UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

DANIELA BARBIERI

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

Maringá
2010

DANIELA BARBIERI

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientadora: Profª. Drª. Valéria N. Domingos Cavalcanti

Maringá

2010

Estabilização da Equação da Onda com Dissipação e com Condições de Fronteira do Tipo Cauchy-Ventcel

DANIELA BARBIERI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof^a^. Dr^a^. Valéria Neves Domingos Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientadora)

Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Prof. Dr. José Luiz Boldrini
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP-SP

Aprovada em: 21 de outubro de 2010
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F-67, *campus* da Universidade Estadual de Maringá.

Dedico este trabalho primeiramente a Deus; aos meus pais Nadir e Antenor e às minhas irmãs Patrícia e Aline pelo apoio em todos os momentos desta importante etapa em minha vida; ao meu noivo Emersom por compreender a minha ausência durante a realização deste trabalho.

Agradecimentos

A Deus, o que seria de mim sem a fé que eu tenho nele.

À professora Valéria N. D. Cavalcanti pela paciência na orientação e incentivo que tornaram possível a conclusão desta dissertação.

Aos demais professores do mestrado, pelo empenho em nos proporcionar uma boa formação acadêmica; aos professores do curso de matemática da Fafipa-Pr pela motivação; e aos meus professores do Ensino Médio e Fundamental pela grande contribuição em minha formação.

Aos meus pais, irmãs e a toda minha família que, com muito carinho e apoio, não mediram esforços para que eu chegasse até esta etapa de minha vida.

Ao meu noivo Emersom Vidotti, pelo amor, carinho, abraço e conforto; pela paciência, compreensão e dedicação dados a mim que contribuíram para o meu sucesso.

Aos amigos e colegas do mestrado que fizeram parte desses momentos sempre me ajudando e incentivando, em especial à Tássia Hickmann pela amizade e carinho que partilhamos durante nosso caminhar.

Aos colegas de trabalho do Colégio Estadual Dr. José Gerardo Braga que me apoiaram nos momentos difíceis. Em especial à Fabiana Pagnan Figueira com quem dividi as angústias e alegrias do dia-a-dia.

À Capes pelo apoio financeiro, que veio no momento em que eu mais precisava.

Enfim, a todos que de alguma forma passaram pela minha vida e contribuíram para a construção de quem sou hoje. Muito obrigada!

"O fácil se faz logo, o difícil demora um pouco, o impossível entrega nas mãos de Deus, porque para Ele tudo é possível..."

Resumo

Neste trabalho provamos a existência e unicidade de solução e fornecemos taxas de decaimento uniforme para a energia associada à equação da onda com condições de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel dada por

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times \,]0,\infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times \,]0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times \,]0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, tendo uma fronteira suave $\Gamma = \partial\Omega$, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; sendo Γ_0, Γ_1 subconjuntos não-vazios, fechados e disjuntos de Γ. Denotamos por Δ_{Γ_1} o operador Laplace-Beltrame em Γ_1 e por ∂_ν a derivada normal, onde ν é a normal unitária exterior a Γ.

Abstract

In this work we prove the existence and uniqueness of solution and we establish the uniform decay rates for the energy associated to the wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions given by

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{in } \Omega \times \,]0,\infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{on } \Gamma_1 \times \,]0,\infty[, \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_0 \times \,]0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, having a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$, such that $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$; with Γ_0, Γ_1 being nonempty, closed and disjoint. We denote by Δ_{Γ_1} the Laplace-Beltrame operator on Γ_1 and by ∂_ν the normal derivative, where ν represents the unit outward normal field to Γ.

Sumário

Introdução

Esta dissertação tem como objetivo apresentar de maneira didática e pormenorizada os resultados publicados em Cavalcanti et al. [9]. Neste trabalho os autores estudaram existência e unicidade de solução bem como obtiveram taxas de decaimento uniforme para a energia do sistema, quantificadas por soluções de uma certa equação diferencial ordinária não-linear que depende da dissipação; da seguinte equação da onda sujeita à condições de fronteira do tipo Cauchy Ventcel:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0,\infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, tal que $\Gamma_i, i = 0, 1$, são subconjuntos não-vazios, fechados e disjuntos de Γ. Denotaremos por ∇_T o gradiente tangencial em Γ, por Δ_Γ o operador Laplace-Beltrame em Γ e por ∂_ν a derivada normal, onde ν representa o campo de vetores normais unitários exteriores à Γ.

Existem inúmeros resultados relacionados à equação da onda sem o termo de fronteira $\Delta_{\Gamma_1} u$. A condição Cauchy-Ventcel sobre Γ_1 em (0.1) surge quando modelamos corpos vibrantes com fronteira de fina espessura porém com alta rigidez. Tal sistema foi investigado primeiramente por Lemrabet [27, 28] e depois por Lemrabet e Teniou [29]. Em [29] os autores provam a existência e resultados de regularidade para o caso quando a dissipação g é linear.

Bey et al. [2] e Hemmina [17, 18] estudaram a estabilização na fronteira para sistemas elasto-dinâmicos lineares e isotrópicos e equações da onda com condições do tipo Ventcel. Em [17], Hemmina mostra que em condições de fronteira dinâmicas e em domínios "star-shaped", o sistema de elasticidade com condições Ventcel é exponencialmente estável; [17] também fornece um contra-exemplo demonstrando que se $a \equiv 0$ em (0.1) então a energia deste sistema nunca decai exponencialmente, mesmo se a dissipação é aplicada em toda a fronteira.

As dinâmicas condições de fronteira Ventcel foram estudadas por Khemmoundj e Medjden [21]. Estes resultados foram recentemente estudados por Cavalcanti, Khemmoundj e Medjden [10] para operadores lineares $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}_T$ com coeficientes variáveis (no entanto ainda para domínios star-shaped) empregando as novas estimativas de energia combinadas com os métodos de geometria Riemanniana devido a Lasiecka, Triggiani e Yao [25, 26].

Outro trabalho recente de Kanoune e Mehidi [19] estabelece taxas de decaimento de soluções para uma equação da onda semi-linear com condição de fronteira do tipo Cauchy-Ventcel, sem restrições geométricas, entretanto, com uma dissipação linear que é efetiva numa vizinhança de toda a fronteira. Além disso, gostaríamos de mencionar os trabalhos de Littman e Taylor [32], e Hansen e Zuazua [16] que estudam a estabilização na fronteira de uma equação da onda unidimensional.

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem didática do artigo dos autores Cavalcanti, Domingos Cavalcanti, Fukuoka e Toundykov [9], cujos principais objetivos são: (i) provar que o efeito localizado do feedback dissipativo não-linear $a(x)g(u_t)$ é forte o suficiente para garantir a estabilidade exponencial do sistema; (ii) enfraquecer consideravelmente as hipóteses padrão no suporte da dissipação.

A maioria dos resultados nesta direção lidam com domínios "star-shaped" como na Figura 0.1. A fim de apresentar os resultados e métodos de forma mais clara possível, os autores restringem-se a este tipo de domínio. Porém, a técnica apresentada é válida para domínios mais gerais (ver Figura 0.2).

Seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função regular. Definamos ω_1 como sendo uma vizinhança de Γ_1 contida em $\overline{\Omega}$ e subdividamos a fronteira Γ_0 em duas partes: $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$ e $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*$. Agora, seja ω_0 uma vizinhança de $\overline{\Gamma_0^*}$ contida em $\overline{\Omega}$, tal que $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$. Provaremos que se $a(x) \geq a_0 > 0$ no subconjunto aberto

$$\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$$

e se g é monótona crescente tal que $k|s| \leq |g(s)| \leq K|s|$ para $|s| \geq 1$, então a taxa de decaimento uniforme da energia é assegurada. Uma simples secção do domínio com a vizinhança $\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$ está representada na Figura 0.1.

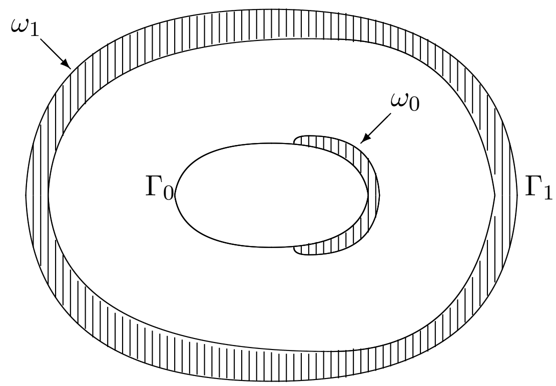

Figura 0.1: ω_1 is a neighbourhood of Γ_1 while ω_0 is a neighbourhood of $\overline{\Gamma_0^*}$, where $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$.

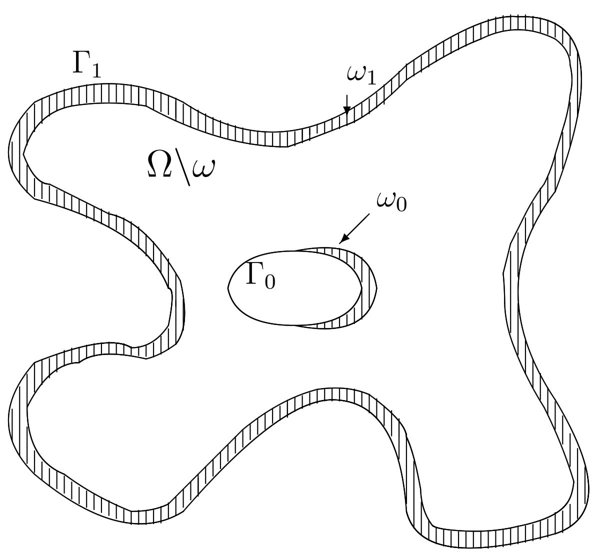

Figura 0.2: ω_1 is a neighbourhood of Γ_1 while ω_0 is a neighbourhood of $\overline{\Gamma_0^*}$, where $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$.

A estratégia utilizada para provar o resultado acima é fazer uso de multiplicadores apropriados de modo a obter a desigualdade de observabilidade, empregando, por exemplo, os métodos semelhantes aos utilizados em [7, 8] combinados com novos "ingredientes" técnicos. Os multiplicadores apropriados seriam, grosseiramente falando, dados por $\nabla f \cdot \nabla u$ onde $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função regular e estritamente convexa cuja construção será feita no capítulo 3.

A organização desta dissertação é a seguinte: no capítulo 1 apresentaremos algumas notações e resultados básicos, necessários ao longo de todo o tabalho; no capítulo 2 provaremos a existência e unicidade de solução para o problema dado utilizando dois métodos: o método de Faedo-Galerkin e a Teoria de Semigrupos; e no capítulo 3 estabeleceremos taxas de decaimento para a energia associada ao sistema.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, define-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, denotando $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha\, \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anula sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função

$v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx, \quad \text{para toda } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Embora, tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|, \ para\ p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [33].

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) - *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de funções integráveis e não negativas que converge quase sempre para uma função u. Se $\liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu$ é finito, então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u \leq \liminf_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.1. *Se $u \in L^1(\Omega)$ então as integrais indefinidas de u são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.2. (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.3. (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [33].

Proposição 1.1.4. (Desigualdade de Hölder) - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3].

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como **Desigualdade de Schwarz**.

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.1.4.1. (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.1.5. (Desigualdade de Interpolação) - *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [34].

Proposição 1.1.6. (Desigualdade de Jensen) - *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)} \int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{med(B)} \int_B F(g(x))dx$$

Demonstração: Ver [38].

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 1.3. (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.7. *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Lema 1.1.1. (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω, *onde* T_u *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi \rangle =$

$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5].

Deste lema tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.8. *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, tal que $u_\nu \to u$ em $L^p_{loc}(\Omega)$, então $u_\nu \to u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.2. (Lema de Gronwall) - *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds,\ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds},\ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.1.3. (Lema de Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C,\ \forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [31].

Teorema 1.4. (Teorema da Média) - *Seja $f : (a,b) \to X$, onde X é um espaço de Banach, uma função contínua. Para todo $t \in [a,b]$ tem-se*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(s)ds = f(t).$$

Demonstração: Ver [15].

1.1.3 Convolução e Regularização

Em toda esta seção consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n$. A prova de todos os resultados desta seção podem ser encontrados em Brèzis [3].

Definição 1.1.1. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a* <u>*convolução*</u> *de f por g por*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Teorema 1.5. *Nas condições da definição 1.1.1 temos*

$$(f * g) \in L^p(\mathbb{R}^n) \quad e \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1}\|g\|_{L^p}.$$

Notação: Dada uma função f denotamos $\breve{f}(x) = f(-x)$.

Proposição 1.1.9. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq +\infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Então se verifica*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (f * g)h = \int_{\mathbb{R}^n} g(\breve{f} * h).$$

Proposição 1.1.10. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$supp\ (f * g) \subset supp\ f + supp\ g.$$

Proposição 1.1.11. *Sejam $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (k natural). Então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula de derivação*

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

Em particular, se $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então $(f * g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Definição 1.1.2. *Denominamos* <u>*sucessão regularizante*</u> *a toda sucessão $\{\rho_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de funções* *tais que*

$$\rho_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad supp\ \rho_n \subset B(0, \frac{1}{n}), \quad \int_{\mathbb{R}^n} \rho_n(x)dx = 1, \quad \rho_n \geq 0 \ \ em \ \ \mathbb{R}^n.$$

Proposição 1.1.12. *Seja $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Então $(\rho_n * f) \to f$ uniformemente sobre todo compacto de R^n.*

Proposição 1.1.13. *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então $(\rho_n * f) \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

1.1.4 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega),\ s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$ $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$ para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}_+$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||x||^2)^s \hat{u}(x) \hat{v}(x) dx.$$

Prova-se que $H^s(\mathbb{R}^n)$ com o produto interno descrito acima é um espaço de Hilbert.

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n-1$, Ω estando localmente do mesmo lado de Γ.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{aligned} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) &\rightarrow L^2(\Omega) \\ u \quad &\mapsto \quad u|_\Omega \end{aligned}$$

que leva u na sua restrição a Ω. Então r_Ω é uma aplicação linear e contínua. Além disso, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, tem-se,

$$D^\alpha(r_\Omega(u)) = r_\Omega(D^\alpha u)$$

no sentido das distribuições. Decorre daí que para todo $m \in \mathbb{N}$ a aplicação

$$\begin{aligned} r_\Omega : H^m(\mathbb{R}^n) &\rightarrow H^m(\Omega) \\ u \quad &\mapsto \quad u|_\Omega \end{aligned}$$

é contínua. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega;\ u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H^s_0(\Omega)\right)' \text{ onde } H^s_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

A fim de definirmos uma topologia para $H^s(\Omega)$ consideremos o seguinte espaço de Banach

$$\frac{H^s(\mathbb{R}^n)}{\ker(r_\Omega)} = \{v + \ker(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\} = \{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

munido da seguinte norma

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in v + \ker(r_\Omega)\}.$$

Por outro lado, para cada $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); \omega \in v + ker(r_\Omega)\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Logo,

$$||[v]|| = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; \omega \in [v]\} = \{\omega \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega(\omega) = r_\Omega(v)\}.$$

Diante disto, face a sobrejerividade de r_Ω, podemos definir

$$||u||_{H^s(\Omega)} = ||r_\Omega v||_{H^s(\Omega)} = ||[v]||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\ker(r_\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\}.$$

Mudido desta norma, para todo $s \geq 0$, $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert. Além disso, se $m \in \mathbb{N}$, as normas

$$\|u\|_{m,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad ||u||_{H^m(\Omega)} = \inf\{||\omega||_{H^m(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega(\omega) = u\},$$

são equivalentes em $H^m(\Omega)$.

Proposição 1.1.14. *Para todo $s \geq 0$, $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.15. *Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua de um espaço no outro.*

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.6. (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \ se\, m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [5].

Lema 1.1.4. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Sejam s_1, s_2 e s_3 números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [30].

Proposição 1.1.16. *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada e m um inteiro tal que $m \geq 1$, e $1 \leq p < \infty$. Então temos as segintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.7. (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [5].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

Proposição 1.1.17. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg) *Se $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

onde p^* *vem dado por* $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, *existe uma constante* $C = C(p,n)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.8. *Quando* $n > 2$ *temos a inclusão* $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ *para todo* ρ *satisfazendo* $2 \leq \rho \leq p$, *onde* p *é dado por:* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$.

Demonstração: Ver [12].

Teorema 1.9. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green) - *Seja* Ω *um aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$. *Se* $u, v \in H^1(\Omega)$, *então para* $1 \leq i \leq n$ *temos que*

$$\int_\Omega u\frac{\partial v}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}vdx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *e* ν *denota o vetor normal unitário exterior à* Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$, *temos a fórmula de Green:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v\frac{\partial u}{\partial \nu}d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.10. (Fórmula de Green generalizada) - *Para todo* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$*e* $v \in H^1(\Omega)$, *tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.1.18. (Regularidade dos problemas elípticos) - *Seja* Ω *um aberto de* *classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.1.19. *Seja $I =]a, b[$ limitado ou não. Sejam $G \in C^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $u \in W^{1,p}(I), 1 \leq p \leq +\infty$. Então $G \circ u \in W^{1,p}(I)$ e*

$$(G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

Demonstração: Ver [3].

1.2 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Nesta seção iremos determinar os espaços em que consideradas as variáveis temporal e espacial, os quais são necessários para dar sentido aos problemas de evolução.

Sejam X um espaço de Banach e $a, b \in \mathbb{R}$.

O espaço $L^p(a, b; X)$, $1 \leq p < +\infty$, consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, ou seja as funções $u : (a, b) \to X$, tais que

$$\|u\|_{L^p(a,b;X)} := \left(\int_a^b \|u(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

O espaço $L^\infty(a, b; X)$ consiste das funções (classes) mensuráveis sobre $[a, b]$ com imagem em X, as funções $u : (a, b) \to X$ limitadas quase sempre em (a, b). A norma neste espaço é dada por

$$\|u\|_{L^\infty(a,b;X)} := \sup ess\|u(t)\|_X.$$

O espaço $C^m([a,b];\ X)$, $m = 0,1,\ldots,$ consiste de todas as funções contínuas $u : [a,b] \to X$ que possuem derivadas contínuas até a ordem m sobre $[a,b]$. A norma é dada por

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[a,b]} |u^{(i)}(t)|.$$

Seja $u \in L^1(a,b,X)$. Diremos que $v \in L^1(a,b,X)$ é a derivada fraca de u e escrevemos $u' = v$ desde que

$$\int_a^b \phi'(t)u(t)dt = -\int_a^b \phi(t)v(t)dt$$

para toda $\phi : [a,b] \to \mathbb{R},\ \phi \in C_0^\infty([a,b])$.

O espaço de Sobolev $W^{1,p}(a,b;X)$ consiste de todas as funções vetoriais $u \in L^p(a,b,X)$ tal que u' existe no sentido fraco e $u' \in L^p(a,b,X)$. Ademais,

$$||u||_{W^{1,p}(a,b;X)} = \begin{cases} \left(\displaystyle\int_a^b ||u(t)||_X^p + ||u'(t)||_X^p dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty & \text{se} \quad 1 \leq p < \infty, \\ \sup ess_{a\leq t\leq b}\Big(||u(t)||_X + ||u'(t)||_X\Big) \leq \infty & \text{se} \quad p = +\infty. \end{cases}$$

Escrevemos $H^1(a,b;X) = W^{1,2}(a,b;X)$.

Vejamos algumas propriedades desses espaços, as quais podem ser encontradas em [42]

Proposição 1.2.1. *Sejam $m = 0,1,\ldots;$ $1 \leq p < +\infty$; X e Y espaços de Banach sobre o corpo $\mathbb{K}$, onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Então:*

(a) $C^m([a,b];X)$ é um espaço de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(b) $L^p(a,b;X)$, $1 \leq p < +\infty$ e $L^\infty(a,b;X)$, são espaços de Banach sobre $\mathbb{K}$.

(c) $C([a,b];X)$ é denso em $L^p(a,b;X)$ e a imersão $C([a,b];X) \hookrightarrow L^p(a,b;X)$ é contínua.

(d) Se X é um espaço de Hilbert com produto escalar $(.,.)_X$, então $L^2(a,b;X)$ é também um espaço de Hilbert com produto escalar

$$(u,v)_{L^2(a,b;X)} := \int_a^b (u(t),v(t))_X dt.$$

(e) $L^p(a,b;X)$ é separável, se X for separável e $1 \leq p < +\infty$.

(f) Se $X \hookrightarrow Y$, então $L^r(a,b;X) \hookrightarrow L^q(a,b;Y)$, $1 \leq q \leq r \leq +\infty$.

Proposição 1.2.2. *Seja $u \in W^{1,p}(a,b;X)$ para algum $1 \leq p \leq \infty$. Então, $u \in C([a,b];X)$.*

Lembremos que se U e Ψ são dois espaços vetoriais topológicos, temos que $\mathcal{L}(U,\Psi)$ denota o espaço das funções lineares e contínuas de U em Ψ.

O espaço das distribuições sobre (a,b) com imagem em X, será denotado por

$$\mathcal{D}'(a,b;X).$$

Logo, $\mathcal{D}'(a,b;X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(a,b);X)$, ou seja, é o conjunto de todas as aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(a,b)$ em X. Noção de convergência em $\mathcal{D}'(a,b;X)$: seja $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ logo $S : \mathcal{D}(a,b) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(a,b)$ então $\langle S,\theta_\mu\rangle \to \langle S,\theta\rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ se $\langle S_\nu,\theta\rangle \to \langle S,\theta\rangle$ em X, $\forall\,\theta \in \mathcal{D}(a,b)$. Cada elemento desse conjunto é uma distribuição sobre (a,b) com valores no espaço de Banach X.

A derivada $\dfrac{dS}{dt}$ para $S \in \mathcal{D}'(a,b;X)$, é definida como um único elemento deste espaço que satisfaz,

$$\left\langle \frac{dS}{dt},\varphi \right\rangle = -\left\langle S,\frac{d\varphi}{dt}\right\rangle; \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função $S \mapsto \dfrac{dS}{dt}$ é uma função contínua de $\mathcal{D}'(a,b;X)$ sobre ele mesmo.

Agora se $f \in L^2(a,b;X)$ definimos $\tilde{f} \in \mathcal{D}'(a,b;X)$ por

$$\langle \tilde{f},\varphi\rangle = \int_a^b f(t)\varphi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(a,b).$$

A função de $L^2(a,b;X)$ em $\mathcal{D}'(a,b;X)$ que a cada f associa $\tilde{f}$, é linear e contínua, e ainda é injetora. Portanto, identificando $\tilde{f}$ com f obtemos

$$L^2(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X)$$

O espaço $L^1_{loc}(a,b;X)$ é o espaço das funções u tal que para todo compacto $K \subset (a,b)$, $\chi_K u$ pertence à $L^1(a,b;X)$, onde χ_K denota a função característica de K.

Teorema 1.11. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e separável, $1 < p < +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. (a) A cada função $v \in L^q(a,b;X')$ corresponde um único funcional $\overline{v} \in Y'$, onde $Y' = L^p(a,b;X)$, dado por*

$$\langle \overline{v}, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt \quad \forall u \in Y. \tag{1.1}$$

Reciprocamente, para cada $\overline{v} \in Y'$ corresponde exatamente uma única função $v \in L^q(a,b;X')$ dada por (1.1). Além disso

$$\|\overline{v}\|_{Y'} = \|v\|_{L^q(a,b;X')}$$

(b) O espaço de Banach $L^p(a,b;X)$ é reflexivo e separável.

Demonstração: Ver [42].

Assim, podemos identificar Y' com $L^q(a,b;X')$, pois pelo Teorema acima existe um isomorfismo isométrico entre os dois espaços. Donde

$$\langle v, u \rangle = \int_a^b \langle v(t), u(t) \rangle_X dt; \quad \|v\| = \left(\int_a^b \|v(t)\|^q_{X'} dt \right)^{\frac{1}{q}}; \quad \forall u \in Y; \quad \forall v \in Y'.$$

Sejam a e b dois números reais, $a < b$, X e Y espaços de Banach com X denso em Y e $m \geq 1$ inteiro, definamos

$$W(a,b) := \{u \in L^2(a,b;X); \frac{d^m u}{dt^m} = u^{(m)} \in L^2(a,b;Y)\},$$

onde $u^{(m)}$ é neste sentido uma distribuição em $\mathcal{D}'(a,b;X)$. O conjunto $W(a,b)$ munido da norma

$$\|u\|_{W(a,b)} = \left[\|u\|^2_{L^2(a,b;X)} + \|u^{(m)}\|^2_{L^2(a,b;Y)}\right]^{\frac{1}{2}},$$

é um espaço de Banach.

Denotaremos por $\mathcal{D}(a,b;X)$ o espaço localmente convexo completo das funções vetoriais
$\varphi : (a,b) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em (a,b). Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(a,b;X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de (a,b) tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (a,b)$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(a,b;X)$.

Denotaremos por $H_0^1(a,b;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(a,b;X) := \{v \in L^2(a,b:X), v' \in L^2(a,b:X), \quad v(a) = v(b) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((w,v)) = \int_a^b (w(t),v(t))_X dt + \int_a^b (w'(t),v'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(a,b;X)$ com o seu dual $[L^2(a,b:X)]'$, via Teorema de Riesz, obtemos

$$\mathcal{D}(a,b;X) \hookrightarrow H_0^1(a,b;X) \hookrightarrow L^2(a,b:X) \hookrightarrow H^{-1}(a,b;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(a,b;X),$$

onde $H^{-1}(a,b;X) = [H_0^1(a,b;X)]'$.

Proposição 1.2.3. *Seja $u \in L^2(a,b;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(a,b;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle, \xi)_X; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(a,b), \quad \forall \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [35].

Da proposição anterior podemos identificar f com u'. De posse disso, diremos que se $u \in L^2(a,b:X)$ então $u' \in H^{-1}(a,b;X)$.

Corolário 1.2.3.1. *A aplicação*

$$u \in L^2(a,b:X) \mapsto u' \in H^{-1}(a,b;X);$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [35].

Teorema 1.12. (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [31].

Lema 1.2.1. *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [39].

1.3 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ, ou seja,$\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Inicialmente, vamos definir o espaço $H^s(\Gamma)$.

No caso $\Omega = \mathbb{R}^n_+$, temos que $\Gamma = \{(x', 0); x' \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, identificamos toda função u definida em Γ com a função $x' \to u(x', 0)$ do $\mathbb{R}^{n-1}$ em $\mathbb{R}$. Com tal identificação temos que $\mathcal{D}(\Gamma) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$, $L^p(\Gamma) = L^p(\mathbb{R}^{n-1})$. Portanto, neste caso simples, definimos $H^s(\Gamma)$ como sendo $H^s(\mathbb{R}^{n-1})$.

Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Fixemos um sistema de cartas locais de Γ, isto é, $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), ..., (U_N, \varphi_N)\}$, e funções testes $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N$ no $\mathbb{R}^n$ tais que

$$supp(\sigma_j) \subset U_j,\ j = 1, 2, ..., N, \qquad \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(x) = 1,\ x \in \Gamma.$$

Dada uma função w definida em Γ, para todo $j = 1, 2, ..., N$ seja

$$w_j(y) = \begin{cases} (\sigma_j w)(\varphi_j^{-1}(y', 0)) & \text{se} \quad y' \in \Omega_0 =]0, 1[^{n-1}, \\ 0 & \text{se} \quad y' \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \Omega_0. \end{cases}$$

Sendo $supp(\gamma_0 \sigma_j) = supp\ \sigma_j \cap \Gamma \subset U_j \cap \Gamma$ e como φ_j aplica $U_j \cup \Gamma$ sobre $\Omega_0 \times \{0\}$, temos

$$supp\ w_j \subset \varphi_j(supp\ \sigma_j \cup \Gamma) \subset \Omega_0 \times \{0\}.$$

Decorre daí que se $w \in \mathcal{D}(\Gamma)$, então w_j pertence a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, ..., N$.

Dado $s > 0$ consideremos $H^s(\Gamma)$ como sendo o espaço vetorial das funções w definidas em Γ tais que $w_j \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})$ para todo $j = 1, 2, ...N$, munido do seguinte produto escalar:

$$(w, v)_{H^s(\Gamma)} = \sum_{j=1}^{N} (w_j, v_j)_{H^s(\mathbb{R}^{n-1})};$$

para todo $w, v \in H^s(\Gamma)$. Temos que $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert com $\mathcal{D}(\Gamma)$ denso em $H^s(\Gamma)$.

Proposição 1.3.1. *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [34].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.3.1 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0,

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

tal que

$$\gamma_0 u = u|_\Gamma; \quad \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.13. *A função traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ é sobrejetiva e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [34].

Consideremos, agora, Ω uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.14. *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,, \ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita, linear e contínua.

Demonstração: Ver [34].

Considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos respectivos produtos internos

$$\begin{aligned}(u,v)_{\mathcal{H}^0} &= (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\ u\,, v \in \mathcal{H}^0(\Omega),\\ (u,v)_{\mathcal{H}^1} &= (u,v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\ u\,, v \in \mathcal{H}^1(\Omega),\end{aligned}$$

temos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.2. *A aplicação linear $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned}\gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) &\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)\\ u &\mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u).\end{aligned}$$

Além disso, a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.

Demonstração: Ver [5].

Proposição 1.3.3. *A aplicação linear $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [5].

1.3.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$.

Conforme visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma), \tag{1.2}$$

linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e que admite uma inversa à direita também linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & L^2(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, \end{array} \tag{1.3}$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$; onde $\gamma(u(t))$ é a aplicação γ dada em (1.2) aplicada em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.2) e (1.3) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.3) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita τ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega)),;\gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.4}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, \end{array} \tag{1.5}$$

dada por $(\gamma u)(t) = \gamma(u(t))$ e que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.3).

Proposição 1.3.4. *Seja $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então $\gamma u' = (\gamma u)'$.*

Demonstração: Ver [35].

1.3.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ constituído dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & M^{\perp} \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{array} \tag{1.6}$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v')$ $= \langle f, v\rangle; \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f'$. A aplicação definida em (1.6) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ definimos $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt; \tag{1.7}$$

para todo $w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim, temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma} f; \end{array} \tag{1.8}$$

onde $\widetilde{\gamma} f$ definido por (1.7), é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim, são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.3.5. *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma} u.$$

Proposição 1.3.6. *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\widetilde{\gamma} u' = (\gamma u)'.$$

Teorema 1.15. *A aplicação traço (1.8) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\widetilde{\tau}: H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

Demonstração: Ver [35].

Observação 1.3.1. *Se nos resultados anteriormente vistos considerarmos os espaços de Hilbert* $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ *ou* $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$*, ao invés de* $H^m(\Omega)$*, em conjunto com as Proposições 1.3.2 e 1.3.3 obteremos a existência das aplicações lineares e contínuas*

$$\widetilde{\gamma} : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

e

$$\widetilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

1.4 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no Capítulo 2. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [11].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.16. (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução absolutamente contínua $x(t)$ de (1.9) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Corolário 1.16.1. *Sejam $\Omega = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre Ω. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.9) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

1.5 Topologia Fraca - $\sigma(E, E')$ e Topologia Fraco $\star$ -$\sigma(E', E)$

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Seja E um espaço de Banach, E' o seu dual topológico e consideremos $f \in E'$. Designaremos por $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$, a aplicação dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$. À medida que f percorre E', obtemos uma família $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$ de aplicações de E em $\mathbb{R}$.

Definição 1.5.1. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E para a qual são contínuas todas as aplicações $\varphi_f,\ f \in E'$.*

Notação: Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E convergente para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.5.1. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em E se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) *Se* $x_n \to x$ *em E, então* $x_n \rightharpoonup x$*em E.*

(iii) *Se* $x_n \rightharpoonup x$*em E, então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *e* $f_n \to f$ *em* E', *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [3].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.5.2. *A topologia fraco* $\star$, *também designada por* $\sigma(E', E)$, *é a topologia menos fina sobre* E' *que torna contínuas todas as aplicações* J_x.

Proposição 1.5.2. *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* E', *então:*

(i) $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) *Se* $f_n \to f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iii) *Se* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E', *então* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

(iv) *Se* $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ *em* E', *então* $||f_n||_{E'}$ *é limitada e* $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$.

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.1. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de* E, *então existe uma subsequência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $x \in E$, *tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.5.2. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência limitada de* E', *então existe uma subsequência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $f \in E'$, *tal que*

$$f_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.17. *Sejam E e F espaços de Banach e T um operador linear e contínuo de E em F. Então, T é contínuo em E, munido da topologia fraca $\sigma(E, E')$, em F, munido da topologia fraca $\sigma(F, F')$. A recíproca também é verdadeira.*

Demonstração: Ver [3].

1.6 Teoria Espectral

Consideremos W e H dois espaços de Hilbert tais que W é denso em H e $W \overset{c}{\hookrightarrow} H$, isto é, W está compactamente imerso em H. Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em $W \times W$, isto é,

$$\exists\ \alpha > 0\ ;\ \ |a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_W^2\ ;\ \ \forall v \in W.$$

Considere

$$D(A) = \{u \in W\ ;\ \ \text{a forma antilinear } v \mapsto a(u, v) \text{ é contínua }\},$$

onde W está munido com a topologia induzida de H.

Pelo Teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$ tal que $a(u, v) = (Au, v)_H$, $\forall v \in W$. Notemos que desta forma definimos um operador A com domínio:

$$D(A) = \{u \in W\ ;\ \exists f \in H \text{ tal que } a(u, v) = (f, v)_H\ ,\ \forall v \in W \text{ e } Au = f\}.$$

Temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset W \to H$ é um operador de H. O operador A acima é denominado o operador determinado pela terna $\{W, H, a(u, v)\}$ e denotamos por $A \leftrightarrow \{W, H, a(u, v)\}$.

Proposição 1.6.1. ***(Teorema Espectral)****-Nas condições acima, obtemos* *(i)* *A é auto-adjunto e existe um sistema ortonormal completo $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de H constituído de vetores próprios de A.*

(ii) *Se $(\lambda_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ são os valores próprios de A correspondentes aos $(\omega_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$, então*

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_\nu \leq \cdots , \quad e \; \lambda_\nu \longrightarrow \infty.$$

(iii) *O domínio de A é dado por*

$$D(A) = \left\{ u \in H \, ; \; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 |(u,\omega_\nu)_H|^2 < \infty \right\}.$$

(iv)

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u,\omega_\nu)_H \omega_\nu \; , \; \forall u \in D(A).$$

Demonstração: Ver [36].

1.7 Operadores Maximais Monótonos e Operadores Dissipativos

Sejam V e W espaços de Banach reais, então $V \times W$ denotará o espaço produto cartesiano. Um elemente do espaço $V \times W$ será escrito na forma $[v,w]$ para $v \in V$ e $w \in W$. Um operador multivalor A de V em W será visto como um subconjunto de $V \times W$. Se $A \subset V \times W$, definimos

$$\begin{aligned} Av &= \{w \in W; [v,w] \in A\}; \qquad D(A) = \{v \in V; Av \neq \emptyset\}; \\ Im(A) &= \bigcup_{v\in D(A)} Av; \qquad A^{-1} = \{[w,v]; [v,w] \in A\}. \end{aligned}$$

Nesta seção V denotará um espaço de Banach real, V' o seu espaço dual. O valor de $v^* \in V'$ em $v \in V$ será denotado por $\langle v, v^* \rangle$ ou $\langle v^*, v \rangle$.

1.7.1 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Banach

Definição 1.7.1. *Um conjunto $A \subset V \times V'$ é chamado de monótono se*

$$\langle u_1 - u_2, v_1 - v_2 \rangle \geq 0; \quad \forall\ [u_i, v_i] \in A, i = 1, 2.$$

Um subconjunto monótono de $V \times V'$ é chamado de maximal monótono se ele não está propriamente contido em algum outro subconjunto monótono de $V \times V'$.

Se A é um operador de valor único de $V \times V'$, então a condição de monotonicidade torna-se

$$\langle u_1 - u_2, Au_1 - Au_2 \rangle \geq 0; \quad \forall\ u_1, u_2 \in D(A).$$

Definição 1.7.2. *Seja A um operador de valor único definido de V em V' tal que $D(A) = V$. A é dito ser hemicontínuo em V se*

$$w - \lim_{t \to 0} A(u + tv) = Au, \quad \forall u, v \in V;$$

onde "$w - lim$" denota que a convergência é fraca.

Proposição 1.7.1. *Seja V um espaço de Banach reflexivo e B um operador monótono, hemicontínuo e limitado de V em V'. Seja A um operador maximal monótono de V em V'. Então, $A + B$ é maximal monótono.*

Demonstração: Ver [1].

1.7.2 Subdiferencial de Funções Convexas

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu espaço dual topológico.

Definição 1.7.3. *A G-diferencial de $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ em $u \in D(\varphi)$ é uma função $f \in V'$ tal que $f(v) = \varphi'(u, v)$, $\forall\ v \in V$. Esta função f é única, é denotada por $\varphi'(u)$ e dizemos que φ é G-diferenciável em u.*

Observação: $\varphi'(u,v) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\Big(\varphi(u+tv)-\varphi(u)\Big)$ é a derivada direcional de u na direção de v.

Definição 1.7.4. *Uma função convexa e própria em V é uma função φ de V em $(-\infty,+\infty]$, tal que φ não é identicamente igual a $+\infty$ e*

$$\varphi((1-\lambda)u+\lambda v) \leq (1-\lambda)\varphi(u)+\lambda\varphi(v),$$

onde $u,v\in V$ e $0\leq\lambda\leq 1$.

Definição 1.7.5. *Seja $\varphi : V\to(-\infty,+\infty]$ convexa e própria. A subdiferencial de φ em $u\in D(\varphi)$ é o conjunto de todos os funcionais $u^*\in V'$ tais que*

$$\langle u^*, v-u\rangle \leq \varphi(v)-\varphi(u), \quad v\in V,$$

e é denotado por $\partial\varphi(u)$. Cada um desses $u^*\in\partial\varphi(u)$ é também chamado de subdiferencial de φ em u.

Proposição 1.7.2. (Kachurovskii) *Seja K convexo em V e seja $\varphi : V\to(-\infty,+\infty]$ G-diferenciável em cada $u\in K$, $K=D(\varphi)$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) φ *é convexa,*

(ii) $\langle\varphi'(u), v-u\rangle \leq \varphi(v)-\varphi(u), \ \ \forall\ u,v\in K,$

(iii) $\langle\varphi'(u)-\varphi'(v), u-v\rangle \geq 0\ \ \forall\ u,v\in K.$

Demonstração: Ver [40].

Proposição 1.7.3. *Seja $\varphi : V\to(-\infty,+\infty]$ um funcianal convexo e próprio. Se φ é G-diferenciável em $u\in int(D(\varphi))$, então $\partial\varphi(u)=\{\varphi'(u)\}$. Se φ é contínua e $\partial\varphi(u)$ é único, então φ é G-diferenciável em u.*

Demonstração: Ver [40].

Definição 1.7.6. *A função $\varphi : V \to (-\infty, +\infty]$ é dita semicontínua inferiormente em V se*

$$\liminf_{v \to u} \varphi(v) \geq \varphi(u), \quad \forall\ u \in V.$$

Teorema 1.18. *Seja φ uma função própria, convexa e semicontínua inferiormente em V. Então $\partial\varphi$ é um operador maximal monótono de V em V'.*

Demonstração: Ver [1].

1.7.3 Operadores Dissipativos

Seja V um espaço de Banach real e V' o seu dual. Denotaremos por $F : V \to V'$ a aplicação dualidade de V.

Definição 1.7.7. *Um subconjunto A de $V \times V$ (equivalentemente um operador multivalor de V nele mesmo) é chamado de dissipativo se para quaisquer $[x_i, y_i] \in A,\ i = 1, 2,$ existe $f \in F(x_1 - x_2)$ tal que*

$$f(y_1 - y_2) \leq 0.$$

Um conjunto dissipativo A é dito ser maximal dissipativo se não está contido propriamente em qualquer subconjunto de $V \times V$.

Um conjunto dissipativo A é chamado de m-dissipativo se

$$Im(I - A) = V.$$

Em particular, se V é um espaço de Hilbert e A é m-dissipativo, então, A é um operador de valor único e $-A$ é maximal monótono.

1.7.4 Operadores Maximais Monótonos em Espaços de Hilbert

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $((\cdot, \cdot))$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H e consideremos $A : D(A) \subset H \to H$ um operador não limitado de H.

Definição 1.7.8. *Dizemos que A é um operador* monótono *se para todo $v \in D(A)$ tivermos $((Av, v)) \geq 0$.*

A é dito maximal monótono *se, for monótono e, além disso, $Im(I + A) = H$, ou seja,*

$$\forall f \in H, \exists u \in D(A) \text{ tal que } u + Au = f.$$

Proposição 1.7.4. *Seja A um operador maximal monótono sobre H, então temos:*

(i) $\overline{D(A)} = H$.

(ii) *A é fechado.*

(iii) *$\forall \lambda > 0$, $(I + \lambda A)$ é bijetor de $D(A)$ sobre H e $(I + \lambda A)^{-1}$ é limitado com $|(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1$.*

Demonstração: Ver [4].

Teorema 1.19. ***(Hille-Yosida)*** *Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.10}$$

Além disso, se verifica

$$|u(t)| \leq |u_0| \;\; e \;\; \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall\, t \geq 0, \tag{1.11}$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico

$$||u||_{D(A)} = |u| + |A\,u|.$$

Demonstração: Ver [4].

1.8 O Teorema de Holmgren

Consideremos um plano $\pi \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ de equação

$$\pi = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}; \sum_{i-1}^{n} a_i x_i + bt = c\}$$

onde $(a_i)_{i=1}^n, b$ e c são constantes arbitrárias. O polinômio característico $P(a_1, ..., an, b)$ associado ao operador $P(D)$ é definido por

$$P(a_1, ..., an, b) = b^2 - \sum_{i-1}^{n} |a_i|^2$$

e, portanto, π é característico de $P(D) \Leftrightarrow \sum_{i-1}^{n} |a_i|^2 = b^2$.

Teorema 1.20. (Holmgren) *Sejam $\mathcal{O}_1$ e $\mathcal{O}_2$ dois abertos convexos do R^k tais que $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2$ e seja $P(D)$ um operador diferencial com coeficientes constantes, tal que todo plano π característico de $P(D)$ que verifica $\pi \cap \mathcal{O}_2 \neq \emptyset$ satisfaz também $\pi \cap \mathcal{O}_1 \neq \emptyset$. Então, qualquer solução $u \in \mathcal{D}'(\mathcal{O}_2)$ da equação $P(D)u = 0$ tal que $u = 0$ em $\mathcal{O}_1$, verifica $u = 0$ em $\mathcal{O}_2$.*

Demonstração: Ver Lions [30].

1.9 O Gradiente Tangencial e o Operador Laplace-Beltrame

Seja $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície regular, orientada, compacta e sem bordo. Seja ν o campo vetorial normal unitário exterior a $\mathcal{M}$. Para $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $x \cdot y$ o produto interno em R^n.

O gradiente tangencial denotado por $\nabla_T f$ de uma função $f : V \to \mathbb{R}$ de classe C^1, definida em uma vizinhança V (aberta) de uma superfície $\mathcal{M}$ é dado por:

$$\nabla_T f := \nabla_{\mathbb{R}^n} f - (\nabla_{\mathbb{R}^n} f \cdot \nu)\nu, \tag{1.12}$$

Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é uma função regular temos

$$\nabla f = \partial_\nu f \ \nu + \nabla_T f \quad \text{em} \ \ \mathcal{M}, \tag{1.13}$$

$$|\nabla f|^2 = (\partial_\nu u)^2 + |\nabla_T f|^2 \quad \text{em} \ \ \mathcal{M}, \tag{1.14}$$

onde ∂_ν representa a derivada normal exterior a $\mathcal{M}$ e a identidade (1.13) provém do fato que $\nabla f = c_1 \ \nu + \nabla_T f$, logo

$$\underbrace{\nabla f \cdot \nu}_{\partial_\nu f} = c_1 \ \underbrace{\nu \cdot \nu}_{=1} + \underbrace{\nabla_T f \cdot \nu}_{=0}$$

e portanto, $c_1 = \partial_\nu f$.

O operador Laplace-Beltrami, denotado por $\Delta_{\mathcal{M}} f$ de uma função $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 é definido por

$$\Delta_{\mathcal{M}} f = div_T \nabla_T f, \tag{1.15}$$

onde $div_T \nabla_T f$ é o divergente do campo vetorial $\nabla_T f$.

Consideremos $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Definimos a projeção tangencial q_T sobre o plano tangente a $\mathcal{M}$ no ponto $x \in \mathcal{M}$ por

$$q_T(x) = q(x) - (q(x) \cdot \nu(x))\nu(x).$$

Assumindo que $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um campo vetorial de classe C^1, temos

$$\int_{\mathcal{M}} q_T \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} div(q_T) \, f \, d\mathcal{M}. \tag{1.16}$$

Resulta de (1.16), em particular, para $q_T = \nabla_T g$ (g de classe C^2) que

$$\int_{\mathcal{M}} div_T \nabla_T g \, f \, d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} \nabla_T g \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M}, \tag{1.17}$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{M}} \Delta_{\mathcal{M}} g \, f \, d\mathcal{M} = -\int_{\mathcal{M}} \nabla_T g \cdot \nabla_T f \, d\mathcal{M}. \tag{1.18}$$

Definamos o operador linear $-\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} : H^1(\widetilde{\mathcal{M}}) \to H^{-1}(\widetilde{\mathcal{M}})$, onde $\widetilde{\mathcal{M}}$ é um subconjunto aberto e não-vazio de $\mathcal{M}$ (ou a superfície $\mathcal{M}$ inteira) tal que

$$\langle -\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} f, g \rangle = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} \nabla_T f \cdot \nabla_T g \, d\mathcal{M}, \quad \forall \; f, g \in H^1(\widetilde{\mathcal{M}}) \tag{1.19}$$

e, em particular,

$$\langle -\Delta_{\widetilde{\mathcal{M}}} f, f \rangle = \int_{\widetilde{\mathcal{M}}} |\nabla_T f|^2 \, d\mathcal{M}, \quad \forall \; f \in H^1(\widetilde{\mathcal{M}}). \tag{1.20}$$

Lema 1.9.1. *Para todo $r > 0$ suficientemente pequeno definamos*

$$\omega_r = \Big(\bigcup_{x \in \Gamma} B_r(x) \Big) \cap \Omega,$$

onde $B_r(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio r, com $x \in \Gamma = \partial\Omega$. Existem conjuntos abertos $U_1, ..., U_m$ e uma constante positiva r_0 que verifica as seguintes propriedades:

(i) $\forall r \in \,]0, r_0[$, $\overline{\omega}_r \subset \bigcup_{i=1}^m U_i$, *onde $\overline{\omega}_r$ denota o fecho de ω_r em $\mathbb{R}^n$.*

(ii) $\forall x \in \omega_r \cap U_i$, *existe um único par $(y, z) \in (\Gamma \cap U_i) \times]0, r[$, onde $x = y - z\nu(y)$; $i = 1, ...m$, e $\nu(y)$ é a normal unitária exterior à Γ em y.*

Demonstração: Ver [13].

Para maiores informação sobre o assunto tratado nesta seção, sugerimos ao leitor as referências [8] e [14].

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

2.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ onde $\Gamma_i, i = 0, 1$, são não vazios, fechados e disjuntos. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0,\infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0,\infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0,\infty[, \\ u(x,0) = u^0(x), \;\; u_t(x,0) = u^1(x); & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Assumamos as seguintes hipóteses:

(**H.1**) A função não linear $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ é monótona crescente;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) Existem k e K constantes positivas tais que $ks \leq g(s) \leq Ks, |s| > 1$.

(**H.2**) $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa.

No que segue, definiremos os espaços que serão utilizados ao longo do trabalho.

Consideremos

$$\begin{aligned} H^1_{\Gamma_0}(\Omega) &= \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\}, \\ \mathcal{V} &= \{v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}, \end{aligned}$$

munidos das respectivas normas

$$||v||^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla v|^2 dx \quad \text{ e } \quad ||v||^2_{\mathcal{V}} = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\gamma \right).$$

Com as normas acima definidas e observando que elas são provenientes dos produtos internos

$$(v,u)_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx \quad \text{ e } \quad (v,u)_{\mathcal{V}} = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u \; dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \cdot \nabla_T u \; d\gamma;$$

decorre que $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ e $\mathcal{V}$ são espaços de Hilbert.

As seguintes notações serão utilizadas:

$$Q_T = \Omega \times \;]0,T[, \;\; \Sigma = \Gamma \; \times \;]0,T[, \;\; \Sigma_i = \Gamma_i \; \times \;]0,T[, \;\; i = 0,1.$$

$$||v||^2_\Omega = \int_\Omega |v(x)|^2 dx \;\text{ e }\; ||v||^2_\Gamma = \int_\Gamma |v|^2 d\Gamma.$$

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x) \; dx \;\text{ e }\; (u,v)_\Gamma = \int_\Gamma u(x)v(x) \; dx.$$

O principal resultado deste capítulo vem enunciado no Teorema abaixo.

Teorema 2.1. *Suponha que as hipóteses (H.1) e (H.2) sejam verificadas.*

(i) Se $\{u^0, u^1\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ e satisfazem a condição $\partial_\nu u^0 - \Delta_{\Gamma_1} u^0 = 0$ q.s. em Γ_1, então existe uma única solução do problema (2.1) na classe

$$u \in L^\infty \left(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \right) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

(ii) Se $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, *então existe uma única solução do problema (2.1) na seguinte classe*

$$u \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1\left(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)\right).$$

A solução obtida no item (i) é denominada solução forte ou solução regular de (2.1), enquanto que a solução obtida no item (ii) é denominada solução fraca de (2.1).

No que segue, usaremos u' para designar a derivada da função u em relação à variável temporal t, ou seja, $u' = \dfrac{du}{dt} = u_t$.

Este capítulo se dedica à existência e unicidade de soluções para o problema apresentado. Iniciaremos com o método de Faedo-Galerkin que, apesar de exigir mais regularidade das funções envolvidas, é um método didático e de fácil compreensão. Na sequência, utilizaremos a teoria de semigrupos que permite uma aplicação muito mais eficaz mas, no entanto, exige um conhecimento mais profundo da teoria utilizada.

2.2 Existência de Solução via Método de Faedo-Galerkin

Nesta seção, além das hipóteses (H.1) feitas sobre g, iremos considerar

(iv) $g \in C^1(\mathbb{R})$;

(v) Existe $M > 0$ verificando $|g'(s)| \leq M(1 + |s|^{p-1})$, $|s| > 1$, onde $1 < p \leq \dfrac{n}{n-4}$; se $n > 4$ e $p > 1$; se $n \leq 4$.

A escolha de p nas condições acima se justifica para garantirmos a imersão

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

onde $q = \dfrac{2n}{n-4}$.

2.2.1 Solução Regular

Nesta subseção provaremos a existência de solução regular para o problema (2.1).

Multiplicando a equação diferencial parcial $u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0$ por uma função admissível v, integrando o resultado em Ω e aplicando a fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)v(x,t)\ dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x,t)\ dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)v(x,t)\ d\Gamma$$
$$+ \int_\Omega a(x)g(u_t(x,t))v(x,t)\ dx = 0, \quad \forall t \in]0,\infty[.$$

Como $u = 0$ em $\Gamma_0\times]0,\infty[$ e $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ temos

$$\int_\Omega u_{tt}(x,t)v(x,t)\ dx + \int_\Omega \nabla u(x,t)\cdot\nabla v(x,t)\ dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)v(x,t)\ d\Gamma$$
$$+ \int_\Omega a(x)g(u_t(x,t))v(x,t)\ dx = 0, \quad \forall t \in]0,\infty[.$$

Consideremos $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço $W = \{w \in H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}; \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} w \text{ em } \Gamma_1\}$, que é densa em $H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$ e em $\mathcal{V}$ (ver apêndice).

Definamos

$$V_m = [w_1, ..., w_m]$$

e consideremos em V_m o problema aproximado

$$(PA)\ \begin{cases} u_m(t) \in V_m \Leftrightarrow u_m(t) = \displaystyle\sum_{i=1}^m h_{im}(t)w_i, \\ (u_m''(t), v) + (\nabla u_m(t), \nabla v) - \displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_m}{\partial \nu}(x,t)v(x,t)d\Gamma + \int_\Omega a(x)g(u_m'(x,t))v(x,t)\ dx = 0, \\ u_m(0) = u_m^0 \to u^0 \text{ em } H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}, \\ u_m'(0) = u_m^1 \to u^1 \text{ em } \mathcal{V}; \end{cases} \tag{2.2}$$

onde as sequências convergentes $\{u_m(0)\}$ e $\{u_m'(0)\}$ provêm do fato que a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é densa nos espaços $H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$.

De modo a resolvermos o problema aproximado (PA), obteremos um problema equivalente e utilizaremos o Teorema de Carathéodory (ver seção 1.4).

Consideremos no problema aproximado (PA) $v = w_j, j = 1, ..., m$. Então,

$$(u''_m(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) - (\partial_\nu u_m(t), w_j)_{\Gamma_1} + (a(x)g(u'_m(t)), w_j) = 0; \;\; j = 1, ..., m.$$

Logo, o sistema de equações acima pode ser escrito na forma:

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h''_{1m}(t) \\ h''_{2m}(t) \\ \vdots \\ h''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix}$$

$$- \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_1 \; d\gamma \\ \displaystyle\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_2 \; d\gamma \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(t) w_m \; d\gamma \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \displaystyle\int_{\Omega} a(x) g(u'_m(t)) w_1 \; dx \\ \displaystyle\int_{\Omega} a(x) g(u'_m(t)) w_2 \; dx \\ \vdots \\ \displaystyle\int_{\Omega} a(x) g(u'_m(t)) w_m \; dx \end{bmatrix} = 0.$$

Denotando

$$C = \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \cdots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \cdots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \cdots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \cdots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z(t) = \begin{bmatrix} h_{1m}(t) \\ h_{2m}(t) \\ \vdots \\ h_{mm}(t) \end{bmatrix};$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) - G(z(t)) + H(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \ ; \ z'(0) = z^1, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde

$$H(z'(t)) = \begin{bmatrix} \int_\Omega a(x) g(Bz'(t)) w_1 \ dx \\ \int_\Omega a(x) g(Bz'(t)) w_2 \ dx \\ \vdots \\ \int_\Omega a(x) g(Bz'(t)) w_m \ dx \end{bmatrix}, \quad G(z(t)) = \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \partial_\nu (Bz(t)) w_1 \ d\gamma \\ \int_{\Gamma_1} \partial_\nu (Bz(t)) w_2 \ d\gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \partial_\nu (Bz(t)) w_m \ d\gamma \end{bmatrix},$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} h_{1m}(0) \\ h_{2m}(0) \\ \vdots \\ h_{mm}(0) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z^1 = \begin{bmatrix} h'_{1m}(0) \\ h'_{2m}(0) \\ \vdots \\ h'_{mm}(0) \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que a matriz $C_{m\times m}$ é inversível.

Com efeito, sendo C uma matriz real e simétrica, então C é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável, isto é, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM$$

e D é uma matriz diagonal. Logo, para mostrar que C é inversível basta mostrar que D o é, ou equivalentemente, que zero não é autovalor de D.

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de D. Então, existe um vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

não nulo do $\mathbb{R}^n$ tal que $Dv = 0$. Sendo M^{-1} uma matriz inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor CMv é igual a zero.

Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

temos

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_1) \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1) \\ (\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_2) \\ \vdots \\ (\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_m) \end{pmatrix}.$$

Logo, $(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_i) = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$; donde resulta que $\alpha = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j$ é ortogonal à todo vetor de V_m. Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, o que implica que $\alpha = 0$. Portanto, $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j = 0$.

Mas, sendo $\{w_j\}$ uma base, temos que $\varphi_j = 0 \ \forall j = 1, ..., m$, ou seja, $0 = \varphi = Mv$. Como M é inversível e, portanto, a transformação linear definida por M é injetora, resulta que $v = 0$, o que contradiz o fato de v ser autovetor de D e concluímos então que a matriz C é inversível.

Assim, o sistema (2.3) pode ser escrito

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) - C^{-1}G(z(t)) + C^{-1}H(z'(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \ \ ; \ \ z'(0) = z^1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t), \ \ Y_2(t) = z'(t), \ \ Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix} \ \text{e} \ Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então,

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) + C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Donde, temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(Y_1(t)) - C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} Y(t), \\ Y(0) = Y^0 \end{cases} \tag{2.5}$$

Provaremos a seguir que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema 1.16 (Teorema de Carathéodory).

De fato, consideremos a seguinte aplicação:

$h : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}$, definida por

$$h(t,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ C^{-1}G(y_1) - C^{-1}H(y_2) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} y$$

onde

$$y = (\xi_1, ..., \xi_m, \xi_{m+1}, ..., \xi_{2m}), y_1 = (\xi_1, ..., \xi_m) \text{ e } y_2 = (\xi_{m+1}, ..., \xi_{2m}).$$

Verificaremos que a aplicação h está nas condições do Teorema de Carathéodory.

Com efeito,

(i) Seja $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função h é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que esta não depende de t.

(ii) Para cada $t \in [0,T], h$ é contínua como função de y.

De fato, notemos primeiramente que a aplicação

$$\begin{array}{rcl} N : \mathbb{R}^{2m} & \to & \mathbb{R}^{2m} \\ y & \mapsto & \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} y \end{array} \tag{2.6}$$

é linear e, consequentemente, contínua.

Por outro lado, seja $\{y_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^{2m}$ uma sequência tal que

$$y_\nu \to y \text{ em } \mathbb{R}^{2m} \tag{2.7}$$

logo, se $y_\nu = (y_{1\nu}, y_{2\nu})$ e $y = (y_1, y_2)$ com $y_{1\nu}, y_{2\nu}, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$, então

$$y_{1\nu} \to y_1 \text{ em } \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad y_{2\nu} \to y_2 \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Mostraremos que $C^{-1}H(y_{2\nu}) \to C^{-1}H(y_2)$ e que $C^{-1}G(y_{1\nu}) \to C^{-1}G(y_1)$.

Notemos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$B(x)y_{2\nu} \to B(x)y_2 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, como a função g é contínua, temos que para quase todo $x \in \Omega$,

$$g(B(x)y_{2\nu}) \to g(B(x)y_2) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Então, para q.t. $x \in \Omega$,

$$a(x)g(B(x)y_{2\nu})w_j(x) \to a(x)g(B(x)y_2)w_j(x) \text{ em } \mathbb{R}.$$

Além do mais, $\{y_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada, pois é convergente. Logo, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$||y_\nu||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M$$

então

$$||y_{2\nu}||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M.$$

Agora, se $x \in \Omega$ é tal que $|B(x)y_{2\nu}| \leq 1$, da continuidade de g temos

$$|g(B(x)y_{2\nu})| \leq C,$$

onde C é uma constante positiva. Se $x \in \Omega$ é tal qu $|B(x)y_{2\nu}| > 1$, da hipótese $(H.1)$ obtemos

$$|g(B(x)y_{2\nu})| \leq K|B(x)y_{2\nu}| = K|\sum_{i=1}^{m} w_i(x)y_{2\nu_i}| \leq K\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)||y_{2\nu_i}| \leq MK\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)|.$$

Assim,

$$\begin{aligned} |a(x)g(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| &\leq |a(x)||g(B(x)y_{2\nu})||w_j(x)| \\ &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)}(C + MK\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)|)|w_j(x)|, \end{aligned}$$

q. s. em Ω, $\forall \nu \in \mathbb{N}, \forall j = 1, ..., m$. Como $\{w_j\} \in L^2(\Omega); \forall j = 1, ..., m$, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega a(x) g(B(x) y_{2\nu}) w_j(x) \ dx \rightarrow \int_\Omega a(x) g(B(x) y_2) w_j(x) \ dx,$$

$\forall j = 1, ..., m$, ou seja,

$$H(y_{2\nu}) \rightarrow H(y_2) \text{ em } \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$C^{-1} H(y_{2\nu}) \rightarrow C^{-1} H(y_2) \text{ em } \mathbb{R}^m. \tag{2.8}$$

Por outro lado, como $\{w_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma base de $W \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, decorre que

$$B y_{1\nu} = \sum_{i=1}^m w_i y_{(1\nu)_i} \in H^2(\Omega) \text{ e } B y_1 = \sum_{i=1}^m w_i y_{1_i} \in H^2(\Omega).$$

Portanto, de (2.7) segue que

$$B y_{1\nu} \rightarrow B y_1 \text{ em } H^2(\Omega).$$

Então, pela continuidade da aplicação traço de ordem 1, temos que

$$\gamma_1(B y_{1\nu}) \rightarrow \gamma_1(B y_1) \text{ em } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma),$$

o que implica que

$$\gamma_1(B y_{1\nu}) \gamma_0 w_j \rightarrow \gamma_1(B y_1) \gamma_0 w_j \text{ em } L^1(\Gamma); \quad \forall j = 1, ..., m.$$

Logo,

$$\int_{\Gamma_1} \gamma_1(B y_{1\nu}) \gamma_0 w_j d\Gamma \rightarrow \int_{\Gamma_1} \gamma_1(B y_1) \gamma_0 w_j d\Gamma \quad \forall j = 1, ..., m,$$

isto é,

$$G(y_{1\nu}) \to G(y_1) \text{ em } \mathbb{R}^m. \tag{2.9}$$

De (2.6), (2.7), (2.8) e (2.9) resulta que a aplicação h é contínua como função de y para $t \in [0,T]$.

(iii) Seja $K \subset [0,T]\times\mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto. Existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t) \quad \forall (t,y) \in K.$$

De fato, temos

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq ||C^{-1}G(y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}H(y_2)||_{\mathbb{R}^m} + ||N(y)||_{\mathbb{R}^{2m}}. \tag{2.10}$$

Do item (ii) temos que G e H são contínuas em $\mathbb{R}^m$ e N é contínua em $\mathbb{R}^{2m}$. Portanto, são contínuas em qualquer compacto $K^* = K_1 \times K_2 \subset \mathbb{R}^{2m}$ com $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^m$ e, então, $\exists\ M_K > 0$ tal que

$$||C^{-1}G(y_1)||_{\mathbb{R}^m} + ||C^{-1}H(y_2)||_{\mathbb{R}^m} + ||N(y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_K \tag{2.11}$$

para todo $(t,y) \in [0,T] \times K^*$, onde $y = (y_1, y_2) \in K_1 \times K_2 = K^*$.

Tomando $m_K(t) = M_K;\ \forall t \in [0,T]$, segue de (2.10) e (2.11) que

$$||h(t,y)||_{\mathbb{R}^{2m}} \leq m_K(t); \quad \forall (t,y) \in K.$$

Assim, dos itens (i), (ii) e (iii) temos que as condições do Teorema de Carathéodory são satisfeitas e, como consequência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, Y(t)) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $0 < t_m < T$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas em $[0, t_m)$ e $z''(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

Como os problemas (2.2) e (2.5) são equivalentes, existe uma solução $u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} h_{im}(t)w_i$ para o problema aproximado (2.2) para cada $m \in \mathbb{N}$ fixo.

A primeira estimativa a priori nos permitirá estender a solução obtida à todo intervalo $[0, T]$.

2.2.1.1 Primeira Estimativa a Priori

O Teorema de Carathéodory nos fornece que $u_m(t)$ e $u'_m(t)$ são absolutamente contínuas e como consequência disto $u'_m(t)$ e $u''_m(t)$ existem no sentido de Dini.

Considerando no problema aproximada (PA) $v = w_j,\ j = 1, ..., m$; multiplicando a segunda linha por $h'_{jm}(t), t \in [0, t_m)$, e somando em j de 1 até m obtemos

$$(u''_m(t), u'_m(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t)) - (\partial_\nu u_m(t), u'_m(t))_{\Gamma_1} + (a(x)g(u'_m(t)), u'_m(t)) = 0. \tag{2.12}$$

Podemos, sem perda de generalidade, considerar a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ como sendo ortonormal em $L^2(\Omega)$. Deste fato e do problema aproximado, resulta que para $j = 1, ..., m$,

$$h''_{jm}(t) = (u''_m(t), w_j) = -(\nabla u_m(t), \nabla w_j) + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(x,t) w_j \ d\gamma - \int_\Omega a(x)g(u'_m(x,t))w_j \ dx. \tag{2.13}$$

Logo, $h''_{jm}(t) \in L^2(0, t_m)$ e então

$$\begin{aligned}
\int_0^{t_m} ||u''_m(t)||^2_\Omega dt &= \int_0^{t_m} ||\sum_{j=1}^{m} h''_{jm}(t)w_j||^2_\Omega dt \\
&\leq \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^{m} ||h''_{jm}(t)w_j||^2_\Omega dt \\
&= \int_0^{t_m} \sum_{j=1}^{m} |h''_{jm}(t)|^2 ||w_j||^2_\Omega dt \ \leq \ \sum_{j=1}^{m} ||w_j||^2_\Omega \int_0^{t_m} |h''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty
\end{aligned}$$

ou seja,

$$u_m'' \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega)). \tag{2.14}$$

Assim, como $u_m'(t)$ é absolutamente contínua em $(0, t_m)$, podemos concluir que

$$\int_\Omega u_m''(t)\ u_m'(t)\ dx \quad \in L^1(0, t_m). \tag{2.15}$$

Considere $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Então, de (2.15) e pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\langle (u_m''(t), u_m'(t)), \theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} &= \langle \int_\Omega u_m''(x,t) u_m'(x,t) dx, \theta\rangle_{\mathcal{D}'(0,t_m),\mathcal{D}(0,t_m)} \\
&= \int_0^{t_m} \int_\Omega u_m''(x,t) u_m'(x,t)\theta(t) dx dt \\
&= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u_m'(x,t))^2 \theta(t) dt dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ (u_m'(x,t))^2\theta(t)|_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} (u_m'(x,t))^2\theta'(t)dt \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_\Omega (u_m'(x,t))^2\theta'(t) dx dt \\
&= -\frac{1}{2}\langle ||u_m'(t)||_\Omega^2, \theta'\rangle \\
&= \langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||_\Omega^2, \theta\rangle;
\end{aligned}$$

ou seja,

$$(u_m''(t), u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||_\Omega^2. \tag{2.16}$$

Da mesma forma provamos que

$$(\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||_\Omega^2. \tag{2.17}$$

Segue do fato que $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é base de W que $\partial_\nu w_j = \triangle_{\Gamma_1} w_j$ para todo j, o que implica que $\partial_\nu u_m = \triangle_{\Gamma_1} u_m = div_T \nabla_T u_m$.

Assim, utilizando argumentos análogos à obtenção de (2.17), decorre que

$$\begin{aligned}
-\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(x,t)u_m'(x,t)\ d\Gamma &= -\int_{\Gamma_1} div\nabla_T u_m(x,t)u_m'(x,t)\ d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_m(x,t)\nabla_T u_m'(x,t)\ d\Gamma \\
&= (\nabla_T u_m(t), \nabla_T u_m'(t))_{\Gamma_1} \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T u_m(t)||^2_{\Gamma_1}. \qquad (2.18)
\end{aligned}$$

Substituindo (2.16), (2.17) e (2.18) em (2.12), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T u_m(t)||^2_{\Gamma_1} + \int_\Omega a(x)g(u_m'(x,t))u_m'(x,t)\ dx = 0. \qquad (2.19)$$

Mas $\int_\Omega a(x)g(u_m'(x,t))u_m'(x,t)\ dx \geq 0$, pois, temos por hipótese que $g(s)s \geq 0$ e $a(x)$ é uma função não negativa. Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T u_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq 0. \qquad (2.20)$$

Multiplicando por 2 e integrando em $[0,t), t \in (0,t_m)$, temos que

$$||u_m'(t)||^2_\Omega + ||\nabla u_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq ||u_m'(0)||^2_\Omega + ||\nabla u_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla_T u_m(0)||^2_{\Gamma_1}. \quad (2.21)$$

Como

$$u_m(0) \to u^0 \ \text{ em } \ H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \quad \text{e} \quad u_m'(0) \to u^1 \ \text{ em } \ \mathcal{V},$$

existe uma constante $c > 0$ independente de t e de m tal que

$$||u_m'(0)||^2_\Omega + ||\nabla u_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla_T u_m(0)||^2_{\Gamma_1} \leq c. \qquad (2.22)$$

Logo,

$$||u_m'(t)||^2_\Omega + ||\nabla u_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq c; \quad \forall t \in [0,t_m), \forall m \in \mathbb{N}. \qquad (2.23)$$

Usando o Corolário 1.16.1 podemos estender as soluções u_m, à todo intervalo $[0,T]$, qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente, obtemos que a desigualdade (2.23) é válida para todo $t \in [0,T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$; além disso,

$$(u'_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{2.24}$$

$$(\nabla u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) \tag{2.25}$$

$$(\nabla_T u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \tag{2.26}$$

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;\mathcal{V}). \tag{2.27}$$

2.2.1.2 Segunda Estimativa a Priori

O nosso intuito nesta etapa é derivar o problema aproximado em relação a t. No que segue faremos alguns cálculos que serão necessários à obtenção da expressão desejada.

Sendo $\dfrac{d}{dt}$ a derivada no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}u_m, \theta \right\rangle &= -\int_0^T u_m(t)\theta'(t)dt = -\int_0^T (\sum_{j=1}^m h_{jm}(t)w_j)\theta'(t)dt \\
&= \sum_{j=1}^m \left(-\int_0^T h_{jm}(t)\theta'(t)dt \right) w_j = -\sum_{j=1}^m \left\{ h_{jm}(t)\theta(t)|_0^T - \int_0^T h'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j \\
&= \sum_{j=1}^m \left\{ \int_0^T h'_{jm}(t)\theta(t)dt \right\} w_j = \int_0^T u'_m(t)\theta(t)dt = \langle u'_m, \theta \rangle
\end{aligned}$$

o que prova que a derivada distribucional de u_m e a derivada clássica coincidem. De maneira análoga e utilizando (2.14) prova-se que

$$\left\langle \frac{d}{dt}u'_m, \theta \right\rangle = \langle u''_m, \theta \rangle$$

ou seja, que as derivadas distribucionais e clássicas de 1ª e 2ª ordem coincidem, desde que elas existam.

Por outro lado, usando propriedades da integral de Bochner constatamos que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_j), \theta \right\rangle &= \langle (\nabla u_m'(t), \nabla w_j), \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(\partial_\nu u_m(t), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \right\rangle &= \langle (\partial_\nu u_m'(t), w_j)_{\Gamma_1}, \theta \rangle \\
\left\langle \frac{d}{dt}(a(x)g(u_m'(t)), w_j), \theta \right\rangle &= \langle (a(x)g'(u_m'(t))u_m''(t), w_j), \theta \rangle;
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre das hipóteses feitas sobre a função g e a derivação de uma composição dada pela Proposição 1.1.19.

Das relações acima e de (2.13) resulta que

$$\frac{d}{dt}(u_m''(t), w_j) = -(\nabla u_m'(t), \nabla w_j) + (\partial_\nu u_m'(t), w_j)_{\Gamma_1} - (a(x)g'(u_m'(t))u_m''(t), w_j) \qquad (2.28)$$

em $L^2(0,T)$, ou seja,

$$h_{jm}''' \in L^2(0,T),$$

onde as três derivadas são no sentido distribucionais. Sendo assim,

$$\int_0^T ||u_m'''(t)||_\Omega^2 dt = \int_0^T ||\sum_{j=1}^m h_{jm}'''(t) w_j||_\Omega^2 dt < +\infty$$

isto é,

$$u_m''' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$, e, de (2.28) obtemos,

$$(u_m'''(t), w_j) + (\nabla u_m'(t), \nabla w_j) - (\partial_\nu u_m'(t), w_j)_{\Gamma_1} + (a(x)g'(u_m'(t))u_m''(t), w_j) = 0.$$

Multiplicando por h_{jm}'' e somando em j temos

$$(u_m'''(t), u_m''(t)) + (\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) - (\partial_\nu u_m'(t), u_m''(t))_{\Gamma_1} + \int_\Omega a(x)g'(u_m'(x,t))|u_m''(x,t)|^2 \ dx = 0,$$

donde,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u_m''(t)||_\Omega^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u_m'(t)||_\Omega^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T u_m'(t)||_{\Gamma_1}^2 + \int_\Omega a(x)g'(u_m'(x,t))|u_m''(x,t)|^2 \ dx = 0. \qquad (2.29)$$

Sendo g monótona crescente então $g'(s) \geq 0, \ \forall \ s \in \mathbb{R}$, e, além do mais, a função $a(x)$ é não negativa, portanto, $a(x)g'(u'_m(x,t))|u''_m(x,t)|^2 \geq 0$. Além disso, para quase todo $t > 0$,

$$\int_\Omega a(x)g'(u'_m(x,t))|u''_m(x,t)|^2 \ dx < +\infty.$$

De fato,

$$\int_\Omega a(x)g'(u'_m(x,t))|u''_m(x,t)|^2 \ dx \leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g'(u'_m(x,t))||u''_m(x,t)|^2 \ dx.$$

Considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,t)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,t)| > 1\}$, usando as hipóteses feitas sobre a função g e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
&||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g'(u'_m(x,t))||u''_m(x,t)|^2 \ dx \\
&= ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |g'(u'_m(x,t))||u''_m(x,t)|^2 \ dx + ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |g'(u'_m(x,t))||u''_m(x,t)|^2 \ dx \\
&\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} M_1 \int_{\Omega_0} |u''_m(x,t)|^2 \ dx + ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} M(1 + |u'_m(x,t)|^{p-1})|u''_m(x,t)|^2 \ dx \\
&\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} M_1 ||u''_m(t)||^2_\Omega + ||a||_{L^\infty(\Omega)} M \int_{\Omega_1} |u''_m(x,t)|^2 dx \\
&\qquad + ||a||_{L^\infty(\Omega)} M \int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^{p-1}|u''_m(x,t)|^2 \ dx \\
&\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} ||u''_m(t)||^2_\Omega (M_1 + M) \\
&\qquad + ||a||_{L^\infty(\Omega)} M \left[\int_{\Omega_1} |u'_m(x,t)|^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\int_{\Omega_1} |u''_m(x,t)|^{2p} dx\right]^{\frac{1}{p}} \\
&\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} ||u''_m(t)||^2_\Omega (M_1 + M) \\
&\qquad + ||a||_{L^\infty(\Omega)} M ||u''_m(t)||^{p-1}_{L^p(\Omega)} ||u''_m(t)||^2_{L^{2p}(\Omega)} \\
&\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} ||u''_m(t)||^2_\Omega (M_1 + M) \\
&\qquad + ||a||_{L^\infty(\Omega)} M M_2 M_3 ||u''_m(t)||^{p-1}_{H^2(\Omega)} ||u''_m(t)||^2_{H^2(\Omega)};
\end{aligned}$$

onde M_1 provéfm da continuidade da função g, M_2 e M_3 são, respectivamente, as constantes provenientes das imersões

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2p}(\Omega)$$

Logo, $\int_\Omega a(x)g'(u'_m(x,t))|u''_m(x,t)|^2 \; dx < +\infty$; provando o desejado.

De (2.29) podemos escrever

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||u''_m(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla u'_m(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq 0,$$

multiplicando a desigualdade acima por 2 e integrando em [0,t], obtemos

$$||u''_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla u'_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq ||u''_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla u'_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla_T u'_m(0)||^2_{\Gamma_1}. \tag{2.30}$$

Vamos agora estimar a sequência $(u''_m(0))$. Considerando $t=0$ e tomando $v = u''_m(0)$ no problema aproximado (PA), temos

$$\begin{aligned}(u''_m(0), u''_m(0)) + (\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_m(x,0) u''_m(x,0) d\Gamma \\ + \int_\Omega a(x) g(u'_m(x,0)) u''_m(x,0) \; dx = 0.\end{aligned}$$

Pela Fórmula de Green

$$||u''_m(0)||^2_\Omega - (\Delta u_m(0), u''_m(0)) + \int_\Omega a(x) g(u'_m(x,0)) u''_m(x,0) \; dx = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} ||u''_m(0)||^2_\Omega &\leq ||\Delta u_m(0)||_\Omega ||u''_m(0)||_\Omega - \int_\Omega a(x) g(u'_m(x,0)) u''_m(x,0) \; dx \\ &\leq ||u_m(0)||_{H^2(\Omega)} ||u''_m(0)||_\Omega + ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g(u'_m(x,0))||u''_m(x,0)| \; dx \\ &\leq M_4 ||u''_m(0)||_\Omega + ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g(u'_m(x,0))||u''_m(x,0)| \; dx, \end{aligned} \tag{2.31}$$

onde M_4 é a constante que limita $\{u_m(0)\}$ em $H^2(\Omega)$, posto que $u_m(0) \to u^0$ em $H^2(\Omega)$.

Considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,0)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u'_m(x,0)| > 1\}$, pela hipótese (H.1) temos que $g(u'_m(x,0)) \leq K u'_m(x,0), \;\; \forall x \in \Omega_1$.

Logo,

$$\begin{aligned} ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |g(u'_m(x,0))||u''_m(x,0)| \ dx &\leq K||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_1} |u'_m(x,0)||u''_m(x,0)| \ dx \\ &\leq K||a||_{L^\infty(\Omega)}||u'_m(0)||_{\Omega_1}||u''_m(0)||_{\Omega_1} \\ &\leq KM_5||a||_{L^\infty(\Omega)}||u''_m(0)||_{\Omega}, \end{aligned} \tag{2.32}$$

onde M_5 é constante positiva proveniente do fato que $u'_m(0) \to u^1$ em $\mathcal{V}$.

A continuidade da g implica que $|g(u'_m(x,0))| \leq M_6, \ \forall x \in \Omega_0$, por conseguinte

$$\begin{aligned} ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |g(u'_m(x,0))||u''_m(x,0)| \ dx &\leq M_6||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_0} |u''_m(x,0)| \ dx \\ &= M_6||a||_{L^\infty(\Omega)}||u''_m(x,0)||_{L^1(\Omega_0)} \\ &\leq M_6M_7||a||_{L^\infty(\Omega)}||u''_m(0)||_{\Omega}, \end{aligned} \tag{2.33}$$

onde M_7 é a constante de imersão $L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$.

De (2.31), (2.32) e (2.33) segue que

$$||u''_m(0)||^2_\Omega \leq M_4||u''_m(0)||_\Omega + KM_5||a||_{L^\infty(\Omega)}||u''_m(0)||_\Omega + M_6M_7||a||_{L^\infty(\Omega)}||u''_m(0)||_\Omega,$$

ou ainda,

$$||u''_m(0)||_\Omega \leq M_4 + M_5K||a||_{L^\infty(\Omega)} + M_6M_7||a||_{L^\infty(\Omega)}.$$

Portanto, $(u''_m(0))$ é limitada em $L^2(\Omega)$. Além disso, de (2.2), $(\nabla u'_m(0))$ e $(\nabla_T u'_m(0))$ são sequências limitadas em $L^2(\Omega)$ e $L^2(\Gamma_1)$, respectivamente. Logo, existe $L > 0$ tal que

$$||u''_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla u'_m(0)||^2_\Omega + ||\nabla_T u'_m(0)||^2_{\Gamma_1} \leq L.$$

De (2.30) e da desigualdade acima resulta que

$$||u''_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla u'_m(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u'_m(t)||^2_{\Gamma_1} \leq L.$$

Ou seja,

$$
\begin{aligned}
&(u''_m) && \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) && (2.34)\\
&(\nabla u'_m) && \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Omega)) && (2.35)\\
&(\nabla_T u'_m) && \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) && (2.36)\\
&(u'_m) && \text{é limitada em } L^\infty(0,\infty;\mathcal{V}). && (2.37)
\end{aligned}
$$

2.2.1.3 Passagem ao Limite

Inicialmente, observemos que pelo Teorema da Representação de Riez, identificando $L^2(\Omega)$ com seu dual, temos que

$$
\begin{aligned}
L^\infty(0,T;\mathcal{V}) &\equiv [L^1(0,T;\mathcal{V}')]'\\
L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) &\equiv [L^1(0,T;L^2(\Omega))]'.
\end{aligned}
$$

Além disso, $L^1(0,T;\mathcal{V}')$ e $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ são separáveis. Pelo Lema 1.5.2 e das Estimativas a Priori, existe (u_μ) subsequência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que para todo $T>0$,

$$
\begin{aligned}
u_\mu &\overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}) && (2.38)\\
u'_\mu &\overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}) && (2.39)\\
u''_\mu &\overset{\star}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). && (2.40)
\end{aligned}
$$

As convergências (2.39) e (2.40) decorrem da convergência (2.38), da unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e da cadeia de imersões

$$\mathcal{D}(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \equiv [L^2(0,T;L^2(\Omega))]' \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Convém observar que como $\mathcal{V} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ de (2.39) e (2.40) e em virtude do Teorema 1.12 (Teorema de Aubin-Lions) podemos extrair uma subsequência de (u'_μ) a qual ainda denotaremos pela mesma notação, de modo que

$$u'_\mu \to u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T),$$

e então,

$$u'_\mu \to u' \text{ q.s. em } Q_T.$$

Da continuidade da função g segue que

$$g(u'_\mu) \to g(u') \quad \text{q.s em } Q_T,$$

ou ainda,

$$a(x)g(u'_\mu) \to a(x)g(u') \quad \text{q.s em } Q_T. \tag{2.41}$$

Além disso, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, pondo $\Omega = \Omega_{\mu 1} \cup \Omega_{\mu 2}$, onde

$$\Omega_{\mu 1} = \{x \in \Omega; |u'_\mu(x,t)| > 1\} \text{ e } \Omega_{\mu 2} = \{x \in \Omega; |u'_\mu(x,t)| \leq 1\}, \tag{2.42}$$

temos

$$\begin{aligned}
||a(x)g(u'_\mu)||^2_{L^2(Q_T)} &= \int_0^T \int_\Omega |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx \; dt \\
&= \int_0^T \left[\int_{\Omega_{\mu 1}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx + \int_{\Omega_{\mu 2}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx\right] dt \\
&\leq \int_0^T \left[||a||^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_{\mu 1}} |g(u'_\mu(x,t))|^2 dx + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega_{\mu 2}} |g(u'_\mu(x,t))|^2 dx\right] dt \\
&\leq \int_0^T \left[||a||^2_{L^\infty(\Omega)} K^2 \int_{\Omega_{\mu 1}} |u'_\mu(x,t)|^2 dx + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} M_8^2 med(\Omega)\right] dt \\
&\leq ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} K^2 \int_0^T ||u'_\mu(x,t)||^2_{L^2(\Omega)} dt + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} M_8^2 med(\Omega) T \\
&\leq ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} K^2 M_9 + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} M_8^2 med(\Omega) T,
\end{aligned}$$

onde M_9 provém de (2.24). Portanto, existe uma constante $C = C(||a||_{L^\infty(\Omega)}, K, M_8, M_9, med(\Omega), T)$ tal que

$$||a(x)g(u'_\mu)||^2_{L^2(Q_T)} \leq C;\ \forall \mu \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

De (2.41), (2.43) e do Lema 1.1.3 (Lema de Lions) segue que

$$a(x)g(u'_\mu) \rightharpoonup a(x)g(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) = L^2(Q_T).$$

Como $w_j \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T) \hookrightarrow L^2(0,T)$, segue que

$$\int_0^T (a(x)g(u'_\mu(t)), w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt. \tag{2.44}$$

Por outro lado, visto que

$$u''_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u'' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então,

$$\langle u''_\mu, \varphi\rangle \to \langle u'', \varphi\rangle\ \ \forall \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega));$$

ou seja,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), \varphi(t)\Big)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), \varphi(t)\Big)\ dt.$$

Como $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, em particular,

$$\int_0^T \Big(u''_\mu(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt \to \int_0^T \Big(u''(t), w_j\Big)\ \theta(t)\ dt \tag{2.45}$$

De (2.38) temos que

$$\nabla u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla u \text{ em } L^\infty(0,T;[L^2(\Omega)]^n),$$

então,

$$\langle \nabla u_\mu, \varphi \rangle \to \langle \nabla u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n).$$

Do fato que $\nabla w_j \theta \in L^1(0,T;[L^2(\Omega)]^n)$ decorre que

$$\int_0^T (\nabla u_\mu, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t)\ dt \to \int_0^T (\nabla u, \nabla w_j)_{[L^2(\Omega)]^n} \theta(t)\ dt. \tag{2.46}$$

Por outro lado, como $\partial_\nu u_\mu(x,t) = \Delta_{\Gamma_1} u_\mu(x,t)$, segue que

$$\begin{aligned} -\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_\mu(x,t) w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt &= -\int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u_\mu(x,t) w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_\mu(x,t) \nabla_T w_j\ d\Gamma\ \theta(t)\ dt. \end{aligned} \tag{2.47}$$

De (2.38) temos que

$$\nabla_T u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla_T u \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Então, em particular

$$\int_0^T (\nabla_T u_\mu, \nabla_T w_j)_{\Gamma_1} \theta(t)\ dt \to \int_0^T (\nabla_T u, \nabla_T w_j)_{\Gamma_1} \theta(t)\ dt; \quad \forall j = 1,..,m. \tag{2.48}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu > j$. Multiplicando a equação do problema aproximado (2.2) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, tomando $v = w_j$ e integrando de 0 a T, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u_\mu''(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u_\mu(x,t) w_j \theta(t)\ d\Gamma dt \\ + \int_0^T (a(x) g(u_\mu'(t)), w_j)\theta(t)\ dt = 0. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Pelas convergências dadas em (2.44), (2.45), (2.46), (2.47) e (2.48) podemos passar o limite na equação (2.49), quando $\mu \to \infty$, obtendo

$$\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt = 0. \tag{2.50}$$

Pela totalidade dos $w_j's$ em $W = \{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} w \text{ em } \Gamma_1\}$ temos

$$\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T v)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), v)\theta(t)\ dt = 0;$$

$\forall\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\forall v \in W$. Em particular, para $v = \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ temos

$$\langle u'', \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \langle -\Delta u, \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} + \langle a(x)g(u'), \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0,$$

ou seja,

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \varphi\theta\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0;\ \ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Como o espaço $\{\varphi\theta; \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é tal que as combinações lineares finitas formam um conjunto denso em $\mathcal{D}(Q_T)$, então

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.51}$$

No entanto, como $u'', a(x)g(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ temos que $\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, isto é, $\Delta u(t) \in L^2(\Omega)$, para q.t. $t \in]0,T[$. Consequentemente,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Além disso, para quase todo $t \in]0,T[$ temos que

$$\Delta u(t) = u''(t) + a(x)g(u'(t)) \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Segue da regularidade dos problemas elípticos que para quase todo $t \geq 0$, $u(t) \in H^2(\Omega)$ e

$$||u(t)||_{H^2(\Omega)} \leq M_{11}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} ||u(t)||_{H^2(\Omega)} \leq M_{11}||\Delta u(t)||_{L^2(\Omega)} &= M_{11}||u''(t) + a(x)g(u'(t))||_{L^2(\Omega)} \\ &\leq M_{11}||u''(t)||_{L^2(\Omega)} + M_{11}||a(x)g(u'(t))||_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

provando que $u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$. Desta forma, para todo $T > 0$,

$$u \in L^\infty(0, T; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(0, T; \mathcal{V}). \tag{2.52}$$

2.2.1.4 Condição de Fronteira

Da passagem ao limite temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt = 0,\ \forall\ j \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e de (2.51),

$$u''(x,t) = \Delta u(x,t) - a(x)g(u'(x,t)),\ \text{ para q.t. }\ (x,t) \in \Omega \times]0, T[.$$

Substituindo u'' na equação acima, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T (\Delta u(t) - a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt \\ + \int_0^T (a(x)g(u'(t)), w_j)\theta(t)\ dt = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_0^T (\Delta u(t), w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)\ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)\ dt = 0.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(x,t)\gamma_0 w_j \ \theta(t) \ d\Gamma \ dt + \int_0^T (\nabla_T u(t), \nabla_T w_j)_{\Gamma_1}\theta(t) \ \ dt = 0,$$

donde

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(x,t)\gamma_0 w_j \ \theta(t) \ d\Gamma \ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u(x,t)\gamma_0 w_j \ \theta(t) \ d\Gamma \ dt = 0,$$

isto é,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} [(\partial_\nu u(x,t) - \Delta_{\Gamma_1} u(x,t))\gamma_0 w_j] \ \ \theta(t) \ d\Gamma \ dt = 0; \ \ \forall j, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T). \tag{2.53}$$

Notemos que $\{\gamma_0 w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$.

De fato, a aplicação $\gamma_0 : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) = \{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma); u|_{\Gamma_0} = 0\}$ é sobrejetiva, pois, se $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ então $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, pela sobrejetividade da aplicação $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ existe $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma_0 v = u$ q.s. em Γ. Como $u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ então $u = 0$ q.s. em Γ_0, ou seja, $\gamma_0 v = 0$ q.s. em Γ_0, portanto $v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

Do fato que a base $\{w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é densa em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, pela sobrejetividade e continuidade da aplicação $\gamma_0 : H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ segue que $\{\gamma_0 w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é denso em $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Como $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$, concluimos que $\{\gamma_0 w_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$.

Cosequentemente, de (2.53) obtemos

$$\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 \ \text{ em } \ \mathcal{D}'(0,T; L^2(\Gamma_1))$$

e, portanto, da regularidade da função u

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \ \text{ em } \ L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)). \tag{2.54}$$

2.2.1.5 Dados Iniciais

Do problema aproximado temos que

$$\begin{aligned} u_m(0) &\to u^0 \text{ em } H^2(\Omega)\cap\mathcal{V} \\ u_m'(0) &\to u^1 \text{ em } \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Nesta etapa, mostraremos que $u^0 = u(0)$ e $u^1 = u'(0)$.

Primeiramente, notemos que $u, u' \in L^1(0,T;\mathcal{V})$ e $u'' \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, então pelo Lema 1.2.1 temos que $u \in C^0([0,T];\mathcal{V})$ e $u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Portanto, faz sentido calcularmos $u(0), u(T), u'(0)$ e $u'(T)$.

Seja $\theta \in C^1([0,T])$ com $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Como $u_\mu' \overset{\star}{\rightharpoonup} u'$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V}) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então,

$$\langle u_\mu', \varphi\rangle \to \langle u', \varphi\rangle, \quad \forall\varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T (u_\mu'(t),\varphi)\ dt \to \int_0^T (u'(t),\varphi)\ dt, \quad \forall\ \varphi \in L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como $w_j\theta \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$, em particular, para todo $j \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_0^T (u_\mu'(t),w_j)\theta(t)\ dt \to \int_0^T (u'(t),w_j)\theta(t)\ dt.$$

Integrando por partes e da convergência $u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;\mathcal{V})$, obtemos

$$\Big[\theta(t)(u_\mu(t),w_j)\Big]_0^T - \int_0^T (u_\mu(t),w_j)\theta'(t)\ dt \to \Big[\theta(t)(u(t),w_j)\Big]_0^T - \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)\ dt,$$

ou ainda,

$$-(u_\mu(0),w_j) - \int_0^T (u_\mu(t),w_j)\theta'(t)\ dt \to -(u(0),w_j) - \int_0^T (u(t),w_j)\theta'(t)\ dt,$$

o que implica que

$$(u_\mu(0), w_j) \ \ \rightarrow \ \ (u(0), w_j), \quad \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Desta forma, da densidade de $\{w_j\}$ em $L^2(\Omega)$ segue que $u_\mu(0) \rightharpoonup u(0)$ em $L^2(\Omega)$.

Por outro lado, do problema aproximado, temos

$$u_\mu(0) \ \ \rightarrow \ \ u^0 \ \text{ em } \ H^2(\Omega) \cap \mathcal{V},$$

o que implica que

$$u_\mu(0) \ \ \rightharpoonup \ \ u^0 \ \text{ em } \ L^2(\Omega).$$

Da unicidade do limite fraco obtemos que $u(0) = u^0$.

De forma análoga mostramos que $u'(0) = u^1$.

2.2.1.6 Unicidade

Sejam u e v soluções regulares do problema (2.1). Considerando $w = u - v$ temos que w satisfaz o seguinte problema:

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + a(x)g(u') - a(x)g(v') = 0 & \text{em } \ \Omega \ \times \ ]0, \infty[, \\ \partial_\nu w - \Delta_{\Gamma_1} w = 0 & \text{em } \ \Gamma_1 \ \times \ ]0, \infty[, \\ w = 0 & \text{em } \ \Gamma_0 \ \times \ ]0, \infty[, \\ w(x,0) = 0 = w'(x,0) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.55}$$

Compondo a primeira linha de (2.55) com $w'(t)$, resulta que

$$(w''(t), w'(t)) - (\Delta w(t), w'(t)) + ((a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))), w'(t)) = 0.$$

Aplicando o Teorema de Green, obtemos

$$(w''(t), w'(t)) + (\nabla w(t), \nabla w'(t)) - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu w(x,t) w'(x,t) \ d\Gamma$$
$$+((a(x)g(u'(t)) - a(x)g(v'(t))), w'(t)) = 0.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T w(t)||^2_{\Gamma_1}$$

$$+\int_\Omega a(x)(g(u'(x,t)) - g(v'(x,t)))(u'(x,t) - v'(x,t)) \ dx = 0.$$

Como a função $a(x)$ é não negativa e g é monótona crescente, então

$$\int_\Omega a(x)(g(u'(x,t)) - g(v'(x,t)))(u'(x,t) - v'(x,t)) \ dx \geq 0.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}||w'(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla w(t)||^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}||\nabla_T w(t)||^2_{L^2(\Gamma_1)} \leq 0.$$

Integrando de 0 a T, obtemos

$$||w'(t)||^2_\Omega + ||\nabla w(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T w(t)||^2_{\Gamma_1} \leq ||w'(0)||^2_\Omega + ||\nabla w(0)||^2_\Omega$$
$$+||\nabla_T w(0)||^2_{\Gamma_1} = 0,$$

Concluímos então que $w(t) = 0$ em $\mathcal{V}$, para quase todo $t \in [0, T]$ e portanto $u = v$, ou seja, a solução regular é única.

2.2.2 Solução Fraca

A seguir, provaremos a existência de solução fraca do problema (2.1) por aproximação de soluções regulares.

Seja $\{u^0, u^1\} \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$. Como $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ e $\mathcal{V}$ são densos em $\mathcal{V}$ e em $L^2(\Omega)$, respectivamente, existe $\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ tal que

$$\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \to \{u^0, u^1\} \text{ em } \mathcal{V} \times L^2(\Omega). \tag{2.56}$$

Desta maneira, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ existe uma solução regular u_μ do problema

$$\begin{cases} u''_\mu - \Delta u_\mu + a(x) g(u'_\mu) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u_\mu - \Delta_{\Gamma_1} u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u_\mu = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u_\mu(x,0) = u^0_\mu(x), \;\; u'_\mu(x,0) = u^1_\mu(x) & x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.57}$$

Considere $z_{\mu l} = u_\mu - u_l$. Pelos mesmos argumentos utilizados na unicidade de solução regular obtemos

$$\begin{aligned} ||z'_{\mu l}(t)||^2_\Omega + ||\nabla z_{\mu l}(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T z_{\mu l}(t)||^2_{\Gamma_1} \leq {} & ||z'_{\mu l}(0)||^2_\Omega + ||\nabla z_{\mu l}(0)||^2_\Omega \\ & + ||\nabla_T z_{\mu l}(0)||^2_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

Como o membro da direita converge para zero, pois, $\{u^0_\mu\}$ converge em $\mathcal{V}$ e $\{u^1_\mu\}$ converge em $L^2(\Omega)$, concluímos que

$$\begin{array}{lll} (u_\mu) & \text{é sequência de Cauchy em} & C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}); \\ (u'_\mu) & \text{é sequência de Cauchy em} & C^0(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)). \end{array}$$

Logo, existe $u \in C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V})$ tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{em } C^0(\mathbb{R}_+;\mathcal{V}); \tag{2.58}$$

$$u'_\mu \to u' \quad \text{em } C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega)). \tag{2.59}$$

Notemos que considerando $\Omega = \Omega_{\mu 1} \cup \Omega_{\mu 2}$ como em (2.42), de (2.59) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T ||a(x)g(u'_\mu(t))||^2_\Omega dt &= \int_0^T \int_{\Omega_{\mu 1}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx\ dt + \int_0^T \int_{\Omega_{\mu 2}} |a(x)g(u'_\mu(x,t))|^2 dx\ dt \\
&\leq ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} K^2 \int_0^T \int_\Omega |u'_\mu(x,t)|^2 dx\ dt + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} M_{10}^2 med(\Omega) T \\
&\leq ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} K^2 M_{11} + ||a||^2_{L^\infty(\Omega)} M_{10}^2 med(\Omega) T \\
&= M_{12}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\{a(x)g(u'_\mu)\} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.60}$$

Por outro lado, de (2.59) temos também

$$u'_\mu \to u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega));$$

donde,

$$u'_\mu \to u' \text{ q.s. em } \Omega \times [0,T].$$

Pela continuidade da g temos que

$$g(u'_\mu) \ \to \ g(u') \text{ q.s. em } \Omega \times [0,T],$$

ou ainda,

$$a(x)g(u'_\mu) \ \to \ a(x)g(u') \text{ q.s. em } \Omega \times [0,T]. \tag{2.61}$$

De (2.60), (2.61) e pelo Lema de Lions, existe uma subsequência de $\{a(x)g(u'_\mu)\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ que ainda denotaremos pela mesma notação tal que

$$a(x)g(u'_\mu) \rightharpoonup a(x)g(u') \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.62}$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Compondo a equação da primeira linha de (2.57) com $\theta\varphi$ obtemos

$$\langle u''_\mu - \Delta u_\mu + a(x)g(u'_\mu), \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.63}$$

Notemos que

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi\rangle = -\langle u'_\mu, \theta'\varphi\rangle$$

e de (2.59) segue que

$$-\langle u'_\mu, \theta'\varphi\rangle \to -\langle u', \theta'\varphi\rangle = \langle u'', \theta\varphi\rangle.$$

Concluímos

$$\langle u''_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle u'', \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.64}$$

Por outro lado,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

e por (2.58)

$$\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

ou seja,

$$\langle -\Delta u_\mu, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{2.65}$$

Do exposto em (2.62), (2.64) e (2.65) obtemos de (2.63), após passagem ao limite,

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mas, pela totalidade do conjunto $R = \{\theta\varphi; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ vem que

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)g(u'), \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \psi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Então,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{2.66}$$

Temos que $u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V})$ e então $-\Delta u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}')$ e como $a(x)g(u') \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ segue que $u'' \in L^\infty(0,T;\mathcal{V}')$. Assim,

$$u'' - \Delta u + a(x)g(u') = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}').$$

De (2.58) e (2.59) temos que $u \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathcal{V})$ e $u' \in C^0(\mathbb{R}_+,L^2(\Omega))$, isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+,L^2(\Omega)). \tag{2.67}$$

2.2.2.1 Condição de fronteira

Temos

$$\partial_\nu u_\mu - \Delta_{\Gamma_1} u_\mu = 0 \text{ q. s. em } \Gamma_1 \times]0,\infty[,$$

onde u_μ é solução regular do problema (2.57) e o operador $-\Delta_{\Gamma_1} : H^1(\Gamma_1) \to H^{-1}(\Gamma_1)$ é definido por

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1}\varphi, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T\varphi \cdot \nabla_T\psi \; d\Gamma; \quad \forall \varphi,\psi \in H^1(\Gamma_1).$$

Então,

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1} u_\mu(t), \psi \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_\mu(t) \cdot \nabla_T \psi \; d\gamma = (\nabla_T u_\mu(t), \nabla_T \psi)_{\Gamma_1}; \quad \forall t > 0. \tag{2.68}$$

Como

$$u_\mu \to u \text{ em } C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$$

segue que

$$\nabla_T u_\mu \to \nabla_T u \text{ em } C^0(\mathbb{R}_+; [L^2(\Gamma_1)]^n). \tag{2.69}$$

Assim, de (2.68) e (2.69) se $\psi \in L^1(0,T; H^1(\Gamma_1))$ temos que

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_\mu(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt \to \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u(t), \psi(t) \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt,$$

consequentemente,

$$\Delta_{\Gamma_1} u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^\infty(0,T; H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.70}$$

Por outro lado, de (2.54) temos que

$$\partial_\nu u_\mu = \Delta_{\Gamma_1} u_\mu \text{ em } L^2(0,T; L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T; H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.71}$$

Sendo assim, de (2.70) e (2.71)

$$\langle \partial_\nu u_\mu, \varphi \rangle \to \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in L^2(0,T; H^1(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_\mu \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^2(0,T; H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.72}$$

Além disso, como

$$u'_\mu \to u' \quad \text{em} \quad C^0([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

pela Proposição 1.2.3 e Corolário 1.2.3.1 temos que

$$u''_\mu \to u'' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.73}$$

Como u_μ satisfaz a equação

$$\Delta u_\mu = u''_\mu + a(x)g(u'_\mu) \quad \text{em} \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

de (2.62), (2.66) e (2.73) obtemos

$$\Delta u_\mu = u''_\mu + a(x)g(u'_\mu) \rightharpoonup u'' + a(x)g(u') = \Delta u \quad \text{em} \ H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)).$$

Portanto,

$$\Delta u_\mu \rightharpoonup \Delta u \quad \text{em} \ H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$$

e, do fato que

$$u_\mu \to u \quad \text{em} \quad C^0([0,T];\mathcal{V}) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^1(\Omega)),$$

obtemos

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega));$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$. Pela continuidade da aplicação traço $\widetilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ [ver Observação 1.3.1] e Teorema 1.17 temos

$$\widetilde{\gamma}_1(u_\mu) \rightharpoonup \widetilde{\gamma}_1(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_\mu \rightharpoonup \partial_\nu u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow \ H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.74}$$

Desta forma, de (2.72), (2.74) e, pela unicidade do limite fraco estrela, obtemos

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)).$$

Sendo $\Delta_{\Gamma_1} u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1))$ deduzimos que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{2.75}$$

2.2.2.2 Dados Iniciais

De (2.56) e (2.57) temos que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) = u_\mu^0 \quad &\rightarrow \quad u^0 \ \text{ em } \ \mathcal{V}, \\ u'_\mu(0) = u_\mu^1 \quad &\rightarrow \quad u^1 \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \end{aligned}$$

De (2.58) e (2.59) segue que

$$\begin{aligned} u_\mu(0) \quad &\rightarrow \quad u(0) \ \text{ em } \ \mathcal{V}, \\ u'_\mu(0) \quad &\rightarrow \quad u'(0) \ \text{ em } \ L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Portanto, $u(0) = u^0$ e $u'(0) = u^1$.

2.2.2.3 Unicidade

Sejam u e v duas soluções fracas do problema (2.1) e consideremos $w = u - v$. Então,

$$w \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2(\Omega))$$

e satisfaz o problema

$$\begin{cases} w'' - \Delta w + ag(u') - ag(v') = 0 & \text{em} \quad L^\infty(0,T;\mathcal{V}') \\ \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} w & \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)) \\ w = 0 & \text{em} \quad \Gamma_0 \times]0,\infty[\\ w(0) = 0 = w'(0) & \text{em} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.76}$$

Como w satisfaz as hipóteses da identidade de energia, conforme Apêndice, temos que

$$\begin{aligned} ||w'(t)||^2_\Omega + ||\nabla w(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T w(t)||^2_{\Gamma_1} &= -2\int_0^t \int_\Omega a(x)[g(u'(t)) - g(v'(t))][u'(t) - v'(t)]dxdt \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Pois g é monótona crescente e a é limitada e não-negativa, e assim, o segundo lado da igualdade é menor que ou igual a zero. Portanto $w(t) = 0$ em $\mathcal{V}$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$ e, consequentemente, $u(t) = v(t)$ em $\mathcal{V}$, $\forall t \geq 0$.

2.3 Existência e Unicidade de Solução via Teoria de Semigrupos

Nesta seção provaremos a existência e unicidade de soluções regular e fraca para o problema dado usando a teoria de semigrupos.

2.3.1 Existência e Unicidade de Solução Regular

Definamos o operador linear

$$\begin{aligned} A: \ \mathcal{V} &\longrightarrow \mathcal{V}' \\ f &\longmapsto Af, \quad \text{dado por} \end{aligned}$$

$$\langle Af, v\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T f \cdot \nabla_T v \, d\gamma; \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{2.77}$$

Observemos que a aplicação acima está bem definida. Com efeito,

$$\begin{aligned} |\langle Af, v\rangle| &\le ||\nabla f||_\Omega ||\nabla v||_\Omega + ||\nabla_T f||_{\Gamma_1} ||\nabla_T v||_{\Gamma_1} \\ &\le \{||\nabla f||_\Omega + ||\nabla_T f||_{\Gamma_1}\}||v||_\mathcal{V} \\ &\le \sqrt{2}\{||\nabla f||_\Omega^2 + ||\nabla_T f||_{\Gamma_1}^2\}^{\frac{1}{2}}||v||_\mathcal{V} \;=\; \sqrt{2}\,||f||_\mathcal{V}||v||_\mathcal{V} \end{aligned}$$

o que prova que $Af \in \mathcal{V}'$. Notemos também que

$$||Af||_{\mathcal{V}'} = \sup_{v\in\mathcal{V};||v||\le 1} |\langle Af, v\rangle| \le \sup_{v\in\mathcal{V};||v||\le 1} \{\sqrt{2}\,||f||_\mathcal{V}||v||_\mathcal{V}\} \le \sqrt{2}\,||f||_\mathcal{V} \quad \forall f \in \mathcal{V}.$$

Portanto, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$. Sendo A um operador linear e limitado temos que A é contínuo. Além disso, A é coercivo em $\mathcal{V}$, pois

$$\langle Av, v\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma = ||v||_\mathcal{V}^2 \ge 0; \quad \forall v \in \mathcal{V}.$$

Consideremos o problema

$$\begin{cases} u_{tt} + Au + Bu_t = 0 \\ u(0) = u^0, \;\; u_t(0) = u^1, \end{cases} \tag{2.78}$$

onde o operador $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é definido por

$$\langle Bv, w\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \;=\; \int_\Omega a(x)g(v(x))w(x)\, dx; \quad \forall\, v, w \in \mathcal{V}. \tag{2.79}$$

Notemos que o operador B está bem definido, pois, considerando $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |v(x)| \le 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |v(x)| > 1\}$ segue das hipóteses (H.1)(i),(ii) e (H.2) sobre as funções g e a, respectivamente, e da Desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
|\langle Bv, w\rangle| &\leq \int_\Omega |a(x)|\ |g(v(x))|\ |w(x)|\ dx \\
&\leq \int_{\Omega_0} |a(x)|K_1|w(x)|\ dx + \int_{\Omega_1} |a(x)|K|v(x)|\ |w(x)|\ dx \\
&\leq K_1||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |w(x)|\ dx + K||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |v(x)|\ |w(x)|\ dx \\
&\leq K_1||a||_{L^\infty(\Omega)} K_2||w||_\Omega + K||a||_{L^\infty(\Omega)}||v||_\Omega||w||_\Omega \\
&\leq max\{K_1, K_2, K\}||a||_{L^\infty(\Omega)}\{||w||_\Omega + ||v||_\Omega||w||_\Omega\} \\
&= K_3||a||_{L^\infty(\Omega)}(1 + ||v||_\Omega)||w||_\Omega, \qquad (2.80)
\end{aligned}$$

onde K_1, K_2, K_3 e K são constantes positivas. Além disso, como $w \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned}
||w||_\Omega \leq (||w||_\Omega^2 + ||\nabla w||_\Omega^2)^{\frac{1}{2}} = ||w||_{H^1(\Omega)} \leq K_4||\nabla w||_\Omega &\leq K_4(||\nabla w||_\Omega^2 + ||\nabla_T w||_\Omega^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= K_4||w||_{\mathcal{V}}, \qquad (2.81)
\end{aligned}$$

onde a constante positiva K_4 provém do fato que as normas $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ e $||\nabla \cdot||_\Omega$ são equivalentes em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. De (2.80) e (2.81) temos que existe $K_5 > 0$ tal que para todo $v, w \in \mathcal{V}$

$$|\langle Bv, w\rangle| \leq K_5||a||_{L^\infty(\Omega)}(1 + ||v||_\Omega)||w||_{\mathcal{V}},$$

o que prova que $Bv \in \mathcal{V}'$.

Afirmamos que o operador $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é maximal monótono. Com efeito,

$$\langle Bv, v\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_\Omega a(x)g(v(x))v(x)\ dx \geq 0,$$

pois, pela hipótese (H.1)(ii) temos que $g(s)s \geq 0$ e por (H.2) a é não-negativa. Logo, $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é monótono.

Para provar a maximalidade de B, definamos o funcional $J : \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$Jv = \int_\Omega \int_0^{v(x)} a(x)g(s)\ ds\ dx.$$

Afirmamos que B é a subdiferencial de J.

De fato, a derivada direcional de J em $v \in \mathcal{V}$ na direção de u é dada por

$$\begin{aligned}
J'(v,u) &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{J(v+\lambda u) - J(v)}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_\Omega \int_0^{v(x)+\lambda u(x)} a(x)g(s)\ ds\ dx - \int_\Omega \int_0^{v(x)} a(x)g(s)\ ds\ dx}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\int_\Omega a(x) \left[\int_0^{v(x)+\lambda u(x)} g(s)\ ds - \int_0^{v(x)} g(s)\ ds\right]\ dx}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \int_\Omega a(x) \left[\frac{1}{\lambda} \int_{v(x)}^{v(x)+\lambda u(x)} g(s)\ ds\right]\ dx \ = \ \int_\Omega a(x)g(v(x))u(x)\ dx, \quad (2.82)
\end{aligned}$$

onde a última igualdade provém do Teorema 1.4 (Teorema da Média). Então, J é G-diferenciável em $v \in \mathcal{V}$ e de (2.79) e (2.82) obtemos

$$\langle J'v, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_\Omega a(x)g(v(x))u(x)\ dx = \langle Bv, u\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}}; \quad \forall\ v,u \in \mathcal{V}.$$

Logo,

$$J'v = Bv; \quad \forall v \in \mathcal{V}. \tag{2.83}$$

No que segue, provaremos que J é convexo. De acordo com a Proposição 1.7.2 é suficiente provarmos que $\langle J'w - J'v, w - v\rangle \geq 0$. Como g é monótona crescente temos

$$\begin{aligned}
\langle J'w - J'v, w-v\rangle &= \langle Bw - Bv, w - v\rangle \\
&= \int_\Omega a(x)g(w(x))(w(x)-v(x))dx - \int_\Omega a(x)g(v(x))(w(x)-v(x))dx \\
&= \int_\Omega a(x)[g(w(x)) - g(v(x))][w(x)-v(x)]\ dx \geq 0,
\end{aligned}$$

para todo $w, v \in \mathcal{V}$. Portanto, J é convexo.

Notemos que $J \neq \infty$, isto é, J é um funcional próprio. Então, usando a Proposição 1.7.3 e de (2.83) temos

$$\partial(Jv) = J'v = Bv, \quad \forall v \in \mathcal{V},$$

onde $\partial(Jv)$ é a subdiferencial de J em v. O que prova que B é a subdiferencial de J.

Afirmamos também que $J : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ é contínuo.

Com efeito, seja $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{V}$ uma sequência tal que $v_n \to v$ em $\mathcal{V}$. Então

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &= \left| \int_\Omega a(x) \int_0^{v_n(x)} g(s)\ ds\ dx - \int_\Omega a(x) \int_0^{v(x)} g(s)\ ds\ dx \right| \\ &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \int_{v_n(x),v(x)} |g(s)|\ ds\ dx, \end{aligned}$$

onde $\int_{v_n(x),v(x)}$ denota a integral com os extremos de integração na ordem crescente.

Como g é contínua temos que $|g(s)| \leq c$ se $|s| \leq 1$ e da hipótese (H.1)(iii) temos que $|g(s)| \leq K|s|$ se $|s| > 1$. Assim, $|g(s)| \leq c + K|s|;\ \forall s \in \mathbb{R}$. Logo,

$$\begin{aligned} |Jv_n - Jv| &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega \int_{v_n(x),v(x)} (c + K|s|)\ ds\ dx \\ &\leq c||a||_{L^\infty(\Omega)} \underbrace{\int_\Omega |v_n(x) - v(x)|dx}_{I_1} + ||a||_{L^\infty(\Omega)} \frac{K}{2} \underbrace{\int_\Omega \Big||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2\Big|dx}_{I_2}. \end{aligned}$$

Afirmação (i): $I_1 = \displaystyle\int_\Omega |v_n(x) - v(x)|dx \to 0,\ n \to +\infty.$

De fato, como $v_n \to v$ em $\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, pois Ω é limitado, segue o desejado.

Afirmação (ii): $\displaystyle\int_\Omega \Big||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2\Big|dx \to 0,\ n \to +\infty.$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Big||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2\Big|dx &= \int_\Omega |v_n(x) - v(x)|\ |v_n(x) + v(x)|dx \\ &\leq \left(\int_\Omega |v_n(x) - v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |v_n(x) + v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_\Omega |v_n(x)+v(x)|^2dx &\leq 2\left(\int_\Omega |v_n(x)|^2dx + \int_\Omega |v(x)|^2dx\right)\\ &= 2(||v_n||_\Omega^2 + ||v||_\Omega^2)\\ &\leq 2(\bar{c} + ||v||_\Omega^2),\end{aligned}$$

onde a constante $\bar{c}$ provém do fato que $\{v_n\}$ é convergente e, portanto, limitada em $L^2(\Omega)$. Logo,

$$\int_\Omega \Big||v_n(x)|^2 - |v(x)|^2\Big|dx \leq 2(\bar{c} + ||v||_\Omega^2)\left(\int_\Omega |v_n(x)-v(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} \to 0,\ n \to +\infty.$$

Donde, segue que J é contínuo.

Agora, sendo B a subdiferencial de J que é contínuo, convexo e próprio; de acordo com o Teorema 1.18 temos que $B : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ é maximal monótono.

Por conseguinte, podemos reformular o problema (2.78) da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \\ A & B \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ em } \begin{matrix} \mathcal{V} \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{matrix} \tag{2.84}$$

Assim, temos um novo operador $\mathbb{A} : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ definido por

$$\mathbb{A}\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix}$$

$$\text{e} \quad D(\mathbb{A}) = \{(v,h) \in \mathcal{H}; h \in \mathcal{V}, Av + Bh \in L^2(\Omega)\}.$$

Para provarmos que $\mathbb{A}$ gera um semigrupo em $\mathcal{H} = \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, devemos mostrar que $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

Com efeito, $\mathbb{A}$ é monótono, pois

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{A}\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} &= \left(\begin{bmatrix} -h \\ Av + Bh \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + (Av + Bh, h)_{L^2(\Omega)} \\
&= (-h, v)_{\mathcal{V}} + \langle Av, h\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} + \langle Bh, h\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} \\
&= -\int_{\Omega} \nabla h \cdot \nabla v \; dx - \int_{\Gamma_1} \nabla_T h \cdot \nabla_T v \; d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla h \; dx \\
&\qquad + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \cdot \nabla_T h \; d\Gamma + \int_{\Omega} a(x) g(h(x)) h(x) \; dx \\
&= \int_{\Omega} a(x) g(h(x)) h(x) \; dx \geq 0; \quad \forall \; (v,h) \in D(\mathbb{A}),
\end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre das hipóteses (H.1)(ii) e (H.2).

Para provar a maximalidade do operador $\mathbb{A}$, ou seja, $Im(I+\mathbb{A}) = \mathcal{H}$, dado $(v_0, h_0) \in \mathcal{H}$ devemos mostrar que existe $(v,h) \in D(\mathbb{A})$ tal que

$$(I + \mathbb{A}) \begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ h_0 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} v \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -h \\ Av + Bh \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 \\ h_0 \end{bmatrix}$$

isto é,

$$\begin{cases} v - h = v_0 \\ h + Av + Bh = h_0. \end{cases} \tag{2.85}$$

Combinando as duas igualdades em (2.85), obtemos

$$h + Ah + Bh = h_0 - Av_0. \tag{2.86}$$

Notemos que o operador $h \longmapsto h + Ah$ é contínuo e coercivo, pois A possui tais propriedades. Além disso, como

$$\langle Ah, h\rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_{\Omega} |\nabla h|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T h|^2 \, d\gamma = ||h||^2_{\mathcal{V}} \geq 0,$$

então A é monótono e, consequentemente, $I + A$ também é. Portanto, segue da Proposição 1.7.1 que o operador $(I + A) + B$ é maximal monótono. Logo, a equação (2.86) possui solução $h \in \mathcal{V}$. Como, $v = v_0 + h$, e $Av + Bh = h_0 - h$, segue que $v \in \mathcal{V}$ e $Av + Bh \in L^2(\Omega)$.

Logo, o sistema (2.85) possui uma solução $(v, h) \in D(\mathbb{A})$ e portanto $\mathbb{A}$ é maximal monótono em $\mathcal{H}$.

Nestas condições, pelo Teorema 1.19 (Hille Yosida), dado $U^0 \in D(\mathbb{A})$ existe uma única função

$$U \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathbb{A}))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + \mathbb{A}U = 0 \quad \text{em} \quad [0, +\infty) \\ U(0) = U^0 \end{cases} \tag{2.87}$$

e além disso,

$$|U(t)|_{\mathcal{H}} \leq |U^0|_{\mathcal{H}} \text{ e } \left|\frac{dU}{dt}\right|_{\mathcal{H}} = |\mathbb{A}U(t)|_{\mathcal{H}} \leq |\mathbb{A}U^0|_{\mathcal{H}} \quad \forall\, t \geq 0.$$

Considerando que os problemas (2.78) e (2.84) são equivalentes, então, tomando $U^0 = (u^0, u^1) \in D(\mathbb{A})$ existe uma única função $U = (u, u_t) \in C^1([0, \infty); \mathcal{H}) \cap C^0([0, \infty); D(\mathbb{A}))$ que satisfaz o problema (2.78). Além disso,

$$\begin{aligned} \left|\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix}\right|_{\mathcal{H}} = \left|\begin{bmatrix} u_t(t) \\ u_{tt}(t) \end{bmatrix}\right|_{\mathcal{H}} &= \left|\mathbb{A}\begin{bmatrix} u(t) \\ u_t(t) \end{bmatrix}\right|_{\mathcal{H}} \leq \left|\mathbb{A}\begin{bmatrix} u^0 \\ u^1 \end{bmatrix}\right|_{\mathcal{H}} = \left|\left|\begin{bmatrix} -u^1 \\ Au^0 + Bu^1 \end{bmatrix}\right|\right|_{\mathcal{H}} \\ &= ||u^1||_{\mathcal{V}} + ||Au^0 + Bu^1||_{\Omega} \end{aligned}$$

isto é,

$$||u_t(t)||_{\mathcal{V}} + ||u_{tt}(t)||_{\Omega} \leq ||u^1||_{\mathcal{V}} + ||Au^0 + Bu^1||_{\Omega} \quad \forall t \geq 0.$$

Concluímos também que a solução forte possui as seguintes propriedades:

- Como $u_t \in \mathcal{V}$ então $u_t|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)$.
- Como $Au + Bu_t \in L^2(\Omega)$ e pela hipótese (H.1), $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$, então $Au \in L^2(\Omega)$ e consequentemente, $u \in H^2(\Omega)$.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |a(x)g(u_t(x))|^2\, dx &\leq \int_\Omega |a(x)|^2 |g(u_t(x))|^2\, dx \\ &\leq ||a||_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |g(u_t(x))|^2\, dx. \end{aligned} \tag{2.88}$$

Seja $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ onde $\Omega_0 = \{x \in \Omega; |u_t(x)| \leq 1\}$ e $\Omega_1 = \{x \in \Omega; |u_t(x)| > 1\}$ segue da hipótese (H.1) itens (i) e (ii) que

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(u_t(x))|^2\, dx &= \int_{\Omega_0} |g(u_t(x))|^2\, dx + \int_{\Omega_1} |g(u_t(x))|^2\, dx \\ &\leq Mmed(\Omega) + K\int_\Omega |u_t(x)|^2\, dx \quad < \infty. \end{aligned} \tag{2.89}$$

De (2.88) e (2.89) temos

$$\int_\Omega |a(x)g(u_t(x))|^2\, dx \leq ||a||_{L^\infty(\Omega)}(Mmed(\Omega) + K\int_\Omega |u_t(x)|^2\, dx) \quad < \infty. \tag{2.90}$$

Portanto, $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$.

Agora, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\langle Au, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx = \langle -\Delta u, \varphi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Logo, $Au = -\Delta u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Como $Au \in L^2(\Omega)$ então $Au = -\Delta u$ em $L^2(\Omega)$ e assim $-\Delta u \in L^2(\Omega)$. Pela regularidade dos problemas elípticos obtemos que $u \in H^2(\Omega)$.

- $D(\mathbb{A}) = H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, consequentemente, $u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.

De fato, seja $(u,v) \in D(\mathbb{A})$, então, $(u,v) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega), v \in \mathcal{V}$ e como vimos $u \in H^2(\Omega)$, logo, $(u,v) \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, ou seja, $D(\mathbb{A}) \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$. Por outro lado, seja $(u,v) \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, então

$$\langle -\Delta u, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)} = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \langle Au, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega),\mathcal{D}(\Omega)}.$$

Logo, $-\Delta u = Au$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$. Mas, como $-\Delta u \in L^2(\Omega)$, então, $-\Delta u = Au$ em $L^2(\Omega)$ e assim $Au \in L^2(\Omega)$. Além disso, de (2.90) temos que $a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$, consequentemente, $Au + a(x)g(u_t) \in L^2(\Omega)$. Portanto, $(u,v) \in D(\mathbb{A})$, ou seja, $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} \times \mathcal{V} \subset D(\mathbb{A})$. No entanto, como vimos anteriormente $(u,u_t) \in C^1([0,\infty);\mathcal{H}) \cap C^0([0,\infty); D(\mathbb{A}))$, isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \quad \text{e} \quad u_t \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}).$$

Desta forma, $u \in C^0(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$.

- A solução regular satisfaz naturalmente a condição de fronteira.

Com efeito, dado $u \in \mathcal{V}$ tal que $Au = f \in L^2(\Omega)$ temos para $v \in \mathcal{V}$ que

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \cdot \nabla_T v \, d\Gamma \\ &= -\int_\Omega \Delta u v \, dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u v \, d\Gamma \\ &= \int_\Omega f v \, dx. \end{aligned}$$

Sendo $-\Delta u = Au = f$ em $L^2(\Omega)$ então

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u) v \, d\Gamma \equiv 0.$$

Tendo em mente que a identidade acima ocorre para qualquer $v \in \mathcal{V}$ e, portanto,

$v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, podemos tomar $w = \gamma_0 v \in C^\infty(\Gamma_1)$ e assim,

$$\int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u - \Delta_T u) w \, d\Gamma = 0; \quad \forall\, w \in C^\infty(\Gamma_1),$$

isto é,

$$(\partial_\nu u - \Delta_T u, w)_{\Gamma_1} = 0; \quad \forall\, w \in C^\infty(\Gamma_1).$$

Como $C^\infty(\Gamma_1)$ é denso em $L^2(\Gamma_1)$, segue que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad L^2(\Gamma_1).$$

2.3.2 Existência e Unicidade de Solução Fraca

Consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + Bu & 0 < t < \infty \\ u(0) = u^0 \end{cases} \tag{2.91}$$

onde A é um operador m-dissipativo de X em X, B é contínuo e dissipativo de X nele mesmo e X é um espaço de Banach.

Para o problema (2.91) temos o seguinte resultado de existência.

Teorema 2.2. *Seja $A : X \longrightarrow X$ um operador m-dissipativo. Seja $B : X \longrightarrow X$ um operador contínuo, não-linear e dissipativo definido em todo X. Então, para cada $u_0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$ existe uma única função contínua $u : [0, \infty) \longrightarrow X$ tal que $u(0) = u_0$.*

Demonstração: Ver Barbu [1], Cap.III, Seção 3, Teo.3.1.

Consideremos o problema dado na forma (2.84) visto na seção 2.3.1, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} + \mathbb{A}\begin{bmatrix} u \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ em } \begin{array}{c} \mathcal{V} \\ \times \\ L^2(\Omega) \end{array}$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbb{A}: \quad D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \quad &= \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \\ \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} \qquad\qquad &\longmapsto \mathbb{A}\begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h \\ Av + Bh \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{e} \quad D(\mathbb{A}) = \{(v,h) \in \mathcal{H}; h \in \mathcal{V}, Av + Bh \in L^2(\Omega)\}.$$

Já vimos que $\mathbb{A}$ é um operador maximal monótono sobre $\mathcal{H}$, logo, $-\mathbb{A}$ é m-dissipativo. Definindo

$$\begin{aligned} \mathbb{B}: \quad \mathcal{H} \quad &\longrightarrow \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} v \\ h \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

isto é, $\mathbb{B}$ é o operador nulo sobre $\mathcal{H}$, é claro que $\mathbb{B}$ é contínuo e dissipativo. Assim, o problema (2.84) pode ser escrito na forma

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} = -\mathbb{A}U + \mathbb{B}U \qquad 0 < t < \infty \\ U(0) = U^0 \end{cases} \tag{2.92}$$

e satisfaz as hipóteses do Teorema 2.2. Então, para cada $U^0 \in \overline{D(\mathbb{A})}$ existe uma única função contínua $U : [0,\infty) \longrightarrow \mathcal{H}$ tal que $U(0) = U^0$. Como $\mathbb{A} : D(\mathbb{A}) \subset \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ é maximal monótono, segue da Proposição 1.7.4 que $\overline{D(\mathbb{A})} = \mathcal{H}$.

Interpretando o parágrafo anterior, concluímos que dados $U^0 = (u^0, u^1) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$

existe uma única solução fraca do problema dado na classe

$$U = (u, u_t) \in C^0([0, \infty), \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$$

isto é,

$$u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)).$$

2.4 Apêndice

2.4.1 O Espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$

O espaço $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$. De fato, seja $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ um sequência tal que

$$u_k \to u \ \text{ em } \ H^1(\Omega).$$

Pela continuidade da aplicação traço γ_0, temos que

$$\gamma_0(u_k) \to \gamma_0(u) \ \text{ em } \ H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$$

e assim,

$$\gamma_0(u_k) \to \gamma_0(u) \ \text{ q.s. em } \ \Gamma.$$

Como $\{u_k\} \subset H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ temos que $\gamma_0(u_k) = 0$ q.s. em Γ_0, $\forall\, k \in \mathbb{N}$ e da convergência acima, concluímos que $\gamma_0(u) = 0$ q.s. em Γ_0, o que prova que $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Logo, $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Como $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert temos o desejado.

Além do mais, em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ as normas

$$||u||_{H^1(\Omega)} \quad \text{e} \quad [u] = ||\nabla u||_{\Omega} \tag{2.93}$$

são equivalentes. Com efeito, notemos inicialmente que a aplicação

$$u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \longrightarrow [u] = ||\nabla u||_\Omega \tag{2.94}$$

define uma seminorma em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$. Agora, se $[u] = 0$ isto é, $||\nabla u||_\Omega = 0$ então $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0, \ \ \forall\, i = 1, ..., n$, logo, $u = C$, onde C é uma constante (notemos que Ω é conexo). Como $u|_{\Gamma_0} = 0$ resulta que $u = 0$ em Ω. Portanto, a aplicação acima é uma norma.

Como a desigualdade

$$||\nabla u||_\Omega \leq ||u||_\Omega + ||\nabla u||_\Omega = ||u||_{H^1(\Omega)}$$

é trivialmente verificada, para provarmos o desejado em (2.93) é suficiente garantirmos a existência de uma constante $c_1 > 0$ tal que

$$||u||_\Omega \leq c_1[u]; \ \ \forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.95}$$

Se $u = 0$, nada temos a provar. Suponhamos, então, que $u \neq 0$. De (2.95) temos que mostrar o desejado é equivalente a mostrar que existe $c_2 > 0$ tal que

$$c_2 \leq \left[\frac{u}{||u||_\Omega}\right]; \ \ \forall\, u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega).$$

Ou ainda, basta provarmos que

$$\exists\, c > 0 \ \text{ tal que } \ [u] \geq c, \ \forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \ \text{ com } \ ||u||_\Omega = 1.$$

Suponhamos o contrário, ou seja, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $u_n \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ com $||u_n||_\Omega = 1$ e, no entanto,

$$[u_n] < \frac{1}{n}. \tag{2.96}$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $n \to +\infty$ resulta que

$$\lim_{n\to+\infty}[u_n] = 0. \tag{2.97}$$

Agora, de (2.96) e do fato que $||u_n||_\Omega = 1;\ \forall\ n \in \mathbb{N}$ temos

$$||u_n||^2_{H^1(\Omega)} = ||u_n||^2_\Omega + [u_n]^2 \leq 1 + \frac{1}{n^2} \leq 2, \tag{2.98}$$

o que implica que $\{u_n\}$ é limitada no espaço topológico $(H^1_{\Gamma_0}(\Omega), ||.||_{H^1(\Omega)})$. Sendo $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ Hilbert com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, existirá (u_ν) subsequência de (u_n) e $u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ tal que

$$u_\nu \rightharpoonup u \ \text{ em } \ H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.99}$$

Sendo a aplicação $v \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \mapsto [v]$ uma norma, ela é convexa e semicontínua inferiormente. Logo de (2.97) e (2.99) obtemos

$$[u] \leq \lim_{\nu\to\infty}[u_\nu] = 0.$$

Assim, $[u] = 0$ e portanto $u = 0$.

Por outro lado, em virtude da imersão $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser compacta, então de (2.98), após a extração de uma eventual subsequência obtemos

$$u_\nu \to u \ \text{ em } \ L^2(\Omega) \tag{2.100}$$

o que implica que

$$||u_\nu||_\Omega \to ||u||_\Omega.$$

Como $||u_\nu||_\Omega = 1$ vem que $||u||_\Omega = 1$ o que é um absurdo, pois $u = 0$. Ficando provado a equivalência entre as normas.

2.4.2 O Espaço $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$

O espaço $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ é separável quando munido com a topologia

$$||u||_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} = ||u||_{H^2(\Omega)} + ||u||_{\mathcal{V}}.$$

Com efeito, consideremos a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} T : H^2(\Omega) \cap \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{V} \times L^2(\Omega) \times [L^2(\Omega)]^n \times [L^2(\Omega)]^{n^2} \\ u &\mapsto (u, u, \nabla u, D^2 u) \end{aligned}$$

onde $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$; $i = 1, ..., n$, e $D^2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$; $i, j = 1, ..., n$. Mostraremos que T é uma aplicação linear isométrica.

Seja $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, então

$$\begin{aligned} ||u||_{H^2(\Omega)\cap\mathcal{V}} &= ||u||_{H^2(\Omega)} + ||u||_{\mathcal{V}} \quad \text{e} \\ ||Tu||_{\mathcal{V}\times[L^2(\Omega)]^{m^2}} &= ||u||_{\mathcal{V}} + ||u||_{L^2(\Omega)} + ||\nabla u||_{[L^2(\Omega)]^n} + ||D^2 u||_{[L^2(\Omega)]^{m^2}} \\ &= ||u||_{\mathcal{V}} + ||u||_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

É claro que T é uma isometria.

Pondo-se $\mathcal{Z} = T(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V})$, resulta que $\mathcal{Z}$ é um subespaço de um espaço separável e portanto, também é separável. Sendo T isometria vem que $T^{-1}(\mathcal{Z})$ possui um subconjunto enumerável e denso em $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$, o que prova que este último é da mesma forma separável.

Sendo assim, o subespaço $\{w \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}; \partial_\nu w = \Delta_{\Gamma_1} \text{ em } \Gamma_1\}$ também é separável.

2.4.3 Identidade de Energia

Nosso intuito é provar a seguinte identidade de energia

$$\frac{1}{2}||u'(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}||\nabla u(t)||^2_\Omega + \frac{1}{2}||\nabla_T u(t)||^2_{\Gamma_1} + \int_0^t \int_\Omega a(x)g(u'(t))u'(t)\ dx\ dt$$
$$= \frac{1}{2}||u'(0)||^2_\Omega + \frac{1}{2}||\nabla u(0)||^2_\Omega + \frac{1}{2}||\nabla_T u(0)||^2_{\Gamma_1}$$

para $0 \le t \le T$, onde u é uma solução fraca do problema 2.1.

Seja θ_0 a função característica do intervalo $[s,t]$, onde $0 < s < t < T$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno definamos

$$\theta_\delta(\tau) = \begin{cases} 1 & \text{se } \tau \in [s+\delta, t-\delta] \\ 0 & \text{se } \tau \in \mathbb{R}\backslash]s,t[\\ \frac{1}{\delta}\tau - \frac{s}{\delta} & \text{se } \tau \in [s, s+\delta] \\ -\frac{1}{\delta}\tau + \frac{t}{\delta} & \text{se } \tau \in [t-\delta, t] \end{cases} \tag{2.101}$$

cujo gráfico é dado pela figura abaixo:

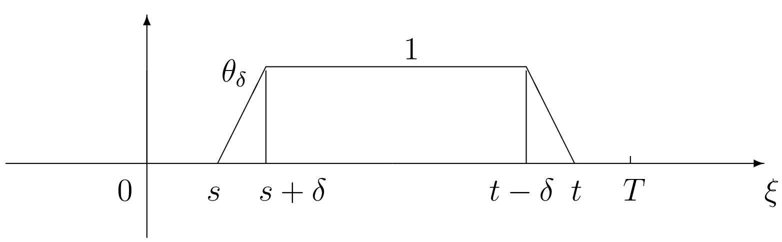

Figura 2.1: Função θ_δ

Consideremos η_ϵ uma sucessão regularizante par, isto é, $\eta_\epsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $supp(\eta_\epsilon) \subset (-\epsilon, \epsilon)$, $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\epsilon = 1$, $\eta_\epsilon \ge 0$ e $\eta_\epsilon(\xi) = \eta_\epsilon(-\xi)$; $\forall \epsilon > 0$.

Para simplificarmos a notação denotaremos $\theta_\delta = \theta$ e $\eta_\epsilon = \eta$.

Denotaremos por $\widetilde{\psi}$ a extensão de ψ como sendo zero fora do intervalo $[0,T]$.

Como $u \in L^2(0,T;\mathcal{V})$, $u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ temos que $\theta u \in L^2(0,T;\mathcal{V})$

e $\theta u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com

$$supp(\theta u) \subset supp(\theta) \cap supp(u) \subset supp(\theta) = [S,t] \ \text{ e}$$
$$supp(\theta u_t) \subset supp(\theta) \cap supp(u_t) \subset supp(\theta) = [S,t].$$

Assim, $v = \eta * (\theta \widetilde{u}) \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$ e $\eta * (\theta \widetilde{u_t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega))$. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt}\left[||\eta * (\theta\widetilde{u_t})||_\Omega^2 + ||\nabla v||_\Omega^2 + ||\nabla_T v||_{\Gamma_1}^2\right] ds \\ &= 2\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\Big(\eta * (\theta\widetilde{u_t}), (\eta * (\theta\widetilde{u_t}))_t\Big)_\Omega + (\nabla v, \nabla v_t)_\Omega + (\nabla_T v, \nabla_T v_t)_{\Gamma_1}\right] ds \quad (2.102) \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} v_t = (\eta * (\theta\widetilde{u}))_t &= \eta * (\theta'\widetilde{u}) + \eta * (\theta\widetilde{u_t}) \quad \text{em} \ \ C_0^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega)) \\ \Rightarrow \eta * (\theta\widetilde{u_t}) &= v_t - \eta * (\theta'\widetilde{u}) \\ &= \eta' * (\theta\widetilde{u}) - \eta * (\theta'\widetilde{u}) \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} (\eta * (\theta\widetilde{u_t}))_t &= \eta * (\theta'\widetilde{u_t}) + \eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) \quad \text{em} \ \ C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V}') \\ \Rightarrow \eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) &= (\eta * (\theta\widetilde{u_t}))_t - \eta * (\theta'\widetilde{u_t}) \\ &= \eta' * (\theta\widetilde{u_t}) - \eta * (\theta'\widetilde{u_t}) \quad \in C_0^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

Portanto, $\eta * (\theta\widetilde{u_t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R};\mathcal{V})$ e $\eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) \in C_0^\infty(\mathbb{R};L^2(\Omega)$.

Então, por (2.102) segue que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{\nabla u}), \eta * (\theta' \widetilde{\nabla u})\Big)_\Omega \; ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{\nabla u}), \nabla(\eta * (\theta \widetilde{u_t}))\Big)_\Omega \; ds}_{N_1} \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{u_t}), \eta * (\theta' \widetilde{u_t})\Big)_\Omega \; ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{u_t}), \eta * (\theta \widetilde{u_{tt}})\Big)_\Omega \; ds}_{N_2} \qquad (2.103) \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{\nabla_T u}), \eta * (\theta' \widetilde{\nabla_T u})\Big)_{\Gamma_1} \; ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta \widetilde{\nabla_T u}), \nabla_T(\eta * (\theta \widetilde{u_t}))\Big)_{\Gamma_1} \; ds}_{N_3} .
\end{aligned}$$

Definamos

$$\langle A\psi, w \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} = \int_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla w \; dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T \psi \cdot \nabla_T w \; d\Gamma; \quad \forall \psi, w \in \mathcal{V}. \qquad (2.104)$$

Como u satisfaz

$$\begin{cases}
u_{tt} - \Delta u + ag(u_t) = 0 & \text{em} \;\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}') \\
\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u & \text{em} \;\; L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)) \\
u = 0 & \text{em} \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\
u(0) = u^0, \;\; u_t(0) = u^1 & \text{em} \;\; \Omega;
\end{cases}$$

resulta que

$$u_{tt} + Au + ag(u_t) = 0 \quad \text{em} \;\; L^\infty(0,T;\mathcal{V}'). \qquad (2.105)$$

Assim, de (2.104) e (2.105) obtemos

$$\begin{aligned}
\langle \widetilde{u_{tt}}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} &= \langle -A\widetilde{u}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}',\mathcal{V}} - (ag(\widetilde{u_t}), \varphi)_\Omega \\
&= -(\widetilde{\nabla u}, \nabla\varphi)_\Omega - (\widetilde{\nabla_T u}, \nabla_T \varphi)_{\Gamma_1} - (ag(\widetilde{u_t}), \varphi)_\Omega \qquad (2.106)
\end{aligned}$$

para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{V})$.

Pondo $\varphi = \eta * \eta * (\theta \widetilde{u_t})$, observando que η é uma função par que depende unicamente da variável temporal t, usando a Proposição 1.1.9 e a identidade (2.106), podemos calcular $N_1 + N_2 + N_3$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
& N_1 + N_2 + N_3 = \\
= \ & \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega \theta \widetilde{\nabla u} \nabla (\underbrace{\eta * \eta * (\theta \widetilde{u_t})}_{\varphi}) \ dx \ ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \langle \widetilde{u_{tt}}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \ ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} \theta \widetilde{\nabla_T u} \nabla_T \varphi \ d\Gamma \ ds \\
= \ & \int_{-\infty}^{+\infty} \theta (\widetilde{\nabla u}, \nabla \varphi)_\Omega \ ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \langle \widetilde{u_{tt}}, \varphi \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \ ds + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta (\widetilde{\nabla_T u}, \nabla_T \varphi)_{\Gamma_1} \ ds \\
= \ & - \int_{-\infty}^{+\infty} \theta \Big(a g(\widetilde{u_t}), \varphi \Big)_\Omega \ ds
\end{aligned} \tag{2.107}$$

De (2.103), (2.107) e lembrando que $\theta = \theta_\delta$, obtemos a primeira identidade

$$\begin{aligned}
0 \ = \ & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta_\delta \widetilde{\nabla u}), \eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u}) \Big)_\Omega \ ds}_{I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}), \eta * (\theta_\delta' \widetilde{u_t}) \Big)_\Omega \ ds}_{I_2} + \\
+ \ & \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta_\delta \widetilde{\nabla_T u}), \eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla_T u}) \Big)_{\Gamma_1} \ ds}_{I_3} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\delta \Big(a g(\widetilde{u_t}), \varphi \Big)_\Omega \ ds}_{I_4}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

O nosso próximo passo é estimar cada termo de (2.108) separadamente quando $\delta \to 0$ e η permanece fixo.

Estimativa de $I_4 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega (\eta * (\theta_\delta a(x) g(\widetilde{u_t})))(\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})) \ dx \ ds.$

Desde que $\theta_\delta \to \theta_0$ q.s. em $\mathbb{R}$ e $|\theta_\delta(t)|^2 \leq \theta_0(t)$ então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que $\theta_\delta \to \theta_0$ em $L^2(\mathbb{R})$. Logo, quando $\delta \to 0$,

$$||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega \to ||\eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega \ \text{ para q.t. } \ t \in \mathbb{R}. \tag{2.109}$$

Com efeito, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo temos

$$\begin{aligned}
& (||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega - ||\eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega)^2 \leq ||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t})) - \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega^2 \\
& = \int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(t - \xi) |a(x) g(\widetilde{u_t}(x,t))| \ |\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi)| d\xi \right|^2 \ dx \\
& \leq C \int_\Omega \left[\left(\int_0^T |a(x) g(u_t(x,t))|^2 d\xi \right) \left(\int_0^T |\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi)|^2 d\xi \right) \right] \ dx
\end{aligned}$$

e a última expressão acima converge para zero quando $\delta \to 0$, o que prova (2.109).

De maneira análoga segue que

$$||\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})||_\Omega \to ||\eta * (\theta_0 \widetilde{u_t})||_\Omega \;\text{ q.s. em }\; \mathbb{R}. \tag{2.110}$$

Além disso, temos que

$$||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega^2 \leq N \quad \text{e} \quad ||\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})||_\Omega^2 \leq M \qquad \text{q.s. em }\; \mathbb{R}; \tag{2.111}$$

onde M e N são constantes positivas independentes de δ.

Com efeito,

$$\begin{aligned}
||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega^2 &= \int_\Omega |\eta * (\theta_\delta a(x) g(\widetilde{u_t}))|^2 dx \\
&= \int_\Omega \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(t-\xi)\theta_\delta(\xi) a(x) g(\widetilde{u_t}(\xi)) \; d\xi \right|^2 \; dx \\
&\leq \int_\Omega ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 ||\theta_\delta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \left| \int_0^T a(x) g(u_t(\xi)) \; d\xi \right|^2 \; dx \\
&\leq ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 ||\theta_\delta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \int_\Omega \left(\int_0^T d\xi \right) \left(\int_0^T |a(x) g(u_t(\xi))|^2 \; d\xi \right) \; dx \\
&= T ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 ||\theta_\delta||_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 ||a g(u_t)||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}^2 < N.
\end{aligned}$$

Analogamente provamos a segunda afirmação de (2.111).

Desta forma, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega \;\to\; ||\eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t}))||_\Omega \;\text{ em }\; L^2(\mathbb{R}) \;\text{ e} \tag{2.112}$$

$$||\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})||_\Omega \;\to\; ||\eta * (\theta_0 \widetilde{u_t})||_\Omega \;\text{ em }\; L^2(\mathbb{R}). \tag{2.113}$$

Além do mais, temos que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t})) \to \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t})) \;\text{ q.s em }\; \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.114}$$

De fato, seja $(x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$, exceto num conjunto de medida nula,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \eta(t-\xi)[\theta_\delta(\xi)-\theta_0(\xi)]a(x)g(\widetilde{u_t}(x,\xi))\ d\xi \\
&= \int_0^T \eta(t-\xi)[\theta_\delta(\xi)-\theta_0(\xi)]a(x)g(u_t(x,\xi))\ d\xi \\
&\leq ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})}||\theta_\delta-\theta_0||_{L^2(0,T)}||a(x)g(u_t(x))||_{L^2(0,T)} \to 0, \delta \to 0.
\end{aligned}$$

Também, por (2.112) temos que

$$\int_{\mathbb{R}} ||\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t}))||^2_\Omega dt \leq \overline{M}, \qquad \forall \delta. \tag{2.115}$$

De (2.114), (2.115) e do Lema de Lions decorre que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t})) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t})) \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.116}$$

De modo análogo obtemos que

$$\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}) \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.117}$$

Combinando (2.112) com (2.116) e (2.113) com (2.117) segue que

$$\eta * (\theta_\delta a g(\widetilde{u_t})) \ \to \ \eta * (\theta_0 a g(\widetilde{u_t})) \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \quad \text{e} \tag{2.118}$$

$$\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}) \ \to \ \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}) \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.119}$$

Disso resulta que

$$I_4 \to \int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega (\eta * (\theta_0 a(x) g(\widetilde{u_t})))(\eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}))\ dx\ ds \quad \text{quando } \delta \to 0. \tag{2.120}$$

Estimativa de $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega (\eta * (\theta_\delta \widetilde{\nabla u}))(\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u}))\ dx\ ds.$

Podemos decompor I_1 da seguinte forma

$$I_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega (\eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u}))\ dx\ ds}_{I_5} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega (\eta * [(\theta_\delta - \theta_0)\widetilde{\nabla u}])(\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u}))\ dx\ ds}_{I_6}.$$

Como $\theta_\delta \to \theta_0$ em $L^2(\mathbb{R})$ e como $u \in L^\infty(0,T;\mathcal{V})$ temos que

$$\eta * [(\theta_\delta - \theta_0)\widetilde{\nabla u}] \to 0 \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \left| \int_0^T \eta(t-\xi)[\theta_\delta - \theta_0]\nabla u(\xi)\ d\xi \right|^2 dx &\leq K^2 \int_\Omega \left(\int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|\ |\nabla u(\xi)|\ d\xi \right)^2 dx \\
&\leq K^2 \int_\Omega \left(\int_0^T dt \right) \left(\int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi \right) dx \\
&= K^2 T \int_\Omega \int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 |\nabla u(\xi)|^2\ d\xi\ dx \\
&\leq K^2 T \int_0^T |\theta_\delta - \theta_0|^2 d\xi\ ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \quad \to 0
\end{aligned}$$

quando $\delta \to 0$. Também

$$\begin{aligned}
&||\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})||_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \\
&= \int_0^T \left(\int_\Omega |\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \int_0^T \left[\int_\Omega \left(\int_0^T |\eta|\ |\theta_\delta'|\ |\nabla u|\ d\xi \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[\int_\Omega \left(\int_0^T |\theta_\delta'|^{\frac{1}{2}} |\theta_\delta'|^{\frac{1}{2}}\ |\nabla u|\ d\xi \right)^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[\left(\int_0^T |\theta_\delta'|\ d\xi \right) \int_\Omega \left(\int_0^T |\theta_\delta'|\ |\nabla u|^2\ d\xi \right) dx \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})} \int_0^T \left[||\theta_\delta'||_{L^1(0,T)} ||\nabla u||^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \int_0^T |\theta_\delta'|\ d\xi \right]^{\frac{1}{2}} dt \\
&= T ||\eta||_{L^\infty(\mathbb{R})} \underbrace{||\theta_\delta'||_{L^1(0,T)}}_{=2} ||\nabla u||_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$I_6 \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \qquad \delta \longrightarrow 0.$$

Agora, pela definição de θ_δ e Proposição 1.1.9 temos

$$\begin{aligned} I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega (\eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u}))\, dx\, ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\delta' \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)_\Omega\, ds \\ &= \frac{1}{\delta}\int_s^{s+\delta} \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)_\Omega\, d\xi - \frac{1}{\delta}\int_{t-\delta}^{t} \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)_\Omega\, ds. \end{aligned}$$

Como $u \in C^0(\mathbb{R}_+; \mathcal{V})$ então a função $s \mapsto \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(s)), \widetilde{\nabla u}(s)\Big)_\Omega$ é contínua e portanto integrável. Logo, pelo Teorema da Média obtemos que

$$I_5 \longrightarrow \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(s)), \nabla u(s)\Big)_\Omega - \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(t)), \nabla u(t)\Big)_\Omega,$$

quando $\delta \longrightarrow 0$. Portanto,

$$I_1 \longrightarrow \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(s)), \nabla u(s)\Big)_\Omega - \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(t)), \nabla u(t)\Big)_\Omega, \tag{2.121}$$

quando $\delta \longrightarrow 0$.

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito em I_1 concluímos que

$$I_2 \longrightarrow \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}(s)), u_t(s)\Big)_\Omega - \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}(t)), u_t(t)\Big)_\Omega \quad \text{e} \tag{2.122}$$

$$I_3 \longrightarrow \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}(s)), \nabla_T u(s)\Big)_{\Gamma_1} - \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}(t)), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}, \tag{2.123}$$

quando $\delta \longrightarrow 0$. Das convergências (2.120), (2.121), (2.122) e (2.123), lembrando que $\eta = \eta_\epsilon$ e tomando $\rho_\epsilon = \eta_\epsilon * \eta_\epsilon$ obtemos a segunda identidade:

$$\begin{aligned} &\Big[\Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \nabla u\Big)_\Omega + \Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}), u_t\Big)_\Omega + \Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}), \nabla_T u\Big)_{\Gamma_1}\Big]_S^t \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega \theta_0 a(x) g(\widetilde{u_t})\Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t})\Big)\, dx\, ds. \end{aligned} \tag{2.124}$$

Tomaremos $\epsilon \longrightarrow 0$ na expressão anterior.

Observemos que

$$\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}) \longrightarrow \theta_0 \widetilde{u_t} \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e $\theta_0 a(x) g(u_t) \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Portanto,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega \theta_0 a(x) g(\widetilde{u_t})\Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t})\Big)\, dx\, ds \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty}\int_\Omega \theta_0 a(x) g(\widetilde{u_t})\theta_0 \widetilde{u_t}\, dx\, ds \\ = \int_s^t \int_\Omega a(x) g(u_t) u_t\, dx\, d\xi, \qquad (2.125)\end{aligned}$$

quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Agora, vamos mostrar que

$$\begin{aligned}\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(t), u_t(t)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}))(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1} \\ \longrightarrow \frac{1}{2}\Big(||u_t(t)||^2_\Omega + ||\nabla u(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(t)||^2_{\Gamma_1}\Big), \quad \epsilon \rightarrow 0. \ (2.126)\end{aligned}$$

De fato, primeiramente notemos que $supp(\rho_\epsilon) \subset (-2\epsilon, 2\epsilon), \rho_\epsilon \geq 0$ e

$$\int_0^{+\infty} \rho_\epsilon\, ds = \int_{-\infty}^0 \rho_\epsilon\, ds = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon\, ds = \frac{1}{2}. \qquad (2.127)$$

Todavia, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de (2.127) e como θ_0 é a função característica do intervalo $[s,t]$, segue que $\theta_0(t-\tau) = 0$, para $t-s < \tau < 0$ e $\theta_0(t-\tau) = 1$, para $0 \leq \tau \leq t-s$. Assim, para $0 < \epsilon < \frac{t-s}{2}$,

$$\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(t), u_t(t)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}))(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}$$

$$-\frac{1}{2}\Big(||u_t(t)||^2_\Omega + ||\nabla u(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(t)||^2_{\Gamma_1}\Big)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau)\theta_0(t-\tau)\Big(\widetilde{\nabla u}(t-\tau), \nabla u(t)\Big)_\Omega\, d\tau + \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau)\theta_0(t-\tau)\Big(\widetilde{u_t}(t-\tau), u_t(t)\Big)_\Omega\, d\tau$$

$$+\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau)\theta_0(t-\tau)\Big(\widetilde{\nabla_T} u(t-\tau), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\, d\tau - \int_0^{+\infty} \rho_\epsilon(\tau)\Big(\nabla u(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega\, d\tau$$

$$-\int_0^{+\infty} \rho_\epsilon(\tau)\Big(u_t(t), u_t(t)\Big)_\Omega\, d\tau - \int_0^{+\infty} \rho_\epsilon(\tau)\Big(\nabla_T u(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\, d\tau$$

$$= \int_0^{t-s} \rho_\epsilon(\tau)\underbrace{\theta_0(t-\tau)}_{=1}\Big(\nabla u(t-\tau), \nabla u(t)\Big)_\Omega\, d\tau + \int_0^{t-s} \rho_\epsilon(\tau)\underbrace{\theta_0(t-\tau)}_{=1}\Big(u_t(t-\tau), u_t(t)\Big)_\Omega\, d\tau$$

$$+\int_0^{t-s} \rho_\epsilon(\tau)\underbrace{\theta_0(t-\tau)}_{=1}\Big(\nabla_T u(t-\tau), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\, d\tau - \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Big(\nabla u(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega\, d\tau$$

$$-\int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Big(u_t(t), u_t(t)\Big)_\Omega\, d\tau - \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Big(\nabla_T u(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\, d\tau$$

$$= \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Bigg[\Big(\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega + \Big(u_t(t-\tau) - u_t(t), u_t(t)\Big)_\Omega$$

$$+\Big(\nabla_T u(t-\tau) - \nabla_T u(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\Bigg]\, d\tau. \tag{2.128}$$

Mostraremos que a última expressão da igualdade acima converge para zero quando $\epsilon \to 0$. De fato,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Bigg[\Big(\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t), \nabla u(t)\Big)_\Omega + \Big(u_t(t-\tau) - u_t(t), u_t(t)\Big)_\Omega \\ &\quad +\Big(\nabla_T u(t-\tau) - \nabla_T u(t), \nabla_T u(t)\Big)_{\Gamma_1}\Bigg]\, d\tau \\ &\leq \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Bigg[||\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t)||_\Omega\, ||\nabla u(t)||_\Omega + ||(u_t(t-\tau) - u_t(t)||_\Omega\, ||u_t(t)||_\Omega \\ &\quad +||\nabla_T u(t-\tau) - \nabla_T u(t)||_{\Gamma_1}\, ||\nabla_T u(t)||_{\Gamma_1}\Bigg]\, d\tau \quad \leq \end{aligned}$$

$$\underbrace{\Big\{||\nabla u||_{C^0(\mathbb{R}_+;[L^2(\Omega)]^n)} + ||u_t||_{C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Omega))} + ||\nabla_T u||_{C^0(\mathbb{R}_+;L^2(\Gamma_1))}\Big\}}_{=M} \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\Bigg[||\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t)||_\Omega$$

$$+||(u_t(t-\tau) - u_t(t)||_\Omega + ||\nabla_T u(t-\tau) - \nabla_T u(t)||_{\Gamma_1}\Bigg]\, d\tau. \tag{2.129}$$

Observemos que, para $\epsilon < 1$,

$$\nabla u \in C^0([0,2];[L^2(\Omega)]^n).$$

Logo, $||\nabla u(.)||_{[L^2(\Omega)]^n}$ é uniformemente contínua em $[0,2]$. Assim, para $\xi > 0$ dado, existe $\delta_0 > 0$ tal que se $t, \sigma \in [0,2]$ e $|t-\sigma| < \delta_0$ então,

$$||\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)||_\Omega < \frac{\xi}{3M}$$

Tomando $\sigma = t - \tau$ temos que $|t-\sigma| < \delta_0$, pois, $|t-\sigma| = |t-t+\tau| = |\tau| < 2\epsilon$. Escolhendo $\epsilon < 1$ suficientemente pequeno tal que $2\epsilon < \delta_0$, vem que $|\tau| < \delta_0$ e, portanto,

$$||\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t)||_\Omega < \frac{\xi}{3M}. \tag{2.130}$$

Nestas mesmas condições, considerando $\epsilon < 1$,

$$u_t \in C^0([0,2];L^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad \nabla_T u \in C^0([0,2];[L^2(\Omega)]^n).$$

Logo, $||u_t(.)||_{L^2(\Omega)}$ e $||\nabla_T u(.)||_{[L^2(\Omega)]^n}$ são uniformemente contínuas em $[0,2]$. Assim, para $\xi > 0$ dado, existe $\delta_1 > 0$ tal que se $t, \sigma \in [0,2]$ e $|t-\sigma| < \delta_1$ então,

$$||u_t(t) - u_t(\sigma)||_\Omega < \frac{\xi}{3M} \quad \text{e} \quad ||\nabla_T u(t) - \nabla_T u(\sigma)||_{\Gamma_1} < \frac{\xi}{3M},$$

e, portanto, para $\epsilon < 1$ suficientemente pequeno temos que

$$||u_t(t-\tau) - u_t(t)||_\Omega < \frac{\xi}{3M} \quad \text{e} \quad ||\nabla_T u(t-\tau) - \nabla_T u(t)||_{\Gamma_1} < \frac{\xi}{3M}. \tag{2.131}$$

Agora, para $\xi > 0$ dado seja $0 < h < min\{1, \frac{\delta_0}{2}, \frac{\delta_1}{2}\}$. Então, por (2.129), (2.130) e (2.131) temos que

$$\begin{aligned} |I - 0| &< M \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau) \left[\frac{\xi}{3M} + \frac{\xi}{3M} + \frac{\xi}{3M} \right] d\tau \\ &< \xi \underbrace{\int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\, d\tau}_{=1} . \end{aligned}$$

Enfim, concluímos que para $\xi > 0$ dado, existe $h > 0$ tal que se $|\epsilon| < h$ então $|I - 0| < \xi$, ou seja,

$$\lim_{\epsilon \to 0} I = 0;$$

o que prova o desejado em (2.126).

Procedendo da mesma forma feita acima, com a modificação que a integral na expressão (2.128) será calculada no intervalo $(-\infty, 0]$, resulta

$$\begin{aligned} &\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(s), \nabla u(s)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(s), u_t(s)\Big)_\Omega + \Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla_T u}))(s), \nabla_T u(s)\Big)_{\Gamma_1} \\ &\qquad \to \frac{1}{2}\Big(||u_t(s)||^2_\Omega + ||\nabla u(s)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(s)||^2_{\Gamma_1}\Big), \quad \epsilon \to 0. \end{aligned} \tag{2.132}$$

Passando o limite com $\epsilon \to 0$ em (2.124), de (2.125) - (2.132) resulta que

$$\left[\frac{1}{2}\Big(||u_t(t)||^2_\Omega + ||\nabla u(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(t)||^2_{\Gamma_1}\Big)\right]_s^t = -\int_s^t \int_\Omega a(x) g(u_t(\xi)) u_t(\xi)\, dx\, d\xi, \tag{2.133}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\Big[||u_t(t)||^2_\Omega + ||\nabla u(t)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(t)||^2_{\Gamma_1}\Big] + \int_s^t \int_\Omega a(x) g(u_t(\xi)) u_t(\xi)\, dx\, d\xi \\ &= \frac{1}{2}\Big[||u_t(s)||^2_\Omega + ||\nabla u(s)||^2_\Omega + ||\nabla_T u(s)||^2_{\Gamma_1}\Big]. \end{aligned} \tag{2.134}$$

De (2.58) e (2.59) temos que $u \in C^0([0,T]; \mathcal{V})$ e $u' \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$, para todo $T > 0$, portanto, tomando o limite quando $s \to 0$ na expressão acima obtemos a identidade desejada.

Capítulo 3

Estabilização

3.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, com fronteira regular $\partial\Omega = \Gamma$, tal que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e com ambos $\Gamma_i, i = 0, 1$, não vazios, fechados e disjuntos. Seja $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ uma função regular que será construída posteriormente. Definamos ω_1 como sendo uma vizinhança de Γ_1 contida em $\overline{\Omega}$ e subdividamos a fronteira Γ_0 em duas partes: $\Gamma_0^* = \{x \in \Gamma_0; \partial_\nu f > 0\}$ e $\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*$. Agora, seja ω_0 uma vizinhança de $\overline{\Gamma_0^*}$ contida em $\overline{\Omega}$, tal que $\omega_0 \cap \omega_1 = \emptyset$ e ponhamos $\omega^* = \omega_0 \cup \omega_1$. Consideremos o seguinte problema:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x) g(u_t) = 0 & \text{em } \Omega \times]0, \infty[, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0, \infty[, \\ u(x, 0) = u^0(x), \;\; u_t(x, 0) = u^1(x); & x \in \Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Assumamos as seguintes hipóteses:

(H.1) A função não linear $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes condições:

(i) $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ é monótona crescente;

(ii) $g(s)s > 0$ para $s \neq 0$;

(iii) Existem k e K constantes positivas tais que $ks \leq g(s) \leq Ks, |s| > 1$;

(H.2) $a \in L^\infty(\Omega)$ é uma função não negativa tal que

$$a(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{q.s. em} \quad \omega^* = \omega_0 \cup \omega_1.$$

Se u é a única solução fraca global do problema (3.1), definimos a energia correspondente por

$$E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \left[|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right]dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma\right\}. \tag{3.2}$$

Para cada solução de (3.1), a seguinte identidade é válida

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2}\int_\Omega a(x)g(u_t)\ u_t\ dx\ dt, \quad \forall\ t_2 > t_1 \geq 0. \tag{3.3}$$

De modo a introduzir o principal resultado deste capítulo, definiremos a seguir algumas funções auxiliares.

Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função côncava estritamente crescente, com $h(0) = 0$, e tal que

$$h(g(s)s) \geq s^2 + g^2(s); \quad |s| \leq 1. \tag{3.4}$$

A função h pode ser construída posto que g é contínua e a condição (3.4) é "local" em s. Na sequência, definamos

$$r(s) = h\left(\frac{s}{med(Q_T)}\right); \tag{3.5}$$

para algum T que será determinado posteriormente. Como r é monótona crescente, $cI + r$ é invertível para todo $c \geq 0$. Seja L uma constante positiva e ponhamos

$$p(s) = (cI + r)^{-1}(Ls). \tag{3.6}$$

Então, segue que p é positiva, contínua e estritamente crescente, com $p(0) = 0$. Finalmente, definamos

$$\rho(s) = s - (I + p)^{-1}(s). \tag{3.7}$$

Para maiores detalhes sobre as funções auxiliares definidas acima, sugerimos ao leitor a referência [22].

Enunciaremos no que segue o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Suponha que as hipóteses (H.1) e (H.2) sejam satisfeitas e que (3.4) se verifique. Seja u a solução fraca do problema (3.1). Então, existe um $T_0 > 0$, suficientemente grande, tal que para qualquer $T > T_0$, a energia $E(t)$ definida em (3.2) satisfaz*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right), \quad \forall t > T; \tag{3.8}$$

onde $S(t)$ é solução da equação diferencial ordinária dada por

$$\frac{dS}{dt}(t) + \rho(S(t)) = 0, \quad S(0) = E(0), \tag{3.9}$$

com ρ definido em (3.7). Além disso, $S(t)$ decresce monotonicamente e $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$. As constantes L e c dadas em (3.6), dependerão, respectivamente, de $E(0), ||a||_{L^\infty(\Omega)}$, $med(\Gamma)$, $med(\Omega)$, T, e de $||a||_{L^\infty(\Omega)}, K, k$, $med(Q_T)$.

3.2 Prova do Teorema 3.1

Ao longo de toda a prova, lidaremos com soluções regulares e, então, por densidade a estimativa (3.8) poderá ser estendida às soluções fracas.

Usaremos as seguintes identidades

$$\nabla u = \partial_\nu u \, \nu + \nabla_T u, \tag{3.10}$$

$$q \cdot \nabla u = \partial_\nu u (q \cdot \nu) + q \cdot \nabla_T u, \tag{3.11}$$

$$|\nabla u|^2 = (\partial_\nu u)^2 + |\nabla_T u|^2, \tag{3.12}$$

para maiores detalhes ver seção 1.9 das Preliminares.

3.2.1 O Método dos Multiplicadores

Iniciaremos com a seguinte identidade:

Lema 3.2.1. *Seja q um campo vetorial regular em Ω de classe $[C^1(\overline{\Omega})]^n$. Então, para cada solução regular u do problema (2.1) temos a identidade*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u(q\cdot\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}(q\cdot\nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}(q\cdot\nu)\Big[u_t^2-|\nabla_T u|^2+(\partial_\nu u)^2\Big]d\Gamma\ dt\\
&=\Big[\int_\Omega u_t\ q\cdot\nabla u\ dx\Big]_0^T+\int_0^T\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla q\cdot\nabla u\ dx\ dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(div\ q)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(q\cdot\nabla u)dx\ dt.
\end{aligned}\tag{3.13}$$

Demonstração: Seja u uma solução regular do problema (3.1). Então, do capítulo 2 temos que

$$u_{tt}-\Delta u+a(x)g(u_t)=0\ \text{ em }\ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Multiplicando a equação acima por $(q\cdot\nabla u)\in L^2(0,T;\Omega)$ e integrando em $]0,T[\times\Omega$, obtemos

$$\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(q\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_1}\underbrace{-\int_0^T\int_\Omega\Delta u(q\cdot\nabla u)dx\ dt}_{N_2}+\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(q\cdot\nabla u)dx\ dt=0 \tag{3.14}$$

Integrando N_1 por partes no tempo, temos

$$\begin{aligned}
N_1&=\int_0^T\int_\Omega u_{tt}(q\cdot\nabla u)dx\ dt\\
&=\Big[\int_\Omega u_t(q\cdot\nabla u)dx\Big]_0^T-\underbrace{\int_0^T\int_\Omega u_t(q\cdot\nabla u_t)dx\ dt}_{N_3}.
\end{aligned}\tag{3.15}$$

Pondo $q(x) = \Big(q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)\Big)$, $\nabla u_t = \left(\dfrac{\partial u_t}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u_t}{\partial x_n}\right)$, aplicando a Fórmula de Gauss em N_3, para $i = 1, ..., n$, e como $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, segue que

$$
\begin{aligned}
N_3 &= \int_0^T \int_\Omega u_t(q \cdot \nabla u_t)dx\ dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega u_t\Big(\sum_{i=1}^n q_i\ \frac{\partial u_t}{\partial x_i}\Big)dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(u_t)^2 q_i\ dx\ dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega (u_t)^2 \frac{\partial q_i}{\partial x_i}\ dx\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Gamma (u_t)^2 q_i\ \nu_i\ d\Gamma\ dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)(u_t)^2 dx\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (3.16)
\end{aligned}
$$

De (3.15) e (3.16) temos que

$$
N_1 = \left[\int_\Omega u_t(q \cdot \nabla u)dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div\ q)(u_t)^2 dx\ dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \quad (3.17)
$$

Por outro lado, aplicando a Fórmula de Green em N_2, obtemos

$$
\begin{aligned}
N_2 &= -\int_0^T \int_\Omega \Delta u(q \cdot \nabla u)dx\ dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(q \cdot \nabla u)dx\ dt - \int_0^T \int_\Gamma \partial_\nu u(q \cdot \nabla u)d\Gamma\ dt.
\end{aligned}
$$

Usando a identidade (3.11) e o fato que $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, segue que

$$
N_2 = \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(q \cdot \nabla u)dx\ dt}_{N_4} - \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu)d\Gamma\ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(q \cdot \nabla_T u)d\Gamma\ dt. \tag{3.18}
$$

Como $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, temos

$$\begin{aligned}
N_4 &= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(q \cdot \nabla u) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}(q \cdot \nabla u) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + q_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right) \right] dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial q_j}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ dx\ dt + \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} q_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u\ dx\ dt + \underbrace{\int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} q_j\ dx\ dt}_{N_5}\,. \qquad (3.19)
\end{aligned}$$

Pela Fórmula de Gauss temos que

$$\begin{aligned}
N_5 &= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i} q_j\ dx\ dt \\
&= \int_0^T \sum_{i,j=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 q_j\ dx\ dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j} |\nabla u|^2 q_j\ dx\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Omega |\nabla u|^2 \frac{\partial q_j}{\partial x_j}\ dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \sum_{j=1}^n \int_\Gamma |\nabla u|^2 q_j\ \nu_j\ d\Gamma\ dt \\
&= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (div\ q) |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma |\nabla u|^2 (q \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Usando a identidade (3.12) e o fato que $u = 0$ em $\Gamma_0 \times]0, \infty[$, temos que

$$\begin{aligned}
N_5 = &-\frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega (div\ q) |\nabla u|^2 dx\ dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu)\ d\Gamma\ dt. \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

De (3.18), (3.19), (3.20) e (3.21), como $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, resulta que

$$\begin{aligned} N_2 \;\; = \;\; & \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u \; dx \; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div \; q)|\nabla u|^2 dx \; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt \\ & - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu) d\Gamma \; dt \\ & - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (q \cdot \nabla_T u) d\Gamma \; dt. \end{aligned} \tag{3.22}$$

De (3.14), (3.17) e (3.22) concluímos que

$$\left[\int_\Omega u_t (q \cdot \nabla u) dx\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div \; q)(u_t)^2 dx \; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (u_t)^2 (q \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla q \cdot \nabla u \; dx \; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega (div \; q)|\nabla u|^2 dx \; dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt$$

$$- \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu u)^2 (q \cdot \nu) \; d\Gamma \; dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 (q \cdot \nu) d\Gamma \; dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u (q \cdot \nabla_T u) d\Gamma \; dt$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)(q \cdot \nabla u) dx \; dt = 0,$$

o que prova o lema. $\square$

Lema 3.2.2. *Seja u uma solução regular do problema (3.1) e $\xi \in C^1(\overline{\Omega})$. Então*

$$\begin{aligned} 0 = \left[\int_\Omega u_t \; \xi \; u \; dx\right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega \xi \left[|\nabla u|^2 - u_t^2\right] \; dx \; dt + \int_0^T \int_\Omega u (\nabla u \cdot \nabla \xi) \; dx \; dt \\ - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \; \xi \; u \; d\Gamma \; dt + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t) \; \xi \; u \; dx \; dt. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Demonstração: Seja u uma solução regular do problema (3.1). Então, do capítulo 2 temos que

$$u_{tt} - \Delta u + a(x) g(u_t) = 0 \;\; \text{em} \;\; L^\infty(0, T; L^2(\Omega)).$$

Multiplicando a equação acima por $\xi(x) u(x,t) \in L^2(0,T;\Omega)$ e integrando em $]0, T[\times\Omega$, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega u_{tt}\ \xi\ u\ dx\ dt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u\ \xi\ u\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\ \xi\ u\ dx\ dt = 0.$$

Integrando por partes e aplicando a Fórmula de Green, decorre que

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_\Omega u_t\ \xi\ u\ dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega u_t\ \xi\ u_t\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\xi\ u)\ dx\ dt \\ &\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u\ \xi\ u\ d\Gamma\ dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\ \xi\ u\ dx\ dt \\ &= \left[\int_\Omega u_t\ \xi\ u\ dx\right]_0^T - \int_0^T \int_\Omega \xi\ u_t^2\ dx\ dt + \int_0^T \int_\Omega \xi\ |\nabla u|^2\ dx\ dt \\ &\quad + \int_0^T \int_\Omega u\ (\nabla u \cdot \nabla \xi)\ dx\ dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u\ \xi\ u\ d\Gamma\ dt + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\ \xi\ u\ dx\ dt, \end{aligned}$$

provando o desejado em (3.23). □

Substituindo $q = \nabla f$ em (3.13), onde $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função regular, e $\xi = \alpha > 0$, onde α é uma constante positiva, em (3.23) e somando os resultados obtidos, deduzimos

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u(\nabla f \cdot \nabla_T u)\ d\Gamma\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt \\ &+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f \cdot \nu)\left[u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2\right] d\Gamma\ dt + \underbrace{\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u\ u\ d\Gamma\ dt}_{F_1} \\ &= \left[\int_\Omega u_t\ \nabla f \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T + \alpha\left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\nabla f) \cdot \nabla u\ dx\ dt}_{F_2} \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega div(\nabla f)\left(u_t^2 - |\nabla u|^2\right) dx\ dt}_{F_3} + \alpha \int_0^T \int_\Omega \left[|\nabla u|^2 - u_t^2\right]\ dx\ dt \\ &+ \underbrace{\int_0^T \int_\Omega u(\nabla u \cdot \nabla \alpha)\ dx\ dt}_{=0} + \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx\ dt + \alpha \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\ u\ dx\ dt. \end{aligned} \tag{3.24}$$

Usando a condição de fronteira, temos

$$F_1 = \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \; u \; d\Gamma \; dt = \alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u \; u \; d\Gamma \; dt = -\alpha \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \; d\Gamma \; dt. \tag{3.25}$$

Também,

$$\nabla(\nabla f) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} = Hess(f).$$

Logo,

$$F_2 = \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\nabla f) \cdot \nabla u \; dx \; dt = \int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u \; dx \; dt. \tag{3.26}$$

E, como

$$div(\nabla f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \Delta f,$$

temos que

$$F_3 = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega div(\nabla f)\Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx \; dt = \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \Delta f\Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx \; dt. \tag{3.27}$$

Além disso,

$$\nabla f \cdot \nu = \partial_\nu f \quad \text{e} \tag{3.28}$$

$$\nabla f \cdot \nabla_T u = (\partial_\nu f \; \nu + \nabla_T f) \cdot \nabla_T u = \nabla_T f \cdot \nabla_T u. \tag{3.29}$$

Substituindo (3.25), (3.26), (3.27), (3.28) e (3.29) em (3.24), resulta que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u(\nabla_T f\cdot\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\partial_\nu f\ (\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu f\Big[u_t^2-|\nabla_T u|^2+(\partial_\nu u)^2\Big]d\Gamma\ dt\\
&=\int_0^T\int_\Omega \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{\Delta f}{2}\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt\\
&+\alpha\int_0^T\int_\Omega\Big[|\nabla u|^2-u_t^2\Big]\ dx\ dt+\alpha\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\ d\Gamma\ dt\\
&+\Big[\int_\Omega u_t\ \nabla f\cdot\nabla u\ dx\Big]_0^T+\alpha\Big[\int_\Omega u_t\ u\ dx\Big]_0^T\\
&+\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f\cdot\nabla u)dx\ dt+\alpha\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\ u\ dx\ dt.
\end{aligned}\tag{3.30}$$

3.2.2 Análise dos Termos de Fronteira

Lembremos que $\omega^*=\omega_0\cup\omega_1$ é uma vizinhança de $\Gamma_0^*\cup\Gamma_1$, onde $\Gamma_0^*=\{x\in\Gamma_0;\partial_\nu f>0\}$, ω_0 é vizinhança de $\overline{\Gamma_0^*}$, ω_1 é vizinhança de Γ_1, ambas contida em $\overline{\Omega}$, de modo que $\omega_0\cap\omega_1=\emptyset$. Definamos

$$d=d(\Omega\backslash\omega^*;\Gamma_0^*\cup\Gamma_1)>0.$$

Seja $\varepsilon>0$ tal que $\dfrac{3\varepsilon}{2}<d$. Consideremos $\omega\subset\omega^*$ um "colar" tal que

$$d(\omega\cap\omega_0,\Gamma_0^*)<\frac{3\varepsilon}{2}\quad \text{e}\quad d(\omega\cap\omega_1,\Gamma_1)<\frac{3\varepsilon}{2}.$$

Consideremos também um "sub-colar" ω_ε tal que $\omega_\varepsilon\subset\omega$ e ω_ε é uma vizinhança suave de $\Gamma_0^*\cup\Gamma_1$ contida em $\overline{\Omega}$ com a espessura maior que $\dfrac{\varepsilon}{2}$ mas menor que ε:

$$\frac{\varepsilon}{2}<d(\Omega\backslash\omega_\varepsilon;\Gamma_0^*\cup\Gamma_1)\quad \text{e}\quad \sup_{x\in\omega_\varepsilon}d(x,\Gamma_0^*\cup\Gamma_1)<\varepsilon.$$

Denotemos também,

$$V = \Omega \backslash \omega_\varepsilon.$$

Uma simples secção do domínio com as vizinhanças ω_ε e ω está representada na Figura 3.1.

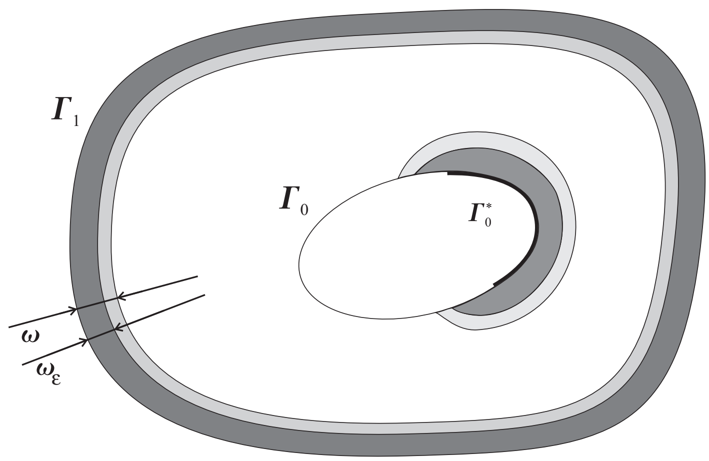

Figura 3.1: $\omega_\varepsilon \subset \omega$: colares contidos em $\overline{\Omega}$.

Definamos uma função auxiliar $\psi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ de modo que

$$\begin{cases} \psi = 0 & \text{em} \quad V, \\ \psi = 1 & \text{em} \quad \Gamma_1 \quad \text{e} \quad \psi = 1 \quad \text{em} \quad \Gamma_0^*, \\ 0 \leq \psi \leq 1 \end{cases} \tag{3.31}$$

Substituindo $q = \psi \nabla f$ na identidade (3.13), obtemos

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \; \psi(\nabla f \cdot \nabla_T u) \; d\Gamma \; dt + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \psi(\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt}_{F_4}$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \psi(\nabla f \cdot \nu)\Big[u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2\Big] d\Gamma \; dt$$

$$= \Big[\int_\Omega u_t \; \psi \nabla f \cdot \nabla u \; dx\Big]_0^T + \underbrace{\int_0^T \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla(\psi \nabla f) \cdot \nabla u \; dx \; dt}_{F_5}$$

$$+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega div\ (\psi\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt}_{F_6}+\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\psi(\nabla f\ \cdot\nabla u)dx\ dt. \tag{3.32}$$

Podemos escrever $\Gamma_0=\Gamma_0^*\cup\{\Gamma_0\backslash\Gamma_0^*\}$ e então,

$$\begin{aligned} F_4 &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\psi(\nabla f\ \cdot\nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0^*}\psi(\nabla f\ \cdot\nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0\backslash\Gamma_0^*}\psi(\nabla f\ \cdot\nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Também, lembrando que

$$\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla q\cdot\nabla u\ dx\ dt=\sum_{i,j=1}^n\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial q_j}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx,$$

temos que

$$\begin{aligned} F_5 &= \int_0^T\int_\Omega\nabla u\cdot\nabla(\psi\nabla f)\cdot\nabla u\ dx\ dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n\int_0^T\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi\partial f}{\partial x_j}\right)\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\ dt \\ &= \sum_{i,j=1}^n\int_0^T\left[\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx+\int_\Omega\frac{\partial u}{\partial x_i}\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx\right]dt \\ &= \int_0^T\int_\Omega(\nabla u\cdot\nabla\psi)(\nabla f\ \cdot\nabla u)\ dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega\psi\ \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Além disso, como

$$div(\psi\nabla f)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\psi\partial f}{\partial x_i}\right)=\sum_{i=1}^n\frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^n\psi\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}=\nabla\psi\cdot\nabla f+\psi\ \Delta f,$$

segue que

$$\begin{aligned} F_6 &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega div\ (\psi\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega(\nabla\psi\cdot\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega\psi\ \Delta f\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Da definição de ψ, de (3.32) - (3.35) resulta que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \; (\nabla f \cdot \nabla_T u) \; d\Gamma \; dt \\
&+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt}_{F_7} + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*} \psi (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\nabla f \cdot \nu)\Big[u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2\Big] d\Gamma \; dt \\
&= \Big[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \; \psi \nabla f \cdot \nabla u \; dx\Big]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u) \; dx \; dt \\
&+ \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \; \nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u \; dx \; dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f)\Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx \; dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi \; \Delta f \Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx \; dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) dx \; dt.
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Como $\Gamma_0^* = \Gamma_0 \backslash \{\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*\}$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
F_7 &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt \qquad (3.37) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*} (\nabla f \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt.
\end{aligned}
$$

Portanto, de (3.36), (3.37) e considerando (3.28) e (3.29), decorre que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \; (\nabla_T f \cdot \nabla_T u) \; d\Gamma \; dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \partial_\nu f \; (\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu f \; \Big[u_t^2 - |\nabla_T u|^2 + (\partial_\nu u)^2\Big] d\Gamma \; dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*} \partial_\nu f \; (\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*} \psi \; \partial_\nu f \; (\partial_\nu u)^2 d\Gamma \; dt
\end{aligned}
$$

$$+\left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi \nabla f\cdot\nabla u\ dx\right]_0^T+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla u\cdot\nabla\psi)(\nabla f\cdot\nabla u)\ dx\ dt$$

$$+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla\psi\cdot\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt \tag{3.38}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \Delta f\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}a(x)g(u_t)\psi(\nabla f\cdot\nabla u)dx\ dt.$$

Como

$$\partial_\nu f\leq 0\quad\text{em}\quad\Gamma_0\backslash\Gamma_0^*,$$

e, sendo $0\leq\psi\leq 1$, de (3.38) resulta que

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu u\ (\nabla_T f\cdot\nabla_T u)\ d\Gamma\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_0}\partial_\nu f\ (\partial_\nu u)^2 d\Gamma\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_1}\partial_\nu f\ \Big[u_t^2-|\nabla_T u|^2+(\partial_\nu u)^2\Big]d\Gamma\ dt$$

$$\leq\left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi\nabla f\cdot\nabla u\ dx\right]_0^T+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla u\cdot\nabla\psi)(\nabla f\cdot\nabla u)\ dx\ dt \tag{3.39}$$

$$+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla\psi\cdot\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \Delta f\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}a(x)g(u_t)\psi(\nabla f\cdot\nabla u)dx\ dt.$$

Substituindo (3.39) em (3.30) obtemos

$$\int_0^T\int_\Omega\nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{\Delta f}{2}\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt$$

$$+\alpha\int_0^T\int_\Omega\Big[|\nabla u|^2-u_t^2\Big]\ dx\ dt+\alpha\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\ d\Gamma\ dt$$

$$\leq-\left[\int_\Omega u_t\ \nabla f\cdot\nabla u\ dx\right]_0^T-\alpha\left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u)dx\ dt - \alpha \int_0^T \int_\Omega a(x)g(u_t)\ u\ dx\ dt \\
&+ \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi \nabla f \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla u \cdot \nabla \psi)(\nabla f \cdot \nabla u)\ dx\ dt \\
&+ \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi\ \nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u\ dx\ dt + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} (\nabla \psi \cdot \nabla f)\Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx\ dt \\
&+ \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \psi\ \Delta f\Big(u_t^2 - |\nabla u|^2\Big) dx\ dt + \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x)g(u_t)\psi(\nabla f \cdot \nabla u)dx\ dt.
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Lembrando que $V = \Omega \backslash \omega_\varepsilon$, provaremos que existem constantes $C > 0$ e $\alpha > 0$, escolhidas adequadamente, de modo que para f satisfazendo algumas propriedades apropriadas decorre que

$$
\begin{aligned}
C\left[\int_0^T \int_V \left(|\nabla u|^2 + u_t^2\right)\ dx\ dt\right] &\leq \int_0^T \int_V \left(\frac{\Delta f}{2} - \alpha\right) u_t^2\ dx\ dt \\
&+ \int_0^T \int_V \left[\nabla u \cdot Hess(f) \cdot \nabla u + \left(\alpha - \frac{\Delta f}{2}\right) |\nabla u|^2\right]\ dx\ dt.
\end{aligned}
\tag{3.41}
$$

De fato, consideremos a função $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que

$$
f(x) = \begin{cases}
\frac{1}{2}|x - x_0|^2 & \text{em} \quad V, \\
f \quad \text{é regular} & \text{em} \quad \overline{\Omega}, \\
\partial_\nu f > 0 & \text{em} \quad \Gamma_0^*, \\
\partial_\nu f \leq 0 & \text{em} \quad \Gamma_0 \backslash \Gamma_0^*,
\end{cases}
\tag{3.42}
$$

onde $x_0 = (x_{0_1}, x_{0_2}, ..., x_{0_n})$ é um ponto fixo em $\mathbb{R}^n$. Então, se $x \in V$,

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = (x_i - x_{0_i}), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = 1, \quad \Delta f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x) = n,
$$

$$
Hess(f) = \begin{bmatrix}
1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}_{n \times n}.
$$

Escolhendo $\alpha \in \left(\frac{n}{2}-1, \frac{n}{2}\right)$, isto é,

$$1-\frac{n}{2}+\alpha>0 \quad \text{e} \quad \frac{n}{2}-\alpha>0,$$

decorre que

$$\int_0^T\int_V\left(\frac{\Delta f}{2}-\alpha\right)u_t^2\;dx\;dt+\int_0^T\int_V\left[\nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u+\left(\alpha-\frac{\Delta f}{2}\right)|\nabla u|^2\right]dx\;dt$$

$$=\left(\frac{n}{2}-\alpha\right)\int_0^T\int_V u_t^2\;dx\;dt+\left(1+\alpha-\frac{n}{2}\right)\int_0^T\int_V|\nabla u|^2\;dx\;dt$$

$$\geq C\left[\int_0^T\int_V\left(|\nabla u|^2+u_t^2\right)\;dx\;dt\right],$$

onde $C=C(f)$, o que prova o desejado em (3.41).

Por outro lado, notemos que

$$\int_0^T\int_V\left(\frac{\Delta f}{2}-\alpha\right)u_t^2\;dx\;dt+\int_0^T\int_V\left[\nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u+\left(\alpha-\frac{\Delta f}{2}\right)|\nabla u|^2\right]dx\;dt$$

$$\leq\int_0^T\int_\Omega\left(\frac{\Delta f}{2}-\alpha\right)u_t^2\;dx\;dt+\int_0^T\int_\Omega\left[\nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u+\left(\alpha-\frac{\Delta f}{2}\right)|\nabla u|^2\right]dx\;dt$$

$$=\int_0^T\int_\Omega\nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\;dx\;dt+\int_0^T\int_\Omega\frac{\Delta f}{2}\left(u_t^2-|\nabla u|^2\right)dx\;dt$$

$$+\;\alpha\int_0^T\int_\Omega\left[|\nabla u|^2-u_t^2\right]\;dx\;dt. \tag{3.43}$$

Portanto, de (3.40), (3.41) e (3.43), tomando $C_1=min\{C,\alpha\}$ segue que

$$C_1\left[\int_0^T\int_\Omega\left[|\nabla u|^2+u_t^2\right]\;dx\;dt+\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\;d\Gamma\;dt\right]$$

$$\leq C\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\left[|\nabla u|^2+u_t^2\right]\;dx\;dt-\left[\int_\Omega u_t\;\nabla f\cdot\nabla u\;dx\right]_0^T-\alpha\left[\int_\Omega u_t\;u\;dx\right]_0^T$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)(\nabla f\cdot\nabla u)dx\ dt-\alpha\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\ u\ dx\ dt\\
&+\left[\int_{\omega_\varepsilon}u_t\ \psi\nabla f\cdot\nabla u\ dx\right]_0^T+\underbrace{\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla u\cdot\nabla\psi)(\nabla f\cdot\nabla u)\ dx\ dt}_{F_8}\\
&+\underbrace{\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt}_{F_9}+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla\psi\cdot\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt}_{F_{10}}\\
&+\underbrace{\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\psi\ \Delta f\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt}_{F_{11}}+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}a(x)g(u_t)\psi(\nabla f\cdot\nabla u)dx\ dt.
\end{aligned}
\tag{3.44}
$$

Além disso, definindo

$$
M=\max_{x\in\overline{\Omega}}|\nabla\psi(x)|\quad \text{e}\quad R=\max_{x\in\overline{\Omega}}\{|\nabla f(x)|,|\Delta f(x)|,\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\right|;i,j=1,...,n\}\tag{3.45}
$$

temos que

$$
\begin{aligned}
&F_8+F_9+F_{10}+F_{11}=\\
&\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla u\cdot\nabla\psi)(\nabla f\cdot\nabla u)\ dx\ dt+\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\underbrace{\psi}_{\leq 1}\ \nabla u\cdot Hess(f)\cdot\nabla u\ dx\ dt\\
&+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}(\nabla\psi\cdot\nabla f)\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\underbrace{\psi}_{\leq 1}\ \Delta f\Big(u_t^2-|\nabla u|^2\Big)dx\ dt\\
&\leq MR\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}|\nabla u|^2\ dx\ dt+\frac{R(n+1)}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}|\nabla u|^2\ dx\ dt\\
&+\frac{MR}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\Big(u_t^2+|\nabla u|^2\Big)dx\ dt+\frac{R}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\Big(u_t^2+|\nabla u|^2\Big)dx\ dt\\
&\leq C_2\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\Big(u_t^2+|\nabla u|^2\Big)dx\ dt,
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

onde $C_2 = C_2\{M, R, n\}$.

Sendo $E(t) = \frac{1}{2}\left\{\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2\right] dx\ dt + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Gamma\ dt\right\}$, substituindo (3.46) em (3.44), resulta que

$$\begin{aligned}
\int_0^T E(t)\ dt \ \leq\ & C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left[|\nabla u|^2 + |u_t|^2\right] dx\ dt \\
& - C_3 \left[\int_\Omega u_t\ \nabla f \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T - C_3 \left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T \\
& - C_3 \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx\ dt - C_3 \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)\ u\ dx\ dt \\
& + C_3 \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi \nabla f \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T + C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) g(u_t) \psi (\nabla f \cdot \nabla u) dx\ dt,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

onde C_3 é uma constante positiva que depende de C, C_1 e C_2.

Nosso próximo passo é estimar os termos do lado direito da desigualdade acima, em função do termo dissipativo $\int_0^T \int_\Omega a(x)\left(u_t^2 + g(u_t)^2\right)\ dx\ dt$.

- *Estimativa para* $I_1 = \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)(\nabla f \cdot \nabla u) dx\ dt.$

Da Desigualdade de Hölder, levando em conta (3.45) e considerando a desigualdade $ab \leq \frac{a^2}{4\delta} + \delta b^2$, onde δ é um número positivo, obtemos

$$\begin{aligned}
|I_1| \ \leq\ & \int_0^T \int_\Omega |[a(x)]^{\frac{1}{2}} g(u_t)\ [a(x)]^{\frac{1}{2}} (\nabla f \cdot \nabla u)| dx\ dt \\
\leq\ & \int_0^T \left(\int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega a(x) |\nabla f|^2 |\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
\leq\ & ||a||_{L^\infty(\Omega)}^{\frac{1}{2}} R \int_0^T \left(\int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
\leq\ & \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x) |g(u_t)|^2\ dx\ dt + \delta \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\ dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}R^2}{4\delta}\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\,dt\\
&\quad +\delta\int_0^T\left[\int_\Omega\left(|\nabla u|^2+|u_t|^2\right)\,dx\;+\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma\right]dt \qquad (3.48)\\
&= \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}R^2}{4\delta}\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\,dt+2\delta\int_0^T E(t)\,dt.
\end{aligned}
$$

- *Estimativa para* $I_2=\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)\;u\,dx\,dt.$

$$
\begin{aligned}
|I_2| &\leq \int_0^T\int_\Omega |[a(x)]^{\frac12}g(u_t)\;[a(x)]^{\frac12}\;u|dx\,dt\\
&\leq \int_0^T\left(\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega a(x)|u|^2\,dx\right)^{\frac12}dt\\
&\leq ||a||^{\frac12}_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1\int_0^T\left(\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12}dt \qquad (3.49)\\
&\leq \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\delta}\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\,dt+\delta\int_0^T\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&\leq \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\delta}\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\,dx\,dt+2\delta\int_0^T E(t)\,dt,
\end{aligned}
$$

onde λ_1 é a constante positiva proveniente da equivalência das normas $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ e $||\nabla\cdot||_{L^2(\Omega)}$ em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

- *Estimativa para* $I_3=\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon} a(x)g(u_t)\psi\;(\nabla f\cdot\nabla u)dx\,dt.$

$$
\begin{aligned}
|I_3| &\leq \int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}|[a(x)]^{\frac12}g(u_t)\;[a(x)]^{\frac12}\underbrace{\psi}_{\leq 1}(\nabla f\cdot\nabla u)|dx\,dt\\
&\leq \int_0^T\left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x)|g(u_t)|^2\,dx\right)^{\frac12}\left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x)|\nabla f|^2|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac12}dt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; ||a||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)} R \int_0^T \left(\int_{\omega_\varepsilon} a(x)|g(u_t)|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \; dx \right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \; \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x)|g(u_t)|^2 \; dx \; dt + \delta \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 \; dx \; dt \qquad (3.50) \\
&\leq \; \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)} R^2}{4\delta} \int_0^T \int_{\Omega} a(x)|g(u_t)|^2 \; dx \; dt + 2\delta \int_0^T E(t) \; dt.
\end{aligned}
$$

Denotaremos

$$
\chi = -C_3 \left[\int_\Omega u_t \; \nabla f \cdot \nabla u \; dx \right]_0^T - C_3 \left[\int_\Omega u_t \; u \; dx \right]_0^T + C_3 \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t \; \psi \nabla f \cdot \nabla u \; dx \right]_0^T . \qquad (3.51)
$$

Inserindo (3.48), (3.49), (3.50) e (3.51) em (3.47), obtemos

$$
\begin{aligned}
(1 - 6\delta C_3) \int_0^T E(t) dt \;\; &\leq \;\; |\chi| \; + (2R^2 + \lambda_1^2) C_3 \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}}{4\delta} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2 \; dx \; dt \\
&\quad + C_3 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left[|\nabla u|^2 + u_t^2 \right] dx \; dt. \qquad (3.52)
\end{aligned}
$$

Observemos que

$$
\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} u_t^2 \; dx \; dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} a(x) u_t^2 \; dx \; dt. \qquad (3.53)
$$

Assim, escolhendo δ suficientemente pequeno, isto é, de forma que $(1 - 6\delta C_3) > 0$, de (3.52) e (3.53) decorre que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T E(t) \; dt \;\; &\leq \;\; C_4 |\chi| \; + C_4 \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2 \; dx \; dt \\
&\quad + C_4 \int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} \left[|\nabla u|^2 + a(x) u_t^2 \right] dx \; dt, \qquad (3.54)
\end{aligned}
$$

onde $C_4 = C_4\{C_3, ||a||_{L^\infty(\Omega)}, \lambda_1, R, a_0^{-1}\}$.

Resta estimar a quantidade $\int_0^T \int_{\omega_\varepsilon} |\nabla u|^2 dx \; dt$ em função do termo dissipativo

$\int_0^T \int_\Omega a(x)\Big(u_t^2 + g(u_t)^2\Big)\, dx\, dt$. Para isto, construiremos outra função auxiliar.

Primeiro, seja $\tilde{\eta} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\eta}(s) = \begin{cases} 1 & se \quad s \leq 0, \\ (s-1)^2 & se \quad s \in [1/2, 1], \\ 0 & se \quad s > 1. \end{cases}$$

e está definida em $(0, 1/2)$ de tal forma que $\tilde{\eta}$ é uma função não-crescente de classe C^1. Para $\varepsilon > 0$, seja $\tilde{\eta}_\varepsilon(s) := \tilde{\eta}(\frac{s}{\varepsilon})$. Em seguida, definamos $\eta_\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ por

$$\eta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \omega_\varepsilon, \\ \tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon})) & se \quad x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Então, existe uma constante $\overline{M} > 0$ que não depende de ε tal que

$$\frac{|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \qquad \forall\, x \in \omega. \tag{3.55}$$

De fato, se $x \in \omega_\varepsilon$ a desigualdade acima é trivial. Se $x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon$, então, como $\overline{\omega_\varepsilon}$ é fechado, temos

$$d(x, \overline{\omega_\varepsilon}) = \inf\{\|x - y\|; y \in \overline{\omega_\varepsilon}\} = \|x - y_0(x)\|, \quad \text{para algum} \quad y_0(x) \in \overline{\omega_\varepsilon}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial}{\partial x_k} d(x, \overline{\omega_\varepsilon}) = \frac{\partial}{\partial x_k}\|x - y_0(x)\| = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - y_{0_i}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i - y_{0_i})}{\|x - y_0(x)\|}.$$

Logo, para $x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon$,

$$|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2 \quad = \quad |\nabla \tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2 = \frac{|\tilde{\eta}_\varepsilon'(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\|x - y_0(x)\|^2} \sum_{k=1}^n \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_{0_i}(x)) \frac{\partial}{\partial x_k}(x_i - y_{0_i}(x))\right]^2$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2^{n-1}\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{||x-y_0(x)||^2}\sum_{k=1}^{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_{0_i}(x))^2\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i-y_{0_i}(x))\right)^2\right]\\
&\leq 2^{n-1}\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{||x-y_0(x)||^2}||x-y_0(x)||^2\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i-y_{0_i}(x))\right)^2\\
&= 2^{n-1}|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))|^2\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i-y_{0_i}(x))\right)^2.
\end{aligned}$$

Como Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ regular, ou seja, de classe C^∞, temos que se $x \in \omega\backslash\omega_\varepsilon$ então $y_0(x)$ é univocamente determinado por

$$y_0(x) = x + z\nu(y_0(x)),$$

onde $\nu(y_0(x))$ é a normal à $\partial\omega_\varepsilon$ em $y_0(x)$, $z \in]\varepsilon, \frac{3\varepsilon}{2}[$ e $y_0(x)$ é de classe C^∞ e, portanto, a quantidade $\sum_{i,k=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(x_i-y_{0_i}(x))\right)^2$ é limitada em $\overline{\Omega}$. Para maiores detalhes ver Lema 1.9.1 das Preliminares.

De modo a garantirmos que tal limitação independa de $\varepsilon > 0$ podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varepsilon < 1$. Então concluímos que para $x \in \omega\backslash\omega_\varepsilon$, $\exists M^* > 0$ tal que

$$|\nabla\eta_\varepsilon(x)|^2 \leq M^*|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))|^2;$$

ou ainda,

$$\frac{|\nabla\eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} \leq M^*\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x,\overline{\omega_\varepsilon}))}; \quad \forall\ x \in \omega\backslash\omega_\varepsilon. \tag{3.56}$$

Agora, como $\tilde{\eta} \in C^1(\mathbb{R})$ e $\tilde{\eta} \neq 0$ para $s < 1$, segue que

$$s \longmapsto \frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(x)} \tag{3.57}$$

é contínua em $(-\infty, 1)$.

Sendo $\tilde{\eta}(s) = 1$ em $(-\infty, 0)$, então $\tilde{\eta}'(s) = 0$ em $(-\infty, 0)$, portanto

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} = \frac{0}{1} = 0 \text{ em } (-\infty, 0). \tag{3.58}$$

No intervalo compacto $[0, 1/2]$ existe $M_1 > 0$ tal que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} \leq M_1; \quad \forall s \in [0, 1/2]. \tag{3.59}$$

No intervalo $]1/2, 1[$ temos que $\tilde{\eta}(s) = (s-1)^2$, logo

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} = \frac{4(s-1)^2}{(s-1)^2} = 4; \quad \forall s \in (1/2, 1). \tag{3.60}$$

Pondo $\overline{M} = \max\{M_1, 4\}$ resulta de (3.58), (3.59) e (3.60), que

$$\frac{[\tilde{\eta}'(s)]^2}{\tilde{\eta}(s)} \leq \overline{M}; \quad \forall s \in (-\infty, 1). \tag{3.61}$$

Da definição de $\tilde{\eta}_\varepsilon$ notemos que

$$\frac{[\tilde{\eta}_\varepsilon'(s)]^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(s)} = \frac{\left\{\left[\tilde{\eta}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]'\right\}^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)} = \frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\frac{1}{\varepsilon}\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)}, \tag{3.62}$$

e de (3.61) resulta que se $s < \varepsilon$ então $\dfrac{s}{\varepsilon} < 1$ e, portanto,

$$\frac{\left[\tilde{\eta}'\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)\right]^2}{\tilde{\eta}\left(\frac{s}{\varepsilon}\right)} \leq \overline{M}; \quad \forall s < \varepsilon. \tag{3.63}$$

De (3.62) e (3.63) vem então que

$$\frac{[\tilde{\eta}_\varepsilon'(s)]^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(s)} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \quad \forall\ s < \varepsilon. \tag{3.64}$$

Da definição de ω_ε e de ω, observemos que se $x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon$, então $d(x, \overline{\omega_\varepsilon}) < \varepsilon$. Logo, de (3.64) temos

$$\frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))} \leq \frac{\overline{M}}{\varepsilon^2}; \qquad \forall\, x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon. \tag{3.65}$$

De (3.56) e (3.65) pondo $M = M^* \overline{M}$, segue que

$$\frac{|\nabla \eta_\varepsilon(x)|^2}{\eta_\varepsilon(x)} \leq M^* \frac{|\tilde{\eta}'_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))|^2}{\tilde{\eta}_\varepsilon(d(x, \overline{\omega_\varepsilon}))} \leq \frac{M}{\varepsilon^2}, \qquad \forall\, x \in \omega \backslash \omega_\varepsilon, \tag{3.66}$$

o que prova o desejado em (3.55).

Como η_ε é igual a 1 em ω_ε e tem suporte em ω, tomando $\xi = \eta_\varepsilon$ na identidade (3.23), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |\nabla u|^2 \;\; &= \;\; - \left[\int_\omega u_t \; \eta_\varepsilon \; u \; dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \; dx \; dt - \int_0^T \int_\omega u (\nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon) \; dx \; dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u \underbrace{\eta_\varepsilon}_{=1} \; u \; d\Gamma \; dt - \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) \; \eta_\varepsilon \; u \; dx \; dt. \end{aligned} \tag{3.67}$$

Vamos estimar os termos do lado direito de (3.67).

- *Estimativa para* $P_1 = \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \; dx \; dt.$

Como $a(x) \geq a_0 > 0$ q. s. em ω e $\eta_\varepsilon \leq 1$, temos

$$P_1 = \int_0^T \int_\omega \eta_\varepsilon |u_t|^2 \; dx \; dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\omega a(x) u_t^2 \; dx \; dt \leq a_0^{-1} \int_0^T \int_\Omega a(x) u_t^2 \; dx \; dt. \tag{3.68}$$

- *Estimativa para* $P_2 = \int_0^T \int_\omega a(x) g(u_t) \; u \; \eta_\varepsilon \; dx \; dt.$

Da Desigualdade de Hölder e considerando a estimativa $ab \leq \dfrac{a^2}{4\beta} + \beta b^2$, onde β é um número positivo, obtemos

$$
\begin{aligned}
|P_2| &\leq \int_0^T \int_\omega |[a(x)]^{\frac{1}{2}} g(u_t)\ [a(x)]^{\frac{1}{2}}\ u|\ |\underbrace{\eta_\varepsilon}_{\leq 1}|dx\ dt \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega a(x)|u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq ||a||^{\frac{1}{2}}_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1 \int_0^T \left(\int_\omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\omega |\nabla u|^2\ dx\right)^{\frac{1}{2}} dt \\
&\leq \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\beta} \int_0^T \int_\omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\ dt + \beta \int_0^T \int_\Omega |\nabla u|^2\ dx\ dt \\
&\leq \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\beta} \int_0^T \int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\ dt + 2\beta \int_0^T E(t)\ dt,
\end{aligned} \tag{3.69}
$$

- *Estimativa para* $P_3 = \int_0^T \int_\omega u(\nabla u \cdot \nabla \eta_\varepsilon)\ dx\ dt.$

Considerando (3.55) e a Desiqualdade de Young, temos

$$
\begin{aligned}
|P_3| &\leq \int_0^T \int_\omega \sqrt{\eta_\varepsilon}\ |\nabla u|\ \frac{|\nabla \eta_\varepsilon|}{\sqrt{\eta_\varepsilon}}\ |u|\ dx\ dt \\
&\leq \int_0^T \int_\omega \frac{1}{2}\left[\eta_\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{|\nabla \eta_\varepsilon|^2}{\eta_\varepsilon}|u|^2\right]\ dx\ dt \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T \left[\int_\omega \eta_\varepsilon |\nabla u|^2\ dx + \frac{M}{\varepsilon^2}\int_\omega |u|^2 dx\right]\ dt
\end{aligned} \tag{3.70}
$$

- *Estimativa para* $P_4 = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u\ u\ d\Gamma\ dt.$

Da condição de fronteira do problema (3.1), isto é, $\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u$ em Γ_1, temos

$$
P_4 = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u\ u\ d\Gamma\ dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_{\Gamma_1} u\ u\ d\Gamma\ dt = -\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma\ dt \leq 0. \tag{3.71}
$$

Combinando (3.67) - (3.71) chegamos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \eta_\varepsilon|\nabla u|^2dx\ dt \ \ &\leq\ \ |\mathcal{Y}| + \frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\beta}\int_0^T\int_\Omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\ dt + 2\beta\int_0^T E(t)\ dt \\ &+ \frac{M}{2\varepsilon^2}\int_0^T\int_\omega |u|^2dx\ dt + a_0^{-1}\int_0^T\int_\Omega a(x)|u_t|^2\ dx\ dt,\end{aligned} \tag{3.72}$$

onde

$$\mathcal{Y} = -\left[\int_\omega u_t\ \eta_\varepsilon\ u\ dx\right]_0^T. \tag{3.73}$$

Substituindo (3.72) em (3.54) e considerando que

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\omega_\varepsilon}\underbrace{\eta_\varepsilon}_{=1}|\nabla u|^2dx\ dt \leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_\omega \eta_\varepsilon|\nabla u|^2dx\ dt,$$

obtemos

$$\begin{aligned}(1-4C_4\beta)\int_0^T E(t)dt \ \ &\leq\ \ C_4|\chi|\ \ + 2C_4|\mathcal{Y}| + \left(1 + 2\frac{||a||_{L^\infty(\Omega)}\lambda_1^2}{4\beta}\right)C_4\int_0^T\int_\omega a(x)|g(u_t)|^2\ dx\ dt \\ &+ \frac{C_4 M}{\varepsilon^2}\int_0^T\int_\omega |u|^2dx\ dt + (2a_0^{-1}+1)C_4\int_0^T\int_\omega a(x)u_t^2\ dx\ dt.\end{aligned} \tag{3.74}$$

Escolhendo β suficientemente pequeno, de modo que $(1-4C_4\beta) > 0$, deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_0^T E(t)dt \ \ &\leq\ \ C_5|\chi|\ \ + C_5|\mathcal{Y}| + C_5\int_0^T\int_\omega \left[a(x)|g(u_t)|^2 + a(x)u_t^2\right]\ dx\ dt \\ &+ \frac{C_5 M}{\varepsilon^2}\int_0^T\int_\omega |u|^2dx\ dt,\end{aligned} \tag{3.75}$$

onde C_5 é uma constante positiva que depende de $C_4, ||a||_{L^\infty(\Omega)}, \lambda_1$ e de a_0^{-1}.

Por outro lado, de (3.51) e (3.73), temos

$$\begin{aligned} C_5|\chi| \ + C_5|\mathcal{Y}| \ &= \ C_5\Bigg|C_3\left[\int_\Omega u_t\ \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T + C_3\left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T \\ &\quad + C_3\left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T\Bigg| + C_5\Bigg| - \left[\int_\omega u_t\ \eta_\varepsilon\ u\ dx\right]_0^T\Bigg|. \end{aligned} \tag{3.76}$$

Estimaremos cada termo do lado direito da igualdade (3.76) em função de $E(t)$.

- *Estimativa para* $L_1 = \left[\int_\Omega u_t\ \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T$.

Usando (3.45) e as desigualdade de Cauchy-Schwarz e Young, decorre que

$$\begin{aligned} \left|\int_\Omega u_t\ \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right| \ &\le \ \int_\Omega |u_t|\ |\nabla f|\ |\nabla u|\ dx \\ &\le \ \frac{R}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right)\ dx + \frac{R}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\ d\Gamma \\ &= \ R\ E(t). \end{aligned}$$

Logo,

$$L_1 = \left[\int_\Omega u_t\ \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T \le R\ (E(0) + E(T)). \tag{3.77}$$

Analogamente, provamos que

$$L_2 \ = \ \left[\int_\Omega u_t\ u\ dx\right]_0^T \le \lambda_1^2\ (E(0) + E(T)), \tag{3.78}$$

$$L_3 \ = \ \left[\int_{\omega_\varepsilon} u_t\ \psi \nabla f\ \cdot \nabla u\ dx\right]_0^T \le R\ (E(0) + E(T)), \tag{3.79}$$

$$L_4 \ = \ -\left[\int_\omega u_t\ \eta_\varepsilon\ u\ dx\right]_0^T \le \lambda_1^2\ (E(0) + E(T)), \tag{3.80}$$

onde λ_1 é a constante positiva proveniente da equivalência das normas $||\cdot||_{H^1(\Omega)}$ e $||\nabla \cdot||_{L^2(\Omega)}$ em $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$.

De (3.76) - (3.80), deduzimos que

$$\begin{aligned} C_5|\chi| \ + C_5|\mathcal{Y}| \ &\leq \ C_5(2RC_3 + \lambda_1^2 C_3 + \lambda_1^2)(E(0) + E(T)) \\ &= \ C_6\Big(E(0) + E(T)\Big), \end{aligned}$$

onde $C_6 = C_6\{C_3, C_5, R, \lambda_1\}$.

Por outro lado, de (3.3) temos que

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)\ u_t\ dx\ dt,$$

e então

$$\begin{aligned} C_5|\chi| \ + C_5|\mathcal{Y}| \ &\leq \ C_6\Big[2E(T) + \int_0^T \int_\Omega a(x) g(u_t)\ u_t\ dx\ dt\Big] \\ &\leq \ C_6\Big[2E(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega a(x)\Big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\Big)\ dx\ dt\Big]. \end{aligned} \tag{3.81}$$

De (3.75), (3.81) e do fato que a energia é não-crescente em relação à variável temporal resulta que

$$\begin{aligned} TE(T) \ &\leq \ \int_0^T E(t) dt \\ &\leq \ C_6\Big[2E(T) + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega a(x)\Big(|g(u_t)|^2 + u_t^2\Big)\ dx\ dt\Big] \\ &\quad + C_5 \int_0^T \int_\omega \Big(a(x)|g(u_t)|^2 + a(x) u_t^2\Big)\ dx\ dt + \ \frac{C_5 M}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_\omega |u|^2 dx\ dt \\ &\leq \ C_*\ E(T) + C_* \left[\int_0^T \int_\Omega a(x)\Big(|g(u_t)|^2 + |u_t|^2\Big)\ dx\ dt\right] \\ &\quad + C_* \int_0^T \int_\Omega |u|^2\ dx\ dt, \end{aligned} \tag{3.82}$$

onde C_* é uma constante positiva que depende de C_4, C_5, C_6 e de $\dfrac{M}{\varepsilon^2}$.

Nosso intuito agora, é estimar o último termo do lado direito da desigualdade (3.82).

Lema 3.2.3. *Sob as hipóteses do Teorema 3.1 e para todo $T > T_0$, com T_0 suficientemente grande, existe uma constante positiva $C\Big(T_0, E(0)\Big)$ tal que, se (u, u_t) é uma solução fraca do problema (3.1), temos*

$$\int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx\ dt \leq C(T_0, E(0)) \left[\int_0^T \int_\Omega \Big(a(x)g^2(u_t) + a(x)u_t^2\Big) dx\ dt\right]. \tag{3.83}$$

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Para simplificarmos denotaremos $u' := u_t$. Seja T_0 uma constante suficientemente grande fixa. Suponha que (3.83) não seja verificado e seja $\Big\{u_k(0), u_k'(0)\Big\}$ uma sequência de dados iniciais onde as soluções correspondentes $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ do problema (3.1), com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verifiquem

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \|u_k(t)\|_\Omega^2 dt}{\int_0^T \int_\Omega \Big(a(x)g^2(u_k') + a(x)u_k'^2\Big) dx\ dt} = +\infty, \tag{3.84}$$

ou seja,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_0^T \int_\Omega \Big(a(x)g^2(u_k') + a(x)u_k'^2\Big) dx\ dt}{\int_0^T \|u_k(t)\|_\Omega^2 dt} = 0. \tag{3.85}$$

Como $E_k(t) \leq E_k(0) \leq L$, onde L é uma constante positiva, obtemos uma subsequência, ainda denotada por $\{u_k\}$, que verifica as seguintes convergências

$$u_k \rightharpoonup u \text{ em } L^2(0, T; H^1(\Omega)), \tag{3.86}$$

$$u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} u \text{ em } L^\infty(0, T; \mathcal{V}), \tag{3.87}$$

$$u_k' \overset{\star}{\rightharpoonup} u' \text{ em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.88}$$

Além disso, como $\mathcal{V} \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$, de (3.87), (3.88) e em virtude do Teorema de Aubin - Lions podemos extrair uma subsequência de $\{u_k\}$, a qual ainda denotaremos pela mesma notação, de modo que

$$u_k \to u \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.89}$$

Neste ponto dividiremos a prova em dois casos, a saber: quando $u \neq 0$ e $u = 0$.

Caso (I)**:** $u \neq 0$.

Observe que de (3.85) e (3.89), temos

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega \Big(a(x) g^2(u_k') + a(x) u_k'^2 \Big) dx\ dt = 0. \tag{3.90}$$

Em particular,

$$\lim_{k\to+\infty} \int_0^T \int_\Omega a(x) g^2(u_k') dx\ dt = 0,$$

ou seja,

$$a^{\frac{1}{2}} g(u_k') \to 0 \ \text{ em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.91}$$

Como u_k é solução do problema (3.1), temos

$$\begin{cases} u_k'' - \Delta u_k + a(x) g(u_k') = 0 & \text{em } \Omega \times]0,\infty[, \\ \partial_\nu u_k - \Delta_{\Gamma_1} u_k = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times]0,\infty[, \\ u_k = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times]0,\infty[. \end{cases} \tag{3.92}$$

Consideremos $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Compondo a equação acima com $\theta\varphi$, obtemos

$$\langle u_k'' - \Delta u_k + a(x) g(u_k'), \theta\varphi \rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.93}$$

Notemos que

$$\langle u_k'', \theta\varphi \rangle = -\langle u_k', \theta'\varphi \rangle,$$

e de (3.88) segue que

$$-\langle u_k', \theta'\varphi\rangle \to -\langle u', \theta'\varphi\rangle = \langle u'', \theta\varphi\rangle.$$

Assim, concluímos que

$$\langle u_k'', \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle u'', \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.94}$$

Por outro lado, para cada $t \in]0,T[$ fixado, a seguinte igualdade é verificada

$$\langle -\Delta u_k, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = -\langle \nabla u_k, \theta\nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

e, por (3.87), segue que

$$\langle \nabla u_k, \theta\nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle \nabla u, \theta\nabla\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)},$$

isto é,

$$\langle -\Delta u_k, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} \to \langle -\Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)}; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{3.95}$$

Do exposto em (3.91), (3.94) e (3.95) obtemos de (3.93) após passagem ao limite que

$$\langle u'' - \Delta u, \theta\varphi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0; \quad \forall\theta \in \mathcal{D}(0,T), \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Mas, pela totalidade do espaço $R = \{\theta\varphi; \theta \in \mathcal{D}(0,T) \text{ e } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ vem que

$$\langle u'' - \Delta u, \psi\rangle_{\mathcal{D}'(Q_T),\mathcal{D}(Q_T)} = 0 \quad \forall\psi \in \mathcal{D}(Q_T).$$

Logo,

$$u'' - \Delta u = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(Q_T). \tag{3.96}$$

Analisemos as condições de fronteira. Primeiramente, da convergência (3.87) deduzimos que

$$u(t) \in \mathcal{V} \hookrightarrow H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \quad \forall t \in [0,T].$$

Logo, $\gamma_0 u(t) = 0$ em Γ_0, $\forall t \in [0,T]$ e, então,

$$supess_{t\in(0,T)} ||\gamma_0 u(t)||_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = 0$$

e, portanto,

$$u = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)). \tag{3.97}$$

Por outro lado, o operador $-\Delta_{\Gamma_1} : H^1(\Gamma_1) \to H^{-1}(\Gamma_1)$ é definido por

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1}\varphi, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} = \int_{\Gamma_1} \nabla_T\varphi\nabla_T\psi \ d\Gamma; \quad \forall \varphi,\psi \in H^1(\Gamma_1).$$

Seja $\psi \in L^1(0,T;H^1(\Gamma_1))$, então

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_k, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt = \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_k \nabla_T \psi \ d\Gamma \ dt = \int_0^T (\nabla_T u_k, \nabla_T\psi)_{\Gamma_1} dt.$$

Mas, de (3.87) decorre que

$$\nabla_T u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \nabla_T u \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Logo,

$$\int_0^T (\nabla_T u_k, \nabla_T\psi)_{\Gamma_1} dt \to \int_0^T (\nabla_T u, \nabla_T\psi)_{\Gamma_1} dt = \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt$$

e, portanto,

$$\int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u_k, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt \to \int_0^T \langle -\Delta_{\Gamma_1} u, \psi\rangle_{H^{-1}(\Gamma_1),H^1(\Gamma_1)} dt.$$

Consequentemente,

$$\Delta_{\Gamma_1} u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^\infty(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{3.98}$$

Como

$$\partial_\nu u_k = \Delta_{\Gamma_1} u_k \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)),$$

então, de (3.98) decorre que

$$\langle \partial_\nu u_k, \varphi \rangle \to \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in L^2(0,T;H^1(\Gamma_1)).$$

Portanto,

$$\partial_\nu u_k \overset{\star}{\rightharpoonup} \Delta_{\Gamma_1} u \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{3.99}$$

No entanto, de (3.88) temos

$$u_k' \rightharpoonup u' \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

e, pela Proposição 1.2.3 e Corolário 1.2.3.1 das Preliminares, obtemos que

$$u_k'' \rightharpoonup u'' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.100}$$

Assim, de (3.91), (3.92), (3.96) e (3.100) resulta que

$$\Delta u_k = u_k'' + a(x)g(u_k') \rightharpoonup u'' = \Delta u \quad \text{em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\Delta u_k \rightharpoonup \Delta u \quad \text{em } H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.101}$$

e, de (3.86) observamos que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^1(\Omega)). \tag{3.102}$$

Logo, de (3.101) e (3.102) segue que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta\, u \in L^2(\Omega)\}$. Pela continuidade da aplicação traço $\widetilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ temos, pela Observação 1.3.1 e pelo Teorema 1.17, que

$$\widetilde{\gamma}_1(u_k) \rightharpoonup \widetilde{\gamma}_1(u) \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)),$$

ou seja,

$$\partial_\nu u_k \rightharpoonup \partial_\nu u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)). \tag{3.103}$$

Desta forma, de (3.99), (3.103) e pela unicidade do limite fraco estrela, obtemos

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-1}(\Gamma_1))$$

e, sendo $\Delta_{\Gamma_1} u \in L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1))$ e $\partial_\nu u \in H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ deduzimos que

$$\partial_\nu u = \Delta_{\Gamma_1} u \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^{-1}(\Gamma_1)) \cap H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{3.104}$$

Agora, mostraremos que

$$u' = 0 \text{ em } \omega \times (0,T). \tag{3.105}$$

Com efeito, de (3.90) temos que

$$\int_0^T \int_\Omega a(x) u_k'^2 dx\ dt \to 0, \quad k \to +\infty, \tag{3.106}$$

e, de (3.88)

$$u_k' \rightharpoonup u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo,

$$a^{\frac{1}{2}} u_k' \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}} u' \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então, pela Proposição 1.5.1, obtemos

$$||a^{\frac{1}{2}} u'||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq \liminf ||a^{\frac{1}{2}} u_k'||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \int_\Omega a(x) u'^2 dx\ dt \leq \liminf \int_0^T \int_\Omega a(x) u_k'^2 dx\ dt. \tag{3.107}$$

Assim, do exposto em (3.106) e (3.107), obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega a(x) u'^2 dx\ dt = 0.$$

Contudo, notemos que

$$0 \leq \int_0^T \int_\omega a(x) u'^2 dx\ dt \leq \int_0^T \int_\Omega a(x) u'^2 dx\ dt = 0. \tag{3.108}$$

De (3.108) e da hipótese (H.2) resulta que

$$0 = \int_0^T \int_\omega a(x) u'^2 dx\ dt \geq a_0 \int_0^T \int_\omega u'^2 dx\ dt \geq 0,$$

e, portanto,

$$\int_0^T \int_\omega u'^2 dx\ dt = 0,$$

o que prova (3.105).

Resumindo, as relações (3.96), (3.97), (3.104) e (3.105) nos fornecem que

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0 \times (0,T), \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1 \times (0,T), \\ u_t = 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases} \tag{3.109}$$

Derivando a primeira equação de (3.109) no sentido das distribuições obtemos

$$u_{ttt} - \Delta u_t = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T),$$

e, considerando $u_t = v$ segue que

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \times (0,T), \\ v = 0 & \text{em } \omega \times (0,T). \end{cases}$$

Então, pelo Teorema 1.20 (Teorema de Holmgren), para $T \geq T_0$ suficientemente grande, deduzimos que $v = u_t = 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Assim, u é constante em relação a variável temporal, logo $u_{tt} = 0$ em $\Omega \times (0,T)$. Retornando a (3.109), obtemos o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{em } \Gamma_0, \\ \partial_\nu u - \Delta_{\Gamma_1} u = 0 & \text{em } \Gamma_1, \end{cases}$$

e sendo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, pela Fórmula de Green segue que

$$\begin{aligned} 0 = -\int_\Omega \Delta u \; u \; dx &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \langle \Delta_{\Gamma_1} u, \gamma_0 u \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \\ &= \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\ &= ||u||^2_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

Logo, $u \equiv 0$, o que é uma contradição.

Caso (II)**:** $u = 0$.

Definamos

$$c_k := \left[\int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 dx \; dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad \bar{u}_k := \frac{1}{c_k} u_k.$$

Observemos que $c_k \neq 0$ pois, inicialmente, supomos que a sequência $\{u_k\}$ satisfaz

$$\int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 dx \; dt > k(T_0, E_k(0)) \left\{ \int_0^T \int_\Omega \Big(a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2 \Big) dx \; dt \right\} \geq 0.$$

Sendo assim, obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega |\bar{u}_k|^2 dx \; dt = \int_0^T \int_\Omega \frac{|u_k|^2}{c_k^2} dx \; dt = \frac{1}{c_k^2} \int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 dx \; dt = 1 \tag{3.110}$$

Como $\overline{E}_k(t) := \frac{1}{2} \int_\Omega |\bar{u}_k'|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla \bar{u}_k|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \bar{u}_k|^2 d\Gamma$, então

$$\overline{E}_k(t) = \frac{E_k(t)}{c_k^2}. \tag{3.111}$$

Relembrando (3.82), para T suficientemente grande, temos

$$E(T) \leq \hat{C} \left[\int_0^T \int_\Omega \Big(a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2 \Big) dx \; dt + \int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx \; dt \right].$$

Empregando a identidade

$$E(T)-E(0)=-\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t\ dx\ dt,$$

como a energia é não-crescente, podemos escrever

$$\begin{aligned} E(t)\le E(0) &= E(T)+\int_0^T\int_\Omega a(x)g(u_t)u_t\ dx\ dt \\ &\le \tilde{C}\left[\int_0^T\int_\Omega\Big(a(x)g^2(u_t)+a(x)u_t^2\Big)dx\ dt+\int_0^T\int_\Omega|u|^2dx\ dt\right], \end{aligned}$$

para todo $t\in[0,T]$, com T suficientemente grande.

Da última desigualdade e de (3.111), obtemos

$$\overline{E}_k(t)=\frac{E_k(t)}{c_k^2}\le\left[\frac{\int_0^T\int_\Omega\Big(a(x)g^2(u_k')+a(x)u_k'^2\Big)dx\ dt}{\int_0^T\int_\Omega|u_k|^2dx\ dt}+1\right]. \tag{3.112}$$

De (3.85) e (3.112), concluímos que existe uma constante positiva $\tilde{M}$ tal que

$$\overline{E}_k(t)=\frac{E_k(t)}{c_k^2}\le\tilde{M}\ ,\ \forall t\in[0,T],\ \forall k\in\mathbb{N},$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_\Omega|\bar{u}_k'|^2+\frac{1}{2}\int_\Omega|\nabla\bar{u}_k|^2dx+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T\bar{u}_k|^2d\Gamma\le\tilde{M}\ ,\ \forall t\in[0,T],\ \forall k\in\mathbb{N}.$$

Logo, existe uma subsequência de $\{\bar{u}_k\}$, que ainda denotaremos da mesma forma, tal que

$$\bar{u}_k\overset{\star}{\rightharpoonup}\bar{u}\ \text{ em } L^\infty(0,T;\mathcal{V}), \tag{3.113}$$

$$\bar{u}_k'\overset{\star}{\rightharpoonup}\bar{u}'\ \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{3.114}$$

$$\bar{u}_k\to\bar{u}\ \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.115}$$

Também, de (3.85) e (3.89) deduzimos que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega \frac{a(x)g^2(u_k')}{c_k^2}dx\ dt = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{k\to+\infty}\int_0^T\int_\Omega a(x)\bar{u}_k'^2 dx\ dt = 0.$$

Além disso, $\bar{u}_k$ satisfaz a equação

$$\begin{cases} \bar{u}_k'' - \Delta\bar{u}_k + a(x)\dfrac{g(u_k')}{c_k} = 0 & \text{em } \Omega\times(0,T)), \\ \bar{u}_k = 0 & \text{em } \Gamma_0\times(0,T), \\ \partial_\nu\bar{u}_k - \Delta_{\Gamma_1}\bar{u}_k = 0 & \text{em } \Gamma_1\times(0,T). \end{cases}$$

Passando o limite quando $k\to+\infty$, de forma análoga ao que foi feito no caso (I), e considerando as convergências acima, obtemos

$$\begin{cases} \bar{u}'' - \Delta\bar{u} = 0 & \text{em } \Omega\times(0,T), \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_0\times(0,T), \\ \partial_\nu\bar{u} - \Delta_{\Gamma_1}\bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_1\times(0,T), \\ \bar{u}' = 0 & \text{em } \omega\times(0,T)\,. \end{cases} \tag{3.116}$$

Então, $v=\bar{u}_t$ verifica, no sentido distribucional, o seguinte problema:

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = 0 & \text{em } \Omega\times(0,T), \\ v = 0 & \text{em } \omega\times(0,T). \end{cases}$$

Aplicando novamente o Teorema de Holmgren, resulta que $v=\bar{u}_t\equiv 0$. Retornando à (3.116), temos, para quase todo $t\in(0,T)$, o seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} \Delta\bar{u} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_0, \\ \partial_\nu\bar{u} - \Delta_{\Gamma_1}\bar{u} = 0 & \text{em } \Gamma_1, \end{cases}$$

donde concluímos que $||\bar{u}||_{\mathcal{V}} = 0$, isto é, $\bar{u}=0$. Mas, isto é uma contradição, pois, de (3.115) temos

$$\int_0^T \int_\Omega |\bar{u}_k|^2 dx\ dt \to \int_0^T \int_\Omega |\bar{u}|^2 dx\ dt = 0,$$

e, em (3.110) vimos que

$$\int_0^T \int_\Omega |\bar{u}_k|^2 dx\ dt = 1.$$

Isto conclui a prova do Lema. □

As desigualdades (3.82) e (3.83) nos fornecem o seguinte resultado.

Proposição 3.2.1. *Para $T > 0$ suficientemente grande, a solução u do problema (3.1) satisfaz*

$$E(T) \leq C \left[\int_0^T \int_\Omega \Big(a(x) g^2(u_t) + a(x) u_t^2 \Big) dx\ dt \right], \tag{3.117}$$

onde C é uma constante positiva que depende de $T_0, E(0), f, \lambda_1, R, n, ||a||_{L^\infty(\Omega)}, \frac{M}{\varepsilon^2}$.

3.2.3 Conclusão do Teorema 3.1

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1, faremos uso do resultado devido a Lasiecka e Tataru [22].

Lema 3.2.4. *Seja p uma função crescente, positiva, tal que $p(0) = 0$. Como p é crescente podemos definir uma função crescente $\rho(x) = x - (I + p)^{-1}(x)$. Considere uma sequência $\{s_m\}$ de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1} + p(s_{m+1}) \leq s_m. \tag{3.118}$$

Então, $s_m \leq S(m)$, onde $S(t)$ é a solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt} S(t) + \rho(S(t)) = 0\ ,\ S(0) = s_0. \tag{3.119}$$

Além disso, $S(t)$ é monótona não-crescente com $\lim_{t\to\infty} S(t) = 0$.

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre m.

De fato, para $m = 0$, segue de (3.118) que

$$(I + p)(s_1) \leq s_0. \tag{3.120}$$

Como $(I + p)^{-1}$ é crescente temos que

$$\begin{aligned} s_1 \leq (I + p)^{-1}(s_0) &= s_0 - s_0 + (I + p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - \rho(s_0). \end{aligned} \tag{3.121}$$

Por outro lado, como ρ é uma função positiva, a solução $S(t)$ de (3.119) é monótona não-crescente, ou seja,

$$S(t) \leq S(\tau)\ ,\ \forall t \geq \tau \geq 0\,. \tag{3.122}$$

Integrando (3.119) de 0 a 1 obtemos

$$S(1) - S(0) + \int_0^1 \rho(S(\tau))d\tau = 0,$$

e, como ρ é crescente, de (3.122) e da hipótese $S(0) = s_0$, resulta que

$$\begin{aligned} S(1) &= S(0) - \int_0^1 \rho(S(\tau))d\tau \\ &\geq S(0) - \int_0^1 \rho(S(0))d\tau \\ &= S(0) - \rho(S(0)) \\ &= (I - \rho)(S(0)) \\ &= (I + p)^{-1}(S(0)) = (I + p)^{-1}(s_0) \\ &= s_0 - \rho(s_0) \geq s_1, \end{aligned}$$

portanto $S(1) \geq s_1$.

Suponhamos que o resultado seja verdadeiro para m, ou seja, $S(m) \geq s_m$. Portanto, para $m+1$ de (3.118), temos

$$(I+p)s_{m+1} \leq s_m. \tag{3.123}$$

Como $(I+p)^{-1}$ é crescente, resulta que

$$s_{m+1} \leq s_m - q(s_m). \tag{3.124}$$

Agora, integrando (3.119) de m à $m+1$, obtemos

$$S(m+1) - S(m) + \int_m^{m+1} \rho(S(\tau))d\tau = 0.$$

Do fato que ρ é crescente, de (3.122) e da hipótese indutiva, obtemos

$$\begin{aligned} S(m+1) &\geq S(m) - \int_m^{m+1} \rho(S(\tau))d\tau \\ &= S(m) - \rho(S(m)) = (I-\rho)S(m) \\ &= (I+p)^{-1}S(m) \geq (I+p)^{-1}s_m \\ &= s_m - \rho(s_m). \end{aligned} \tag{3.125}$$

Das relações (3.124) e (3.125) resulta que

$$S(m+1) \geq s_{m+1},$$

o que prova o desejado.

Para finalizarmos a prova do lema, resta-nos provar que se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então $\lim_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

De fato, por (3.119), para cada $\overline{T} > 0$, temos

$$S(\overline{T}) - S(0) + \int_0^{\overline{T}} \rho(S(\overline{T}))d\tau = 0$$

e por (3.122) resulta
$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \int_0^{\overline{T}} \rho(S(\overline{T}))d\tau,$$

ou seja,

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}\rho(S(T)) \tag{3.126}$$

Por (3.122) temos que $S(t)$ é uma função monótona não crescente e limitada inferiormente pelo 0, pois $S(m) \geq s_m$, para todo $m \in \mathbb{N}$ e s_m são números positivos. Seja $C = \inf\Big\{S(t)\,;\, t \geq 0\Big\}$. Observe que $C = \lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$. Mostraremos que $C = 0$.

De fato, suponhamos por absurdo que $C > 0$. Logo de (3.126), obtemos que

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}\rho(C)\,,\ \forall \overline{T} > 0 \tag{3.127}$$

como $p(x) > 0$ para $x > 0$ obtemos que $\rho(C) > 0$, pois caso contrário, se $\exists x_0 > 0$ tal que $\rho(x_0) \leq 0$, segue que

$$x_0 - (I+p)^{-1}(x_0) \leq 0 \Leftrightarrow x_0 \leq (I+p)^{-1}(x_0) \Leftrightarrow (I+p)(x_0) \leq x_0$$

ou ainda, se e somente se $p(x_0) \leq 0$, o que é uma absurdo.

Portanto, tomando $\overline{T} \in \mathbb{N}$ tal que $S(0) < \overline{T}\rho(C)$ resulta de (3.127) que $S(\overline{T}) < 0$ o que é um absurdo. Então concluímos que $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$. $\square$

Definamos

$$Q_T^0 = \{(t,x) \in Q_T; |u_t| \leq 1 \text{ q.s. em } \Omega\}, \quad Q_T^1 = Q_T \backslash Q_T^0.$$

Então, usando o item (*iii*) da hipótese (H.1), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{Q_T^1} a(x)\Big(([g(u_t)]^2 + (u_t)^2\Big)dQ &\leq \int_{Q_T^1} a(x)\Big(k^{-1}g(u_t)u_t + Kg(u_t)u_t\Big)dQ \\ &= (k^{-1}+K)\int_{Q_T^1} a(x)g(u_t)u_t dQ. \end{aligned} \tag{3.128}$$

Por outro lado, de (3.4) e do fato que h é côncava e estritamente crescente, com $h(0)=0$, e observando que

$$h\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right)\leq h\left(a(x)g(u_t)u_t\right),$$

temos

$$\begin{aligned}\int_{Q_T^0}a(x)\Big([g(u_t)]^2+(u_t)^2\Big)dQ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0}\frac{a(x)}{(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})}h(g(u_t)u_t)dQ\\ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0}h\left(\frac{a(x)}{1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)}}g(u_t)u_t\right)dQ\\ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0}h(a(x)g(u_t)u_t)dQ. \qquad (3.129)\end{aligned}$$

Aplicando a Desigualdade de Jensen segue que

$$\begin{aligned}&(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\int_{Q_T^0}h(a(x)g(u_t)u_t)dQ\\ &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\ med(Q_T)\ h\left(\frac{1}{med(Q_T)}\int_{Q_T}h(a(x)g(u_t)u_t)\ dQ\right)\\ &= (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\ med(Q_T)\ r\left(\int_{Q_T}a(x)g(u_t)\ u_t\ dQ\right), \qquad (3.130)\end{aligned}$$

onde $r(s)=h\left(\dfrac{s}{med(Q_T)}\right)$ foi definida em (3.5).

Logo, de (3.128), (3.129) e (3.130), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{Q_T}a(x)\Big([g(u_t)]^2+(u_t)^2\Big)dQ &\leq (k^{-1}+K)\int_{Q_T}a(x)g(u_t)\ u_t\ dQ \qquad (3.131)\\ &+(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\ med(Q_T)\ r\left(\int_{Q_T}a(x)g(u_t)\ u_t\ dQ\right).\end{aligned}$$

Combinando (3.131) e a proposição 3.2.1 decorre que

$$\begin{aligned}E(T) &\leq (1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})\ C\Bigg[\frac{k^{-1}+K}{(1+\|a\|_{L^\infty(\Omega)})}\int_{Q_T}a(x)g(u_t)\ u_t\ dQ\\ &+med(Q_T)\ r\left(\int_{Q_T}a(x)g(u_t)\ u_t\ dQ\right)\Bigg]. \qquad (3.132)\end{aligned}$$

Sejam

$$L = \Big(C(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)})\ med(Q_T) \Big)^{-1}, \qquad c = \frac{k^{-1} + K}{(1 + \|a\|_{L^\infty(\Omega)}) med(Q_T)}.$$

Então, aplicando p em ambos os lados de (3.132) resulta que

$$\begin{aligned} p(E(T)) &\leq p\left(\frac{1}{L}(cI + r) \left(\int_{Q_T} a(x) g(u_t)\ u_t\ dQ \right) \right) \\ &= (cI + r)^{-1} \left(L \left(\frac{1}{L}(cI + r) \right) \left(\int_{Q_T} a(x) g(u_t) u_t dQ \right) \right) \\ &= \int_{Q_T} a(x) g(u_t)\ u_t\ dQ \\ &= E(0) - E(T) \end{aligned} \tag{3.133}$$

onde a função p foi definida em (3.6).

Agora, em (3.133) substituindo o intervalo de integração $]0, T[$ pelo intervalo $]mT, m(T+1)[$ obtemos

$$E(m(T+1)) + p(E(m(T+1))) \leq E(mT)\,, \text{ para } m = 0, 1, \dots$$

Aplicando o Lema 3.2.4, com $s_m = E(mT)$, obtemos

$$E(mT) \leq S(m)\ ,\ m = 0, 1, \dots$$

Finalmente, usando a dissipação de $E(t)$, dada pela relação (3.3) e usando o fato que $S(t)$ é monótona não-crescente; pondo $t = mT + \tau$, $0 \leq \tau \leq T$, resulta que

$$E(t) \leq E(mT) \leq S(m) = S\left(\frac{t - \tau}{T} \right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1 \right)\ ,\ \text{para } t > T.$$

Com isto, a prova do Teorema 3.1 está completa.

Bibliografia

[1] BARBU, V. **Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces**. România, Bucuresti: Noordhoff International Publishing, 1976.

[2] BEY, R.; HEMINNA, A.; LOHÉAC, J.P. **Boundary stabilization of the linear elastodinamic system by a Lyspunov-type method**. Revista Matemática Complutense v. 16 (2), p. 417-441, 2003.

[3] BRÉZIS, H. **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Madrid: Alianza Editorial, S.A., 1984.

[4] BRÉZIS, H.: **Operateurs Maximaux Monotones et Semigroups de Contractions dans les Spaces de Hilbert**. Amsterdam: North Holland Publishing Co., 1973.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Maringá: Eduem, 2009.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Análise Funcional**. Maringá: DMA/UEM, 2007.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; LASIECKA, I. **Well-posedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction**. Journal of Differential Equations, v. 236, p. 407-459, 2007.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; SORIANO, J. A. **Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping**. Transactions of AMS, 2008, (to appear).

[9] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; TOUNDYKOV, D. **Stabilization of the damped wave equation Cauchy-Ventcel boundary condition**. Journal of Differential Equations, v. 9, p. 143-169, 2009.

[10] CAVALCANTI, M. M.; KHEMMOUDJ A.; MEDJDEN, M. **Uniform stalization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dinamic boundary condition**. J. Math. Anal. Appl., v. 328, Issue 2, p. 900-930, 2007.

[11] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**. New York: Mac Graw-Hill, 1955.

[12] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. **Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology**. V. 2, New York: Springer-Verlang Berlin Heidelberg, 1990.

[13] DO CARMO, M. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. New Jersey: Prentice Hall, 1976.

[14] FERREIRA, A L. **Estabilização uniforme da equação da onda sobre uma superfície compacta com dissipação localmente distribuída.** Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2009.

[15] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[16] HANSEN, S.; ZUAZUA E. **Controllability and stabilization of strings with point masses**. SIAM J. Control and Optim., v. 33 (5), p. 1357- 1391, 1995.

[17] HEMMINA, A. **Stabilization frontière de problèmes de Ventcel**. ESAIM, Control Optim. Calc. Var., v. 5, p. 591-622, 2000.

[18] HEMMINA, A. **Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions**. Port. Math., v. 58(3), p. 271-315, 2001.

[19] KANOUNE, A.; MEHIDI, N. **Stabilization and control of subcritical semilinear wave equation in bounded domain with Cauchy-Ventcel boundary conditions**. Appl. Math. Mech. -Engl. 29, p. 787-800, 2008.

[20] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. New Dehli: John Wiley and Sons, 1989.

[21] KHEMMOUDJ, A.; MEDJDEN M. **Exponential decay for the semilinear damped Cauchy-Ventcel problem** Bol. Soc. Paran. Mat., v. 22(2), p. 97-116, 2004.

[22] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Differential and Integral Equations, v.6, p. 507-533, 1993.

[23] LASIECKA I.; TOUNDYKOV, D. **Energia decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms**. Nonlinear Analysis, v. 64, p. 1757-1797, 2006.

[24] LASIECKA I.; TRIGGIANI R. **Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions**. Appl. Math. Optim.,v. 25, 189-224, 1992.

[25] LASIECKA I.; TRIGGIANI R.; YAO, P. F. **Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term**. Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application, v. 30(1), p. 111-122, Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis, 1997.

[26] LASIECKA I.; TRIGGIANI R.; YAO, P. F. **Inverse/Observability estimates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients**. J. Math. Anal. Appl., v. 235, n. 1, p. 13-57, 1999.

[27] LEMRABET, K. **Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier**. CRAS Paris, t. 300, Série I, n. 15, p. 531-534, 1985.

[28] LEMRABET, K. **Estude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mè canique dans des domaines non réguliers**. Thèse, USTHB, Alger, 1987.

[29] LEMRABET, K.; TENIOU, D. E. **Un problème d'evolution de type Ventcel**. Rev. Maghrèb. Math., v. 1(1), p. 15-29, 1992.

[30] LIONS, J. L. **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**. Tome 1, Masson, 1988.

[31] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[32] LITTMAN, W.; TAYLOR, S. W. **Boundary feedback stabilization of a vibrating string with an interior point mass**. Nonlinear problems in mathematical physics and related topics, I, p. 271-287, Int. Math. Ser. (N.Y.), 1, Kluwer/Plenum, New York, 2002.

[33] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A. **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1989.

[34] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 2000.

[35] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[36] MILLA MIRANDA, M. **Análise espectral em espaços de Hilbert**. Rio de Janeiro: IM-UFRJ, 1990.

[37] MONTEIRO, E. **Existência e comportamento assintótico das soluções de uma equação da onda com dissipação não linear na fronteira e termo de fonte**. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2006.

[38] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Petrópolis - RJ: LNCC, 1999.

[39] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[40] SHOWALTER, R.: **Monotone Operators in Banach Spaces and Nonlinear Partial Differential Equations**. AMS, Providence, 1997.

[41] YAO, P. F. **On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients**. SIAM J. Contro. Optim., v. 37, p. 1568-1599, 1999.

[42] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Aplications**. V. 2A: Linear monotone operators, Springer-Verlag, 1990.