UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Guilherme de Loreno

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais parciais funcionais neutras com impulsos via teoria de semigrupos

Orientadora: Prof.ª Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

MARINGÁ- PR
2019

Guilherme de Loreno

Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais parciais funcionais neutras com impulsos via teoria de semigrupos

Dissertação apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática-PMA/UEM, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Prof.ª Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá-PR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Loreno, Guilherme de
L868e Existência de soluções para uma classe de equações diferenciais parciais funcionais neutras com impulsos via teoria de semigrupos / Guilherme de Loreno. -- Maringá, 2019.
98 p. : il.

Orientadora: Profª. Drª. Luciene Parron Gimenes Arantes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise, 2019.

1. Semigrupos de operadores lineares limitados. 2. Equação diferencial parcial funcional impulsiva neutra. 3. Solução fraca. 4. Espaço de Banach. 5. Semigroups of bounded linear operators. 6. Impulsive partial neutral functional differencial equations. 7. Mild solution. 8. Banach space. I. Arantes, Luciene Parron Gimenes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Análise. III. Título.

CDD 22.ed. 515.353
Edilson Damasio CRB9-1.123

GUILHERME DE LORENO

EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS FUNCIONAIS NEUTRAS COM IMPULSOS VIA TEORIA DE SEMIGRUPO

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

Luciene Parron G. Arantes
Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. André Vicente
Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Cascavel

Marcos Primo
Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 07 de março de 2019.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais e meu irmão, por todo apoio e incentivo em meus estudos. Com certeza sem eles esse trabalho não teria se concretizado.

À Professora Dra. Luciene, por todo conhecimento compartilhado e pela incalculável colaboração na realização dessa dissertação, por toda paciência nos (tantos) seminários e visitas à sua sala, e por toda ajuda prestada. Meu agradecimento também à Professora Dra. Patrícia Tacuri por toda a ajuda prestada.

Ao Professor Dr. André Vicente que tanto me ajudou na graduação e pelo enorme incentivo para vir para Maringá fazer mestrado. Sem sua ajuda e sem seu incentivo, provavalmente, eu não teria escrito esses agradecimentos.

Meus agradecimentos também ao meu grande amigo de graduação, Rodrigo Langaro. Por ter me incentivando bastante e me ajudado em momentos difíceis, que tive ao longo do mestrado e, claro, por sempre ter acreditado em mim. Também tenho que deixar o meu agradecimento à Fernanda John, por sempre estar ao meu lado e também sempre acreditar em mim.

À todos os meus amigos de mestrado que, com certeza, de alguma forma me ajudaram em algum momento. Um agradecimento especial à meu grande amigo, que o mestrado me deu, Jean, por toda sua ajuda e por sempre estar ao meu lado e por ser uma pessoa quem sempre esteve (e estará) ao meu lado. E por fim, mas não menos importante, ao Vitor Martinez por sua ajuda nos corredores e sacadas da UEM.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A vida é uma sucessiva sucessão de sucessões que se sucedem sucessivamente.

Hernanes.

Índice de notações

Salvo menção explícita, em contrário, as seguintes convenções e notações serão usadas ao longo deste trabalho.

- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ representam, respectivamente, os conjuntos dos números naturais, inteiros, reais e complexos;
- $\mathbb{N}^*, \mathbb{R}^*_+, \mathbb{R}^*_-, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$ denotam, respectivamente, o conjuntos dos números naturais não-nulos, o conjunto dos números reais positivos, negativos, não-negativos e não-positivos;
- $X = (X, |\cdot|)$ denota um espaço de Banach com norma $|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$;
- $\mathcal{L}(X) = \{f : X \longrightarrow X \ ; \ f \text{ é linear e limitada}\}$ é um espaço de Banach com norma representada por $||\cdot|| : \mathcal{L}(X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$;
- De maneira geral, a notação $|\cdot|_L$ representa a norma $|\cdot|_L : L \longrightarrow \mathbb{R}_+$ em um espaço normado $L = (L, |\cdot|_L)$;
- Dado um espaço métrico $M = (M, d)$, d denota a métrica $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ em M;
- Dados quaisquer dois conjuntos $\mathbb{A}, \mathbb{B}$. Se $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, denotamos por $\mathbb{A} - \mathbb{B} := \{x \in \mathbb{A} \ ; \ x \notin \mathbb{B}\}$.

Resumo

Nesse trabalho, estudamos a existência de soluções fracas para uma classe de equações diferencias funcionais impulsivas neutras que podem ser modeladas na forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + g(t, x_t)\Big) = Ax(t) + f(t, x_t), \ \forall\, t \in I = [0, a] \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B} \\ \Delta x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \end{cases}$$

em que $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados analítico $\{T(s) \ ; \ s \geq 0\}$ definidos no espaço de Banach $X = (X, |\cdot|)$. A história $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ é dada por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \ \forall\, t \in I \ \text{ e } \ \theta \in (-\infty, 0]$$

que pertence a algum espaço de fase $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a,$$

as funções $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$, $I_i : X \longrightarrow X$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, são funções apropriadas e $\Delta x(t)$ representa o salto da função $x : I \longrightarrow X$ definido por

$$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-), \ t \in I.$$

Nossas principais ferramentas são as propriedades de semigrupos de operadores lineares limitados em um espaço de Banach.

Palavras Chave: Semigrupos de Operadores Lineares Limitados, Espaço de Banach, Solução Fraca, Equação Diferencial Parcial Funcional Impulsiva Neutra.

Abstract

In this work we study existence of solutions for impulsive partial neutral functional differential equations modelled in the form

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + g(t, x_t)\Big) = Ax(t) + f(t, x_t), \ \forall\, t \in [0, a] = I \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B} \\ \Delta x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \end{cases}$$

where, $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ is the infinitesimal generator of an analytic semigroups of bounded linear operators $\{T(s)\ ;\ s \geq 0\}$ defined on a Banach space $X = (X, |\cdot|)$. The history $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ given by

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \ \forall\, t \in I \ \text{ e } \ \theta \in (-\infty, 0]$$

belongs to some abstract phase space $\mathcal{B}$ defined axiomacally, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, a)$, for some $n \in \mathbb{N}$, such that

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a,$$

the functions $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$, $I_i : X \longrightarrow X$, for all $i = 1, 2, \cdots, n$, are apropriate functions and $\Delta x(t)$ represent the jump of the function $x : I \longrightarrow X$ defined by

$$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-), \ t \in I.$$

Our main tools are the properties of semigroups of bounded linear operators in a Banach space.

Keywords: Semigroups of Bounded Linear Operators, Banach Space, Mild Solution, Impulsive Partial Neutral Functional Differential Equations.

Sumário

Introdução

Equações diferenciais neutras tem sido estudadas com bastante frequência desde a década de 1990, devido as suas diversas aplicações em muitas áreas da matemática aplicada. Uma boa aplicação desse tipo de equação é no estudo do equilíbrio hemodinâmico de uma pessoa, quando submetida a algum tratamento com medicamentos intravenosos. Já Equações Diferenciais Parciais com retardo finito são aplicadas, por exemplo, no campo da teoria das linhas de transmissão. Devido a isso, e a tantas outras aplicações, o estudo desse tipo de equação tem recebido vasta contruibuições, ao longo dos últimos anos, veja, por exemplo, os livros [6, 19] e os artigos [11, 14, 15].

Esse trabalho tem por objetivo apresentar detalhadamente a existência de soluções fracas para uma classe de equações diferencias funcionais neutras impulsivas que podem ser modeladas na forma

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + g(t, x_t)\Big) = Ax(t) + f(t, x_t), \; \forall\, t \in [0, a] = I \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B} \\ \Delta x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \end{cases} \tag{1}$$

em que $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados analítico $\{T(s)\ ;\ s \geq 0\}$ no espaço de Banach $X = (X, |\cdot|)$. A história, $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$, é dada por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \; \forall\, t \in I \text{ e } \theta \in (-\infty, 0]$$

que pertence a algum espaço de fase $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a,$$

as funções $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$, $I_i : X \longrightarrow X$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, são funções apropriadas e $\Delta x(t)$ representa o salto da função $x : I \longrightarrow X$ definido por

$$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-), \; t \in I$$

em que

$$x(t^+) = \lim_{s \to t^+} x(s) \text{ e } x(t^-) = \lim_{s \to t^-} x(s).$$

O presente trabalho está dividido em 4 capítulos. No Capítulo 1, definimos semigrupo, semigrupo uniformemente contínuo e fortemente contínuo em um espaço de Banach, além do conceito de gerador infinitesimal. E mais, enunciamos e provamos propriedades básicas (e essenciais, para o desenvolvimento do trabalho) de semigrupos. O Capítulo 2 é totalmente dedicado à caracterização de gerador infinitesimal de semigrupos fortemente contínuo (ou C_0 semigrupo). A Seção 2.1 é dedicada a uma dessas caracterizações que é o clássico Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1) . Para a sua demonstração é necessário uma série de definições e lemas, os quais são, respectivamente, enunciados e provados. Já as Seções 2.2 e 2.3 são dedicadas às outras duas caracterizações de gerador infinitesimal de C_0 semigrupos as quais são mais gerais que a caracterização dada no Teorema de Hille-Yosida, entretanto, as duas são decorrências (nada imediatas) do mesmo. Esses dois capítulos iniciais tiveram como referências [28] e [35].

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo de semigrupos analíticos que é em um certo sentido uma extensão do conceito de C_0 semigrupo, e potências fracionárias, isto é, damos sentido à expressão A^α, em que $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear, satisfazendo algumas condições e $\alpha > 0$. Essas duas noções são de suma importância para o desenvolvimento do estudo de existência de soluções do problema de valor inicial dado em (1). Essa foi a motivação de tal capítulo e tivemos como referência, novamente, [28] e os trabalhos [1] e [25].

O Capítulo 4, apesar de contar com apenas duas seções, é o mais longo desse trabalho. Já o mesmo contém dois principais resultados de existência de solução de (1), Teoremas 4.9 e 4.11. A fim de estarmos em condições de provarmos tais resultados tivemos antes que aprensentar várias definições e demonstrar vários resultados que nos auxiliaram na demonstração dos mesmos. Tivemos como referência [16], contudo, tomamos o cuidado de demonstrar todas as afirmações, provar todas as desigualdades, a fim de deixar tudo muito mais claro para o leitor, já que no artigo [16], de maneira geral, as afirmações estão de maneira direita e sem muitas explicações. Além disso, utilizamos uma série de lemas, os quais são, em sua maioria provados, os que não o são, estão devidamente referenciados, já que nosso objetivo é fazer um trabalho que seja o mais autocontido possível. Ainda sobre o Capítulo 4, inicialmente, apresentamos a definição de solução do problema (1), mas antes disso ainda, fizemos um motivação para tal definição, de forma bem detalhada, com o objetivo de entendermos melhor o motivo de tal definição. Após um série de definições e teoremas, que nos auxiliaram na demonstração dos lemas, que viriam na sequência, estabelecemos o nosso primeiro resultado de existência solução de (1), veja Teorema

4.2. Tal teorema exige das funções f e g algumas propriedades de compacidade, esse resultado acabou sendo o mais longo e acabou sendo dividido em 4 passos. Mas, de maneira geral, a ideia da demonstração de tal resultado é transformar o problema (1) em um problema de ponto fixo. Já para o segundo resultado, o Teorema 4.11, foram necessários muitos lemas, contudo, foi necessário introduzir o conceito de uma medida de não-compacidade, mais precisamente, a medida de Kuratowski. Nesse teorema, em questão, as condições exigidas sobre as funções g e I_i, $i = 1, \cdots, n$, são condições de Lipschitz. Assim como, o primeiro teorema, a ideia da demonstração do segundo teorema também é transformar o problema (1) em um problema de ponto fixo e aplicar a Alternativa de Leray-Schauder (Teorema 4.2).

Capítulo 1

Semigrupos e seus geradores

Nesse capítulo apresentamos alguns resultados básicos da teoria de semigrupos operadores lineares limitados definidos em um espaço de Banach. Grande parte de tal teoria foi desenvolvida por Hille e Yosida, em meados de 1940, com o objetivo de obter novas ferramentas para o estudo de equações diferenciais parciais. Tivemos como referência os livros [28] e [35].

1.1 Semigrupos uniformemente contínuos de operadores lineares limitados

Definimos, a seguir, semigrupo de operadores lineares limitados, bem como, semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo definidos em um espaço de Banach $X = (X, |\cdot|)$. Além disso, mostramos algumas propriedades desses tipos de semigrupos.

Definição 1.1. *Uma família $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ de operadores lineares limitados de X em X é dito* ***semigrupo de operadores lineares limitados*** *em X se*

(i) *$T(0) = I$, em que I é o operador identidade de X;*

(ii) *$T(t+s) = T(t)T(s)$, para todo $t, s \geq 0$.*

Se, além disso,

(iii) *$\lim\limits_{t \to 0^+} ||T(t) - I|| = 0$, o semigrupo $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é dito* ***uniformemente contínuo****.*

Definição 1.2. *Sejam X um espaço de Banach e $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$ um semigrupo de operadores lineares limitados em X. O operador linear $A : D(A) : X \longrightarrow X$ definido por*

$$A(x) = \lim_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t) - I}{t} x = \left. \frac{d^+ T(t)}{dt} x \right|_{t=0},$$

para $x \in D(A)$*, é o* ***gerador infinitesimal*** *do semigrupo* $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$*, em que*

$$D(A) = \left\{ x \in X\ ;\ \lim_{t \to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} \ \textit{existe} \right\}$$

é o domínio de A*.*

Observação 1.1. *Da unicidade do limite na Definição 1.2, é fácil ver que um semigrupo* $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ *tem um único gerador infinitesimal. Além disso, se* $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ *é um semigrupo uniformemente contínuo de operadores lineares limitados, então*

$$\lim_{s \to t} ||T(s) - T(t)|| = 0.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$ *arbitrário, escolhemos* $\delta = \frac{\epsilon}{||T||}$*, assim se* $|s - t|_{\mathbb{R}} < \delta$*, então*

$$||T(s) - T(t)|| = ||T(s-t)|| \leqslant ||T||\ |s-t|_{\mathbb{R}} < \frac{||T||}{||T||}\epsilon = \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{s \to t} ||T(s) - T(t)|| = 0$*, ou seja,* $T(t)$ *é contínuo em cada* $t \geq 0$*.*

O próximo teorema nos dá uma relação entre um operador linear limitado e um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo. Mas para demonstrá-lo precisamos de dois resultados os quais apresentamos a seguir.

Lema 1.1. *Se* $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ *é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em* X*, então existe* $\rho > 0$ *tal que*

$$\left|\left| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t)\, dt \right|\right| < 1.$$

Demonstração. Pela Observação 1.1, $T(t)$ é contínuo em cada $t \geq 0$, assim a integral, no sentido de Riemann, $\displaystyle\int_0^h T(t)\, dt$, com $h > 0$ existe. Além disso,

$$\frac{1}{h} \int_0^h T(t)\, dt = \frac{\overline{T}(h) - \overline{T}(0)}{h},$$

em que $\overline{T} : X \to X$ é a primitiva de T, ou seja, $\overline{T}' = T$, logo

$$\lim_{h \to 0^+} \int_0^h T(t)\, dt = \lim_{h \to 0^+} = \frac{\overline{T}(h) - \overline{T}(0)}{h} = \overline{T}'(0) = T(0) = I,\ \forall\, h > 0,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, tem-se

$$\left|\left| I - \frac{1}{h} \int_0^h T(t)\, dt \right|\right| < \epsilon,\ \forall\, h > 0.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$ e $h = \rho > 0$, encontramos

$$\left|\left| I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(t)\, dt \right|\right| < 1,$$

como queríamos demonstrar. ■

Lema 1.2. *Seja $A \in \mathcal{L}(X)$. Se $||A|| < 1$, então $(I-A)^{-1}$ existe e é um operador linear limitado.*

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k.$$

Como

$$||A^n|| \leq ||A||^n, \; \forall\, n \in \mathbb{N},$$

para $p, q \in \mathbb{N}$, com $p \leq q$, tem-se

$$||S_p - S_q|| = \left|\left|\sum_{k=0}^{p} A^k - \sum_{k=0}^{q} A^k\right|\right| = \left|\left|\sum_{k=p+1}^{q} A^k\right|\right| \leq \sum_{k=p+1}^{q} ||A^k|| \leq \sum_{k=p+1}^{q} ||A||^k. \tag{1.1}$$

Agora, fazendo $k = p + i$, temos $i = 1$ e $k = q - p$, quando $k = q$, logo,

$$\sum_{k=p+1}^{q} ||A||^k = \sum_{i=1}^{q-p} ||A||^i ||A||^p.$$

Disso e de (1.1), segue que

$$||S_p - S_q|| \leq \sum_{k=p+1}^{q} ||A||^k = \sum_{i=1}^{q-p} ||A||^i ||A||^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} ||A||^i ||A||^p = \left(\frac{1}{1 - ||A||} ||A||^p\right),$$

já que, por hipótese, $||A|| < 1$. Consequentemente, $||S_p - S_q|| \overset{p\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ou seja, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathcal{L}(X)$, logo $S_n \longrightarrow S$, para algum $S \in \mathcal{L}(X)$. Agora notemos que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$S_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} A^k = I + \sum_{k=1}^{n+1} A^k = I + A \sum_{k=0}^{n} A^k = I + AS_n = I + S_n A,$$

fazendo $n \longrightarrow \infty$, segue que

$$S = I + SA = I + AS \;\Rightarrow\; I = S(I - A) = (I - A)S,$$

donde $I - A$ é inversível, e mais $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A^n = S(I - A)^{-1}$. ■

Teorema 1.1. *Um operador linear $A : D(A) : X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ se, e somente se, A é um operador linear limitado.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Seja $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X. Pelo Lema 1.1, existe $\rho > 0$ tal que

$$\left|\left| I - \frac{1}{\rho}\int_0^{\rho} T(s)\, ds \right|\right| < 1,$$

disso e pelo Lema 1.2, o operador

$$I - \left(I - \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds \right) = \frac{1}{\rho} \int_0^\rho T(s)\, ds$$

é inversível e, consequentemente, $\displaystyle\int_0^\rho T(s)\, ds$ também o é. Agora, para todo $h > 0$ e $h < \rho$, tem-se

$$\begin{aligned}
\frac{T(h) - I}{h} \int_0^\rho T(s)\, ds &= \frac{1}{h} \left(\int_0^\rho T(s+h)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_h^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^\rho T(s)\, ds \right) \\
&= \frac{1}{h} \left[\left(\int_h^\rho T(s)\, ds + \int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds \right) - \left(\int_0^h T(s)\, ds + \int_h^\rho T(s)\, ds \right) \right] \\
&= \frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \int_0^h T(s)\, ds \right),
\end{aligned}$$

donde

$$\frac{T(h) - I}{h} = \left(\frac{1}{h} \int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, ds \right) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} &= \lim_{h \longrightarrow 0^+} \left[\frac{1}{h} \left(\int_\rho^{\rho+h} T(s)\, ds - \frac{1}{h} \int_0^h T(s)\, ds \right) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1} \right] \\
&= (T(\rho) - I) \left(\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}
\end{aligned}$$

que é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$. Portanto, $A = (T(\rho) - I) \left(\displaystyle\int_0^\rho T(s)\, ds \right)^{-1}$ é um operador linear limitado, já que $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$.

$\Leftarrow$) Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear limitado em X. Definimos o operador

$$T(t) = e^{At} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}.$$

Mostraremos que $\{T(t) = e^{At}\ ;\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo gerado por A. Para isso, notemos que $T(t)$ é limitada, para todo $t \geq 0$, e é linear, em virtude de A ser limitada e das propriedades da função exponencial. E mais,

$$T(t)T(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(sA)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[(s+t)A]^n}{n!} = T(t+s),\ \forall\, t, s \geq 0 \text{ e } T(0) = e^{0t} = I.$$

Assim, $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados definidos em X. Resta provar que $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo, em X. Para tanto, notemos que

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!} = I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(tA)^n}{n!}$$

donde

$$\begin{aligned} ||T(t)-I|| = ||e^{tA}-I|| &= \left|\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}\right|\right| = \left|\left|tA\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tA)^{n-1}}{n!}\right|\right| \\ &\leq \left|\left|tA\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tA)^{n-1}}{(n-1)!}\right|\right| \\ &\leq ||tA||\left|\left|tA\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(tA)^m}{m!}\right|\right| \\ &\leq t||A||\,||e^{tA}|| \leq t||A||e^{t||A||},\ \forall\, t \geq 0. \end{aligned}$$

Como $||e^{tA}-I|| \longrightarrow 0$, quando $t \longrightarrow 0^+$, concluímos $\{T(t)\,;\, t\geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo. Por fim, como, para todo $t>0$,

$$\frac{T(t)-I}{t} = \frac{1}{t}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(tA)^n}{n!}\right)-I\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{n-1}A^n}{n!} = A\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{(n+1)!}\right],$$

obtemos que

$$\left|\left|\frac{T(t)-I}{t}-A\right|\right| = \left|\left|A\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^nA^n}{(n+1)!}\right)-I\right]\right|\right| \leq \left|\left|A\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^nA^n}{n!}\right|\right| = ||A||\,||T(t)-I||.$$

Disso e como $\{T(t)\ ;\ t\geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em X, isto é, $||T(t)-I||| \longrightarrow 0$, quando $t\longrightarrow 0^+$, segue que

$$\left|\left|\frac{T(t)-I}{t}-A\right|\right| \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} ||A||.0 = 0 \Rightarrow \lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t} = A,$$

ou seja, o operador linear limitado A é o gerador infinitesimal de semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\ ;\ t\geq 0\}$ em X.

■

Pelo Teorema anterior, observemos que se $\{T(t)\,;\, t\geq 0\}$ é uniformemente contínuo, então o seu gerador infinitesimal é um operador linear limitado. Uma questão que surge é a seguinte: todo operador linear limitado $A : D(A)\subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um único semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t)\ ;\ t\geq 0\}$? A resposta para tal questão é dado pelo próximo teorema.

Teorema 1.2. *Sejam $\{T(t)\,;\, t\geq 0\}$ e $\{S(t)\,;\, t\geq 0\}$ semigrupos de operadores lineares limitados uniformemente contínuos em X. Se*

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{T(t)-I}{t} = A = \lim_{t\to 0^+}\frac{S(t)-I}{t},$$

ou seja, $A : D(A)\subset X \longrightarrow X$ é gerador infinitesimal de ambos os semigrupos, então

$$T(t) = S(t),\ \forall\, t\geq 0.$$

Demonstração. Seja $M > 0$. Como as funções $f, g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dadas por $f(t) = ||T(t)||$ e $g(t) = ||S(t)||$ são contínuas em $t \in \mathbb{R}_+$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$||T(t)||\;||S(s)|| \leq c, \;\forall\, s, t \in [0, M].$$

Dado $\epsilon > 0$ qualquer, pela hipótese acerca de A, existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{||T(h) - S(h)||}{h} \leq \frac{\epsilon}{Mc}, \;\forall\, h \in [0, \delta].$$

Seja $t \in [0, M]$. Escolhendo $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $\frac{Mc}{n} < \delta$, obtemos

$$\begin{aligned}
||T(t) - S(t)|| &= \left|\left|T\left(n\frac{t}{n}\right) - S\left(n\frac{t}{n}\right)\right|\right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left|T\left((n-k)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)}{n}t\right)\right|\right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{(k+1)}{n}t\right)\right|\right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) T\left(\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) - T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right) S\left(\frac{kt}{n}\right) S\left(\frac{t}{n}\right)\right|\right| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left|\left|T\left((n-k-1)\frac{t}{n}\right)\right|\right| \; \left|\left|T\left(\frac{t}{n}\right) - S\left(\frac{t}{n}\right)\right|\right| \; \left|\left|S\left(\frac{kt}{n}\right)\right|\right| \leq \frac{\epsilon}{tcn}\frac{Mc}{n} \leq \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é qualquer, segue que

$$||T(t) - S(t)|| = 0 \;\Rightarrow\; T(t) = S(t), \;\forall\, t \in [0, M],$$

como desejado. ■

Corolário 1.1. *Se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X, então*

(i) *existe um único operador linear limitado $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ tal que $T(t) = e^{tA}$;*

(ii) *existe uma constante $w \geq 0$ tal que $||T(t)|| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$;*

(iii) *o operador A em **(i)** é o gerador infinitesimal de $T(t)$;*

(iv) *a função $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $h(t) = ||T(t)||$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$, é diferenciável (na norma) e*

$$\frac{dT(t)}{dt} = AT(t) = T(t)A.$$

Demonstração. ***(i)*** Temos, por hipótese, que $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em X, então pelo Teorema 1.1, o gerador infinitesimal A de $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um operador linear limitado, o qual é único. Sabemos, também pelo Teorema 1, que A é o gerador infinitesimal de $\{e^{tA}\ ;\ t \geq 0\}$. Portanto, pelo Teorema 2, segue que $T(t) = e^{tA}$.

(ii) Como $T(t) = e^{tA}$, para cada $t \geq 0$, então

$$||T(t)|| = ||e^{tA}|| = \left|\left|\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!}\right|\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{||(tA)^k||}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k ||A||^k}{k!} = e^{t||A||} \leq e^{tw},$$

já que $||A|| \leq w$, para algum $w \geq 0$, pois $A \in \mathcal{L}(X)$.

(iii) De (i), segue que A é o gerador infinitesimal de e^{tA} e $T(t) = e^{At}$. Portanto, A é gerador infinitesimal de $T(t)$.

iv) Notemos que, para todo $h > 0$, tem-se

$$\frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \frac{T(t)T(h) - T(t)}{h} = T(t)\frac{T(h) - I}{h},$$

além disso, por hipótese $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um semigrupo uniformemente contínuo em X, e pelo item ***(iii)*** A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$, ou seja,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = A,$$

segue que

$$\frac{dT(t)}{dt} = \lim_{h \to 0^+} \frac{T(t+h) - T(t)}{h} = \lim_{h \to 0^+} T(t)\frac{T(h) - I}{h} = T(t) \lim_{h \to 0^+} \frac{T(h) - I}{h} = T(t)A.$$

Portanto,

$$\frac{dT(t)}{dt} = T(t)A = AT(t).$$

■

1.2 Semigrupos de operadores lineares limitados fortemente contínuo

Nessa seção mostramos alguns resultados acerca de um tipo mais particular de semigrupos de operadores lineares limitados, a saber, os semigrupos fortemente contínuos. Para mais detalhes, veja [28].

Definição 1.3. *Um semigrupo de operadores lineares limitados* $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ *em* X *é dito semigrupo* ***fortemente contínuo*** *ou* $\mathbf{C_0}$ ***semigrupo****, se*

$$\lim_{t \to 0^+} T(t)x = x,\ \forall\, x \in X.$$

Tendo em vista a Definição 1.3, todo semigrupo uniformemente contínuo em X é um C_0 semigrupo. De fato, seja $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ um semigrupo de operadores lineares limitados uniformemente contínuo em X, para todo $t > 0$ e $x \in X$, tem-se

$$|T(t)x - x| = |(T(t) - I)x| \leq ||T(t) - I||\ |x|,$$

disso e pelo fato de que $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ é uniformemente contínuo, $||T(t) - I|| \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, donde segue que $|T(t)x - x| \overset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$, para todo $x \in X$ e, portanto, $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo em X.

Teorema 1.3. *Se $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo, então existem constantes $w \geq 0$ e $M > 0$ tais que*

$$||T(t)|| \leq Me^{wt},\ \forall\, t \geq 0.$$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que existe $\eta > 0$ tal que

$$||T(t)|| \leq M,\ \forall\, t \in [0, \eta],$$

ou seja, que $||T(t)||$ é limitada no intervalo $[0, \eta]$. Para isso, suponhamos, por um momento, que isso não ocorra, ou seja, existe uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ tal que

$$t_n \geq 0,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \to \infty} t_n = 0 \quad \text{e} \quad ||T(t_n)|| \geq n,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Pelo *Princípio da Limitação Uniforme*[1] , segue que $|T(t_n)x|$ não é limitada, para algum $x \in X$, ou seja, $||T(t_n)||$ é uniformemente ilimitada, o que contraria a hipótese de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ ser um semigrupo fortemente contínuo. Portanto, $||T(t)||$ é limitada em $[0, \eta]$, para algum $\eta > 0$, isto é,

$$||T(t)|| \leq M,\ \forall\, t \in [0, \eta] \text{ e algum } M \in \mathbb{R}.$$

Contudo, como $||T(0)|| = 1$, então $M \geq 1$. Definimos, então

$$w = \frac{\ln M}{\eta} \geq 0\ \Rightarrow\ \ln M = w\eta\ \Rightarrow\ M = e^{w\eta}. \tag{1.2}$$

Dado qualquer $t \geq 0$, podemos escrevê-lo da forma $t = n\eta + \delta$, para alguns $n \in \mathbb{N}$ e $\delta \in [0, \eta]$, assim de (1.2), vem que

$$M = e^{w\eta}\ \Rightarrow\ \ln M = \eta w \quad \Rightarrow \quad t \ln M = t\eta w$$

o que implica que

$$\frac{t}{\eta} \ln M = tw\ \Rightarrow\ \ln M^{\frac{t}{\eta}} = \ln e^{wt}\ \Rightarrow\ M^{\frac{t}{\eta}} = e^{wt},$$

[1]**Princípio da Limitação Uniforme**$\big($[18],Teorema 4.7-3$\big)$. Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_{X_1})$ um espaço de Banach e $Y_1 = (Y_1, |\cdot|_{Y_1})$ um espaço normado. Se a família $\big\{T_\lambda : X_1 \longrightarrow Y_1\ ;\ T_\lambda \text{ é linear e contínua, para todo } \lambda \in \Lambda\big\}$ é tal que, para todo $x \in X_1$, existe $M_x \in \mathbb{R}$ tal que $T_\lambda(x) \leq M_x$, para todo $\lambda \in \Lambda$, então T_λ é uniformemente limitada.

donde

$$\begin{aligned} ||T(t)|| = ||T(n\eta+\delta)|| = ||T(n\eta)||\,||T(\delta)|| &= ||\overbrace{T(\eta)\cdot T(\eta)\cdot T(\eta)\cdot\ \cdots\ \cdot T(\eta)}^{n\ vezes}||\,||T(\delta)|| \\ &= ||T(\eta)^n||\,||T(\delta)|| \\ &\leq M^n M \leq M^{\frac{t}{\eta}} M = Me^{wt}. \end{aligned}$$

E assim, provamos o teorema. ■

Corolário 1.2. *Se $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ é um C_0 semigrupo, então a função $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow X$ dada por*

$$f(t) = T(t)x,\ \forall\, x\in X$$

é uma função contínua.

Demonstração. Sejam $h>0$ e $t\geq 0$ quaisquer. Assim,

$$|T(t+h)x - T(t)x| \leq ||T(t)||\,|T(h)x - x| \leq Me^{wt}|T(h)x-x| \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} Me^{wt}\cdot 0 = 0,$$

para alguns $w\geq 0$ e $M>0$, já que $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ é um C_0 semigrupo, isto é, $|T(h)x-x| \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. Além disso,

$$|T(t-h)x - T(t)x| \leq ||T(t)||\,|x - T(h)x| \leq Me^{wt}|x-T(h)x| \overset{h\to 0^+}{\longrightarrow} Me^{wt}\cdot 0 = 0,$$

novamente pelo fato de $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ ser um C_0 semigrupo. Portanto, f é uma função contínua. ■

Teorema 1.4. *Seja $\{T(t)\,;\,t\geq 0\}$ um C_0 semigrupo. Se $A:D(A)\subset X\longrightarrow X$ é o seu gerador infinitesimal, então*

(i) *para todo $x\in X$, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = T(t)x$;*

(ii) *para todo $x\in X$, $\displaystyle\int_t^{t+h} T(s)x\,ds \in D(A)$ e $\displaystyle A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x$;*

(iii) *para todo $x\in D(A)$, $T(t)x\in D(A)$ e $\frac{d}{dt}T(t)x = A(T(t)x) = T(t)A(x)$;*

(iv) *para todo $x\in D(A)$, $\displaystyle T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)A(x)\,d\tau = \int_s^t A(T(\tau)x)\,d\tau$.*

Demonstração. ***(i)*** Pelo Corolário 1.2, a função $f:\mathbb{R}_+\longrightarrow X$ dada por $f(t)=T(t)x$, para todo $x\in X$, é contínua, então $\displaystyle\int_t^{t+h} T(s)x\,ds$ está bem definida para todo $h>0$. Assim,

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = \lim_{h\to 0^+}\frac{\overline{T}(t+h)-\overline{T}(t)}{h}x,\ \forall\, x\in X,$$

em que $\overline{T} : X \to X$ é tal que $\overline{T}\,' = T$, logo

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds = \overline{T}\,'(t)x = T(t)x,\ \forall\, x \in X.$$

(ii) Queremos provar que $\displaystyle\int_0^t T(s)x\,ds \in D(A)$, ou seja, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds$ existe. Para isso, notemos que dados quaisquer $x \in X$ e $h > 0$,

$$\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \frac{1}{h}\int_0^t (T(h+s)x - T(s)x)\,ds = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds,$$

donde

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}\int_0^t T(s)x\,ds = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{h}\int_t^{t+h} T(s)x\,ds - \frac{1}{h}\int_0^h T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x,$$

em virtude do item ***(i)***. Portanto, $\displaystyle\int_0^t T(s)x\,ds\ \in D(A)$ e

$$A\left(\int_0^t T(s)x\,ds\right) = T(t)x - x.$$

(iii) Sejam $x \in D(A)$ e $h > 0$ arbitrários. Assim,

$$\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)\left(\frac{T(h)-I}{h}\right)x \ \Rightarrow\ \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}T(t)x = T(t)A(x),$$

donde $T(t)x \in D(A)$ e $A(T(t)x) = T(t)A(x)$. E, além disso, pela Definição 1.2, tem-se

$$\frac{d}{dt}T(t)x = A(T(t)x) = T(t)A(x).$$

Resta provar que a derivada $T(t)x$ com relação a t existe e é igual a $T(t)A(x)$, para todo $t \geq 0$. Para tanto

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0^+}\left(\frac{T(t)x - T(t-h)x}{h} - T(t)A(x)\right) = \\
= \ &\lim_{h\to 0^+} T(t-h)\left(\frac{T(h)x - x}{h} - A(x)\right) + \lim_{h\to 0^+}(T(t-h)A(x) - T(t)A(x)) = 0,
\end{aligned}$$

pois o primeiro limite é zero, já que $x \in D(A)$, $\displaystyle\lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)x - x}{h} = A(x)$ e $||T(t-h)||$ é limitado, o segundo limite é zero em virtude da continuidade de $T(t)$ em cada $t \geq 0$ (veja Observação 1.1). Portanto,

$$\frac{d}{dt}T(t)x = A(T(t)x) = T(t)A(x),\ \forall\, x \in X. \tag{1.3}$$

(iv) Integrando (1.3) de s até t, com $t, s \geq 0$, obtemos

$$\int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\,d\tau = \int_s^t A(T(\tau)x)\,d\tau = \int_s^t T(\tau)A(x)\,d\tau,\ \forall\, x \in X,$$

em que $\displaystyle\int_s^t \frac{d}{d\tau}T(\tau)x\,d\tau = T(t)x - T(s)x$, e disso segue o resultado desejado. ■

Corolário 1.3. *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$, então*

(i) *$D(A)$ é denso em X, ou seja, $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *A é um operador linear fechado.*

Demonstração. ***(i)*** Seja $x \in X$ qualquer. Definimos, para cada $t \in \mathbb{N}^*$,

$$x_t = \frac{1}{t}\int_0^t T(s)x\, ds.$$

Pelo item ***(ii)*** do Teorema 1.4, temos que $x_t \in D(A)$, para cada $t \in \mathbb{N}^*$. Além disso $x_t \longrightarrow x$, quando $t \longrightarrow 0^+$, já que

$$x_t - x = \frac{1}{t}\int_0^t (T(s)x - x)\, ds \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0,$$

logo, por definição de fecho de um conjunto, temos que $x \in \overline{D(A)}$ e, consequentemente, $X \subset \overline{D(A)}$.

Para mostrarmos a inclusão contrária, seja $y \in \overline{D(A)}$. Então, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow y$, quando $n \longrightarrow \infty$. Por outro lado, como $D(A) \subset X$ temos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, e sendo X espaço de Banach, segue que $y \in X$, e consequentemente, $\overline{D(A)} \subset X$. Portanto, $\overline{D(A)} = X$.

(ii) A linearidade do operador A segue diretamente da Definição 1.2. Resta-nos, então, mostrar que A é um operador linear fechado. Para isso, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $x_n \longrightarrow x$ e $A(x_n) \longrightarrow y$, quando $n \longrightarrow \infty$, para alguns $x, y \in X$. Agora, como A é linear e limitado, obtemos

$$|A(x_n) - A(x)| = |A(x_n - x)| \leq ||A||\; |x_n - x| \;\Rightarrow\; A(x_n) - A(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

pois $x_n \longrightarrow x$, quando $n \longrightarrow \infty$, consequentemente $A(x_n) \longrightarrow A(x)$. Disso, como $A(x_n) \longrightarrow y$ e pela unicidade do limite, segue que $A(x) = y$ e $x \in D(A)$. Portanto, A é operador linear fechado. ∎

Teorema 1.5. *Sejam $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ e $\{S(t)\,;\, t \geq 0\}$ C_0 semigrupos com geradores infinitesimais $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ e $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$, respectivamente. Se $A = B$, então $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Seja $x \in D(A) = D(B)$. Do Teorema 1.4, a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ dada por $f(s) = T(t-s)S(s)x$, para todo $t > 0$ e $s \in [0, t]$, é diferenciável e

$$\frac{d}{dt}(T(t-s)S(s)x) = T(t-s)BS(s)x - S(s)xA(t-s) = T(t-s)BS(s)x - T(t-s)AS(s)x = 0,$$

já que $A = B$, consequentemente, a função f é constante, em particular, para $s = 0$ e $s = t$,

$$f(0) = T(t)x = S(t)x = f(t), \ \forall\, x \in D(A).$$

Pelo Corolário 1.3, $D(A)$ é denso em X, o que implica que

$$T(t)x = S(t)x, \ \forall\, x \in X.$$

Portanto, $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$. ■

Agora damos um exemplo de um C_0 semigrupo e seu gerador infinitesimal.

Exemplo 1.1. *Consideremos o espaço de Banach*

$$X = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é limitada e uniformemente contínua}\}$$

com norma

$$||f||_X = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|_{\mathbb{R}}, \ \forall\, f \in X.$$

Para $f \in X$, *definimos*

$$(T(t)f)(s) = f(t+s), \ \forall\, t \geq 0, s \in \mathbb{R}.$$

Assim $\{T(t); t \geq 0\}$ *é um* C_0 *semigrupo de operadores lineares limitados satifazendo* $||T(t)|| \leq 1$, *para todo* $t \geq 0$.

Resolução. Inicialmente, mostraremos que $\{T(t) \ ; \ t \geq 0\}$ é uma família de operadores lineares limitados em X.

(i) Sejam $f, g \in X, t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$ quaisquer, assim

$$(T(t)(f+g))(s) = (f+g)(t+s) = f(t+s) + g(t+s) = (T(t)f)(s) + (T(t)g)(s).$$

Logo, $T(t)$ é linear.

(ii) Sejam $f \in X$, $t \geq 0$ e $s \in \mathbb{R}$ arbitrários. Temos que f é limitada, ou seja, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq c$, para todo $x \in \mathbb{R}$, donde

$$||(T(t)f)(s)|| = |f(s+t)|_{\mathbb{R}} \leq c, \forall f \in X \Rightarrow ||T(t)|| = \sup_{f \in X} \frac{|(T(t)f)(s)|_{\mathbb{R}}}{||f||_X} \leq \frac{|f(s+t)|_{\mathbb{R}}}{||f||_X} \leq \frac{c}{c} = 1,$$

consequentemente, $T(t)$ é limitado.

De ***(i)*** e ***(ii)*** concluímos que $\{T(t) \ ; \ t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$.

(iii) Notemos que, dados quaisquer $f \in X$ e $s \in \mathbb{R}$, tem-se

$$(T(0)f)(s) = f(0+s) = f(s) \ \Rightarrow \ T(0) = I.$$

(iv) Sejam $t, \overline{s} \geq 0$, $f \in X$ e $s \in \mathbb{R}$ arbitrários. Assim,

$$(T(t+\overline{s}))f(s) = f(t+\overline{s}+s) = (T(t)f)(s+\overline{s}) = T(t)(T(\overline{s})f(s)) = T(t)T(\overline{s})f(s),$$

ou seja, $T(t+\overline{s})f = T(t)T(\overline{s})f$.

Por fim, observemos que

$$\lim_{t\to 0^+}(T(t)f)(s) = \lim_{t\to 0^+} f(t+s) = f(s).$$

Logo, de ***(i)**-**(iv)*** segue que $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de operadores lineares limitados, satifazendo $||T(t)|| \leq 1$, para todo $t \geq 0$.

A seguir, apresentamos o gerador infinitesimal do C_0 semigrupo $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$. Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$. Vamos determinar o operador linear A e o seu domínio $D(A)$. Para isso, sejam $f \in D(A)$, $s \in \mathbb{R}$ e $h > 0$ quaisquer, assim

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)-I}{h} f(s) = \lim_{h\to 0^+} \frac{T(h)f(s)-T(0)f(s)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(s+h)-f(s)}{h} = f'(s).$$

Logo, $A(f(s)) = f'(s)$, para todo $f \in D(A)$, em que $D(A) = \{f \in X\,;\, f' \text{ existe e } f' \in X\}$. Ainda A é linear, em virtude da linearidade da derivada. ■

Capítulo 2

Caracterizações do gerador infinitesimal de C_0 semigrupos

O foco desse capítulo é em caracterizações de geradores infinitesimais de C_0 semigrupos de operadores lineares limitados definidos em um espaço de Banach X. Começando por C_0 semigrupos mais particulares, até os casos mais gerais. Apresentamos um importante resultado, o Teorema de Hille-Yosida, entre outros. Para mais detalhes, veja [28] e [35].

2.1 O Teorema de Hille-Yosida

Sabemos, pelo Teorema 1.3, que se $\{T(t); t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo então existem $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Essa seção é dedicada à caracterização de geradores infinitesimais de C_0 semigrupos para o caso $M = 1$ e $w = 0$, ou seja, $||T(t)|| \leq 1$, para todo $t \geq 0$. Mas antes disso, é necessário introduzir alguns conceitos e definições básicas.

Definição 2.1. *Sejam $\{T(t); t \geq 0\}$ um C_0 semigrupo, $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$. Se $w = 0$, então $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é chamado de C_0 semigrupo* ***uniformemente limitado*** *e se $M = 1$, então ele é chamado de* $\mathbf{C_0}$ ***semigrupo de contrações****.*

Na próxima definição, apresentamos um importante conceito, dentro da teoria de semigrupos, que é a noçao de *conjunto resolvente* de um operador linear.

Definição 2.2. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear não necessariamente limitado. O conjunto*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ \lambda I - A \text{ é inversível}\}$$

*é chamado **conjunto resolvente** de A.*

Seja $\lambda \in \rho(A)$, assim $\lambda I - A$ é inversível, ou seja, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado definido em X. A família

$$R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}\ ;\ \lambda \in \rho(A)$$

*de operadores lineares limitados é chamado **resolvente de A**. O conjunto $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ é chamado de **espectro de A**.*

Proposição 2.1 (Primeira equação resolvente)**.** *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear, então*

$$R(\lambda : A) - R(\mu : A) = (\mu - \lambda) R(\lambda : A) R(\mu : A),\ \forall\, \mu, \lambda \in \rho(A).$$

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in \rho(A)$. Como $R(\lambda : A)(\lambda I - A) = I$ e $R(\mu : A)(\mu I - A) = I$, temos

$$\begin{aligned} R(\lambda : A)(\mu I - A) R(\mu : A) - R(\mu : A)(\lambda I - A) R(\lambda : A) &= R(\lambda : A)((\mu I - A) - (\lambda I - A)) R(\mu : A) \\ &= (\mu I - \lambda I + A - A) R(\lambda) R(\mu : A) \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda : A) R(\mu : A). \end{aligned}$$

■

Com tais definições, estamos aptos para enunciar um dos mais importantes teoremas da teoria de C_0 semigrupos, que é devido aos matemáticos Hille[1] e Yosida[2]. Em um primeiro momento, demonstramos apenas a "ida" do teorema, após isso, enunciamos e provamos alguns lemas (os quais utilizam hipóteses de tal teorema) para na sequência demonstrarmos a "volta" .

Teorema 2.1 (Teorema de Hille-Yosida)**.** *Um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $\overline{D(A)} = X$;*

(ii) *$\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ e $||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda > 0$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Como, por hipótese, A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ em X, pelo Corolário 1.3, segue que A é fechado e que $\overline{D(A)} = X$.

Para todo $\lambda > 0$ e $x \in X$, definimos

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt.$$

[1] **Einar Hille** (1894-1980): matemático norte-americano.
[2] **Kôsaku Yosida**:(1909-1990): matemático japonês.

Como a função $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ dada por $f(t) = T(t)x$, para todo $x \in X$, é contínua, a integral $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt$ (no sentido de Riemann) está bem definida e define um operador linear $R(\lambda)$. E, além disso,

$$|R(\lambda)x| = \left|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt\right| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}|T(t)x|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}Me^{wt}|x|\, dt,$$

para alguns $w \geq 0$ e $M \geq 1$. Mas como, por hipótese, $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações, temos $M = 1$ e $w = 0$, assim

$$|R(\lambda)x| \leq \int_0^\infty e^{-\lambda t}|x|\, dt = |x| \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, dt = \frac{1}{\lambda}|x|,\ \forall\, x \in X,$$

donde

$$||R(\lambda)|| \leq \frac{1}{\lambda}, \tag{2.1}$$

ou seja, $R(\lambda)$ é um operador linear limitado.

Afirmamos que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, para cada $\lambda > 0$. De fato, sejam $\lambda > 0$ e $h > 0$ quaisquer. Temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)(T(h)-I)x\, dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)T(h)x\, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \\ &= \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t+h)x\, dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt, \end{aligned}$$

fazendo a substituição $s = t + h$ na primeira integral, temos

$$\begin{aligned} \frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda(s-h)}T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \\ &= \frac{1}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda s+\lambda h}T(s)x\, ds - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t}T(t)x\, dt - \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt \\ &= \frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0^+}\frac{T(h)-I}{h}R(\lambda)x &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt\right) \\ &= \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{e^{\lambda h}-1}{h}\ R(\lambda)x - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_h^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\, dt\right) = \lambda R(\lambda)x - x, \end{aligned}$$

o que implica que $R(\lambda)x \in D(A)$, para todo $x \in X$ e $\lambda > 0$, e

$$A(R(\lambda)) = \lambda R(\lambda) - I\ \Rightarrow\ (\lambda I - A)R(\lambda) = I. \tag{2.2}$$

Por outro lado, para qualquer $x \in D(A)$, temos

$$R(\lambda)(A(x)) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)A(x)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}A(T(t)x)\,dt = A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\right) = A(R(\lambda)x),$$

assim,

$$R(\lambda)(\lambda I - A)x = \lambda R(\lambda)x - R(\lambda)(A(x)) = \lambda R(\lambda)x - A(R(\lambda)x) = (\lambda I - A)R(\lambda)x = x, \forall x \in D(A), \tag{2.3}$$

em que a última igualdade ocorre em virtude de (2.2). Consequentemente,

$$R(\lambda)(\lambda I - A) = I \;\Rightarrow\; (\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda).$$

Portanto, como por definição, $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$, com $\lambda > 0$, segue que $R(\lambda) = R(\lambda : A)$. E mais, de (2.1), concluímos que

$$||R(\lambda)|| \leq ||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{\lambda},\ \forall\, \lambda > 0.$$

■

Para provarmos a implicação contrária do Teorema 2.1, precisamos de alguns lemas.

Lema 2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Se A satisfaz* ***(i)*** *e* ***(ii)*** *do Teorema 2.1, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x,\ \forall\, x \in X,$$

com $R(\lambda : A) = (\lambda I - A)^{-1}$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$.

Demonstração. Notemos que

$$I\lambda = I\lambda - A + A \;\Rightarrow\; \lambda I = (I\lambda - A) + A \;\Rightarrow\; \lambda\,\overbrace{(I\lambda - A)^{-1}}^{R(\lambda:A)} = I + AR(\lambda : A),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Nesses termos, dado qualquer $x \in D(A)$ e $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, tem-se

$$|\lambda R(\lambda : A)x - x| = |AR(\lambda : A)x| = |R(\lambda : A)A(x)| \leq \frac{1}{\lambda}|A(x)| \;\longrightarrow\; 0,$$

quando $\lambda \longrightarrow \infty$. Mas $D(A)$ é denso em X e $||R(\lambda : A)|| \leq 1$, donde segue que $\lambda R(\lambda : A)x \longrightarrow x$, quando $\lambda \longrightarrow \infty$, para todo $x \in X$, ou seja,

$$\lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A)x = x,\ \forall\, x \in X.$$

■

A próxima definição é da *aproximação de Yosida*, conceito o qual utilizamos nos próximos dois lemas e, além disso, tal conceito está fortemente ligado à demonstração da “volta” do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1).

Definição 2.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. A* ***aproximação de Yosida*** *de A é definida por*

$$A_\lambda = \lambda A R(\lambda : A) = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I, \ \forall \lambda > 0.$$

Lema 2.2. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear satisfazendo **(i)** e **(ii)** do Teorema 2.1. Se A_λ, para todo $\lambda > 0$, é a aproximação de Yosida de A, então*

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = A(x), \ \forall x \in D(A).$$

Demonstração. Da Definição 2.3, temos

$$A_\lambda = \lambda^2 R(\lambda : A) - \lambda I = \lambda(\lambda R(\lambda : A) - I),$$

disso e de (2.2), obtemos $A_\lambda = \lambda A(R(\lambda : A))$. Assim, dado qualquer $x \in D(A)$, tem-se

$$\lim_{\lambda \to \infty} A_\lambda x = \lim_{\lambda \to \infty} \lambda R(\lambda : A) A(x) = \lim_{\lambda \to \infty} A(\lambda R(\lambda : A) x) = A(x), \ \forall x \in D(A).$$

■

Lema 2.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear satisfazendo **(i)** e **(ii)** do Teorema 2.1. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, então A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo de contrações $\{T(t) = e^{tA_\lambda} \ ; \ t \geq 0\}$. E mais,*

$$||e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}|| \leq t||A_\lambda x - A_\mu x||, \ \forall x \in X \ , \lambda, \mu > 0.$$

Demonstração. Diretamente da Definição 2.3, é fácil ver que A_λ é um operador linear limitado. Pelo Teorema 1.1, A_λ é o gerador infinitesimal de um semigrupo uniformemente contínuo $\{T(t) = e^{tA_\lambda} \ ; \ t \geq 0\} = \Gamma_\lambda$. Afirmamos que Γ_λ é um semigrupo uniformemente contínuo de contrações. De fato, para qualquer $t \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
||e^{tA_\lambda}|| = ||e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)}|| &= ||e^{t\lambda^2 R(\lambda:A)} \cdot e^{-t(\lambda I)}|| \\
&\leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n ||R(\lambda : A)^n||}{n!} \\
&\leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n ||R(\lambda : A)||^n}{n!} \\
&\leq e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n \frac{1}{\lambda^n}}{n!} = e^{-t\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda^2 t)^n}{\lambda^n n!} = e^{-\lambda t} \cdot e^{\frac{\lambda^2 t}{\lambda}} = e^0 = 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $||e^{tA_\lambda}|| \leq 1$, e assim, segue a afirmação feita. Além disso, notemos que, para quaisquer $x \in X$ e $\lambda, \mu > 0$, tem-se

$$e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu} = \int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} \cdot e^{t(1-s)A_\mu}\, ds),$$

logo,

$$\begin{aligned} ||e^{tA_\lambda} - e^{tA_\mu}|| &= \left|\left|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} \cdot e^{t(1-s)A_\mu}\, ds)\right|\right| = \left|\left|\int_0^1 e^{tsA_\lambda} \cdot e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\, ds\right|\right| \\ &\leq \int_0^1 t||e^{tsA_\lambda} \cdot e^{t(1-s)A_\mu}||\, ||A_\lambda x - A_\mu x||\, ds \leq t||A_\lambda x - A_\mu x||, \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. ■

Com esses lemas, agora provamos a recíproca do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1).

Demonstração da recíproca do Teorema de Hille-Yosida. Inicialmente, provaremos que $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo. Para isso, sejam $x \in D(A)$, $\lambda, \mu > 0$ arbitrários, pelo Lema 2.3, obtemos

$$\begin{aligned} ||T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x|| = ||e^{tA_\lambda}x - e^{tA_\mu}x|| &\leq t||A_\lambda x - A_\mu x|| \\ &= t||A_\lambda x - Ax + Ax - A_\mu x|| \\ &\leq t||A_\lambda x - Ax|| + t||A_\mu x - Ax||, \end{aligned}$$

disso e pelo Lema 2.2, segue que $||T_\lambda(t)x - T_\mu(t)x|| \longrightarrow 0$, quando $\lambda, \mu \longrightarrow \infty$.

Como $D(A)$ é denso em X e $||e^{tA_\lambda}|| \leq 1$, para todo $t \geq 0$, segue que

$$\lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)(x) = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x,\ \forall\, x \in X, \tag{2.4}$$

em que a convergência é uniforme. Segue, então, pelo Princípio da Limitação Uniforme que $\{T(t)\,;\, t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$. Além disso, para cada $\lambda > 0$, $\{T_\lambda(t)\,;\, t \geq 0\}$ é um semigrupo, assim para todo $x \in X$ e $t, s \geq 0$,

$$T(0)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(0)x = Ix = x, \quad T(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t+s)x = \lim_{\lambda\to\infty} T_\lambda(t)T_\lambda(s) = T(t)T(s)x \ \text{ e}$$

$$||T(t)|| = ||\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}|| = \lim_{\lambda\to\infty} ||e^{tA_\lambda}|| \leq \lim_{\lambda\to\infty} 1 = 1.$$

Como $T_\lambda(t)x \longrightarrow T(t)x$ uniformemente, então $T(t)x$ é contínua, para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, nesses termos, segue que

$$\lim_{t\to 0^+} T(t)x = T(0)x = Ix = x.$$

Portanto, $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações.

Por fim, mostraremos que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$. Para tanto, seja $x \in D(A)$ qualquer. Por (2.4) e pelo item ***(iv)*** do Teorema 1.4, segue que

$$T(t)x - x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x - x = \lim_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) = \lim_{\lambda\to\infty}\left(\int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\, ds\right) = \int_0^t T(s)Ax\, ds, \quad (2.5)$$

em que a última igualdade ocorre em virtude do Lema 2.2 e $e^{tA_\lambda}A_\lambda x \overset{\lambda\to\infty}{\longrightarrow} T(t)Ax$, para todo $x \in X$. Suponhamos que o operador $B : D(B) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$, assim, para qualquer $x \in D(A)$, de (2.5), obtemos

$$B(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)x - x}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{h}\int_0^t T(s)A(x)\, ds = A(x),$$

donde $D(A) \subset D(B)$ e, consequentemente, $A = B_{|_{D(A)}}$. Além disso, como B é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$, então $1 \in \rho(B)$, ou seja, $I - B$ é inversível. Por outro lado, pela hipótese ***(ii)***, temos $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$, donde $1 \in \rho(A)$, logo $1 \in \rho(A) \cap \rho(B)$. Assim,

$$(I - A)(D(A)) = X \quad \text{e} \quad (I - B)(D(B)) = X$$

e, em virtude de $A = B_{|_{D(A)}}$, obtemos

$$(I - B)(D(A)) = X \quad \text{e} \quad (I - A)(D(A)) = X,$$

donde $D(A) = (I - B)^{-1}X = D(B)$, disso e como $A = B_{|_{D(A)}}$, segue que $A = B$. Portanto, A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$. ∎

O Teorema de Hille-Yosida e sua demonstração nos dá algumas consequências interessantes.

Corolário 2.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t)\,;\, t \geq 0\}$. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, com $\lambda > 0$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{t_\lambda}x, \ \forall\, x \in X.$$

Demonstração. Pela demonstração do Teorema de Hille-Yosida, temos $\lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{t_\lambda} = S(t)$, para algum semigrupo C_0 de contrações $\{S(t)\,;\, t \geq 0\}$ com gerador infinitesimal A. Pelo Teorema 1.5, segue que $T(t) = S(t)$, para todo $t \geq 0$. ∎

No que segue, dado $\zeta = a + bi \in \mathbb{C}$, para alguns $a, b \in \mathbb{R}$, denotamos por $Re(\zeta) := a$, ou seja, $Re(\zeta)$ é parte real do número complexo $\zeta \in \mathbb{C}$.

Corolário 2.2. *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t)\, ;\, t \geq 0\}$, então $\{\lambda \in \mathbb{C}\, ;\, Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$ e, para tal $\lambda \in \mathbb{C}$, tem-se*

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}.$$

Demonstração. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $Re(\lambda) > 0$. Definindo

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt,\ \forall\, x \in X$$

e usando as mesmas ideias do Teorema de Hille-Yosida, segue que $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. Portanto, $\{\lambda \in \mathbb{C}\, ;\, Re(\lambda) > 0\} \subset \rho(A)$. Além disso, para todo $x \in X$,

$$|R(\lambda)x| = \left| \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\, dt \right| \leq \int_0^\infty e^{Re(-\lambda)t} ||T(t)||\, |x|\, dt \leq \int_0^\infty e^{-Re(\lambda)t} |x|\, dt \leq \frac{1}{Re(\lambda)} |x|,$$

disso e como $R(\lambda) = R(\lambda : A)$, segue que $||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{Re(\lambda)}$. ∎

Dado um C_0 semigrupo $\{T(t)\, ;\, t \geq 0\}$ e seu gerador infinitesimal, é possível obter outro C_0 semigrupo, a partir de $\{T(t)\, ;\, t \geq 0\}$, além de seu gerador infinitesimal. Tal fato é enunciado na próxima proposição.

Proposição 2.2. *Seja $\{T(t); t \geq 0\}$ um C_0 semigrupo de operadores lineares limitados em X, tal que $||T(t)|| \leq e^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e algum $w \in \mathbb{R}_+$. Se $S(t) = e^{-wt}T(t)$, para todo $t \geq 0$, então $\{S(t)\, ;\, t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações em X. E além disso, se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear limitado tal que A é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\, ;\, t \geq 0\}$, então $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\, ;\, t \geq 0\}$.*

Demonstração. Como $T(t) \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ e, consequentemente, $\{S(t)\, ;\, t \geq 0\} \subset \mathcal{L}(X)$. E mais, para quaisquer $t, s \geq 0$, temos

(i) $S(0) = e^{-w0}T(0) = 1I = I$;

(ii) $S(s+t) = e^{-w(s+t)}T(t+s) = e^{-wt} \cdot e^{-ws}T(t)T(s) = (e^{-wt}T(t))(e^{-ws}T(s)) = S(t)S(s)$;

(iii) E, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} & |S(t)x - x| = |e^{-tw}T(t)x - x| = |e^{-tw}T(t)x - e^{-wt}x + e^{-wt}x - x| \\ \leq\ & |e^{-tw}T(t)x - e^{-wt}x| + |e^{-wt}x - x| = |e^{-wt}||T(t)x - x| + |e^{-wt} - 1||x| \stackrel{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0, \end{aligned}$$

já que $\{T(t)\, ;\, t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo;

(iv) $||S(t)|| = ||e^{-wt}T(t)|| \leq e^{-wt}e^{wt} = e^0 = 1$.

De *(i)*-*(iv)* segue que $\{S(t)\,;\, t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações. Agora, suponhamos que $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\,;\, t \geq 0\}$, assim

$$D(\tilde{A}) = \left\{ x \in X \,;\, \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} \ \text{ existe} \right\},$$

e, para todo $x \in X$,

$$\begin{aligned} \frac{S(h)x - x}{h} &= \frac{e^{-wh}T(h)x - x}{h} = \frac{e^{-wh}T(h)x - e^{-wh}x}{h} + \frac{e^{-wh}x - x}{h} \\ &= \frac{e^{-wh}(T(h)x - x)}{h} + \frac{(e^{-wh} - 1)x}{h}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Logo, para todo $x \in D(\tilde{A})$, decorre de (2.6) que

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{T(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[e^{wh} \left(\frac{S(h)x - x}{h} \right) - e^{wh} \left(\frac{e^{-wh} - 1}{h} \right) x \right] = \tilde{A}(x) + wx, \forall\, x \in D(\tilde{A}),$$

já que

$$\lim_{h \to 0^+} e^{wh} = 1, \quad \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{e^{-wh} - 1}{h} \right) = -w \quad \text{e} \quad \lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \tilde{A}(x),\ \forall x \in D(\tilde{A}).$$

Se $x \in D(\tilde{A})$, então $x \in D(A)$, ou seja, $D(\tilde{A}) \subset D(A)$ e

$$A(x) = \tilde{A}(x) + wx \ \Rightarrow\ \tilde{A}(x) = A(x) - wx,\ \forall\, x \in D(A).$$

Agora, seja $x \in D(A)$ qualquer. De (2.6), de maneira análoga,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{S(h)x - x}{h} = \lim_{h \to 0^+} \left[\frac{e^{-wh}(T(h)x - x)}{h} + \frac{(e^{-wh} - 1)x}{h} \right] = A(x) - wx,$$

donde, $x \in D(\tilde{A})$, logo, $D(A) \subset D(\tilde{A})$ e $\tilde{A}(x) = A(x) - wx$. Dessa forma, $D(A) = D(\tilde{A})$ e, para todo $x \in D(\tilde{A}) = D(A)$, tem-se

$$\tilde{A}(x) = A(x) - wx \ \Rightarrow\ \tilde{A} = A - wI,$$

provando o desejado. ∎

2.2 O Teorema de Lumer-Phillips

Na Seção 2.1, vimos que o Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1) é uma caracterização do gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações. Nessa seção, vemos uma outra caracterização para geradores infinitesimais de C_0 semigrupos de contrações. De certa forma, a demonstração desse teorema é uma consequência do Teorema de Hille-Yosida. Contudo, antes de enunciar e demonstrar o resultado central dessa seção, precisamos de algumas definições e resultados preliminares envolvendo a noção de espaço dual de um espaço de Banach e funcional linear, já que mais adiante usamos o conceito de operador dissipativo, a qual usa a ideia de operador adjunto, que por sua vez, é definido em termos de funcional linear definido no espaço dual de um espaço de Banach.

Definição 2.4. *O conjunto*

$$X^* = \{x^* : X \to \mathbb{K}\ ;\ x^* \ \text{é funcional linear}^3\},$$

em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, é chamado de* ***espaço dual*** *de* X*. E, para todo* $x^* \in X^*$*, denotamos por*

$$\langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle,\ \forall\, x \in X,$$

a imagem de x^* *por* $x \in X$*. A norma* $||\cdot||_* : X^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *em* X^* *é dada por*

$$||x^*||_* = \sup_{x\in X} |\langle x^*, x\rangle|_{\mathbb{C}},\ \forall\, x^* \in X^*.$$

Definição 2.5. *O conjunto*

$$F(x) = \{x^* \in X^*\ ;\ \langle x^*, x\rangle = \langle x, x^*\rangle = |x|^2 = ||x^*||_*^2\ \},\ \forall\, x \in X,$$

é chamado de ***conjunto dual de*** $\mathbf{X}^*$.

Observação 2.1. *Tendo em vista a Definição 2.5, pelo Teorema de Hahn-Banach (veja [18], página 221), concluímos que* $F(x) \neq \emptyset$*, para todo* $x \in X$*.*

Definição 2.6. *Sejam* Y *um espaço de Banach ,* $A : D(A) \subset X \to Y$ *um operador linear e* $\overline{D(A)} = X$*. Para cada* $y^* \in Y^*$*, desde que o conjunto*

$$\mathcal{X} = \{x^* \in X^*\ ;\ \langle y^*, A(x)\rangle = \langle x^*, x\rangle,\ \forall\, x \in D(A)\} \neq \emptyset,$$

definimos o operador $A^* : Y^* \to X^*$ *dado por*

$$A^*(y^*) = x^*,\ \forall\, y^* \in D(A^*),$$

[3] **Definição.** Um operador linear $f : Y \longrightarrow \mathbb{L}$ é um **funcional linear** se Y é um espaço de Banach e $\mathbb{L}$ é um corpo.

em que $D(A^*) = \{y^* \in Y^* \; ; \; \exists \; x^* \in X^*$ *satisfazendo* $\langle y^*, A(x)\rangle = \langle x^*, x\rangle, \; \forall \; x \in D(A)\}$. *Tal operador* A^*, *obviamente linear, é dito* ***adjunto de* A**.

Observação 2.2. *A Definição 2.6 faz sentido, pois sendo o conjunto* $\mathcal{X} \neq \emptyset$ *então ele é um conjunto unitário. De fato, se dados* $x_1^*, x_2^* \in X^*$ *tais que* $\langle y^*, A(x)\rangle = \langle x_1^*, x\rangle = \langle x_2^*, x\rangle$, *para todo* $x \in D(A)$, *então pela densidade de* $D(A)$ *em* X, *temos que* $\langle x_1^*, x\rangle = \langle x_2^*, x\rangle$, *para todo* $x \in X$, *logo* $x_1^* = x_2^*$.

Definição 2.7. *Um operador linear* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *é dito* ***dissipativo*** *se, para todo* $x \in D(A)$, *existe* $x^* \in F(x)$ *tal que* $Re(\langle A(x), x^*\rangle) \leq 0$.

Sabemos que um espaço métrico $M = (M, d)$ é compacto se, e somente se, toda sequência em M possui uma subsequência convergente em M. Essa propriedade possui um resultado análogo em espaços topológicos mais gerais e para introduzí-lo precisamos da noção similar a de sequências em espaços métricos.

Definição 2.8. *Um conjunto* A, *munido de uma relação binária* $\preceq$, *é dito* ***dirigido*** *se*

(i) $a \preceq a$, *para todo* $a \in A$;

(ii) *dados* $a, b, c \in A$ *tais que* $a \preceq b$ *e* $b \preceq c$, *então* $a \preceq c$;

(iii) *para cada* $a, b \in A$, *existe* $c \in A$ *tal que* $a \preceq c$ *e* $b \preceq c$.

Uma ***rede*** *em um conjunto* Y *é uma aplicação* $f : A \longrightarrow Y$ *tal que* $f(a) = x_a$, *para todo* $a \in A$, *e a denotamos por* $\{x_a\}_{a\in A}$.

Sejam Y *um espaço topológico e* $U \subset Y$. *Dizemos que uma rede* $\{x_a\}_{a\in A}$ *é* ***absorvida*** *por* U, *se existe* $a_0 \in A$ *tal que* $x_a \in U$ *sempre que* $a_0 \preceq a$ *e que* $\{x_a\}_{a\in A}$ *visita* U ***frequentemente*** *se, para todo* $a \in A$, *existe* $b_a \in A$, *com* $a \preceq b_a$ *tal que* $x_{b_a} \in U$. *E dizemos que uma rede* $\{x_a\}_{a\in A}$ ***converge para*** $x \in Y$, *se toda vizinhança de* $x \in Y$ *absorve* $\{x_a\}_{a\in A}$, *e que um ponto* $x \in Y$ *é um* ***ponto limite*** *de* $\{x_a\}_{a\in A}$ *se toda vizinhança de* $x \in X$ *é visitada frequentemente por* $\{x_a\}_{a\in A}$.

Lema 2.4. *Seja* Y *um espaço topológico. Então* Y *é compacto se, e somente se, toda rede em* X *tem um ponto limite.*

Demonstração. Veja [7], apêndice A. ∎

O próximo teorema nos dá uma caracterização de operadores lineares dissipativos.

Teorema 2.2. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear. Então A é dissipativo se, se somente se,*

$$|(\lambda I - A)x| \geq \lambda |x|, \ \forall\, x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

Demonstração. $\Rightarrow$) Como, por hipótese, A é dissipativo, então dado qualquer $x \in D(A)$ existe $x^* \in F(x)$ tal que

$$Re(\langle A(x), x^* \rangle) \leq 0. \tag{2.7}$$

Seja $\lambda > 0$ arbitrário, assim

$$\begin{aligned} |(\lambda I - A)x|\ |x| \geq |\langle \lambda x - A(x), x^* \rangle|_{\mathbb{C}} &\geq Re(\langle \lambda x - A(x), x^* \rangle) \\ &= Re(\langle \lambda x, x^* \rangle - \langle x^*, A(x) \rangle) \\ &= Re(\lambda \langle x^*, x \rangle - \langle x^*, A(x) \rangle), \end{aligned}$$

disso, e do fato de que $x^* \in X^*$ implica $\langle x^*, x \rangle = |x|^2$ e de (2.7), obtemos

$$|(\lambda I - A)x|\ |x| \geq Re(\lambda |x|^2 - \langle x^*, A(x) \rangle) = \lambda |x|^2 - Re(\langle x^*, A(x) \rangle) \geq \lambda |x|^2,$$

e, portanto,

$$|(\lambda I - A)x| \geq \lambda |x|, \ \forall\, x \in D(A),\ \lambda > 0.$$

$\Leftarrow$) Temos, por hipótese, que $|(\lambda I - A)x| \geq \lambda |x|$, para todo $x \in D(A)$ e $\lambda > 0$. Para todo $x \in D(A)$, tem-se $(\lambda I - A)x \in X$ e $F((\lambda I - A)x)$ está bem definido. Agora, para cada $\lambda > 0$, sejam

$$y_\lambda^* \in F((\lambda I - A)x) \quad \text{e} \quad z_\lambda^* = \frac{y_\lambda^*}{||y_\lambda^*||_*}, \ \forall\, x \in D(A),$$

assim, $||z_\lambda^*||_* = 1$, e mais

$$\begin{aligned} \lambda |x| \leq |(\lambda I - A)x| = \langle \lambda x - A(x), z_\lambda^* \rangle &= \lambda\, Re(\langle x, z_\lambda^* - Re(A(x), z_\lambda^* \rangle) \\ &\leq \lambda |x| - Re(A(x), z_\lambda^*) \rangle), \ \forall\, \lambda > 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$\lambda |x| \leq \lambda Re(\langle x, z_\lambda^* \rangle) + Re(\langle A(x), -z_\lambda^* \rangle) \quad \leq \quad \lambda Re(\langle x, z_\lambda^* \rangle) + |A(x)|\ ||z_\lambda^*||_*.$$

Como $||z_\lambda^*||_* = 1$, segue que

$$Re(\langle x, z_\lambda^* \rangle) \geq |x| - \frac{1}{\lambda} |A(x)| \tag{2.8}$$

e, portanto,

$$Re(\langle A(x), z_\lambda^* \rangle) \leq 0. \tag{2.9}$$

Pelo Teorema de Banach-Alaoglu-Bourbaki (veja [8], Teorema 3.36, página 117), a bola unitária em X^* é compacta na topologia fraca*. Assim, pelo Lema 2.4, a rede $(z^*_\lambda)_{\lambda>0}$ tem um ponto limite $z^* \in X^*$ com $||z^*||_* = 1$. Por (2.8) e (2.9), temos

$$Re(\langle A(x), z^*\rangle) \leq 0 \quad \text{e} \quad |\langle x, z^*\rangle|_{\mathbb{C}} \geq Re(\langle z^*, x\rangle) \geq |x|.$$

Contudo,

$$Re(\langle z^*, x\rangle) \leq |\langle x, z^*\rangle|_{\mathbb{C}} \leq |x|$$

logo $\langle x, z^*\rangle = |x|$. Agora, definimos $x^* = |x|z^* \in X^*$. Notemos que $x^* \in F(x)$ e $Re(\langle A(x), x^*\rangle) = Re(\langle A(x), |x|z^*\rangle) \leq 0$, pois $Re(\langle A(x), z^*\rangle) \leq 0$ e $|x| \geq 0$. Portanto, para todo $x \in X$, existe $x^* = |x|z^* \in X^*$ tal que $Re(\langle A(x), x^*\rangle) \leq 0$, ou seja, A é dissipativo. ■

Lema 2.5. *Se $A : D(A) \subset X \to X$ é um operador linear, então $\rho(A)$ é aberto em $\mathbb{C}$.*

Demonstração. Sejam $\lambda, \mu \in \rho(A)$ quaisquer. Temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu : A)^{n+1} = R(\mu : A)\sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu : A)^n. \tag{2.10}$$

Portanto, a série dada em (2.10) converge se $||(\mu - \lambda)R(\mu : A)|| < 1$, ou seja, $|\mu-\lambda|_{\mathbb{C}} < (||R(\mu : A)||)^{-1}$ e, nesse caso,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\mu-\lambda)^n R(\mu : A)^{n+1} = R(\mu : A)(I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))^{-1}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
R(\mu : A)(I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))^{-1}(\lambda I - A) &= (\mu I - A)^{-1}(I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))^{-1}(\lambda I - A)\\
&= [(I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))(\mu I - A)]^{-1}(\lambda I - A)\\
&= (I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))^{-1}(\mu I - A)^{-1})(\lambda I - A)\\
&= [(\mu I - A) - (\mu-\lambda)I]^{-1}(\lambda I - A)\\
&= (\mu I - A - \mu I + \lambda I)^{-1}(\lambda I - A)\\
&= (\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1} = I
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&(\lambda I - A)R(\mu : A)(I - (\mu-\lambda)R(\mu : A))^{-1} =\\
= \;& (\lambda I - \mu I + \mu I - A)R(\mu : A)(I - (\mu-\lambda)R(\lambda : A))^{-1} =\\
= \;& (\lambda I - \mu I + R(\mu : A)^{-1})R(\mu : A)[I - (\mu-\lambda)R(\mu : A)]^{-1} =\\
= \;& [\lambda R(\mu : A) - \mu R(\mu : A) + I][I - (\mu-\lambda)R(\mu : A)]^{-1} =
\end{aligned}$$

$$= \quad (I-(\mu-\lambda)R(\mu:A))(I-(\mu-\lambda)R(\mu:A)^{-1} = I.$$

Logo, $\lambda I - A$ é inversível e o círculo de centro μ e raio $r = (||R(\mu:A)||)^{-1}$ está contido em $\rho(A)$ e, consequentemente, $\rho(A)$ é um conjunto aberto em $\mathbb{C}$. ■

O próximo teorema é o principal resultado dessa seção, o qual é devido a Lumer[4] e Phillips[5].

Teorema 2.3 (Teorema de Lumer-Phillips). *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $\overline{D(A)} = X$. Então as seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *se A é dissipativo e existe $\lambda_0 > 0$ tal que $X = Im(\lambda_0 I - A)$ (conjunto imagem de $\lambda_0 I - A$), então A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X.*

(ii) *se A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X, então $Im(\lambda_0 I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$ e A é dissipativo. Além disso,*

$$Re\,(\langle A(x), x^*\rangle) \leq 0,\ \forall\, x \in D(A), x^* \in F(x).$$

Demonstração. ***(i)*** Como, por hipótese, A é dissipativo, segue do Teorema 2.2, que

$$|(\lambda I - A)x| \geq \lambda|x|,\ \forall\, x \in D(A),\ \lambda > 0. \tag{2.11}$$

Disso e, por hipótese, $Im(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$, temos que $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado, em virtude da linearidade de A e de (2.11), e assim $(\lambda_0 I - A)^{-1}$ é fechado. Logo, $(\lambda_0 I - A)$ também é fechado e, consequentemente, A é fechado.

Afirmamos que $Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. De fato, consideremos o conjunto

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R}^*_+\ ;\ Im(\lambda I - A) = X\}.$$

Seja $\lambda \in \Lambda$ qualquer. Por (2.11) (já que isso implica em $\lambda_0 I - A$ ser injetora) e pela definição do conjunto Λ, segue que $\lambda I - A$ é bijetora e, consequentemente, $\lambda \in \rho(A)$. Pelo Lema 2.5, temos que $\rho(A)$ é aberto, então existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(\lambda, \mathbb{R}) \subset \rho(A)$ (em que $B_\delta(\lambda, \mathbb{R})$ denota a bola aberta de centro $\lambda > 0$ e raio $\delta > 0$ em $\mathbb{R}$) e, consequentemente, $B_\delta(\lambda, \mathbb{R}) \cup \mathbb{R} \subset \Lambda$ e, assim Λ é aberto em $\mathbb{R}$. Por outro lado, seja $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Lambda$ tal que $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}^*_+$, quando $n \longrightarrow \infty$, assim $Im(I\lambda_n - A) = X$, para todo $n \in \mathbb{N}$, logo, para todo $y \in X$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$\lambda_n x_n - A(x_n) = y,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{2.12}$$

[4]**Günter Lumer** (1929-2005): matemático alemão.

[5]**Ralph Saul Phillips**(1913-1998): matemático norte-americano.

Agora, de (2.11), obtemos

$$|y| = |\lambda_n x_n - A(x_n)| \geq \lambda_n |x_n| \Rightarrow |x_n| \leq \frac{1}{\lambda_n}|y| \leq C, \; \forall \, n \in \mathbb{N},$$

para algum $C \in \mathbb{R}_+$, já que $\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. Assim, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$\begin{aligned}
\lambda_m |x_n - x_m| &\leq |\lambda_m(x_n - x_m) - A(x_n - x_m)| \\
&= |\lambda_m x_n - \lambda_m x_m - (A(x_n) - A(x_m))| = |\lambda_m x_n - (\overbrace{\lambda_m x_m - A(x_m)}^{y}) - A(x_n)| \\
&= |\lambda_m x_n - y - A(x_n)| = |\lambda_m x_n - (y + A(x_n))| = |\lambda_m x_n - \lambda_n x_n| \\
&= |\lambda_m - \lambda_m|_{\mathbb{R}} \, |x_n| \leq C|\lambda_n - \lambda_m|_{\mathbb{R}},
\end{aligned}$$

logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $D(A) \subset X$, assim $x_n \to x$, quando $n \longrightarrow \infty$, para algum $x \in X$, pois X é espaço de Banach. Disso e de (2.12), obtemos $A(x_n) \longrightarrow \lambda x - y$, quando $n \longrightarrow \infty$. Como A é fechado, $x \in D(A)$ e $\lambda x - A(x) = y$, segue que $y \in Im(\lambda I - A)$, logo $X \subset Im(\lambda I - A)$ e, portanto, $X = Im(\lambda I - A)$, com $\lambda \in \Lambda$. Nesses termos, Λ é fechado em $\mathbb{R}_+^*$. Assim, como Λ é aberto e fechado em $\mathbb{R}$, $\Lambda \subset \mathbb{R}_+^*$ e $\Lambda \neq \emptyset$, segue que $\Lambda = \mathbb{R}_+^*$. E assim, provamos nossa afirmação.

Nesses termos,

$$Im(\lambda I - A) = X, \; \forall \, \lambda > 0 \; \Rightarrow \; \mathbb{R}_+^* \subset \rho(A),$$

já que $(\lambda I - A)^{-1}$ existe para todo $\lambda > 0$ e por (2.11), para todo $x \in X$, temos

$$|x| = |(\lambda I - A)(\lambda I - A)^{-1}x| \geq \lambda |(\lambda I - A)^{-1}| \; \Rightarrow \; |(\lambda I - A)^{-1}x| \leq \frac{1}{\lambda}, \; \forall \, x \in X, \lambda > 0,$$

logo

$$||R(\lambda : A)|| \leq \frac{1}{\lambda}, \; \forall \, \lambda > 0.$$

Portanto, segue do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1) que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X.

(ii) Temos, por hipótese, que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t) \; ; \; t \geq 0\}$ em X. Então, pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1), tem-se $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$, ou seja, se $\lambda > 0$, então $\lambda \in \rho(A)$, donde, $(\lambda I - A)^{-1}$ é um operador linear limitado e $Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$. Além disso, dados quaisquer $x \in D(A) \subset X$ e $x^* \in F(x)$, tem-se

$$\begin{aligned}
Re(\langle T(t)x - x, x^* \rangle) &= Re(\langle T(t)x, x^* \rangle) - Re(\langle x, x^* \rangle) \\
&\leq |\langle x, x^* \rangle|_{\mathbb{C}} - |x|^2
\end{aligned}$$

$$\leq \quad ||x^*||_*||T(t)||\,|x| - |x|^2 \leq ||x^*||_*\,|x| - |x|^2 = 0$$

já que $||x^*||_* = |x| = (\langle x, x^* \rangle)^{\frac{1}{2}}$. Donde,

$$Re\left(\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle\right) \leq 0,\ \forall\, t > 0 \ \Rightarrow\ \lim_{t \to 0^+} Re\left(\left\langle \frac{T(t)x - x}{t}, x^* \right\rangle\right) = Re(\langle A(x), x^* \rangle) \leq 0.$$

E assim, provamos ***(ii)***.

■

A seguir, apresentamos um importante conceito da teoria de semigrupos, que é o de operador linear m-dissipativo, o qual (como veremos mais adiante) está fortemente ligado ao Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3).

Definição 2.9. *Dizemos que um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é **m-dissipativo** se for dissipativo e $Im(\lambda I - A) = X$, para algum $\lambda > 0$.*

Nesses termos, o Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3) poderia ser enunciado da seguinte maneira: um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$, com $\overline{D(A)} = X$, é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X se, e somente se, A é m-dissipativo.

Corolário 2.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear fechado tal que $\overline{D(A)} = X$. Se ambos A e A^* são dissipativos, então A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações em X.*

Demonstração. Pelo ***(i)*** do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3), basta provar que $Im(I - A) = X$. Para isso, observemos que, em virtude da hipótese de que A é dissipativo e fechado, temos que $Im(I - A) \subset X$ é um subespaço fechado de X. Suponhamos, por um momento que, $Im(I - A) \neq X$, ou seja, $X \subsetneq Im(I - A)$. Assim, existe $x^* \in X^*$ tal que

$$\langle x^*, x - A(x) \rangle = 0,\ \forall\, x \in D(A),$$

em que $x^* \neq 0$. Donde,

$$\langle x^*, x \rangle - \langle x^*, A(x) \rangle = 0 \Rightarrow \langle x^*, x \rangle = \langle x^*, A(x) \rangle,$$

logo $x^* \in D(A)$, assim,

$$A^*(x) = x^* \Rightarrow x^* - A^*(x^*) = 0.$$

Como, por hipótese, A^* é dissipativo, pelo Teorema 2.2, obtemos

$$0 = |(I - A^*)x^*|_* \geq ||x^*||_* \Rightarrow ||x^*||_* = 0 \Rightarrow x^* = 0,$$

o que é uma contradição. Portanto, $Im(I - A) = X$ e, assim, segue o resultado. ■

Agora, mais um teorema com algumas propriedades de operadores lineares dissipativos.

Teorema 2.4. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear dissipativo em X. Então,*

(i) *se $Im(\lambda_0 I - A) = X$, para algum $\lambda_0 > 0$ então $Im(\lambda I - A) = X$, para todo $\lambda > 0$;*

(ii) *se A é fechável,*[6] *então $\bar{A}$ é também dissipativo;*

(iii) *se $\overline{D(A)} = X$, então A é fechável.*

Demonstração. ***(i)*** A prova segue da parte ***(i)*** do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3).

(ii) Seja $x \in D(\bar{A})$, assim $y = \bar{A}(x)$, para algum $y \in X$. Por definição de $\bar{A}$, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \longrightarrow x \quad \text{e} \quad A(x_n) \longrightarrow y = \bar{A}(x), \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Assim, como A é dissipativo, do Teorema 2.2, segue

$$|\lambda x_n - A(x_n)| \geq \lambda |x_n|, \; \forall\, \lambda > 0 \;\Rightarrow\; |\lambda x - \bar{A}(x)| \geq \lambda |x|,$$

quando $n \longrightarrow \infty$, para todo $x \in D(A)$. Portanto, novamente do Teorema 2.2, concluímos que $\bar{A}$ é dissipativo.

(iii) Suponhamos, por um momento, que A não é fechável, isto é, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que

$$x_n \longrightarrow 0 \quad \text{e} \quad A(x_n) \longrightarrow y, \text{ quando } n \longrightarrow \infty,$$

para algum $y \in X$, com $|y| = 1$. Como, por hipótese, A é dissipativo, pelo Teorema 2.2, para todo $t > 0$ e $x \in D(A)$, segue

$$\left|\left(x + \frac{1}{t}x_n\right) - tA\left(x + \frac{1}{t}x_n\right)\right| = \left|t\left[\frac{1}{t}\left(x + \frac{1}{t}x_n\right) - A\left(x + \frac{1}{t}x_n\right)\right]\right| \geq \frac{t}{t}\left|x + \frac{1}{t}x_n\right| = \left|x + \frac{1}{t}x_n\right|,$$

fazendo $n \to \infty$ e $t \to 0$, obtemos $|x - y| \geq |x|$, para todo $x \in D(A)$, o que é um absurdo, já que, por hipótese, $D(A)$ é denso e X. Portanto, A é fechável. ∎

Na sequência damos um exemplo de um C_0 semigrupo de contrações gerado por um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$. A essência de tal exemplo é mostrar que tal operador A satisfaz condições do item ***(i)*** do Teorema de Lumer-Phillps (Teorema 2.3).

[6]**Definição.** Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ e $Y_1 = (Y_1, |\cdot|_2)$ espaços de Banach. Um operador linear $A_1 : D(A_1) \subset X_1 \longrightarrow Y_1$ é dito **fechável** se existe $B_1 : D(B) \subset X_1 \longrightarrow Y_1$ tal que $\overline{G(A_1)} = G(B_1)$, em que $G(A_1) = \{(u, A_1 u) \in X_1 \times Y_1 \; ; \; u \in D(A_1)\}$ é o gráfico de A_1 e $G(B_1) = \{(u, B_1 u) \in X_1 \times Y_1 \; ; \; u \in D(B_1)\}$ é o gráfico de B_1. E denotamos $\overline{A_1} = B_1$.

Exemplo 2.1 (Operadores Diferenciais de 1ª Ordem)**.** *Seja* $a : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *uma função contínua tal que*

$$\lim_{x\to\infty} \int_0^x \frac{1}{a(s)}\, ds = \infty.$$

Definimos $X = \{u \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*)\ ;\ u(0) = 0 \text{ e } \lim_{x\to\infty} u(x) = 0\}$ *com norma* $|\cdot|_X : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *dada por*

$$||u||_X = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |u(x)|_{\mathbb{R}},\ \forall\, u \in X$$

e o operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *dado por*

$$A(u) = -au',\ \forall\, u \in D(A),$$

em que $D(A) = \{u \in X\ ;\ u \text{ é diferenciável e } -au' \in X\}$*. O operador* A *gera um* C_0 *semigrupo de contrações em* X*.*

Resolução. Para mostrarmos esse fato, usaremos o Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3). Para tanto, notemos que $D(A)$ é denso em X. Agora mostraremos que A é dissipativo, para isso, sejam $\lambda > 0$ e $u \in D(A)$ quaisquer. Definimos $(\lambda I - A)(u) = f$. Seja $\xi \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $u(\xi) = \pm|u|_X$, donde $u'(\xi) = 0$ e

$$\lambda|u|_X = \lambda|u(\xi)|_{\mathbb{R}} = |\lambda u(\xi) + \overbrace{a(\xi)u'(\xi)}^{0}|_{\mathbb{R}} = |f(\xi)|_{\mathbb{R}} \leq |f|_X = |(\lambda I - A)(u)|_X,$$

disso e pelo Teorema 2.2, segue que A é operador dissipativo.

Resta provar que $Im(\lambda I - A) = X$, para algum $\lambda > 0$. Como $Im(\lambda I - A) \subset X$, temos que mostrar $X \subset Im(\lambda I - A)$, isto é, que dado qualquer $f \in X$ existe $u \in X$ tal que

$$Im(\lambda I - A)(u))(x) = \lambda u(x) - a(x)u'(x) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \tag{2.13}$$

$$u(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty} u(x) = 0. \tag{2.14}$$

Notemos que (2.13) é uma equação diferencial de primeira ordem cujo fator integrante μ é dado por

$$\mu(x) = e^{\int_0^x \frac{\lambda}{a(s)}\, ds} = e^{\lambda \int_0^x \frac{1}{a(s)}\, ds},\ \forall\, x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Reorganizando (2.13) e multiplicando-a pelo fator integrante μ, obtemos

$$\begin{aligned}
\lambda u(x) + a(x)u'(x) = f(x) \quad &\Rightarrow \quad \frac{\lambda u(x)}{a(x)} + \frac{du}{dx} = \frac{f(x)}{a(x)} \\
&\Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = \frac{f(x)}{a(x)} - \frac{\lambda u(x)}{a(x)} \\
&\Rightarrow \quad du - \left(\frac{f(x)}{a(x)} - \frac{\lambda u(x)}{a(x)}\right) dx = 0
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mu(x)\, du - \lambda(x)\left(\frac{f(x)}{a(x)} - \frac{\lambda u(x)}{a(x)}\right)\, dx = 0$$
$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx}\left(u(x)e^{\lambda \int_0^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\right) = \frac{f(x)}{a(x)}e^{\lambda \int_0^x \frac{1}{a(s)}\, ds}.$$

Agora integrando de 0 a x e usando que $u(0) = 0$, obtemos

$$u(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi. \tag{2.15}$$

Afirmamos que $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = 0$. De fato, como a função u dada em (2.15) é continuamente diferenciável e de (2.13), $au' = f - \lambda u$, em que $f \in X$ e $u \in D(A) \subset X$, temos que $au' \in X$ e, obtemos $u \in D(A)$. Além disso, dado qualquer $\epsilon > 0$, seja $x_\epsilon > 0$ tal que $|f(\xi)|_{\mathbb{R}} < \lambda\epsilon$, para todo $\xi > x_\epsilon$. Se $x > x_\epsilon$, então

$$u(x) = \int_0^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi = \int_0^{x_\epsilon} \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^{x_\epsilon} \frac{1}{a(s)}\, ds} e^{-\lambda \int_{x_\epsilon}^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi + \int_{x_\epsilon}^x \frac{f(\xi)}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi.$$

Fazendo $B_\epsilon = \displaystyle\int_0^{x_\epsilon} \frac{|f(\xi)|_{\mathbb{R}}}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^{x_\epsilon} \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi$, temos que

$$|u(x)|_{\mathbb{R}} \le B_\epsilon e^{-\lambda \int_{x_\epsilon}^x \frac{1}{a(s)}\, ds} + \lambda\epsilon \int_{x_\epsilon}^x \frac{1}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi,$$

em que

$$\lambda \int_{x_\epsilon}^x \frac{1}{a(\xi)} e^{-\lambda \int_\xi^x \frac{1}{a(s)}\, ds}\, d\xi = \lambda \int_{x_\epsilon}^{\int_{x_\epsilon}^x \frac{1}{a(\xi)}\, d\xi} e^{-\lambda\tau}\, d\tau \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

logo

$$\lim_{x\to\infty} \sup |u(x)|_{\mathbb{R}} \le \epsilon,\ \forall\, \epsilon > 0 \;\Rightarrow\; \lim_{x\to\infty} u(x) = 0.$$

E, portanto, $Im(\lambda I - A) = X$.

Nesses termos, mostramos que A é dissipativo, com domínio denso em X e $Im(\lambda I - A) = X$, para algum $\lambda > 0$, assim pelo item ***(i)*** do Teorema de Lumer-Phillips (Teorema 2.3), segue que A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t)\ ;\ t \ge 0\}$ de contrações em X. Além disso, se $\phi(x) \in D(A)$, a função $u : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $u(t,x) = (T(t)\phi)(x)$ satisfaz

$$u_t(t,x) + a(x)u_x(t,x) = 0,\ \forall\, t, x \in \mathbb{R}_+, \quad u(t,0) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} u(t,x) = 0 \quad \text{e} \quad u(0,x) = \phi(x).$$

Com efeito, para quaisquer $t, x \in \mathbb{R}_+$ e $\phi(x) \in D(A)$, tem-se

$$u_t(t,x) = \frac{d}{dt}T(t)\phi(x) = A(\phi(x))T(t),$$

$$\text{e} \quad a(x)u_x(t,x) = a(x)T(t)\phi'(x) = a(x)\phi'(x)T(t) = -A(\phi(x))T(t),$$

ou seja,

$$u_t(t,x) + a(x)u_x(t,x) = A(\phi(x))T(t) - A(\phi(x))T(t) = 0,$$

$$u(t,0) = T(t)\phi(0) = T(t).0 = 0, \lim_{x\to\infty} u(t,x) = \lim_{x\to\infty} T(t)\phi(x) = T(t)\lim_{x\to\infty}\phi(x) = T(t).0 = 0$$

$$\text{e} \quad u(0,x) = T(0)\phi(x) = I\phi(x) = \phi(x).$$

■

2.3 O Teorema de Feller-Miyadera-Phillips

Nas seções anteriores fizemos caracterizações do gerador infinitesimal de um C_0 semigrupos de contrações. Agora o objetivo é dar uma caracterização para semigrupos C_0 quaisquer, isso será feito "renormando" o espaço de Banach de forma que tal semigrupo seja um C_0 semigrupo de contrações e, para dessa forma, usarmos os resultados já conhecidos das seções anteriores.

Definição 2.10. *Seja $Y = (Y, |\cdot|_\alpha)$ um espaço normado. Duas normas $||\cdot||_a, ||\cdot||_b : Y \longrightarrow \mathbb{R}_+$ são ditas **equivalentes** se existem $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$ tais que*

$$c_1||x||_a \leq ||x||_b \leq c_2||x||_b, \ \forall\, x \in Y.$$

Lema 2.6. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$. Se*

$$||\lambda^n R(\lambda : A)^n|| \leq M, \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

e algum $M \in \mathbb{R}_+^*$, então existe uma norma $|\cdot|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ que é equivalente a norma original $|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ em X e que satisfaz

$$|x| \leq |x|_1 \leq M|x| \quad e \quad |\lambda R(\lambda : A)x|_1 \leq |x|_1, \ \forall\, x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+^*.$$

Demonstração. Para cada $\mu \in \mathbb{R}_+^*$, definimos

$$|x|_\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\mu^n R(\mu : A)x|, \ \forall\, x \in X.$$

Assim, em virtude da hipótese, para todo $x \in X$, tem-se

$$|x| = |\mu^0 R(\lambda : A)x| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\mu^n R(\mu : A)^n x| = |x|_\mu \leq M|x| \tag{2.16}$$

$$\text{e} \quad |\mu R(\mu : A)x|_\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}^*} |\mu^n R(\mu : A)^n \mu R(\mu : A)x| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\mu^{n+1} R(\mu : A)^{n+1} R(\mu : A)x| \leq |x|_\mu. \tag{2.17}$$

Afirmamos que

$$|\lambda R(\lambda : A)x|_\mu \leq |x|_\mu, \ \forall\, x \in X, \lambda \in (0, \mu]. \tag{2.18}$$

De fato, seja $x \in X$ qualquer. Se $y = R(\lambda : A)x$, então, pela Primeira Equação Resolvente (Proposição 2.1), obtemos

$$\begin{aligned} & R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y) = R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)R(\lambda : A)x) = \\ = \; & R(\mu : A)x + (\mu - \lambda)R(\mu : A)R(\lambda : A)x = R(\mu : A) + R(\lambda : A)x - R(\mu : A)x = R(\lambda : A)x, \end{aligned}$$

isto é, $R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y) = y$. Disso e de (2.17), segue que

$$\begin{aligned} |y|_\mu = |R(\mu : A)(x + (\mu - \lambda)y)|_\mu & \leq |R(\mu : A)x|_\mu + \overbrace{|\mu - \lambda|_{\mathbb{R}}}^{= \, \mu - \lambda} |R(\mu : A)y|_\mu \\ & \leq \frac{1}{\mu}|x|_\mu + \frac{\mu}{\mu}|y|_\mu - \frac{\lambda}{\mu}|y|_\mu = \frac{1}{\mu}|x|_\mu + \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)|y|_\mu \end{aligned}$$

donde,

$$\lambda|y|_\mu \leq |x|_\mu \Rightarrow \lambda|R(\lambda : A)x|_\mu \leq |x|_\mu \Rightarrow |\lambda R(\lambda : A)x|_\mu \leq |x|_\mu, \; \forall \, x \in X,$$

como afirmado. De (2.16) e (2.18), obtemos

$$|\lambda^n R(\lambda : A)^n x| \leq |\lambda R(\lambda : A)x|_\mu \leq |x|_\mu, \; \forall \, x \in X, \lambda \in (0, \mu], n \in \mathbb{N}^*, \tag{2.19}$$

consequentemente,

$$|x|_\lambda = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} |\lambda^n R(\lambda : A)^n \mu R(\mu : A)x| \leq |x|_\mu, \; \forall \, x \in X, \lambda \in (0, \mu].$$

Por fim, definimos $|\cdot|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por $|x|_1 = \lim\limits_{\mu \to \infty} |x|_\mu$, para todo $x \in X$. De (2.16), segue que

$$\lim_{\mu \to \infty} |x| \leq \lim_{\mu \to \infty} |x|_\mu \leq \lim_{\mu \to \infty} M|x| \Rightarrow |x| \leq |x|_1 \leq M|x|, \; \forall \, x \in X,$$

e escolhendo $n = 1$ em (2.19), ficamos com

$$|\lambda R(\lambda : A)x|_\mu |x|_\mu \Rightarrow |\lambda R(\lambda : A)x|_1 \leq |x|_1, \; \forall \, x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+^*$$

quando $\mu \longrightarrow \infty$. E assim, provamos o lema. ∎

Teorema 2.5. *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t); t \geq 0\}$ em X tal que $||T(t)|| \leq M$, para todo $t \geq 0$ e algum $M \geq 1$ se, e somente se,*

(i) *A é fechado e $D(A)$ é denso em X;*

(ii) *$\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ e $||R(\lambda : A)^n|| \leq \frac{M}{\lambda^n}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Definimos $|\cdot|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ por

$$|x|_1 = \sup_{t \geq 0} |T(t)x|, \; \forall \, x \in X.$$

Assim,

$$|x| \leq |x|_1 \leq M|x|, \; \forall\, x \in X, \tag{2.20}$$

e $|\cdot|_1$ é uma norma equivalente a norma original $|\cdot|$ em X. Além disso, para todo $x \in X$,

$$|T(t)x|_1 = \sup_{s\geq 0}|T(s)T(t)x| = \sup_{s\geq 0}|T(s+t)x| \leq \sup_{s>0}|T(s)x| = |x|_1, \tag{2.21}$$

logo $||T(t)||_1 = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ |x|=1}} |T(t)x|_1 \leq 1$, para todo $t \geq 0$, ou seja, $\{T(t)\ ;\ t\geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações, com a norma $|\cdot|_1$, em X. Segue do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1) que A é fechado e com domínio denso em X, e mais, que $||R(\lambda : A)||_1 \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$. Disso, (2.20) e da equivalência das normas, obtemos, para todo $x \in X$,

$$|R(\lambda : A)^n x|_1 \leq (||R(\lambda : A)||_1)^n|x|_1 \leq \frac{1}{\lambda^n}|x|_1 \Rightarrow |R(\lambda : A)^n x| \leq |R(\lambda : A)^n x|_1 \leq \frac{1}{\lambda^n}|x|_1 \leq \frac{M}{\lambda^n}|x|,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$. Portanto, $|R(\lambda : A)^n| \leq \frac{M}{\lambda^n}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ e $n \in \mathbb{N}^*$.

$\Leftarrow$) Pelo Lema 2.6, existe uma norma $|\cdot|_1 : X \longrightarrow \mathbb{R}^+$ tal que

$$|x| \leq |x|_1 \leq M|x| \quad \text{e} \quad |\lambda R(\lambda : A)x|_1 \leq |x|_1, \; \forall\, x \in X, \lambda \in \mathbb{R}_+^*. \tag{2.22}$$

Consideremos o espaço de Banach $X = (X, |\cdot|_1)$. Como as propriedades do operador A, no item ***(i)***, não dependem da norma, então ***(i)*** continua válida na norma $|\cdot|_1$. Ainda por (2.22), temos que $\mathbb{R}_+^* \subset \rho(A)$ e $||R(\lambda : A)||_1 \leq \frac{1}{\lambda}$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Logo, pelo Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1), A é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo de contrações $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ na norma $|\cdot|_1$ em X. Por fim, notemos que, para todo $x \in X$, tem-se

$$|T(t)x| \leq |T(t)x|_1 \leq |x|_1 \leq M|x| \Rightarrow ||T(t)|| \leq M, \; \forall\, t \geq 0.$$

Portanto, segue o desejado. ■

Agora, se $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo em X, então, pelo Teorema 1.3, existem $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Além disso, pela Proposição 2.2, concluímos que $\{S(t) = e^{-wt}T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo e $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ se, e somente se, $A - wI$ é o gerador infinitesimal de $\{S(t)\ ;\ t \geq 0\}$. Com essas considerações feitas e o teorema anterior, temos o próximo resultado, devido à Feller[7], Miyadera[8] e Phillips.

Teorema 2.6 (Teorema de Feller-Miyadera-Phillips)**.** *Um operador linear $A : D(A) \subset X \to X$ é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ satisfazendo $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e alguns $w \geq 0$ e $M \geq 1$ se, e somente se,*

[7]**William Feller** (1906 - 1970): matemático croata

[8]**Isao Miyadera** (1925 -): matemático japonês

(i) *A é fechado e $D(A)$ é denso em X;*

(ii) *$(w,\infty) \subset \rho(A)$ e $||R(\lambda : A)^n|| \leq \dfrac{M}{(\lambda - w)^n}$, para todo $\lambda > w$ e $n \in \mathbb{N}^*$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Consideremos o C_0 semigrupo $\{S(t) = e^{-wt}T(t) \; ; \; t \geq 0\}$. Logo, $||S(t)|| \leq M$, para todo $t \geq 0$, e $B : D(B) \subset X \to X$, dado por $B = A - wI$, é o gerador infinitesimal de $\{S(t) \; ; \; t \geq 0\}$. Portanto, pelo Teorema 2.5, $A = B + wI$ é fechado, $D(A) = D(B)$ é denso em X,

$$(w,\infty) = (0,\infty) + \{w\} \subset \rho(B + wI) = \rho(A)$$

$$\text{e} \quad ||R(\lambda : A)^n|| = ||R(\lambda - w : B)^n|| \leq \frac{M}{(\lambda - w)^n}, \; \forall \, \lambda > w, n \in \mathbb{N}^*.$$

$\Leftarrow$) Definimos o operador linear $B = A - wI$. Como A é fechado e $D(A)$ é denso em X, então B é fechado e $D(B)$ é denso em X. Além disso,

$$(0,\infty) \subset \rho(B) \quad \text{e} \quad ||R(\lambda : B)^n|| \leq \frac{1}{\lambda^n}, \; \forall \, \lambda \in \mathbb{R}_+^*, n \in \mathbb{N}^*.$$

Portanto, pelo Teorema 2.5, B é o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{S(t) \; ; \; t \geq 0\}$ tal que $||S(t)|| \leq M$, para todo $t \geq 0$ e algum $M \geq 1$. Consideremos o C_0 semigrupo $\{T(t) = e^{wt}S(t) \; ; \; t \geq 0\}$, então o seu gerador infinitesimal é o operador $A = B + wI$, disso, das propriedades do operador B e de $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$, segue o resultado. ■

O próximo resultado é uma generalização do Corolário 2.1.

Teorema 2.7. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de um C_0 semigrupo $\{T(t) \; ; \; t \geq 0\}$ em X. Se A_λ é a aproximação de Yosida de A, com $\lambda > 0$, então*

$$T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x, \; \forall \, x \in X.$$

Demonstração. **1º *caso.*** Suponhamos que $||T(t)|| \leq M$, para todo $t \geq 0$ e algum $M \geq 1$. Na prova do Teorema 2.5, exibimos uma norma $|\cdot|_1 : X \to \mathbb{R}_+$ que é equivalente a norma original $|\cdot| : X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e de modo que $\{T(t) \; ; \; t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo de contrações. Segue, então, pelo Corolário 2.1, que $|e^{tA_\lambda} - T(t)x|_1 \longrightarrow 0$, para todo $x \in X$ e $t \geq 0$, quando $\lambda \longrightarrow \infty$. Disso e como $|\cdot|_1$ é equivalente a norma $|\cdot|$, segue que $T(t)x = \lim_{\lambda \to \infty} e^{t_\lambda}x, \; \forall \, x \in X$.

2º *caso.* Agora, suponhamos que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$ e alguns $M \geq 1$ e $w > 0$. Afirmamos que a função $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por $f(\lambda) = ||e^{tA_\lambda}||$ é limitada, para todo $\lambda > 2w$. De fato, para todo $\lambda > 2w$, tem-se

$$||e^{tA_\lambda}|| = ||e^{t(\lambda^2 R(\lambda:A) - \lambda I)}|| = e^{-\lambda t}||e^{\lambda^2 R(\lambda:A)t}|| \leq e^{-t\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^2 t ||R(\lambda : A)^k||}{k!},$$

disso e pelo item ***(ii)*** do Teorema de Feller-Miyadera-Phillips (Teorema 2.6),

$$\begin{aligned} ||e^{tA_\lambda}|| \leq e^{-t\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{2k}\frac{M}{(\lambda-w)^k}\frac{1}{k!} &= e^{-t\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{\lambda^2 t}{\lambda-w}\right)^k M}{k!} = e^{-\lambda t}e^{t\left(\frac{\lambda^2}{\lambda-w}\right)}M \\ &= Me^{t\left(\frac{\lambda^2}{\lambda-w}-\lambda\right)} = Me^{t\left(\frac{\lambda w}{\lambda-w}\right)}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\lambda > 2w \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} > w \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2}-\lambda > w-\lambda \Leftrightarrow \frac{-\lambda}{2} > w-\lambda \Leftrightarrow \frac{\lambda}{2} < \lambda - w \Leftrightarrow \frac{\lambda w}{\lambda-w} < \frac{\lambda w}{\frac{\lambda}{2}} = 2w$$

e, portanto,

$$||e^{tA_\lambda}|| \leq Me^{2wt},\ \forall\, t \geq 0. \tag{2.23}$$

Agora, consideremos o semigrupo uniformemente limitado $\{S(t) = e^{-wt}T(t)\,;\, t \geq 0\}$ cujo gerador infinitesimal é $A - wI$. Assim, para todo $x \in X$, obtemos

$$S(t) = e^{-wt}T(t) \Rightarrow T(t) = e^{wt}S(t),\ \forall\, t \geq 0 \Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{wt}S(t)x.$$

Uma vez que $||S(t)|| \leq M$ para todo $t \geq 0$, pelo **1º *caso***, segue que

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{wt}e^{t(A-wI)_\lambda + wt}x,\ \forall\, x \in X, t \geq 0, \tag{2.24}$$

em que

$$\begin{aligned} (A-wI)_\lambda + wI &= \lambda^2 R(\lambda : A - wI) - \lambda I + wI = \lambda^2(\lambda I - (A-wI))^{-1} - \lambda I + wI \\ &= \lambda^2((\lambda+w)I - A)^{-1} - \lambda I + wI = \lambda^2 R(\lambda + w : A) - \lambda I + wI. \end{aligned}$$

Por outro lado, fazendo

$$H(\lambda) = 2wI - w(w+2\lambda)R(\lambda+w : A) = w(wR(\lambda+w : A) - 2AR(\lambda+w : A)),$$

tem-se

$$\begin{aligned} & A_{\lambda+w} + H(\lambda) = (\lambda+w)^2R(\lambda+w : A) - (\lambda+w)I + 2wI + (-w^2 - 2w\lambda)R(\lambda+w : A) \\ = \;& (\lambda+w)^2R(\lambda+w : A)\lambda I - wI + 2wI - w^2R(\lambda+w : A) - 2wIR(\lambda+w : A) \\ = \;& (\lambda^2 + 2w\lambda + w^2)R(\lambda+w : A) - \lambda I - wI + 2wI - w^2R(\lambda+w : A) - 2wIR(\lambda+w : A) \\ = \;& \lambda^2R(\lambda+w : A) + 2wR(\lambda+w : A) + w^2R(\lambda+w : A) + \\ & \qquad -\lambda I - wI + 2wI - w^2R(\lambda+w : A) - 2wR(\lambda+w : A) \\ = \;& \lambda^2R(\lambda+w : A) - \lambda I + wI = (A-wI)_\lambda + wI, \end{aligned}$$

logo $(A - wI)_\lambda + wI = A_{\lambda+w} + H(\lambda)$. Além disso,

$$||H(\lambda)|| \;=\; ||2wI - w(w+2\lambda)R(\lambda+w : A)|| = ||2wI - w^2R(\lambda+w : A) - 2w\lambda R(\lambda+w : A)||$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2w + w^2||R(\lambda + w : A)|| + 2w\lambda||R(\lambda + w : A)\\
&\leq 2w + w^2\frac{M}{\lambda - w + w} + 2w\lambda\frac{M}{\lambda + w - w} = 2w + w^2\frac{M}{\lambda} + 2\lambda w\frac{M}{\lambda}\\
&= 2w + w^2\frac{M}{\lambda} + Mw = 2wM(w^2\lambda^{-1} + 2w)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|H(\lambda)x| &= |w(wR(\lambda + w : A)x - 2A(R(\lambda + w : A)(x))|\\
&= |w^2R(\lambda + w : A)x - 2wA(R(\lambda + w : A)(x))|\\
&\leq w^2|R(\lambda + w : A)| + 2w|(R(\lambda + w : A)(x))|\\
&\leq M\frac{w^2}{\lambda + w - w} + 2w|A(x)R(\lambda + w : A)|\\
&\leq \frac{M}{\lambda}w^2|A(x)|\frac{M}{\lambda + w - w} = \frac{M}{\lambda}w^2 + 2w|A(x)|\frac{M}{\lambda} = \frac{M}{\lambda}(w^2 + 2w|A(x)|),
\end{aligned}$$

isto é, $H(\lambda)x \longrightarrow 0$ quando $\lambda \longrightarrow \infty$, para todo $x \in X$. Como

$$\begin{aligned}
|e^{tH(\lambda)}x - x| &= \left|\int_0^1 \frac{d}{ds}\left(e^{tsH(\lambda)}x\right)\, ds\right| = \left|\int_0^1 \left(tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}\right)\, ds\right|\\
&\leq \int_0^1 |tH(\lambda)e^{tsH(\lambda)}x|\, ds = |tH(\lambda)x|\int_0^1 ||e^{tsH(\lambda)}||\, ds\\
&\leq |tH(\lambda)x|\int_0^1 e^{ts||H(\lambda)||}\, ds \leq |tH(\lambda)x|\int_0^1 e^{t||H(\lambda)||}\, ds = |tH(\lambda)x|e^{t||H(\lambda)||}.
\end{aligned}$$

vem que

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tH(\lambda)}x = x,\ \forall\, x \in X. \tag{2.25}$$

Por fim, como $H(\lambda)$ e $A_{\lambda+w}$ comutam, para quaisquer $\lambda > 0$ e $w \geq 0$, temos que

$$\begin{aligned}
|e^{tA_\lambda} - T(t)x| &= |e^{tA_\lambda}x + e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - T(t)x|\\
&\leq |e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - e^{tA_\lambda}x| + |e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - T(t)x|\\
&= |e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - T(t)x| + |e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - e^{tA_\lambda}x|\\
&\leq |e^{tA_\lambda + tH(\lambda - w)}x - T(t)x| + ||e^{tA_\lambda}||\ |e^{tH(\lambda - w)}x - x|.
\end{aligned}$$

Quando $\lambda \longrightarrow \infty$ o primeiro termo da desigualdade acima tende a zero, em virtude de (2.24). O segundo termo tende a zero em razão de (2.23) e (2.25). Logo,

$$\lim_{\lambda \to \infty} e^{tA_\lambda}x = T(t)x,\ \forall\, x \in X, t \geq 0.$$

Portanto, em qualquer caso, segue o desejado. ■

A seguir, damos uma representação em forma de um limite para elementos da forma $T(t)x \in X$, em que $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo em X, $x \in X$ e $t \geq 0$.

Teorema 2.8 (1ª Fórmula Exponencial de Hille). *Se $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo em X, então*

$$T(t)x = \lim_{h \to 0^+} e^{tA(h)}x,\ \forall\, x \in X,$$

em que $A(h) = \frac{T(h)-I}{h}$, para qualquer $h > 0$, e o limite é uniforme em todo intervalo $[0,k]$, com $k \in \mathbb{R}_+^*$.

Demonstração. Como, por hipótese, $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é um C_0 semigrupo, então existem $M \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $||T(t)|| \leq Me^{wt}$, para todo $t \geq 0$. Seja $A : D(A) \subset X \to X$ o gerador infinitesimal de $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ e suponhamos $w > 0$. Como $A(h)$ é um operador linear limitado, para todo $h > 0$,

$$e^{tA(h)} = e^{t\frac{T(h)-I}{h}} = e^{\frac{-t}{h}} e^{\frac{t}{h}T(h)} = e^{\frac{-t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{T(h)^n}{n!} = e^{\frac{-t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{T(nh)}{n!},$$

donde,

$$\begin{aligned} ||e^{tA(h)}|| = \left|\left| e^{\frac{-t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{T(nh)}{n!} \right|\right| \leq e^{\frac{-t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n \frac{||T(nh)||}{n!} &\leq e^{\frac{-t}{h}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{t}{h}\right)^n M\frac{e^{whn}}{n!} \\ &= Me^{\frac{-t}{h}} e^{\frac{t}{h}} = Me^{\frac{t}{h}(e^{wh}-1)}, \end{aligned}$$

para todo $h > 0$. E, se $0 < h \leq 1$, então

$$||e^{tA(h)}|| \leq Me^{t(e^w-1)}. \tag{2.26}$$

Como $A(h)$ comuta com $T(t)$ e o mesmo se dá com $e^{tA(h)}$ e $T(t)$, para quaisquer $t \geq 0$ e $h > 0$, então tem-se, para todo $x \in D(A)$, que

$$\begin{aligned} ||T(t)x - e^{tA(h)}|| = \left|\left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} e^{(t-\tau)A(h)} T(\tau)x \, d\tau \right|\right| &= \left|\left| \int_0^t \frac{d}{d\tau} e^{(t-\tau)A(h)} T(\tau)(A(x) - A(h)x)\, d\tau \right|\right| \\ &\leq \int_0^t ||e^{(t-\tau)A(h)}||\, ||T(\tau)||\, |(A(x) - A(h)x)|\, d\tau, \end{aligned}$$

nesses termos, se $0 < h \leq 1$, obtemos de (2.26) que

$$\begin{aligned} ||T(t)x - e^{tA(h)}|| &\leq \int_0^t ||e^{(t-\tau)A(h)}|| Me^{w\tau} |A(x) - A(h)x|\, d\tau \\ &= M|A(x) - A(h)x| \int_0^t e^{w\tau} ||e^{(t-\tau)A(h)}||\, d\tau \\ &\leq M|A(x) - A(h)x| \int_0^t Me^{wt} e^{(t-\tau)(e^w-1)}\, d\tau \\ &= M^2|A(x) - A(h)x| \int_0^t e^{wt} e^{te^w - t - \tau e^w + \tau}\, d\tau \\ &= M^2|A(x) - A(h)x| e^{wt + te^w - t} \int_0^t \overbrace{e^{-\tau e^w + \tau}}^{= e^{\tau(1-e^w)} \leq 1}\, d\tau \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq M^2|A(x) - A(h)x|e^{wt+te^w-t}\int_0^t 1\, d\tau \\
&= M^2|A(x) - A(h)x|e^{wt+te^w-t}\cdot \tau\Big|_0^t \\
&= tM^2 e^{t(e^w+w-1)}|A(x) - A(h)x|,
\end{aligned}
$$

disso, segue que,

$$\lim_{h\to 0^+} e^{tA(h)}x = T(t)x, \ \forall\, t \geq 0, x \in D(A)$$

já que $A(h)x \overset{t\to 0^+}{\longrightarrow} A(x)$, para qualquer $x \in D(A)$. Mas como, pelo Teorema 2.6, $D(A)$ é denso em X e $||T(t)||$ e $||e^{tA(h)}||$ são limitados no compacto $[0, k]$, para todo $k \in \mathbb{R}^*_+$, então segue o resultado desejado, para todo $x \in X$.

■

Capítulo 3

Semigrupos analíticos e Potências fracionárias

Nesse capítulo, estendemos o conceito de semigrupo de operadores lineares limitados para uma região do plano do complexo e, além disso, damos sentido a expressão A^{α}, com $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear e $\alpha > 0$. E estudamos algumas propriedades desse tipo de potência. Ambos conceitos são de suma importância para o desenvolvimento do trabalho. Para mais detalhes, veja [28] e [25].

3.1 Semigrupos analíticos

Até então tratamos de semigrupos cujo domínio dos operadores era $\mathbb{R}_+$. Agora consideremos semigrupos que possuem domínio em alguma região do plano complexo $\mathbb{C}$, mais precisamente, vamos nos restringir a regiões denominadas de ângulo em torno de semi-eixo $\mathbb{R}_+$.

Definição 3.1. *Seja* $\Delta = \{z \in \mathbb{C} \; ; \; \phi_1 < arg\, z < \phi_2, \phi_1 < 0 < \phi_2\}$ *e, para cada* $z \in \Delta$, $T(z)$ *é um operador linear limitado em* $\mathcal{L}(X)$. *A família* $\{T(z) \; ; \; z \in \Delta\}$ *é um* ***semigrupo analítico****, em* Δ*, se*

i) *a função complexa* $h : \Delta \longrightarrow \mathcal{L}(X)$ *dada por* $h(z) = T(z)$ *é analítica*[1] *em* Δ*;*

ii) $T(0) = I$ *e*

$$\lim_{\substack{z\to 0 \\ z\in\Delta}} T(z)x = x, \; \forall \, x \in X;$$

[1]**Definição.** Uma função $f : U \in \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é dita **analítica** em $z_0 \in U$ se f tem derivada em cada ponto de alguma vizinhança $V \subset \mathbb{C}$ de $z_0 \in U$.

iii) *$T(z_1 + z_2) = T(z_1)T(z_2)$, para quaisquer $z_1, z_2 \in \Delta$.*

*Além disso, um semigrupo $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é chamado **analítico** se é analítico em algum setor $\Delta \subset \mathbb{C}$ tal que $\mathbb{R}_+ \subset \Delta$.*

Observação 3.1. *A restrição de um semigrupo analítico à $\mathbb{R}_+$, é claramente um C_0 semigrupo.*

3.2 Potências fracionárias

Nessa seção definimos potência fracionária para um operador linear fechado e densamente definido e enunciamos e/ou demonstramos alguns resultados envolvendo esse conceito.

Para que seja possível definir potência fracionária de um operador linear, precisamos impor a seguinte condição.

Condição 3.1. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear tal que $\overline{D(A)} = X$ e*

$$\Sigma^+ \cup V \subset \rho(A),$$

em que $\Sigma^+ = \{\lambda \in \mathbb{C}\ ;\ 0 < w < |arg\,\lambda| \leq \pi\}$ e $V \subset \mathbb{C}$ é uma vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$.

Definição 3.2. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear com $\overline{D(A)} = X$ e satisfazendo a Condição 1. Definimos*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \lambda^{-\alpha}(A - \lambda I)^{-1}\, d\lambda,\ \forall\, \alpha > 0, \tag{3.1}$$

em que $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$ é uma curva com

$$C_1 = \{\gamma_1(\rho) = \rho e^{-i\psi}\ ;\ 1 \leq \rho < \infty\},\ C_2 = \{\gamma_2(\varphi) = e^{i\varphi}\ ;\ -\psi \leq \varphi \leq \psi\}$$

$$e \quad C_3 = \{\gamma_1(\rho) = \rho e^{i\psi}\ ;\ 1 \leq \rho < \infty\},\ 0 < \psi < \theta \in \mathbb{R}_+^*.$$

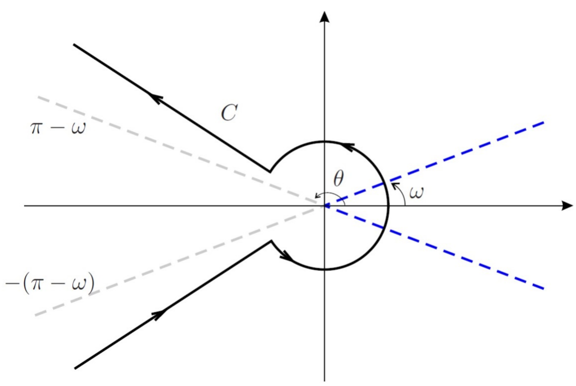

Figura 3.1: Caminho C

Para que (3.1) dada na Definição 3.2 faça sentido, precisamos verificar se $A^{-\alpha}$, com $\alpha > 0$, converge uniformemente e dessa forma A será um operador linear limitado.

Proposição 3.1. *A integral* (3.1) *dada na Definição 3.2 converge uniformemente para todo* $\alpha > 0$.

Demonstração. Seja $r > 1$ fixado. Consideremos o caminho C_r da curva C que vai de $re^{-i\psi}$ até $re^{i\psi}$. Assim, para qualquer $\alpha > 0$

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda + \int_{C-C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda.$$

Logo, se $C_{1,r} = \{\gamma_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\psi}\ ;\ \rho \geq r\}$ e $C_{2,r} = \{\gamma_{2,r}(\rho) = e^{i\psi}\ ;\ \rho \geq r\}$ então

$$\begin{aligned}
&\left|\left|A^{-\alpha} - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda\right|\right| = \left|\left|\int_{C-C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda\right|\right| \\
= &\left|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_{1,r}} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_{2,r}} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda\right|\right| \\
\leq &\ \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty |\rho^{-\alpha}e^{i\alpha\psi}|\ ||(A-\rho e^{-i\psi}I)^{-1}||\, d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty |\rho^{-\alpha}e^{-i\alpha\psi}|\ ||(A-\rho e^{i\psi}I)^{-1}||\, d\rho \\
\leq &\ \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty \rho^{-\alpha}e^{Re(i\alpha\psi)}\frac{M}{1+\rho}\, d\rho + \frac{1}{2\pi}\int_r^\infty \rho^{-\alpha}e^{Re(-i\alpha\psi)}\frac{M}{1+\rho}\, d\rho \\
= &\ \frac{M}{2\pi}\int_r^\infty \rho^{-\alpha}e^0\frac{\rho}{1+\rho}\frac{1}{\rho}\, d\rho + \frac{M}{2\pi}\int_r^\infty \rho^{-\alpha}e^0\frac{\rho}{1+\rho}\frac{1}{\rho}\, d\rho \\
\leq &\ \frac{M}{\pi}\int_r^\infty \rho^{-(\alpha+1)}\, d\rho = \frac{M}{\pi}\frac{1}{\alpha r^\alpha},
\end{aligned}$$

consequentemente,

$$A^{-\alpha} \longrightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(A-\lambda I)^{-1}\, d\lambda,$$

quando $r \longrightarrow \infty$. E mais, para cada $r > 1$, o operador $\displaystyle\int_{C_r} \lambda^{-\alpha}(\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda$ é linear limitado. Portanto, como a convergência é uniforme, segue que $A^{-\alpha}$ é um operador linear limitado.

■

Proposição 3.2. *Seja* $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ *um operador linear nas condições da Definição 3.2. Se* $\alpha \in (0,1)$, *então*

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty \rho^{-\alpha}(A+\rho I)\, d\rho. \tag{3.2}$$

Demonstração. Nesses termos, da Definição 3.2, temos

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{2\pi i}\overbrace{\int_{\overline{C}_{1,r}} \lambda^{-\alpha}(A-\alpha I)^{-1}\, d\lambda}^{:=I_1} + \frac{1}{2\pi i}\overbrace{\int_{\overline{C}_{2,r}} \lambda^{-\alpha}(A-\alpha I)^{-1}\, d\lambda}^{:=I_2} + \frac{1}{2\pi i}\overbrace{\int_{\overline{C}_{3,r}} \lambda^{-\alpha}(A-\alpha I)^{-1}\, d\lambda}^{:=I_3},$$

em que $\overline{C}_{1,r} = \{\gamma_{1,r}(\rho) = \rho e^{-i\varphi}\ ;\ \rho \geq r\}$ e $\overline{C}_{2,r} = \{\gamma_{2,r}(\varphi) = re^{i\varphi}\ ;\ -\psi \leq \varphi \leq \psi\}$ e $\overline{C}_{3,r} = \{\gamma_{3,r}(\rho) = \rho e^{i\psi}\ ;\ \rho \geq r\}$, com $r > 1$.

Analisemos as integrais I_1, I_2 e I_3 separadamente. Para I_1, temos

$$I_1 = -\int_r^\infty (\rho e^{-i\psi})^{-\alpha}(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi}\, d\rho = -\int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{i\psi}\, d\rho.$$

Notemos que, como $0 < \psi < \pi - w$, então

$$\psi \overset{w\to 0}{\longrightarrow} \pi \Rightarrow \rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi} \overset{w\to 0}{\longrightarrow} \rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A - \rho e^{-i\pi})^{-1} e^{-i\pi} = -\rho^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A + \rho I)^{-1}.$$

E mais,

$$||\rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - \rho e^{-i\psi})^{-1} e^{-i\psi}|| \leq |\rho^{-\alpha}|\, |e^{i\psi\alpha}|\, ||A - \rho e^{-i\psi}|| \leq \rho^{-\alpha}\frac{M}{1+\rho} := g(\rho),$$

com $g(\rho)$ integrável em (r, ∞). Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada (Veja [2], Teorema 11.21, página 415),

$$\lim_{w\to 0} -I_1 = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha}(A + \rho I)^{-1}\, d\rho.$$

Analogamente,

$$I_3 = \int_r^\infty \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha}(A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi}\, d\rho, \quad \rho^{-\alpha} e^{-i\psi\alpha}(A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi} \overset{w\to 0}{\longrightarrow} -\rho e^{-\alpha} e^{i\pi\alpha}(A + \rho I)^{-1}$$

$$\text{e} \quad ||\rho^{-\alpha} e^{i\psi\alpha}(A - \rho e^{i\psi})^{-1} e^{i\psi}|| \leq \rho^{-\alpha}\frac{M}{1+\rho} := g(\rho).$$

Então, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada

$$\lim_{w\to 0} I_3 = \int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-\pi\alpha}(A + \rho I)^{-1}\, d\rho.$$

Por fim, como

$$I_2 = \int_{-\psi}^{\psi} (re^{i\varphi})^{-\alpha}(A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi}\, d\varphi \Rightarrow \lim_{w\to 0} I_2 = \int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha}(A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi}\, d\varphi$$

$$\begin{aligned} \text{e} \quad ||(re^{i\varphi})^{-\alpha}(A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi}|| &\leq |r^{-\alpha}|\, |e^{-i\varphi\alpha}|\, ||(A - re^{i\varphi})^{-1}||\, |r|\, |i|\, |e^{i\varphi}| \\ &\leq r^\alpha \frac{M}{1+r} r \leq \frac{M}{1+r} r \overset{r\to 0^+}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Segue, do Teorema da Convergência Dominada, que

$$\lim_{r\to 0}\left(\lim_{w\to 0} I_2\right) = 0.$$

Nesses termos, fazendo $w \longrightarrow 0$ obtemos

$$A^{-\alpha} = \frac{-1}{2\pi i}\int_r^\infty -\rho^{-\alpha} e^{-i\pi\alpha}(A + \rho I)^{-1}\, d\rho \quad + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} (re^{i\varphi})^{-\alpha}(A - re^{i\varphi})^{-1} rie^{i\varphi}\, d\varphi +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_r^\infty -\rho^{-\alpha}e^{-\pi\alpha}(A+\rho I)^{-1}\,d\rho$$

e, consequentemente, fazendo $r \longrightarrow 0$, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \rho^{-\alpha}e^{-i\pi\alpha}(A+\rho I)^{-1}\,d\rho - \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty \rho^{-\alpha}e^{-\pi\alpha}(A+\rho I)^{-1}\,d\rho \\ &= \left(\frac{e^{i\pi\alpha}-e^{\pi\alpha}}{2\pi i}\right)\int_0^\infty \rho^{-\alpha}(A+\rho I)^{-1}\,d\rho = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty \rho^{-\alpha}(A+\rho I)^{-1}\,d\rho. \end{aligned}$$

∎

Observação 3.2. *Para o restante dessa seção supomos $w < \frac{\pi}{2}$. Assim, se um operador linear $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ satisfaz a Condição 3.1, então $-A$ gera um semigrupo analítico $\{T(z)\ ;\ z \in \Delta \cup \{0\}\}$. E mais, existe $\delta > 0$ tal que $-A + \delta I$ é o gerador infinitesimal do semigrupo analítico $\{T(t)e^{\delta t}\ ;\ t \geq 0\}$ e valem as desigualdades*

$$||T(t)|| \leq Me^{-\delta t}, \tag{3.3}$$

$$||AT(t)|| \leq M_1 t^{-1}e^{-\delta t} \tag{3.4}$$

$$||A^n T(t)|| \leq M_n t^{-n}e^{-\delta t}. \tag{3.5}$$

para todo $t \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$ e alguns $M, M_1, M_n = M(n) \in \mathbb{R}$.

Proposição 3.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear nas condições da Definição 3.2. Se $\alpha \in (0,1)$ e $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(z)\ ;\ z \in \Delta \cup \{0\}\}$, então*

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\,ds,$$

em que $\Gamma(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}\,du$.

Demonstração. Sabemos da demonstração do Teorema de Hille-Yosida (Teorema 2.1), que

$$(tI+A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-st}T(s)\,ds,\ \forall\, t \geq 0.$$

Disso, de (3.2) e do Teorema de Fubini (veja [2], Teorema 11.27, página 418), obtemos

$$A^{-\alpha} = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty t^{-\alpha}\left(\int_0^\infty e^{-st}T(s)\,ds\right)dt = \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty T(s)\left(\int_0^\infty t^{-\alpha}e^{-st}\,dt\right)ds,$$

fazendo $u = ts$, tem-se

$$\begin{aligned} A^{-\alpha} &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty T(s)\left(\int_0^\infty (us^{-1})^{-\alpha}e^{-u}s^{-1}\,du\right)ds \\ &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}\,du\right)ds \end{aligned}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\alpha\pi)}{\pi}\left(\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}\,du\right)\left(\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\,ds\right),$$

contudo,

$$\int_0^\infty u^{-\alpha}e^{-u}\,du = \Gamma(1-\alpha) \quad \text{e} \quad \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\alpha\pi)} = \Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha-1)$$

(em que a demonstração da convergência da função $\Gamma : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ pode ser encontrada no Capítulo 2 de [3]), donde

$$A^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\,ds. \tag{3.6}$$

Ainda

$$\begin{aligned}\left|\left|\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\,ds\right|\right| &\leq \int_0^\infty s^{\alpha-1}||T(s)||\,ds\\ &\leq M\int_0^\infty \left(\frac{u}{\delta}\right)^{\alpha-1}e^{-u}\delta^{-1}\,du\\ &= M\delta^{1-\alpha}\delta^{-1}\int_0^\infty u^{\alpha-1}e^{-u}\,du = M\delta^{-\alpha}\Gamma(\alpha),\end{aligned}$$

logo, a integral dada em (3.6) converge na topologia do operador uniforme, para todo $\alpha > 0$. ■

Observação 3.3. *Desse modo, quando $-A$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico, podemos definir*

$$A^{-\alpha} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\alpha)}\displaystyle\int_0^\infty s^{\alpha-1}T(s)\,ds, & se \quad \alpha > 0\\ I, \quad se \quad \alpha = 0. \end{cases}$$

Proposição 3.4. *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear satisfazendo a Condição 3.1, então para todo $\alpha \geq 0$, A^α é injetor.*

Demonstração. Da Condição 3.1, temos que $0 \in \rho(A)$ e, consequentemente, A^{-1} existe. Em particular, A^{-1} é injetor. Além disso,

$$A^{-n} = (A^{-1})^n, \; \forall\, n \in \mathbb{N}$$

também é injetor. Agora sejam $\alpha > 0$ qualquer, $x \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ tais que

$$A^{-\alpha}x = 0, \text{ com } n \geq \alpha,$$

assim,

$$A^{-n}x = A^{-n+\alpha-\alpha}x = A^{-n+\alpha}A^{-\alpha}x = A^{-n+\alpha}0 = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$$

Portanto, $A^{-\alpha}$ é injetor. ■

Definição 3.3. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear satisfazendo a Condição 3.1, com $w < \frac{\pi}{2}$. Para todo $\alpha \geq 0$, definimos $A^\alpha : D(A^\alpha) \subset X \longrightarrow X$ por*

$$A^\alpha = \begin{cases} (A^{-\alpha})^{-1}, & se \quad \alpha > 0 \\ I, \quad se \quad \alpha = 0, \end{cases}$$

com $D(A^\alpha) = Im(A^{-\alpha})$.

Observação 3.4. *Se $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é um operador linear tal que $-A$ é gerador infinitesimal de um semigrupo analítico em X e $0 \in \rho(A)$, então podemos definir A^α. Além disso, se $0 \leq \alpha \leq 1$, então A^α é um operador linear fechado, inversível e $\overline{D(A)} = X$. O fato de A^α, com $0 \leq \alpha \leq 1$, ser fechado implica que $(D(A^\alpha), ||\cdot||_\alpha)$ é um espaço de Banach, em que $||\cdot||_\alpha : D(A^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é dada por*

$$||u||_\alpha = ||A^\alpha u||, \, \forall \, u \in D(A^\alpha).$$

Mais detalhes sobre isso, veja seções 3.2 e 3.3 de [25].

Proposição 3.5. *Seja $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ um operador linear, como na Definição 3.3. Se $\alpha \geq \beta > 0$ então $D(A^\alpha) \subset D(A^\beta)$.*

Demonstração. Pelo Lema 1.43 de [1], temos que

$$A^\alpha = A^{\alpha+\beta-\beta} = A^\beta A^{-(\beta-\alpha)},$$

donde

$$Im(A^{-\alpha}) \subset Im(A^{-\beta}) \; \Rightarrow \; D(A^\alpha) \subset D(A^\beta).$$

■

Teorema 3.1. *Seja $-A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico $\{T(z) \; ; \; z \in \Delta \cup \{0\}\}$, em que $\mathbb{R}_+ \subset \Delta$. Se $0 \in \rho(A)$, então para todo $t > 0$ o operador $A^\alpha T(t)$ é limitado, como $0 < \alpha \leq 1$ e*

$$||A^\alpha T(t)||_\alpha \leq M_\alpha t^{-\alpha} e^{-\delta t},$$

para algum $\delta > 0$ (veja Observação 3.2).

Demonstração. Seja $n \in \mathbb{N}^*$ tal que $n - 1 < \alpha < n$. Usando (3.3), obtemos

$$\begin{aligned} ||A^\alpha T(t)||_\alpha &= ||A^{\alpha-n+n} T(t)||_\alpha = ||A^{\alpha-n} A^n T(t)||_\alpha = \left|\left| \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} A^n T(t+s) \, ds \right|\right|_\alpha \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1} ||A^n T(t+s)|| \, ds \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n} e^{-\delta(t+s)}\, ds \\
&\leq \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty s^{n-\alpha-1}(t+s)^{-n} e^{-\delta s}\, ds \\
&\overset{u=\frac{s}{t}}{=} \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty (ut)^n (ut)^{-\alpha} (ut)^{-1} \left(t(1+u)\right)^{-n} e^{-\delta t(1+u)} t\, du \\
&= \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \int_0^\infty (u)^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}\, du \\
&= \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \int_0^\infty t^{-\alpha} e^{\delta t} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n} e^{-\delta t u}\, du \\
&= \frac{M_n e^{-\delta t}}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \int_0^\infty e^{\delta t u} u^{n-\alpha-1}(1+u)^{-n}\, du \\
&\leq \frac{e^{-\delta t}}{t^\alpha} \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty u^{n-1-\alpha}(1+u)^{-n}\, du \\
&\leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha} e^{-\delta t}.
\end{aligned}
$$

Além disso, concluímos que

$$||A^\alpha T(t)||_\alpha \leq \frac{M_\alpha}{t_\alpha} e^{-\delta t} \leq \frac{M_\alpha}{t^\alpha},\ \forall\, t > 0.$$

■

Capítulo 4

Existência de soluções fracas para equações diferenciais funcionais neutras com impulsos

No presente capítulo utitilizamos a teoria de semigrupos desenvolvida até aqui, por exemplo, utilizamos o conceito de semigrupo uniformemente limitado que foi abordado na Seção 2.1. Além disso, os conceitos e resultados acerca de semigrupos analíticos e potências fracionárias também foram utilizados, já que o problema que abordamos, assim como as condições impostas sobre o mesmo, está fortemente ligado a tais conceitos.

Nosso objetivo nesse capítulo é estudar soluções fracas para uma classe de equações diferenciais funcionais neutras de primeira ordem, sujeitas à ações impulsivas, a saber,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\Big(x(t) + g(t, x_t)\Big) = Ax(t) + f(t, x_t), \ \forall\, t \in [0, a] = I \\ x_0 = \varphi \in \mathcal{B} \\ \Delta x(t_i) = I_i(x_{t_i}), \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $a \in \mathbb{R}_+^*$, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo de operadores lineares limitados analítico $\{T(s)\ ;\ s \geq 0\}$ no espaço de Banach X. A história $x_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ é dada por

$$x_t(\theta) = x(t + \theta), \ \forall\, t \in I \ \text{ e } \ \theta \in (-\infty, 0]$$

que pertence a algum espaço de fase $\mathcal{B}$ definido axiomaticamente, $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0, a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, tais que

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a,$$

as funções $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$, $I_i : X \longrightarrow X$, para todo $i = 1, 2, \cdots, n$, são funções apropriadas e $\Delta x(t)$ representa o salto da função $x : I \longrightarrow X$, em $t \in I$, definido por

$$\Delta x(t) = x(t^+) - x(t^-)$$

em que

$$x(t^+) = \lim_{s \to t^+} x(s) \ \text{ e } \ x(t^-) = \lim_{s \to t^-} x(s).$$

4.1 Pré-requisitos

Para descrever de maneira apropriada o nosso problema precisamos de algumas definições. Para isso, sejam $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $m < n$, definimos o conjunto

$$\mathcal{PC}\big([m,n], X\big) = \big\{u : [m,n] \longrightarrow X \ ; \ u \text{ é contínua por partes e } u(t^-) = u(t), \ \forall\, t \in [m,n]\big\}$$

que é chamado de **espaço das funções contínuas por partes normalizadas** de $[m,n] \subset \mathbb{R}$ em X. Além disso, se $t_1, t_2, \cdots, t_n \in (0,a)$, para algum $n \in \mathbb{N}$, são tais que

$$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < a,$$

definimos

$$\mathcal{PC} = \Big\{u : [0,a] \longrightarrow X \quad ; \quad u \text{ é contínua em } t \neq t_i, u(t_i^-) = u(t_i) \\ \text{e } u(t_i^+) \text{ existe, para todo } i \in \{1, \cdots, n\}\Big\}.$$

Para simplificar, denotamos por $t_0 = 0$ e $t_{n+1} = a$, para algum $n \in \mathbb{N}^*$. É possível provar que $(\mathcal{PC}, ||\cdot||_{\mathcal{PC}})$ é um espaço de Banach, em que $||\cdot||_{\mathcal{PC}}$ é a norma da convergência uniforme. E mais, dados $u \in \mathcal{PC}$ e $i \in \{1, \cdots, n\}$ quaisquer, definimos $\tilde{u}_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow X$ por

$$\tilde{u}_i(t) = \begin{cases} u(t), \text{ se } t \in (t_i, t_{i+1}] \\ u(t_i^+), \text{ se } t = t_i \end{cases}$$

e, para qualquer $B \subset \mathcal{PC}$,

$$\tilde{B}_i = \{\tilde{u}_i \ ; \ u \in B\}, \ \forall\, i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Notemos que $\tilde{u}_i \in C([t_i, t_{i+1}]), X)$, para todo $\tilde{u}_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow X$ e $i \in \{1, \cdots, n\}$. Com efeito, em virtude de $u \in \mathcal{PC}$, então $\tilde{u}_i$ é contínua em (t_i, t_{i+1}). Agora analisemos em $t = t_i$ e $t = t_{i+1}$.

- Continuidade de $\tilde{u}_i$ em $t = t_i$.

Notemos que

$$\lim_{t \to t_i^+} \tilde{u}_i(t) = \lim_{t \to t_i^+} u(t) = u(t_i^+) = \tilde{u}_i(t),$$

logo, $\tilde{u}_i$ é contínua em $t = t_i$.

- Continuidade de $\tilde{u}_i$ em $t = t_{i+1}$.

  Observemos que

$$\lim_{t \to t_{i+1}^-} \tilde{u}_i(t) = \lim_{t \to t_{i+1}^-} u(t) = u(t_{i+1}^-) = u(t_{i+1}) = \tilde{u}_i(t_{i+1}),$$

  logo, $\tilde{u}_i$ é contínua, em $t = t_{i+1}$. Portanto, $\tilde{u}_i \in C([t_i, t_{i+1}]), X)$, para todo $\tilde{u}_i : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow X$ e $i \in \{1, \cdots, n\}$.

Na sequência temos o Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1) e o Lema 4.1 os quais são fortemente utilizados nos dois resultados de existência de solução de (4.1), já que várias vezes, durante suas demonstrações, é necessário mostrar que certos conjuntos de funções são relativamente compactos, pois vamos transformar o problema (4.1) em um problema de ponto fixo, usando a clássica Alternativa de Leray-Schauder (Teorema 4.2), o qual envolve a noção de função completamente contínua, conceito o qual é definido em termos de conjuntos relativamente compactos.

Teorema 4.1 (Teorema de Arzela-Ascoli)**.** *Sejam X_1 um espaço topológico, $Y_1 = (Y_1, d_1)$ um espaço métrico e $C(X_1, Y_1) = \{F : X_1 \longrightarrow Y_1 \ ; \ F$ é contínua$\}$. Se $\mathcal{F} \subset C(X_1, Y_1)$ é equicontínuo*[1] *e, para todo $x \in X_1$, o conjunto $\mathcal{F}(x) = \{F(x) \ ; \ F \in \mathcal{F}\}$ é relativamente compacto*[2]*, em Y_1, então $\mathcal{F}$ é relativamente compacto em $C(X_1, Y_1)$.*

Demonstração. Veja Teorema 6.4, página 267 de [10]. ■

A proposição a seguir nos dá, de certa maneira, para $B \subset \mathcal{PC}$, uma relação entre os conceitos de compacidade relativa e de equicontinuidade.

Proposição 4.1. *Um conjunto $B \subset \mathcal{PC}$ é relativamente compacto se, e somente se, as seguintes propriedades se verificam:*

[1]**Definição.** Sejam $M = (M, d_1)$ e $N = (N, d_2)$ espaços métricos e $\mathcal{E} = \{h : M \longrightarrow N \ ; \ h$ é função$\}$. O conjunto $\mathcal{E}$ é dito **equicontínuo no ponto** $a \in M$ quando, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x, a) < \delta$ implicar $d_2(h(x), h(a)) < \epsilon$, seja qual for $h \in \mathcal{E}$. O conjunto $\mathcal{E}$ é dito apenas **equicontínuo** quando é equicontínuo em todos os pontos de M.

[2]**Definição.** Seja $M = (M, d_1)$ um espaço métrico. Um conjunto $N \subset M$ é dito **relativamente compacto** quando $\overline{N}$ é compacto.

(i) *para todo $t \in I$, os conjuntos*

$$B(t) = \{u(t) \ ; \ u \in B\} \quad e \quad \tilde{B}(t) = \{\tilde{u}(t) \ ; \ u \in B\}$$

são relativamente compactos em X;

(ii) *o conjunto B é equicontínuo à esquerda, em cada $t \in I$;*

(iii) *o conjunto $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita, em cada $t \in I$.*

Demonstração. $\Rightarrow$) Como, por hipótese, B é relativamente compacto, pelo Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1), os conjuntos $B(t)$ e $\tilde{B}(t)$ são relativamente compactos, para todo $t \neq t_i$, com $i = 1, \cdots, n$, e B é equicontínuo em $(0, a]$. Para os casos em que $t = t_i$, consideremos a função $\psi_i : \mathcal{PC} \longrightarrow X$ dada por

$$\psi_i(u) = u(t_i^+), \ \forall \, u \in \mathcal{PC}, \ i \in \{1, \cdots, n\}.$$

Afirmamos que ψ_i é contínua, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. De fato, sejam $\epsilon > 0$ e $u \in \mathcal{PC}$ quaisquer. Para cada $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}[u, \mathcal{PC}]$, existe $\delta_v > 0$ tal que

$$|v_i^+ - v(t_i + h)| < \frac{\epsilon}{3}, \ \forall \, h \in (0, \delta_v].$$

Assim, para $v \in B_{\frac{\epsilon}{3}}[u, \mathcal{PC}]$ e $h \in (0, \delta]$, em que $\delta = \min\{\delta_u, \delta_v\}$, temos

$$\begin{aligned} |u(t_i^+) - v(t_i^+)| &= |u(t_i^+) - u(t_i + h) + u(t_i + h) - v(t_i + h) + v(t_i + h) - v(t_i^+)| \\ &\leq |u(t_i^+) - u(t_i + h)| + |u(t_i + h) - v(t_i + h)| + |v(t_i + h) - v(t_i^+)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon, \end{aligned}$$

donde ψ_i é contínua e, consequentemente, $\tilde{B}(t_i)$ é relativamente compacto em X.

Agora, suponhamos, por um momento, que $\tilde{B}(t_i)$ não é equicontínuo à direita, em $t = t_i$, ou seja, existem $\epsilon > 0$ e sequências $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{PC}$ e $(h_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$, com $0 < h_n < \frac{1}{n}$, tais que

$$|u_k(t_i^+) - u_k(t_i + h_n)| \geq \epsilon.$$

Como B é relativamente compacto, existem uma subsequência $(u_{k_j})_{j \in \mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ e $u \in \mathcal{PC}$ tais que $u_{k_j} \longrightarrow u$, quando $j \longrightarrow \infty$. Da continuidade de ψ_i, podemos fixar $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$|u(t_i^+) - u_{k_j}(t_i^+)| \leq \frac{\epsilon}{3}, \ ||u_{k_j} - u||_a < \frac{\epsilon}{3},$$

para todo $k_j \geq N_\epsilon$. Nesses termos, se $k_j \geq N_\epsilon$, então

$$|u(t_i^+) - u(t_i + h_n)| = |u(t_i^+) - u_{k_j}(t_i^+) + u_{k_j}(t_i^+) - u_{k_j}(t_i + h_n) + u_{k_j}(t_i + h_n) - u(t_i + h_n)|$$

$$\begin{aligned} &\geq -|u(t_i^+) - u_{k_j}(t_i^+)| + |u_{k_j}(t_i^+) - u_{k_j}(t_i + h_n)| + \\ &\qquad\qquad -|u_{k_j}(t_i + h_n) - u(t_i + h_n)| \\ &> -\frac{\epsilon}{3} + \epsilon - \frac{\epsilon}{3} = \frac{\epsilon}{3}, \end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $u \in \mathcal{PC}$. Logo, $\tilde{B}$ é equicontínuo à direita em $t = t_i$, para $i = 1, \cdots, n$.

$\Leftarrow$) Da equicontinuidade de $\tilde{B}$, ***(iii)***, da compacidade relativa de $\tilde{B}(t)$, para cada $t \in I$, item ***(i)*** e do Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1), temos que os conjuntos $\tilde{B}_0$ e $\tilde{B}_i$, para $i = 1, \cdots, n$, são relativamente compactos em $C([0, t_1], X])$ e $C([t_i, t_{i+1}], X])$, respectivamente. Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset B$, assim existe uma subsequência $(u_{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}}$ de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\big((\tilde{u}_1)_{k_1}\big)_{k_1\in\mathbb{N}}$ converge para algum $v_1 \in C([0, t_1]), X$. Da mesma forma, a sequência $(u_{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $(u_{k_2})_{k_2\in\mathbb{N}}$ tal que $\big((\tilde{u}_2)_{k_2}\big)_{k_2\in\mathbb{N}}$ converge para algum $v_2 \in C([t_1, t_2], X)$. Continuando esse raciocínio, concluímos que existe uma subsequência $(u_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ de $(u_{k_{n-1}})_{k_{n-1}\in\mathbb{N}}$, tal que $\big((\tilde{u}_n)_{k_n}\big)_{k_n\in\mathbb{N}}$ converge para algum $v_n \in C([t_{n-1}, t_n], X)$. É claro que, a subsequência $(u_{k_n})_{k_n\in\mathbb{N}}$ converge a alguma $u \in \mathcal{PC}$, em que a função u é tal que $\tilde{u}_i = v_i$, para $i = 1, \cdots, n$. Disso, podemos concluir que B é relativamente compacto em $\mathcal{PC}$. ■

Lema 4.1. *Seja $B \subset \mathcal{PC}$. Então B é relativamente compacto se, e somente se, $\tilde{B}_i$ é relativamente compacto em $C([t_i, t_{i+1}]), X)$, para qualquer $i \in \{1, \cdots, n\}$.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição 4.1. ■

A seguir temos um resultado que nos dá uma relação entre conjuntos totalmente limitados[3] e relativamente compactos. E temos também, na sequência, uma caracterização de espaços métricos compactos. Ambos os resultados são importantes para a demonstração do Teorema 4.9.

Lema 4.2. *Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ um espaço normado e $U \subset X_1$. Se X_1 é completo e $U \subset X_1$ totalmente limitado, então $U \subset X_1$ é relativamente compacto.*

Demonstração. Veja [33], página 96, Teorema 4.17. ■

Lema 4.3. *As seguintes afirmações a respeito de um espaço métrico $M = (M, d)$ são equivalentes:*

(i) *M é compacto;*

[3]**Definição.** Um espaço métrico (M, d) é dito **totalmente limitado** se, para todo $\epsilon > 0$, existe uma cobertura finita de M por meio de bolas abertas de raio $\epsilon > 0$.

(ii) *Todo subconjunto infinito de M possui um ponto de acumulação;*

(iii) *Toda sequência em M possui subsequência convergente;*

(iv) *M é completo e totalmente limitado.*

Demonstração. Veja [22], página 222, Proposição 7. ∎

Para os propósitos desse capítulo, consideremos o espaço de fase $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$, que é um espaço vetorial semi-normado[4] formado por funções definidas de $(-\infty, 0])$ em X, satistazendo as seguintes condições:

A) Se $x : (-\infty, \sigma + a) \longrightarrow X$, com $a \in \mathbb{R}^*_+$ e $\sigma \in \mathbb{R}$, é contínua em $[\sigma, \sigma + a]$, $x_\sigma \in \mathcal{B}$ e $x_{|_{[\sigma,\sigma+a]}} \in \mathcal{PC}([\sigma, \sigma + a], X)$, em que

$$x_\sigma(\theta) = x(\sigma + \theta),\ \forall\, \theta \in (-\infty, 0],$$

então, para qualquer $t \in [\sigma, \sigma + a]$, tem-se

$\mathbf{A_1}$) $x_t \in \mathcal{B}$;

$\mathbf{A_2}$) $|x(t)| \leq H|x_t|_{\mathcal{B}}$, para algum $H \in \mathbb{R}^*_+$;

$\mathbf{A_3}$) $|x(t)| \leq K(t - \sigma) \cdot \sup\{|x(s)| \ ; \ \sigma \leq s \leq t\} + \overline{M}(t - s)|x_\sigma|_{\mathcal{B}}$, para algumas funções $K, \overline{M} : [0, \infty) \longrightarrow [1, \infty)$ tais que K é contínua, $\overline{M}$ é localmente limitada e K e $\overline{M}$ não dependem de $x(t)$;

B) o espaço $\mathcal{B} = (\mathcal{B}, |\cdot|_{\mathcal{B}})$ é completo.

A seguir, temos um exemplo de um espaço de fase $\mathcal{B}$.

Exemplo 4.1 (O espaço de fase $\mathcal{PC}_\mathbf{r} \times \mathbf{L^2(h, X)}$).

Sejam $r > 0$, $h : (-\infty, -r] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função positiva e Lebesque mensurável e

$$\mathcal{B} := \mathcal{PC}_r \times L^2(h, X) = \Big\{\varphi : (-\infty, 0) \longrightarrow X \quad ; \quad \varphi_{|_{[-r,0]}} \in \mathcal{PC}([-r, 0], X),\ \text{e}\, \varphi : (-\infty, -r] \longrightarrow X \text{ e}$$

[4]**Definição.** Seja E um espaço vetorial. Uma aplicação $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma **seminorma** se

(i) $p : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$;

(ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, x \in E$;

(iii) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall\, x, y \in E$.

Se $p(x) \neq 0$ para todo $x \neq 0$ então p é uma norma.

$$h|\varphi|^2_{\mathbb{R}} : (-\infty, -r] \longrightarrow X \text{ Lebesgue mensuráveis}\Big\},$$

em que $\mathcal{PC}_r\big([-r,0],X\big) = \{u : [-r,0] \longrightarrow X \ ; \ u$ é contínua por partes e $u(t^-) = u(t), \ \forall\, t \in [-r,0]\}$. A seminorma $||\cdot||_{\mathcal{B}} : \mathcal{PC}_r \times L^2(h,X) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é definida por

$$||\varphi||_{\mathcal{B}} := \sup_{\theta\in[-r,0]} |\varphi(\theta)|_{\mathbb{R}} + \left(\int_{-\infty}^{-r} h(\theta)|\varphi(\theta)|^2_{\mathbb{R}}\, d\theta\right)^{\frac{1}{2}}, \ \forall\, \varphi \in \mathcal{PC}_r \times L^2(h,X).$$

Se a função h satisfaz, as seguintes condições:

(g-6) $h : (-\infty, -r] \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva Lebesgue integrável, e existe uma função não-negativa $\gamma : (-\infty, 0] \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$h(\xi + \theta) \leq \gamma(\xi)h(\theta), \ \forall\, \xi \leq 0, \theta \in \big((-\infty,-r) - N_\epsilon\big),$$

em que $N_\epsilon \subset (-\infty, -r)$ é um conjunto de medida de Lebesgue nula.

(g-7) $\displaystyle\int_{-\infty}^{-r} h(\theta)\, d\theta < \infty,$

em que **(g-6)** e **(g-7)** é a mesma terminologia usada em [17], então procedendo como em [17, Teorema 3.8], segue que $\mathcal{B}$ é um espaço de fase.

O próxima teorema (Alternativa de Leray-Schauder) é de suma importância para a demonstração do próximo resultado (de existência de soluções), o Teorema 4.9. Mas, para demonstrá-lo precisamos do seguinte lema.

Lema 4.4 (Alternativa não-linear)**.** *Sejam $D \subset X$ um conjunto convexo e $U \subset D$ um conjunto aberto em D. Se $0 \in U$, então para cada função compacta*[5] *$F : \overline{U} \longrightarrow D$, tem-se*

i) *F tem um ponto fixo em $\overline{U}$; ou*

ii) *existe $x \in \partial U$ e $\lambda \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ tal que $x = \lambda F(x)$, em que ∂U é a fronteira de U.*

Demonstração. Veja Teorema 5.2, página 123 de [13]. ∎

Teorema 4.2 (Alternativa de Leray-Schauder)**.** *Seja $D \subset X$. Se D é convexo, $0 \in D$ e $F : D \longrightarrow D$ é uma função completamente contínua*[6]*, então o conjunto*

$$\mathcal{E}(F) := \{x \in D \ ; \ x = \lambda F(x), \ \textit{para algum}\, \lambda \in (0,1)\}$$

é ilimitado ou a função F tem um ponto fixo em D.

[5] **Definição.** Um operador $\mathcal{A} : E \longrightarrow E$, em que E é um espaço de Banach, é dito **compacto** se, para qualquer $F \subset E$ limitado, o conjunto $\mathcal{A}(F)$ é relativamente compacto.

[6] **Definição.** Um operador $\mathcal{A} : E \longrightarrow E$, em que E é um espaço de Banach, é dito **completamente contínuo** se, $\mathcal{A}$ é contínua e, para qualquer $F \subset E$ limitado, o conjunto $\mathcal{A}(F)$ é relativamente compacto.

Demonstração. Suponhamos que $\mathcal{E}(F)$ é limitado e seja $B_r(0,X)$, a bola aberta de centro $0 \in D$ e raio $r \in \mathbb{R}_+^*$ em X tal que

$$\mathcal{E}(F) \subset B_r(0,X) \subset D.$$

Nesses termos, afirmamos que $F : D \cap B_r(0,X) \subset D \longrightarrow D$ é uma função compacta e não existe $x \in \partial(D \cap B_r(0,X))$ tal que $\lambda F(x) = x$. De fato, como $D \cap B_r(0,X)) \subset B_r(0,X))$ então $D \cap B_r(0,X))$ é limitado. Disso e da hipótese de que F é completamente contínua, segue que $F(D \cap B_r(0,X)))$ é compacto e, consequentemente, $\overline{F(D \cap B_r(0,X)))}$ é também compacto. E assim, F é compacta. Portanto, segue do Lema da Alternativa não-linear (Lema 4.4), que F tem um ponto fixo em D. ■

4.2 Resultados sobre existência de soluções fracas

Nessa seção, $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ é o gerador infinitesimal de um semigrupo analítico uniformemente limitado de operadores lineares limitados $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ em X tal que $0 \in \rho(A)$. Como $\{T(t)\ ;\ t \geq 0\}$ é uniformemente limitado, existe $M \geq 1$ tal que

$$||T(t)|| \leq M,\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+.$$

Nesses termos, conforme Observação 3.4, para cada $0 < \alpha \leq 1$, podemos definir a potência fracionária $(-A)^\alpha$ como um operador linear fechado, com $(-A)^\alpha : D((-A)^\alpha) \subset X \longrightarrow \mathbb{C}$ e $\overline{D((-A)^\alpha)} = X$. Além disso, a função $||\cdot||_\alpha : D((-A)^\alpha) \longrightarrow \mathbb{R}_+$ dada por

$$||x||_\alpha = |(-A)^\alpha x|,\ \forall\, x \in D((-A)^\alpha),$$

define uma norma em $D((-A)^\alpha)$. Denotamos por $X_\alpha := D((-A)^\alpha)$, para cada $0 < \alpha \leq 1$.

No que segue, mostramos uma série de lemas que nos auxiliarão na demonstração dos dois principais teoremas desse capítulo. Iniciamos com a definição de conjunto convexo e apresentamos os principais resultados sobre esse conceito.

Definição 4.1. *Seja $L = (L, |\cdot|_L)$ um espaço vetorial normado. Um conjunto $K \subset L$ é dito **convexo** se, para quaisquer $a, b \in K$, tem-se*

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb\ ;\ 0 \leq t \leq 1\} = \{at_1 + bt_2\ ;\ t_1 + t_2 = 1\} \subset K.$$

Observação 4.1. *Dados $r > 0$ e $a \in L$, o conjunto*

$$B_r[a,L] = \{x \in L\ ;\ |x-a|_L \leq r\},$$

*que é chamado de **bola fechada** de centro $a \in L$ e raio $r > 0$, é convexo. Veja Exemplo 4.15, de [22].*

Teorema 4.3. *Seja K um conjunto convexo. Se $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$, para algum $n \in \mathbb{N}$, então*

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in K, \ \forall\, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n > 0 \text{ e } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1. \tag{4.2}$$

Demonstração. A prova será por indução. Para $n = 2$ (4.2) está satisfeita, pela Definição 4.1. Agora, suponhamos $n > 2$ e que (4.2) vale para $n = 1$.

Se $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} = 0$, então $\alpha_i = 0$, para $i = 1, \cdots, n$, e $\alpha_n = 1$ o que implica $\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \in K$. Assim, suponhamos que $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{n-1} > 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$. Então,

$$T_\beta = \frac{\alpha_1}{\beta} x_1 + \frac{\alpha_2}{\beta} x_2 + \cdots + \frac{\alpha_{n-1}}{\beta} x_{n-1} \in K,$$

em virtude da hipótese de indução. Consequentemente,

$$\alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = T_\beta \cdot \beta + \alpha_n x_n \in K,$$

pois, por hipótese, K é convexo. E assim segue o resultado. ■

Teorema 4.4. *Sejam $L = (L, |\cdot|_L)$ um espaço vetorial normado e $K \subset L$. Se K é convexo então $\overline{K}$ é convexo.*

Demonstração. Sejam $x, y \in \overline{K}$ e $\epsilon > 0$ quaisquer. Assim, existem $x_1, y_1 \in K$ tais que

$$|x - x_1|_L < \epsilon \quad \text{e} \quad |y - y_1|_L < \epsilon.$$

Escolhemos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que $\alpha + \beta = 1$. Então,

$$|\alpha x + \beta y - (\alpha x_1 + \beta y_1)|_L \leq \alpha |x - x_1|_L + \beta |y - y_1|_L \leq (\alpha + \beta)\epsilon = \epsilon.$$

Mas como, por hipótese, K é convexo, obtemos $\alpha x_1 + \beta x_2 \in K$. Logo, pela arbitrariedade de $\epsilon > 0$, temos que $\alpha x + \beta y \in \overline{K}$. Portanto, $\overline{K}$ é convexo. ■

Teorema 4.5. *A interseção de qualquer número de conjuntos convexos de um espaço vetorial L é um subconjunto convexo de L.*

Demonstração. Seja $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de conjuntos convexos de L. Agora, sejam $x, y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ quaisquer. Logo,

$$\begin{aligned} x, y \in E_\lambda, \ \forall\, \lambda \in \Lambda \quad &\Rightarrow \quad (1 - \alpha)x + \alpha y \in E_\lambda, \ \forall\, \lambda \in \Lambda, \ \alpha \in (0, 1) \\ &\Rightarrow \quad (1 - \alpha)x + \alpha y \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda, \ \forall\, \alpha \in (0, 1). \end{aligned}$$

Portanto, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ é convexo. ■

A seguir, temos a definição de envoltório convexo de um conjunto, assim como, algumas de suas propriedades.

Definição 4.2. *Sejam L um espaço vetorial e $S \subset L$. O* ***envoltório convexo*** *de S é o conjunto*

$$co(S) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda,$$

tal que S_λ é convexo e $S \subset S_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$.

Teorema 4.6. *Seja L um espaço vetorial. Se $S \subset L$, então*

$$co(S) = \left\{ x \in L \; ; \; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \; ; \; x_i \in S, \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Demonstração. Seja

$$K = \left\{ x \in L \; ; \; x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \; ; \; x_i \in S, \; \alpha_i \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \right\}.$$

Notemos que K é um conjunto convexo. Além disso, $S \subset K$, donde $co(S) \subset K$. Contudo, pelo Teorema 4.3, qualquer conjunto convexo contendo S deve conter K e, em particular, $K \subset co(S)$. Portanto, $K = co(S)$. ∎

Definição 4.3. *Sejam $L = (L, |\cdot|_L)$ um espaço vetorial normado e $S \subset L$. O fecho do envoltório convexo S é chamado de* ***envoltório convexo fechado*** *de S. E denotamos, $\overline{cos(S)} = \overline{co}(S)$.*

Teorema 4.7. *Consideremos as condições da Definição 4.3. Seja $E = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$ tal que E_λ é convexo, fechado e $S \subset E_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Então, $\overline{co(S)} = \overline{co}(S) = E$.*

Demonstração. Como $co(S)$ é convexo, $\overline{co(S)}$ é convexo, em virtude do Teorema 4.4 e, claro, é fechado e $S \subset \overline{cos(S)}$, pois $S \subset co(S) \subset \overline{co(S)}$, então $E \subset \overline{co(S)}$. Contudo, como $co(S)$ é a interseção de todos os conjuntos convexos contendo S, enquanto E é interseção de todos os convexos fechados contendo S, temos $co(S) \subset E$, o que implica $\overline{co(S)} \subset \overline{E} = E$. Disso e de $E \subset \overline{co(S)}$, concluímos $\overline{co(S)} = E$. ∎

Lema 4.5. *Sejam $L = (L, |\cdot|_L)$ um espaço vetorial normado, $S \subset L$ e $c > 0$. Se $x \in L$ e $c^{-1}x \in \overline{co}(S)$, então $x \in c \cdot \overline{co}(S)$.*

Demonstração. Temos, por hipótese, que $c^{-1}x \in \overline{co}(S)$. Assim, pela Definição 4.3, temos que $\overline{co}(S)$ é um conjunto fechado, isto é, $\overline{co}(S) = co(S)$. Disso e pelo Teorema 4.6, segue que

$$c^{-1}x = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i, \; x_i \in S, \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1,$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$x = c\sum_{i=1}^{n} x_i\lambda_i \Rightarrow x \in c \cdot \overline{co}(S).$$

■

Lema 4.6. *Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ um espaço espaço de Banach e $[\alpha, \beta] \subset J \subset \mathbb{R}$, com J um intervalo. Se $f : J \longrightarrow X_1$ é integrável, então*

$$(\beta-\alpha)^{-1}\int_{\alpha}^{\beta} f(\tau)\, d\tau \ \in \ \overline{co}\Big(\big\{f(\tau)\ ;\ \tau \in [\alpha, \beta]\big\}\Big).$$

Demonstração. Veja [24], página 25, Lema 1.3. ■

Definição 4.4. *Sejam $M = (M, d)$ um espaço métrico, $N \subset M$ e $\epsilon > 0$. Um subconjunto $R \subset M$ é dito uma **ϵ-rede** de N se, para todo $n \in N$, existe $r \in R$ tal que $d(n, r) < \epsilon$.*

Lema 4.7 (Lema de Mazur)**.** *O envoltório convexo de qualquer subconjunto relativamente compacto de um espaço de Banach é relativamente compacto.*

Demonstração. Sejam X um espaço de Banach e $Y \subset X$ um conjunto relativamente compacto qualquer. Então, dado arbitrariamente $\epsilon > 0$ escolhemos um número finito de elementos de X, digamos $x_1, x_2, \cdots, x_n \in X$ tais que

$$Y \subset \bigcup_{i=1}^{m} B_\epsilon(x_i, X), \text{ para alguns } m, n \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

em que $B_\epsilon(x_i, X)$ denota a bola aberta de centro x_i, para cada $i = 1, \cdots, n$, e raio $\epsilon > 0$ em X. Denotemos

$$co\{x_1, x_2, \cdots, x_n\} := \mathcal{R}.$$

Nosso objetivo é mostrar que $\mathcal{R}$ é uma ϵ-rede de $co(Y)$, para assim usar o *Teorema de Hausdorff*.[7] Para tanto, seja $y \in co(Y)$ qualquer. Pelo Teorema 4.6, tem-se

$$y = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j v_j,\ \lambda_j > 0\ ;\ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1,\ v_j \in Y.$$

[7]**Teorema de Hausdorff** ([29], Teorema 1.1). Sejam $M = (M, d)$ um espaço métrico e $N \subset M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

(i) N é relativamente compacto;

(ii) para todo $\epsilon > 0$, existe em M uma ϵ-rede finita para N;

(iii) para todo $\epsilon > 0$, existe em M uma ϵ-rede relativamente compacta de N.

De acordo com (4.3), para cada $v_j \in Y$, com $j = 1, \cdots, n$, existe $i_j \in \{1, 2, \cdots, m\}$ tal que $v_j \in B_\epsilon(x_{i_j}, X)$. Então,

$$\left| y - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{i_j} \right| = \left| \sum_{j=1}^{n} \lambda_j (v_j - x_{i_j}) \right| \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j |v_j - x_{i_j}| < \overbrace{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j}^{=1} \epsilon = \epsilon,$$

donde, segue que $\mathcal{R}$ é uma ϵ-rede de $co(Y)$. Disso e do Teorema de Hausdorff concluímos que $co(Y)$ é relativamente compacto. ■

Na demonstração do Teorema 4.2 precisamos garantir que a soma de operadores completamente contínuos é ainda completamente contínuo. Tal fato é garantido no seguinte lema.

Lema 4.8. *Sejam X_1 e Y_1 espaços de Banach. Se os operadores $T_1, T_2 : D \subset X_1 \longrightarrow Y_1$ são completamente contínuos, então para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o operador $\alpha T_1 + \beta T_2 : D \longrightarrow Y_1$ é completamente contínuo.*

Demonstração. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (\alpha T_1 + \beta T_2)(K)$, com $K \subset D$ um conjunto limitado qualquer. Assim, existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ tal que

$$y_n = (\alpha T_1 + \beta T_2)(x_n), \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Como K é limitado, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também o é. Dessa forma, escolhemos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tal que $\big((\alpha T_1)(x_{n_k})\big)_{k\in\mathbb{N}}$ converge. E escolhemos $(x_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ tal que $\big((\beta T_2)(x_{n_{k_j}})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ converge. Como toda subsequência, de uma sequência convergente, converge, temos que $\big((\alpha T_1)(x_{n_{k_j}})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ é convergente. Logo, $\big((\alpha T_1 + \beta T_2)(x_{n_{k_j}})\big)_{j\in\mathbb{N}}$ converge e, consequentemente, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma subsequência convergente. Disso, e sendo T_1 e T_2 contínuas, o que implica que $\alpha T_1 + \beta T_2$ é contínua, segue que $\alpha T_1 + \beta T_2$ é completamente contínua, para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. ■

Lema 4.9. *Sejam $A, B \subset X$ e $A + B = \{a + b \in X \;;\; a \in A \text{ e } b \in B\}$. Se B é compacto, então*

$$\overline{A + B} \subset \overline{A} + \overline{B}.$$

Demonstração. Primeiramente observemos que, como, por hipótese, B é compacto então, em particular, B é fechado, isto é, $B = \overline{B}$. Por outro lado, seja $p \in \overline{A + B}$ qualquer, assim existem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B$ tais que

$$y_n := a_n + b_n \longrightarrow p, \text{ quando } n \longrightarrow \infty.$$

Além disso, em virtude da hipótese de B ser compacto, existe uma subsequência $(b_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \subset B$, de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tal que $(b_{n_k}) \longrightarrow b$, quando $k \to \infty$, para algum $b \in B$. Definimos,

$$x_k = b + a_k, \ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}|x_k-p| = \lim_{k\to\infty}|x_k-b_{n_k}+b_{n_k}-p| &= \lim_{k\to\infty}|b+a_{n_k}-b_{n_k}+b_{n_k}-p| \\ &\leq \lim_{k\to\infty}\Big[|b_{n_k}-b|+|\overbrace{a_{n_k}+b_{n_k}}^{=y_{n_k}}-p|\Big]=0,\end{aligned}$$

ou seja, $x_k \longrightarrow p$, quando $k \longrightarrow \infty$. Logo, $a_{n_k} \longrightarrow p-b$, quando $k \longrightarrow \infty$ e, consequentemente, $p-b \in \overline{A}$. Portanto,

$$a_{n_k}+b_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \overbrace{p-b}^{\in\overline{A}} + \overbrace{b}^{\in B} = p \Rightarrow p \in \overline{A}+B,$$

logo $\overline{A+B} \subset \overline{A}+\overline{B}$, já que, $B=\overline{B}$. ■

Lema 4.10. *Sejam* $0<\gamma\leq\eta\leq 1$. *Então valem as seguintes propriedades:*

(i) $X_\eta=(X_\eta,|\cdot|_\eta)$ *é um espaço de Banach e* $X_\eta \hookrightarrow X_\gamma$ *é contínua;*

(ii) *A função* $f_1:\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{C}$ *dada por* $f_1(s)=(-A)^\eta T(s)$, *para todo* $s\in\mathbb{R}_+^*$, *é contínua, na topologia do operador uniforme em* $\mathbb{R}_+^*$, *e existe* $C_\eta>0$ *tal que*

$$||(-A)^\eta T(t)||_\alpha \leq \frac{C_\eta}{t^\eta},\ \forall\, t>0.$$

Demonstração. O item ***(i)*** segue diretamente do fato de X ser espaço de Banach e da Proposição 3.5. Já o item ***(ii)*** segue do Teorema 3.1. ■

Consideremos o problema (4.1). A fim de estabelecermos os principais resultados desse capítulo, no que segue, impomos as seguintes condições:

($\mathbf{H_1}$) A função $f: I\times\mathcal{B}\longrightarrow X$ satisfaz:

(i) para toda função $x:(-\infty,a]\longrightarrow X$, com $a\in\mathbb{R}_+^*$, tal que $x_0\in\mathcal{B}$ e $x_{|_I}\in\mathcal{PC}$, a função $f_2:\mathbb{R}_+\longrightarrow X$ dada por

$$f_2(t)=f(t,x_t),\ \forall\, t\in\mathbb{R}_+$$

é fortemente mensurável[8];

(ii) para cada $t\in I$, a função $f_3:\mathcal{B}\longrightarrow X$ definida por

$$f_3(x_t)=f(t,x_t),\ \forall\, x_t\in\mathcal{B},$$

é contínua;

[8]**Definição.** Sejam (Ω,Σ,μ) um espaço de medida e $f:\Omega\longrightarrow Y$ uma função vetorial, com $Y=(Y,|\cdot|_Y)$ um espaço de Banach. Dizemos que f é **fortemente mensurável** se, existe uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ tais que $|f(\omega)-\varphi_n(\omega)|_Y\longrightarrow 0$, quando $n\longrightarrow\infty$, para todo $\omega\in\Omega$.

(iii) existem $m_f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ e uma função não-decrescente $W_f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ tais que

$$|f(t,\psi)| \leq m_f(t)W_f\Big(||\psi||_{\mathcal{B}}\Big),\ \forall\,(t,\psi) \in I \times \mathcal{B}.$$

$(\mathbf{H_2})$ Existe $\beta \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ tal que, para cada $t \in \mathbb{R}_+$, $g(t,x_t) \in X_\beta$ e

(i) para toda função $x : (-\infty, a] \longrightarrow X$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $x_0 \in \mathcal{B}$ e $x_{|_I} \in \mathcal{PC}$, a função $f_4 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ dada por

$$f_4(t) = (-A)^\beta g(t,x_t),\ \forall\, t \in \mathbb{R}_+,$$

é contínua em I;

(ii) para cada $t \in I$, a função $f_5 : \mathcal{B} \longrightarrow X$ definida por

$$f_5(\psi) = (-A)^\beta g(t,\psi),\ \forall\,\psi \in \mathcal{B},$$

é contínua e existem $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$||(-A)^\beta g(t,\psi)||_\beta \leq c_1||\psi||_\beta + c_2,\ \forall\,\psi \in \mathcal{B}.$$

Durante a demonstração do Teorema 4.2, precisamos garantir que a função

$$\begin{aligned} f_6 \quad : \quad & [0,t) \longrightarrow X \\ & s \longmapsto (-A)T(t-s)g(s,x_s) \end{aligned}$$

é integrável, para todo $t \in I$, no sentido de Bochner, para tanto, necessitamos de algumas definições e de um clássico resultado.

Definição 4.5. *Seja $p : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$. Dizemos que p é* ***fracamente mensurável*** *se, para todo $x^* \in \mathcal{L}(X)$, a aplicação*

$$\begin{aligned} \langle\cdot,\cdot\rangle \quad : \quad & J \longrightarrow \mathbb{R} \\ & t \longmapsto \langle x^*, p(t)\rangle = x^*(p(t)) \end{aligned}$$

é mensurável no sentido de Lebesgue. E, mais $p : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é dita de ***valor separável*** *se o conjunto $p(J)$ é separável. E, por fim, $p : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é dita* ***quase-sempre de valor separável*** *se existe um conjunto $J_0 \subset J$, com medida nula, tal que $p(J - J_0)$ é separável.*

Teorema 4.8 (Teorema de Pettis)**.** *Uma função $p : J \subset \mathbb{R} \longrightarrow X$ é fortemente mensurável se, e somente se, é fracamente mensurável e quase-sempre de valor separável.*

Demonstração. Veja Teorema 11, página 149, de [9]. ∎

A próxima observação é a justificativa do fato de f_6 ser Bochner integrável em I.

Observação 4.2. *Sejam $x : (-\infty, a] \longrightarrow X$, com $a \in \mathbb{R}_+^*$, tal que $x_0 \in \mathcal{B}$ e $x_{|_I} \in \mathcal{PC}$ e $t \in I$. Levando em consideração que $g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$ satistaz $(\mathbf{H_2})$, pela continuidade das funções*

$$\begin{aligned} f_7 \quad : \quad & [0,t) \longrightarrow X \\ & s \longmapsto AT(t-s), \end{aligned}$$

na topologia do operador uniforme em $[0,t)$ e g, temos que

$$x^*\big(f_6(s)\big),\ \forall\, s \in [0,t), x^* \in \mathcal{L}(X),$$

é contínua e, consequentemente, Lebesgue mensurável, e assim f_6 é fracamente mensurável. Por outro lado, como $[0,t)$ é separável, para todo $t \in I$, então $f_6\big([0,t)\big)$ é também separável, ou seja, f_6 é de valor separável e, em partiular, f_6 é quase-sempre de valor separável. Logo, segue do Teorema de Pettis (Teorema 4.8) que a função f_6 é fortemente mensurável. Agora, observando o Lema 4.10 e a desigualdade

$$||(-A)T(t-s)g(s,x_s)|| = ||(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s)|| \leq \frac{C_{1-\beta}C}{(t-s)^{1-\beta}}, \tag{4.4}$$

para algum $C_{1-\beta} \in \mathbb{R}$ e $C \in \mathbb{R}$ tal que $||(-A)^{\beta}g(s,x_s)||_{\beta} \leq C$, para todo $s \in I$, então, pelo Teorema de Bochner[9] a função $f_6 : [0,t) \longrightarrow X$ dada por $(-A)T(t-s)g(s,x_s)$, para todo $s \in [0,t)$, é Bochner integrável, em $[0,t)$, para qualquer $t \in I$.

Agora mais um resultado auxiliar acerca da integral de Bochner.

Lema 4.11. *Sejam (Ω, Σ, μ) um espaço de medida finita, $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ e $X_2 = (X_2, |\cdot|_2)$ espaços de Banach e $f : \Omega \longrightarrow X_1$. Se $T_1 : X_1 \longrightarrow Y_1$ um operador limitado, então a função $Tf : \Omega \longrightarrow X_2$ definida por*

$$Tf(\omega) = T(f(\omega)),\ \forall\, \omega \in \Omega,$$

é também Bochner integrável e

$$\int_{\Omega} Tf\ d\mu = T\left(\int_{\Omega} f\ d\mu\right).$$

Demonstração. Veja [2], página 427, Lema 11.45. ■

[9]**Teorema de Bochner**$\big($[2], Teorema 11.44$\big)$ Sejam $Y = (Y, |\cdot|_Y)$ um espaço de Banach e $h : I_1 \subset \mathbb{R} \longrightarrow Y_1$, com I_1 um intervalo, uma função fortemente mensurável. Então h é Bochner integrável se, e somente se, a função $||h||_Y : I_1 \longrightarrow \mathbb{R}_+$, dada por $||h||_Y(s) = |h(s)|_Y$, para todo $s \in I_1$, é Lebesgue integrável.

Antes de enunciarmos os resultados que garantem existência de solução para (4.1) precisamos, obviamente, de um conceito do que venha a ser uma solução fraca para o problema dado em (4.1). Para tanto, notemos que se as funções f e g satisfazem $(\mathbf{H_1})$ e $(\mathbf{H_2})$, respectivamente, e dada $x : (-\infty, a] \longrightarrow X$ uma solução de (4.1) tal que $x_0 = \varphi$, para alguma $\varphi \in \mathcal{B}$, e $x_{|_I} \in \mathcal{PC}$, então definimos $U : I \longrightarrow X$ por

$$U(s) = T(t-s)x(s) + T(t-s)g(s, x_s), \ \forall\, s \in I,$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{ds} &= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)x'(s) + T(t-s)\frac{d}{ds}g(s,x_s) - AT(t-s)g(s,x_s) \\
&= -AT(t-s)x(s) + T(t-s)\Big(Ax(s) + f(s,x_s)\Big) - AT(t-s)g(s,x_s) \\
&= -AT(t-s)x(s) + AT(t-s)x(s) + T(t-s)f(s,x_s) - AT(t-s)g(s,x_s) \\
&= T(t-s)f(s,x_s) - AT(t-s)g(s,x_s).
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora levando em consideração que $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t_{n+1} = a$, para algum $n \in \mathbb{N}$, e que $t \in I = [0, a]$, temos

$$t_0 = 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < t_{k+1} = t, \text{ para algum } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } k \leq n.$$

Assim,

$$\int_0^t \frac{dU}{ds}\, ds = \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i^+}^{t_{i+1}^-} \frac{dU}{ds}\, ds,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int_0^t \frac{dU}{ds}\, ds &= \int_0^{t_1^-} \frac{dU}{ds}\, ds + \int_{t_1^+}^{t_2^-} \frac{dU}{ds}\, ds + \cdots + \int_{t_{k-1}^+}^{t_k^-} \frac{dU}{ds}\, ds + \int_{t_k^+}^{t_{k+1}^-} \frac{dU}{ds}\, ds \\
&= U(t_1^-) - U(0) + U(t_2^-) - U(t_1^+) + \cdots + U(t_k^-) - U(t_{k+1}^+) + U(t) - U(t_k^+) \\
&= T(t-t_1^-)x(t_1^-) + T(t-t_1^-)g(t_1^-, x_{t_1^-}) - T(t)\overbrace{x(0)}^{\varphi(0)} - T(t)\overbrace{g(0,x_0)}^{g(0,\varphi)} + \\
&\qquad + T(t-t_2^-)x(t_2^-) + T(t-t_2^-)g(t_2^-, x_{t_2^-}) - T(t-t_1^+)x(t_1^+) + \\
&\qquad\quad - T(t-t_1^+)g(t_1^+, x_{t_1^+}) + \cdots + T(t-t_k^-)x(t_k^-) + T(t-t_k^-)g(t_k^-, x_{t_k^-}) + \\
&\qquad\qquad - T(t-t_{k-1}^+)x(t_{k-1}^+) - T(t-t_k^+)g(t_k^+, x_{t_k^+}) \\
&= T(t-t_1^-)x(t_1^-) - T(t-t_1^+)x(t_1^+) + T(t-t_2^-)x(t_2^-) - T(t-t_2^+)x(t_2^+) + \cdots + \\
&\qquad\quad + T(t-t_k^-)x(t_k^-) - T(t-t_k^+)x(t_k^+) + x(t)g(t,x_t) - T(t)\varphi(0) - T(t)g(0,\varphi).
\end{aligned}$$

Mas como,

$$I_i(x(t_i)) = x(t_i^+) - x(t_i^-) = x(t_i^+) - x(t_i), \ \forall\, i \in \{1, \cdots, n\},$$

então

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{dU}{ds}\,ds &= \sum_{\substack{0<t_i<t\\ i=1,\cdots,k}} -T(t-t_i)\big(x(t_i^+)-x(t_i)\big)+x(t)+g(t,x_t)-T(t)\Big(\varphi(0)-g(0,\varphi)\Big)\\ &= -\sum_{\substack{0<t_i<t\\ i=1,\cdots,k}} T(t-t_i)I_i(x(t_i))+x(t)+g(t,x_t)-T(t)\Big(\varphi(0)-g(0,\varphi)\Big),\end{aligned}$$

donde

$$x(t)=\sum_{\substack{0<t_i<t\\ i=1,\cdots,k}} T(t-t_i)I_i(x(t_i)+T(t)\Big(\varphi(0)-g(0,\varphi)\Big)-g(t,x_t)+\int_0^t \frac{dU}{ds}\,ds,$$

disso e de (4.5), segue que

$$\begin{aligned}x(t) &= T(t)\Big(\varphi(0)-g(0,\varphi)\Big)-g(t,x_t)-\int_0^t AT(t-s)g(s,x_s)\,ds+\\ &\quad+\int_0^t T(t-s)f(s,x_s)\,ds+\sum_{\substack{0<t_i<t\\ i=1,\cdots,k}} T(t-t_i)I_i(x(t_i)),\ \forall\, t\in I.\end{aligned}$$

Motivados por isso, adotamos então a seguinte definição de solução fraca de (4.1).

Definição 4.6. *Uma função $x:(-\infty,a]\longrightarrow X$, com $a\in\mathbb{R}_+^*$, é uma* ***solução fraca*** *do problema de valor inicial* (4.1) *se $x_0\in\mathcal{B}$, $x_{|_I}\in\mathcal{PC}$ e*

$$\begin{aligned}x(t) &= T(t)\Big(\varphi(0)-g(0,\varphi)\Big)-g(t,x_t)-\int_0^t AT(t-s)g(s,x_s)\,ds+\\ &\quad+\int_0^t T(t-s)f(s,x_s)\,ds+\sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x(t_i)),\ \forall\, t\in I.\end{aligned}$$

Observação 4.3. *Daqui em diante, a função $y:(-\infty,a]\longrightarrow X$ é definida por*

$$y_0=\varphi \quad e \quad y(t)=T(t)\varphi(0),\ \forall\, t\in I.$$

Notemos que $y_0\in\mathcal{B}$ e $y_{|_{[0,a]}}\in\mathcal{PC}\Big([0,a],X\Big)$. Assim,

$$\begin{aligned}||y_a||_{\mathcal{B}} &\leq K(a-0)\sup\{|y(s)|\ ;\ s\in I\}+\overline{M}(a-0)||y_0||_{\mathcal{B}}\\ &\leq \overbrace{aK}^{=:K_a}|y(s_1)|+\overbrace{\overline{M}a}^{=:M_a}||\varphi||_{\mathcal{B}},\ \textit{para algum}\, s_1\in I\\ &\leq HK_a||T(s_1)||\ ||\varphi||_{\mathcal{B}}+M_a||\varphi||_{\mathcal{B}}\\ &\leq HK_aM||\varphi||_{\mathcal{B}}+M_a||\varphi||_{\mathcal{B}}=\Big(M_a+K_aMH\Big)||\varphi||_{\mathcal{B}}.\end{aligned}$$

Tendo em vista o que já foi desenvolvido nesse capítulo, estamos em condições de estabelecer o primeiro teorema de existência de solução fraca do problema de valor inicial dado em (4.1). Os resultados presentes nesta seção, acerca existência de soluções de (4.1), fazem parte do artigo [16]. No entanto, nós esclarecemos várias passagens, provamos todas as desigualdades e detalhamos os resultados, já que em [16] as afirmações estão feitas de maneiras direta e sem muitas explicações.

Teorema 4.9. *Sejam $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$ satisfazendo $(\mathbf{H_1})$ e $(\mathbf{H_2})$, respectivamente. Se*

(a) *para qualquer $r > 0$ e todo $\epsilon > 0$ existem conjuntos compactos $U^1_{\epsilon,r}, U^2_{\epsilon,r} \subset X$ tais que*

$$T(\epsilon)(-A)^{\beta} g(s,\psi) \in U^1_{\epsilon,r} \quad e \quad T(\epsilon) f(s,\psi) \in U^2_{\epsilon,r},\ \forall\,(s,\psi) \in I \times B_r[0,\mathcal{B}];$$

(b) *definimos $\mathcal{S}(a) = \{x : (-\infty, a] \longrightarrow X\ ;\ x_0 = 0, x_{|_I} \in \mathcal{PC}\}$ munido com a norma da convergência uniforme que denotamos por $||\cdot||_a$, para todo, $r > 0$, o conjunto de funções*

$$\widetilde{W_i} := \{\widetilde{(w_x)}_i\ ;\ x \in \mathcal{S}(a), ||x_{|_I}||_a \in \mathcal{PC}\},$$

em que $w_x(t) = g(t, x_t + y_t)$, para todo $t \in I$, é uniformemente equicontínua[10] *em $[t_i, t_{i+1}]$, para todo $i \in \{0, \cdots, n\}$;*

(c) *para cada $i = 1, \cdots, n$, a função $I_i : \mathcal{B} \longrightarrow X$ é completamente contínua e existem $c^1_i, c^2_i \in \mathbb{R}$ tais que*

$$|I_i(\psi)| \leq c^1_i ||\psi||_{\mathcal{B}} + c^2_i,\ \forall\,\psi \in \mathcal{B};$$

(d) *a constante $\mu \in \mathbb{R}$ dada por*

$$\mu = K_a \left(c_1 ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} + \frac{c_1 a^{\beta} C_{1-\beta}}{\beta} + M \sum_{i=1}^{n} c^1_i \right)$$

é tal que $\mu < 1$. E, além disso,

$$\frac{K_a M}{1-\mu} \int_0^a m_f(s)\, ds < \int_c^{\infty} \frac{ds}{W_f(s)},$$

em que m_f e W_f foram definidas em $(\mathbf{H_1})$, para algum $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} (1-\mu)c \;=\; & \left(M_a + K_a M \left(H + c_1 ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} \right) \right) ||\varphi||_{\mathcal{B}} + \\ & + K_a \left(c_2 (M+1) ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} + \frac{a^{\beta} c_2 C_{1-\beta}}{\beta} + M \sum_{i=1}^{n} c^2_i \right), \end{aligned}$$

com $\beta \in (0,1)$.

Então, existe uma solução fraca para o problema de valor inicial (4.1).

[10] **Definição.** Sejam $M = (M, d_1)$ e $N = (N, d_2)$ espaços métricos. Uma família $\mathcal{E} = \{h : M \longrightarrow N\ ;\ h \text{ é função}\}$ é **uniformemente equicontínua**, em M se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d_1(x,y) < \delta$ implica $d_2(h(x), h(y)) < \epsilon$, para qualquer $h \in \mathcal{E}$.

Demonstração. Primeiramente, definimos $\Gamma : \mathcal{S}(a) \longrightarrow \mathcal{S}(a)$ por

$$\Gamma x(t) = \begin{cases} 0, \quad \text{se} \quad t \leq 0 \\ T(t)g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\ \qquad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum\limits_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}), \quad \text{se} \quad t \in I. \end{cases}$$

Agora, consideremos a função

$$\begin{aligned} f_8 \ : \ & [0,t) \longrightarrow X \\ & s \longmapsto T(t-s)f(s, x_s + y_s). \end{aligned}$$

Notemos que, da hipótese $(\mathbf{H_1})\mathbf{(iii)}$, a função $f_9 : [0,t) \longrightarrow X$ dada por $f_9(s) = |f(s, x_s + y_s)|$, para todo $s \in [0,t)$, é integrável. Disso, de $(\mathbf{H_1})\mathbf{(iii)}$ e do Teorema de Bochner, a função $f_{10} : [0,t) \longrightarrow X$ definida por $f_{10}(s) = f(s, x_s + y_s)$, para qualquer $s \in [0,t)$, é Bochner-Lebesgue integrável. Portanto, segue do Lema 4.11, que a função f_8 é Bochner-Lebesgue integrável em $[0,t)$, para todo $t \in I$. Já a função

$$\begin{aligned} f_{11} \ : \ & [0,t) \longrightarrow X \\ & s \longmapsto AT(t-s)g(s, x_s + y_s) \end{aligned}$$

é (Bochner-Lebesgue) integrável, em virtude da Observação 4.2, em $[0,t)$ para todo $t \in I$.

A seguir, mostramos que Γ está bem definida e que seus valores estão em $\mathcal{S}(a)$.

- Γ está bem definida.

Sejam $x, \tilde{y} \in \mathcal{S}(a)$ tais que $x(t) = \tilde{y}(t)$, para todo $t \in (-\infty, a]$. Se $t \in (-\infty, 0]$ então $\Gamma x(t) = \Gamma \tilde{y}(t) = 0$ e, nesse caso, Γ está bem definida. Agora, se $t \in (0, a]$ então

$$\begin{aligned} \Gamma x(t) \quad &= \quad T(t)g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\ & \qquad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) \\ & \overset{x_t = \tilde{y}_t}{=} \quad T(t)g(0,\varphi) - g(t, \tilde{y}_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, \tilde{y}_s + y_s)\, ds + \\ & \qquad + \int_0^t T(t-s)f(s, \tilde{y}_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(\tilde{y}_{t_i} + y_{t_i}) = \Gamma \tilde{y}(t). \end{aligned}$$

Portanto, em qualquer caso, Γ está bem definida.

- $\Gamma\big(\mathcal{S}(a)\big) \subset \mathcal{S}(a)$

(i) Primeiro, notemos que

$$\Gamma x(t) \in X,\ \forall\, x \in \mathcal{S}(a),\ t \in (-\infty, a],$$

ou seja, $\Gamma x : (-\infty, a] \longrightarrow X$. Agora resta mostrar que $\Gamma_0 = 0$ e $\Gamma_{|_I} \in \mathcal{PC}$.

(ii) Seja $t \in (-\infty, a]$ qualquer. Por definição, a função $\big(\Gamma x\big)_t : (-\infty, 0] \longrightarrow X$ é dada por $\big(\Gamma x\big)_t = \Gamma x(t+\theta)$, para qualquer $\theta \in (-\infty, 0]$. Logo

$$\big(\Gamma x\big)_0 = \Gamma x(0+\theta) = \Gamma x(\theta) = 0,$$

já que, $\theta \in (-\infty, 0]$. Portanto, $\big(\Gamma x\big)_0 = 0$.

(iii) Sejam $i \in \{1, \cdots, n\}$ e $x \in \mathcal{S}(a)$ quaisquer. É fácil ver que

$$\Gamma x(t_i^-) = \lim_{t \to t_i^-} \Gamma x(t) = \Gamma x(t_i).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\Gamma x(t_i^+) = \lim_{t \to t_i^+} \Gamma x(t) \ &= \ \lim_{t \to t_i^+} \Bigg[T(t)g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\qquad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) \Bigg] \\
&= \ T(t_i)g(0,\varphi) - g(t_i, x_{t_i} + y_{t_i}) - \int_0^{t_i} AT(t_i - s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\qquad + \int_0^{t_i} T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{j=1}^{i-1} T(t-t_j)I_j(x_{t_j} + y_{t_j}) + \\
&\qquad + I_i(x_{t_i} + y_{t_i}),
\end{aligned}$$

donde, $\Gamma x(t_i^+)$ existe. Por fim, notemos que $\Gamma x_{|_I}$ é contínua em todo $t \neq t_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Pois, se $t = 0$ então $\Gamma x(t) = 0$. Já se $t \in (0, a]$ e $t \neq t_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$ então $\Gamma x(t)$ é contínua, já que todas as funções que a compõem são contínuas. Portanto, de ***(iii)*** concluímos que $\Gamma x_{|_I} \in \mathcal{PC}$. E, além disso, de ***(i)-(iii)***, segue que $\Gamma x(t) \in \mathcal{S}(a)$, para qualquer $t \in (-\infty, a]$ e $x \in \mathcal{S}(a)$.

A fim de usarmos o Teorema 4.2, consideremos o conjunto

$$\mathbb{S}_1 = \{x \in \mathcal{S}(a)\ ;\ x = \lambda \Gamma x,\ \lambda \in (0,1)\}.$$

Seja $x^\lambda \in \mathbb{S}_1$. Denotando $v^\lambda(t) := \big(M_a + K_a M H\big)||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a||x^\lambda||_a$, temos que

$$||x_t + y_t||_{\mathcal{B}} \leq v^\lambda(t),\ \forall\, t \in I.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
||x_t + y_t||_{\mathcal{B}} \leq ||x_t||_{\mathcal{B}} + ||y_t||_{\mathcal{B}} &\leq Kt|x(s_1)| + \overline{M}t \overbrace{||x_0||_{\mathcal{B}}}^{=0} + Kt|y(s_2)| + \overline{M}t\ ||y_0||_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_a\ ||x^\lambda||_a + K_a|T(s_2)|\ |\varphi(0)| + M_a||\varphi||_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_a||x^\lambda||_a + K_aMH\ ||y_0||_{\mathcal{B}} + M_a||\varphi||_{\mathcal{B}} \\
&= K_a||x^\lambda||_a + K_aMH\ ||\varphi||_{\mathcal{B}} + M_a||\varphi||_{\mathcal{B}} \\
&= K_a||x^\lambda||_a + \big(K_aHM + M_a\big)\ ||\varphi||_{\mathcal{B}} = v^\lambda(t),\ \forall\, t \in I,
\end{aligned}$$

em que $s_1, s_2 \in I$ são tais que $|x(s_1)| = \sup\{|x(s)|\ ;\ s \in I\}$ e $|y(s_1)| = \sup\{|y(s)|\ ;\ s \in I\}$. Além disso,

$$\begin{aligned}
|x^\lambda(t)| &= ||\lambda\Gamma x(t)||_a = \lambda||\Gamma x(t)||_a \\
&< ||\Gamma x(t)||_a \\
&\leq \left|\left|T(t)g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\ ds\right|\right| + \\
&\quad + \left|\left|\int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\ ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i})\right|\right| \\
&\leq ||T(t)||\ |g(0,\varphi)| + |g(t, x_t + y_t| + \left|\int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\ ds\right| + \\
&\quad + \left|\int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\ ds\right| + \sum_{0<t_i<t} ||T(t-t_i)||\ |I_i(x_{t_i} + y_{t_i})| \\
&\leq M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{-\beta}(-A)^{\beta}g(t, x_t + y_t)|| + \int_0^t |AT(t-s)g(s, x_s + y_s)|\ ds + \\
&\quad + \int_0^t ||T(t-s)||\ |f(s, x_s + y_s)|\ ds + \sum_{0<t_i<t} ||T(t-t_i)||\ |I_i(x_{t_i} + y_{t_i})| \\
&\leq M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{-\beta}||_\beta(c_1||x_t + y_t||_{\mathcal{B}} + c_2) + \int_0^t \frac{C_{1-\beta}C_s}{(t-s)^{1-\beta}}\ ds + \\
&\quad + \int_0^t M|f(s, x_s + y_s)|\ ds + \sum_{0<t_i<t} M(c_i^1||x_t + y_t||_{\mathcal{B}} + c_i^2) \\
&\leq M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{-\beta}||_\beta(c_1 v^\lambda(t) + c_2) + \int_0^t \frac{C_{1-\beta}C_s}{(t-s)^{1-\beta}}\ ds + \\
&\quad + M\int_0^t m_f(s)W_f(||x_s + y_s||_{\mathcal{B}})\ ds + M\sum_{0<t_i<t} c_i^1 v^\lambda(t) + c_i^2 \\
&\leq M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{-\beta}||_\beta(c_1 v^\lambda(t) + c_2) + \int_0^t \frac{C_{1-\beta}C_s}{(t-s)^{1-\beta}}\ ds + \\
&\quad + M\int_0^t m_f(s)W_f(v^{\lambda(s)})\ ds + M\sum_{0<t_i<t} c_i^1 v^\lambda(t) + c_i^2 \\
&= M|g(0,\varphi)| + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta\left(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M\sum_{0<t_i<t} c_i^1\right)v^\lambda(t) + \overbrace{\int_0^t \frac{C_{1-\beta}C_s}{(t-s)^{1-\beta}}\ ds}^{:=I_4} +
\end{aligned}$$

$$+M\int_0^t m_f(s)W_f(v^{\lambda(s)})\,ds + M\sum_{0<t_i<t} c_i^2,$$

em que,

$$\begin{aligned} I_4 := \int_0^t \frac{C_{1-\beta}C_s}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds &= \int_0^t \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}||(-A)^\beta g(s,x_s+y_s)||_\beta\,ds \\ &\leq \int_0^t \frac{C_{1-\beta}(c_1||x_s+y_s||_{\mathcal{B}}+c_2)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds \\ &= \int_0^t \frac{C_{1-\beta}c_1||x_s+y_s||_{\mathcal{B}}+C_{1-\beta}c_2}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds \\ &= C_{1-\beta}c_1\int_0^t \frac{||x_s+y_s||_{\mathcal{B}}}{(t-s)^{1-\beta}} + C_{1-\beta}c_2\int_0^t \frac{1}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds \\ &\leq C_{1-\beta}c_1\int_0^t \frac{v^\lambda(t)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + C_{1-\beta}c_2\frac{(t-s)^\beta}{\beta}\Bigg|_0^t \\ &= C_{1-\beta}c_1\int_0^t \frac{v^\lambda(t)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + C_{1-\beta}c_2\frac{t^\beta}{\beta}, \quad t\in(0,a] \\ &\leq C_{1-\beta}c_1\int_0^t \frac{v^\lambda(t)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + \frac{C_{1-\beta}c_2a^\beta}{\beta}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} |x^\lambda(t)| &\leq M|g(0,\varphi)| + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta\left(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M\sum_{0<t_i<t}c_i^1\right)v^\lambda(t) + \\ &\quad +C_{1-\beta}c_1\int_0^t \frac{v^\lambda(t)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + \frac{C_{1-\beta}c_2a^\beta}{\beta} + \\ &\quad +M\int_0^t m_f(s)W_f(v^{\lambda(s)})\,ds + M\sum_{0<t_i<t}c_i^2 \end{aligned}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} v^\lambda(t) &= (M_a+K_aMH)||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a||x^\lambda||_a \\ &\leq (M_a+K_aMH)||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a\Bigg[M|g(0,\varphi)| + \\ &\quad +c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta\left(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M\sum_{0<t_i<t}c_i^1\right)v^\lambda(t) + C_{1-\beta}c_1\int_0^t\frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + \\ &\quad +\frac{C_{1-\beta}c_2a^\beta}{\beta} + M\int_0^t m_f(s)W_f(v^{\lambda(s)})\,ds + M\sum_{0<t_i<t}c_i^2\Bigg] \\ &\leq (M_a+K_aMH)||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a\Bigg[M(c_1||\varphi||_{\mathcal{B}}+c_2)||(-A)^{-\beta}||_\beta + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta + \\ &\quad +\left(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M\sum_{0<t_i<t}c_i^1\right)v^\lambda(t) + c_1C_{1-\beta}\int_0^t\frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds + \\ &\quad +\frac{c_2a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M\int_0^t m_f(s)W_f(v^{\lambda(s)})\,ds + M\sum_{0<t_i<t}c_i^2\Bigg] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (M_a + K_a MH)||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a \Bigg[Mc_1||(-A)^{-\beta}||_\beta ||\varphi||_{\mathcal{B}} + +c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta M + \\
&\quad +c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta + c_1 C_{1-\beta} \int_0^t \frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds + \Bigg(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M \sum_{0<t_i<t} c_i^1 \Bigg) v^{\lambda(t)} + \\
&\quad + \frac{c_2 a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda(s)})\, ds + M \sum_{0<t_i<t} c_i^2 \Bigg] \\
&= ||\varphi||_{\mathcal{B}} (M_a + K_a MH + K_a Mc_1 ||(-A)^{-\beta}||_\beta) + K_a \Bigg[c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta M + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta + \\
&\quad + \Bigg(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M \sum_{0<t_i<t} c_i^1 \Bigg) v^{\lambda(t)} + c_1 C_{1-\beta} \int_0^t \frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds + \\
&\quad + \frac{c_2 a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda(s)})\, ds + M \sum_{0<t_i<t} c_i^2 \Bigg] \\
&= ||\varphi||_{\mathcal{B}} (M_a + K_a M(H + c_1 ||(-A)^{-\beta}||_\beta) + K_a \Bigg(c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta M + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta + \\
&\quad + \frac{c_2 a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M \sum_{0<t_i<t} c_i^2 \Bigg) + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^\lambda(s))\, ds + \\
&\quad + K_a \Bigg[\Bigg(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M \sum_{0<t_i<t} c_i^1 \Bigg) v^{\lambda(t)} + c_1 C_{1-\beta} \int_0^t \frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds \Bigg],
\end{aligned}
$$

contudo,

$$
\begin{aligned}
c_1 C_{1-\beta} \int_0^t \frac{v^\lambda(s)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds &\leq c_1 C_{1-\beta} \int_0^t \frac{v^\lambda(t)}{(t-s)^{1-\beta}}\, ds \\
&= c_1 C_{1-\beta} v^\lambda(t) \left. \overbrace{\frac{(t-s)^\beta}{\beta}}^{=\frac{t^\beta}{\beta} \leq \frac{a^\beta}{\beta}} \right|_0^t \\
&= \frac{c_1 C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} v^\lambda(t).
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
v^\lambda(t) &\leq ||\varphi||_{\mathcal{B}} (M_a + K_a M(H + c_1 ||(-A)^{-\beta}||_\beta) + K_a \Bigg(c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta M + c_2||(-A)^{-\beta}||_\beta + \\
&\quad + \frac{c_2 a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M \sum_{0<t_i<t} c_i^2 \Bigg) + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^\lambda(s))\, ds + \\
&\quad + K_a \Bigg[\Bigg(||(-A)^{-\beta}||_\beta c_1 + M \sum_{0<t_i<t} c_i^1 \Bigg) v^\lambda(t) + \frac{c_1 C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} v^\lambda(t) \Bigg] \\
&= ||\varphi||_{\mathcal{B}} \Big(M_a + K_a M(H + c_1 ||(-A)^{-\beta}||_\beta) \Big) + K_a \Bigg(c_2 (M+1) ||(-A)^{-\beta}||_\beta + \\
&\quad + \frac{c_2 a^\beta C_{1-\beta}}{\beta} + M \sum_{0<t_i<t} c_i^2 \Bigg) + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^\lambda(s))\, ds + v^\lambda(t)\mu,
\end{aligned}
$$

isto é,

$$
v^\lambda(t) \leq (1-\mu)c + \mu v^\lambda(t) + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^\lambda(s))\, ds, \; \forall\, t \in I.
$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}
& v^{\lambda}(t) - \mu v^{\lambda}(t) \leq (1-\mu)c + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda}(s))\, ds \\
\Rightarrow\ & (1-\mu) v^{\lambda}(t) \leq (1-\mu)c + K_a M \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda}(s))\, ds,\ \mu \in (0,1) \\
\Rightarrow\ & v^{\lambda}(t) \leq c + \frac{MK_a}{(1-\mu)} \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda}(s))\, ds.
\end{aligned}$$

Denotando

$$\beta_\lambda(t) := c + \frac{MK_a}{(1-\mu)} \int_0^t m_f(s) W_f(v^{\lambda}(s))\, ds,$$

temos

$$\beta_\lambda^{'}(t) = \frac{MK_a}{(1-\mu)} m_f(t) W_f(v^{\lambda}(t)),$$

disso, como

$$v^{\lambda}(t) \leq \beta_\lambda(t),\ \forall\, t \in I$$

e da hipótese $(\mathbf{H_1})$, em que a função $W_f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ é não decrescente, segue que

$$\beta_\lambda^{'}(t) = \frac{MK_a}{(1-\mu)} m_f(t) W_f(v^{\lambda}(t)) \leq \frac{MK_a}{(1-\mu)} m_f(t) W_f(\beta_\lambda(t)).$$

Assim, sendo $W_f \neq 0$, em todo $\mathbb{R}_+$, obtemos

$$\frac{\beta_\lambda^{'}(t)}{W_f(\beta_\lambda(t))} \leq \frac{K_a M}{1-\mu} m_f(t),\ \forall\, t \in I,$$

integrando de 0 a $t \in (0, a]$, temos que

$$\int_0^t \frac{\beta_\lambda^{'}(t)}{W_f(\beta_\lambda(t))} \leq \int_0^t \frac{K_a M}{1-\mu} m_f(s)\, ds,\ \forall\, t \in I$$

e fazendo a substituição $s = \beta_\lambda(t)$ na integral da esquerda, vem

$$\int_{\underbrace{\beta_\lambda(0)}_{=c}}^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W_f(s)} = \int_c^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W_f(s)} \leq \frac{K_a M}{1-\mu} \int_0^t m_f(s)\, ds,$$

disso e da hipótese ***(d)***, concluímos que

$$\int_c^{\beta_\lambda(t)} \frac{ds}{W_f(s)} \leq \int_c^{\infty} \frac{ds}{W_f(s)},$$

donde $\beta_\lambda(t) < \infty$, para todo $\lambda \in (0,1)$ e $t \in [0, a]$ e, consequentemente,

$$\{\beta_\lambda : [0,a] \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ \lambda \in (0,1)\}$$

é uniformemente limitado em I. Desse fato e tendo em vista que

$$||x^{\lambda}||_a \leq \big(M_a + K_a M H\big) ||\varphi||_{\mathcal{B}} + K_a ||x^{\lambda}||_a = v^{\lambda}(t) \leq \beta_\lambda(t),$$

para todo $t \in I$, segue que o conjunto $\mathbb{S}_1$ é uniformemente limitado, ou seja, existe $d \in \mathbb{R}$ tal que

$$|x^\lambda(t)| \leq d, \; \forall\, t \in I, \; \lambda \in (0,1),$$

assim, dados quaisquer $\mu, \lambda \in (0,1)$ e $t \in I$, temos

$$|x^\lambda(t) - x^\mu(t)| \leq |x^\lambda(t)| + |x^\mu(t)| \leq 2d,$$

ou seja, o conjunto $\mathbb{S}_1$ é limitado.

Agora vamos provar que a função $\Gamma : \mathcal{S}(a) \longrightarrow \mathcal{S}(a)$ é completamente contínua. Para tanto, primeiramente lembremos que do item ***(ii)*** do Teorema 1.4, em que tem-se,

$$A \int_0^t T(s)x\, ds = T(t)x - x, \; \forall\, x \in X, t \in (0,a]. \tag{4.6}$$

Assim, podemos reescrever Γ da forma $\Gamma = \sum_{j=1}^{4} \Gamma_j$, em que

$$\Gamma_j x(t) = 0, \; \forall\, t \in (-\infty, 0], j = 1,2,3,4$$

e definindo, para cada $j = 1,2,3,4$ e $t \in I$,

$$\Gamma_1 x(t) = T(t)(g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t)) = T(t)(g(0,\varphi) - T(t)g(t, x_t + y_t),$$

$$\Gamma_2 x(t) = -\int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds,$$

$$\Gamma_3 x(t) = \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_t + y_t)\, ds$$

$$\text{e} \quad \Gamma_4 x(t) = \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i})$$

temos,

$$\Gamma x(t) = \sum_{j=1}^{4} \Gamma_j x(t), \; \forall\, x \in \mathcal{S}(a).$$

É claro que, para cada $j = 1, \cdots, 4$, a função Γ_j é contínua. Nesses termos, resta provar que a função Γ é compacta, para isso é suficiente mostrarmos que Γ_j é compacta, ou seja, que o conjunto $\Gamma_j\big(B_r[0, \mathcal{S}(a)]\big)$, para algum $r > 0$ e para cada $j = 1, \cdots, 4$, é relativamente compacto, em $\mathcal{S}(a)$. E assim, com uma simples aplicação do Lema 4.8, podemos concluir que $\Gamma = \sum_{j=1}^{4} \Gamma_j$ é completamente contínua. Mas, antes de começarmos a demonstrar tais fatos, observemos que, para quaisquer $x \in B_r := B_r[0, \mathcal{S}(a)]$ e $t \in I$,

$$\begin{aligned} ||x_t + y_t||_{\mathcal{B}} &\leq ||x_t||_{\mathcal{B}} + ||y_t||_{\mathcal{B}} \\ &\leq Kt \sup\{|x(s)| \; ; \; s \in [0,t]\} + \overline{M}t \overbrace{||x_0||_{\mathcal{B}}}^{=0} + ||y_t||_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Ka|x(s_1)| + ||y_t||_{\mathcal{B}} \\
&\leq Kar + Kt|y(s_2)| + \overline{M}t||\varphi||_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_a r + K_a|y(s_2)| + M_a||\varphi||_{\mathcal{B}} \\
&\leq K_a r + (M_a + K_a MH)\,||\varphi||_{\mathcal{B}} =: r^*, \qquad (4.7)
\end{aligned}$$

em que $s_1, s_2 \in I$ são tais que $|x(s_1)| = \sup\{|x(s)| \; ; \; s \in [0,t]\}$ e $|y(s_1)| = \sup\{|y(s)| \; ; \; s \in [0,t]\}$ e a última desigualdade ocorre em virtude da demonstração da Observação 4.3.

A demonstração que Γ_j, para cada $j = 1, \cdots, 4$, é compacto será dividido em passos. Cada passo consiste em provar que, para cada $j = 1, 2, 3, 4$, $\Gamma_j\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$. Para tanto, no **Passo 1** usamos o Lema 4.1, já nos **Passo 2** e **Passo 3** a essência para mostrar que $\Gamma_2\big(B_r\big)$ e $\Gamma_3\big(B_r\big)$ são relativamente compactos em $\mathcal{S}(a)$ é utilizar o Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1). E por fim, a fim de mostrarmos que $\Gamma_4\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$, combinamos o Lema 4.1 com o Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema de 4.1).

Passo 1. O conjunto $\Gamma_1\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Primeiramente provaremos que o conjunto

$$\widetilde{V}_i := \big(\widetilde{\Gamma_1\big(B_r\big)}\big)_i = \{\tilde{v}_i \; ; \; v \in V := \Gamma_1\big(B_r\big)\}$$

é um conjunto equicontínuo em $[t_i, t_{i+1}]$, para todo $i \in \{0, \cdots, n\}$. Para isso, notemos que, dado qualquer $x \in B_r$, da hipótese ***(b)***, temos que

$$\forall\, \epsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \; ; \; |t - \bar{s}|_{\mathbb{R}} < \delta \Rightarrow ||\widetilde{(u_x)}_i - \widetilde{(v_x)}_i||_a < \epsilon, \; t, \bar{s} \in [t_i, t_{i+1}], \qquad (4.8)$$

em que

$$u_x(t) = g(t, x_t + y_t), \quad v_x(\bar{s}) = g(\bar{s}, x_{\bar{s}} + y_{\bar{s}}) \; \in \widetilde{W}_i$$

são quaisquer. Sejam $\tilde{v}_i, \tilde{u}_i \in \widetilde{V}_i$ arbitrários, se $t \in (t_i, t_{i+1}]$ então

$$\begin{aligned}
&\tilde{v}_i = v, \quad \tilde{u}_i = u, \in B_r \\
\Rightarrow \quad & v = \Gamma_1 x(t) \quad \text{e} \quad u = \Gamma_1 \bar{y}(\bar{s}), \quad \text{para alguns } x_{|_I}, \bar{y}_{|_I} \in B_r
\end{aligned}$$

e mais,

$$\begin{aligned}
||\tilde{v}_i(t) - \tilde{u}_i(\bar{s})||_a &= ||u - v||_a = ||\Gamma_1 x(t) - \Gamma_1 \bar{y}(\bar{s})||_a \\
&= |T(t)(g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t)) - T(\bar{s})(g(0,\varphi) - g(\bar{s}, x_{\bar{s}} + y_{\bar{s}})| \\
&\leq M|g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t))| + M|g(0,\varphi) - g(\bar{s}, x_{\bar{s}} + y_{\bar{s}})| \\
&\leq M\epsilon + M\epsilon = 2M\epsilon, \; t, \bar{s} \in (t_i, t_{i+1}] \; ; \; |t - s|_{\mathbb{R}} < \delta, \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

isto é, $\widetilde{V}_i$ é equicontínuo, para cada $i = 1, \cdots, n$, em $(t_i, t_{i+1}]$. Agora se $t = t_i$, para cada $i = 1, \cdots, n$, então

$$\tilde{v}_i(t) = \tilde{v}_i(t_i^+) \quad \text{e} \quad \tilde{v}_j(t) = \tilde{v}_j(t_i^+), \; \forall\, i, j \in \{0, \cdots, n\}$$

com $u, v \in V$. Pela definição de $\mathcal{S}(a) \subset \mathcal{PC}$ ambos os limites acima existem e, obviamente, estão em V. Logo, usando argumentos análogos aos que foram usados para chegarmos em (4.9), tem-se que $\widetilde{V}_i$ é equicontínuo em $t = t_i$, para todo $i \in \{0, \cdots, n\}$. Portanto, $\widetilde{V}_i$ é equicontínuo em $[t_i, t_{i+1}]$.

Por outro lado, dado qualquer $\tilde{v}_i(t) \in \widetilde{V}_i(t)$, com $i = 0, \cdots, n$ e $t \in [t_i, t_{i+1}]$, temos, pela continuidade das funções que compõem Γ_1, que

$$\tilde{v}_i(t) = \Gamma_1 x(t), \; t \in [t_i, t_{i+1}],$$

para algum $x \in B_r$. Assim, se $0 < \epsilon < t$ e $0 < \beta < 1$, então

$$\begin{aligned} \tilde{v}_i(t) = \Gamma_1 x(t) &= T(t)((g(0, \varphi) - g(t, x_t + y_t)) = T(t)g(0, \varphi) - T(t)g(t, x_t + y_t) \\ &= T(t)g(0, \varphi) - T(t)T(\epsilon - \epsilon)g(0, \varphi)(-A)^{\beta}(-A)^{-\beta}g(t, x_t + y_t) \\ &= T(t)g(0, \varphi) - T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}\, T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(t, x_t + y_t). \end{aligned}$$

Observemos que

$$T(t)g(0, \varphi) \in \{T(s)g(0, \varphi) \; ; \; s \in [t_i, t_{i+1}]\}. \tag{4.10}$$

e, pela hipótese ***(a)***,

$$T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(t, x_t + y_t) \in U^1_{\epsilon, r^*},$$

já que por (4.7), $x_t + y_t \in B_{r^*}[0, \mathcal{B}]$. Logo,

$$T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}\, T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(t, x_t + y_t) \in T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}\Big(U^1_{\epsilon, r^*}\Big). \tag{4.11}$$

De (4.10) e (4.11) segue que

$$\widetilde{V}_i(t) \subset \{T(s)g(0, \varphi) \; ; \; s \in [t_i, t_{i+1}]\} + T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}\Big(U^1_{\epsilon, r^*}\Big)$$

para qualquer $t \in [t_i, t_{i+1}]$.

Agora, por conveniência, denotemos

$$A_1 = \{T(s)g(0, \varphi) \; ; \; s \in [t_i, t_{i+1}]\} \quad \text{e} \quad B_1 = T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}\Big(U^1_{\epsilon, r^*}\Big).$$

Notemos que, em virtude da continuidade da função $f_{12} : I \longrightarrow X$ dada por

$$f_{12}(t) = T(t - \epsilon)(-A)^{-\beta}, \; \forall\, t \in I$$

e da compacidade do conjunto U^1_{ϵ,r^*} (em razão da hipótese ***(a)***), segue que o conjunto B_1 é compacto. Disso e do Lema 4.9, obtemos

$$\widetilde{V}_i(t) \subset \overline{\big(\widetilde{V}_i(t)\big)} \subset \overline{A_1 + B_1} \subset \overline{A_1} + \overline{B_1}. \tag{4.12}$$

Como B_1 é compacto, então, em particular ele é fechado, ou seja, $B_1 = \overline{B_1}$. Agora seja $\epsilon > 0$, pela Observação 3.1 e sendo $\{T(s)\ ;\ s \in \mathbb{R}_+\}$ um C_0 semigrupo, existe $\delta > 0$ tal que se $h_1 < \frac{3\delta}{2}$ então

$$|T(h_1)g(0,\varphi) - Ig(0,\varphi)| < \frac{\epsilon}{2M}.$$

Seja $P = \{\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$ uma partição de I, para algum $m \in \mathbb{N}$, tal que

$$|P| = \max_{j \in I_m} |\alpha_j - \alpha_{j-1}|_{\mathbb{R}} < \delta, \text{ com } I_m = \{0, \cdots, m\}$$

e escolhemos

$$s_j = \alpha_{j-1} + \frac{\delta}{2},\ \forall\, i \in I_m.$$

Se $x \in A_1$, então $x = T(s)g(0,\varphi)$, para algum $s \in [t_i, t_{i+1}]$. Seja $j \in I_m$ tal que $s \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Assim, se $s \leq s_j$ temos $0 \leq s_j - s =: h < \frac{3\delta}{2}$ e

$$\begin{aligned} |T(s_j)g(0,\varphi) - T(s)g(0,\varphi)| &= |T(s)T(s_j - s)g(0,\varphi) - T(s)g(0,\varphi)| \\ &= ||T(s)||\ |(T(h) - I)g(0,\varphi)| \leq M\frac{\epsilon}{2M} = \frac{\epsilon}{2}, \end{aligned}$$

logo

$$x = T(s)g(0,\varphi) \in B_{\frac{\epsilon}{2}}[T(s_j)g(0,\varphi), X] \Rightarrow A_1 \subset \bigcup_{j=0}^{m} B_{\frac{\epsilon}{2}}[T(s_j)g(0,\varphi), X]$$

donde

$$\overline{A_1} \subset \bigcup_{j=0}^{m} \overline{B_{\frac{\epsilon}{2}}[T(s_j)g(0,\varphi), X]} \subset \bigcup_{j=0}^{m} B_{\epsilon}[T(s_j)g(0,\varphi), X]$$

e, consequentemente, $\overline{A_1}$ é totalmente limitado. Nesses termos, podemos concluir que $\overline{A_1} + \overline{B_1} \subset X$ é totalmente limitado, já que em virtude da compacidade de $B_1 = \overline{B_1}$, temos que $B_1 = \overline{B_1}$ é também totalmente limitado. Assim, sendo X completo, segue do Lema 4.2 que $\overline{A_1} + \overline{B_1}$ é relativamente compacto. Disso, de (4.12) e, novamente, pelo Lema 4.2 temos, portanto, que $\widetilde{V}_i(t)$ é relativamente compacto, em todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Assim, podemos concluir que, $\widetilde{V}_i$ é equicontínuo em $[t_i, t_{i+1}]$, para cada $i = 0, \cdots, n$ e que $\widetilde{V}_i(t)$ é relativamente compacto, para qualquer $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Portanto, do Lema 4.1, $V = \Gamma_1\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Passo 2. O conjunto $\Gamma_2(B_r)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Vamos começar mostrando que o conjunto $\Gamma_2(B_r)(t)$ é relativamente compacto, para todo $t \in I$. Para $t = 0$, o **Passo 2** é trivial. Agora se $t > 0$, consideremos

$$0 < 2\epsilon < t \leq a \quad \text{e} \quad U^1_{\epsilon,r^*} \subset X,$$

em que $\epsilon > 0$. Em virtude da função

$$\begin{aligned} f_{13} : [\epsilon, a] &\longrightarrow X \\ t &\longmapsto (-A)^\beta T(t) \end{aligned}$$

ser contínua em $[\epsilon, a]$, temos que

$$U^1_\epsilon = \{(-A)^\beta T(s)x \ ; \ s \in [\epsilon, a], x \in U^1_{\epsilon,r^*}\}$$

é relativamente compacto, em X. De fato, notemos que

$$U^1_\epsilon = (-A)^{1-\beta} T(s)\Big(U^1_{\epsilon,r^*}\Big), \ \forall\, s \in [\epsilon, a],$$

com U^1_{ϵ,r^*} compacto. Assim, pela continuidade de f_{13}, temos que U^1_ϵ é um conjunto compacto, ou seja, pelo Lema 4.3 , U^1_ϵ é, em particular, totalmente limitado, pelo Lema 4.2, segue que o conjunto U^1_ϵ é relativamente compacto.

Por outro lado, da definição de Γ_2 e sendo $2\epsilon \in (0, t) \subset I$, temos, para qualquer $x \in B_r$,

$$\begin{aligned} \Gamma_2 x(t) &= -\int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds = \int_0^t (-A)T(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\ &= \int_0^{t-2\epsilon} (-A)T(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \int_{t-2\epsilon}^t (-A)T(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\ &= \int_0^t (-A)^{1-\beta} T(t-s-\epsilon)T(\epsilon)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\ &\qquad + \int_{t-2\epsilon}^t (-A)^{1-\beta} T(t-s)(-A)^\beta g(s, x_s + y_s)\, ds. \end{aligned}$$

Contudo,

$$\begin{aligned} &(\mathbf{d_1}) \quad \epsilon + \epsilon = 2\epsilon < t \Rightarrow \epsilon < t - \epsilon \\ &(\mathbf{d_2}) \quad s \geq \epsilon \Rightarrow t - s - \epsilon \leq t - \epsilon - \epsilon = t - 2\epsilon \\ &(\mathbf{d_3}) \quad 2\epsilon < t \leq a \Rightarrow t - 2\epsilon \leq a - 2\epsilon < a \end{aligned}$$

o que implica

$$\epsilon < \epsilon - s \overset{(\mathbf{d_1})}{<} t - \epsilon - s = t - s - \epsilon \overset{(\mathbf{d_2})}{\leq} t - 2\epsilon \overset{(\mathbf{d_3})}{\leq} a - 2\epsilon < a \Rightarrow t - s - \epsilon \in (\epsilon, a).$$

Ainda, pela hipótese ***(a)***, temos que

$$T(\epsilon)(-A)^\beta g(s, x_s + y_s) \in U^1_{\epsilon,r^*},$$

já que de (4.7), $x_s + y_s \in B_{r^*}[0, \mathcal{B}]$, com $s \in [\epsilon, a]$. Assim, pelo Lema 4.6, obtemos

$$(t-2\epsilon)^{-1}\int_0^{t-2\epsilon}(-A)^{1-\beta}T(t-s-\epsilon)T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds \in \overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)$$

donde, pelo Lema 4.5, obtemos

$$\int_0^{t-2\epsilon}(-A)^{1-\beta}T(t-s-\epsilon)T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds \in (t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big). \tag{4.13}$$

Além disso, observemos que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{t-2\epsilon}^{t}(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds\right| \\
\leq\ & \int_{t-2\epsilon}^{t}||(-A)^{1-\beta}T(t-s)||_\beta\,||(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)||_\beta\,ds \\
\overset{\mathbf{H_2(ii)}}{\leq}\ & \int_{t-2\epsilon}^{t}||(-A)^{1-\beta}T(t-s)||_\beta\big(c_1||x_s+y_s||_\beta+c_2\big) \\
\overset{(4.7)}{\leq}\ & \int_{t-2\epsilon}^{t}||(-A)^{1-\beta}T(t-s)||_\beta c_1r^* + c_2||(-A)^{1-\beta}T(t-s)||_\beta\,ds \\
=\ & c_1r^*+c_2\int_{t-2\epsilon}^{t}||(-A)^{1-\beta}T(t-s)||_\beta\,ds,
\end{aligned}$$

disso e de uma decorrência de (4.4), obtemos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{t-2\epsilon}^{t}(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds\right| &\leq c_1r^*+c_2\int_{t-2\epsilon}^{t}\frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds \\
&= c_1r^*+c_2\left(C_{1-\beta}\frac{(t-s)^{\beta}}{\beta}\right)\Bigg|_{t-2\epsilon}^{t} \\
&= 2^{\beta}C_{1-\beta}\big(c_1r^*+c_2\big)\frac{\epsilon^{\beta}}{\beta} =: r'.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{t-2\epsilon}^{t}(-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds \in B_{r'}[0,X]. \tag{4.14}$$

Assim, de (4.13) e (4.14), concluímos que

$$\Gamma_2x(t) \in (t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)+B_{r'}[0,X],\ \forall\, x\in B_r, t\in I.$$

e, consequentemente,

$$\Gamma_2\big(B_r\big)(t) = \{\Gamma_2x(t)\ ;\ x\in B_r, t\in T\} \subset (t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)+B_{r'}[0,X].$$

Agora, como U_ϵ^1 é relativamente compacto, pelo Lema 4.7, $co\big(U_\epsilon^1\big)$ é relativamente compacto, ou seja, $\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)$ é compacto. Assim, pelo Lema 4.3, $\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)$ é, em particular, totalmente limitado. Além disso, como $r' > 0$ e depende de $\epsilon > 0$, que é arbitrário, escolhendo a bola $B_{r'}[0,X]$ cobertura da própria $B_{r'}[0,X]$, temos que $B_{r'}[0,X]$ é totalmente limitada. Logo, o conjunto

$$(t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big)+B_{r'}[0,X]$$

é totalmente limitado e, consequentemente, pelo Lema 4.2 também é relativamente compacto. Portanto, $\Gamma_2\big(B_r\big)(t)$ é relativamente compacto.

Agora vamos provar que $\Gamma_2\big(B_r\big)$ é equicontínuo. Para tanto, seja $0 \leq t_0 \leq t \leq a$, assim

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 x(t) - \Gamma_2 x(t_0) &= -\int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= -\int_0^{t_0} AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\qquad + \int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} -AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds - \int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\qquad - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} \Big[AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s) - AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds\Big] + \\
&\qquad - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} \Big[AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s) - AT(t - s + t_0 - t_0)g(s, x_s + y_s)\, ds\Big] + \\
&\qquad - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} \Big[AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s) - T(t - t_0)AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds\Big] + \\
&\qquad - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds - T(t - t_0)\int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\qquad - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \Gamma_2 x(t_0) - T(t - t_0)\Gamma_2 x(t_0) - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= (I - T(t - t_0))\Gamma_2 x(t_0) - \int_{t_0}^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds.
\end{aligned}
$$

Por outro lado, afirmamos que $\{\Gamma_2 x(t_0)\ ;\ x \in B_r\}$ está contido em um conjunto compacto. Com efeito, para qualquer $x \in B_r$, temos

$$
\begin{aligned}
\Gamma_2 x(t_0) &= \int_0^{t_0} AT(t_0 - s)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} (-A)^{\beta}(-A)^{1-\beta}T(\epsilon)T(t_0 - s - \epsilon)g(s, x_s + y_s)\, ds \\
&= \int_0^{t_0} (-A)^{1-\beta}T(t_0 - s - \epsilon)\ \underbrace{T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s, x_s + y_s)}_{\in U^1_{\epsilon, r^*}}\ ds,\ t_0 > 0,
\end{aligned}
$$

disso e pelo Lema 4.6, segue que

$$t_0{}^{-1}\int_0^{t_0}(-A)^{1-\beta}T(t_0-s-\epsilon)\,T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds\in\overline{co}\big(U_\epsilon^{1'}\big),$$

o que pelo Lema 4.5, implica em

$$\int_0^{t_0}(-A)^{1-\beta}T(t_0-s-\epsilon)\,T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\,ds\in t_0\,\overline{co}\big(U_\epsilon^{1'}\big),$$

em que $U_\epsilon^{1'}=\big\{(-A)^{1-\beta}T(\overline{s})x\ ;\ \overline{s}\in[t_0-2\epsilon,a],x\in U^1_{\epsilon,r^*}\big\}$, já que pela hipótese ***(a)***, $T(\epsilon)(-A)^{\beta}g(s,x_s+y_s)\in U^1_{\epsilon,r^*}$ e

$$t_0-2\epsilon=t_0-\epsilon-\epsilon\le t_0-s-\epsilon\le t-s-\epsilon\le a\Rightarrow t_0-s-\epsilon\in[t_0-2\epsilon,a].$$

Além disso, o conjunto $U_\epsilon^{1'}$ é relativamente compacto, pois é um conjunto compacto (já que é imagem de compacto por uma função contínua), contido no espaço (completo) X. Logo, pelo Lema 4.7, $co\big(U_\epsilon^{1'}\big)$ é relativamente compacto, isto é, $\overline{co}\big(U_\epsilon^{1'}\big)$ é compacto, consequentemente, $t_0\,\overline{co}\big(U_\epsilon^{1'}\big)$ também o é. E mais,

$$\big\{\Gamma_2x(t_0)\ ;\ 0\le t_0\le t\le a,x\in B_r\big\}\subset t_0\,\overline{co}\big(U_\epsilon^{1'}\big).$$

Então

$$I-T(t-t_0))\Gamma_2x(t_0)\longrightarrow 0. \tag{4.15}$$

uniformemente, quando $t\to t_0^+$. Além disso, em virtude de (4.4), para qualquer $\epsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$|t-t_0|_{\mathbb{R}}<\delta=\left(\frac{\beta\epsilon}{C\,C_{1-\beta}}\right)^{\frac{1}{\beta}},\ 0<\beta<1,$$

então

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^t||AT(t-s)g(s,x_s+y_s)||\,ds &\le \int_{t_0}^t\frac{C_{1-\beta}C}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds=C\int_{t_0}^t\frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}}\,ds\\ &= -C\,C_{1-\beta}\frac{(t-s)^{\beta}}{\beta}\Bigg|_{t_0}^{t}=C\,C_{1-\beta}\frac{(t-t_0)^{\beta}}{\beta}\\ &< \frac{C\,C_{1-\beta}\delta^{\beta}}{\beta}=\frac{C\,C_{1-\beta}}{\beta}\cdot\frac{\beta\epsilon}{C\,C_{1-\beta}}=\epsilon,\end{aligned}$$

ou seja, a função $f_{14}:I\longrightarrow X$ definida por

$$f_{14}(s)=AT(t-s)g(s,x_s+y_s),\ \forall\,s\in I,x\in B_r$$

é equi-integrável[11], o que implica

$$\int_{t_0}^t AT(t-s)g(s,x_s+y_s)\,ds\overset{t\to t_0^+}{\longrightarrow}0$$

[11]**Definição.** Seja (Ω,Σ,μ) um espaço de probabilidade. Um subconjunto $\mathcal{F}\subset L^1(\mu)$ (em que $L^1(\mu)$ denota o conjunto das funções integráveis de Ω, com respeito a medida μ) é dito **equi-integrável** se

$$\forall\,\epsilon>0,\ \exists\,\delta>0\ ;\ \mu(E)<\delta\Rightarrow\int_E|f|\,d\mu<\epsilon,\ \forall\,f\in\mathcal{F}.$$

uniformemente. Disso e de (4.15) segue que $\Gamma_2\big(B_r\big)$ é equicontínua à direita de $t_0 \in [0,t]$. Analogamente, provamos que $\Gamma_2\big(B_r\big)$ é equicontínuo à esquerda de t_0. Logo, $\Gamma_2\big(B_r\big)$ é equicontínuo. Portanto, sendo $\Gamma_2\big(B_r\big)(t)$ relativamente compacto, em todo $t \in I$, e $\Gamma_2\big(B_r\big)$ equicontínuo, segue pelo Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1) que $\Gamma_2\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Passo 3. O conjunto $\Gamma_3\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Vamos começar mostrando que o conjunto $\Gamma_3\big(B_r\big)(t)$ é relativamente compacto, para todo $t \in I$. Para $t = 0$, o **Passo 3** é trivial. Assim, se $t \in (0,a]$, consideremos

$$0 < 2\epsilon < t \leq a \quad \text{e} \quad U^2_{\epsilon,r^*} \subset X,$$

em que $\epsilon > 0$. Em virtude da função $f_{15} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ dada por $f_{15} = T(s)x$, para todo $x \in X$ e $s \in \mathbb{R}_+$, o conjunto

$$U^2_\epsilon = \big\{T(s)x\ ;\ s \in [\epsilon,a], x \in U^2_{\epsilon,r^*}\big\}$$

é relativamente compacto. De fato,

$$U^2_\epsilon = T(s)\Big(U^2_{\epsilon,r^*}\Big),\ \forall\, s \in [\epsilon,a],$$

com U^2_{ϵ,r^*} compacto, em virtude da hipótese ***(a)***. Assim, a continuidade de f_{15} garante que U^2_ϵ é compacto, logo, pelo Lema 4.3, U^2_ϵ é, em particular, totalmente limitado. E mais, pelo Lema 4.2 segue que U^2_ϵ é relativamente compacto.

Por outro lado, da definição de Γ_3 e sendo $2\epsilon \in (0,t) \subset I$, temos, para qualquer $x \in B_r$,

$$\Gamma_3 x(t) = \overbrace{\int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds}^{=:I_5} - \overbrace{\int_0^t AT(t-s)g(s, x_t + y_t)\, ds}^{=:I_6}.$$

Façamos o estudo de I_5 e I_6 separadamente.

• Estudo de I_5.

Notemos que

$$I_5 = \int_0^t T(t-s-\epsilon)\; T(\epsilon)f(s, x_s + y_s)\, ds.$$

Mostramos no **Passo 2** que $t - s - \epsilon \in (\epsilon, a)$. Além disso, pela hipótese ***(a)***, temos

$$T(\epsilon)f(s, x_s + y_s) \in U^2_{\epsilon,r^*},$$

já que de (4.7), obtemos $x_s + y_s \in B_{r^*}[0,\mathcal{B}]$, para todo $s \in [\epsilon,a]$. Assim, pelo Lema 4.6 $t^{-1}I_1 \in \overline{co}\big(U^2_\epsilon\big)$. O Lema 4.5 implica que

$$I_5 \in t\, \overline{co}\big(U^2_\epsilon\big). \tag{4.16}$$

• Estudo de I_6.

Observemos que, em razão de $2\epsilon \in (0,t)$, temos, para todo $x \in B_r$ e $t \in I$,

$$\begin{aligned} I_6 &= \int_0^t (-A)T(t-s)g(s,x_t+y_t)\,ds \\ &= \int_0^{t-2\epsilon} (-A)T(t-s)g(s,x_t+y_t)\,ds + \int_{t-2\epsilon}^t (-A)T(t-s)g(s,x_t+y_t)\,ds \\ &= \int_0^{t-2\epsilon} (-A)^{1-\beta}T(t-s-\epsilon)\,T(\epsilon)g(s,x_t+y_t)\,ds + \\ &\qquad + \int_{t-2\epsilon}^t (-A)^{1-\beta}T(t-s)(-A^\beta)g(s,x_t+y_t)\,ds \end{aligned}$$

e usando os mesmos argumentos usados no **Passo 2**, para Γ_2, concluímos que

$$I_6 \in (t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big) + B_{r'}[0,X]. \tag{4.17}$$

De (4.16) e (4.17), segue que

$$\Gamma_3\big(B_r\big)(t) = \big\{\Gamma_3 x(t)\ ;\ x \in B_r, t \in I\big\} \subset t\,\overline{co}\big(U_\epsilon^2\big) + (t-2\epsilon)\overline{co}\big(U_\epsilon^1\big) + B_{r'}[0,X] \subset X. \tag{4.18}$$

Disso e usando argumentos análogos do **Passo 2**, podemos concluir que $\Gamma_3\big(B_r\big)(t)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Agora, provaremos que $\Gamma_3\big(B_r\big)$ é equicontínuo em $\mathcal{S}(a)$. Para tanto, seja $t_0 \in [0,t] \subset I$. Assim, para qualquer $x \in B_r$, temos

$$\begin{aligned} \Gamma_3 x(t) - \Gamma_3 x(t_0) &= \int_0^t T(t-s)f(s,x_s+y_s)\,ds - \left(T(t-s)g(t,x_t+y_t)\Big|_0^t \right) + \\ &\qquad - \int_0^{t_0} T(t_0-s)f(s,x_s+y_s)\,ds + T(t_0-s)g(t_0,x_{t_0}+y_{t_0})\Big|_0^{t_0} \\ &= \int_0^t T(t-s)f(s,x_s+y_s)\,ds - g(t,x_t+y_t) + T(t)g(t,x_t+y_t) + \\ &\qquad - \int_0^{t_0} T(t_0-s)f(s,x_s+y_s)\,ds + g(t_0,x_{t_0}+y_{t_0}) + \\ &\qquad\qquad -T(t_0)g(t_0,x_{t_0}+y_{t_0}) \\ &= \int_0^t T(t-s)f(s,x_s+y_s)\,ds - \int_0^{t_0} T(t_0-s)f(s,x_s+y_s)\,ds + \\ &\qquad +T(t)g(t,x_t+y_t) - T(t_0)g(t_0,x_{t_0}+y_{t_0}) + g(t_0,x_{t_0}+y_{t_0}) - g(t,x_t+y_t). \end{aligned}$$

Por outro lado, como as funções $g_1, g_2, g_3 : I \longrightarrow X$ dadas por

$$g_1(t) = \int_0^t T(t-s)f(s,x_s+y_s)\,ds, \quad g_2(t) = T(t)g(t,x_t+y_t) \quad \text{e} \quad g_3(t) = g(t,x_t+y_t),$$

são contínuas, então, para qualquer $\epsilon > 0$, existem $\delta_1, \delta_2, \delta_3 > 0$, tais que

$$|t-t_0|_{\mathbb{R}} < \delta_1 \Rightarrow |g_1(t) - g_1(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}, \quad |t-t_0|_{\mathbb{R}} < \delta_2 \Rightarrow |g_2(t) - g_1(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$\text{e} \qquad |t - t_0|_{\mathbb{R}} < \delta_3 \Rightarrow |g_3(t) - g_3(t_0)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Assim, sendo $\delta = \max\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$, temos $|t - t_0|_{\mathbb{R}} < \delta$ e

$$||\Gamma_3 x(t) - \Gamma_3 x(t_0)||_a \leq |g_1(t) - g_1(t_0)| + |g_2(t) - g_1(t_0)| + |g_3(t) - g_3(t_0)| < \epsilon$$

Logo, o conjunto $\Gamma_3\big(B_r\big)$ é equicontínuo. Portanto, segue do Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1), que $\Gamma_3\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Passo 4. O conjunto $\Gamma_4\big(B_r\big)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Provaremos que o conjunto,

$$M_i := \Big(\widetilde{\Gamma_4\big(B_r\big)}\Big)_i = \big\{\tilde{v}_i \ ; \ v \in \Gamma_4\big(B_r\big)\big\}$$

é equicontínuo em $[t_i, t_{i+1}]$, para $i = 0, \cdots, n$. Para tanto, lembremos que $\Gamma_4 x : [t_i, t_{i+1}] \longrightarrow X$ é contínua, para todo $x \in B_r$. Além disso, pela continuidade de $g_4 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ dada por

$$g_4(t) = T(t)z, \ \forall t \in \mathbb{R}_+, z \in X,$$

temos que, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|T(t)z - T(s)z| < \epsilon, \ \forall \, t_i \in I, i = 0, \cdots, n \quad \text{e} \quad t, s \in I \ ; \ |t - s|_{\mathbb{R}} < \delta.$$

Sob essas condições, para $x \in B_r$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$, com $i = 1, \cdots, n$, e $0 < |h|_{\mathbb{R}} < \delta$ tal que $t + h \in [t_i, t_{i+1}]$, temos que

$$\begin{aligned}
||(\widetilde{\Gamma_4})(t+h) - (\widetilde{\Gamma_4})(t)||_a &= \left|\left| \sum_{0<t_i<t} T(t+h-t_i) I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) - \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i) I_i(x_{t_i} + y_{t_i} \right|\right|_a \\
&\leq \sum_{0<t_i<t} \big| I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) \big(T(t+h-t_i) - T(t-t_i)\big) \big| \\
&\leq n_i(c_i^1 r^* + c_i^2) n\epsilon = n_i n^2 (c_i^1 r^* + c_i^2)\epsilon,
\end{aligned}$$

logo, M_i é uniformemente equicontínuo em $[t_i, t_{i+1}]$, para cada $i = 0, \cdots, n$.

Consideremos, agora, o conjunto

$$M_i(t) := \Big(\widetilde{\Gamma_4\big(B_r\big)}\Big)_i(t) = \Big\{ \Big(\widetilde{\Gamma_4 x}\Big)_i(t) \ ; \ x \in B_r, t \in [t_i, t_{i+1}] \Big\},$$

para todo $i \in \{0, \cdots, n\}$. Vamos mostrar que tal conjunto é relativamente compacto em em $\mathcal{S}(a)$, para isso, sejam $t \in [t_i, t_{i+1}]$ e $x \in B_r$ quaisquer. Assim,

$$\Big(\widetilde{\Gamma_4 x}\Big)_i(t) = \sum_{j=1}^{i} T(t - t_j) I_j(x_{t_j} + y_{t_j}), \quad \text{se} \quad t \in (t_i, t_{i+1}), 0 < t_j < t,$$

$$\Big(\widetilde{\Gamma_4 x}\Big)_i(t) = \sum_{j=1}^{i} T(t_{i+1} - t_j) I_j(x_{t_j} + y_{t_j}), \quad \text{se} \quad t = t_{i+1}, 0 < t_j < t = t_{i+1},$$

$$\text{e} \qquad \left(\widetilde{\Gamma_4 x}\right)_i(t) = \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(x_{t_j} + y_{t_j}), \quad \text{se} \quad t = t_i, 0 < t_j < t = t_i,$$

ou seja,

$$\left(\widetilde{\Gamma_4 x}\right)_i(t) \in \begin{cases} \sum_{j=1}^{i} T(t - t_j)I_j(B_{r^*}[0, \mathcal{S}(a)]), & \text{se} \quad t \in (t_i, t_{i+1}), 0 < t_j < t \\ \sum_{j=1}^{i} T(t_{i+1} - t_j)I_j(B_{r^*}[0, \mathcal{S}(a)]), & \text{se} \quad t = t_{i+1}, 0 < t_j < t = t_{i+1} \\ \sum_{j=1}^{i-1} T(t_i - t_j)I_j(B_{r^*}[0, \mathcal{S}(a)]), & \text{se} \quad t = t_i, 0 < t_j < t = t_i. \end{cases}$$

Logo, em qualquer caso $M_i(t)$, para $t \in [t_i, t_{i+1}]$, está contido em um conjunto relativamente compacto, já que, pela hipótese ***(c)***, $I_i : \mathcal{B} \longrightarrow X$ é completamente contínua e $T : \mathbb{R}_+ \longrightarrow X$ é contínua. Além disso, observemos que $M_i = \left(\widetilde{\Gamma_4(B_r)}\right)_i$ é equicontínuo, em $[t_i, t_{i+1}]$ e $M_i(t) = \left(\widetilde{\Gamma_4(B_r)}\right)_i(t)$ é relativamente compacto, em todo $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Segue do Teorema de Arzela-Ascoli (Teorema 4.1) que o conjunto $\left(\widetilde{\Gamma_4(B_r)}\right)_i$ é relativamente compacto em $C([t_i, t_{i+1}], X)$. Portanto, segue, do Lema 4.1, que $\Gamma_4(B_r)$ é relativamente compacto em $\mathcal{S}(a)$.

Nesses termos, do **Passo 1 - Passo 4**, da continuidade de Γ e do Lema 4.8, concluímos que Γ é completamente contínua. Além disso, já havíamos concluído também que o conjunto $\mathbb{S}_1$ é limitado. Desses fatos, da Alternativa de Leray-Schauder (Teorema 4.2) e considerando $\Gamma : B_r[0, \mathcal{S}(a)] \subset \mathcal{S}(a) \longrightarrow \mathcal{S}(a)$, em que pela Observação 4.1, $B_r[0, \mathcal{S}(a)]$ é um conjunto convexo e $0 \in B_r[0, \mathcal{S}(a)]$, segue que Γ tem um ponto fixo em $B_r[0, \mathcal{S}(a)] \subset \mathcal{S}(a)$, digamos $x : (-\infty, a] \longrightarrow X$. Dessa forma, definimos $z : (-\infty, a] \longrightarrow X$, por

$$z(t) = x(t) + y(t), \ \forall\, t \in (-\infty, a].$$

Afirmamos que $z : (-\infty, a] \longrightarrow X$ é uma solução fraca de (4.1). Com efeito, notemos que

$$z_0 = x_0 + y_0 = 0 + y_0 = 0 + \varphi = \varphi,$$

já que $x_0 = 0$, pois $x \in B_r[0, \mathcal{S}(a)] \subset \mathcal{S}(a)$ e, pela Observação 4.3, $y_0 = \varphi$. E mais, novamente pelo fato de que $x \in B_r[0, \mathcal{S}(a)] \subset \mathcal{S}(a)$, temos que $x_{|_I} \in \mathcal{PC}$ e, de novo, pela Observação 4.3, segue $y_{|_I} \in \mathcal{PC}$. Assim

$$z_{|_I} = x_{|_I} + y_{|_I} \in \mathcal{PC}.$$

Além disso, sendo $x : (-\infty, a] \longrightarrow X$ um ponto fixo de Γ, temos

$$\Gamma x(t) = x(t), \ \forall\, t \in (-\infty, a].$$

Se $t \in I$, então

$$\begin{aligned}
z(t) = x(t) + y(t) &= \Gamma x(t) + y(t) \\
&= T(t)g(0,\varphi) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) + \overbrace{y(t)}^{=T(t)\varphi(0)} \\
&= T(t)g(0,\varphi) + T(t)\varphi(0) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}) \\
&= T(t)\big(g(0,\varphi) + \varphi(0)\big) - g(t, x_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s)g(s, x_s + y_s)\, ds + \\
&\quad + \int_0^t T(t-s)f(s, x_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t} T(t-t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i}).
\end{aligned}$$

Portanto, conforme a Definição 4.6, segue que $z : (-\infty, a] \longrightarrow X$ é uma solução fraca, do problema de valor inicial (4.1). ■

O próximo teorema, sob outras condições, mais precisamente, assumimos condições de Lipschitz sobre as funções g e I_i, com $i = 1, \cdots, n$, em vez de condições de compacidade, como no Teorema 4.9, podemos estabelecer outro resultado de existência de solução do problema de valor inicial (4.1). Mas, para isso precisamos de alguns conceitos e resultados preliminares. Um conceito muito importante que usamos é o de medida de não-compacidade para conjuntos limitados de um espaço de Banach.

Definição 4.7. *Sejam $M = (M, d)$ um espaço métrico e $\mathcal{M}_M = \{Q \subset M \ ; \ Q$ é limitado$\}$. A **medida de Kuratowski** de não-compacidade é uma função $\alpha : \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é definida por*

$$\alpha(Q) = \inf \Big\{ \epsilon > 0 \ ; \ Q \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_i \ ; \ S_i \subset M, \mathrm{diam}(S_i) < \epsilon, \ \forall\, i \in I_n \ ; \ n \in \mathbb{N} \Big\},$$

em que $I_n = \{1, \cdots, n\}$, para todo $Q \subset \mathcal{M}$, e $\mathrm{diam}(S) = \sup\{d(x,y) \in \mathbb{R}_+ \ ; \ x, y \in S\}$, para qualquer $S \subset M$.

Tal medida de não-compacidade tem propriedades muito boas e interessantes, as quais não todas tratamos aqui. Para mais detalhes sobre essa medida, consulte seção 5.2 de [5]. Contudo, enunciamos na sequência algumas dessas propriedades, já que essas serão utilizadas, mais adiante, na demonstração do próximo teorema.

Lema 4.12. *Sejam $M = (M, d)$ um espaço métrico e $\alpha : \mathcal{M}_M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de Kuratowski de não-compacidade. Se $Q, Q_1, Q_2 \in \mathcal{M}_M$, então*

(i) $\alpha(Q) = 0$ *se, e somente se,* $\overline{Q}$ *é compacto;*

(ii) $Q_1 \subset Q_2$, *implica* $\alpha(Q_1) \subset \alpha(Q_2)$.

Demonstração. Veja Lema 5.5, página 151 de [5]. ∎

Lema 4.13. *Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ um espaço normado e $\alpha : \mathcal{M}_{X_1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de Kuratowski de não-compacidade. Se $Q, Q_1, Q_2 \in M_{X_1}$, então*

(i) $\alpha(Q_1 + Q_2) \leq \alpha(Q_1) + \alpha(Q_2)$;

(ii) $\alpha(\lambda Q_1) = |\lambda|_{\mathbb{R}} \alpha(Q)$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Veja Lema 5.7, página 152 de [5]. ∎

Lema 4.14. *Sejam $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ um espaço de Banach e $\alpha : \mathcal{M}_{X_1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ a medida de Kuratowski de não-compacidade. Se $h : B_r[0, X_1] \longrightarrow B_r[0, X_1]$, para algum $r > 0$, é uma contração, ou seja, existe $\lambda \in (0, 1) \subset \mathbb{R}$ tal que*

$$|h(x) - h(y)|_1 \leq \lambda |x - y|_1,\ \forall\, x, y \in B_r[0, X_1],$$

então

$$\alpha\big(h(W)\big) \leq \lambda \alpha(W),\ \forall\, W \subset B_r[0, X_1].$$

Demonstração. Seja $W \subset B_r[0, X_1]$ arbitrário. Dada qualquer cobertura $\big\{W_i \subset X_1 \; ; \; i \in I_n = \{1, \cdots, n\}\big\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, de $W \subset B_r[0, X_1]$, tal que $\operatorname{diam}(W_i) < \epsilon_1$, para algum $\epsilon_1 > 0$ e todo $i \in I_n$, temos

$$W \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_i \Rightarrow h(W) \subset h\left(\bigcup_{i=1}^{n} W_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} h(W_i),$$

em que

$$\operatorname{diam}\big(h(W_i)\big) \leq \lambda \operatorname{diam}(W_i) < \lambda\epsilon. \tag{4.19}$$

Como (4.19) vale para toda cobertura $\big\{W_i \subset X_1 \; ; \; i \in I_n = \{1, \cdots, n\}\big\}$ tal que $\operatorname{diam}(W_i) < \epsilon_1$, para todo $i \in I_n$, então vale, em particular, para a cobertura $\big\{W_j \subset X_1 \; ; \; j \in I_m = \{1, \cdots, m\}\big\}$, para algum $m \in \mathbb{N}$, com $\operatorname{diam}(W_j) < \epsilon_2 = \alpha(W)$, para algum $\epsilon_2 > 0$ e todo $j \in I_m$. De

$$h(W) \subset h\left(\bigcup_{j=1}^{m} W_j\right)$$

e

$$\alpha(h(W)) \leq \alpha\left(\bigcup_{j=1}^{n} h(W_j)\right),$$

em que, $\operatorname{diam}(h(W_j)) \leq \lambda\alpha(W)$, para todo $j \in I_m$, segue que

$$\alpha\big(h(W)\big) \leq \lambda\alpha(W),\ \forall\, W \subset B_r[0, X_1].$$

■

Mais especificamente, a respeito da medida de Kuratowski, usamos o seguinte teorema de ponto fixo.

Teorema 4.10. *Sejam* $X_1 = (X_1, |\cdot|_1)$ *um espaço espaço de Banach,* $D \subset X_1$ *um conjunto limitado e convexo e* $\alpha : \mathcal{M}_{X_1} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *a medida de Kuratowski de não-compacidade em* X_1*. Se* $A : D \longrightarrow D$ *é contínua tal que*

$$\alpha\Big(A(\Omega)\Big) \leq \gamma\alpha\big(\Omega\big),\ \forall\, \Omega \subset D,$$

para algum $\gamma \in [0, 1)$*. Então, o conjunto* $\{x \in D\ ;\ A(x) = x\}$ *é não-vazio e compacto em* X_1*.*

Demonstração. Veja Teorema 3.2, página 125, de 24. ■

Agora estamos em condições de estabelecer o segundo resultado de existência de solução.

Teorema 4.11. *Sejam* $f, g : I \times \mathcal{B} \longrightarrow X$ *satisfazendo* $(\mathbf{H_1})$ *e* $(\mathbf{H_2})$*, respectivamente. Se*

(a) *para cada* $r > 0$ *e todo* $\epsilon > 0$ *existe um conjunto compacto* $U_\epsilon^r \subset X$ *tal que* $T(\epsilon)f(s, \psi) \in U_\epsilon^r$*, para todo* $s \in I$ *e* $\psi \in B_r[0, \mathcal{B}]$*;*

(b) *existem* $L_g, L_i \in \mathbb{R}_+^*$*, com* $i = 1, \cdots, n$ *tais que*

$$||(-A)^\beta g(t, \psi_1) - (-A)^\beta g(t, \psi_2)||_\beta \leq L_g||\psi_1 - \psi_2||_{\mathcal{B}},$$

para todo $t \in I$ *e* $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{B}$*, e*

$$|I_i(\psi_1) - I_i(\psi_2)| \leq L_i||\psi_1 - \psi_2||_{\mathcal{B}},\ \forall\, \psi_i \in \mathcal{B}, i = 1, \cdots, n;$$

(c) *além disso,*

$$K_a\left[L_g\left(||(-A)^\beta||_{\mathcal{B}} + \frac{C_{1-\beta}a^\beta}{\beta}\right) + M\sum_{i=1}^{n} L_i + M \lim_{\xi\to\infty}\inf \frac{W_f(\xi)}{\xi}\int_0^a m_f(s)\, ds\right] < 1.$$

Então, existe uma solução fraca de (4.1)*.*

Demonstração. Consideremos a função $\Gamma : \mathcal{S}(a) \longrightarrow \mathcal{S}(a)$ definida na demonstração do Teorema 4.9. Já sabemos que Γ é contínua. Além disso, afirmamos que existe $r > 0$ tal que

$$\Gamma\Big(B_r[0, \mathcal{S}(a)]\Big) \subset B_r[0, \mathcal{S}(a)].$$

De fato, suponhamos, por um momento, que isso não ocorra, ou seja, para todo $r > 0$ existem $x^r \in B_r[0, \mathcal{S}(a)]$ e $t^r \in I$, tais que $r < ||\Gamma x^r(t^r)||_a$, o que implica

$$\begin{aligned}
r < ||\Gamma x^r(t^r)||_a \;&=\; \Bigg| T(t^r)g(0,\varphi) - g(t^r, x^r_{t^r} + y_{t^r}) - \int_0^{t^r} AT(t^r - s)g(s, x^r_s + y_s)\, ds + \\
&\quad + \int_0^{t^r} T(t^r - s)f(s, x^r_s + y_s)\, ds + \sum_{0<t_i<t^r} T(t^r - t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i})\Bigg| \\
&\leq\; M|g(0,\varphi)| + |g(t^r, x^r_{t^r} + y_{t^r})| + \left|\int_0^{t^r} AT(t^r - s)g(s, x^r_s + y_s)\, ds\right| + \\
&\quad + \left|\int_0^{t^r} T(t^r - s)f(s, x^r_s + y_s)\, ds\right| + \sum_{0<t_i<t^r} ||T(t^r - t_i)I_i(x_{t_i} + y_{t_i})|| \\
&\leq\; M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{\beta}(-A)^{-\beta}g(t^r, x^r_{t^r} + y_{t^r})||_{\mathcal{B}} + \\
&\quad + \int_0^{t^r} ||(-A)^{1-\beta}T(t^r - s)(-A)^{\beta}g(s, x^r_s + y_s)||_{\mathcal{B}}\, ds + \\
&\quad + M\int_0^{t^r} |f(s, x^r_s + y_s)|\, ds + M\sum_{0<t_i<t^r} |I_i(x_{t_i} + y_{t_i})| \\
&\leq\; M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{\beta}||_{\beta}||(-A)^{-\beta}g(t^r, x^r_{t^r} + y_{t^r})||_{\mathcal{B}} + \\
&\quad + \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}}||(-A)^{\beta}g(s, x^r_s + y_s)||_{\mathcal{B}}\, ds + \\
&\quad + M\int_0^{t^r} m_f(s)W_f\Big(\overbrace{||x^r_s + y_s||_{\mathcal{B}}}^{\leq ||x^r_s||_{\mathcal{B}} + ||y_s||_{\mathcal{B}}}\Big)\, ds + \\
&\quad + M\sum_{0<t_i<t^r} |I_i(x_{t^r_i} + y_{t_i}) + I_i(y_{t_i}) - I_i(y_{t_i})| \\
&\leq\; M|g(0,\varphi)| + \\
&\quad + ||(-A)^{\beta}\;||_{\beta}||(-A)^{-\beta}g(t^r, x^r_{t^r} + y_{t^r}) + (-A)^{\beta}g(t^r, y_{t^r}) - (-A)^{\beta}g(t^r, y_{t^r)})||_{\mathcal{B}} + \\
&\quad + \int_0^{t^t} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}}||(-A)^{\beta}g(s, x^r_s + y_s) + (-A)^{\beta}g(s, x^r_s) - (-A)^{\beta}g(s, x^r_s)||_{\beta} + \\
&\quad + M\int_0^{t^r} m_f(s)W_f(||x^r_s||_{\mathcal{B}} + ||y_s||_{\mathcal{B}})\, ds + \\
&\quad + M\sum_{0<t_i<t^r} \Big(|I_i(x^r_{t_i} + y_{t_i}) - I_i(y_{t_i})| + |I_i(y_{t_i})|\Big) \\
&\leq\; M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^{-\beta}||_{\beta}L_g||x^r_{t^r}||_{\mathcal{B}} + ||(-A)^{-\beta}||_{\beta}||(-A)^{\beta}||_{\beta}|g(t^r, y_{t^r})| + \\
&\quad + \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}}\Big(Lg||x^r_s||_{\mathcal{B}} + ||(-A)^{\beta}g(s, y_s)||_{\beta})||_{\beta}\Big)\, ds + \\
&\quad + M\int_0^{t^r} m_f(s)W_f\Big(Kt\sup\{|x^r(s)|\;;\; s \in I\} + \sup\{|y(s)|\;;\; s \in I\}\Big)\, ds +
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +M \sum_{0<t_i<t^r} \Big(|L_i| ||x^r_{t_i}||_{\mathcal{B}} + |I_i(y_{t_i})| \Big) \\
\leq\ & M|g(0,\varphi)| + \\
& +||(-A)^\beta||_\beta L_g \Big(K t^r \overbrace{\sup\{|x^r(s)|\ ;\ s \in I\}}^{\leq r} + \overline{M} t \overbrace{||x_0||_{\mathcal{B}}}^{=0} \Big) + |g(t^r, y_{t^r})| + \\
& +L_g \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}} \overbrace{||x^r_s||_{\mathcal{B}}}^{\leq K_a r} + \int_0^{t^r} \frac{C_{1-\beta}}{(t^r - s)^{1-\beta}} ||(-A)^\beta g(s, x_s)||_\beta \, ds + \\
& +M W_f \Big(K_a r + \sup\{|y(s)|\ ;\ s \in I\} \Big) \int_0^a m_f(s)\, ds + \\
& +M \sum_{0<t_i<t^r} \Big(|L_i K_a r + |I_i(y_{t_i})| \Big) \\
\leq\ & M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^\beta||_\beta L_g K_a r + |g(t^r, y_{t^r})| + L_g K_a r C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{ds}{(t^r - s)^{1-\beta}} + \\
& + \int_0^{t^r} \frac{||(-A)^\beta g(s, y_s)||_\beta}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds + \\
& +M W_f \Big(K_a r + \sup\{|y(s)|\ ;\ s \in I\} \Big) \int_0^a m_f(s)\, ds + \\
& + \sum_{0<t_i<t^r} \Big(|L_i K_a r + |I_i(y_{t_i})| \Big) \\
\leq\ & M|g(0,\varphi)| + ||(-A)^\beta||_\beta L_g K_a r + |g(t^r, y_{t^r})| + L_g K_a r C_{1-\beta} \frac{a^\beta}{\beta} + \\
& +C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{||(-A)^\beta g(s, y_s)||_\beta}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds + \\
& +M W_f \Big(K_a r + \sup\{|y(s)|\ ;\ s \in I\} \Big) \int_0^a m_f(s)\, ds + \\
& +M \sum_{0<t_i<t^r} \Big(|L_i K_a r + \overbrace{|I_i(y_{t_i})|}^{=0, \forall i \in I_n} \Big),
\end{aligned} \tag{4.20}
$$

em que, denotando $S := \sup\{||y_s||_{\mathcal{B}}\ ;\ s \in I\}$,

$$
\begin{aligned}
P_g\ :=\ & M|g(0,\varphi)| + |g(t^r, y_{t^r})| + C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{||(-A)^\beta g(s, y_s)||_\beta}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds \\
=\ & M||(-A)^{-\beta}(-A)^\beta g(0,\varphi)||_\beta + ||(-A)^{-\beta}(-A)^\beta g(t^r, y_{t^r})||_\beta + \\
& \qquad +C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{||(-A)^\beta g(s, y_s)||_\beta}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds \\
=\ & M||(-A)^{-\beta}||_\beta ||(-A)^\beta g(0,\varphi)||_\beta + ||(-A)^{-\beta}||_\beta ||(-A)^\beta g(t^r, y_{t^r})||_\beta + \\
& \qquad +C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{||(-A)^\beta g(s, y_s)||_\beta}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds \\
\overset{\mathbf{(b)}}{\leq}\ & M||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g ||\varphi||_{\mathcal{B}} + ||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g ||y_{t^r}||_{\mathcal{B}} + C_{1-\beta} \int_0^{t^r} \frac{c_1 ||y_s||_{\mathcal{B}} + c_2}{(t^r - s)^{1-\beta}} \, ds \\
\leq\ & M||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g S + ||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g S + C_{1-\beta} \left(c_1 S \int_0^{t^r} \frac{ds}{(t^r - s)^{1-\beta}} + c_2 \int_0^{t^r} \frac{ds}{(t^r - s)^{1-\beta}} \right) \\
=\ & M||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g S + ||(-A)^{-\beta}||_\beta L_g S - C_{1-\beta} c_1 \frac{(t^r)^\beta}{\beta} - c_2 \frac{(t^r)^\beta}{\beta} \\
\leq\ & (M+1) L_g S ||(-A)^{-\beta}||_\beta \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_g}{r} \leq \frac{(M+1)L_g S||(-A)^{-\beta}||_\beta}{r}, \; \forall \, r > 0,$$

disso e dividindo, por $r > 0$, a desigualdade (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}
1 \quad & \leq \quad \frac{P_g}{r} + ||(-A)^\beta||_\beta L_g K_a + L_g + K_a \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} + \\
& \quad + \frac{1}{r} M W_f \Big(K_a r + \sup\{|y(s)| \; ; \; s \in I\} \Big) \int_0^a m_f(s) \, ds + M K_a \sum_{i=1}^n L_i \\
& \leq \quad \frac{(M+1)L_g S||(-A)^{-\beta}||_\beta}{r} + ||(-A)^\beta||_\beta L_g K_a + L_g + K_a \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} + \\
& \quad + \frac{1}{r} M W_f \Big(K_a r + \sup\{|y(s)| \; ; \; s \in I\} \Big) \int_0^a m_f(s) \, ds + M K_a \sum_{i=1}^n L_i \\
& \overset{r \to \infty}{\leq} \quad K_a \left[L_g \left(||(-A)^\beta||_\beta + \frac{C_{1-\beta} a^\beta}{\beta} \right) + M \sum_{i=1}^n L_i + M \liminf_{\xi \to \infty} \frac{W_f(\xi)}{\xi} \int_0^a m_f(s) \, ds \right],
\end{aligned}$$

o que contradiz, hipótese ***(c)***. Assim, segue nossa afirmação.

Agora, consideremos $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$, em que $\Gamma_1 x(t) = \Gamma_2 x(t) = 0$, para todo $t \in (-\infty, 0]$ e todo $x \in B_r[0, \mathcal{S}(a)]$, e

$$\Gamma_1 x(t) = \int_0^t T(t-s) f(s, x_s + y_s) \, ds, \; \forall \, t \in I$$

e $\Gamma_2 x(t) = T(t) g(0, \varphi) - g(t, x_t + y_t) - \displaystyle\int_0^t AT(t-s) g(s, x_s + y_s) \, ds + \sum_{0 < t_i < t} T(t - t_i) I_i(x_{t_i} + y_{t_i}), \forall t \in I.$

Seja $r_0 >$ tal que $\Gamma\Big(B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)]\Big) \subset B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)]$. Segue da demonstração do Teorema 4.9 que Γ_1 é completamente contínua. Assim, se $\alpha : \mathcal{M}_{B_{r_0}} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ é a medida de não-compacidade de Kuratowski, então por ***(i)*** do Lema 4.12,

$$\alpha\big(\overline{\Gamma_1(Q)}\big) = 0, \; \forall \, Q \in \mathcal{M}_{B_{r_0}}. \tag{4.21}$$

Por outro lado, dados $u, v \in B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)]$, temos, para Γ_2, que

$$\begin{aligned}
||\Gamma_2 u(t) - \Gamma_2 v(t)||_a \quad = \quad & \Bigg| T(t) g(0, \varphi) - g(t, u_t + y_t) - \int_0^t AT(t-s) g(s, u_s + y_s) \, ds + \\
& + \sum_{0 < t_i < t} T(t - t_i) I_i(u_{t_i} + y_{t_i}) - T(t) g(0, \varphi) - g(t, v_t + y_t) + \\
& + \int_0^t AT(t-s) g(s, v_s + y_s) \, ds - \sum_{0 < t_i < t} T(t - t_i) I_i(v_{t_i} + y_{t_i}) \Bigg| \\
\leq \quad & |g(t, v_t + y_t) - g(t, v_t + y_t) + \\
& + \int_0^t ||AT(t-s) g(s, v_s + y_s) - AT(t-s) g(s, u_s + y_s)|| \, ds + \\
& + M \sum_{0 < t_i < t} ||T(t - t_i)(I_i(u_{t_i} + y_{t_i}) - I_i(v_{t_i} + y_{t_i}))||
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g \overbrace{||v_t - u_t||_{\mathcal{B}}}^{\leq ||u-v||_a} + \\
&\quad + \int_0^t ||(-A)^{1-\beta} T(t-s)(-A)^{\beta} \Big(g(s, v_s + y_s) - g(s, u_s + y_s) ||_{\beta} \Big) \, ds + \\
&\quad\quad + M \sum_{i=1}^{n} L_i ||u_{t_i} - v_{t_i}||_{\mathcal{B}} \\
&\leq \; ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g ||u - v||_a + \\
&\quad + \int_0^t \frac{C_{1-\beta}}{(t-s)^{1-\beta}} ||(-A)^{\beta} (g(s, v_s + y_s) - g(s, u_s + y_s))||_{\beta} \, ds + \\
&\quad\quad + M ||u - v||_a \sum_{i=1}^{n} L_i \\
&\leq \; ||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g ||u - v||_a + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^{\beta} ||u - v||_a \, ds + M ||u - v||_a \sum_{i=1}^{n} L_i \\
&\leq \; \left[||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g \Big(||(-A)^{-\beta}||_{\beta} + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^{\beta} \Big) + M \sum_{i=1}^{n} L_i \right] ||u - v||_a \\
&= \; K_a \left[||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g \Big(||(-A)^{-\beta}||_{\beta} + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^{\beta} \Big) + M \sum_{i=1}^{n} L_i \right] ||u - v||_a,
\end{aligned}
$$

ou seja, Γ_2 é uma contração em $B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)]$. Disso, de (4.21), do Lema 4.14, de

$$
D \subset \overline{D} \Rightarrow \alpha(D) \leq \alpha(\overline{D}), \; \forall \, D \subset B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)],
$$

em virtude de ***(ii)*** do Lema 4.12, e de ***(ii)*** do Lema 4.13, segue que

$$
\begin{aligned}
\alpha\Big(\Gamma(W)\Big) &= \alpha\Big((\Gamma_1 + \Gamma_2)(W)\Big) \\
&\leq \alpha\Big((\Gamma_1(W)\Big) + \alpha\Big(\Gamma_2(W)\Big) \\
&\leq \alpha\Big(\overline{(\Gamma_1(W)}\Big) + \alpha\Big(\Gamma_2(W)\Big) \\
&= 0 + \alpha\Big(\Gamma_2(W)\Big) = \alpha\Big(\Gamma_2(W)\Big) \\
&\leq \overline{K}_a \alpha(W), \; \forall \, W \subset B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)],
\end{aligned}
$$

em que

$$
\overline{K}_a := K_a \left[||(-A)^{-\beta}||_{\beta} L_g \Big(||(-A)^{-\beta}||_{\beta} + \frac{C_{1-\beta}}{\beta} a^{\beta} \Big) + M \sum_{i=1}^{n} L_i \right] \in (0, 1).
$$

Logo, do Teorema 4.10, segue que $\Gamma : B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)] \longrightarrow B_{r_0}[0, \mathcal{S}(a)]$ tem um ponto fixo. Portanto, definindo $z : (-\infty, a] \longrightarrow X$ por

$$
z(t) = x(t) + y(t), \; \forall t \in (-\infty, a]
$$

segue, usando os mesmos argumentos do final da demonstração do Teorema 4.9, que $z : (-\infty, a] \longrightarrow X$ é uma solução do problema de valor inicial (4.1). ■

Considerações finais

Concluímos que, as equações diferenciais parciais, assim como a matemática como um todo, não seriam de muito uso, caso não fosse suas diversas formas de aplicabilidade. Mas, para tanto, é essencial sabermos quais condições garantem que tais tipo de equações possuam soluções, a fim de encontrar as mesmas. Por fim, esses dois resultados (Teoremas 4.2 e 4.9) são um dos poucos que podem nos garantir existência de solução de uma classe de equações diferenciais parciais funcionais neutras com impulsos, veja [27], [30] e [34]. O estudo se dá em virtude de cada vez mais ser encontrado aplicações que podem ser modelados, por essas classes de equações diferenciais parciais, como na mecânica, engenharia elétrica, medicina, biologia, ecologia, entre outras (veja, por exemplo, [19], [23], [31], [32]) e [36]) e, com certeza, existem muitos problemas ainda a serem solucionados utilizando esse tipo de equação.

Esse trabalho me fez ter contato com muitas coisas novas, tanto em teoria, quanto em resultados e técnicas de demonstrações. Por exemplo, aprendi muito sobre a teoria de semigrupos, algo que até então era totalmente inédito para mim e percebi que é uma teoria muito rica e com inúmeras aplicabilidades, dentro do campo de equações diferenciais, algumas das aplicações foi as que vimos, para garantir existência de solução do problema de valor inicial (4.1). Outra teoria, que estudei, e que até então era nova para mim foi a de equações diferencais funcionais neutras com impulsos, o que abriu muito mais a minha perspectiva dessa vasta área e, de certa forma, me preparou para trabalhos futuros, já que tenho interesse em continuar estudando tais tipos de equações, assim como, as aplicabilidades da teoria de semigrupos. Isso é apenas pontos que estudei, o que não tira a importância do restante, o qual com certeza contribui, e muito, para esse trabalho e também para minha carreira acadêmica.

Referências

[1] ANDRADE, F.G. **Contrabilidade para sistema de equações diferenciais**. São José do Rio Preto: Dissertação, 2014.

[2] ALIPRANTIS, C.D.; BORDER, K.C. **Infinite Dimensional Analysis: A Hitchhiker's Guide**. 3ª edição. New York: Springer, 2005.

[3] ARTIN, E. **The Gamma Function**. Leipzig: Verlag B. G. Teubner, 1964.

[4] BACHMAN G.; NARICI, L. **Functional Analysis**. New York: Academic Press, 1966.

[5] BANAS J.; MURSALEEN, M. **Sequence Spaces and Measures of Noncompactness with Applications to Differential and Integral Equations**. New Delhi: Springer, 2014.

[6] BENCHOHRA , M.; HERDERSON, J.; NTOUYAS, S. **Impulsive differential equations and inclusions**. New York: Hindawi Publishing Corporation, 2006.

[7] CARVALHO, A.N. **Análise Funcional II**. São Carlos: Notas de Aula, 2012.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: Eduem, 2011.

[9] DUNFORD, N.; SCHWARTZ, J.T. **Linear Operators Part I: General Theory**. New York: Interscience Publishers, Inc., 1957.

[10] DUGUNDJI, J. **Topology**. Boston: Allyn and Bacon, Inc. 1978.

[11] EZZINBI, K. **The Basic Theory for Partial Functional Differential Equations and Applications**. **3º** ciclo. Damas (Syrie), 2004, pp.60.

[12] GOMES, A.M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. 2ª edição. Rio de Janeiro: UFRJ, 1999.

[13] GRANAS, A.; DUGUNDJI, J. **Fixed Point Theory**. New York: Springer, 2003.

[14] HERNÁNDEZ, E,M. **Existence results for partial neutral functional integrodifferential equations with unbounded delay**. J. Math. Anal. Appl. 292 (2004) 194-210.

[15] HERNÁNDEZ, E,M.;HENRÍQUEZ, H,R. **Existence Results for Partial Neutral Functional Differential Equations with Unbounded Delay**. J. Math. Anal. Appl. 221 (1998) 452-475.

[16] HERNÁNDEZ, E,M.; RABELLO, M.; HENRÍQUEZ, H,R. **Existence of solutions for impulsive partial neutral functional differential equations**. J. Math. Anal. Appl. 331 (2007) 1135-1158.

[17] HINO, Y.; MURAKAMI, S.; NAITO, T. **Functional Differential Equations with Infinite Delay**. Berlin: Springer-Verlag, 1991.

[18] KREYSIG, E. **Introductory Functional Analysis with Applications**. New York: John Wiley, 1978.

[19] LAKSHMIKANTHAM, V.; BAINOV, D.D.; SIMEONOV, P.S. **Theory of impulsive differential equations**. Singapore: World Scientific, 1989.

[20] LANGARO, R. **O Teorema do ponto fixo de Banach e aplicações**. Cascavel: Monografia, 2017.

[21] LIMA, E.L. **Curso de Análise, Volume 1**. 12ª edição. Rio De Janeiro: IMPA, 2009.

[22] LIMA, E.L. **Espaços Métricos**. 3ª edição. Rio De Janeiro: IMPA, 1993.

[23] LIU, L,H. **Nonlinar impulsive evolution equations**. Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 6(1) (1999) 77-85.

[24] MARTIN JR. R.H. **Nonlinear Operators and Differential Equations in Banach Spaces**. Raleigh: John Wiley & Sons, Inc., 1976.

[25] MELO, R.A. **A Teoria de Semigrupo Aplicada às Equações Diferenciais Parciais**. Campina Grande: Dissertação, 2006.

[26] MUNKRES, J.R **Topology**. 2ª edição. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.

[27] NOGUEIRA, S.H **Resultados de existência de soluções para uma equação diferencial funcional com impulsos**. São Carlos: Dissertação, 2002.

[28] PAZY, A. **Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations**. New York: Springer-Verlag New York, Inc., 1983.

[29] PRECUP, R. **Methods in Nonlinear Integral Equations**. Dordrecht: Springer Science+Business Media, 2002.

[30] RABELO, M.N. **Existência de soluções periódicas para equações diferenciais neutras**. São Carlos: Tese, 2007.

[31] ROGOVCHENKO, Y.V. **Impulsive evolution systems: Mains results and new trends.** Dyn. Contin. Discrete Impuls. Syst. 3(1) (1997) 57-88.

[32] ROGOVCHENKO, Y.V. **Nonlinear impulsive evolution systems and applications to populations models.** J. Math. Anal. Appl. (2) (1997) 300-315.

[33] SCHECHTER, M. **Principles of Functional Analysis**. $2^{\underline{a}}$ edição. Providence: American Mathematical Society, 2001.

[34] UNIÃO, G.G. **Teoria de Semigrupos e aplicações à equações impulsivas com retardamento dependendo do estado**. São Carlos: Tese, 2006.

[35] VRABIE, I.I. **$\mathbf{C_0}$-semigroups and Applications**. $1^{\underline{a}}$ edição. Amsterdam: Elsevier, 2003.

[36] WU, J.; XIA, H. **Self-sustained oscillations in a ring array of coupled lossless transmissions lines**. J. Differential Equations. 124(1) (1996) 247-278.