\|$$

e, sendo assim, de (2.2)

$$u_{\mu x} \to u_x \text{ em } L^1(0,1).$$

De (2.2) e da convergência acima obtemos que

$$u_\mu \to u \text{ em } W^{1,1}(0,1)$$

e, portanto,

$$u_\mu \to u \text{ em } C^0([0,1]).$$

Donde $u_\mu(0) \to u(0)$ e $u_\mu(1) \to u(1)$. Do fato que $u_\mu(0) = u_\mu(1) = 0$ vem que

$$u(0) = u(1) = 0,$$

e, então

$$u \in H_a^1(0,1) \text{ e } u_\mu \to u \text{ em } H_a^1(0,1).$$

O que conclui a prova para $0 \leq \alpha < 1$.

Para $1 \leq \alpha < 2$, o resultado permanece verdadeiro, pois considereando ω aberto tal que $\omega \subset\subset (0,1]$; a integral dada em (2.4) existe em ω. □

Proposição 2.3. *O espaço $C_0^\infty(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$, ou seja,*

$$\overline{C_0^\infty(0,1)}^{H_a^1(0,1)} = H_a^1(0,1).$$

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que $C^1([0,1])$ é denso em $H_a^1(0,1)$. Com efeito, seja $u \in H_a^1(0,1)$, então $u \in L^2(0,1)$ e $\sqrt{a}u_x \in L^2(0,1)$. Seja $0 < \delta < \frac{1}{4}$, temos que

$$u \in L^2(\delta, 1-\delta) \text{ e } \sqrt{a}u_x \in L^2(\delta, 1-\delta),$$

donde,

$$u_x = \frac{\sqrt{a}u_x}{\sqrt{a}} \leq \frac{\sqrt{a}u_x}{C} \in L^2(\delta, 1-\delta), \text{ onde } C^{-1} = \min_{x\in[\delta,1-\delta]} \sqrt{a(x)} > 0.$$

Segue, portanto, que $u \in H^1(\delta, 1-\delta)$ e, da densidade de $C^1([\delta, 1-\delta])$ em $H^1(\delta, 1-\delta)$, decorre que dado $\epsilon_0 > 0$ existe $f \in C^1([\delta, 1-\delta])$ tal que

$$\int_\delta^{1-\delta} (|u-f|^2 + |u_x - f_x|^2)dx < \epsilon_0.$$

Como $a(x) = x^\alpha$, $x \in [\delta, 1-\delta]$ e $0 \leq \alpha < 2$, obtemos

$$1 \leq \frac{1}{(1-\delta)^\alpha} \leq \frac{1}{x^\alpha} \leq \frac{1}{\delta^\alpha}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + a(x)|u_x - f_x|^2\right) dx &\leq \int_\delta^{1-\delta} |u-f|^2 dx + \frac{1}{(1-\delta)^\alpha} \int_\delta^{1-\delta} a(x)|u_x - f_x|^2 dx \\ &\leq \int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + |u_x - f_x|^2\right) dx < \epsilon_0. \end{aligned}$$

Mostra-se que, com uma reflexão apropriada em torno dos pontos δ e $1-\delta$, para $\epsilon > 0$ dado, existe uma extensão G de f em $C^1([0,1])$, satisfazendo

$$\int_0^1 (|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2) dx < \epsilon + c\left(\int_0^{2\delta} (|u|^2 + a(x)|u_x|^2) dx + \int_{1-2\delta}^1 (|u|^2 + a(x)|u_x|^2) dx\right), \tag{2.5}$$

para alguma constante $c > 0$ e

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{1 + 4\left(\dfrac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) + 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}.$$

A reflexão pode ser construída como segue. Inicialmente, consideremos $(0, \delta)$. Fixemos $0 < \mu_1 < \mu_2 < 1$ e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ e $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = -1$.

Observemos que

$$\lambda_2 = \frac{-1-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} < 0 \text{ e, portanto } \lambda_1 > 0.$$

Então, pondo

$$h(x) = \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) + \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x)), \quad \forall x \in [0, \delta],$$

e considerando as desigualdades

$$\delta \leq \delta + \mu_i(\delta - x) \leq \delta + \mu_i\delta = \delta(1+\mu_i) < 2\delta < 1-\delta, i = 1, 2,$$

concluímos que

$$h(\delta) = \lambda_1 f(\delta) + \lambda_2 f(\delta) = f(\delta)$$

$$h_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))$$

$$h_x(\delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta) = f_x(\delta).$$

De maneira análoga, para $x \in [1-\delta, 1]$, definindo

$$g(x) = \lambda_1 f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) + \lambda_2 f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x)), \quad \forall x \in [1-\delta, 1],$$

obtemos

$$g(1-\delta) = \lambda_1 f(1-\delta) + \lambda_2 f(1-\delta) = f(1-\delta)$$

$$g_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))$$

$$g_x(1-\delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1-\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(1-\delta) = f_x(1-\delta).$$

Desta forma, construímos uma extensão G para f em $C^1([0,1])$ dada por:

$$G(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq \delta \\ f(x), & \delta \leq x \leq 1-\delta \\ g(x), & 1-\delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

De acordo com o Apêndice verificamos que a função $G(x)$ acima definida verifica (2.5). Além disso,

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_0^{2\delta}(|u|^2 + a(x)|u_x|^2)dx + \int_{1-2\delta}^{1}(|u|^2 + a(x)|u_x|^2)dx\right) = 0. \tag{2.6}$$

De (2.5) e (2.6) concluímos que $C^1([0,1])$ é denso em $H^1_a(0,1)$.

Para concluirmos a prova, usaremos a observação 1.15. Seja $u \in [H^1_a(0,1)]'$, pelo Teorema da representação de Riesz existe uma única $f \in H^1_a(0,1)$ tal que

$$\langle u, \varphi\rangle = (f,\varphi)_{H^1_a(0,1)}, \quad \forall\varphi \in H^1_a(0,1) \text{ e } \|f\|_{H^1_a(0,1)} = \|u\|_{[H^1_a(0,1)]'}.$$

Tome $\varphi \in C_0^\infty(0,1)$ de modo que $(f,\varphi)_{H^1_a(0,1)} = 0$, ou seja,

$$\int_0^1 (f\varphi + a(x)f_x\varphi_x)dx = 0.$$

Consequentemente, $-(af_x)_x + f = 0$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Mais ainda, como $f \in H^1_a(0,1)$ segue que

$$-(af_x)_x + f = 0 \text{ em } H^1_a(0,1). \tag{2.7}$$

De (2.7) concluímos que $af_x \in H^1(0,1)$.

Da densidade de $C^1([0,1])$ em $H^1_a(0,1)$, temos que existe

$$g_n \in C^1([0,1]), \text{ tal que } g_n \longrightarrow f \text{ em } H^1_a(0,1). \tag{2.8}$$

Portanto, compondo (2.7) com g_n obtemos

$$0 = \langle f - (af_x)_x, g_n \rangle.$$

Através de integração por partes, temos que

$$0 = (f - (af_x)_x, g_n) = af_x g_n \Big|_0^1 + \int_0^1 (af_x g_{nx} + f g_n) dx. \tag{2.9}$$

Para $0 \leq \alpha < 1$, temos a seguinte cadeia de imersões

$$C^1([0,1]) \hookrightarrow H^1_a(0,1) \hookrightarrow W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$$

De (2.8), segue que $g_n \to f$ em $C^0([0,1])$, ou seja, $g_n(0) \to f(0) = 0$ e $g_n(1) \to f(1) = 0$, do fato que $af_x(0)$ e $af_x(1)$ estão definidas, temos que

$$(af_x f)(0) = 0 = (af_x f)(1).$$

Tomando o limite em (2.9) temos

$$0 = \int_0^1 (af_x^2 + f^2) dx = (f, f)_{H^1_a(0,1)}.$$

Para $1 \leq \alpha < 2$, temos que $af_x g_n \to af_x f$ em $L^1(0,1)$ e $((af_x)g_n)_x = (af_x)_x g_n + (af_x)g_{nx} \to ((af_x)f)_x$ em $L^1(0,1)$, observe que

$$\int_0^1 |af_x(g_{nx} - f_x)| dx = \int_0^1 |\sqrt{a} f_x| |\sqrt{a} g_{nx} - \sqrt{a} f_x| dx \leq \|\sqrt{a} f_x\| \, \|\sqrt{a} g_{nx} - \sqrt{a} f_x\| \to 0.$$

Afirmamos que para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(af_x g_n)(x) \to 0 \text{ quando } x \to 0, \tag{2.10}$$

logo

$$0 = (f - (af_x)_x, g_n) = (af_x g_n)(1) + \int_0^1 (af_x g_{nx} + f g_n) dx. \tag{2.11}$$

Tomando o limite em (2.11) e observando que $(af_x f)(1) = (af_x)(1) f(1) = 0$, segue o desejado.

Portanto, segue $f \equiv 0$, consequentemente, $u \equiv 0$ como desejávamos provar. $\square$

2.2 O Operador $A(u) = (au_x)_x$

Sejam V e H espaços de Hilbert tais que V tem imersão contínua e densa em H e $b(u,v)$ uma forma bilinear e contínua em $V \times V$. Definamos o operador

$$\begin{array}{rccc} A: & D(A) & \rightarrow & H \\ & u & \rightarrow & A(u) \end{array}$$

dado por

$$D(A) := \{u \in V;\ \text{existe } f \in H \text{ que verifica } b(u,v) = (f,v), \quad \forall v \in V\}$$

e

$$(A(u), v) = b(u,v); \quad \forall u \in D(A), \quad \forall v \in V. \tag{2.12}$$

Denotemos por M o seguinte conjunto

$$M := \{u \in H^1_a(0,1); au_x \in H^1(0,1)\}.$$

Seja $b(u,v)$ a seguinte forma bilinear

$$\begin{array}{rccc} b(.,.): & H^1_a(0,1) \times H^1_a(0,1) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \rightarrow & b(u,v) \end{array}$$

dada por

$$b(u,v) = -\int_0^1 au_x v_x.$$

Como $H^1_a(0,1)$ e $L^2(0,1)$ são espaços de Hilbert tais que $H^1_a(0,1)$ tem imersão contínua e densa em $L^2(0,1)$ e $b(u,v)$ é uma forma bilinear e contínua, mostraremos que neste contexto

$$D(A) = M \text{ e } A(u) = (au_x)_x. \tag{2.13}$$

De fato, seja $u \in D(A)$. Logo $u \in H^1_a(0,1)$ e existe $f \in L^2(0,1)$ tal que

$$(f,v) = b(u,v) = -\int_0^1 au_x v_x \quad \forall v \in H^1_a(0,1).$$

Tomando $v = \varphi \in C_0^\infty(0,1)$ na identidade acima, resulta que

$$\langle (au_x)_x, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(0,1),$$

ou seja, $(au_x)_x = f$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Como $f \in L^2(0,1)$ segue que $(au_x)_x \in L^2(0,1)$ e, portanto, $u \in M$.

Reciprocamente, seja $u \in M$. Então, $u \in H_a^1(0,1)$ e $(au_x)_x \in L^2(0,1)$, donde

$$((au_x)_x, \varphi) = b(u,\varphi); \forall\, \varphi \in C_0^\infty(0,1).$$

Da densidade de $C_0^\infty(0,1)$ em $H_a^1(0,1)$ e da continuidade da forma bilinear $b(u,v)$, decorre que

$$((au_x)_x, v) = b(u,v),\ \forall\, v \in H_a^1(0,1). \tag{2.14}$$

Logo, $u \in D(A)$. Do exposto acima concluímos que $D(A) = M$ e de (2.14) temos que

$$A(u) = (au_x)_x.$$

Observação 2.4. *Quando* $1 \leq \alpha < 2$ *segue que*

$$D(A) \subset \{u \in L^2(0,1); u \text{ é loc. absl. cont. em } (0,1], au_x \in H^1(0,1), au \in H_0^1(0,1) \text{ e } (au_x)(0) = 0\}.$$

De fato, para tanto, basta verificarmos que se $u \in D(A)$ então $au \in H_0^1(0,1)$ e $(au_x)(0) = 0$, posto que as outras propriedades são imediatas. Como $a(x) = x^\alpha$ é limitada em $[0,1]$, temos que o $\sup ess_{x\in]0,1[} a(x) < +\infty$ e como $u \in H_a^1(0,1)$ segue que $au \in L^2(0,1)$. Também $a_x(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ e $1 \leq \alpha < 2$, logo $\sup ess_{x\in]0,1[} a_x(x) < +\infty$ e assim, $a_x u \in L^2(0,1)$.

Como $au_x \in L^2(0,1)$, obtemos

$$(au)_x = a_x u + au_x \in L^2(0,1),$$

ou seja,

$$au \in H^1(0,1).$$

Da imersão $H^1(0,1) \hookrightarrow C^0([0,1])$, e do fato que $u(1) = 0$, obtemos $(au)(1) = 0$.

Resta-nos provar que $(au)(0) = 0$ e $(au_x)(0) = 0$. Afirmamos que

$$(au)(x) = x^\alpha u \longrightarrow 0 \text{ quando } x \longrightarrow 0.$$

De fato, suponha por absurdo, que

$$x^{\alpha}u \longrightarrow l \text{ quando } x \longrightarrow 0 \text{ e } l \neq 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $|x| < \delta$ então

$$|x^{\alpha}|u| - |l|| < |x^{\alpha}u - l| < \epsilon.$$

Donde, para ϵ suficientemente pequeno segue que

$$x^{\frac{\alpha}{2}}|u| > \frac{|l| - \epsilon}{x^{\frac{\alpha}{2}}} > 0,\ 0 < |x| < \delta$$

ou seja,

$$x^{\alpha}|u|^2 > \frac{(|l| - \epsilon)^2}{x^{\alpha}}.$$

Integrando a desigualdade acima no intervalo (η, δ), com $0 < \eta < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\delta} x^{\alpha}|u|^2 dx &> (|l| - \epsilon)^2 \int_{\eta}^{\delta} x^{-\alpha} dx \\ &> (|l| - \epsilon)^2 \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{\eta}^{\delta} \\ &> (|l| - \epsilon)^2 \left[\frac{\delta^{1-\alpha}}{1-\alpha} + \frac{\eta^{1-\alpha}}{\alpha - 1}\right]. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Fazendo $\eta \longrightarrow 0$ temos que o termo do lado esquerdo da desigualdade (2.15) tende à $+\infty$ e, então $x^{\frac{\alpha}{2}}u \notin L^2(0,1)$, o que é uma contradição.

Analogamente se mostra que $(au_x)(0) = 0$.

Provando assim a afirmação (2.10) feita na proposição 2.3.

Proposição 2.5. *O operador $A : D(A) \subset L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1)$, tem domínio denso, é negativo, auto-adjunto e fechado.*

Demonstração:

(i) Domínio denso

Da proposição 2.3 e das seguintes imersões

$$\mathcal{D}(0,1) \hookrightarrow D(A) \hookrightarrow H_a^1(0,1) \hookrightarrow L^2(0,1),$$

segue que $D(A)$ é denso em $L^2(0,1)$

(ii) A é negativo

Tomando $A(u) = (au_x)_x$, então

$$\langle A(u), u\rangle = \langle (au_x)_x, u\rangle = -(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}u_x) \leq 0.$$

Portanto, A é negativo.

(iii) A é auto-adjunto

Sejam $u, v \in D(A)$. Como o domínio de A é denso em $L^2(0,1)$, basta mostrarmos que A é simétrico.

Com efeito, da relação de adjunção temos

$$\langle u, A^*v\rangle = \langle Au, v\rangle.$$

Assim,

$$\langle Au, v\rangle = \langle (au_x)_x, v\rangle = -(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}v_x) = \langle u, (av_x)_x\rangle = \langle u, A(v)\rangle.$$

(iv) A é fechado

Mostraremos que o gráfico de A é fechado para concluírmos que A é fechado. Seja $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que

$$u_n \to u \text{ em } H_a^1(0,1) \text{ e } A(u_n) \to v \text{ em } L^2(0,1). \tag{2.16}$$

Vamos mostrar que $v = A(u)$, assim $(u_n, A(u_n)) \to (u, A(u))$, donde seguirá que A é fechado.

De (2.16) vem $au_{nx} \to au_x$ em $L^2(0,1)$. Logo

$$(au_{nx})_x \to (au_x)_x \text{ em } \mathcal{D}'(0,1). \tag{2.17}$$

Por outro lado,

$$(au_{nx})_x = A(u_n) \to v \text{ em } L^2(0,1).$$

Da imersão $L^2(0,1)$ em $\mathcal{D}'(0,1)$ e, da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,1)$, vem $v = (au_x)_x$.

Portanto,

$$A(u) = (au_x)_x = v.$$

O que mostra que A é fechado. $\square$

Observação 2.6. *Do fato que $D(A)$ é denso em $H_a^1(0,1)$ é possível estender A à todo $H_a^1(0,1)$.*

De fato, o operador A é limitado. Sejam $u \in D(A)$ e $v \in H_a^1(0,1)$, então

$$\|(Au, v)\| = \|((a(x)u_x)_x, v)\| = \|(\sqrt{a(x)}u_x, \sqrt{a(x)}v_x)\| \leq \|u\|_{H_a^1(0,1)} \|v\|_{H_a^1(0,1)}.$$

Assim $\|Au\| \leq c\|u\|_{H_a^1(0,1)}$ e, portanto limitado.

Definamos a extensão de A da seguinte forma. Para cada $u \in H_a^1(0,1)$ existe $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $u_n \longrightarrow u$ em $H_a^1(0,1)$. Ponhamos

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{A}: & H_a^1(0,1) & \rightarrow & [H_a^1(0,1)]' \\ & u & \mapsto & \widetilde{A}(u) \end{array}$$

onde $\widetilde{A}(u) = \lim\limits_{n \to +\infty} A(u_n)$.

Já vimos que $au_{nx} \longrightarrow au_x$ em $\mathcal{D}'(0,1)$. Seja $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$ temos

$$\langle (au_{nx})_x, \varphi \rangle = -\langle au_{nx}, \varphi_x \rangle \rightarrow -\langle au_x, \varphi_x \rangle = \langle (au_x)_x, \varphi \rangle \text{ em } \mathcal{D}'(0,1),$$

ou seja,

$$\langle \widetilde{A}(u), \varphi \rangle = \langle (au_x)_x, \varphi \rangle, \; \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(0,1).$$

Tomemos $w \in H_a^1(0,1)$. Como $\mathcal{D}(0,1)$ é denso em $H_a^1(0,1)$ segue que

$$\langle \widetilde{A}(u), w \rangle = \langle (au_x)_x, w \rangle \, \forall w \in H_a^1(0,1)$$

na dualidade $[H_a^1(0,1)]' \times H_a^1(0,1)$.

No que segue denotaremos $\widetilde{A}$ também por A.

2.3 Existência e Unicidade de Solução Regular

Nessa seção, enunciaremos e demonstraremos para o caso regular, sob quais circunstâncias o problema (2.1) admite solução única. Utilizaremos para isto, o método de Faedo-Galerkin.

Teorema 2.7. *Seja $f \in H^1(Q_T)$. Para todo $u_0 \in D(A)$ o problema (2.1) possui uma única solução u pertencente à classe*

$$C^0([0,T]; H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T; D(A)) \cap H^1(0,T; L^2(0,1)).$$

Demonstração:

(i) Problema Aproximado

Observemos que $D(A)$ é separável. De fato, consideremos em $D(A)$ a norma dada por

$$\|u\|_{D(A)} = \|u\|_{H_a^1(0,1)} + \|A(u)\|, \forall\, u \in D(A),$$

definamos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rccc} T: & D(A) & \rightarrow & L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1) \\ & u & \mapsto & (\, u \,,\ \sqrt{a} u_x,\ \ (a u_x)_x\,). \end{array}$$

T é uma isometria e, portanto, $T(D(A))$ é um subespaço fechado de $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$.

Como o espaço $L^2(0,1) \times L^2(0,1) \times L^2(0,1)$ é separável temos que $T(D(A))$ também é separável e, por conseguinte $D(A)$ é separável.

Seja $\{w_j\}$ uma base de $D(A)$. Ponhamos

$$W_m = [w_1, w_2, \cdots, w_m],$$

ou seja, W_m é o subespaço de $D(A)$ gerado pelos m primeiros vetores da base de $D(A)$.

Consideremos em W_m o problema aproximado, o qual consiste em determinar $u_m(t)$, verificando

$$\left\{ \begin{array}{l} u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g_{im}(t) w_i(x) \\ (u'_m(t), w_j) + (\sqrt{a(x)} u_{mx}, \sqrt{a(x)} w_{jx}) = (f(t), w_j),\ j = 1, \cdots, m \\ \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u_0 \text{ em } D(A). \end{array} \right. \tag{2.18}$$

Observemos que pelo Teorema de Carathéodory o problema (2.18) possui solução local em algum intervalo $[0, t_m)$, $t_m < T$ de modo que $u_m(t)$ é absolutamente contínua e $u'_m(t)$ existe quase sempre.

Para provarmos a existência de solução local, usaremos os passos que seguem.

De (2.18)$_2$ temos para $j = 1, \cdots, m$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)w_i, w_j\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \sqrt{a(x)}g_{im}(t)w_{ix}, \sqrt{a(x)}w_{jx}\right) = (f(t), w_j).$$

Sem perda da generalidade, podemos supor que $\{w_j\}$ é ortonormal em $L^2(0,1)$, assim

$$g'_{jm}(t) + \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\left(\sqrt{a(x)}w_{ix}, \sqrt{a(x)}w_{jx}\right) = (f(t), w_j);\ j = 1, \cdots, m. \tag{2.19}$$

De (2.19) segue que

$$\begin{pmatrix} g'_{1m} \\ g'_{2m} \\ \vdots \\ g'_{mm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{1x}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{1x}) \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{2x}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{2x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \vdots \\ g_{mm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, w_1) \\ (f, w_2) \\ \vdots \\ (f, w_m) \end{pmatrix}. \tag{2.20}$$

Definamos

$$\mathbb{Y}_m(t) := \begin{pmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} (f, w_1) \\ (f, w_2) \\ \vdots \\ (f, w_m) \end{pmatrix}$$

$$A := \begin{pmatrix} (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{1x}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{1x}) \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{2x}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{2x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\sqrt{a(x)}w_{1x}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) & \cdots & (\sqrt{a(x)}w_{mx}, \sqrt{a(x)}w_{mx}) \end{pmatrix}.$$

Segue de (2.20) que

$$\mathbb{Y}'_m(t) + A\mathbb{Y}_m(t) = B \tag{2.21}$$

e

$$\mathbb{Y}_m(0) := \begin{pmatrix} g_{1m}(0) \\ g_{2m}(0) \\ \vdots \\ g_{mm}(0) \end{pmatrix} = \mathbb{Y}_{0m}. \tag{2.22}$$

De (2.21) e (2.22) temos o seguinte problema de E.D.O

$$\begin{aligned} \mathbb{Y}'_m(t) &= -A\mathbb{Y}_m(t) + B \\ \mathbb{Y}_m(0) &= \mathbb{Y}_{0m}. \end{aligned}$$

Ponhamos $F(t, \mathbb{Y}_m(t)) = -A\mathbb{Y}_m(t) + B : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, então o sistema acima se escreve

$$\begin{cases} \mathbb{Y}'_m(t) &= F(t, \mathbb{Y}_m(t)) \\ \mathbb{Y}_m(0) &= \mathbb{Y}_{0m}. \end{cases} \tag{2.23}$$

Considere $D = [0, T] \times B_b$, onde

$$B_b := \{x \in \mathbb{R}^m; \text{ e } |x| \leq b, \quad b > 0\}.$$

F é contínua em relação a $\mathbb{Y}_m$, para cada t fixo.

Com efeito, fixado t, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{||A||}$ tal que para cada par $\mathbb{Y}^1_m$, $\mathbb{Y}^2_m$ verificando $|\mathbb{Y}^1_m(t) - \mathbb{Y}^2_m(t)| < \delta$ implica

$$\begin{aligned} |F(t, \mathbb{Y}^1_m(t)) - F(t, \mathbb{Y}^2_m(t))| &= | - A\mathbb{Y}^1_m(t) + B + A\mathbb{Y}^2_m(t) - B| \\ &\leq ||A|||\mathbb{Y}^1_m(t) - \mathbb{Y}^2_m(t)| < ||A||\delta = \epsilon. \end{aligned}$$

F é contínua em relação a t, para cada $\mathbb{Y}_m$ fixo. Pois fixado $\mathbb{Y}_m(t)$, temos que F não depende de t, isto é, F é uma constante e, assim contínua, logo mensurável.

$$|F(t, \mathbb{Y}_m(t))| = | - A\mathbb{Y}_m(t) + B| \leq ||A||b + |B| < \infty \text{ para todo } \mathbb{Y}_m(t) \in B_b.$$

Tendo em mãos as afirmações acima, segue do Teorema de Carathéodory, Teorema 1.29, que existe uma solução $\mathbb{Y}_m(t)$ de (2.23) em $(0, t_m)$, $\quad t_m < T$. Donde, para todo m, temos funções $g_{1m}(t), \cdots, g_{mm}(t)$ que satisfazem a seguinte equação dada em (2.19).

(ii) Primeira Estimativa a Priori

Esta etapa, nos fornecerá estimativas que nos permitirão prolongar a solução aproximada $u_m(t) \in W_m$, definida para todo $t \in [0, t_m)$, $\quad t_m < T$, a todo intervalo $[0, T]$.

Multiplicando o problema aproximado (2.18) por $g_{jm}(t)$ e somando em j de 1 à m, obtemos

$$(u'_m(t), u_m(t)) + (\sqrt{a}u_{mx}(t), \sqrt{a}u_{mx}(t)) = (f(t), u_m(t)). \tag{2.24}$$

Afirmamos que

$$(u'_m(t), u_m(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m(t)||^2 \tag{2.25}$$

para todo $t \in (0, T)$.

De fato, seja uma $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$, então pelo teorema de Fubini, temos,

$$\begin{aligned}
\langle (u'_m(t), u_m(t)), \theta(t) \rangle &= \int_0^T \int_0^1 u'_m(t) u_m(t) dx \theta(t) dt \\
&= \int_0^1 \int_0^T \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (u_m(x,t))^2 \theta(t) dt dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(u_m(x,t))^2 \theta(t) \Big|_0^t - \int_0^T (u_m(x,t))^2 \theta'(t) dt \right] dx \\
&= -\int_0^T \int_0^1 \frac{1}{2} (u_m(x,t))^2 \theta'(t) dx dt \\
&= -\left\langle \frac{1}{2} ||u_m(x,t)||^2, \theta'(t) \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{dt} ||u_m(x,t)||^2, \theta(t) \right\rangle
\end{aligned}$$

donde segue a afirmação.

Assim, a igualdade (2.24) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} ||u_m(t)||^2 + \int_0^1 a(x) |u_{mx}(t,x)|^2 dx = (f(t), u_m(t)).$$

Integrando de 0 à t, $t < t_m$, a expressão acima, segue que

$$\frac{1}{2} \int_0^t \frac{d}{ds} ||u_m(s)||^2 ds + \int_0^t \int_0^1 a(x) |u_{mx}(s,x)|^2 dx ds = \int_0^t (f(s), u_m(s)) ds.$$

Logo,

$$\frac{1}{2} ||u_m(t)||^2 + \int_0^t \int_0^1 a(x) |u_{mx}(s,x)|^2 dx ds = \frac{1}{2} ||u_m(0)||^2 + \int_0^t (f(s), u_m(s)) ds. \tag{2.26}$$

Por (2.18) temos que $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ em $D(A)$. Portanto, existe uma constante $c_1 > 0$ tal que $||u_m(0)|| < c_1$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e, ainda, pelas desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young

$$(f, u_m(s)) \leq ||f|| \, ||u_m(s)|| \leq \frac{1}{2} \left(||f||^2 + ||u_m(s)||^2 \right).$$

Desta forma, de (2.26) segue que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} ||u_m(t)||^2 + \int_0^t \int_0^1 a(x) |u_{mx}(x)|^2 dx ds &\leq \frac{1}{2} \left(c_1 + \int_0^t [||f(s)||^2 + ||u_m(s)||^2] \right) ds \\
&= \frac{1}{2} c_1 + \frac{1}{2} \int_0^t ||f(s)||^2 ds + \int_0^t \frac{1}{2} ||u_m(s)||^2 ds \\
&\leq c_2 + \int_0^t \left[\frac{1}{2} ||u_m(\xi)||^2 + \int_0^\xi \int_0^1 a(x) |u_{mx}(x)|^2 dx ds \right] d\xi
\end{aligned}$$

onde $c_2 = \dfrac{1}{2}c_1 + \dfrac{1}{2}\|f\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}$.

Definindo $q_m(t) := \dfrac{1}{2}||u_m(t)||^2 + \displaystyle\int_0^t \int_0^1 a(x)|u_{mx}(s,x)|^2 dxds$, obtemos

$$q_m(t) \leq c_2 + \int_0^t q_m(\xi)d\xi, \quad t \in [0, t_m]; m \in \mathbb{N},$$

e, pelo Lema de Gronwall, temos

$$q_m(t) \leq c_2 e^t < c_2 e^T = c_3 \quad \forall t \in [0, t_m[\text{ e } \forall m \in \mathbb{N}.$$

Como c_3 independe de t e de m, segue do Corolário 1.30 que para todo $m \in \mathbb{N}$, $u_m(t)$ pode ser prolongada a todo intervalo $[0, T]$, e além disso,

$$\{u_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \tag{2.27}$$

$$\{\sqrt{a}u_{mx}\} \text{ é limitada em } L^2(0, T; L^2(0, 1)). \tag{2.28}$$

(iii) Segunda Estimativa a Priori

Temos de (2.19) que

$$g'_{jm}(t) = (u'_m(t), w_j) = (f(t), w_j) - \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\left(\sqrt{a}w_{ix}, \sqrt{a}w_{jx}\right) \; j = 1, \ldots, m.$$

Como o lado direito da igualdade acima está em $L^2(0, T)$, resulta que g'_{jm} pertence à $L^2(0, T)$, onde aqui as derivadas são entendidas no sentido de Dini. Logo

$$\begin{aligned} \int_0^T ||u'_m(t)||^2 dt &= \int_0^T ||\sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)w_j||^2 dt \\ &\leq \int_0^T |g'_{jm}(t)|^2 dt < +\infty, \end{aligned}$$

ou seja,

$$u'_m \in L^2(0, T; L^2(0, 1)). \tag{2.29}$$

De (2.19) resulta que

$$g''_{jm}(t) = \frac{d}{dt}(u'_m(t), w_j) = (f'(t), w_j) - \sum_{i=1}^{m} g'_{im}(t)\left(\sqrt{a}w_{ix}, \sqrt{a}w_{jx}\right).$$

Como, novamente, o lado direito da desigualdade está em $L^2(0, T)$, segue que

$$g''_{jm} \in L^2(0, T),$$

onde as derivadas são no sentido das distribuições. Além disso,

$$\begin{aligned}\int_0^T ||u_m''(t)||^2 dt &= \int_0^T ||\sum_{j=1}^m g_{jm}''(t) w_j||^2 dt \\ &\leq \int_0^T |g_{jm}''(t)|^2 dt < +\infty,\end{aligned}$$

ou seja,

$$u_m'' \in L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.30}$$

Observando (2.30) e derivando $(2.18)_2$ em relação a t, obtemos

$$(u_m''(t), w_j) + (\sqrt{a} u_{mx}'(t), \sqrt{a} w_{jx}) = (f'(t), w_j),$$

multiplicando por $g_{jm}'(t)$ e somando em j, decorre que

$$(u_m''(t), u_m') + (\sqrt{a} u_{mx}', \sqrt{a} u_{mx}') = (f', u_m'). \tag{2.31}$$

Notemos que

$$(u_m''(t), u_m') = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||^2. \tag{2.32}$$

A igualdade acima é verificada analogamente à igualdade (2.25).

Logo, (2.31) pode ser reescrita como

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||^2 + \int_0^1 a(x)\|u_{mx}'(x)\|^2 dx = (f'(t), u_m'(t)). \tag{2.33}$$

Integrando (2.33) de 0 à T, e observando (2.29) e (2.30), vem

$$\frac{1}{2}||u_m'(t)||^2 + \int_0^T\int_0^1 a(x)\|u_{mx}'(s)\|^2 dxds = \frac{1}{2}||u_m'(0)||^2 + \int_0^T (f'(s), u_m'(s))ds.$$

Usando as desigualdades de Cauchy-Schwarz e Young, obtemos

$$||u_m'(t)||^2 + 2\int_0^T\int_0^1 a(x)\|u_{mx}'(s)\|^2 dxds \leq ||u_m'(0)||^2 + \int_0^T ||f'(s)||^2 ds + \int_0^T ||u_m'(s)||^2 ds.$$

Voltando a $(2.18)_2$ multiplicando por $g_{jm}'(t)$, somando em m e calculando em $t = 0$ temos

$$||u_m'(0)||^2 = (f(0), u_m'(0)) - (\sqrt{a} u_{mx}(0), \sqrt{a} u_{mx}'(0)),$$

ou seja,

$$||u_m'(0)||^2 \leq ||f(0)||||u_m'(0)|| + ||(a u_{mx})_x(0)||||u_m'(0)||,$$

donde,

$$||u'_m(0)|| \leq ||f(0)|| + ||(au_{mx})_x(0)||.$$

Por (2.18) temos que $u_m(0) = u_{0m} \to u_0$ em $D(A)$, segue que $(au_{mx})_x(0) = (au_{0mx})_x \to (au_{0x})_x$, portanto, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$||u'_m(0)|| \leq C_1, \, \forall m \in \mathbb{N}.$$

Donde,

$$||u'_m(t)||^2 + 2\int_0^T \int_0^1 a(x)\|u'_{mx}(s)\|^2 dxds \leq C_1 + \int_0^T ||f'(s)||^2 ds + \int_0^T ||u'_m(s)||^2 ds.$$

Tomando $C_2 = C_1 + \displaystyle\int_0^T ||f'(s)||^2 ds$, temos

$$\begin{aligned} ||u'_m(t)||^2 + 2\int_0^T \int_0^1 a(x)|u'_{mx}(x)|^2 dxds &\leq C_1 + \int_0^T [||f'(s)||^2 + ||u'_m(s)||^2] ds \\ &= C_1 + \int_0^T ||f'(s)||^2 ds + \int_0^T |||u'_m(s)||^2 ds \\ &\leq C_2 + \int_0^T \left[||u'_m(\xi)||^2 + 2\int_0^\xi \int_0^1 a(x)|u'_{mx}(x)|^2 dxds \right] d\xi. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, implica que existe C_3 independente de t e m tal que

$$||u'_m||^2 + \int_0^T \int_0^1 a(x)|u'_{mx}(x)|^2 dxds + \leq C_3$$

ou seja,

$$\{u'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)),$$

$$\{\sqrt{a}u'_{mx}\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(0,1)).$$

(iv) Passagem ao Limite

Do que foi provado anteriormente, temos

$$\{u_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.34}$$

$$\{u'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.35}$$

$$\{\sqrt{a}u_{mx}\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.36}$$

$$\{\sqrt{a}u'_{mx}\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.37}$$

Como $L^1(0,T;L^2(0,1))$ é separável e tendo em mente que $[L^1(0,T;L^2(0,1))]' = L^\infty(0,T;L^2(0,1))$ e que $L^2(0,T;L^2(0,1))$ é reflexivo segue de (2.34) à (2.37) e pelos lemas 1.36 e 1.35 que podemos extrair subseqüência $\{u_\mu\}$ de $\{u_m\}$ de modo que

$$u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.38}$$

$$u'_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \eta \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.39}$$

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \rightharpoonup \varpi \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.40}$$

$$\sqrt{a}u'_{\mu x} \rightharpoonup \xi \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.41}$$

Como $L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(0,1)) \cong L^2(Q_T)$. Segue de (2.38) e (2.39) que

$$u_{\mu x} \rightharpoonup u_x \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T)$$

e

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \;\text{ e }\; u'_{\mu x} \rightharpoonup u'_x \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.42}$$

Por outro lado, $\sqrt{a(x)} = \sqrt{x^\alpha} \in C^\infty(]0,1[)$ donde,

$$\sqrt{a(x)}u_{\mu x} \to \sqrt{a(x)}u_x \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.43}$$

$$\sqrt{a(x)}u'_{\mu x} \to \sqrt{a(x)}u'_x \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.44}$$

Das convergências acima e pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q_T)$ temos

$$\eta = u', \;\; \varpi = \sqrt{a(x)}u_x \;\text{ e }\; \xi = \sqrt{a(x)}u'_x.$$

Donde podemos concluir que

$$u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.45}$$

$$u'_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.46}$$

$$\sqrt{a}u_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a}u_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.47}$$

$$\sqrt{a}u'_{\mu x} \rightharpoonup \sqrt{a}u'_x \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.48}$$

De (2.45) à (2.48) concluímos que

$$u \in L^2(0,T;H^1_a(0,1)) \tag{2.49}$$

$$u' \in L^2(0,T;H_a^1(0,1)) \tag{2.50}$$

Sejam $j \in \mathbb{N}$ e $\mu \geq j$ e consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Multiplicando (2.18) por $\theta(t)$ e integrando em $[0,T]$, obtemos

$$\int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{a}u_{\mu x}, \sqrt{a}w_{jx})\theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt. \tag{2.51}$$

Passando o limite em (2.51) quando $\mu \longrightarrow +\infty$, segue que

$$\int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}w_{jx})\theta(t)dt = \int_0^T (f, w_j)\theta(t)dt. \tag{2.52}$$

Da arbitrariedade de $j \in \mathbb{N}$ e da totalidade dos $\{w_j^s\}$ em $D(A)$ decorre que

$$\int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\sqrt{a}u_x(t), \sqrt{a}v_x)\theta(t)dt = \int_0^T (f, v)\theta(t)dt \ \forall v \in D(A),\ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.53}$$

De (2.53) podemos concluir que

$$(u'(t), v) + (\sqrt{a}u_x(t), v) = (f(t), v) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall v \in H_a^1(0,1).$$

Ainda de (2.53), obtemos

$$u' - Au = f \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

Como $f \in H^1(0,T;L^2(0,1))$, $u' \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, segue que

$$Au(t) \in L^2(0,1) \text{ para quase todo } t \in]0,T[.$$

Logo,

$$u(t) \in D(A), \text{ para quase todo } t \in (0,T). \tag{2.54}$$

De (2.45), (2.54) e do fato que $\|A(u)\| \leq c\|u\|$, temos

$$u \in L^2(0,T;D(A)). \tag{2.55}$$

Por outro lado de (2.45) à (2.48) implica em

$$u \in H^1(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.56}$$

$$\sqrt{a}u_x \in H^1(0,T;L^2(0,1)). \tag{2.57}$$

Como $H^1(0,T;L^2(0,1)) \hookrightarrow C^0([0,T];L^2(0,1))$ decorre que

$$u \in C^0([0,T];H_a^1(0,1)).$$

(v) Verificação dos Dados Iniciais

Do que foi provado até agora, temos

$$u \in C^0([0,T];H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1)) \tag{2.58}$$

logo faz sentido calcular $u(0)$ e $u(T)$.

Verifiquemos que $u(0) = u_0$.

Com efeito, seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Então fixado j vem

$$\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt \longrightarrow \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt. \tag{2.59}$$

Integrando (2.59) por partes, decorre que

$$-(u_\mu(0), w_j) - \int_0^T ((u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt \longrightarrow -(u(0), w_j) + \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt,\ \mu \to +\infty.$$

De (2.46), obtemos

$$-(u_\mu(0), w_j) \longrightarrow -(u(0), w_j) \quad \forall j \in \mathbb{N},\ \mu \to +\infty$$

ou seja,

$$u_\mu(0) \rightharpoonup u(0) \text{ em } L^2(0,1).$$

Por outro lado, de (2.18) temos

$$u_m(0) \to u_0 \text{ em } D(A) \hookrightarrow L^2(0,1).$$

Pela unicidade do limite concluímos, que

$$u(0) = u_0.$$

(vi) Unicidade de solução

Sejam u e v soluções do problema (2.1) e consideremos $\phi = u - v$. Então, ϕ satisfaz o problema

$$\begin{cases} \phi_t = (au_x)_x - (av_x)_x & (t,x) \in Q_T \\ \phi(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} \phi(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a\phi_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ \phi(0,x) = 0 & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.60}$$

Mostraremos que $\phi(t) = 0$ em $H_a^1(0,1)$ para quase todo $t \in (0,T)$, donde concluiremos que $u = v$. Compondo $(2.60)_1$ com ϕ, temos

$$\begin{aligned} (\phi'(t), \phi(t)) + (-(au_x)_x + (av_x)_x, \phi(t)) &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2 + (\sqrt{a}u_x - \sqrt{a}v_x, \sqrt{a}\phi_x(t)) &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2 + (\sqrt{a}\phi_x(t), \sqrt{a}\phi_x(t)) &= 0 \\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\phi(t)||^2 + ||\sqrt{a}\phi_x(s)||^2 &= 0. \end{aligned}$$

Integrando de 0 à T a igualdade acima e observando que $\phi(0) = 0$, segue que

$$\frac{1}{2}||\phi(t)||^2 + \int_0^T ||\sqrt{a}\phi_x(s)||^2 ds = 0,$$

donde obtemos o desejado. $\square$

2.4 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de solução para o caso fraco, utilizando a existência de soluções regulares.

Teorema 2.8. *Seja $f \in L^2(Q_T)$. Para todo $u_0 \in L^2(0,1)$ o problema (2.1) possui uma única solução u na classe*

$$C^0([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H_a^1(0,1)) \tag{2.61}$$

Demonstração: Seja $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ e $u_0 \in L^2(0,1)$. Segue da densidade de $H^1(0,T;L^2(0,1))$ e $D(A)$ em $L^2(0,T;L^2(0,1))$ e $L^2(0,1)$, respectivamente, que existe uma sequência $(f_n) \subset H^1(0,T;L^2(0,1))$ e $(u_{0n}) \subset D(A)$ tal que

$$\begin{cases} f_n \longrightarrow f \text{ em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ u_{0n} \longrightarrow u_0 \text{ em } L^2(0,1). \end{cases} \tag{2.62}$$

Seja u_n a única solução de (2.1) associada aos dados f_n e u_{0n}. Então u_n pertence à classe

$$C^0([0,T];H_a^1(0,1)) \cap L^2(0,T;D(A)) \cap H^1(0,T;L^2(0,1)),$$

e verifica

$$\begin{cases} u_n' + Au_n = f_n & \text{em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ u_n(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e } \begin{cases} u_n(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_{nx})(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u_n(0,x) = u_{0n}(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.63}$$

Sendo assim, para todo m e $n \in \mathbb{N}$ temos,

$$\begin{cases} u_n' - u_m' + A(u_n - u_m) = f_n - f_m & \text{em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \\ (u_n - u_m)(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e } \begin{cases} (u_n - u_m)(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_{nx} - au_{mx})(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ (u_n - u_m)(0,x) = (u_{0n} - u_{0m})(x) & x \in (0,1). \end{cases} \tag{2.64}$$

Compondo a equação $(2.64)_1$ com $u_n - u_m$, decorre que

$$(u_n' - u_m', u_n - u_m) - ((au_{nx})_x - (au_{mx})_x, u_n - u_m) = (f_n - f_m, u_n - u_m).$$

Então,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \int_0^1 a(x)[u_{nx} - u_{mx}]^2 dx \\ &\qquad \leq \frac{1}{2}\|f_n(t) - f_m(t)\|^2 + \frac{1}{2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Integrando a desigualdade (2.65) de 0 à t, $t < T$, segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + \int\int_{Q_T} a(x)|(u_{nx} - u_{mx})|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{2}\|u_n(0) - u_m(0)\|^2 + \frac{1}{2}\|f_n - f_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))} + \frac{1}{2}\int_0^T \|u_n(s) - u_m(s)\|^2 ds.\end{aligned} \tag{2.66}$$

Da desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned}&\|u_n(t) - u_m(t)\|^2 + 2\int\int_{Q_T} a(x)|(u_{nx} - u_{mx})|^2 dxdt \\ &\quad \leq \left(\|u_{0n} - u_{0m}\|^2 + \|f_n - f_m\|^2_{L^2(0,T;L^2(0,1))}\right) e^T, \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned}$$

Das convergências dadas em (2.62) vem que

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_n(t) - u_m(t)\| \longrightarrow 0 \text{ quando } n \text{ e } m \to +\infty$$

e

$$\int\int_{Q_T} a(x)|(u_{nx} - u_{mx})|^2 dxdt \longrightarrow 0 \text{ quando } n \text{ e } m \to +\infty.$$

Como os espaços $C^0([0,T]; L^2(0,1))$ e $L^2(0,T; L^2(0,1))$ são completos, segue que existem funções $u \in C^0([0,T]; L^2(0,1))$ e $v \in L^2(0,T; L^2(0,1))$, tais que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } C^0([0,T]; L^2(0,1)) \tag{2.67}$$

$$\sqrt{a(x)}u_{nx} \longrightarrow v \text{ em } L^2(0,T; L^2(0,1)). \tag{2.68}$$

Da cadeia de imersões

$$C^0([0,T]; L^2(0,1)) \hookrightarrow L^2(0,T; L^2(0,1)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T; L^2(0,1)),$$

concluímos que $v = \sqrt{a(x)}u_x \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ e, portanto,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } C^0([0,T]; L^2(0,1)) \tag{2.69}$$

e

$$\sqrt{a(x)}u_{nx} \longrightarrow \sqrt{a(x)}u_x \text{ em } L^2(0,T; L^2(0,1)). \tag{2.70}$$

Donde, segue

$$u \in C^0([0,T]; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1_a(0,1)).$$

Provaremos agora que u satisfaz o problema (2.1).

Consideremos u_n a única solução de (2.1) associada aos dados iniciais $u_{0n} \in D(A)$ e $f_n \in H^1(0,T;L^2(0,1))$ que verifica portanto, (2.63).

Sejam $\theta \in \mathcal{D}(0,1)$ e $v \in H_a^1(0,1)$. Compondo $(2.63)_1$ com θv na dualidade $\mathcal{D}(0,T;H_a^1(0,1) \times \mathcal{D}'(0,T;[H_0^1(0,1)]')$, obtemos

$$\langle u_n', \theta v\rangle + \langle Au_n, \theta v\rangle = \langle f_n, \theta v\rangle \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,1), v \in H_a^1(0,1). \tag{2.71}$$

Notemos agora que

$$\langle u_n', \theta v\rangle = -\langle u_n, \theta' v\rangle \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,1), v \in H_a^1(0,1).$$

Da convergência de (u_n) dada em (2.69), vem

$$\langle u_n', \theta v\rangle = -\langle u_n, \theta' v\rangle \longrightarrow -\langle u, \theta' v\rangle = \langle u', \theta v\rangle. \tag{2.72}$$

Além disso, da convergência de $(\sqrt{a}u_{nx})$ dada em (2.70), obtemos

$$\langle Au_n, \theta v\rangle = -(\sqrt{a}u_{nx}, \sqrt{a}\theta v_x) \longrightarrow -(\sqrt{a}u_x, \sqrt{a}\theta v_x) = \langle Au, \theta v\rangle, \tag{2.73}$$

na dualidade $\mathcal{D}(0,T;L^2(0,1)) \times \mathcal{D}'(0,T;L^2(0,1))$ e $\mathcal{D}(0,T;[H_a^1(0,1)]') \times \mathcal{D}'(0,T;H_a^1(0,1))$, respectivamente.

Temos, ainda, da convergência de (f_n) dada em $(2.62)_1$ que

$$\langle f_n, \theta v\rangle \longrightarrow \langle f, \theta v\rangle. \tag{2.74}$$

Assim de (2.72), (2.73) e (2.74) após passagem ao limite, vem

$$\langle u' + Au - f, \theta v\rangle = 0 \text{ na dualidade } \mathcal{D}'(0,T;[H_a^1(0,1)]') \times \mathcal{D}(0,T;H_a^1(0,1)).$$

Observando que o conjunto

$$\{\theta v, \theta \in \mathcal{D}(0,1), v \in H_a^1(0,1)\}$$

é total em $\mathcal{D}(0,T;H_a^1(0,1))$, concluímos que

$$u' + Au - f = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

Como $u \in L^2(0,T;H_a^1(0,1))$, então para quase todo $t \in (0,T)$, vem $u(t) \in H_a^1(0,1)$ e, portanto, $Au(t) \in [H_a^1(0,1)]'$.

Para toda $v \in H_a^1(0,1)$, temos

$$\begin{aligned} |\langle Au(t),v\rangle|^2 &= |\langle (au_x(t))_x,v\rangle|^2 &&= |(\sqrt{a}u_x(t),\sqrt{a}v_x)|^2 \\ &\leq \|\sqrt{a}u_x(t)\|^2\|\sqrt{a}v_x\|^2 &&\leq c\|\sqrt{a}u_x(t)\|^2\|v\|^2_{H_a^1(0,1)}, \end{aligned} \tag{2.75}$$

portanto,

$$\|Au(t)\|_{[H_a^1(0,1)]'} \leq c\|\sqrt{a}u_x(t)\|,$$

donde,

$$Au \in L^2(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

Da imersão de $L^2(0,T;L^2(0,1))$ em $L^2(0,T;[H_a^1(0,1)]')$ e do fato que $f \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, segue que

$$u' + Au - f = 0 \text{ em } Ł^2(0,T;[H_a^1(0,1)]').$$

A verificação das condições iniciais são claras, como

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } C^0([0,T];L^2(0,1))$$

vem

$$u_n(0) \longrightarrow u(0) \text{ em } L^2(0,1).$$

Da unicidade do limite em $L^2(0,1)$ temos que

$$u_0 = u(0).$$

A unicidade é inteiramente análoga ao caso regular. $\square$

Apêndice

Este apêndice é dedicado à prova da afirmação (2.5) feita na demonstração da proposição 2.3, onde afirmamos que dado $\epsilon > 0$ existe $G(x) \in C^1([0,1])$, extensão de f, satisfazendo

$$\int_0^1 (|u-G|^2+a(x)|u_x-G_x|^2)dx < \epsilon + c\left(\int_0^{2\delta}(|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx + \int_{1-2\delta}^1 (|u|^2+a(x)|u_x|^2)dx\right), \tag{A.0}$$

para $c > 0$.

A reflexão é construída como segue. Inicialmente, consideremos $x \in [0,\delta]$ e definamos

$$h(x) = \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) + \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))$$

de modo que,

$$h(\delta) = \lambda_1 f(\delta) + \lambda_2 f(\delta) = f(\delta)$$

$$h_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))$$

$$h_x(\delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(\delta) = f_x(\delta).$$

De maneira análoga para $x \in [1-\delta, 1]$, definimos

$$g(x) = \lambda_1 f(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) + \lambda_2 f(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))$$

satisfazendo,

$$g(1-\delta) = \lambda_1 f(1-\delta) + \lambda_2 f(1-\delta) = f(1-\delta)$$

$$g_x(x) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1-\delta+\mu_1(1-\delta-x)) - \lambda_2\mu_2 f_x(1-\delta+\mu_2(1-\delta-x))$$

$$g_x(1-\delta) = -\lambda_1\mu_1 f_x(1-\delta) - \lambda_2\mu_2 f_x(1-\delta) = f_x(1-\delta).$$

Possibilitando estender f à uma função $C^1([0,1])$ dada por

$$G(x) = \begin{cases} h(x), & 0 \leq x \leq \delta \\ f(x), & \delta \leq x \leq 1-\delta \\ g(x), & 1-\delta \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$G(x)$ acima definida verifica (A.0). De fato, seja $\epsilon > 0$ dado

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(|u-G|^2 + a|u_x - G_x|^2\right) dx &= \int_0^\delta \left(|u-G|^2 + a|u_x - G_x|^2\right) dx \\ &+ \int_\delta^{1-\delta} \left(|u-f|^2 + a(x)|u_x - f_x|^2\right) dx \\ &+ \int_{1-\delta}^1 \left(|u-G|^2 + a|u_x - G_x|^2\right) dx \qquad (A.1) \\ &\leq \epsilon_0 + \int_0^\delta \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx \\ &+ \int_{1-\delta}^1 \left(|u-G|^2 + a(x)|u_x - G_x|^2\right) dx; \end{aligned}$$

onde $\epsilon_0 > 0$ será posteriormente escolhido em função do ϵ dado.

Começemos estimando o termo

$$\int_0^\delta |u-G|^2 dx.$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |u(x) - G(x)| &= |u(x) - h(x)| \\ &= |u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &= |(\lambda_1 + \lambda_2)u(x) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &\leq |\lambda_1 u(x) - \lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x))| \qquad (A.2) \\ &+ |\lambda_1 u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - \lambda_1 f(\delta + \mu_1(\delta - x))| \\ &+ |\lambda_2 u(x) - \lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x))| \\ &+ |\lambda_2 u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - \lambda_2 f(\delta + \mu_2(\delta - x))| \end{aligned}$$

donde,

$$\begin{aligned} |u(x) - G(x)|^2 \leq 2^2 \Big\{ & \lambda_1^2 |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\ & + \lambda_1^2 |u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 \\ & + \lambda_2^2 |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \qquad (A.3) \\ & + \lambda_2^2 |u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 \Big\}. \end{aligned}$$

Integrando de 0 à δ a desigualdade acima, vem

$$\begin{aligned} \int_0^\delta |u(x) - G(x)|^2 dx \leq 4 \Big\{ & \lambda_1^2 \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\ & + \lambda_1^2 \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\ & + \lambda_2^2 \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \qquad (A.4) \\ & + \lambda_2^2 \int_0^\delta |u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \Big\}. \end{aligned}$$

Lembremos que da escolha de δ decorre que $\delta < \delta + \mu_1(\delta - x) < \delta + \mu_1\delta < 2\delta < 1 - \delta$ e fazendo a mudança de variável $\xi = \delta + \mu_1(\delta - x)$ na integral

$$I_2 = \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx$$

chegamos à

$$I_2 = -\int_{\delta+\mu_1\delta}^{\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi = \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1}|u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi < \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}.$$

Portanto,

$$\lambda_1^2 I_2 < \lambda_1^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}. \qquad (A.5)$$

De forma análoga, para

$$I_4 = \int_0^\delta |u(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx$$

temos

$$\lambda_2^2 I_4 < \lambda_2^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_2}. \qquad (A.6)$$

Seja agora,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\ &\leq 2\left\{\int_0^\delta |u(x)|^2 dx + \int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx\right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\int_0^\delta |u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \quad \leq \int_\delta^{\delta+\mu_1\delta} |u(\xi)|^2 d\xi < \frac{1}{\mu_1}\int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx,$$

segue que

$$\lambda_1^2 I_1 \leq 2\lambda_1^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx. \qquad (A.7)$$

Igualmente temos para

$$I_3 = \int_0^\delta |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx$$

a estimativa

$$\lambda_2^2 I_3 \leq 2\lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right) \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx. \qquad (A.8)$$

Substituindo $(A.5)$-$(A.8)$ em $(A.4)$, vem

$$\begin{aligned}
\int_0^{\delta} |u(x) - G(x)|^2 dx \quad &\leq 4 \left\{ 2\lambda_1^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx + \lambda_1^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1} \right. \\
&\left. +2\lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right) \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx + \lambda_2^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_2} \right\} \\
&= 4\epsilon_0 \left(\frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2} \right) + 8 \left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2} \right) \int_0^{2\delta} |u(x)|^2 dx.
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Estimemos agora, o termo

$$\int_{1-\delta}^{1} |u - G|^2 dx.$$

Observando o intervalo de integração e a definição de $G(x)$ neste intervalo e considerando que

$$1 - 2\delta < 1 - \delta - \mu_i \delta < 1 - \delta + \mu_i (1 - \delta - x) < 1 - \delta < 1;$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{1-2\delta}^{1} |u(x) - G(x)|^2 dx \quad &\leq 4 \Big\{ \ \lambda_1^2 \int_{1-2\delta}^{1} |u(x) - u(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_1^2 \int_{1-\delta}^{1} |u(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x)) - f(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2 \int_{1-2\delta}^{1} |u(x) - u(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x))|^2 dx \\
&+ \lambda_2^2 \int_{1-2\delta}^{1} |u(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x)) - f(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x))|^2 dx \ \Big\}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Definindo

$$\begin{aligned}
J_2 \ &= \int_{1-\delta}^{1} |u(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x)) - f(1 - \delta + \mu_1(1 - \delta - x))|^2 dx \\
&= -\int_{1-\delta}^{1-\delta-\mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1} |u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{1-\delta-\mu_1\delta}^{1-\delta} \frac{1}{\mu_1} |u(\xi) - f(\xi)|^2 d\xi < \frac{\epsilon_0}{\mu_1},
\end{aligned}$$

segue que,

$$\lambda_1^2 J_2 < \lambda_1^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_1}. \tag{A.11}$$

De maneira análoga, para

$$J_4 = \int_{1-\delta}^{1} |u(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x)) - f(1 - \delta + \mu_2(1 - \delta - x))|^2 dx$$

obtemos,

$$\lambda_2^2 J_4 < \lambda_2^2 \epsilon_0 \frac{1}{\mu_2}. \tag{A.12}$$

Definindo

$$J_1 = \int_{1-2\delta}^{1} |u(x) - u(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx$$

e

$$J_3 = \int_{1-2\delta}^{1} |u(x) - u(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx,$$

segue que

$$\lambda_1^2 J_1 \leq 2\lambda_1^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx \tag{A.13}$$

e

$$\lambda_2^2 J_3 \leq 2\lambda_2^2 \left(1 + \frac{1}{\mu_2}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx. \tag{A.14}$$

Substituindo $(A.11)$-$(A.14)$ em $(A.10)$, chegamos à

$$\int_{1-\delta}^{1} |u(x) - G(x)|^2 dx \leq 4\epsilon_0 \left(\frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) + 8\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) \int_{1-2\delta}^{1} |u(x)|^2 dx. \tag{A.15}$$

Analisemos, agora, os termos que envolvem a derivada, ou seja,

$$\int_0^\delta a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx \quad \text{e} \quad \int_{1-\delta}^{1} a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx.$$

Para obtermos uma desigualdade semelhante à apresentada em $(A.4)$ usaremos o fato que $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 = -1$. Deste modo,

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta a(x)|u_x(x) - G_x(x)|^2 dx \quad \leq 4\Big\{ \; & \lambda_1^2\mu_1 \int_0^\delta a(x)|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
& + \lambda_1^2\mu_1 \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
& + \lambda_2^2\mu_2 \int_0^\delta a(x)|u_x(x) - u_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \\
& + \lambda_2^2\mu_2 \int_0^\delta a(x)|u_x(\delta + \mu_2(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_2(\delta - x))|^2 dx \; \Big\}.
\end{aligned} \tag{A.16}$$

De posse da idéia anterior, temos

$$\begin{aligned}
K_2 &= \int_0^\delta |u_x(\delta + \mu_1(\delta - x)) - f_x(\delta + \mu_1(\delta - x))|^2 dx \\
&= \int_\delta^{\delta + \mu_1\delta} \frac{1}{\mu_1} |u_x(\xi) - f_x(\xi)|^2 d\xi,
\end{aligned}$$

assim,

$$\mu_1\lambda_1^2 K_2 a(x) = \frac{\mu_1\lambda_1^2}{\mu_1} \int_\delta^{\delta + \mu_1\delta} a(x)|u_x(x) - f_x(x)|^2 dx < \lambda_1^2\epsilon_0. \tag{A.17}$$

Raciocinando de maneira análoga, obtemos

$$\mu_2\lambda_2^2K_4a(x) = \frac{\mu_2\lambda_2^2}{\mu_2}\int_{\delta}^{\delta+\mu_1\delta} a(x)|u_x(x) - f_x(x)|^2dx < \lambda_2^2\epsilon_0, \tag{A.18}$$

$$\mu_1\lambda_1^2K_1a(x) \leq 2(\lambda_1^2\mu_1 + \lambda_1^2)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx \tag{A.19}$$

e

$$\mu_2\lambda_2^2K_3a(x) \leq 2(\lambda_2^2\mu_2 + \lambda_2^2)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{A.20}$$

Substituindo $(A.17)$-$(A.20)$ em $(A.16)$, resulta

$$\int_0^{\delta} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2dx \leq 4\epsilon_0(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+8\left(\lambda_1^2\mu_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2\mu_2 + \lambda_2^2\right)\int_0^{2\delta} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{A.21}$$

Também, para o intervalo $]1-\delta, \delta[$ temos

$$\int_{1-\delta}^{\delta} a(x)|u_x(x)-G_x(x)|^2 \leq 4\epsilon_0(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+8\left(\lambda_1^2\mu_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2\mu_2 + \lambda_2^2\right)\int_{1-2\delta}^{1} a(x)|u_x(x)|^2dx. \tag{A.22}$$

Definindo

$$c = \max\left\{8\left(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \frac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right), 8\left(\lambda_1^2\mu_1 + \lambda_1^2 + \lambda_2^2\mu_2 + \lambda_2^2\right)\right\}$$

e

$$\epsilon_0 = \frac{\epsilon}{1 + 4\left(\dfrac{\lambda_1^2}{\mu_1} + \dfrac{\lambda_2^2}{\mu_2}\right) + 4(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)},$$

Substituindo $(A.9), (A.15), (A.21)$ e $(A.22)$, em $(A.1)$ provamos o desejado.

Capítulo 3

Estimativas de Carleman

Ao longo, deste capítulo, os resultados serão provados para as soluções regulares. Para o caso fraco, seguirá por argumentos de densidade.

Seja

$$\begin{cases} u_t - (au_x)_x = f\chi_\omega & (t,x) \in Q_T \\ u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1) \end{cases} \tag{3.1}$$

A fim de estudarmos a controlabilidade para o problema (3.1), determinaremos uma estimativa de Carleman para o problema adjunto.

Determinemos o problema adjunto ao problema acima compondo a equação $(3.1)_1$ com φ, onde φ é uma função admissível. Logo

$$u_t\varphi - (au_x)_x\varphi = g\varphi \quad \text{onde} \quad g = f\chi_\omega.$$

Analisemos cada termo separadamente. Temos

$$\begin{aligned} \varphi g &= u_t\varphi - (au_x)_x\varphi \\ &= (u\varphi)_t - u\varphi_t - \{[(au_x)\varphi]_x - au_x\varphi_x\} \\ &= (u\varphi)_t - u\varphi_t - [[(au_x)\varphi]_x - \{[u(a\varphi_x)]_x - u(a\varphi_x)_x\}] \\ &= (u\varphi)_t - u\varphi_t - [(au_x\varphi)_x - [(a\varphi_x)u]_x + u(a\varphi_x)_x] \\ &= (u\varphi)_t - u(\varphi_t + (a\varphi_x)_x) - (au_x\varphi)_x + [(a\varphi_x)u]_x. \end{aligned}$$

Notemos ainda, que

$$\int_0^1 \int_0^T (u\varphi)_t = \int_0^1 [u(T)\varphi(T) - u_0\varphi(0)]dx \tag{3.2}$$

$$-\int_0^T\int_0^1 (au_x\varphi)_x dxdt = \int_0^T [(au_x)(1)\varphi(1) - (au_x)(0)\varphi(0)]dt \tag{3.3}$$

$$-\int_0^T\int_0^1 [(a\varphi_x)u]_x dxdt = \int_0^T [(a\varphi_x)(1)u(1) - (a\varphi_x)(0)u(0)]dt. \tag{3.4}$$

Gostaríamos, que observando (3.3)

$$(au_x)(1)\varphi(1) - (au_x)(0)\varphi(0) = 0.$$

Para tal, se $0 \leq \alpha < 1$, impomos as seguintes condições sobre, que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(1) = 0$ e se $1 \leq \alpha < 2$ que, $\varphi(1) = 0$, posto que $(au_x)(0) = 0$.

De (3.4) desejamos que a igualdade

$$(a\varphi_x)(1)u(1) - (a\varphi_x)(0)u(0) = 0$$

seja verificada.

Se $0 \leq \alpha < 1$ não há nenhuma imposição ser feita à φ, porém se $1 \leq \alpha < 2$, inferimos que $(a\varphi_x)(0) = 0$, pois temos que $u(1) = 0$. De posse destas condições, vem

$$\int\int_{Q_T} g\varphi = \int_0^1 [u(T)\varphi_t - u_0\varphi(0)]dx - \int\int_{Q_T} u(\varphi_t + (a\varphi_x)_x)dxdt.$$

Para que a segunda integral do lado direito faça sentido, é necessário que $q = \varphi_t + (a\varphi_x)_x \in L^2(Q_T)$.

Com as mesmas notações do problema original,

$$a(x) := x^\alpha \quad \textit{com} \quad 0 \leq \alpha < 2 \text{ e } Q_T = (0,T)\times(0,1) \text{ para } T > 0.$$

Consideremos o problema adjunto.

$$\begin{cases} \varphi_t + (a\varphi_x)_x = q & (t,x) \in Q_T \\ \varphi(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} \varphi(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (a\varphi_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ \varphi(T,x) = \varphi_T(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{3.5}$$

onde $\varphi_T \in L^2(0,1)$ e $q \in L^2(Q_T)$.

Note que o problema acima possui solução, uma vez que o problema (2.1) possui. De fato, seja u solução do problema (2.1), tomemos $\varphi(t,x) = u(T-t,x)$ para cada $t \in \mathbb{R}$ é solução de (3.5).

Assim,

$$\varphi_t(t) = -u_t(T-t) \ \text{ e } \ \varphi_x(t) = u_x(T-t),$$

implicando em

$$(a\varphi_x) = (au_x)(T-t) \text{ ou ainda } (a\varphi_x)_x = (au_x(T-t))_x,$$

logo,

$$\varphi_t + (a\varphi_x)_x = -u_t(T-t) + (au_x(T-t))_x = -[u_t(T-t) - (au_x(T-t))_x] = -f(T-t)$$

sendo assim, pondo $q(t) = -f(T-t)$ segue que

$$\varphi_t + (a\varphi_x)_x = q$$

também $\varphi(t,1) = u(T-t,1) = 0$ e, pondo $u_0 = \varphi_T$ segue que

$$\varphi(T,x) = u(0,x) = u_0(x) = \varphi_T(x)$$

além disso

$$\begin{array}{rcll} \varphi(t,0) & = & u(T-t,0) = 0 & \text{para } \ 0 \le \alpha < 1 \\ (a\varphi_x)(t,0) & = & (au_x)(T-t,0) = 0 & \text{para } \ 1 \le \alpha < 2. \end{array}$$

Nosso interesse neste capítulo será provar o seguinte resultado.

Teorema 3.1. *Seja $0 \le \alpha < 2$ e $T > 0$ dados. Então existe $\sigma : (0,T) \times [0,1] \to \mathbb{R}_+^\star$ da forma $\sigma(t,x) = \theta(t)p(x)$. Com $p(x) > 0 \, \forall \, x \in [0,1]$ e $\theta(t) \to \infty$ quando $t \to 0^+, T^-$ e duas constantes positivas, c e R_0, tais que para todo $\varphi_T \in L^2(0,1)$ e $f \in L^2(Q_T)$, a solução φ de (3.5) satisfaz para todo $R \ge R_0$*

$$\int\int_{Q_T} (R\theta x^\alpha \varphi_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2) e^{-2R\sigma} dxdt \le c \int\int_{Q_T} e^{-2R\sigma} f^2 dxdt + c\int_0^T \{R\theta e^{-2R\sigma} x^{2\alpha}\varphi_x^2\}_{|x=1}$$

Observação 3.2. *A função p será explicitamente construída na prova. E a escolha para θ será*

$$\forall t \in (0,T); \qquad \theta(t) = \left(\frac{1}{t(T-t)}\right)^4$$

onde satisfaz as seguintes propriedades.

$$\theta(t) \to +\infty \text{ quando } t \to 0^+, T^-, |\theta_t| \le c_0\theta^{\frac{5}{4}} \le c_1\theta^2 \text{ e } \quad |\theta_{tt}| \le c_0\theta^{\frac{3}{2}} \le c_1\theta^3$$

para alguma constante $c_0, c_1 > 0$ *dependendo de* T. *Note que*

$$\theta_t(t) = -4(T-2t)\left(\frac{1}{t(T-t)}\right)^5 = -4(T-2t)\left(\frac{1}{(t(T-t))^4}\right)^{\frac{5}{4}} = -4(T-2t)\theta^{\frac{5}{4}},$$

como $-4(T-2t) \leq \sup_{t\in[0,T]} |-4(T-2t)| = c_T^0$, *logo*

$$|\theta_t(t)| \leq c_T^0 \theta^{\frac{5}{4}}.$$

Agora

$$\begin{aligned}
\theta_{tt} &= 8\theta^{\frac{5}{4}} - 4(T-2t)\frac{5}{4}\theta^{\frac{1}{4}}\theta_t \\
&= 8\theta^{\frac{5}{4}} - 5(T-2t)[-4(T-2t)]\theta^{\frac{1}{4}}\theta^{\frac{5}{4}} \\
&= 8\theta^{\frac{5}{4}} + 20(T-2t)^2\theta^{\frac{3}{2}} \\
&= 8\theta^{\frac{3}{2}}\theta^{\frac{-1}{4}} + 20(T-2t)^2\theta^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(8\theta^{\frac{-1}{4}} + 20(T-2t)^2\right)\theta^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(8\left(\frac{1}{[t(T-t)]^4}\right)^{\frac{-1}{4}} + 20(T-2t)^2\right)\theta^{\frac{3}{2}} \\
&= \left(8t(T-t) + 20(T-2t)^2\right)\theta^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

seja $c_T^1 = \sup_{t\in[0,T]} |8t(T-t) + 20(T-2t)^2|$, *portanto*

$$|\theta_{tt}(t)| \leq c_T^1 \theta^{\frac{3}{2}}.$$

Tomando $c_0 = \max\{c_T^0, c_T^1\}$, *vem*

$$|\theta_t| \leq c_0\theta^{\frac{5}{4}} \ \ e \quad |\theta_{tt}| \leq c_0\theta^{\frac{3}{2}}.$$

Além disso, temos

$$\theta^{\frac{5}{4}} = \theta^{\frac{-3}{4}}\theta^2 = \left(\frac{1}{[t(T-t)]^4}\right)^{\frac{-3}{4}}\theta^2 = [t(T-t)]^3\theta^2$$

e

$$\theta^{\frac{3}{2}} = \theta^{\frac{-6}{4}}\theta^3 = \left(\frac{1}{[t(T-t)]^4}\right)^{\frac{-6}{4}}\theta^3 = [t(T-t)]^6\theta^3.$$

Definindo

$$c_T^2 = \max\left\{\sup_{t\in[0,T]}[t(T-t)]^3, \sup_{t\in[0,T]}[t(T-t)]^6\right\}$$

e consideremos $c_1 = c_0.c_T^2$, *o que conclui as desigualdades.*

A fim de provar o teorema 3.1 e 4.1 que enunciaremos posteriormente, faz-se necessário o seguinte lema da desigualdade do tipo Hardy.

Lema 3.3. ***Desigualdade do tipo Hardy***
(i) Seja $0 \leq \alpha^\star < 1$*. Então, para toda função* z *localmente absolutamente contínua sobre* $(0,1)$ *satisfazendo*

$$z(x) \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad e \quad \int_0^1 x^{\alpha^\star} z_x^2 < +\infty.$$

A desigualdade se verifica

$$\int_0^1 x^{\alpha^\star - 2} z^2 \leq \frac{4}{(1-\alpha^\star)^2} \int_0^1 x^{\alpha^\star} z_x^2. \tag{3.6}$$

(ii) Seja $1 < \alpha^\star < 2$*. Então a desigualdade (3.6) acima ainda se verifica para toda função localmente absolutamente contínua sobre* $(0,1)$ *satisfazendo*

$$z(x) \underset{x \to 1^-}{\longrightarrow} 0 \quad e \quad \int_0^1 x^{\alpha^\star} z_x^2 < +\infty.$$

Note que (3.6) é falso para $\alpha^\star = 1$*.*

Demonstração: Primeiro caso: $0 \leq \alpha^\star < 1$.

Como z é absolutamente contínua sobre $(0,1)$, temos

$$\begin{aligned} |z(x) - z(\epsilon)|^2 &= \left(\int_\epsilon^x z_x(s) s^{\frac{3-\gamma}{4}} s^{\frac{-3+\gamma}{4}} ds \right)^2 \\ &\leq \left(\int_\epsilon^x z_x^2(s) s^{\frac{3-\gamma}{2}} ds \right) \left(\int_\epsilon^x s^{\frac{-3+\gamma}{2}} ds \right), \end{aligned}$$

onde denotamos $\gamma := 2 - \alpha^\star \in (1,2]$. Fazendo $\epsilon \to 0^+$, vem

$$|z(x)|^2 \leq \left(\int_0^x z_x^2(s) s^{\frac{3-\gamma}{2}} ds \right) \left(\int_0^x s^{\frac{-3+\gamma}{2}} ds \right),$$

entretanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\alpha^\star-2} z^2(x)dx &\leq \int_0^1 x^{-\gamma}\left(\int_0^x z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}ds\right)\left(\int_0^x s^{\frac{-3+\gamma}{2}}ds\right)dx \\
&= \int_0^1 x^{-\gamma}\left(\int_0^x z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}ds\right)\frac{x^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\frac{\gamma-1}{2}}dx \\
&= \frac{2}{\gamma-1}\int_0^1 x^{\frac{-1-\gamma}{2}}\left(\int_0^x z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}ds\right)dx \\
&= \frac{2}{\gamma-1}\int_0^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}\left(\int_s^1 x^{\frac{-1-\gamma}{2}}dx\right)ds \\
&= \frac{2}{\gamma-1}\int_0^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}\left(\frac{2}{1-\gamma}x^{\frac{1-\gamma}{2}}\Big|_s^1\right)ds \\
&= \frac{2}{\gamma-1}\int_0^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}\frac{2}{1-\gamma}+\frac{4}{(\gamma-1)^2}\int_0^1 z_x^2(s)s^{2-\gamma} \\
&= -\frac{4}{(\gamma-1)^2}\int_0^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}+\frac{4}{(\gamma-1)^2}\int_0^1 z_x^2(s)s^{2-\gamma} \\
&\leq \frac{4}{(1-\alpha^\star)^2}\int_0^1 s^{\alpha^\star} z_x^2(s)ds.
\end{aligned}$$

Segundo caso: $1 < \alpha^\star < 2$.

Denotando $\gamma := 2-\alpha^\star \in (0,1)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 x^{\alpha^\star-2} z^2(x)dx &\leq \int_0^1 x^{-\gamma}\left(\int_x^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}ds\right)\left(\int_x^1 s^{\frac{-3+\gamma}{2}}ds\right)dx \\
&= \int_0^1 x^{-\gamma}\left(\int_x^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}ds\right)\frac{x^{\frac{\gamma-1}{2}}}{\frac{1-\gamma}{2}}dx \\
&= \frac{2}{1-\gamma}\int_0^1 z_x^2(s)s^{\frac{3-\gamma}{2}}\left(\int_0^s x^{\frac{-1-\gamma}{2}}dx\right)ds \\
&\leq \frac{4}{(1-\gamma)^2}\int_0^1 z_x^2(s)s^{2-\gamma}ds = \frac{4}{(\alpha^\star-1)^2}\int_0^1 s^{\alpha^\star} z_x^2(s)ds.
\end{aligned}$$

□

3.1 Reformulação do Problema

Recordemos que $a(x) = x^\alpha$ para todo $x \in [0,1]$ com $\alpha \in [0,2)$ dado. Sejam $\sigma(t,x) = \theta(t)p(x)$, onde $p(x) > 0$ $\forall x \in [0,1]$ e $\theta(t) \to +\infty$ quando $t \to 0^+, T^-$, para $R > 0$, definamos

$$z(t,x) = e^{-R\sigma(t,x)}\varphi(t,x) \tag{3.7}$$

onde φ é a solução de (3.5). Note que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \theta^n z = 0 \text{ e } z_x = 0 \text{ no tempo } t = 0, t = T. \tag{3.8}$$

Note que

$$\theta^n z = \theta^n e^{-R\sigma(t,x)}\varphi(t,x) = \frac{\theta^n}{e^{R\sigma(t,x)}}\varphi(t,x).$$

Como θ^n e $e^{R\sigma(t,x)}$ tende a $+\infty$ quando t tende à $0^+, T^-$, aplicando L´Hopital n vezes concluímos que $\dfrac{\theta^n}{e^{R\sigma(t,x)}}$ tende a zero, quando t tende à $0^+, T^-$ e, do fato que $\varphi(T,x)$ e $\varphi(0,x)$ são limitadas, temos o desejado.

Procedimento análogo para

$$z_x = -R\theta(t)p_x(x)z(t,x) + e^{-R\sigma(t,x)}\varphi_x(t,x).$$

Segue que z satisfaz

$$\begin{cases} (e^{R\sigma}z)_t + (a(e^{R\sigma}z)_x)_x = f & (t,x) \in Q_T \\ z(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} z(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (az_x)(t,0) = -R(a\sigma_x z)(t,0) & \text{para } 1 \leq \alpha < 2. \end{cases} & t \in (0,T) \end{cases} \tag{3.9}$$

De fato, basta notar que $e^{R\sigma(t,x)}z(t,x) = \varphi(t,x)$ e, do fato que φ é solução de (3.5) segue a afirmação. Notemos ainda que

$$(e^{R\sigma}z)_t = R\sigma_t e^{R\sigma}z + e^{R\sigma}z_t = e^{R\sigma}[R\sigma_t z + z_t]$$

$$(e^{R\sigma}z)_x = R\sigma_x e^{R\sigma}z + e^{R\sigma}z_x = e^{R\sigma}[R\sigma_x z + z_x]$$

Nesta última igualdade, multiplicamos por $a(x)$, donde

$$a(e^{R\sigma}z)_x = Ra\sigma_x e^{R\sigma}z + e^{R\sigma}az_x,$$

portanto,

$$(a(e^{R\sigma}z)_x)_x = R((a\sigma_x)e^{R\sigma}z)_x + (e^{R\sigma}az_x)_x,$$

da primeira parcela do lado direito obtemos,

$$R((a\sigma_x)e^{R\sigma}z)_x = R[(a\sigma_x z)_x e^{R\sigma} + Ra\sigma_x^2 e^{R\sigma}z] = e^{R\sigma}[R(a\sigma_x z)_x + R^2 a\sigma_x^2 z],$$

da segunda parcela, vem

$$(e^{R\sigma}az_x)_x = R\sigma_x e^{R\sigma}(az_x) + e^{R\sigma}(az_x)_x = e^{R\sigma}[R\sigma_x(az_x) + (az_x)_x].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
f &= (e^{R\sigma}z)_t + (a(e^{R\sigma}z)_x)_x \\
&= e^{R\sigma}[R\sigma_t z + z_t] + e^{R\sigma}[R(a\sigma_x z)_x + R^2 a\sigma_x^2 z] + e^{R\sigma}[R\sigma_x(az_x) + (az_x)_x] \\
&= e^{R\sigma}[R\sigma_t z + z_t + R(a\sigma_x z)_x + R^2 a\sigma_x^2 z + R\sigma_x(az_x) + (az_x)_x],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$fe^{-R\sigma} = R\sigma_t z + z_t + R(a\sigma_x z)_x + R^2 a\sigma_x^2 z + R\sigma_x(az_x) + (az_x)_x$$

portanto, a equação $(3.9)_1$ pode ser reescrita como,

$$P_R z = P_R^+ z + P_R^- z = fe^{-R\sigma},$$

onde

$$\begin{aligned}
P_R^+ z &:= R\sigma_t z + R^2 a\sigma_x^2 z + (az_x)_x \\
P_R^- z &:= z_t + R(a\sigma_x z)_x + Ra\sigma_x z_x \\
&= z_t + R(a\sigma_x)_x z + 2Ra\sigma_x z_x.
\end{aligned}$$

Além disso, temos

$$\|fe^{-R\sigma}\|^2 = \|P_R^+ z\|^2 + \|P_R^- z\|^2 + 2(P_R^+ z, P_R^- z) \geq 2(P_R^+ z, P_R^- z), \tag{3.10}$$

onde $\|.\|$ e $(.,.)$ denotam a norma e o produto interno em $L^2(Q_T)$.

3.2 Produto Escalar

Nesta seção iremos determinar o produto escalar em $L^2(Q_T)$ para $P_R^+ z$ e $P_R^- z$. Isto será feito em duas etapas. Primeiramente iremos definir os termos de fronteira e limitados, posteriormente mostraremos que os termos de fronteira estão bem definidos.

Lema 3.4. *A seguinte identidade se verifica*

$$\begin{aligned}
(P_R^+ z, P_R^- z) &= \underbrace{\int_0^T \Big[az_x z_t + R^2 a\sigma_t\sigma_x z^2 + R^3 a^2\sigma_x^3 z^2 + Ra(a\sigma_x)_x z z_x + Ra^2\sigma_x z_x^2 \Big]_0^1}_{(b.t)} \\
&\left.\begin{aligned}
&+ \int\int_{Q_T} \left(-\frac{1}{2}R\sigma_{tt} - 2R^2 a\sigma_{xt} - R^3 a\sigma_x(a\sigma_x^2)_x\right) z^2 \\
&+ \int\int_{Q_T} -R\frac{a}{\sigma_x}(a\sigma_x^2)_x z_x^2 - Ra(a\sigma_x)_{xx} z z_x
\end{aligned}\right\} \quad (d.t).
\end{aligned}$$

Então, usando o fato que $a(x) = x^\alpha$ e $\sigma(t,x) = \theta(t)p(x)$, calculamos os termos de fronteira e distribuídos como segue.

Demonstração: Temos $(P_R^+ z, P_R^- z) = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$, onde

$$\begin{aligned}
Q_1 &:= (R\sigma_t z + R^2 a\sigma_x^2 z + (az_x)_x, z_t),\\
Q_2 &:= R^2(\sigma_t z, (a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x),\\
Q_3 &:= R^3(a\sigma_x^2 z, (a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x),\\
Q_4 &:= R((az_x)_x, (a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x).
\end{aligned}$$

Analisemos o primeiro termo Q_1. Utilizando integração por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
Q_1 &= \int\int_{Q_T} \Big(R\sigma_t z + R^2 a\sigma_x^2 z + (az_x)_x \Big) z_t\\
&= \int\int_{Q_T} \Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) \frac{d}{dt}\left(\frac{z^2}{2}\right) + \int\int_{Q_T} (az_x)_x z_t\\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) z^2 \right]_0^T - \int\int_{Q_T} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) z^2\\
&\quad + \int_0^T \Big[a z_x z_t \Big]_0^1 - \int\int_{Q_T} a z_x z_{xt}\\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) z^2 \right]_0^T - \int\int_{Q_T} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) z^2\\
&\quad + \int_0^T \Big[a z_x z_t \Big]_0^1 - \int_0^1\int_0^T \frac{d}{dt}\left(\frac{a z_x^2}{2} \right)\\
&= \int_0^1 \left[\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} a z_x^2 \right]_0^T - \int\int_{Q_T} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) z^2\\
&\quad + \int_0^T \Big[a z_x z_t \Big]_0^1.
\end{aligned}$$

Por (3.8), observando que $z_x = 0$, $\theta^2 z = 0$ e $\theta_t z^2 = 0$, no ponto $t = 0, T$, segue que

$$\int_0^1 \left[\Big(R\sigma_t + R^2 a\sigma_x^2 \Big) \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2} a z_x^2 \right]_0^T = 0,$$

logo,

$$Q_1 = \int_0^T \Big[a z_x z_t \Big]_0^1 + \int\int_{Q_T} \left(-\frac{1}{2} R\sigma_{tt} - R^2 a\sigma_x \sigma_{xt} \right) z^2. \tag{3.11}$$

Análise do segundo termo Q_2.

$$\begin{aligned}
Q_2 &= R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t z((a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x) = R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t (a\sigma_x)_x z^2 + a\sigma_t\sigma_x (z^2)_x\\
&= R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t (a\sigma_x)_x z^2 + R^2 \int\int_{Q_T} a\sigma_t\sigma_x (z^2)_x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t (a\sigma_x)_x z^2 + R^2 \int_0^T \Big[a\sigma_t\sigma_x z^2 \Big]_0^1 - R^2 \int\int_{Q_T} (a\sigma_t\sigma_x)_x z^2 \\
&= R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t (a\sigma_x)_x z^2 + R^2 \int_0^T \Big[a\sigma_t\sigma_x z^2 \Big]_0^1 - R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_{tx} (a\sigma_x) z^2 \\
&\quad - R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_t (a\sigma_x)_x z^2 \\
&= R^2 \int_0^T \Big[a\sigma_t\sigma_x z^2 \Big]_0^1 - R^2 \int\int_{Q_T} \sigma_{tx} (a\sigma_x) z^2.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$
Q_2 = R^2 \int_0^T \Big[a\sigma_t\sigma_x z^2 \Big]_0^1 - R^2 \int\int_{Q_T} a\sigma_x\sigma_{xt} z^2. \tag{3.12}
$$

Análise do terceiro termo Q_3.

$$
\begin{aligned}
Q_3 &= R^3 \int\int_{Q_T} a\sigma_x^2 z \Big((a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x \Big) = R^3 \int\int_{Q_T} a\sigma_x^2 z \Big((a\sigma_x z)_x + a\sigma_x z_x \Big) \\
&= R^3 \int\int_{Q_T} a\sigma_x^2 z (a\sigma_x z)_x + R^3 \int\int_{Q_T} a^2\sigma_x^3 z z_x \\
&= R^3 \int_0^T \Big[a^2\sigma_x^3 z^2 \Big]_0^1 - R^3 \int\int_{Q_T} (a\sigma_x^2 z)_x a\sigma_x z + R^3 \int\int_{Q_T} a^2\sigma_x^3 z z_x \\
&= R^3 \int_0^T \Big[a^2\sigma_x^3 z^2 \Big]_0^1 - R^3 \int\int_{Q_T} [(a\sigma_x^2)_x a\sigma_x z^2 + a^2\sigma_x^3 z z_x] + R^3 \int\int_{Q_T} a^2\sigma_x^3 z z_x \\
&= R^3 \int_0^T \Big[a^2\sigma_x^3 z^2 \Big]_0^1 - R^3 \int\int_{Q_T} (a\sigma_x^2)_x a\sigma_x z^2.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
Q_3 = R^3 \int_0^T \Big[a^2\sigma_x^3 z^2 \Big]_0^1 - R^3 \int\int_{Q_T} a\sigma_x (a\sigma_x^2)_x z^2. \tag{3.13}
$$

Análise do quarto termo Q_4.

$$
\begin{aligned}
Q_4 &= R \int\int_{Q_T} (az_x)_x \Big((a\sigma_x)_x z + 2a\sigma_x z_x \Big) \\
&= R \int\int_{Q_T} (az_x)_x (a\sigma_x)_x z + R \int\int_{Q_T} 2a\sigma_x z_x (az_x)_x \\
&= R \int_0^T \Big[az_x (a\sigma_x)_x z \Big]_0^1 - R \int\int_{Q_T} az_x \Big((a\sigma_x)_x z \Big)_x + R \int\int_{Q_T} \sigma_x \left((az_x)^2 \right)_x \\
&= R \int_0^T \Big[a(a\sigma_x)_x z z_x \Big]_0^1 - R \int\int_{Q_T} [a(a\sigma_x)_x z_x^2 + a(a\sigma_x)_{xx} z z_x] \\
&\quad + R \int_0^T \Big[\sigma_x a^2 z_x^2 \Big]_0^1 - R \int\int_{Q_T} \sigma_{xx} a^2 z_x^2 \\
&= R \int_0^T \Big[(a\sigma_x)_x z a z_x + \sigma_x a^2 z_x^2 \Big]_0^1 - R \int\int_{Q_T} \frac{a z_x^2}{\sigma_x} (a\sigma_x^2)_x \\
&\quad - R \int\int_{Q_T} a(a\sigma_x)_{xx} z z_x.
\end{aligned}
$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} Q_4 &= R\int_0^T \Big[(a\sigma_x)_x z a z_x + \sigma_x a^2 z_x^2 \Big]_0^1 - R\int\int_{Q_T} \frac{a}{\sigma_x}(a\sigma_x^2)_x z_x^2 \\ &\quad -R\int\int_{Q_T} a(a\sigma_x)_{xx} z z_x. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Finalmente, o lema segue de (3.11)-(3.14). □

Nos próximos lemas, determinaremos condições sobre os termos $(d.t)$ e mostraremos que o termo $(b.t)$ está bem definido.

Lema 3.5. *Para todo $0 \leq \alpha < 2$, tem-se*

$$\begin{aligned} (d.t) = \quad & -\frac{1}{2}R\int\int_{Q_T} \theta_{tt} p z^2 - 2R^2\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^\alpha p_x^2 z^2 \\ & -R^3\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2\alpha-1}(2xp_{xx} + \alpha p_x)p_x^2 z^2 \\ & -R\int\int_{Q_T} \theta x^{2\alpha-1}(2xp_{xx} + \alpha p_x)z_x^2 - R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha (x^\alpha p_x)_{xx} z z_x. \end{aligned}$$

Além disso, para $0 \leq \alpha < 1$, os termos de fronteira (b.t) são dados por

$$(b.t) = \int_0^T \left\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \right\}_{|x=1} - \int_0^T \left\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \right\}_{|x=0}.$$

Para $1 \leq \alpha < 2$, os termos de fronteira (b.t) tornam-se

$$\begin{aligned} (b.t) = & \int_0^T \left\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \right\}_{|x=1} \\ & + \int_0^T \left\{ -\frac{R}{2}\theta_t a p_x z^2 - R^2\theta_t\theta a p p_x z^2 - 2R^3\theta^3 a^2 p_x^3 z^2 + R^2\theta^2 a p_x (a p_x)_x z^2 \right\}_{|x=0}. \end{aligned}$$

Demonstração: Com $a(x) = x^\alpha$ e $\sigma(t,x) = \theta(t)p(x)$, os termos distribuídos (d.t) podem ser calculados como segue,

$$\begin{aligned} (d.t) &= \int\int_{Q_T} \left(-\frac{1}{2}R\sigma_{tt} - 2R^2 a\sigma_{xt} - R^3 a\sigma_x (a\sigma_x^2)_x \right) z^2 \\ &\quad + \int\int_{Q_T} -R\frac{a}{\sigma_x}(a\sigma_x^2)_x z_x^2 - Ra(a\sigma_x)_{xx} z z_x \\ &= -\frac{1}{2}R\int\int_{Q_T} \theta_{tt} p z^2 - 2R^2\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^\alpha p_x^2 z^2 - R^3\int\int_{Q_T} \theta^3 x^\alpha p_x (x^\alpha p_x^2)_x z^2 \\ &\quad -R\int\int_{Q_T} \theta\frac{x^\alpha}{p_x}(x^\alpha p_x^2)_x z_x^2 - R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha (x^\alpha p_x)_{xx} z z_x \\ &= -\frac{1}{2}R\int\int_{Q_T} \theta_{tt} p z^2 - 2R^2\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^\alpha p_x^2 z^2 - R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha (x^\alpha p_x)_{xx} z z_x \\ &\quad -R^3\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2\alpha-1}(2xp_{xx} + \alpha p_x)p_x^2 z^2 - R\int\int_{Q_T} \theta x^{2\alpha-1}(2xp_{xx} + \alpha p_x)z_x^2. \end{aligned}$$

Também levando em consideração o fato que $z(t,1) = 0$, os termos de fronteira (b.t), tornam-se

$$\begin{aligned}(b.t) &= \int_0^T \Big[az_x z_t + R^2\sigma_t\sigma_x a z^2 + R^3\sigma_x^3 a^2 z^2 + R(a\sigma_x)_x z a z_x + R\sigma_x a^2 z_x^2 \Big]_0^1 \\ &= \int_0^T \Big\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=1} \\ &\quad - \int_0^T \Big\{ az_x z_t + R^2\theta_t\theta p p_x a z^2 + R^3\theta^3 p_x^3 a^2 z^2 + R\theta(ap_x)_x z a z_x + R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=0}.\end{aligned}$$

Agora, para $0 \leq \alpha < 1$, usa o fato que $z(t,0) = 0$, para obter

$$(b.t) = \int_0^T \Big\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=1} - \int_0^T \Big\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=0}.$$

Similarmente, para $1 \leq \alpha < 2$, recorde-se que $(az_x)(t,0) = -R\theta(t)(ap_x z)(t,0)$, para concluir que

$$\begin{aligned}(b.t) &= \int_0^T \Big\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=1} + \int_0^T \Big\{ R\theta a p_x \frac{d}{dt}\left(\frac{z^2}{2}\right) - R^2\theta_t\theta p p_x a z^2 - R^3\theta^3 p_x^3 a^2 z^2 \\ &\qquad + R^2\theta^2 p_x (ap_x)_x a z^2 - R^3\theta^3 p_x^3 a^2 z^2 \Big\}_{|x=0}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}(b.t) &= \int_0^T \Big\{ R\theta p_x a^2 z_x^2 \Big\}_{|x=1} \\ &\quad + \int_0^T \Big\{ -\frac{R}{2}\theta_t p_x a z^2 - R^2\theta_t\theta p p_x a z^2 - 2R^3\theta^3 p_x^3 a^2 z^2 + R^2\theta^2 p_x (ap_x)_x a z^2 \Big\}_{|x=0}.\end{aligned}$$

□

3.3 Limitantes Inferiores

Em nosso próximo lema, somos motivados a encontrar a função $p(x)$ de modo que verifique a seguinte equação,

$$2xp_{xx} + \alpha p_x = -x^{1-\alpha},$$

uma equação diferencial ordinária de segunda ordem. Lembremos que $\alpha \in [0,2)$.

Para resolvermos a E.D.O acima, chamemos $v = p_x$, assim $v_x = p_{xx}$, substituindo as alterações na equação acima obtemos,

$$2xv_x + \alpha v = -x^{1-\alpha}, \text{ ou ainda } v_x + \frac{\alpha}{2x}v = -\frac{1}{2}x^{-\alpha} \quad \forall x \in (0,1]$$

com fator integrante desta última equação, $I(x) = e^{\int \frac{\alpha}{2x}dx} = e^{\frac{\alpha}{2}\ln x} = x^{\frac{\alpha}{2}}$, donde

$$\begin{aligned} x^{\frac{\alpha}{2}} v_x + x^{\frac{\alpha}{2}} \frac{\alpha}{2x} v &= -\frac{1}{2} x^{-\alpha} \\ \frac{d}{dx}[x^{\frac{\alpha}{2}} v] &= -\frac{1}{2} x^{-\alpha} \\ x^{\frac{\alpha}{2}} v &= -\frac{1}{2} \frac{x^{-\frac{\alpha}{2}+1}}{-\frac{\alpha}{2}+1}, \end{aligned}$$

assim,

$$v = -\frac{x^{-\alpha+1}}{2-\alpha}.$$

Por outro lado,

$$p_x = v = -\frac{x^{-\alpha+1}}{2-\alpha},$$

logo,

$$p(x) = -\frac{x^{-\alpha+2}}{(2-\alpha)^2} + k.$$

Segundo o enunciado no teorema 3.1, $p(x) > 0 \quad \forall x \in [0,1]$. Do fato que $x^{-\alpha+2} \leq 1 \quad \forall x \in [0,1]$ e $\forall \alpha \in [0,2)$ consideramos $k(2-\alpha)^2 = 2$ por conveniência, donde,

$$\forall x \in [0,1], \qquad p(x) := \frac{2 - x^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2}.$$

Então,

$$p_x(x) = -\frac{x^{1-\alpha}}{2-\alpha}, \qquad p_{xx}(x) = -\frac{(1-\alpha)}{2-\alpha} x^{-\alpha}$$

e

$$(x^\alpha p_x)_x = \left(-\frac{x^\alpha x^{1-\alpha}}{2-\alpha}\right)_x = \left(-\frac{x}{2-\alpha}\right)_x = -\frac{1}{2-\alpha},$$

assim,

$$(x^\alpha p_x)_{xx} = 0.$$

Com esta escolha de p os termos distribuídos e limitados podem ser calculados como segue.

Lema 3.6. *Para todo $\alpha \in [0,2)$. Os termos distribuídos (d.t) tornam-se*

$$\begin{aligned} (d.t) = \; & -\frac{R}{(2-\alpha)^2} \int\int_{Q_T} \theta_{tt} z^2 + \frac{R}{2(2-\alpha)^2} \int\int_{Q_T} \theta_{tt} x^{2-\alpha} z^2 + R \int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2 \\ & + \frac{R^3}{(2-\alpha)^2} \int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 - \frac{2R^2}{(2-\alpha)^2} \int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2. \end{aligned}$$

Para $0 \leq \alpha < 1$, *os termos de fronteira* $(b.t)$ *tornam-se*

$$(b.t) = -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1} + \frac{1}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{1+\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=0}.$$

Para $1 \leq \alpha < 2$, *os termos de fronteira* $(b.t)$ *tornam-se*

$$\begin{aligned}(b.t) \;&= -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1} + \int_0^T \left\{ \frac{R\theta_t}{2(2-\alpha)} x z^2 + \frac{2R^2\theta_t\theta}{(2-\alpha)^3} x z^2 + \right.\\ &\left. -\frac{R^2\theta_t\theta}{(2-\alpha)^3} x^{3-\alpha} z^2 + \frac{2R^3\theta^3}{(2-\alpha)^3} x^{3-\alpha} z^2 + \frac{R^2\theta^2}{(2-\alpha)^2} x z^2 \right\}_{|x=0}.\end{aligned}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}(d.t) \;&= \int\int_{Q_T} \left(-\frac{1}{2}R\sigma_{tt} - 2R^2 a\sigma_{xt} - R^3 a\sigma_x (a\sigma_x^2)_x \right) z^2 \\ &+ \int\int_{Q_T} -R\frac{a}{\sigma_x}(a\sigma_x^2)_x z_x^2 - Ra(a\sigma_x)_{xx} z z_x \\ &= -\frac{1}{2}R\int\int_{Q_T} \theta_{tt} p z^2 - 2R^2 \int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^\alpha p_x^2 z^2 - R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha (x^\alpha p_x)_{xx} z z_x \\ &-R\int\int_{Q_T} \theta x^{2\alpha-1}(2x p_{xx} + \alpha p_x) z_x^2 - R^3 \int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2\alpha-1}(2xp_{xx} + \alpha p_x) p_x^2 z^2 \\ &= -\frac{1}{2}R\int\int_{Q_T} \theta_{tt}\left(\frac{2 - x^{-\alpha+2}}{(2-\alpha)^2}\right) z^2 - \frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2 \\ &-\frac{R^3}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2 \\ &= -\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} z^2 + \frac{R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} x^{2-\alpha} z^2 + R\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2 \\ &+\frac{R^3}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 - \frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2.\end{aligned}$$

Para os termos limitados, segue também diretamente do lema 3.5 e da escolha de p e da expressão $(b.t)$. □

Para o próximo lema, definamos

$$\forall t \in (0,T), \qquad \theta(t) := \left(\frac{1}{t(T-t)}\right)^4.$$

Observe que θ satisfaz as seguintes propriedades,

$$|\theta_t| \leq c_0^T \theta^{\frac{5}{4}} \leq c_1^T \theta^2 \text{ e } |\theta_{tt}| \leq c_0^T \theta^{\frac{3}{2}} \leq c_1^T \theta^3.$$

Com esta escolha de θ os termos distribuídos e limitados podem ser calculados como segue.

Lema 3.7. *Para todo $\alpha \in [0,2)$. Os termos distribuídos $(d.t)$ e os termos limitados $(b.t)$ satisfazem, para R suficientemente grande*

$$(d.t) \geq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + \frac{3}{4}R\int\int_{Q_T} \theta x^{\alpha} z_x^2$$

$$(b.t) \geq -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1}.$$

Demonstração: Analisemos primeiramente os termos distribuídos. Temos, devido ao lema 3.6

$$\begin{aligned}(d.t) = \; & -\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} z^2 + \frac{R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} x^{2-\alpha} z^2 \\ & -\frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2 + \frac{R^3}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + R\int\int_{Q_T} \theta x^{\alpha} z_x^2.\end{aligned}$$

Como os dois últimos termos são não negativos, temos a necessidade somente de estimar os outros três termos. Comecemos com o segundo termo,

$$\left|\frac{R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} x^{2-\alpha} z^2\right| \leq \frac{c_1^T R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2,$$

para R suficientemente grande. E do fato $|\theta_{tt}| \leq c_0^T \theta^{\frac{3}{2}} \leq c_1^T \theta^3$.

Para o terceiro termo, usando o fato que

$$|\theta\theta_t| \leq c_0^T \theta^{\frac{9}{4}} \leq c_1^T \theta^3 \text{ e } R \text{ suficientemente grande}$$

$$\left|\frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2\right| \leq \frac{2c_1^T R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2$$

donde,

$$-\frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta_{tt} x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2$$

e

$$-\frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2$$

ou ainda,

$$-\frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 \leq -\frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta\theta_t x^{2-\alpha} z^2 \leq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2.$$

Logo, somando membro a membro da primeira desilgualdade com a última, vem

$$\frac{R}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta_{tt}x^{2-\alpha}z^2-\frac{2R^2}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta\theta_t x^{2-\alpha}z^2\geq-\frac{R^3}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2$$

mas,

$$\frac{R^3}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2-\frac{R^3}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2=\frac{R^3}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2$$

daí, vem

$$(d.t)\geq-\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta_{tt}z^2+\frac{R^3}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2+R\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2. \tag{3.15}$$

Temos ainda que limitar o primeiro termo do lado direito acima. Primeiramente observe que a solução φ de (3.5) permanece em $L^2(0,T;H_a^1(0,1))$ pelo teorema 2.8. Como $z=e^{-R\sigma}\varphi$, mostra-se que z também pertence à $L^2(0,T;H_a^1(0,1))$.

$$\int_0^T\|z\|^2_{H_a^1(0,1)}dt=\int_0^T\|e^{-R\sigma}\varphi\|^2_{H_a^1(0,1)}\leq\int_0^T\|\varphi\|^2_{H_a^1(0,1)}=\|\varphi\|_{L^2(0,T;H_a^1(0,1))}.$$

Agora,

$$\begin{aligned}\left|\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta_{tt}z^2\right| &\leq\frac{c_0^TR}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^{\frac{3}{2}}z^2\\ &=\frac{c_0^TR}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\left(\theta x^{\frac{\alpha-2}{3}}z^2\right)^{\frac{3}{4}}\left(\theta^3x^{2-\alpha}z^2\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\leq\frac{3\epsilon c_0^TR}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta x^{\frac{\alpha-2}{3}}z^2+\frac{c_0^TR}{4\epsilon^3(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3x^{2-\alpha}z^2\end{aligned} \tag{3.16}$$

Separemos o caso em que $\alpha=1$ dos outros. Pois neste caso particular a desigualdade de Hardy (Lema 3.3) não ocorre para $\alpha^\star=1$.

No caso $\alpha\neq1$, observe que $x^{\frac{(\alpha-2)}{3}}\leq x^{\alpha-2}$, pois $\alpha<2$. Aplicando o lema 3.3 com $\alpha^\star=\alpha\neq1$, (z satisfaz as hipóteses do lema 3.3 para quase todo t, já que pertence $L^2(0,T;H_a^1(0,1))$) obtemos

$$\int\int_{Q_T}\theta x^{\frac{\alpha-2}{3}}z^2\leq\int\int_{Q_T}\theta x^{\alpha-2}z^2\leq\frac{4}{(\alpha-1)^2}\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2. \tag{3.17}$$

No caso $\alpha=1$, aplicando o lema 3.3 com $\alpha^\star=\frac{5}{3}$ e usando o fato que $x^{\frac{5}{3}}\leq x$ obtemos similarmente,

$$\begin{aligned}\int\int_{Q_T}\theta x^{\frac{\alpha-2}{3}}z^2=\int\int_{Q_T}\theta x^{\frac{-1}{3}}z^2 &\leq\frac{4}{(\alpha^\star-1)^2}\int\int_{Q_T}\theta x^{\frac{5}{3}}z_x^2\\ &\leq9\int\int_{Q_T}\theta xz_x^2=9\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2.\end{aligned} \tag{3.18}$$

Em ambos os casos, combinando (3.16) com (3.17) ou (3.18), obtém-se

$$\left|\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta_{tt}z^2\right| \leq \epsilon c' R\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2 + \frac{cR}{4\epsilon^3(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3 x^{2-\alpha}z^2,$$

onde $c' = \dfrac{3c_0^T}{(2-\alpha)^4}$ ou $\dfrac{27c_0^T}{4(2-\alpha)^2} > 0$ e $c = \dfrac{c_0^T(2-\alpha)^2}{4}$ ou $9c_0^T$.

Então para ϵ suficientemente pequeno e R suficientemente grande, temos,

$$\left|\frac{R}{(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta_{tt}z^2\right| \leq \frac{R}{4}\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2 + \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3 x^{2-\alpha}z^2. \tag{3.19}$$

Assim, por (3.15) e (3.19),

$$(d.t) \geq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T}\theta^3 x^{2-\alpha}z^2 + \frac{3R}{4}\int\int_{Q_T}\theta x^\alpha z_x^2 \geq 0.$$

Voltando para os termos limitados. No caso $0 \leq \alpha < 1$, pelo lema 3.6, temos

$$\begin{aligned}(b.t) &= -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T\left\{R\theta x^{2\alpha}z_x^2\right\}_{|x=1} + \frac{1}{2-\alpha}\int_0^T\left\{R\theta x^{\alpha+1}z_x^2\right\}_{|x=0}\\ &\geq -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T\left\{R\theta x^{2\alpha}z_x^2\right\}_{|x=1}.\end{aligned}$$

No caso $1 \leq \alpha < 2$, recordemos que, pelo lema 3.6

$$\begin{aligned}(b.t) = &-\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T\left\{R\theta x^{2\alpha}z_x^2\right\}_{|x=1} + \int_0^T\left\{\left(\frac{R\theta_t}{2(2-\alpha)} + \frac{2R^2\theta_t\theta}{(2-\alpha)^3} + \right.\right.\\ &\left.\left.-\frac{R^2\theta_t\theta}{(2-\alpha)^3}x^{2-\alpha} + \frac{2R^3\theta^3}{(2-\alpha)^3}x^{2-\alpha} + \frac{R^2\theta^2}{(2-\alpha)^2}\right)xz^2\right\}_{|x=0}.\end{aligned}$$

Como $z \in H_a^1(0,1)$ para quase todo t, afirmamos que, para quase todo $t \in (0,T)$.

$$xz^2(t,x) \to 0 \text{ quando } x \to 0$$

logo,

$$(b.t) = -\frac{1}{2-\alpha}\int_0^T\left\{R\theta x^{2\alpha}z_x^2\right\}_{|x=1}.$$

De fato, sejam $\alpha \in [1,2)$ dado e para toda $v \in H_a^1(0,1)$, tems pela definição $H_a^1(0,1)$ no caso $1 \leq \alpha < 2$, sabendo que $v \in L^2(0,1)$ e $\sqrt{a}v_x = x^{\frac{\alpha}{2}}v_x \in L^2(0,1)$, então $xv^2 \in L^1(0,1)$. Além disso,

$$(xv^2)_x = v^2 + 2xvv_x.$$

Como $v^2 \in L^1(0,1)$ e $xvv_x = (x^{\frac{1-\alpha}{2}}v)(x^{\frac{\alpha}{2}}v_x) \in L^1(0,1)$. Logo, $xv^2 \in W^{1,1}(0,1)$. logo, $xv^2 \to L \geq 0$ quando $x \to 0^+$. Finalmente $L = 0$, caso contrário implicaria que $v \notin L^2(0,1)$.

Como, $xv^2 \in W^{1,1}(0,1) \hookrightarrow C^0(0,1)$, ou seja, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ se $|x| < \delta$ implica

$$|xv^2 - L| < \epsilon,$$

portanto, para ϵ suficientemente pequeno temos

$$v^2 > \frac{L-\epsilon}{x} > 0, \qquad 0 < |x| < \delta.$$

Integrando a desigualdade acima no intervalo (η, δ) com $0 < \eta < \delta$ vem,

$$\begin{aligned} \int_\eta^\delta v^2 > \int_\eta^\delta \frac{L-\epsilon}{x} &= (L-\epsilon)\ln(x)\Big|_\eta^\delta \\ &= (L-\epsilon)[\ln(\delta) - \ln(\eta)]. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Fazendo $\eta \longrightarrow 0$, temos que o termo do lado esquerdo da desigualdade dada em (3.20) tende à $+\infty$, ou seja $v \notin L^2(0,1)$, o que é uma contradição. □

Vamos agora provar o teorema 3.1.

Demonstração: **do Teorema 3.1**: Pelo lema 3.4 e 3.7, temos para todo $0 \leq \alpha < 2$,

$$\begin{aligned} (P_R^+ z, P_R^- z) = (d.t) + (b.t) \ &\geq \frac{R^3}{4(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + \frac{3R}{4}\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2 \\ &- \frac{1}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1}, \end{aligned}$$

por (3.10), temos

$$\begin{aligned} \|fe^{-R\sigma}\|^2 \ &= \|P_R^+ z\|^2 + \|P_R^- z\|^2 + 2(P_R^+ z, P_R^- z) \geq 2(P_R^+ z, P_R^- z) \\ &\geq \frac{R^3}{2(2-\alpha)^2}\int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + \frac{3R}{2}\int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2 - \frac{2}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1}. \end{aligned}$$

Lembre-se que $\sigma(t,x) = \theta(t)p(x)$ e $p_x(x) = -\dfrac{x^{1-\alpha}}{2-\alpha}$. Logo,

$$x^\alpha \sigma_x^2 = x^\alpha(\theta(t)p_x(x))^2 = x^\alpha\left(-\theta(t)\frac{x^{1-\alpha}}{2-\alpha}\right)^2 = \frac{1}{(2-\alpha)^2}\theta^2(t)x^{2-\alpha}.$$

Além disso, $\varphi = e^{R\sigma}z$. Mas, $\varphi_x = R\sigma_x e^{R\sigma}z + e^{R\sigma}z_x$, entretanto

$$0 \leq (R\sigma_x z - z_x)^2 = R^2\sigma_x^2 z^2 - 2R\sigma_x z z_x + z_x^2,$$

donde,

$$2R\sigma_x zz_x \leq R^2\sigma_x^2 z^2 + z_x^2.$$

Somando em ambos os lados da desigualdade anterior o termo $R^2\sigma_x^2 z^2 + z_x^2$, e depois multiplicando tudo por $e^{2R\sigma}$, vem

$$R^2 e^{2R\sigma}\sigma_x^2 z^2 + 2Re^{2R\sigma}\sigma_x zz_x + e^{2R\sigma} z_x^2 \leq 2R^2\sigma_x^2 e^{2R\sigma} z^2 + 2e^{2R\sigma} z_x^2,$$

ou seja,

$$(Re^{R\sigma}\sigma_x z + e^{R\sigma} z_x)^2 \leq 2R^2\sigma_x^2 e^{2R\sigma} z^2 + 2e^{2R\sigma} z_x^2.$$

Portanto,

$$\varphi_x^2 \leq 2R^2\sigma_x^2 e^{2R\sigma} z^2 + 2e^{2R\sigma} z_x^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2 + R\theta x^\alpha \varphi_x^2 &\leq R^3\theta^3 x^{2-\alpha} e^{2R\sigma} z^2 + R\theta x^\alpha \left(2R^2\sigma_x^2 e^{2R\sigma} z^2 + 2e^{2R\sigma} z_x^2 \right) \\ &= R^3\theta^3 x^{2-\alpha} e^{2R\sigma} z^2 + c_1 R^3\theta^3 x^{2-\alpha} e^{2R\sigma} z^2 + 2R\theta x^\alpha e^{2R\sigma} z_x^2 \\ &\leq c_2 \left(R^3\theta^3 x^{2-\alpha} e^{2R\sigma} z^2 + R\theta x^\alpha e^{2R\sigma} z_x^2 \right), \end{aligned}$$

onde $c_1 = \dfrac{2}{(2-\alpha)^2}$ e $c_2 = \max\{1, c_1, 2\}$.

Tomemos $c_3 = \min\left\{\dfrac{1}{2(2-\alpha)^2}, \dfrac{3}{2}\right\}$. Então

$$\int\int_{Q_T} f^2 e^{-2R\sigma} + \frac{2}{2-\alpha}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1} \geq c_3 R^3 \int\int_{Q_T} \theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + c_3 R \int\int_{Q_T} \theta x^\alpha z_x^2$$

Assim,

$$\begin{aligned} \int\int_{Q_T} \left(R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2 + R\theta x^\alpha \varphi_x^2 \right) e^{-2R\sigma} &\leq c_2 \int\int_{Q_T} \left(R^3\theta^3 x^{2-\alpha} z^2 + R\theta x^\alpha z_x^2 \right) \\ &\leq \frac{c_2}{c_3}\int\int_{Q_T} f^2 e^{-2R\sigma} + \frac{c_2}{c_3}\int_0^T \left\{ R\theta x^{2\alpha} z_x^2 \right\}_{|x=1}. \end{aligned}$$

Além disso, $(az_x)(1) = e^{-R\sigma}(a\varphi_x)(1)$ posto que $z(1) = 0$. Portanto,

$$\int\int_{Q_T} \left(R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2 + R\theta x^\alpha \varphi_x^2 \right) e^{-2R\sigma} \leq c\int\int_{Q_T} f^2 e^{-2R\sigma} + c\int_0^T \left\{ R\theta e^{-2R\sigma} x^{2\alpha}\varphi_x^2 \right\}_{|x=1}.$$

□

Capítulo 4

Controlabilidade

4.1 Desigualdade de observabilidade

Determinaremos neste capítulo a desigualdade de observabilidade, que posteriormente aplicaremos para obtermos a controlabilidade do problema (3.1).

Consideremos o seguinte problema adjunto

$$\begin{cases} v_t + (av_x)_x = 0 & (t,x) \in Q_T \\ v(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} v(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (av_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ v(T,x) = v_T(x) & x \in (0,1), \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $v_T(x)$ é dado em $L^2(0,1)$.

Com a estimativa de Carleman obtida no Teorema 3.1, conluímos a seguinte desigualdade de observabilidade para (4.1).

Teorema 4.1. *Sejam $0 \leq \alpha < 2$ e $T > 0$ dados e ω um subintervalo não-vazio de $(0,1)$. Então existe $k > 0$ tal que, para toda $v_T \in L^2(0,1)$ a solução v de (4.1) satisfaz*

$$\int_0^1 x^\alpha v_x(0,x)^2 dx \leq k \int_0^T \int_\omega v(t,x)^2 dxdt. \tag{4.2}$$

Para provarmos o Teorema acima faremos uso dos seguintes lemas, que provaremos a seguir.

Lema 4.2. *(**Desigualdade de Cacciopolis**). Nas hipóteses do Teorema 4.1, para todo $R > 0$ temos*

$$\int_0^T \int_{\omega'} e^{-2R\sigma} v_x^2 dxdt \leq C(R,T) \int_0^T \int_\omega v^2 dxdt,$$

onde ω' *é um subintervalo não vazio de* $\omega = (x_0, x_1)$ *dado por:* $\omega' = \left(\dfrac{2x_0 + x_1}{3}, \dfrac{x_0 + 2x_1}{3}\right)$ *se* $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$.

Demonstração: Notemos inicialmente que

$$\lim_{t \to T^-} e^{-2R\sigma} v^2 \to 0 \text{ e } \lim_{t \to 0^+} e^{-2R\sigma} v^2 \to 0.$$

Definamos a função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\begin{cases} 0 \leq \xi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R} \\ \xi(x) = 1 & para \quad x \in \omega' \\ \xi(x) = 0 & para \quad x \notin \omega. \end{cases}$$

Então pra todo $R > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \frac{d}{dt} \int_0^1 \xi^2 e^{-2R\sigma} v^2 = \int\int_{Q_T} -2\xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + 2\xi^2 e^{-2R\sigma} v v_t \\ &= -2 \int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 - 2\int\int_{Q_T} \xi^2 e^{-2R\sigma} v (a v_x)_x \\ &= -2 \int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + 2\int\int_{Q_T} (\xi^2 e^{-2R\sigma} v)_x a v_x \\ &= -2 \int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + 2\int\int_{Q_T} a(\xi^2 e^{-2R\sigma})_x v v_x + \xi^2 e^{-2R\sigma} a v_x^2. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} &2\int\int_{Q_T} \xi^2 e^{-2R\sigma} a v_x^2 = 2\int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 - 2\int\int_{Q_T} a(\xi^2 e^{-2R\sigma})_x v v_x \\ &= 2\int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 - 2\int\int_{Q_T} \left(\sqrt{a}\xi e^{-R\sigma} v_x\right)\left(\sqrt{a}\frac{(\xi^2 e^{-R\sigma})_x}{\xi e^{-R\sigma}} v\right) \\ &\leq 2\int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + \int\int_{Q_T} \left(\sqrt{a}\xi e^{-R\sigma} v_x\right)^2 + \int\int_{Q_T} \left(\sqrt{a}\frac{(\xi^2 e^{-R\sigma})_x}{\xi e^{-R\sigma}} v\right)^2 \\ &\leq 2\int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + \int\int_{Q_T} \left(\sqrt{a}\frac{(\xi^2 e^{-R\sigma})_x}{\xi e^{-R\sigma}} v\right)^2 + \int\int_{Q_T} \xi^2 e^{-2R\sigma} a v_x^2 \end{aligned}$$

donde,

$$\int\int_{Q_T} \xi^2 e^{-2R\sigma} a v_x^2 \leq 2\int\int_{Q_T} \xi^2 R\sigma_t e^{-2R\sigma} v^2 + \int\int_{Q_T} \left(\sqrt{a}\frac{(\xi^2 e^{-R\sigma})_x}{\xi e^{-2R\sigma}} v\right)^2.$$

Notemos que

$$\sqrt{a}\frac{(\xi^2 e^{-2R\sigma})_x}{\xi e^{-R\sigma}} = 2\sqrt{a}\xi_x e^{-R\sigma} - 2R\sqrt{a}\xi\sigma_x e^{-R\sigma}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{\omega'} e^{-2R\sigma}av_x^2 &\leq 2\int_0^T\int_\omega R\sigma_t e^{-2R\sigma}v^2 + 4\int_0^T\int_\omega \left(ae^{-2R\sigma}(1-R\sigma_x)^2v^2\right)\\ &\leq C(R,T)\int_0^T\int_\omega v^2.\end{aligned}$$

Tomando $C(R,T) = \max\left\{2R\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in[0,1]}}|\sigma_t e^{-2R\sigma}|,\ 4\sup_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in[0,1]}}|ae^{-2R\sigma}(1-R\sigma_x)^2|\right\}.$

□

Lema 4.3. *Sejam $0 \leq \alpha < 2$ e $T > 0$ dados e ω um subintervalo não vazio de $(0,1)$. Existem constantes positivas $R_0, C, k_1 > 0$, tais que para toda $v_T \in L^2,(0,1)$, a solução v de (4.1) satisfaz, para todo $R \geq R_0$,*

$$\int_0^T\int_0^1 \left(R\theta x^\alpha v_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}v^2\right)e^{-2k_1R\theta}dxdt \leq C\int_0^T\int_\omega v^2dxdt.$$

Demonstração: Seja $\omega = (x_0, x_1)$ com $0 \leq x_0 < x_1 \leq 1$ e consideremos a função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$(função cut-off) tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \psi(x) \leq 1 & \forall x \in \mathbb{R}\\ \psi(x) = 1 & para \quad x \in \left(0, \dfrac{2x_0+x_1}{3}\right)\\ \psi(x) = 0 & para \quad x \in \left(\dfrac{x_0+2x_1}{3}, 1\right).\end{cases}$$

Definamos $\varphi := \psi v$ onde v é a solução de (4.1). Então φ satisfaz

$$\begin{cases} \varphi_t + (a\varphi_x)_x = (a\psi_x v)_x + \psi_x a v_x =: f & (t,x) \in Q_T\\ \varphi(t,1) = 0 & t \in (0,T)\\ \text{e} \begin{cases} \varphi(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1\\ (a\varphi_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2, \end{cases} & t \in (0,T) \end{cases} \tag{4.3}$$

posto que

$$\begin{aligned}\varphi_t + (a\varphi_x)_x &= (\psi v)_t + (a(\psi v)_x)_x\\ &= \psi v_t + (a\psi_x v + a\psi v_x)_x\\ &= \psi v_t + (a\psi_x v)_x + \psi(av_x)_x + \psi_x a v_x\\ &= \psi(v_t + (av_x)_x) + (a\psi_x v)_x + \psi_x a v_x\\ &= (a\psi_x v)_x + \psi_x a v_x =: f,\end{aligned}$$

ainda,

$$\varphi(t,1) = \psi(1)v(t,1) = 0 \qquad \forall t \in (0,T),$$

$$\varphi(t,0) = (\psi v)(t,0) = \psi(0)v(t,0) = 0 \text{ se } 0 \leq \alpha < 1 \quad \forall t \in (0,T)$$

e

$$\begin{aligned}(a\varphi_x)(t,0) = (a(\psi v)_x)(t,0) &= (a\psi_x v + \psi a v_x)(t,0)\\ &= \psi_x(0)(av)(t,0) + \psi(0)(av_x)(t,0) = 0.\end{aligned}$$

Portanto, aplicando o Teorema 3.1 e usando o fato que $\varphi \equiv 0$ numa vizinhança de $x = 1$ (aqui $\varphi_x(t,1) = 0$), temos para todo $R \geq R_0$

$$\int\int_{Q_T} \left(R^3\theta x^\alpha \varphi_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2\right) e^{-2R\sigma} dxdt \leq c \int\int_{Q_T} f^2 e^{-2R\sigma} dxdt.$$

Usando a definição de ψ e considerando o fato que ψ_x e ψ_{xx} têm suporte em $\omega' := \left(\frac{2x_0+x_1}{3}, \frac{x_0+2x_1}{3}\right)$, podemos escrever

$$f^2 = ((a\psi_x v)_x + \psi_x a v_x)^2 = (a_x\psi_x v + 2a\psi_x v_x + a\psi_{xx}v)^2\chi_{\omega'} \leq C_5(v^2 + v_x^2)\chi_{\omega'}.$$

Como a função a_x é limitada sobre ω', segue que,

$$\int\int_{Q_T} \left(R\theta x^\alpha \varphi_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2\right) e^{-2R\sigma} dxdt \leq C_6 \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2R\sigma}(v_x^2 + v^2) dxdt, \tag{4.4}$$

onde $\omega' := \left(\frac{2x_0+x_1}{3}, \frac{x_0+2x_1}{3}\right)$.

Aplicando o lema 4.2, em (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_0^{\frac{2x_0+x_1}{3}} \left(R\theta x^\alpha v_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha} v^2\right) e^{-2R\sigma} dxdt\\ &= \int_0^T \int_0^{\frac{2x_0+x_1}{3}} \left(R\theta x^\alpha \varphi_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2\right) e^{-2R\sigma} dxdt\\ &\leq \int\int_{Q_T} \left(R\theta x^\alpha \varphi_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha}\varphi^2\right) e^{-2R\sigma} dxdt\\ &\leq C_6 \int_0^T \int_{\omega'} e^{-2R\sigma}(v_x^2 + v^2) dxdt\\ &\leq C_6 C(R,T) \int_0^T \int_\omega v^2 + C_6 \int_0^T \int_\omega e^{-2R\sigma} v^2 dxdt.\end{aligned}$$

Tomando $c_0 = \max\{p(x); x \in [0,1]\} = \dfrac{2}{(2-\alpha)^2}$, existe

$$C_7 = \max\left\{C_6 C(R,T),\ C_6 \max_{\substack{t\in[0,T]\\ x\in[0,1]}} e^{-2R\sigma}\right\},$$

tal que

$$\int_0^T \int_0^{\frac{2x_0+x_1}{3}} \left(R\theta x^\alpha v_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha} v^2 \right) e^{-2c_0 R\theta} dxdt \leq C_7 \int_0^T \int_\omega v^2 dxdt. \tag{4.5}$$

Para finalizar, devemos calcular uma desigualdade similar sobre o intervalo $\left(\frac{x_0+2x_1}{3}, 1\right)$. Mas, neste intervalo a equação é parabólica não degenerada. Desta forma, temos a estimativa de Carleman para o caso não-degenerado, ou seja para R suficientemente grande

$$\int_0^T \int_{\frac{x_0+2x_1}{3}}^1 \left(R\theta v_x^2 + R^3\theta^3 v^2 \right) e^{-2c_1 R\theta} dxdt \leq C_8 \int_0^T \int_\omega v^2 dxdt, \tag{4.6}$$

para alguma constante $c_1 > 0$.

Combinando (4.5),(4.6) e o lema 4.2 obtemos

$$\int_0^T \int_0^1 \left(R\theta x^\alpha v_x^2 + R^3\theta^3 x^{2-\alpha} v^2 \right) e^{-2k_1 R\theta} dxdt \leq C \int_0^T \int_\omega v^2 dxdt,$$

onde $k_1 = \max\{c_0, c_1\}$. □

Passemos agora a demonstração do Teorema 4.1 enunciado no início deste capítulo.

Demonstração:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \left(v_t + (x^\alpha v_x)_x \right) v_t dx \\ &= \int_0^1 |v_t|^2 dx + \left[x^\alpha v_x v_t \right]_0^1 - \int_0^1 x^\alpha v_x v_{tx} dx \geq -\frac{1}{2}\frac{d}{dt} \int_0^1 x^\alpha v_x^2 dx. \end{aligned}$$

Portanto, a função $t \mapsto \int_0^1 x^\alpha v_x^2 dx$ é crescente e então

$$\int_0^1 x^\alpha v_x^2(0,x)dx \leq \int_0^1 x^\alpha v_x^2(t,x)dx \qquad \forall t \in [0,T].$$

Integrando sobre $\left[\frac{T}{4}, \frac{3T}{4}\right]$, temos

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} \int_0^1 x^\alpha v_x^2(0,x)dx &= \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} x^\alpha v_x^2(0,x)dxdt \\ &\leq \int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}} \int_0^1 x^\alpha v_x^2(t,x)dxdt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^\alpha v_x^2(0,x)dx &\leq \frac{2}{T}\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_0^1 x^\alpha v_x^2(t,x)dxdt\\ &\leq C_9\int_{\frac{T}{4}}^{\frac{3T}{4}}\int_0^1 \theta x^\alpha v_x^2(t,x)e^{-2k_1R\theta}dxdt,\end{aligned}$$

onde $C_9 = \sup\limits_{t\in[0,T]}\left\{\dfrac{1}{\theta e^{-2k_1R\theta}}\right\}$.

Utilizando o lema 4.3, segue que

$$\int_0^1 x^\alpha v_x^2(0,x)dx \leq k\int_0^T\int_\omega v^2dxdt.$$

□

4.2 Controlabilidade

De modo a obtermos a controlabilidade do problema (3.1), faremos uso da desigualdade de observabilidade,

$$\int_0^1 v(0,x)^2dx \leq c\int_0^T\int_\omega v(t,x)^2dxdt. \tag{4.7}$$

A desigualdade acima seguirá da desigualdade de observabilidade do Teorema 4.1 e da desigualdade do tipo Hardy.

Para $\alpha \neq 1$, aplicamos a desigualdade de Hardy (Lema 3.3) com $\alpha^\star = \alpha$ de modo a obter

$$\int_0^1 x^{\alpha-2}v(0,x)^2dx \leq \frac{4}{(1-\alpha)^2}\int_0^1 x^\alpha(v_x(0,x))^2dx \leq C_{10}\int_0^T\int_\omega v^2dxdt.$$

No caso em que $\alpha = 1$, de (4.2) temos que, para todo $0<\eta<1$,

$$\int_0^1 x^{1+\eta}v_x^2(0,x)dx \leq \int_0^1 xv_x^2(0,x)dx \leq k\int_0^T\int_\omega v^2dxdt.$$

Aplicando a desigualdade de Hardy com $\alpha^\star = 1+\eta$ temos

$$\int_0^1 x^{\eta-1}v^2(0,x)dx \leq \frac{4}{\eta^2}\int_0^1 x^{1+\eta}v_x^2(0,x)dx \leq C_{11}\int_0^T\int_\omega v^2dxdt.$$

Em ambos os casos, temos a existência de uma constante $C_{12}>0$ tal que (4.7) se verifica.

Teorema 4.4. *Sejam $0 \leq \alpha < 2$ e $T > 0$ dados e ω um subintervalo não-vazio do intervalo $(0,1)$. Então para todo $u_0 \in L^2(0,1)$, existe $f \in L^2((0,T)\times(0,1))$ tal que a solução do problema degenerado (3.1) satisfaz $u(T) \equiv 0$ em $(0,1)$.*

Demonstração: Inicialmente, observemos que $A = (au_x)_x$ é auto-adjunto e

$$B : L^2(0,T;L^2(0,1)) \to L^2(0,T,L^2(\omega))$$

dado por $Bf = f\chi_\omega$, também é auto-adjunto.

Seja $S(t)$, $t \in [0,T]$, o semigrupo gerado pelo operador $-A$ e denotemos por $u^f(t)$ a solução para o problema

$$\begin{cases} u_t - Au = f\chi_\omega & (t,x) \in Q_T \\ u(t,1) = 0 & t \in (0,T) \\ \text{e} \begin{cases} u(t,0) = 0 & \text{para } 0 \leq \alpha < 1 \\ (au_x)(t,0) = 0 & \text{para } 1 \leq \alpha < 2 \end{cases} & t \in (0,T) \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in (0,1) \end{cases} \tag{4.8}$$

Para cada t definamos o operador

$$\begin{array}{rccc} L_t : & L^2(0,T;L^2(0,1)) & \to & L^2(0,1) \\ & f & \to & L_t f \end{array}$$

dado por $L_t f = \displaystyle\int_0^t S(t-s)Bf(s)ds$.

Notemos que podemos escrever

$$u^f(t) = S(t)u_0 + L_t f; \quad \forall\, f \in L^2(0,T;L^2(0,1)).$$

Para maiores detalhes ver [29]

Definamos, para cada $\epsilon > 0$, o funcional

$$J_\epsilon(f) = \frac{1}{2}\int_0^T \|f(t)\|^2 dt + \frac{1}{2\epsilon}\|u^f(T)\|^2. \tag{4.9}$$

Afirmo: J_ϵ é diferenciável à Gâteaux.

Com efeito, sejam f e $g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ então

$$\begin{aligned}
J'_\epsilon(f,g) &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{J_\epsilon(f+\lambda g) - J_\epsilon(g)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \|f+\lambda g\|^2 dt + \frac{1}{2\epsilon}\|u^{f+\lambda g}(T)\|^2 - \frac{1}{2}\int_0^T \|f\|^2 dt - \frac{1}{2\epsilon}\|u^f(T)\|^2\right] \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{2}\int_0^T \|f\|^2 dt + \frac{\lambda^2}{2}\int_0^T \|g\|^2 dt + \lambda\int_0^T (f,g)dt + \frac{1}{2\epsilon}\|u^f(T)\|^2\right. \\
&\qquad \left. + \frac{\lambda^2}{2\epsilon}\|L_T g\|^2 + \frac{\lambda}{\epsilon}(u^f(T), L_T g) - \frac{1}{2}\int_0^T \|f\|^2 dt - \frac{1}{2\epsilon}\|u^f(T)\|^2\right] \\
&= \int_0^T (f(t),g(t))dt + \frac{1}{\epsilon}(u^f(T), L_T g).
\end{aligned}$$

Assim J_ϵ é diferenciável à Gâteaux em f e

$$J'_\epsilon(f,g) = \langle J'_\epsilon(f), g\rangle = \int_0^T (f(t),g(t))dt + \frac{1}{\epsilon}(u^f(T), L_T g), \quad \forall\, g \in L^2(0,T;L^2(0,1)). \tag{4.10}$$

Assim, pela proposição (1.37) existe $f^\epsilon \in L^2(0,T;L^2(0,1))$ tal que

$$J_\epsilon(f^\epsilon) = \min_{f\in L^2(0,T;L^2(0,1))} J_\epsilon(f). \tag{4.11}$$

Ponhamos $u^{f^\epsilon} = u^\epsilon$.

Temos que

$$\frac{1}{\epsilon}\|u^\epsilon(T)\|^2 + \frac{1}{2}\int_0^T \|f^\epsilon\|^2 dt \le c\|u_0\|^2. \tag{4.12}$$

De fato, de (4.11) decorre da proposição (1.39) que

$$\langle J'_\epsilon(f^\epsilon), g\rangle = \int_0^T (f^\epsilon(t), g(t))dt + \frac{1}{\epsilon}(u^\epsilon(T), L_T g) = 0, \tag{4.13}$$

para toda $g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$, ou seja,

$$\int_0^T \left(f^\epsilon(t) + \frac{1}{\epsilon}(L_T^* u^\epsilon(T)), g(t)\right)dt = 0, \ \forall\, g \in L^2(0,T;L^2(0,1)).$$

Assim

$$f^\epsilon = -\frac{1}{\epsilon}L_T^* u^\epsilon(T). \tag{4.14}$$

Calculemos $L_T^* v_0$, para $v_0 \in L^2(0,1)$. Seja $g \in L^2(0,T;L^2(0,1))$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle (L_T^* v_0)(s), g(s)\rangle ds &= \langle v_0, L_T g\rangle \\
&= \int_0^T (v_0, S(T-s)Bg(s))ds = \int_0^T (B^* S(t-s)v_0, g(s))ds.
\end{aligned}$$

Donde,

$$(L_T^* v_0) = B^* S(T-s)v_0 = BS(T-s)v_0; \quad \forall\, v_0 \in L^2(0,1). \tag{4.15}$$

Notemos que $v(s) = S(T-s)v_0$ é a solução de

$$\begin{cases} v'(s) + Av(s) = 0 & 0 \leq s \leq T \\ v(T) = v_0. \end{cases}$$

Sendo assim, de(4.14) e (4.15)

$$f^\epsilon(s) = -BS(T-s)\left[\frac{1}{\epsilon}u^\epsilon(T)\right] = -Bv_\epsilon,$$

onde v_ϵ é solução de

$$\begin{cases} v_\epsilon' + Av_\epsilon = 0 \\ v_\epsilon(T) = \dfrac{1}{\epsilon}u^\epsilon(T) \end{cases} \tag{4.16}$$

De (4.16) e do fato que u^ϵ é solução de (4.8) com f^ϵ concluímos que

$$\begin{cases} \langle u'^\epsilon - Au^\epsilon + BBv_\epsilon, v_\epsilon\rangle = 0, & \text{e} \quad u^\epsilon(0) = u_0 \\ \langle v_\epsilon' + Av_\epsilon, u^\epsilon\rangle = 0, & \text{e} \quad v_\epsilon(T) = \dfrac{1}{\epsilon}u^\epsilon(T). \end{cases}$$

Somando as igualdade acima vem que

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(u^\epsilon, v_\epsilon)dt + \int_0^T (BBv_\epsilon, v_\epsilon)dt = 0,$$

ou seja,

$$(u^\epsilon(T), v_\epsilon(T)) - (u^\epsilon(0), v_\epsilon(0)) + \int_0^T \|Bv_\epsilon\|^2 dt = 0.$$

Donde,

$$\frac{1}{\epsilon}\|u^\epsilon(T)\|^2 + \int_0^T \int_\omega |v_\epsilon|^2 dt = (u^\epsilon(0), v_\epsilon(0)). \tag{4.17}$$

Por outro lado, da estimativa de observabilidade (4.7), obtemos

$$\|v_\epsilon(0)\|^2 dx \leq c\int_0^T \int_\omega |v_\epsilon(t)|^2 dt. \tag{4.18}$$

De (4.17), (4.18) e para η suficientemente pequeno segue que

$$\frac{1}{\epsilon}\|u^\epsilon(T)\|^2 + (1 - c\eta)\int_0^T \int_\omega |v_\epsilon(t)|^2 dt \leq c_\eta \|u^\epsilon(0)\|^2,$$

o que prova o desejado em (4.12).

De posse a desigualdade (4.12) temos que

$$\int_0^T \|f^\epsilon(t)\|^2 dt \leq c$$

e

$$\|u^\epsilon(T)\|^2 \leq \epsilon c.$$

Logo, existem uma subsequências $\{f^\epsilon\}$ e $\{u^\epsilon(T)\}$ tais que

$$f^\epsilon \rightharpoonup f \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(0,1)) \tag{4.19}$$

e

$$u^\epsilon(T) \rightharpoonup 0 \quad \text{em } L^2(0,1). \tag{4.20}$$

Notemos que (4.19) ocorre se, e somente se $(g, f^\epsilon) \rightarrow (g, f)\ \forall\, g \in L^2(0,T,L^2(0,1))$, ou seja, se, e somente se

$$\int_0^T (g(s), f^\epsilon(s))ds \rightarrow \int_0^T (g(s), f(s))ds,\ \forall\ g \in L^2(0,T,L^2(0,1)).$$

Mostremos que $u^\epsilon(t) \rightharpoonup u^f(t)$ em $L^2(0,1)$, para todo $t \in [0,T]$.

$$\begin{aligned}
(g(t), u^{f^\epsilon}(t)) &= (g(t), S(t)u_0 + L_t f^\epsilon) \\
&= (g(t), S(t)u_0) + (g(t), L_t f^\epsilon) \\
&= (g(t), S(t)u_0) + \int_0^T (L_t^* g(s), f^\epsilon(s))ds \\
&\rightarrow (g(t), S(t)u_0) + \int_0^T (L_t^* g(s), f(s))ds \\
&= (g(t), S(t)u_0 + (g(t), L_t f) \\
&= (g(t), u^f(t)).
\end{aligned}$$

Portanto, $u^\epsilon(T) = u^{f^\epsilon}(T) \rightharpoonup u^f(T)$.

Da convergência acima e de (4.20) vem que

$$u^f(T) = 0.$$

O que finaliza a demosntração. □

Bibliografia

[1] ALBANO, P; CANNARSA, P.: **Carlemam Estimates For Elliotic and Parabolic Operators with Applications**. Lectures notes, 2008.

[2] ANITA, S; BARBU, V.: **Null controllability for nonlinear convective heart equations**. SIAM, J. Control Optim. 15 (1977), pp 185-220

[3] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] BRÉZIS, H.: **Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert**. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[5] CAMPITI, M; METAFUNE, G; PALLARA, D.: **Degenerate Self-adjoint Evolution Equations on the Unit Interval** . Springer-Verlag New York Inc, Semigroup Forum, vol 57, p.01 - 36, 1998.

[6] CANNARSA, P; MARTINEZ, P; VANCOSTENOBLE, J.: **Carlemam Estimates For A Class Of Degenerate Parabolic Operators** . Society for Industrial and Applied Mathematics, vol 47, Nº 1, p.01 - 19, 2008.

[7] CAVALCANTI, M. M; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[8] CAVALCANTI, M. M; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[9] CODDINGTON, E; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[10] DAUTRAY, R; LIONS, J. L.:**Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology.**, Vol. II. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, New York, 1990.

[11] DOLECKI, Sz; RUSSELL, D. L.: **A general theory of observation and control,**. ESAIM, Control Optim. Calc. Var 5 (2000), pp 157-173

[12] FATTORINI, H. O; RUSSELL, D. L.: **Contrôle exact de Véquation de la chaleur,** Comm. Partial Differential Equations. 20 (1995), pp 215-243

[13] FATTORINI, H. O; RUSSELL, D. L.: **Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentioals with an application to the control theory of parabolic equations,** Quart. Appl. Math, 32 (1974), pp 45-69

[14] FERNÁNDEZ-CARA, E.: **Null controllability the semilinear heat equation,** ESAIM, Control Optim. Calv. Var., 2 (1997), pp 87-103

[15] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. John Wiley and Sons, New Dehli, 1989.

[16] LEBEAU, G; ROBBIANO, L.: **Null controllability the semilinear heat equation,** ESAIM, Control Optim. Calv. Var., 2 (1997), pp 87-103

[17] LIONS, J. L.: **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[18] LIONS, J.L., MAGENES. E.: **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications.**, Vol. I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[19] MEDEIROS, L. A.: **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[20] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[21] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos e Metodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[22] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[23] MILLA MIRANDA, M; SAN GIL JUTUCA, L. P. **Existence and boundary stability of solutions for the Kirchhoff equation,** Commun. Partial Differential Equation, v.24, n.9-10, p.1759-1800, 1999.

[24] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[25] MILLA MIRANDA, M.: **Análise espectral em espaços de Hilbert**. Textos e Metodos Matemáticos 28, Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1998.

[26] MOREIRA GOMES, A.: **Semigrupos de operadores lineares e Aplicações às equações de evolução**. 2ª Edição - Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[27] RAVIART, P.A; THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[28] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Rio de Janeiro, Petrópolis, LNCC. 1999.

[29] SHOWALTER, R. E.: **Monotone Operators in Banach Space and Nonlinear Partial Differential Equations**. American mathematical Society, AMS, Vol 49. 1997.

[30] ZEIDLER, E.: **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. Vol 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, (1990).