

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

DJEISON BENETTI

Entropia Topológica de Aplicações e de Ações de Semigrupos

Maringá-PR

2012

DJEISON BENETTI

Entropia Topológica de Aplicações e de Ações de Semigrupos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka

Co-orientador: Prof. Dr. Alexandre José Santana

Maringá-PR

2012

Agradecimentos

Agradeço à Deus pela vida, pela ajuda nos momentos difíceis e pela oportunidade de estudar Matemática.

Aos meus queridos pais, Araci e Leonir. Ao meu irmão Gustavo e à minha namorada Adriana.

Ao professor Ryuichi pela orientação e, principalmente, pela paciência, atenção e disponibilidade.

Ao professor Alexandre pela valiosa participação nos seminários que culminaram na realização deste trabalho.

Aos demais professores do departamento de Matemática da UEM que colaboraram com minha formação acadêmica.

Aos meus colegas de turma: Alex, André, Arthur, Fausto, Guilherme, Jorge, Thiago e Victor. Aos colegas da salinha de estudo: Camila, César, Cleilton, Eleomar, Ginnara, João, Rodrigo, Rafael, Stephanie, Tales e etc.

À Rosângela pela ajuda e cuidados dispensados.

À Capes pelo apoio financeiro.

Não poderia deixar de agradecer também a todos os professores do departamento de Matemática da Universidade do Estado de Mato Grosso, em Sinop. Em particular, agradeço aos professores Chiara e Rogério que de modo irrestrito sempre me apoiaram e incentivaram.

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma introdução à entropia topológica de aplicações e sua generalização para ações de semigrupos. O desenvolvimento teórico é construído sobretudo de acordo com os artigos de Adler, Konheim e McAndrew [1], Bowen [3] e Hofmann e Stojanov [10]. O trabalho apresenta-se, basicamente, discutindo a noção de entropia topológica em cada um destes artigos, destacando suas principais definições, propriedades e teoremas. Em particular, apresentamos comparações entre estas diferentes definições de entropia.

Palavras chave: Entropia, Entropia Topológica, Ações de Semigrupos.

Abstract

In this work we present an introduction to topological entropy of maps and its generalization to semigroup actions. The theoretical development is built primarily according to the articles of Adler, Konheim and McAndrew [1], Bowen [3] and Hofmann and Stojanov [10]. This work presents the notion of topological entropy in each of these articles, its main definitions, theorems and properties. In particular, we present comparisons between these different definitions of entropy.

key words: Entropy, Topological Entropy, Semigroup Actions.

SUMÁRIO

Introdução	8
1 Preliminares	11
1.1 Grupos, Semigrupos e Medidas	11
1.2 Preliminares em Entropia	15
1.2.1 O conceito de Entropia na Teoria da Probabilidade	16
1.2.2 Entropia em Teoria Ergódica (Entropia Métrica)	18
2 Entropia Topológica	20
2.1 Entropia Topológica	20
2.1.1 Definições e Propriedades	20
2.1.2 Teoremas Principais	25
2.2 Entropia Topológica em Espaços Métricos	29
3 Entropia Topológica de Bowen	35
3.1 Entropia Topológica de Bowen	35
3.1.1 Definições e Propriedades	35
3.1.2 Equivalência das Definições de Entropia Topológica	39
3.2 Medidas Homogêneas e Alguns Exemplos	41
3.2.1 Medidas Homogêneas	41
3.2.2 Alguns Exemplos	43

4	Entropia Topológica de Ações de Grupos e Semigrupos	50
4.1	Entropia de Ações Uniformes	50
4.1.1	Sistemas Regulares e Entropia de Ações Uniformes	51
4.1.2	Exemplo: A Entropia de um Semifluxo Contínuo	61
4.2	Ações Conjugadas, Subações e Ações Quocientes	63
4.2.1	Ações Conjugadas	63
4.2.2	Subações e Ações Quocientes	69
4.3	Medidas Homogêneas e Ações Lineares	73
4.3.1	Medidas Homogêneas	74
4.3.2	Ações Lineares	77

INTRODUÇÃO

Historicamente, a noção de entropia passou por um processo evolutivo e, assim como outros ramos da Matemática, adquiriu diferentes formas e ramificações. A palavra entropia, por exemplo, foi primeiro empregada em 1864 num trabalho sobre termodinâmica de Clausius. Enquanto até então não havia adquirido um significado intuitivo que fosse satisfatório, foi com Maxwell e Boltzmann que houve a primeira grande reinterpretação de seu conceito. Eles elaboraram uma teoria atômica do calor com base em probabilidades, ou seja, a Mecânica Estatística [11].

Uma outra revolução no seu conceito surgiu com o desenvolvimento das telecomunicações. Faltava uma teoria matemática que fosse capaz de prever a capacidade de um canal de comunicação e, principalmente, em como armazenar e transmitir informação de maneira mais econômica. Em 1948, Shannon [19] apresentou esta teoria, na qual a entropia desempenhava um papel central. Nascia então a Teoria da Informação e com ela o conceito de entropia ganhava nova interpretação.

Kolmogorov e Sinai, respectivamente em 1958 e 1959, baseando-se na entropia em teoria da informação, introduziram o conceito de entropia em sistemas dinâmicos, o que propiciou grande crescimento da teoria ergódica. Em particular, percebeu-se que a entropia é um invariante útil para determinar se dois sistemas dinâmicos não são conjugados (sistemas dinâmicos conjugados tem a mesma entropia) [11]. Mais especificamente, dado um espaço de medida X e uma aplicação mensurável $f : X \rightarrow X$, no qual a medida é invariante por f , Kolmogorov introduziu a entropia desta aplicação por meio das partições mensuráveis de X .

O conceito de entropia, sem a necessidade de medidas invariantes, foi apresentado por Adler, Konheim e McAndrew [1] em 1965. Eles definiram entropia de modo puramente topológico para aplicações contínuas em espaços topológicos compactos, substituindo as partições

mensuráveis por coberturas abertas do espaço topológico. Em 1971, Bowen [3] apresentou uma nova definição para a entropia em espaços métricos não necessariamente compactos e, em 1995, Hofmann e Stojanov [10] definiram a entropia para ações de semigrupos. Recentemente, devido o crescimento do emprego de sistemas de controle na resolução de problemas em canais de comunicação, com especial interesse na informação necessária para a conclusão de tarefas, tem-se também uma nova noção de entropia: a entropia invariante para sistemas de controle [6]. Neste sentido, a entropia invariante mede com que frequência funções de controle devem ser ajustadas de modo a evitar que as suas soluções deixem um subconjunto de um espaço estado.

Nesta dissertação temos como objetivo apresentar uma introdução à entropia topológica. O desenvolvimento teórico é construído sobretudo de acordo com os artigos de Adler, Kotheim e McAndrew [1], Bowen [3] e Hofmann e Stojanov [10]. O trabalho desenvolve-se, basicamente, discutindo a noção de entropia topológica em cada um destes artigos, destacando suas principais definições, propriedades e teoremas. Em particular, apresentamos comparações entre estas diferentes definições de entropia e, mais especificamente, temos a evolução do conceito de entropia topológica de aplicações, até sua generalização para ações de semigrupos.

No capítulo 1 vemos alguns conceitos básicos sobre semigrupos, grupos e medidas. Eles são apresentados apenas no sentido de auxiliar a construção dos resultados posteriores. Uma introdução preliminar da entropia em teoria da probabilidade e em teoria ergódica também surge com o intuito de motivar os desenvolvimentos seguintes em entropia topológica.

No capítulo 2 estudamos a entropia topológica tal como primeiro apresentado por Adler *et al* [1]. Neste caso, para X espaço topológico compacto, a entropia topológica é definida para uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ e seu cálculo é efetuado em termos das coberturas abertas de X .

No capítulo 3 temos a definição de entropia topológica de Bowen [3], dada para aplicações uniformemente contínuas em espaços métricos. Provamos também a equivalência das definições de Bowen e Adler para um espaço métrico compacto e, em seguida, apresentamos a noção de medidas homogêneas e calculamos a entropia de algumas aplicações lineares.

No capítulo 4 apresentamos a noção de entropia topológica para ações de semigrupos com o estudo do artigo de Hofmann e Stojanov [10]. A entropia topológica é definida para uma ação uniforme de um semigrupo (ou grupo) localmente compacto sobre um espaço métrico. Esta nova definição é consistente com a definição de Bowen. Na verdade, a entropia topológica de uma ação é uma generalização da entropia topológica de uma aplicação. Neste capítulo a noção de medida homogênea também é generalizada e temos alguns resultados referentes à entropia de ações lineares.

Notação: No decorrer do texto escrevemos $\text{cl}(Y)$ para representar o fecho de um conjunto Y e $\text{int}(Y)$ o seu interior. O espectro de uma matriz A é denotado por $\text{Spec}A$ e $\#S$ denota a cardinalidade de um conjunto S . Além disso, denotamos $\log = \log_a$, no qual $a > 1$ é um número real fixado.

PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos básicos sobre grupos, semigrupos e medidas. Em particular, destacamos aqueles referentes a grupos topológicos e a medida de Haar. Não nos aprofundaremos nos detalhes e desenvolvimentos destes conceitos, mas os apresentamos apenas na medida em que são necessários para a construção dos resultados posteriores. Na sequência, também fazemos uma breve introdução dos conceitos de entropia em teoria da probabilidade e em teoria ergódica.

1.1 Grupos, Semigrupos e Medidas

Aqui temos as definições de grupo topológico e medida de Haar. Outros resultados também são apresentados e maiores detalhes podem ser vistos nas referências [9] e [16].

Definição 1.1. *Sejam X um conjunto e \mathcal{A} uma coleção de subconjuntos de X . Dizemos que \mathcal{A} é uma álgebra se forem válidas as seguintes condições:*

- (i) $X \in \mathcal{A}$;
- (ii) Se $A \in \mathcal{A}$, então $X \setminus A \in \mathcal{A}$;
- (iii) Se $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$, então $\bigcup_{i=1}^n A_i \in \mathcal{A}$.

Dizemos que uma álgebra \mathcal{A} é uma σ -álgebra se a condição (iii) pode ser generalizada para uniões infinitas enumeráveis.

Os conjuntos de uma álgebra (resp. σ -álgebra) \mathcal{A} são chamados *conjuntos mensuráveis*. Um *espaço mensurável* é um par (X, \mathcal{A}) onde \mathcal{A} é uma σ -álgebra de X . A álgebra gerada

(resp. σ -álgebra gerada) por uma classe C de subconjuntos de um conjunto X define-se como a menor álgebra (resp. σ -álgebra) de X que contém C . Uma tal álgebra (resp. σ -álgebra) sempre existe. Para X espaço topológico tem-se o que denominamos de σ -álgebra de Borel, isto é, a σ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de X . É comum designar os elementos desta σ -álgebra por borelianos.

Definição 1.2. *Se (X, \mathcal{A}) e (Y, \mathcal{B}) são espaços mensuráveis, então dizemos que uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é mensurável com respeito as σ -álgebras \mathcal{A} e \mathcal{B} se $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.*

Para X e Y espaços topológicos, $f : X \rightarrow Y$ é mensurável se o é com respeito às σ -álgebras dos borelianos. Note então que toda função contínua é mensurável.

Definição 1.3. *Seja $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ uma função definida numa álgebra \mathcal{A} de algum conjunto X , onde $[0, \infty]$ representa $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$. Dizemos que é aditiva se $\mu(\emptyset) = 0$ e para A_1, A_2, \dots, A_n elementos dois a dois disjuntos em \mathcal{A} tivermos*

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Uma tal função diz-se σ -aditiva se esta última condição valer para famílias enumeráveis de elementos de \mathcal{A} .

Para uma função σ -aditiva temos $\mu(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e dados $A_1 \subset A_2$ em \mathcal{A} verifica-se $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$. Além disso, se A_1, A_2, \dots, A_n são elementos em \mathcal{A} (não necessariamente disjuntos)

$$\mu \left(\bigcup_{i=1}^n A_i \right) \leq \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Por *medida* denominamos uma função σ -aditiva μ definida numa σ -álgebra \mathcal{A} . Um *espaço de medida* é uma terna (X, \mathcal{A}, μ) , no qual (X, \mathcal{A}) é um espaço mensurável e μ é uma medida definida em \mathcal{A} . Se $\mu(X) = 1$ dizemos que μ é uma medida de probabilidade e (X, \mathcal{A}, μ) é um espaço de probabilidade.

Definição 1.4. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) e (Y, \mathcal{B}, ν) espaços de medida. Dizemos que uma aplicação mensurável $f : X \rightarrow Y$ preserva medida se $\mu(f^{-1}B) = \nu(B)$ para todo $B \in \mathcal{B}$. No caso de $f : X \rightarrow X$, podemos dizer que a medida μ é f -invariante, isto é, $\mu(f^{-1}A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$.*

Agora apresentamos as definições de grupo topológico e medida de Haar.

Definição 1.5. *Um grupo topológico G é um grupo munido de uma topologia compatível com a operação no grupo, isto é, no sentido em que*

(i) $m : G \times G \rightarrow G$, $m(g, h) = gh$, é uma aplicação contínua ao considerar $G \times G$ com a topologia produto;

(ii) $i : G \rightarrow G$, $i(g) = g^{-1}$, é contínua (e, portanto, um homeomorfismo pois $i^{-1} = i$).

Por sua vez, G será um semigrupo topológico se possui uma operação associativa e uma topologia de modo que (i) é satisfeita.

Exemplo 1.6. Sejam K e H grupos (no sentido algébrico) e $\eta : H \rightarrow \text{Aut}(K)$ um homomorfismo do grupo H no grupo dos automorfismos de K . Então, conforme em [9], \cdot_η denotará a operação definida sobre o conjunto $H \times K$ da seguinte maneira:

$$(k_1, h_1) \cdot_\eta (k_2, h_2) = (k_1 \eta(h_1) k_2, h_1 h_2).$$

Segue que $(K \times H, \cdot_\eta)$ é um grupo, chamado o produto semidireto de K por H com homomorfismo η . A identidade é (e_1, e_2) no qual e_1, e_2 são as identidades de K e H , respectivamente. O inverso de um elemento (k, h) em $K \rtimes_\eta H$ é $(\eta(h^{-1})k^{-1}, h^{-1})$. Suponha agora que K e H são grupos topológicos e que

$$\begin{aligned} \psi : K \times H &\longrightarrow K \\ (k, h) &\longmapsto \psi(k, h) = \eta(h)k \end{aligned}$$

é uma aplicação contínua ($K \times H$ visto com a topologia produto). Em particular, cada $\eta(h)$ é homeomorfismo de K em K . Note que ao supormos ψ contínua e K, H grupos topológico temos a continuidade das aplicações multiplicação e inverso para $G = K \rtimes_\eta H$ na definição 1.5. Portanto, o produto semidireto $K \rtimes_\eta H$ com a topologia produto é um grupo topológico.

Definição 1.7. *Um grupo G é dito um grupo de Lie se G possui uma estrutura de variedade diferenciável tal que as operações multiplicação e inversão do grupo são diferenciáveis.*

Para $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} o grupo linear $Gl(n, \mathbb{F})$ das matrizes invertíveis é um exemplo de grupo de Lie. Dados G grupo (no sentido algébrico) e H_1, H_2 subgrupos de G , dizemos que H_1

é conjugado a H_2 se existe $g \in G$ tal que $H_1 = gH_2g^{-1}$. Neste sentido, temos o seguinte importante teorema cuja demonstração pode ser encontrada em [20].

Teorema 1.8 (Teorema de Lie). *Seja G um subgrupo conexo solúvel de $Gl(n, \mathbb{C})$. Então, G é um conjugado a um subgrupo de matrizes triangulares superiores.*

Definição 1.9. *Sejam \mathbb{F} um corpo, G um grupo e $n \geq 1$ um inteiro. Uma \mathbb{F} -representação matricial de G de grau n é um homomorfismo de grupos $A : G \rightarrow Gl(n, \mathbb{F})$.*

Definição 1.10. *Uma ação à esquerda de um semigrupo G com identidade e sobre um conjunto X é uma aplicação $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ com as seguintes propriedades:*

- (i) $\Gamma(e, x) = x$ para todo $x \in X$;
- (ii) $\Gamma(gh, x) = \Gamma(g, \Gamma(h, x))$ para todo $g, h \in G$ e para todo $x \in X$.

Exemplo 1.11. Considerando X um espaço topológico e o grupo aditivo dos reais, um fluxo contínuo ou sistema dinâmico contínuo em X é uma aplicação contínua $\Phi : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ satisfazendo (i) e (ii) da definição acima. Note, portanto, que um fluxo contínuo em um espaço topológico X é uma ação de \mathbb{R} em X . Para cada $t \in \mathbb{R}$ temos a aplicação

$$\begin{aligned} \Phi_t : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \Phi_t(x) = \Phi(t, x). \end{aligned}$$

Neste sentido, para μ medida definida na σ -álgebra de Borel \mathcal{A} de X , dizemos que μ é invariante pelo fluxo se $\mu(\Phi_t A) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e todo $t \in \mathbb{R}$. Nas condições acima, se ao invés de \mathbb{R} considerarmos \mathbb{Z} , temos o que é denominado um fluxo discreto ou sistema dinâmico discreto.

Agora, sejam X um espaço topológico localmente compacto e \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel de X . Uma medida de Borel μ sobre (X, \mathcal{A}) é uma medida regular se

- (i) Para cada B em \mathcal{A} temos $\mu(B) = \sup\{\mu(K); K \subseteq B, K \text{ compacto}\}$;
- (ii) Para cada B em \mathcal{A} temos $\mu(B) = \inf\{\mu(U); B \subseteq U, U \text{ é aberto}\}$.

Definição 1.12. *Sejam G um grupo (topológico) localmente compacto e \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel de X . Seja μ uma medida de Borel regular sobre G satisfazendo:*

- (i) $\mu(K) < \infty$ para todo subconjunto compacto K em X ;
- (ii) $\mu(U) > 0$ para algum subconjunto aberto U em X ;
- (iii) $\mu(Ag) = \mu(A)$ para todo $A \in \mathcal{A}$ e $g \in G$.

Então, dizemos que μ é uma medida de Haar invariante à direita (ou simplesmente, medida de Haar).

Para um grupo localmente compacto G sempre podemos garantir a existência de uma medida de Haar invariante à direita. Um exemplo de medida de Haar em \mathbb{R}^m é a medida de Lebesgue.

Observação 1.13 (Lema de Zorn). Seja X um conjunto não-vazio. Uma relação binária \leq em X é uma relação de ordem parcial em X , e diz-se que X é um conjunto *parcialmente ordenado* por \leq , se dados $x, y, z \in X$ valem as propriedades: $x \leq x$; se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$; se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$. Um elemento $x \in X$ é um *limite superior* de um subconjunto $S \subset X$ se, para todo $s \in S$, vale $s \leq x$. Um conjunto $C \subset X$ é *totalmente ordenado* por \leq se, para todos $a, b \in C$, tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$. Um elemento $x \in X$ é um *elemento maximal* de X se, para todo $y \in X$ tal que $x \leq y$, tivermos $x = y$. O lema de Zorn enuncia-se então: Um conjunto não-vazio parcialmente ordenado, no qual todo subconjunto totalmente ordenado possui um limite superior, tem um elemento maximal.

1.2 Preliminares em Entropia

Aqui apresentamos alguns conceitos preliminares em entropia. Novamente não nos preocupamos com detalhes e nem com o aprofundamento das exposições. Contudo, destacamos aquilo que se pode dizer o início da formalização matemática do conceito de entropia, isto é, sua conceituação em teoria da probabilidade. Um fato relevante é que este desenvolvimento teórico da entropia serve como motivação para a introdução da entropia em teoria ergódica e, conseqüentemente, para o estudo em entropia topológica feito nos próximos capítulos.

1.2.1 O conceito de Entropia na Teoria da Probabilidade

O conceito de entropia visto a seguir foi inicialmente empregado por Shannon [19] em 1948 nos seus estudos em teoria de informação. Contudo, foi com Khinchin [12] em 1953 que ganhou a devida formalização matemática. Baseados em [11], [12] e [13] é que apresentamos estes resultados.

Definição 1.14. *Por um sistema completo de eventos entendemos um conjunto finito de eventos A_1, A_2, \dots, A_n tais que um, e somente um deles, pode ocorrer em cada realização de uma experiência aleatória. Se aos eventos A_1, A_2, \dots, A_n aparecem associadas suas respectivas probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n , satisfazendo $p_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, temos o que chamamos de experimento finito e representamos por*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Considere os experimentos finitos

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_n \\ p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \cdots & B_m \\ q_1 & q_2 & \cdots & q_m \end{pmatrix}.$$

Os experimentos A e B são ditos independentes se a probabilidade π_{lk} de ocorrência simultânea dos eventos A_k em A e B_l em B é $p_k q_l$. Então, o conjunto dos eventos $A_k B_l$ ($1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq m$) com probabilidades π_{kl} representa outro experimento finito, o qual chamamos o *produto* de A e B .

Note que todo experimento finito define um estado de incerteza. Neste sentido, é correto pensar que a quantidade de incerteza é diferente para experimentos finitos diferentes. Para exemplificar, considere

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,5 & 0,5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,99 & 0,01 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}.$$

Observe então que o experimento finito A tem muito mais incerteza do que o experimento finito B , enquanto o experimento finito C representa um caso intermediário entre A e B .

Questiona-se agora se é possível associar um valor numérico que represente a incerteza de um experimento e que ao mesmo tempo seja condizente com o caso acima. Neste sentido,

vamos introduzir uma quantidade que a princípio se apresenta como uma medida aceitável desta incerteza associada a um dado experimento finito. Para o experimento finito A em (1.1) considere

$$H(A) := H(p_1, p_2, \dots, p_n) := - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k, \quad (1.2)$$

na qual os logaritmos são dados em uma base fixa arbitrária e assumimos $p_k \log p_k = 0$ se $p_k = 0$. A quantidade $H(A)$ é então chamada a *entropia do experimento finito* A .

Um fato importante é que esta função é obtida de modo a satisfazer algumas propriedades consideradas desejáveis no que se diz respeito a medida de incerteza de um experimento finito. Dentre elas, destacamos:

- (i) $H(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ se, e somente se, algum p_i assume o valor um e os demais são zero;
- (ii) $H(p_1, p_2, \dots, p_n, 0) = H(p_1, p_2, \dots, p_n)$, ou seja, acrescentando um ou mais eventos impossíveis a um experimento não mudamos sua entropia;
- (iii) Se A e B são experimentos finitos independentes, temos $H(AB) = H(A) + H(B)$, onde $H(AB)$ representa a entropia do produto AB ;
- (iv) Se A e B são dependentes, temos $H(AB) = H(A) + H_A(B)$, onde $H_A(B)$ representa esperança matemática de $H(B)$ no experimento A , isto é, representa a incerteza do experimento B dado que o experimento A já ocorreu;
- (v) $H_A(B) \leq H(B)$, isto é, a incerteza do experimento finito B só pode diminuir com o conhecimento do resultado ocorrido em A ;
- (vi) Para n fixo, a entropia assume seu valor máximo quando a probabilidade p_i ($1 \leq i \leq n$) é constante e igual a $1/n$.

Note que ao realizarmos um experimento obtemos informação, e com ela a incerteza é completamente eliminada. Então, ao medirmos a incerteza de um experimento finito por sua entropia $H(A)$ é natural expressar a quantidade de informação necessária para remover esta incerteza por $H(A)$. Portanto, podemos considerar a quantidade de informação obtida na realização de um experimento finito sendo igual a entropia do experimento.

Considere $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ uma função definida para qualquer inteiro n e para todos os valores p_1, \dots, p_n tais que $p_k \geq 0$ e $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. É possível provar que se esta função é contínua com respeito a todos os seus argumentos e se desejamos que ela satisfaça as propriedades (i), (ii) e (iii) acima, então devemos ter necessariamente

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = -\lambda \sum_{k=1}^n p_k \log p_k,$$

onde λ é uma constante positiva (veja [13], p. 9). Isto significa que a expressão acima para a entropia de um experimento finito é a única possível se desejamos que certas propriedades sejam satisfeitas e esteja de acordo com a interpretação do conceito de entropia (como medida de incerteza ou como quantidade de informação).

1.2.2 Entropia em Teoria Ergódica (Entropia Métrica)

Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de medida. Muitos fenômenos importantes na natureza e nas ciências experimentais são modelados por objetos matemáticos (aplicações, fluxos, ...) em X que deixam invariante sua medida. Neste sentido, em termos simples, a Teoria Ergódica surge como a disciplina matemática que estuda estes objetos munidos com medidas invariantes. Inserido neste contexto, apresentamos a seguir a definição de entropia em Teoria Ergódica, também em algumas literaturas denominada entropia métrica. Para uma visão mais completa destes assuntos, recomendamos [7], [15] e [21].

Definição 1.15. *Seja (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade. Uma partição mensurável de (X, \mathcal{A}, μ) é uma coleção finita de subconjuntos mensuráveis de X cuja união é X .*

Denote uma tal partição por $\mathcal{P} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$. Então, a entropia da partição \mathcal{P} é definida como

$$H_\mu(\mathcal{P}) = - \sum_i \mu(A_i) \log \mu(A_i).$$

Para quaisquer duas partições \mathcal{P} e \mathcal{Q} em X , dizemos que a partição \mathcal{Q} é mais fina que \mathcal{P} , $\mathcal{P} \prec \mathcal{Q}$, se cada elemento de \mathcal{Q} está contido em algum elemento de \mathcal{P} . O conjunto $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} = \{A \cap B; A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}$ é uma nova partição de X e podemos ver que $H_\mu(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \leq H_\mu(\mathcal{P}) + H_\mu(\mathcal{Q})$.

Agora, se $f : X \rightarrow X$ é uma aplicação mensurável e \mathcal{P} é uma partição arbitrária de X , temos que a família $f^{-1}\mathcal{P} = \{f^{-1}A; A \in \mathcal{P}\}$ é uma nova partição de X . Note também que $f^{-1}(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) = f^{-1}(\mathcal{P}) \vee f^{-1}(\mathcal{Q})$. Além disso, se f preserva medida, temos $H_\mu(f^{-1}\mathcal{P}) = H_\mu(\mathcal{P})$. Então, para a partição $\mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathcal{P}$ de X , apresentamos a definição abaixo.

Definição 1.16. *Sejam (X, \mathcal{A}, μ) um espaço de probabilidade e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação que preserva medida. Definimos a entropia métrica da aplicação f com respeito a uma partição \mathcal{P} como sendo o número real*

$$h_\mu(f, \mathcal{P}) := \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathcal{P} \vee f^{-1}\mathcal{P} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathcal{P}) / n.$$

A entropia métrica da aplicação f é então definida por

$$h_\mu(f) := \sup_{\mathcal{P}} h_\mu(f, \mathcal{P}),$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as partições mensuráveis \mathcal{P} de X .

O limite da definição existe e segue por um argumento de subaditividade de modo análogo ao visto adiante para entropia topológica.

ENTROPIA TOPOLÓGICA

Este capítulo é dedicado ao estudo da entropia topológica conforme apresentado por Adler, Konheim e McAndrew [1] em 1965. Mais precisamente, aqui a entropia topológica é dada para uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ definida sobre um espaço topológico compacto X e é calculada em termos das coberturas abertas deste espaço. No que segue apresentamos suas principais propriedades e teoremas, e os exemplos são dados considerando-se X espaço métrico compacto.

2.1 Entropia Topológica

2.1.1 Definições e Propriedades

Neste capítulo, salvo menção em contrário, X designa um espaço topológico compacto.

Definição 2.1. *Para qualquer cobertura aberta \mathfrak{A} de X , $N(\mathfrak{A})$ denota o número de conjuntos em uma subcobertura de cardinalidade mínima. Uma subcobertura de uma cobertura é mínima se nenhuma outra subcobertura contém menos elementos.*

Sendo X compacto e \mathfrak{A} uma cobertura aberta, uma tal subcobertura minimal sempre existe. Assim, conforme na teoria ergódica, chamamos $H(\mathfrak{A}) := \log N(\mathfrak{A})$ a entropia de \mathfrak{A} .

Definição 2.2. *Para quaisquer duas coberturas abertas \mathfrak{A} e \mathfrak{B} ,*

- (i) *o conjunto $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} = \{A \cap B; A \in \mathfrak{A}, B \in \mathfrak{B}\}$ é uma nova cobertura aberta de X e é chamada a junção de \mathfrak{A} e \mathfrak{B} ;*

(ii) a cobertura \mathfrak{B} é dita ser um refinamento da cobertura \mathfrak{A} , $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$, se cada elemento de \mathfrak{B} está contido em algum elemento de \mathfrak{A} .

A seguinte proposição resume algumas propriedades básicas.

Proposição 2.3. (a) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}' \Rightarrow \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}'$. Em particular, temos que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ e $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$;

(b) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow N(\mathfrak{A}) \leq N(\mathfrak{B})$, $H(\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{B})$;

(c) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow N(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = N(\mathfrak{B})$, $H(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = H(\mathfrak{B})$;

(d) $N(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq N(\mathfrak{A}) \cdot N(\mathfrak{B})$ e $H(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$.

Demonstração: (a) Seja $A' \cap B' \in \mathfrak{A}' \vee \mathfrak{B}'$ com $A' \in \mathfrak{A}'$ e $B' \in \mathfrak{B}'$. Por hipótese, existem $A \in \mathfrak{A}$ e $B \in \mathfrak{B}$ tais que $A' \subset A$ e $B' \subset B$. Logo, $A' \cap B' \subset A \cap B \in \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$. Os casos particulares seguem considerando a cobertura aberta $\{X\}$ e fazendo-se as devidas adequações.

(b) Seja $\{B_1, \dots, B_{N(\mathfrak{B})}\}$ uma subcobertura minimal de \mathfrak{B} . Desde que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$ para cada B_k existe $A_k \in \mathfrak{A}$ tal que $B_k \subset A_k$, $k = 1, \dots, N(\mathfrak{B})$. Então, $\{A_1, \dots, A_{N(\mathfrak{B})}\}$ é uma subcobertura de \mathfrak{A} não necessariamente minimal. Portanto, temos $N(\mathfrak{A}) \leq N(\mathfrak{B})$ e, como $H(\mathfrak{A}) = \log N(\mathfrak{A})$, concluímos que $H(\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{B})$.

(c) Segue pelos itens (a), (b) e pelo fato de $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B} \prec \mathfrak{B}$.

(d) Sejam $\{A_1, \dots, A_{N(\mathfrak{A})}\}$ e $\{B_1, \dots, B_{N(\mathfrak{B})}\}$ subcoberturas minimais de \mathfrak{A} e \mathfrak{B} , respectivamente. Então, $\{A_i \cap B_j ; i = 1, \dots, N(\mathfrak{A}) \text{ e } j = 1, \dots, N(\mathfrak{B})\}$ é uma subcobertura de $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ não necessariamente minimal e com no máximo $N(\mathfrak{A}) \cdot N(\mathfrak{B})$ elementos. Logo, temos $N(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq N(\mathfrak{A}) \cdot N(\mathfrak{B})$. Além disso, $\log N(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq \log N(\mathfrak{A}) + \log N(\mathfrak{B})$ e, portanto, $H(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \leq H(\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{B})$. \square

Sejam X um espaço topológico compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Se \mathfrak{A} é uma cobertura aberta de X , então, pela continuidade da aplicação f , também temos que a família $f^{-1}\mathfrak{A} = \{f^{-1}A ; A \in \mathfrak{A}\}$ é uma cobertura aberta de X . Com relação a esta nova cobertura apresentamos as seguintes propriedades.

Proposição 2.4. (a) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow f^{-1}\mathfrak{A} \prec f^{-1}\mathfrak{B}$;

$$(b) \quad f^{-1}(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) = f^{-1}\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{B};$$

$$(c) \quad N(f^{-1}\mathfrak{A}) \leq N(\mathfrak{A}), \quad H(f^{-1}\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A}). \quad \text{Quando } f \text{ é sobrejetiva, } N(f^{-1}\mathfrak{A}) = N(\mathfrak{A}).$$

Demonstração: Os itens (a) e (b) são imediatos. Seja então $\{A_1, \dots, A_{N(\mathfrak{A})}\}$ uma subcobertura minimal de \mathfrak{A} . Note que $\{f^{-1}A_1, \dots, f^{-1}A_{N(\mathfrak{A})}\}$ é uma subcobertura de $f^{-1}\mathfrak{A}$ possivelmente não minimal. Logo, $N(f^{-1}\mathfrak{A}) \leq N(\mathfrak{A})$ e, conseqüentemente, $H(f^{-1}\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A})$. Agora, para f sobrejetiva, suponha por absurdo que $\{f^{-1}A_1, \dots, f^{-1}A_{N(\mathfrak{A})}\}$ não é uma subcobertura minimal de $f^{-1}\mathfrak{A}$. Então, podemos encontrar $\{f^{-1}B_1, \dots, f^{-1}B_m\}$ subcobertura minimal de $f^{-1}\mathfrak{A}$ com $B_k \in \mathfrak{A}$, $k = 1, \dots, m$, e tal que $m < N(\mathfrak{A})$. Mas, sendo f sobrejetiva, temos

$$X = f(X) = f\left(\bigcup_{k=1}^m f^{-1}B_k\right) = \bigcup_{k=1}^m B_k,$$

donde segue que $\{B_1, \dots, B_m\}$ é uma subcobertura minimal de \mathfrak{A} com $m < N(\mathfrak{A})$ elementos, o que é uma contradição. \square

Definição 2.5. *Uma seqüência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de números reais é dita subaditiva se satisfaz a condição $x_{m+n} \leq x_m + x_n$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.*

Lema 2.6. *Para toda seqüência subaditiva $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_n \geq 0$, o limite $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n}$ existe e é igual a $\inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$.*

Demonstração: Inicialmente observamos que a condição $x_n \geq 0$ garante a existência do ínfimo, logo tome $c = \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{x_n}{n}$. Pela definição de ínfimo, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{x_{n_0}}{n_0} \leq c + \epsilon$. Para $n \geq n_0$ existem $p, q \in \mathbb{N}$ com $n_0 \geq 0$ tais que $n = n_0p + q$. Assim, por hipótese, $x_n \leq px_{n_0} + x_q$. Daí,

$$\frac{x_n}{n} \leq \frac{px_{n_0} + x_q}{n} \leq \frac{px_{n_0}}{n_0p} + \frac{x_q}{n} \leq c + \epsilon + \frac{1}{n} \left(\sup_{j=1, \dots, n_0} x_j \right).$$

Portanto, quando n tende ao infinito, o resultado segue. \square

Proposição 2.7. *O limite*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\mathfrak{A} \right) / n = \lim_{n \rightarrow \infty} H (\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) / n$$

existe e é finito.

Demonstração: Denote $H_n = H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})$. Então, $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Mostraremos que esta sequência é subaditiva. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}
H_{m+n} &= H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-m-n+1}\mathfrak{A}) \\
&= H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-m+1}\mathfrak{A} \vee f^{-m}(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})) \\
&\leq H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-m+1}\mathfrak{A}) + H(f^{-m}(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})) \\
&\leq H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-m+1}\mathfrak{A}) + H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) \\
&= H_m + H_n
\end{aligned}$$

no qual a segunda igualdade deve-se à proposição 2.4 (b) e as desigualdades seguintes às proposições 2.3 (d) e 2.4 (c), respectivamente. Além disso, pela definição de entropia de uma cobertura, temos $H_n \geq 0$. Portanto, pelo lema 2.6, o limite acima existe e é finito. \square

Definição 2.8. *Sejam X espaço topológico compacto e $f : X \rightarrow X$ aplicação contínua. Definimos a entropia topológica da aplicação f com respeito a uma cobertura \mathfrak{A} de X como sendo o número real*

$$h_{top}(f, \mathfrak{A}) := \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) / n.$$

A entropia topológica da aplicação f é então definida por

$$h_{top}(f) := \sup_{\mathfrak{A}} h_{top}(f, \mathfrak{A}),$$

no qual o supremo é tomado sobre todas as coberturas abertas \mathfrak{A} de X .

A proposição abaixo resume algumas propriedades da entropia topológica de uma aplicação com respeito a uma cobertura.

Proposição 2.9. (a) $h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A})$;

(b) $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \Rightarrow h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq h_{top}(f, \mathfrak{B})$;

(c) Se f é um homeomorfismo, $h_{top}(f, \mathfrak{A}) = h_{top}(f^{-1}, \mathfrak{A})$. Portanto, $h_{top}(f) = h_{top}(f^{-1})$.

Demonstração: **(a)** Observe que

$$0 \leq H_n = H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A}) + H(f^{-1}\mathfrak{A}) + \dots + H(f^{-n+1}\mathfrak{A}) \leq n \cdot H(\mathfrak{A}),$$

no qual a segunda e terceira desigualdades devem-se respectivamente às proposições 2.3 (d) e 2.4 (c). Assim, $0 \leq H_n/n \leq H(\mathfrak{A})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n/n \leq H(\mathfrak{A})$ e, portanto, $h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A})$.

(b) Pela proposição 2.4 (a) temos $f^{-1}\mathfrak{A} \prec f^{-1}\mathfrak{B}$. Logo, de maneira geral, podemos ver $f^{-k}\mathfrak{A} \prec f^{-k}\mathfrak{B}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Então, pelas proposições 2.3 (a) e 2.3 (b), temos

$$\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B} \vee f^{-1}\mathfrak{B} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{B};$$

$$H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{B} \vee f^{-1}\mathfrak{B} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{B}).$$

Como esta desigualdade vale para todo $n \in \mathbb{N}$, dividindo-se ambos os lados por n e tomando-se o limite, resulta que $h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq h_{top}(f, \mathfrak{B})$.

(c) Sendo f sobrejetiva temos $N(\mathfrak{A}) = N(f^{-1}\mathfrak{A})$. Logo, $H(\mathfrak{A}) = H(f^{-1}\mathfrak{A})$ e, de maneira geral, $H(\mathfrak{A}) = H(f^{n-1}\mathfrak{A})$. Como \mathfrak{A} representa uma cobertura arbitrária, podemos ver

$$\begin{aligned} H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) &= H(f^{n-1}(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})) \\ &= H(\mathfrak{A} \vee f\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{n-1}\mathfrak{A}) \\ &= H(\mathfrak{A} \vee (f^{-1})^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee (f^{-n+1})^{-1}\mathfrak{A}), \end{aligned}$$

donde segue o desejado. □

Definição 2.10. *Seja X um espaço topológico compacto. Uma sequência de coberturas abertas $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em X é dita ser uma sequência de refinamento de coberturas se $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$ e, para cada cobertura aberta \mathfrak{B} de X , existe \mathfrak{A}_n tal que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{A}_n$.*

A existência de uma tal sequência de refinamento simplifica o cálculo da entropia, conforme podemos verificar na proposição abaixo.

Proposição 2.11. *Se $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de refinamento de coberturas em X então*

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(f, \mathfrak{A}_n).$$

Demonstração: Dado \mathfrak{A} cobertura aberta de X existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_n$. Logo, pela proposição 2.9 (b), temos $h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq h_{top}(f, \mathfrak{A}_n)$. Assim,

$$h_{top}(f) = \sup_{\mathfrak{A}} h_{top}(f, \mathfrak{A}) \leq \sup_{\mathfrak{A}_n} h_{top}(f, \mathfrak{A}_n).$$

Por outro lado, é claro que $\sup_{\mathfrak{A}_n} h_{top}(f, \mathfrak{A}_n) \leq h_{top}(f)$. Agora, observe que se $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de refinamento, então $(h_{top}(f, \mathfrak{A}_n))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais crescente. Portanto, $\lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(f, \mathfrak{A}_n) = \sup_{\mathfrak{A}_n} h_{top}(f, \mathfrak{A}_n) = h_{top}(f)$. \square

2.1.2 Teoremas Principais

A partir de agora apresentamos alguns dos principais teoremas com relação à entropia topológica de uma aplicação. Lembramos que aqui X ainda designa um espaço topológico compacto.

Teorema 2.12. *A entropia topológica de uma aplicação é um invariante no sentido que $h_{top}(gfg^{-1}) = h(f)$, no qual f é uma aplicação contínua de X em si mesmo e g é um homeomorfismo de X sobre algum X' .*

Demonstração: Se \mathfrak{A} é uma cobertura aberta de X , então $g\mathfrak{A}$ é uma cobertura aberta de X' . Logo,

$$\begin{aligned}
 h_{top}(gfg^{-1}, g\mathfrak{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} H(g\mathfrak{A} \vee (gfg^{-1})^{-1}g\mathfrak{A} \vee \dots \vee (gfg^{-1})^{-n+1}g\mathfrak{A}) / n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} H(g\mathfrak{A} \vee gf^{-1}g^{-1}g\mathfrak{A} \vee \dots \vee gf^{-n+1}g^{-1}g\mathfrak{A}) / n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} H(g\mathfrak{A} \vee gf^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee gf^{-n+1}\mathfrak{A}) / n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} H(g(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A})) / n \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathfrak{A} \vee f^{-1}\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}) / n \\
 &= h_{top}(f, \mathfrak{A}).
 \end{aligned}$$

Dado \mathfrak{B} cobertura aberta de X' temos $g^{-1}\mathfrak{B}$ é uma cobertura aberta de X . Dessa forma, tomando-se $\mathfrak{A} = g^{-1}\mathfrak{B}$ temos $\mathfrak{B} = g\mathfrak{A}$. Em outras palavras, como \mathfrak{A} se estende sobre todas as coberturas abertas de X e g é um homeomorfismo, temos que $g\mathfrak{A}$ se estende sobre todas as coberturas abertas de X' . Portanto,

$$h_{top}(gfg^{-1}) = \sup_{\mathfrak{B}} h(gfg^{-1}, \mathfrak{B}) = \sup_{g\mathfrak{A}} h(gfg^{-1}, g\mathfrak{A}) = \sup_{\mathfrak{A}} h(f, \mathfrak{A}) = h_{top}(f).$$

\square

Os próximos dois teoremas não serão demonstrados. As demonstrações podem ser encontradas em [1]. Contudo, salientamos que um resultado análogo, e mais interessante com relação ao nossos propósitos, será apresentado no próximo capítulo (Proposição 3.7).

Teorema 2.13. $h_{top}(f^m) = mh_{top}(f)$ para m um inteiro positivo. Em particular, se f é um homeomorfismo, então $h_{top}(f^m) = |m|h_{top}(f)$ para qualquer inteiro m .

Teorema 2.14. Sejam X e Y espaços topológicos compactos. Considere $f_1 : X \rightarrow X$ e $f_2 : Y \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Então,

$$h_{top}(f_1 \times f_2) \leq h_{top}(f_1) + h_{top}(f_2),$$

sendo $f_1 \times f_2 : X \times Y \rightarrow X \times Y$ aplicação contínua dada por $f_1 \times f_2 : (x, y) \mapsto (f_1(x), f_2(y))$, no qual $X \times Y$ é um espaço topológico compacto munido com a topologia produto.

Para a demonstração do próximo teorema necessitamos do seguinte lema.

Lema 2.15. Sejam $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seqüências de números reais maiores ou iguais a 1 com $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n)/n = a$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} (\log b_n)/n = b$. Então, $\lim_{n \rightarrow \infty} \log(a_n + b_n)/n = \max\{a, b\}$.

Demonstração: Para qualquer $c > a, b$ existe um inteiro n_0 tal que $\log a_n < nc$ e $\log b_n < nc$ sempre que $n \geq n_0$. Assim, afirmamos que $\log(a_n + b_n) < nc + \log 2$ para todo $n \geq n_0$. De fato, basta observar que $a_n = a^{\log_a a_n} < a^{nc}$ e $b_n = a^{\log_a b_n} < a^{nc}$ e assim, como $a_n, b_n > 1$, temos $a_n + b_n < 2a^{nc}$. Continuando temos

$$\begin{aligned} a &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log a_n)/n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log(a_n + b_n))/n & e \\ b &= \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log b_n)/n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log(a_n + b_n))/n. \end{aligned}$$

Além disso, $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(a_n + b_n))/n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(nc + \log 2))/n = c$. Portanto,

$$a, b \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (\log(a_n + b_n))/n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\log(a_n + b_n))/n \leq c.$$

A expressão acima é válida para todo $c > a, b$. Em particular, para $c = \max\{a, b\} + 1/m$, $m \in \mathbb{N}$. Então, fazendo m tender ao infinito, obtemos o desejado. \square

Embora a própria cobertura por si só indique o espaço que está cobrindo, os subscritos em N e H serão empregados no decorrer do texto a fim de se evitar qualquer confusão.

Teorema 2.16. *Sejam uma aplicação contínua $f : X \rightarrow X$ e X_1, X_2 subconjuntos fechados de X com $X = X_1 \cup X_2$ e $fX_1 \subseteq X_1, fX_2 \subseteq X_2$. Então, $h_{top}(f) = \max\{h_{top}(f_1), h_{top}(f_2)\}$, no qual f_1 e f_2 são as restrições de f em X_1 e X_2 , respectivamente.*

Demonstração: Seja $i = 1, 2$. Para uma cobertura \mathfrak{A} de X a família $(\mathfrak{A})_i = \{A \cap X_i \mid A \in \mathfrak{A}\}$ define uma cobertura aberta de X_i . Podemos ver que

$$N_i((\mathfrak{A})_i) \leq N(\mathfrak{A}); \quad (2.1)$$

$$(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})_i = (\mathfrak{A})_i \vee (\mathfrak{B})_i; \quad (2.2)$$

$$f_i^{-1}(\mathfrak{A})_i = (f^{-1}\mathfrak{A})_i. \quad (2.3)$$

Para verificar (2.1) observe que se $\{A_1, \dots, A_{N(\mathfrak{A})}\}$ é uma subcobertura minimal de \mathfrak{A} , então $\{A_1 \cap X_i, \dots, A_{N(\mathfrak{A})} \cap X_i\}$ é uma subcobertura de $(\mathfrak{A})_i$, eventualmente não minimal. Por sua vez, (2.2) e (2.3) seguem respectivamente do fato de $(A \cap B) \cap X_i = (A \cap X_i) \cap (B \cap X_i)$ e $f_i^{-1}(A \cap X_i) = f^{-1}A \cap X_i$ válidas para todo $A \in \mathfrak{A}$ e $B \in \mathfrak{B}$.

Agora, seja \mathfrak{A}_i uma cobertura aberta arbitrária de X_i . Afirmamos que existe uma cobertura aberta \mathfrak{A} de X tal que $(\mathfrak{A})_i = \mathfrak{A}_i$. Com efeito, considere $\mathfrak{A} = \{A \cup (X - X_i) \mid A \in \mathfrak{A}_i\}$. É fácil ver que \mathfrak{A} cobre X e é aberta pois $A \cup (X - X_i) = X - (X_i - A)$ (note que $X_i - A$ fechado em X_i e X_i fechado em X implica $X_i - A$ fechado em X). Mas, como $(A \cup (X - X_i)) \cap X_i = A$, temos $(\mathfrak{A})_i = \mathfrak{A}_i$. Com isso e (2.1), (2.2) e (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} \mathfrak{A}_i \right) &= N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} (\mathfrak{A})_i \right) = N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} (f^{-k} \mathfrak{A})_i \right) = N_i \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right)_i \right) \\ &\leq N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right). \end{aligned}$$

Disso resulta que

$$H_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} \mathfrak{A}_i \right) \leq H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right).$$

Logo, $h_{top}(f_i, \mathfrak{A}_i) \leq h_{top}(f, \mathfrak{A})$ e, portanto, $h_{top}(f_i) \leq h_{top}(f)$.

Por outro lado, para \mathfrak{A} cobertura arbitrária de X temos $N(\mathfrak{A}) \leq N_1((\mathfrak{A})_1) + N_2((\mathfrak{A})_2)$. De fato, sejam $\{A_1 \cap X_1, \dots, A_{N_1((\mathfrak{A})_1)} \cap X_1\}$ e $\{B_1 \cap X_2, \dots, B_{N_2((\mathfrak{A})_2)} \cap X_2\}$ subcoberturas minimais de $(\mathfrak{A})_1$ e $(\mathfrak{A})_2$, respectivamente. É claro que $\{A_1, \dots, A_{N_1((\mathfrak{A})_1)}, B_1, \dots, B_{N_2((\mathfrak{A})_2)}\}$

é uma subcobertura de \mathfrak{A} possivelmente não minimal e com no máximo $N_1((\mathfrak{A})_1) + N_2((\mathfrak{A})_2)$ elementos. Assim,

$$N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right) \leq N_1 \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right)_1 \right) + N_2 \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right)_2 \right).$$

Logo, da igualdade

$$N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} \mathfrak{A}_i \right) = N_i \left(\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right)_i \right)$$

obtemos

$$\log N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right) \leq \log \left(N_1 \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_1^{-k} \mathfrak{A}_1 \right) + N_2 \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_2^{-k} \mathfrak{A}_2 \right) \right), \quad (2.4)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Agora, observe que

$$\left(N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} \mathfrak{A}_i \right) \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad i = 1, 2,$$

são seqüências de números reais maiores ou iguais a 1 tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log N_i \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_i^{-k} \mathfrak{A}_i \right) \right) / n = h_{top}(f_i, \mathfrak{A}_i).$$

Portanto, por (2.4) e pelo lema 2.15, temos

$$\begin{aligned} h_{top}(f, \mathfrak{A}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \log N \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} \right) / n \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \log \left(N_1 \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_1^{-k} \mathfrak{A}_1 \right) + N_2 \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f_2^{-k} \mathfrak{A}_2 \right) \right) / n \\ &= \max \{ h_{top}(f_1, (\mathfrak{A})_1), h_{top}(f_2, (\mathfrak{A})_2) \}. \end{aligned}$$

Dessa forma, ao tomarmos o supremo, $h_{top}(f) \leq \max \{ h_{top}(f_1), h_{top}(f_2) \}$. □

Teorema 2.17. *Sejam X um espaço topológico compacto e \sim uma relação de equivalência sobre X . Considere $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua tal que $f(x) \sim f(y)$ se $x \sim y$ e $\tilde{f} : X/\sim \rightarrow X/\sim$ a aplicação definida por $\tilde{f}\pi = \pi f$, no qual π é a projeção de X sobre X/\sim . Então, $h_{top}(\tilde{f}) \leq h_{top}(f)$.*

Demonstração: Se \mathfrak{C} cobertura aberta de X/\sim , então $\pi^{-1}\mathfrak{C}$ é uma cobertura aberta de X e $N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C}) = N_{X/\sim}(\mathfrak{C})$. Com efeito, se $\{C_1, \dots, C_{N_{X/\sim}(\mathfrak{C})}\}$ é uma subcobertura minimal de

\mathfrak{C} , então $\{\pi^{-1}C_1, \dots, \pi^{-1}C_{N_{X/\sim}(\mathfrak{C})}\}$ é uma subcobertura de $\pi^{-1}\mathfrak{C}$ com no máximo $N_{X/\sim}(\mathfrak{C})$ elementos, ou seja, $N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C}) \leq N_{X/\sim}(\mathfrak{C})$. Por outro lado, seja $\{\pi^{-1}C_1, \dots, \pi^{-1}C_{N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C})}\}$ subcobertura minimal de $\pi^{-1}\mathfrak{C}$. Então, sendo π sobrejetora, temos que $\{C_1, \dots, C_{N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C})}\}$ é uma subcobertura de \mathfrak{C} com no máximo $N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C})$ elementos, isto é, $N_X(\pi^{-1}\mathfrak{C}) \geq N_{X/\sim}(\mathfrak{C})$.

Prosseguindo, observamos que

$$N_X((\pi^{-1}\mathfrak{C}) \vee f^{-1}(\pi^{-1}\mathfrak{C}) \vee \dots \vee f^{-n+1}(\pi^{-1}\mathfrak{C})) = N_{X/\sim}(\mathfrak{C} \vee \tilde{f}^{-1}\mathfrak{C} \vee \dots \vee \tilde{f}^{-n+1}\mathfrak{C}). \quad (2.5)$$

De fato, da igualdade mostrada acima temos

$$\begin{aligned} N_{X/\sim}(\mathfrak{C} \vee \tilde{f}^{-1}\mathfrak{C} \vee \dots \vee \tilde{f}^{-n+1}\mathfrak{C}) &= N_X(\pi^{-1}(\mathfrak{C} \vee \tilde{f}^{-1}\mathfrak{C} \vee \dots \vee \tilde{f}^{-n+1}\mathfrak{C})) \\ &= N_X(\pi^{-1}(\mathfrak{C}) \vee \pi^{-1}(\tilde{f}^{-1}\mathfrak{C}) \vee \dots \vee \pi^{-1}(\tilde{f}^{-n+1}\mathfrak{C})). \end{aligned}$$

Por indução podemos ver $\pi^{-1}(\tilde{f}^{-k}\mathfrak{C}) = f^{-k}(\pi^{-1}\mathfrak{C})$ para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Dessa forma, concluímos que (2.5) é válida e

$$H_X\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}(\pi^{-1}\mathfrak{C})\right) = H_{X/\sim}\left(\bigvee_{k=0}^{n-1} \tilde{f}^{-k}\mathfrak{C}\right).$$

Logo, devemos ter $h_{top}(f, \pi^{-1}\mathfrak{C}) = h_{top}(\tilde{f}, \mathfrak{C})$ e assim

$$h_{top}(f) = \sup_{\mathfrak{A}} h(f, \mathfrak{A}) \geq \sup_{\mathfrak{C}} h_{top}(f, \pi^{-1}\mathfrak{C}) = \sup_{\mathfrak{C}} h_{top}(\tilde{f}, \mathfrak{C}) = h_{top}(\tilde{f}).$$

□

2.2 Entropia Topológica em Espaços Métricos

Agora X passa a designar um espaço métrico compacto com métrica d . Isso possibilita o surgimento de resultados que em certo sentido simplificam o cálculo da entropia e contribuem para a apresentação de alguns exemplos.

Definição 2.18. *Seja $A \subset X$ um conjunto não-vazio. Para cada $x \in X$ definimos a distância de x a A por $d(x, A) = \inf \{d(x, a) ; a \in A\}$. Chamamos de diâmetro de A o número $\text{diam}(A) = \sup \{d(x, y) ; x, y \in A\}$. O diâmetro $\text{diam}(\mathfrak{A})$ de uma cobertura \mathfrak{A} é definido por $\text{diam}(\mathfrak{A}) = \sup_{A \in \mathfrak{A}} \text{diam}(A)$.*

Lema 2.19 (Lema da cobertura de Lebesgue). *Para cada cobertura aberta \mathfrak{A} de um espaço métrico compacto X existe $\epsilon > 0$ tal que se U é um conjunto com $\text{diam}(U) < \epsilon$ então U está contido em algum elemento de \mathfrak{A} . O supremo de todos os números ϵ para quais isto ocorre é chamado de número de Lebesgue da cobertura \mathfrak{A} .*

Lema 2.20 (Reformulação do lema da cobertura de Lebesgue). *Para coberturas abertas \mathfrak{A} e \mathfrak{B} de X , suponha que $\text{diam}(\mathfrak{B})$ é menor do que o número de Lebesgue de \mathfrak{A} . Então, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$.*

Demonstração: De fato, seja δ o número de Lebesgue da cobertura \mathfrak{A} . Então, para $B \in \mathfrak{B}$ temos $\text{diam}(B) \leq \text{diam}(\mathfrak{B}) < \delta$. Logo, pelo lema anterior, B está contido em algum elemento de \mathfrak{A} . Portanto, $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}$. \square

Corolário 2.21. *Se $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de coberturas abertas tais que $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$ e $\text{diam}(\mathfrak{A}_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, então $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de refinamento de coberturas.*

Este corolário assegura a existência de sequências de refinamento de coberturas em espaços métricos compactos. Como exemplo considere $\mathfrak{A}_n = \{B_{1/n}(x); x \in X\}$, no qual $B_{1/n}(x) = \{y \in X; d(x, y) < 1/n\}$. É claro que, para cada $n \in \mathbb{N}$, \mathfrak{A}_n é uma cobertura aberta de X . Note também que $\mathfrak{A}_n \prec \mathfrak{A}_{n+1}$ e $\text{diam}(\mathfrak{A}_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, ou seja, $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de refinamento de coberturas. Além disso, para qualquer sequência $\{\mathfrak{B}_n\}$ de coberturas satisfazendo $\text{diam}(\mathfrak{B}_n) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, podemos construir $\{\mathfrak{A}_n; \mathfrak{A}_n = \bigvee_{k=0}^n \mathfrak{B}_k\}$ sequência de refinamento de coberturas.

A partir da reformulação do lema da cobertura de Lebesgue e, mais precisamente, da existência de sequências de refinamento de coberturas em espaços métricos compactos torna-se possível a apresentação de alguns exemplos. Lembramos que dados $(X, d), (Y, \sigma)$ espaços métricos, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é uma imersão isométrica se $\sigma(f(x_1), f(x_2)) = d(x_1, x_2)$ para todo x_1, x_2 em X . Uma isometria é uma imersão isométrica sobrejetiva.

Exemplo 2.22. Se f é uma isometria de X em X , então $h_{top}(\varphi) = 0$.

Seja \mathfrak{A}_p a família de todos os conjuntos abertos com diâmetro menor do que $1/p$. É claro que esta família satisfaz a propriedade $\mathfrak{A}_p \vee \mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p$. Além disso, sendo f isometria, temos

$f^{-1}\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p$. De modo geral, $f^{-k}\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p$. Logo, $\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_p \vee f^{-1}\mathfrak{A}_p \vee \dots \vee f^{-n+1}\mathfrak{A}_p$. Disso resulta que

$$h_{top}(f, \mathfrak{A}_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} H(\mathfrak{A}_p)/n = 0.$$

Note que $\mathfrak{A}_p \prec \mathfrak{A}_{p+1}$ e $\text{diam}(\mathfrak{A}_p) = \sup_{A \in \mathfrak{A}_p} \text{diam}(A) \leq 1/p$ tende a zero quando p tende ao infinito. Portanto, $(\mathfrak{A}_p)_{p \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de refinamento de coberturas. Conseqüentemente, $h_{top}(f) = \lim_{p \rightarrow \infty} h_{top}(f, \mathfrak{A}_p) = 0$.

Exemplo 2.23. Seja X espaço métrico compacto com métrica d e considere $f : X \rightarrow X$ um homeomorfismo tal que o conjunto $\{f^n\}_{-\infty < n < \infty}$ é equicontínuo. Então, $h_{top}(f) = 0$.

Considere $d'(x, y) = \sup_{-\infty < n < \infty} d(f^n x, f^n y)$. Temos que d' é uma métrica em X e f é uma isometria com respeito a métrica d' pois

$$d'(x, y) = \sup_{-\infty < n < \infty} d(f^{n+1}(x), f^{n+1}(y)) = \sup_{-\infty < n < \infty} d(f^n(f(x)), f^n(f(y))) = d'(f(x), f(y)).$$

Mostraremos que as métricas d e d' são equivalentes e, aplicando o exemplo 2.22, teremos $h_{top}(f) = 0$. Com efeito, a topologia gerada pela métrica d' é mais fina do que a topologia gerada por d pois $d(x, y) \leq d'(x, y)$. Por outro lado, sendo X compacto, o conjunto $\{f^n\}_{-\infty < n < \infty}$ é uniformemente equicontínuo. Então, dado $\epsilon > 0$ e x, y em X existe $\delta > 0$ tal que $d(f^n x, f^n y) < \epsilon/2$, para todo $n \in \mathbb{N}$, quando $d(x, y) < \delta$. Logo, $d'(x, y) < \epsilon$ sempre que $d(x, y) < \delta$. Segue-se daí que $B_d(x, \delta) \subseteq B_{d'}(x, \epsilon)$, ou seja, a topologia gerada pela métrica d é mais fina do que a topologia gerada por d' .

Exemplo 2.24. Denote o espaço das sequências infinitas de 0 e 1 por $X = \prod_{i=-\infty}^{+\infty} X_i$, no qual $X_i = \{0, 1\}$ possui a topologia discreta. O espaço X é compacto na topologia produto pelo teorema de Tychonoff (veja [17]). Considere $(x)_i$ o i -ésimo termo da sequência $x \in X$ e o homeomorfismo $f : X \rightarrow X$ definido por $(fx)_i = (x)_{i+1}$. Este homeomorfismo é chamado de *shift*. Mostraremos então que $h_{top}(f) = \log 2$.

Inicialmente afirmamos que

$$d(x, y) = \sum_{-\infty}^{+\infty} |(x)_i - (y)_i| / 2^{|i|}$$

é uma métrica em X cuja topologia gerada é a mesma que a topologia produto em X . Não é difícil ver que d é uma métrica em X . Para verificar a segunda parte da afirmação, consideramos X_i com a métrica

$$d_i((x)_i, (y)_i) = |(x)_i - (y)_i| / 2^{|i|}.$$

Observe que d_i induz a topologia discreta em X_i e que as aplicações projeções

$$p_i : (X, d) \rightarrow (X_i, d_i),$$

sendo contrações, são contínuas. Logo, para um aberto $A_j \subset X_j$ temos $p_j^{-1}(A_j)$ aberto em (X, d) . Mais precisamente, temos

$$p_j^{-1}(A_j) = \prod_{i < j} X_i \times A_j \times \prod_{i > j} X_i.$$

Então, para A_j, \dots, A_{j+n} abertos em X_j, \dots, X_{j+n} respectivamente, temos

$$A = p_j^{-1}(A_j) \cap \dots \cap p_{j+n}^{-1}(A_{j+n}) = \prod_{i < j} X_i \times A_j \times \dots \times A_{j+n} \times \prod_{i > j+n} X_i,$$

aberto em (X, d) . Portanto, a topologia gerada por d é mais fina do que a topologia produto.

Por outro lado, mostraremos que para um aberto U da topologia gerada por d podemos escrevê-lo como união de abertos básicos da topologia produto em X . Dado $x \in U$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Como a série $\sum_{-\infty}^{+\infty} 1/2^{|i|}$ é convergente, podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que $\sum_{|i| > n} 1/2^{|i|} < r/3$. Além disso, para cada $|i| = 0, 1, 2, \dots, n$ seja $A_i = B((x)_i, r/3(2n+1))$ em X_i . Segue então que

$$A_x = \prod_{i < -n} X_i \times A_{-n} \times \dots \times A_n \times \prod_{i > n} X_i$$

contém x e está contido em U . De fato, se $y \in A_x$, como $d_i((x)_i, (y)_i) < r/3(2n+1)$ para $|i| = 0, 1, 2, \dots, n$ e $\sum_{|i| > n} d_i((x)_i, (y)_i) \leq \sum_{|i| > n} 1/2^{|i|} < r/3$, temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \sum_{i < -n} d_i((x)_i, (y)_i) + \sum_{-n < i < n} d_i((x)_i, (y)_i) + \sum_{i > n} d_i((x)_i, (y)_i) \\ &< r/3 + r/3 + r/3 = r. \end{aligned}$$

Escrevemos $U = \bigcup_{x \in U} A_x$ e concluímos que a topologia produto sobre X é mais fina do que a topologia gerada por d sobre X .

Agora, seja $\mathfrak{A} = \{\{x; (x)_0 = 0\}, \{x; (x)_0 = 1\}\}$. Note que \mathfrak{A} é uma cobertura aberta de X . Defina então $\mathfrak{A}_p = \bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A}$, $p \in \mathbb{Z}^+$. Segue que $(\mathfrak{A}_p)_p$ é uma sequência de refinamento de coberturas. De fato, é claro que $\mathfrak{A}_p \prec \mathfrak{A}_{p+1}$. Mostraremos então que $\text{diam}(\mathfrak{A}_p) \rightarrow 0$ quando $p \rightarrow \infty$. Note que pela definição do shift f temos

$$\mathfrak{A}_p = \bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A} = \left\{ \prod_{i < -p} X_i \times \{j_{-p}\} \times \dots \times \{j_p\} \times \prod_{i > p} X_i; j_k = 0, 1 \text{ e } -p \leq k \leq p \right\}.$$

Logo, se $x_p, y_p \in \prod_{i < -p} X_i \times \{j_{-p}\} \times \dots \times \{j_p\} \times \prod_{i > p} X_i$, temos $d(x_p, y_p) \leq \sum_{|i| > p} 1/2^{|i|}$. Com isso, $\text{diam}(\mathfrak{A}_p) \leq \sum_{|i| > p} 1/2^{|i|}$ e tende a zero quando p tende ao infinito.

Mostraremos por fim que $h_{\text{top}}(f, \mathfrak{A}) = h_{\text{top}}(f, \mathfrak{A}_p)$. Observe que $\mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_p$ o que implica $f^{-k} \mathfrak{A} \prec f^{-k} \mathfrak{A}_p$, para todo $k \in \mathbb{Z}^+$. Então,

$$\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1} \mathfrak{A} \prec \mathfrak{A}_p \vee \dots \vee f^{-n+1} \mathfrak{A}_p$$

e assim $H(\mathfrak{A} \vee \dots \vee f^{-n+1} \mathfrak{A}) \leq H(\mathfrak{A}_p \vee \dots \vee f^{-n+1} \mathfrak{A}_p)$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} h_{\text{top}}(f, \mathfrak{A}) &\leq h_{\text{top}}(f, \mathfrak{A}_p) = \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A}_p \right) / n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\left(\bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A} \right) \vee f^{-1} \left(\bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A} \right) \vee \dots \vee f^{-n+1} \left(\bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A} \right) \right) / n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\bigvee_{k=-p}^p f^k \mathfrak{A} \vee \bigvee_{k=-p-1}^{p-1} f^k \mathfrak{A} \vee \dots \vee \bigvee_{k=-p-n+1}^{p-n+1} f^k \mathfrak{A} \right) / n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\bigvee_{k=-p-n+1}^p f^k \mathfrak{A} \right) / n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} H \left(\bigvee_{k=-n+1}^0 f^k \mathfrak{A} \right) / n = h_{\text{top}}(f, \mathfrak{A}). \end{aligned}$$

Note que a segunda desigualdade acima segue de

$$H \left(\bigvee_{k=-p-n+1}^p f^k \mathfrak{A} \right) \leq H \left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{-p} f^k \mathfrak{A} \right) + H \left(\bigvee_{k=-p+1}^p f^k \mathfrak{A} \right)$$

e

$$N \left(\bigvee_{k=-n+1}^0 f^k \mathfrak{A} \right) = N \left(\bigvee_{k=-p-n+1}^{-p} f^k \mathfrak{A} \right) = 2^n.$$

Observe agora que

$$\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k} \mathfrak{A} = \left\{ \prod_{i < 0} X_i \times \{j_0\} \times \dots \times \{j_{n-1}\} \times \prod_{i > n-1} X_i; j_k = 0, 1 \text{ e } 0 \leq k \leq n-1 \right\}.$$

É fácil ver $N(\bigvee_{k=0}^{n-1} f^{-k}\mathfrak{A}) = 2^n$. Logo, $h_{top}(f, \mathfrak{A}) = \log 2$ e $h_{top}(f, \mathfrak{A}_p) = \log 2$. Portanto, sendo $(\mathfrak{A}_p)_p$ sequência de refinamento de coberturas, temos $h_{top}(f) = \log 2$.

Observação 2.25. Nas condições do exemplo acima se $X_i = \{0, 1, \dots, N - 1\}$, então $h_{top}(f) = \log N$. Ainda, se assumirmos X_i espaço de Hausdorff compacto contendo um número infinito de pontos, então $h_{top}(f) = \infty$.

ENTROPIA TOPOLÓGICA DE BOWEN

Neste capítulo apresentamos a entropia topológica conforme Bowen [3]. Anteriormente, a entropia topológica foi definida para uma aplicação contínua sobre um espaço topológico compacto. Aqui ela é definida para uma aplicação uniformemente contínua em um espaço métrico não necessariamente compacto. Um fato importante é que em certo sentido ambas as definições coincidem. Destacamos também a relevância desta nova definição, bem como o que se segue, como um passo importante para a construção dos resultados e generalizações posteriores.

3.1 Entropia Topológica de Bowen

3.1.1 Definições e Propriedades

A seguir definimos os conceitos de conjuntos (n, ϵ) -geradores e (n, ϵ) -separados. A partir destas noções é que se desenvolve nosso estudo. Salvo menção em contrário, X designa um espaço métrico com métrica d .

Definição 3.1. *Sejam (X, d) um espaço métrico e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação uniformemente contínua. Dados $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X definimos:*

- (i) *Um subconjunto F de K é chamado (n, ϵ) -gerador de K com respeito a f se para cada $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j < n$;*
- (ii) *Um subconjunto E de X é chamado (n, ϵ) -separado com respeito a f se para cada par (x, y) de elementos distintos em E existe $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ tal que $d(f^j(x), f^j(y)) > \epsilon$.*

De maneira alternativa, porém inteiramente análoga, podemos definir conjuntos geradores e separados de outra forma. Nas condições da definição acima, para cada $n \in \mathbb{N}$ defina a métrica $d_{n,f}$, equivalente a d , por

$$d_{n,f}(x, y) = \max_{0 \leq j < n} d(f^j(x), f^j(y)).$$

Então, para cada $n \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, dizemos que um subconjunto F de K é (n, ϵ) -gerador para K com respeito a f se, para cada $x \in K$, existe $y \in F$ tal que $d_{n,f}(x, y) \leq \epsilon$. Por sua vez, um subconjunto E de X é chamado (n, ϵ) -separado com respeito a f se, para cada par (x, y) de elementos distintos em E , tivermos $d_{n,f}(x, y) > \epsilon$.

Observação 3.2. Para cada subconjunto $E \subset K$ (n, ϵ) -separado existe um subconjunto (n, ϵ) -separado maximal em K contendo E . Para uma verificação, denote por \mathcal{S} a família formada por todos os conjuntos A (n, ϵ) -separados em K que contém E . Note que \mathcal{S} é não-vazio uma vez que $E \in \mathcal{S}$. Com a operação inclusão \subseteq , \mathcal{S} é um conjunto parcialmente ordenado. Temos então que qualquer subconjunto $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$ totalmente ordenado possui um limite superior. De fato, basta tomar $B = \bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. É claro que $B \in \mathcal{S}$ e, além disso, $A \subseteq B$ para todo $A \in \mathcal{C}$. Logo, B é um limite superior de \mathcal{C} e, pelo Lema de Zorn, \mathcal{S} possui um elemento maximal.

Fixados um conjunto compacto $K \subset X$, $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow X$ definimos

$$r_n(\epsilon, f, K) := \min \{ \#F; F \subset K, F \text{ é } (n, \epsilon)\text{-gerador para } K \};$$

$$s_n(\epsilon, f, K) := \max \{ \#E; E \subset K, E \text{ é } (n, \epsilon)\text{-separado para } K \}.$$

Agora, para medirmos a taxa de crescimento exponencial dessas quantidades, denotamos

$$r(\epsilon, f, K) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, f, K);$$

$$s(\epsilon, f, K) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, f, K).$$

Proposição 3.3. (a) $r_n(\epsilon, f, K) \leq s_n(\epsilon, f, K) \leq r_n(\epsilon/2, f, K) < \infty$. Logo, devemos ter $r(\epsilon, f, K) \leq s(\epsilon, f, K) \leq r(\epsilon/2, f, K)$;

(b) Se $\epsilon_1 > \epsilon_2$ então $r_n(\epsilon_1, f, K) \leq r_n(\epsilon_2, f, K)$ e $s_n(\epsilon_1, f, K) \leq s_n(\epsilon_2, f, K)$.

Demonstração: (a) Um subconjunto E de K (n, ϵ) -separado maximal também (n, ϵ) -gera K . De fato, suponha por absurdo que existe $x \in K$ tal que, para cada $y \in E$, existe $j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$ com $d(f^j x, f^j y) > \epsilon$. Logo, $E \cup \{x\}$ é um conjunto (n, ϵ) -separado em K , o que contradiz a maximalidade de E . Portanto, E (n, ϵ) -gera K e $r_n(\epsilon, f, K) \leq s_n(\epsilon, f, K)$.

Agora, sejam $E \subset K$ (n, ϵ) -separado e $F \subset K$ $(n, \epsilon/2)$ -gerador. Então, considere uma aplicação g que para cada $x \in K$ associa um $g(x) \in F$ de modo que $d(f^j x, f^j g(x)) \leq \epsilon/2$ para todo $0 \leq j < n$. Se $g(x) = g(y)$ então $d(f^j x, f^j y) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j < n$. Sendo E (n, ϵ) -separado, note que g é injetiva sobre E . Assim, $\#E \leq \#F$ e, em particular, $s_n(\epsilon, f, K) \leq r_n(\epsilon/2, f, K)$.

Como f é uma aplicação uniformemente contínua, existe $\delta > 0$ tal que $d(f^j x, f^j y) < \epsilon/2$ para todo $0 \leq j < n$ sempre que $d(x, y) < \delta$. Note então que o conjunto $\{B_\delta(y); y \in K\}$ é uma cobertura aberta de K , do qual obtemos a subcobertura finita $\{B_\delta(y_i); i = 1, \dots, k\}$. Logo, $\{y_1, \dots, y_k\}$ é um conjunto $(n, \epsilon/2)$ -gerador para K e $r_n(\epsilon/2, f, K) \leq k < \infty$.

(b) Basta ver que, sendo $\epsilon_1 > \epsilon_2$, um conjunto (n, ϵ_2) -gerador é (n, ϵ_1) -gerador para K e um conjunto (n, ϵ_1) -separado é (n, ϵ_2) -separado em K . \square

Definição 3.4. *Sejam $f : X \rightarrow X$ uma aplicação uniformemente contínua do espaço métrico (X, d) e $K \subset X$ compacto. Definimos a entropia topológica de f com relação ao compacto K por*

$$h_d(f, K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r(\epsilon, f, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(\epsilon, f, K).$$

Então, a entropia topológica da aplicação f é definida por

$$h_d(f) := \sup \{h_d(f, K); K \subset X, K \text{ compacto}\}.$$

Note que pela proposição 3.3 (a) os limites da definição acima existem (podendo ser infinitos) e são iguais.

Observação 3.5. Dizemos que duas métricas d e d' sobre X são uniformemente equivalentes se as aplicações identidade $id_X : (X, d) \rightarrow (X, d')$ e $id_X : (X, d') \rightarrow (X, d)$ são uniformemente contínuas. Neste caso, a aplicação $f : (X, d) \rightarrow (X, d)$ é uniformemente contínua se, e

somente se, $f : (X, d') \rightarrow (X, d')$ é uniformemente contínua. Na definição acima expressamos a dependência da métrica d . Mas se d e d' são métricas uniformemente equivalentes em X , temos $h_d(f) = h_{d'}(f)$. Observamos também que se existem compactos $K_i \subset X$, $i = 1, \dots, m$, com $K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$, então

$$h_d(f, K) \leq \max_{i=1, \dots, m} h_d(f, K_i).$$

Além disso, para $K_1 \subset K_2$ é fácil ver que $h_d(f, K_1) \leq h_d(f, K_2)$. Em particular, se X é compacto, temos $h_d(f) = h_d(f, X)$. Ainda para X compacto, podemos encontrar $K \subset X$, com diâmetro arbitrariamente pequeno, de modo que $h_d(f) = h_d(f, K)$. A verificação de alguns destes resultados é feita de modo mais geral no próximo capítulo.

Proposição 3.6. *Sejam (X, d) , (Y, σ) espaços métricos compactos e $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$ aplicações contínuas. Suponha que exista uma aplicação contínua e sobrejetiva $S : Y \rightarrow X$ tal que $S \circ g = f \circ S$. Então, $h_d(f) \leq h_\sigma(g)$.*

Demonstração: Como Y é compacto, S é uniformemente contínua. Então, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $y_1, y_2 \in Y$ e $\sigma(y_1, y_2) < \delta$, temos $d(S(y_1), S(y_2)) < \epsilon$. Seja F um conjunto $(n, \delta/2)$ -gerador para Y com respeito a g . Logo, dado $y \in Y$ existe $x \in F$ tal que $\sigma(g^j x, g^j y) \leq \delta/2 < \delta$, $0 \leq j < n$. Com isso, $d(f^j(Sx), f^j(Sy)) = d(S(g^j x), S(g^j y)) < \epsilon$, $0 \leq j < n$. Então, sendo S sobrejetiva, $S(F)$ é um conjunto (n, ϵ) -gerador para X com relação a f . Dessa forma, a todo conjunto $(n, \delta/2)$ -gerador em Y com respeito a g podemos associar um conjunto (n, ϵ) -gerador em X com respeito a f . Assim, $r_n(\epsilon, f, X) \leq r_n(\delta/2, g, Y)$ e, portanto, $h_d(f) \leq h_\sigma(g)$. \square

A proposição acima fornece uma maneira de comparar a entropia de aplicações contínuas f e g entre espaços métricos compactos, caso exista uma aplicação S nas condições dadas. Dizemos então que S é uma semiconjugação entre as aplicações f e g .

Proposição 3.7. (a) $h_d(f^m) = mh_d(f)$ para qualquer aplicação uniformemente contínua f de (X, d) e $m > 0$;

(b) *Sejam f_1, f_2 aplicações uniformemente contínuas de (X_1, d_1) e (X_2, d_2) , respectivamente. Defina a métrica $d_{1,2}((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \max\{d_1(x_1, y_1), d_2(x_2, y_2)\}$ em $X_1 \times X_2$. Então, $h_d(f_1 \times f_2) \leq h_{d_1}(f_1) + h_{d_2}(f_2)$.*

Demonstração: **(a)** Seja K um subconjunto compacto em X . Utilizando a definição de conjuntos geradores vemos que $r_n(\epsilon, f^m, K) \leq r_{mn}(\epsilon, f, K)$, donde obtemos $h_d(f^m) \leq mh_d(f)$. Como f é uniformemente contínua, dados $x, y \in X$ e $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $d(f^j x, f^j y) < \epsilon$ para todo $0 \leq j < m$. Note então que conjuntos (n, δ) -geradores para K com respeito a f^m são necessariamente conjuntos (mn, ϵ) -geradores para K com respeito a f . Assim, $r_{mn}(\epsilon, f, K) \leq r_n(\delta, f^m, K)$ e, portanto, $mh_d(f) \leq h_d(f^m)$.

(b) Seja $K_i, i = 1, 2$, subconjunto compacto de X_i . Se E_i é um conjunto (n, ϵ) -gerador para K_i , então $E_1 \times E_2$ é um conjunto (n, ϵ) -gerador para o compacto $K_1 \times K_2$ em $X_1 \times X_2$. Logo, obtemos

$$r_n(\epsilon, f_1 \times f_2, K_1 \times K_2) \leq r_n(\epsilon, f_1, K_1) \cdot r_n(\epsilon, f_2, K_2)$$

e, portanto, $h_d(f_1 \times f_2) \leq h_{d_1}(f_1) + h_{d_2}(f_2)$. \square

3.1.2 Equivalência das Definições de Entropia Topológica

Bowen [3] apresenta um resultado, cuja demonstração é devido a Goodwyn [8], em que compara a entropia métrica h_μ da definição 1.16 com a entropia topológica h_d da definição 3.4. Mais precisamente, temos o teorema abaixo.

Teorema 3.8. *Sejam (X, d) um espaço métrico compacto, $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e μ uma medida de Borel f -invariante sobre X com $\mu(X) = 1$. Então, temos $h_\mu(f) \leq h_d(f)$.*

O que faremos agora é comparar a entropia topológica h_{top} da definição 2.8 com entropia topológica h_d . Sejam então (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua e, portanto, uniformemente contínua. Mostraremos que, nestas condições, temos $h_d(f) = h_{top}(f)$. Para tanto, antes apresentamos um resultado técnico.

Lema 3.9. (a) *Se \mathfrak{A} é uma cobertura aberta com número de Lebesgue δ então*

$$N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A} \right) \leq r_n(\delta/2, f, X) \leq s_n(\delta/2, f, X);$$

(b) Seja \mathfrak{B} cobertura aberta de X . Se $\epsilon > 0$ e $\text{diam}(\mathfrak{B}) \leq \epsilon$ então

$$r_n(\epsilon, f, X) \leq s_n(\epsilon, f, X) \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{B} \right).$$

Demonstração: (a) A segunda desigualdade segue pela proposição 3.3 (a). Seja então $F \subset X$ um subconjunto $(n, \delta/2)$ -gerador para X com cardinalidade $r_n(\delta/2, f, X)$. Afirmamos que

$$X = \bigcup_{x \in F} \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j} (\text{cl}(B(f^j x, \delta/2))).$$

De fato, dado $y \in X$ existe $x \in F$ tal que $d(f^j x, f^j y) \leq \delta/2$ para todo $0 \leq j < n$. Logo, $f^j y \in \text{cl}(B(f^j x, \delta/2))$ donde vem que $y \in f^{-j} (\text{cl}(B(f^j x, \delta/2)))$ para todo $0 \leq j < n$.

Agora, para cada j fixado, temos que o conjunto $\text{cl}(B(f^j x, \delta/2))$ está contido em algum elemento de \mathfrak{A} , pois $\text{diam}(\text{cl}(B(f^j x, \delta/2))) \leq \delta$. Logo, $C_x = \bigcap_{j=0}^{n-1} f^{-j} (\text{cl}(B(f^j x, \delta/2)))$ está contido em algum elemento da cobertura $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A}$. Então, para cada C_x escolha um $A_x \in \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A}$ tal que $C_x \subset A_x$. Como $X = \bigcup_{x \in F} C_x$, note que $\{A_x\}_{x \in F}$ é uma subcobertura de $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A}$ não necessariamente minimal. Assim,

$$N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A} \right) \leq \#F = r_n(\delta/2, f, X).$$

(b) Seja E um subconjunto (n, ϵ) -separado para X de cardinalidade $s_n(\epsilon, f, X)$. Afirmamos que nenhum elemento da cobertura $\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{B}$ pode conter dois elementos de E . De fato, considere $\mathfrak{B} = \{B_1, \dots, B_n\}$, então dado $B \in \bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{B}$ podemos ver

$$B = B_{k_0} \cap f^{-1} B_{k_1} \cap \dots \cap f^{-n+1} B_{k_{n-1}},$$

no qual $1 \leq k_j \leq n$. Agora, dados $x \neq y$ em E temos $d(f^j x, f^j y) > \epsilon$ para algum $0 \leq j < n$. Logo, se supormos $x, y \in B$ teremos $d(f^j x, f^j y) \leq \text{diam}(B_{k_j}) \leq \text{diam}(\mathfrak{B}) \leq \epsilon$ para todo $0 \leq j < n$, o que é uma contradição. Deste modo, temos

$$s_n(\epsilon, f, X) \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{B} \right).$$

□

Teorema 3.10. *Seja (X, d) um espaço métrico compacto e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação contínua. Então, $h_d(f) = h_{\text{top}}(f)$.*

Demonstração: Sejam $\mathfrak{A}_{2\epsilon}$ uma cobertura formada por bolas abertas de raio $2\epsilon > 0$ e $\mathfrak{B}_{\epsilon/2}$ uma cobertura aberta formada por bolas de raio $\epsilon/2 > 0$. Observe que dado U subconjunto de X tal que $\text{diam}(U) < 2\epsilon$, fixado $x \in U$ temos $U \subset B(x, 2\epsilon) \in \mathfrak{A}_{2\epsilon}$, ou seja, $2\epsilon > 0$ é um número de Lebesgue da cobertura $\mathfrak{A}_{2\epsilon}$. Por outro lado, se $B \in \mathfrak{B}_{\epsilon/2}$ temos $\text{diam}(B) < \epsilon$ e, portanto, $\text{diam}(\mathfrak{B}_{\epsilon/2}) \leq \epsilon$. Então, pelo lema anterior

$$N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{A}_{2\epsilon} \right) \leq r_n(\epsilon, f, X) \leq s_n(\epsilon, f, X) \leq N \left(\bigvee_{j=0}^{n-1} f^{-j} \mathfrak{B}_{\epsilon/2} \right).$$

Logo, devemos ter

$$h_{top}(f, \mathfrak{A}_{2\epsilon}) \leq r(\epsilon, f, X) \leq s(\epsilon, f, X) \leq h_{top}(f, \mathfrak{B}_{\epsilon/2}). \quad (3.1)$$

Fixando-se $n \in \mathbb{N}$ e tomando-se $\epsilon = 1/n$ é fácil ver que $(\mathfrak{A}_{2/n})_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\mathfrak{B}_{1/2n})_{n \in \mathbb{N}}$ são seqüências de refinamento de coberturas. Dessa forma,

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(f, \mathfrak{A}_{2/n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{top}(f, \mathfrak{A}_{2\epsilon}),$$

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_{top}(f, \mathfrak{B}_{1/2n}) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} h_{top}(f, \mathfrak{B}_{\epsilon/2}).$$

Assim, por (3.1) temos $h_{top}(f) = h_d(f, X)$. Mas, sendo X compacto, sabemos também que $h_d(f) = h_d(f, X)$. Portanto, $h_{top}(f) = h_d(f)$. \square

3.2 Medidas Homogêneas e Alguns Exemplos

3.2.1 Medidas Homogêneas

Considere X um espaço métrico com métrica d e $f : X \rightarrow X$ uma aplicação uniformemente contínua. Nestas condições denote

$$D_n(x, \epsilon, f) = \bigcap_{k=0}^{n-1} f^{-k} B_\epsilon(f^k(x)),$$

no qual $B_\epsilon(y) = \{z \in X; d(z, y) < \epsilon\}$. É claro que $D_n(x, \epsilon, f)$ é aberto em X .

Definição 3.11. *Uma medida de Borel μ em X será chamada f -homogênea se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $\mu(K) < \infty$ para qualquer compacto $K \subset X$ e existe um compacto $K \subset X$ com $\mu(K) > 0$;
- (ii) Para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\mu(D_n(y, \delta, f)) \leq c\mu(D_n(x, \epsilon, f))$$

para todo $n \geq 0$ e todo $x, y \in X$.

Ainda para uma medida μ f -homogênea sobre X e $x \in X$ arbitrário, definimos

$$k(\mu, f) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_n(x, \epsilon, f)).$$

Note que o limite acima está bem definido. De fato, por (ii) vemos esta definição não depende do x escolhido. Além disso, temos $\mu(D_n(x, \epsilon, f)) > 0$ para qualquer $x \in X$. Para uma verificação, seja K compacto com $\mu(K) > 0$. Então, existem x_1, x_2, \dots, x_n tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^n D_n(x_i, \delta, f)$, no qual δ é o correspondente a $\epsilon > 0$ conforme (ii). É claro que existe $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ com $\mu(D_n(x_j, \delta, f)) > 0$. Logo, também pelo item (ii), existe $c > 0$ tal que $0 < \mu(D_n(x_j, \delta, f)) \leq c\mu(D_n(x, \epsilon, f))$.

Para uma aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow X$, a proposição abaixo mostra que uma medida f -homogênea μ em X pode ser utilizada para calcular a entropia topológica de f . Sua demonstração é omitida, mas pode ser vista de modo mais geral na proposição 4.33.

Proposição 3.12. *Sejam (X, d) um espaço métrico, $f : X \rightarrow X$ uma aplicação uniformemente contínua e μ uma medida f -homogênea em X . Então, $h_d(f) = k(\mu, f)$.*

A seguir apresentamos um exemplo de uma medida f -homogênea.

Exemplo 3.13. Seja $X = G$ um grupo compacto com uma métrica invariante à direita d e uma medida de Haar invariante à direita μ . Para $g \in G$ definimos a aplicação $R_g : G \rightarrow G$ dada por $R_g(x) = xg$. Então, considere a aplicação $f : G \rightarrow G$ dada por $f(x) = (R_g \circ A)(x)$, no qual $g \in G$ e A é um endomorfismo contínuo e sobrejetivo de G . Note que f é uma aplicação uniformemente contínua e f pode representar, por exemplo, um endomorfismo ($g = e$) ou uma translação à esquerda ($A(x) = gxg^{-1}$). Afirmamos que μ f -homogênea e $k(\mu, f) = k(\mu, A)$. Um caso particular surge quando consideramos G grupo localmente compacto e assumimos f uniformemente contínua.

De fato, mostraremos primeiro que $D_n(x, \epsilon, f) = D_n(e, \epsilon, A)x$ para todo $n \geq 0$ e $x \in G$. Para tanto, basta provar que $f^{-k}B_\epsilon(f^k(x)) = (A^{-k}B_\epsilon(e))x$ para todo $0 \leq k < n$. Por indução, para $k = 0$ é óbvio e

$$\begin{aligned} f^{-(k+1)}B_\epsilon(f^{k+1}(x)) &= f^{-1}f^{-k}B_\epsilon(f^k(f(x))) = f^{-1}[(A^{-k}B_\epsilon(e))f(x)] \\ &= A^{-1} \circ R_g^{-1}[(A^{-k}B_\epsilon(e))A(x)g] = A^{-1}[(A^{-k}B_\epsilon(e))A(x)] \\ &= (A^{-(k+1)}B_\epsilon(e))x, \end{aligned}$$

no qual a última igualdade segue do fato de $A^{-1}(CA(x)) = A^{-1}(C)x$ para qualquer $C \subset G$. Agora, desde que μ é uma medida de Haar temos $\mu(K) < \infty$ para qualquer compacto $K \subset X$. Além disso, existe U aberto em G tal que $0 < \mu(U) = \sup \{\mu(K) ; K \subset U \text{ e } K \text{ compacto}\}$. Logo, deve existir K de modo que $\mu(K) > 0$. Por fim, note que dados $y, x \in G$ temos

$$\mu(D_n(y, \epsilon, f)) = \mu(D_n(e, \epsilon, A)y) = \mu(D_n(e, \epsilon, A)yy^{-1}x) = \mu(D_n(e, \epsilon, A)x) = \mu(D_n(x, \epsilon, f))$$

para todo $n \geq 0$. Portanto, μ é uma medida f -homogênea. Além disso, também temos $\mu(D_n(x, \epsilon, f)) = \mu(D_n(e, \epsilon, A))$ e, assim, $k(\mu, f) = k(\mu, A)$.

3.2.2 Alguns Exemplos

Em uma variedade Riemanniana M , podemos calcular o comprimento de uma curva diferenciável por partes. A distância entre dois pontos p e q é então definida como o infimo dos comprimentos das curvas diferenciáveis por partes que ligam p a q . Mais precisamente, para M variedade Riemanniana conexa, definimos uma métrica d determinada pela métrica Riemanniana, isto é,

$$d(p, q) = \inf \{ \ell(\gamma) ; \gamma \text{ é diferenciável por partes e liga } p \text{ a } q \},$$

onde $\ell(\gamma)$ representa o comprimento de γ dado por

$$\ell(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt.$$

Nem sempre é possível encontrar uma curva ligando p a q cujo comprimento é igual à distância entre p e q , mas quando isso ocorre, ela é uma geodésica, que é chamada de

geodésica minimizante. Neste sentido, dizemos que um subconjunto não-vazio S de uma variedade Riemanniana M é fortemente convexo se para quaisquer dois pontos p e q em $cl(S)$ existe uma única geodésica minimizante $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$, $\gamma(1) = q$ e $\gamma((0, 1)) \subset S$. Para maiores detalhes, recomendamos [5].

Os próximos dois resultados indicam que localmente as variedades Riemannianas se comportam de maneira análoga ao espaço euclidiano em termos de geodésicas minimizantes. Eles serão úteis na demonstração da proposição 3.16, com a qual obtém-se um limite superior para a entropia de uma aplicação diferenciável entre variedades Riemannianas.

Lema 3.14. *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas conexas. Considere U aberto em M_1 , $S \subset U$ subconjunto fortemente convexo e uma aplicação diferenciável $f : U \subset M_1 \rightarrow M_2$. Então, se d_i , $i = 1, 2$, denota a métrica em M_i determinada pela métrica Riemanniana, temos $d_2(f(p), f(q)) \leq Ld_1(p, q)$ para cada $p, q \in S$, no qual*

$$L = \sup_{x \in S} \|df_x\|.$$

Demonstração: Se $L = \infty$ não há nada a provar. Suponha então $L < \infty$ e considere $p, q \in S$. Sendo S fortemente convexo, existe uma única geodésica minimizante $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M_1$ ligando p a q com $\gamma_1([0, 1]) \subset S$. Agora, note que $\gamma_2 = f \circ \gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M_2$ é uma curva diferenciável que liga $f(p)$ a $f(q)$ em M_2 . Logo, temos

$$\|\gamma_2'(t)\| = \|df_{\gamma_1(t)}(\gamma_1'(t))\| \leq \|df_{\gamma_1(t)}\| \|\gamma_1'(t)\| \leq L \|\gamma_1'(t)\|.$$

Dessa forma,

$$\ell(\gamma_2) = \int_0^1 \|\gamma_2'(t)\| dt \leq \int_0^1 L \|\gamma_1'(t)\| dt = L\ell(\gamma_1).$$

Com isso, concluímos que $d_2(f(p), f(q)) \leq Ld_1(p, q)$. □

Lema 3.15. *Sejam M_1 e M_2 variedades Riemannianas e $f : M_1 \rightarrow M_2$ uma aplicação diferenciável. Dados $p, q \in M_1$ considere $\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow M$ curva diferenciável por partes ligando p a q . Denote $\gamma_2 = f \circ \gamma_1$. Então, $\ell(\gamma_2) \leq a\ell(\gamma_1)$, onde $a = \sup_{x \in M_1} \|df_x\|$.*

Demonstração: Esta demonstração segue de modo análogo à anterior. □

Proposição 3.16. *Sejam M uma variedade Riemanniana de dimensão m e $f : M \rightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Então, se d denota a métrica em M determinada pela métrica Riemanniana, temos*

$$h_a(f) \leq \max \left\{ 0, m \log \sup_{x \in M} \|df_x\| \right\}.$$

Demonstração: Denote por \bar{d} a métrica em \mathbb{R}^m e $a = \sup_{x \in M} \|df_x\|$. Se $a = \infty$ não há nada a provar. Suponha que $a < \infty$ e tome um subconjunto compacto $K \subset M$. Considere agora as aplicações diferenciáveis $f_1, \dots, f_r : B_3(0) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ tais que $\bigcup_{1 \leq i \leq r} f_i(B_1(0))$ é uma cobertura de K . Note então que $B_2(0)$ é um conjunto fortemente convexo em \mathbb{R}^m . Logo, conforme lema 3.14, para cada f_i podemos encontrar uma constante L_i ($L_i < \infty$) tal que

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq L_i \bar{d}(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in B_2(0).$$

Tome então $A = \max_{i=1, \dots, r} L_i$. Dessa forma, obtemos

$$d(f_i(x), f_i(y)) \leq A \bar{d}(x, y) \quad \text{para todo } x, y \in B_2(0) \quad \text{e todo } i = 1, \dots, r.$$

Observe que pelo lema 3.15, se $a \leq 1$ então f não expande distâncias. Neste caso, um conjunto $(1, \epsilon)$ -gerador para K é um conjunto (n, ϵ) -gerador. De fato, se F é um conjunto $(1, \epsilon)$ -gerador para K , dado $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d(f(x), f(y)) \leq \epsilon$. Como f não expande distância temos

$$d(f^n(x), f^n(y)) \leq a^{n-1} d(f(x), f(y)) \leq \epsilon,$$

donde concluímos que F é (n, ϵ) -gerador para K . Dessa forma, $r_n(\epsilon, f, K) = r_1(\epsilon, f, K)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $r(\epsilon, f, K) = 0$. Portanto, $h_a(f) = 0$.

Assuma então que $1 < a < \infty$. Para cada $0 < \delta \leq 1$ denote

$$E(\delta) = \{(r_1 \delta, \dots, r_m \delta) \in \mathbb{R}^m; r_i \in \mathbb{Z}, |r_i \delta| < 2\}.$$

Logo, podemos ver que $\#E(\delta) \leq (5/\delta)^m$ e existe uma constante $B > 0$ (que depende da métrica usada em \mathbb{R}^m) tal que para cada $y \in B_1(0)$ existe $x \in E(\delta)$ com $\bar{d}(x, y) \leq B\delta$. Afirmamos então que $F(\delta) = \bigcup_{1 \leq i \leq r} f_i E(\delta)$ é um conjunto $(n, a^n AB\delta)$ -gerador para K com relação a f . De fato, tome $x = f_i(y) \in K$. Para este y em $B_1(0)$ existe $z \in E(\delta)$ tal que $\bar{d}(y, z) \leq B\delta$. Logo, obtemos

$$d(f^n(x), f^n(f_i(z))) \leq a^n d(x, f_i(z)) = a^n d(f_i(y), f_i(z)) \leq a^n A \bar{d}(y, z) \leq a^n AB\delta,$$

donde concluimos o desejado. Além disso, temos $\#F(\delta) \leq (5/\delta)^m r$. Portanto, fazendo-se $\delta = \epsilon/a^n AB$ obtemos

$$r_n(\epsilon, f, K) \leq \#F(\delta) \leq (5/\delta)^m r = (5a^n AB/\epsilon)^m r = [(5AB/\epsilon)^m r] a^{nm}.$$

Logo,

$$r(\epsilon, f, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log [(5AB/\epsilon)^m r] a^{nm} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{mn}{n} \log a \leq m \log a.$$

Com isso, concluimos que $h_d(f) \leq m \log a$. \square

Corolário 3.17. *Sejam M variedade Riemanniana compacta de dimensão m , $f : M \rightarrow M$ aplicação diferenciável e μ medida de Borel f -invariante com $\mu(M) = 1$. Então,*

$$h_\mu(f) \leq \max \left\{ 0, m \log \sup_{x \in M} \|df_x\| \right\}.$$

Demonstração: Segue pelo teorema 3.8 e pela proposição 3.16. \square

Antes de enunciarmos o próximo resultado, considere \mathbb{R}^m enquanto espaço vetorial real e $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ uma aplicação linear. Sabemos que \mathbb{C}^m é um espaço vetorial sobre os complexos, dito também o complexificado de \mathbb{R}^m . Denote então por $\tilde{f} : \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ o complexificado da aplicação f , isto é, $\tilde{f}(x + iy) = f(x) + if(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$. Não é difícil ver que, em relação à base canônica de \mathbb{R}^m , f e \tilde{f} possuem a mesma representação matricial.

Seja $\|\cdot\|_{\mathbb{C}^m}$ norma em \mathbb{C}^m , na qual $\|x + iy\|_{\mathbb{C}^m}$ é dada pela soma dos quadrados dos módulos das coordenadas de $x + iy$. Logo, podemos ver que $\|x + iy\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, onde $\|\cdot\|$ representa a norma usual em \mathbb{R}^m . Mostraremos que a norma de \tilde{f} é igual a norma de f , isto é, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$, sendo que

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^m; \quad (3.2)$$

$$\|\tilde{f}\| = \sup_{\|x+iy\|_{\mathbb{C}^m}=1} \|\tilde{f}(x+iy)\|_{\mathbb{C}^m}, \quad x, y \in \mathbb{R}^m. \quad (3.3)$$

Com efeito, observe primeiro que

$$\|\tilde{f}\|^2 = \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} \|f(x) + if(y)\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} (\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2).$$

Dessa forma, temos

$$\|\tilde{f}\|^2 = \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} (\|f(x)\|^2 + \|f(y)\|^2) \geq \sup_{\|x\|^2 = 1} \|f(x)\|^2 = \|f\|^2.$$

Por outro lado, se supormos $y = 0$ ou $x = 0$, temos

$$\sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} \|f(x) + if(y)\|_{\mathbb{C}^m}^2 = \|f\|^2.$$

Além disso, se supormos x e y não nulos, obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} \|f(x) + if(y)\|_{\mathbb{C}^m}^2 &= \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} \left(\|x\|^2 \cdot \left\| f\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\|^2 + \|y\|^2 \cdot \left\| f\left(\frac{y}{\|y\|}\right) \right\|^2 \right) \\ &\leq \sup_{\|x\|^2 + \|y\|^2 = 1} (\|x\|^2 + \|y\|^2) \cdot \|f\|^2 = \|f\|^2, \end{aligned}$$

donde concluímos o desejado.

O conjunto formado por todas as aplicação lineares em \mathbb{C}^m , com relação a norma (3.3), satisfaz as condições do que denomina-se uma álgebra de Banach (veja [14], p. 48). A partir disso, nesta álgebra de Banach, verifica-se em particular que

$$\|\tilde{f}^n\|^{1/n} \rightarrow |\lambda|,$$

no qual λ representa o autovalor de \tilde{f} com o maior valor absoluto ([14], p. 75). Desde que as normas de \tilde{f} e f são iguais, o mesmo ocorre para f , isto é,

$$\|f^n\|^{1/n} \rightarrow |\lambda|,$$

no qual λ representa o autovalor (real ou complexo) de f com o maior valor absoluto.

Corolário 3.18. *Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então $h_d(f) \leq \max\{0, m \log |\lambda|\}$, onde λ é um autovalor (real ou complexo) de f com o maior valor absoluto.*

Demonstração: Pelas proposições 3.7 (a) e 3.16 temos

$$\begin{aligned} h_d(f) &= \frac{1}{n} h_d(f^n) \leq \frac{1}{n} \max \left\{ 0, m \log \sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|df_x^n\| \right\} \\ &= \frac{1}{n} \max \{ 0, m \log \|f^n\| \} \leq \max \{ 0, m \log \|f^n\|^{1/n} \}. \end{aligned}$$

Mas, conforme vimos, $\|f^n\|^{1/n} \rightarrow |\lambda|$ quando $n \rightarrow \infty$, donde segue o desejado. \square

Teorema 3.19. *Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma aplicação linear, então*

$$h_d(f) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|,$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores de f .

Demonstração: Em álgebra linear, pelo teorema da decomposição primária, podemos escrever $f = f_1 \times \dots \times f_s$ e $\mathbb{R}^m = E_1 \times \dots \times E_s$, nos quais cada E_j é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^m com $f(E_j) \subset E_j$, $f_j = f|_{E_j}$ e todos os autovalores de f_j tem o mesmo valor absoluto α_j . Pelo corolário 3.18, temos $h_d(f_j) \leq \max\{0, \dim E_j \log \alpha_j\}$. Então, pela proposição 3.7 (b), obtemos

$$h_d(f) \leq \sum_{j=1}^s h_d(f_j) \leq \sum_{\alpha_j > 1} \dim E_j \cdot \log \alpha_j = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|.$$

Para mostrarmos a outra desigualdade, considere o subespaço vetorial V de \mathbb{R}^m formado pelo produto cartesiano dos espaços E_j que possuem $\alpha_j > 1$. É claro que $h_d(f) \geq h_d(f|_V)$. Considere também μ medida de Lebesgue sobre V . Conforme exemplo 3.13 temos que μ é uma medida $f|_V$ -homogênea. Então, pela proposição 3.12, obtemos $h_d(f|_V) = k(\mu, f|_V)$. Além disso, como $D_n(0, \epsilon, f|_V) \subset (f|_V)^{-n+1} B_\epsilon(0, V)$, no qual $B_\epsilon(0, V) = B_\epsilon(0) \cap V$, temos

$$\begin{aligned} \mu(D_n(0, \epsilon, f|_V)) &\leq \mu((f|_V)^{-n+1} B_\epsilon(0, V)) = \mu(B_\epsilon(0, V)) \cdot |\det(f|_V)^{-n+1}| \\ &= \mu(B_\epsilon(0, V)) \cdot |\det(f|_V)|^{-n+1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, vemos que

$$\begin{aligned} k(\mu, f|_V) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_n(0, \epsilon, f|_V)) \\ &\geq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log(\mu(B_\epsilon(0, V)) \cdot |\det(f|_V)|^{-n+1}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(B_\epsilon(0, V)) + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log |\det(f|_V)|^{-n+1} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n} \log |\det(f|_V)| = \log |\det(f|_V)|. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos ver $|\det(f|_V)| = \prod_{\alpha_j > 1} |\det(f_j)| = \prod_{\alpha_j > 1} \alpha_j^{\dim E_j}$. Assim,

$$\log |\det(f|_V)| = \sum_{\alpha_j > 1} \log(\alpha_j^{\dim E_j}) = \sum_{\alpha_j > 1} \dim E_j \log \alpha_j.$$

Dessa forma,

$$h_d(f) \geq h_d(f|V) = k(\mu, f) \geq \log |\det(f|V)| = \sum_{\alpha_j > 1} \dim E_j \log \alpha_j = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|.$$

□

De maneira mais geral temos a seguinte proposição. A demonstração é omitida, mas pode ser vista em [3].

Proposição 3.20. *Se A é um endomorfismo de um grupo de Lie G e d é uma métrica invariante à direita, então*

$$h_d(A) = \sum_{|\lambda_i| > 1} \log |\lambda_i|$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ são autovalores de dA_e .

Exemplo 3.21. Seja X o toro bidimensional, isto é, $X = \mathbb{R}^2/\sim$, no qual \sim é a relação de equivalência que identifica dois pontos no plano se suas coordenadas correspondentes diferem por inteiros. Uma métrica em X pode ser definida em termos de uma métrica sobre \mathbb{R}^2 tomando-se a distância entre dois pontos de X como a mínima distância entre quaisquer representantes destes pontos em \mathbb{R}^2 . Seja a aplicação $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\varphi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$ onde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ é uma matriz unimodular, ou seja, uma matriz de inteiros com determinante ± 1 . Seja também $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2/\sim$ a aplicação projeção e considere $\psi : \mathbb{R}^2/\sim \rightarrow \mathbb{R}^2/\sim$ dada por $\psi\pi = \pi\varphi$. Suponha que M tem dois autovetores linearmente independentes v, w , associados aos autovalores λ, μ no qual $|\lambda| \geq 1$. Então, $h(\psi) = \log |\lambda|$.

ENTROPIA TOPOLÓGICA DE AÇÕES DE GRUPOS E SEMIGRUPOS

Inicialmente introduzida por Hofmann e Stojanov [10] em 1995, a noção de entropia topológica aqui apresentada refere-se a uma ação uniforme de um semigrupo (ou grupo) localmente compacto sobre um espaço métrico. Um aspecto importante é que esta nova definição é consistente com a definição de Bowen [3] e, por conseguinte, com a definição de Adler *et al* [1], vistas nos capítulos anteriores. Na verdade, temos que a entropia topológica de uma ação se apresenta como uma generalização da entropia topológica de uma aplicação. No que segue apresentamos algumas de suas propriedades básicas.

4.1 Entropia de Ações Uniformes

No decorrer deste capítulo, salvo menção em contrário, G sempre denota um semigrupo localmente compacto com identidade e e X um espaço métrico com métrica d . As considerações mais importantes, contudo, são dadas para G grupo topológico localmente compacto.

Salientamos que aqui o termo vizinhança não necessariamente nos remete a um conjunto aberto e, quando houver necessidade disso, escrevemos vizinhança aberta. Além disso, \mathbb{R}^+ e \mathbb{Z}^+ são vistos enquanto os semigrupos aditivos do conjunto dos números reais não-negativos e do conjunto dos números inteiros não-negativos, respectivamente. Denotamos também $\mathbb{R}_*^+ = \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$, isto é, \mathbb{R}_*^+ representa o grupo multiplicativo dos números reais positivos. Lembramos ainda que um espaço topológico é chamado σ -compacto se pode ser escrito como união enumerável de subconjuntos compactos.

4.1.1 Sistemas Regulares e Entropia de Ações Uniformes

Definição 4.1. *Um sistema regular em G é uma sequência infinita $\alpha = (N_1, N_2, \dots, N_n, \dots)$ de subconjuntos compactos de G contendo a identidade tais que*

(i) $N_i \cdot N_j \subset N_{i+j}$ para todos os números naturais i, j .

Se α ainda satisfaz a condição

(ii) $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(N_i) = G$

dizemos que α é um sistema fortemente regular em G .

Lembramos que $\text{int}(N)$ denota o interior do subconjunto N de G . Note que a condição (i) acima implica $N_i \subset N_{i+1}$ para qualquer i .

Observação 4.2. Um semigrupo que possui um sistema fortemente regular é obviamente σ -compacto. Por outro lado, qualquer semigrupo σ -compacto localmente compacto admite um sistema fortemente regular.

Para verificar a última afirmação, escreva $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ onde C_i é um subconjunto compacto de G e $e \in C_1$. Além disso, dado $x \in C_i$ tome V_x vizinhança aberta localmente compacta de x (isto é, existe um compacto contendo V_x). Considere então $\bigcup_{j=1}^{n_i} V_{x_j}$ cobrindo C_i e seja $\tilde{C}_i = \bigcup_{j=1}^{n_i} \text{cl}(V_{x_j})$. Desde que V_{x_j} é uma vizinhança localmente compacta, temos que $\text{cl}(V_{x_j})$ é compacto e, assim, \tilde{C}_i é compacto. É fácil ver que $\bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(\tilde{C}_i) = G$. Agora, denotamos

$$\begin{aligned} N_1 &= \tilde{C}_1; \\ N_2 &= \tilde{C}_1 \cup \tilde{C}_2 \cup \tilde{C}_1 \tilde{C}_1; \\ N_3 &= \left(\bigcup_{i \leq 3} \tilde{C}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i_1+i_2 \leq 3} \tilde{C}_{i_1} \tilde{C}_{i_2} \right) \cup \left(\bigcup_{i_1+i_2+i_3 \leq 3} \tilde{C}_{i_1} \tilde{C}_{i_2} \tilde{C}_{i_3} \right); \\ &\vdots \\ N_n &= \left(\bigcup_{i \leq n} \tilde{C}_i \right) \cup \left(\bigcup_{i_1+i_2 \leq n} \tilde{C}_{i_1} \tilde{C}_{i_2} \right) \cup \dots \cup \left(\bigcup_{i_1+i_2+\dots+i_n \leq n} \tilde{C}_{i_1} \tilde{C}_{i_2} \dots \tilde{C}_{i_n} \right). \end{aligned}$$

Por construção, $N_i \cdot N_j \subset N_{i+j}$ e cada N_i , sendo união finita de compactos, é compacto. É claro que $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(N_i)$. Portanto, $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ é um sistema regular em G .

Exemplo 4.3. Seja U uma vizinhança compacta arbitrária de e em G . Então, não é difícil ver que $\alpha_U = (U, U^2, \dots, U^n, \dots)$ é um sistema regular em G . Agora, se G é um grupo localmente compacto conexo, então α_U é um sistema fortemente regular.

Para uma verificação, considere $S = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$. Como $e \in \text{int}(U)$ temos que S contém e em seu interior. Além disso, S é um subsemigrupo de G pois S é subconjunto de G e, pela regularidade de α_U , temos $S \cdot S \subset S$. É fácil ver então que $S \cap S^{-1}$ é um subgrupo de G que contém e em seu interior. Assim, como todo subgrupo de um grupo que tem interior não-vazio é aberto, segue que $S \cap S^{-1}$ é aberto. Mas todo subgrupo aberto de um grupo também é fechado. Logo, da conexidade de G , devemos ter $S \cap S^{-1} = G$ ou, ainda, $S = G$. Portanto, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} U^i$. Contudo, desde que $U^i \cdot U \subset U^{i+1}$, dado $x \in U^i$ temos $x \cdot U \subset U^{i+1}$. Em particular, $x \cdot \text{int}(U) \subset \text{int}(U^{i+1})$ e

$$U^i \subset \bigcup_{x \in U^i} x \cdot \text{int}(U) \subset \text{int}(U^{i+1}),$$

ou seja, $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} \text{int}(U^i)$ e α_U é um sistema fortemente regular em G . Os sistemas regulares da forma α_U são chamados sistemas padrões.

Observação 4.4. Por um argumento análogo ao acima é possível verificar que qualquer sistema regular α de um grupo localmente compacto conexo G é fortemente regular, desde que $\text{int}(N_j)$ é não-vazio para pelo menos um j .

Exemplo 4.5. Seja $G = \mathbb{R}^m \times \mathbb{Z}^p \times K$, no qual m e p são inteiros não-negativos e K é um semigrupo compacto. Denote $N_n = [-n, n]^m \times [-n, n]^p \times K$ para todo $n \geq 1$ e seja $\alpha_0 = (N_1, N_2, \dots)$. Note que $(\mathbb{R}^m, +)$ e $(\mathbb{Z}^p, +)$ são semigrupos localmente compactos. Logo, G é um semigrupo localmente compacto. Observe agora que N_1 é compacto e $(0, 0, e_K) \in N_1$, no qual e_K é o elemento neutro de K . Além disso, podemos ver $N_n = (N_1)^n$. Dessa forma, $\alpha_0 = \alpha_{N_1}$ e, pelo exemplo anterior, concluímos que α_0 é um sistema regular padrão em G . Um outro exemplo pode ser obtido quando consideramos $\beta_0 = (N_1^+, N_2^+, \dots)$, no qual $N_n^+ = [0, n]^m \times [0, n]^p \times K$. Observamos que β_0 é um sistema regular padrão no semigrupo $(\mathbb{R}^+)^m \times (\mathbb{Z}^+)^p \times K$.

A seguir apresentamos a definição de ação uniforme.

Definição 4.6. *Sejam G um semigrupo topológico e (X, d) um espaço métrico. Uma ação de semigrupo (à esquerda) contínua*

$$\begin{aligned} \Gamma : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto \Gamma(g, x) = gx \end{aligned} \tag{4.1}$$

é dita ser uma ação uniforme sobre subconjuntos compactos de G , se para cada $\epsilon > 0$ e cada subconjunto compacto N de G existe $\delta > 0$ tal que se x, y são elementos arbitrários de X com $d(x, y) < \delta$, então $d(gx, gy) < \epsilon$ para qualquer $g \in N$.

Por brevidade denominamos tais ações simplesmente por ações uniformes e no decorrer do texto Γ sempre denota uma ação uniforme de semigrupo.

Exemplo 4.7. Considere o conjunto

$$Sl(2, \mathbb{R}) = \{A = (a_{ij}) \in M_{2 \times 2}(\mathbb{R}); \det A = 1\},$$

isto é, $Sl(2, \mathbb{R})$ é composto por todas as matrizes reais de ordem dois e com determinante igual a um. Este conjunto com a operação de multiplicação de matrizes é um grupo. Então, considere o subsemigrupo de $Sl(2, \mathbb{R})$ dado por

$$Sl^+(2, \mathbb{R}) = \{A \in Sl(2, \mathbb{R}); a_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i, j = 1, 2\}.$$

De maneira natural, temos a ação $\phi : Sl^+(2, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\phi(A, x) = Ax$. Em $Sl^+(2, \mathbb{R})$ podemos definir um sistema regular formado por

$$N_n = \{A \in Sl^+(2, \mathbb{R}); \|A\| \leq 2^n\}.$$

Sejam então $\epsilon > 0$ e $N \subset Sl^+(2, \mathbb{R})$ compacto. Note que podemos encontrar $k \in \mathbb{N}$ tal que $N \subset N_k$. Dessa forma, para $\delta = \epsilon/2^k$, temos

$$\|Ax - Ay\|_{\mathbb{R}^2} \leq \|A\| \|x - y\|_{\mathbb{R}^2} < \epsilon \quad \text{sempre que} \quad \|x - y\| < \delta.$$

Portanto, ϕ é uma ação uniforme.

Lema 4.8. *Sejam $\epsilon > 0$ e N um subconjunto compacto de G . Então, para cada $x \in X$ o conjunto*

$$D_N(x, \epsilon, \Gamma) = \{y \in X ; d(gx, gy) < \epsilon \text{ para todo } g \in N\}$$

é uma vizinhança aberta de x em X .

Demonstração: Suponha, por absurdo, que a afirmação não seja verdade. Então, podemos encontrar $y \in D_N(x, \epsilon, \Gamma)$ tal que $B_d(y, \delta)$ não está contido em $D_N(x, \epsilon, \Gamma)$ para todo $\delta > 0$. Logo, é possível obter uma sequência y_n convergindo para y com $y_n \notin D_N(x, \epsilon, \Gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, existe $g_n \in N$ de modo que $d(g_n x, g_n y_n) \geq \epsilon$. Pela compacidade de N , a sequência g_n tem um ponto de acumulação g . Então, $d(gx, gy) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(g_n x, g_n y_n) \geq \epsilon$, o que é uma contradição. \square

Como consequência temos o resultado abaixo.

Proposição 4.9. *Seja K um subconjunto compacto de X . Para cada subconjunto compacto N de G e cada $\epsilon > 0$ existe um conjunto finito $F \subset X$ tal que $K \subset \bigcup_{x \in F} D_N(x, \epsilon, \Gamma)$.*

Demonstração: Pelo lema anterior temos que $\{D_N(x, \epsilon, \Gamma); x \in K\}$ é uma cobertura aberta de $K \subset X$. Deste modo, sendo K compacto, obtemos x_1, \dots, x_n em K de tal forma que $\{D_N(x_i, \epsilon, \Gamma); i = 1, \dots, n\}$ ainda cobre K . Tome então $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ e o resultado segue. \square

Agora apresentamos os conceitos de conjuntos (N, ϵ) -geradores e (N, ϵ) -separados para uma ação uniforme Γ . Estas noções, como veremos adiante, são completamente análogas as noções de conjuntos (n, ϵ) -geradores e (n, ϵ) -separados, introduzidos anteriormente na seção 3.1 para uma aplicação uniformemente contínua de um espaço métrico. Na verdade, vemos que o estudo da entropia topológica de aplicações uniformemente contínuas $f : X \rightarrow X$ é equivalente ao estudo da entropia topológica de semifluxos discretos, isto é, de ações de \mathbb{Z}^+ .

Definição 4.10. *Sejam G um semigrupo localmente compacto, (X, d) um espaço métrico e $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ uma ação uniforme. Dados $\epsilon > 0$, K um subconjunto compacto de X e N um subconjunto compacto de G definimos:*

- (i) *Um subconjunto F de K é chamado (N, ϵ) -gerador de K com respeito a Γ se $K \subset \bigcup_{x \in F} D_N(x, \epsilon, \Gamma)$. Em outras palavras, dado $y \in K$ existe $x \in F$ tal que $d(gx, gy) < \epsilon$ para todo $g \in N$;*
- (ii) *Um subconjunto E de X é chamado (N, ϵ) -separado com respeito a Γ se para cada par (x, y) de elementos distintos em E existe $g \in N$ tal que $d(gx, gy) \geq \epsilon$.*

Observação 4.11. Para cada subconjunto $E \subset K$ (N, ϵ) -separado existe um subconjunto (N, ϵ) -separado maximal em K contendo E . Para uma verificação, utilizamos novamente o Lema de Zorn e o resultado segue de modo análogo à observação 3.2.

Proposição 4.12. *Sejam $\epsilon > 0$, N um subconjunto compacto de G e K um subconjunto compacto de X . Então:*

- (a) *Se $E \subset K$ é um subconjunto (N, ϵ) -separado maximal, então E é (N, ϵ) -gerador de K ;*
- (b) *Existe um subconjunto finito F (N, ϵ) -gerador para K ;*
- (c) *Seja F um subconjunto $(N, \epsilon/2)$ -gerador de K . Então, $\#E \leq \#F$ para cada subconjunto $E \subset K$ (N, ϵ) -separado.*

Demonstração: (a) Devemos mostrar que $K \subset \bigcup_{x \in E} D_N(x, \epsilon, \Gamma)$. Suponha então que exista $y \in K$ com $y \notin D_N(x, \epsilon, \Gamma)$ para todo $x \in E$. Logo, para cada $x \in E$ existe $g \in N$ tal que $d(gx, gy) \geq \epsilon$. Dessa forma, segue que $E \cup \{y\}$ é (N, ϵ) -separado, o que contradiz a maximalidade de E .

(b) Segue pela proposição 4.9.

(c) Seja $E = \{x_1, \dots, x_k\}$ um subconjunto de K (N, ϵ) -separado. Para cada $i = 1, \dots, k$ existe $y_i \in F$ tal que $x_i \in D_N(y_i, \epsilon/2, \Gamma)$. Logo, temos $y_i \in D_N(x_i, \epsilon/2, \Gamma)$. Segue que a aplicação $i \mapsto y_i$ é injetiva. De fato, suponha por absurdo $y_i = y_j$ para algum $i \neq j$. Então, devemos ter $d(gx_i, gx_j) \leq d(gx_i, gy_i) + d(gy_i, gx_j) < \epsilon$ para todo $g \in N$, o que é uma contradição. Portanto, $\#E \leq \#F$. \square

Considere um sistema regular $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ em G . Fixados um subconjunto compacto K de X , $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, para uma ação uniforme $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ definimos

$$r_n(\epsilon, \Gamma, K) := \min \{ \#F; F \subset K, F \text{ é } (N_n, \epsilon)\text{-gerador para } K \},$$

$$s_n(\epsilon, \Gamma, K) := \max \{ \#E; E \subset K, E \text{ é } (N_n, \epsilon)\text{-separado para } K \}.$$

Agora, definimos as quantidades

$$r(\epsilon, \Gamma, K) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, \Gamma, K),$$

$$s(\epsilon, \Gamma, K) := \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, \Gamma, K).$$

Se o compacto K for o próprio conjunto X , quando não houver possibilidade de confusão, podemos simplesmente escrever $r_n(\epsilon, \Gamma)$ ao invés de $r_n(\epsilon, \Gamma, X)$ e, analogamente, proceder para os demais casos definidos acima.

Proposição 4.13. (a) $r_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq s_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq r_n(\epsilon/2, \Gamma, K) < \infty$. Logo, devemos ter $r(\epsilon, \Gamma, K) \leq s(\epsilon, \Gamma, K) \leq r(\epsilon/2, \Gamma, K)$;

(b) Se $\epsilon_1 > \epsilon_2$ então $r_n(\epsilon_1, \Gamma, K) \leq r_n(\epsilon_2, \Gamma, K)$ e $s_n(\epsilon_1, \Gamma, K) \leq s_n(\epsilon_2, \Gamma, K)$.

Demonstração: **(a)** Segue pelos itens (a), (c) e (b) da proposição 4.12, respectivamente.

(b) Como $\epsilon_1 > \epsilon_2$, temos $D_{N_n}(x, \epsilon_2, \Gamma) \subset D_{N_n}(x, \epsilon_1, \Gamma)$ e, portanto, um conjunto (N_n, ϵ_2) -gerador é (N_n, ϵ_1) -gerador para K . Além disso, é claro que um conjunto (N_n, ϵ_1) -separado é (N_n, ϵ_2) -separado em K . \square

Definição 4.14. Sejam $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ uma ação uniforme de um semigrupo localmente compacto G sobre um espaço métrico (X, d) , $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ um sistema regular em G e $K \subset X$ compacto. Definimos a entropia topológica de Γ com relação ao compacto K e ao sistema regular α por

$$h_\alpha(\Gamma, K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r(\epsilon, \Gamma, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(\epsilon, \Gamma, K).$$

Então, a entropia topológica de Γ com relação ao sistema regular α é definida por

$$h_\alpha(\Gamma) := \sup \{h_\alpha(\Gamma, K); K \subset X, K \text{ compacto}\}.$$

Observe que pela proposição 4.13 (a) os limites da definição acima existem (podendo ser infinitos) e são iguais. Além disso, o valor $h_\alpha(\Gamma)$ também depende da métrica d sobre X .

A seguinte proposição resume algumas propriedades que, conforme veremos adiante, acabam por generalizar muitas daquelas vistas para a entropia de aplicações uniformemente contínuas em um espaço métrico.

Proposição 4.15. (a) Se d e d' são métricas em X uniformemente equivalentes, então

$$h_\alpha(\Gamma) \text{ permanece a mesma, ou seja, } h_{\alpha, d}(\Gamma) = h_{\alpha, d'}(\Gamma);$$

(b) Sejam $K_1 \subset K_2$ subconjuntos compactos em X . Então, $h_\alpha(\Gamma, K_1) \leq h_\alpha(\Gamma, K_2)$. Assim, se X é compacto, $h_\alpha(\Gamma) = h_\alpha(\Gamma, X)$;

(c) Dado K_i compacto em X , $i = 1, \dots, m$, com $K \subset \bigcup_{i=1}^m K_i$ temos

$$h_\alpha(\Gamma, K) \leq \max_{i=1, \dots, m} h_\alpha(\Gamma, K_i).$$

Além disso, para X compacto, podemos encontrar K compacto em X , com diâmetro arbitrariamente pequeno, de modo que $h_\alpha(\Gamma) = h_\alpha(\Gamma, K)$.

Demonstração: (a) Dado $\epsilon_1 > 0$ podemos escolher $\epsilon_2 \geq \epsilon_3 > 0$ tais que $d(x, y) < \epsilon_1$ quando $d'(x, y) < \epsilon_2$ e $d'(x, y) < \epsilon_2$ quando $d(x, y) < \epsilon_3$. Seja $K \subset X$ compacto e F um conjunto (N_n, ϵ_2) -gerador para K com respeito a d' . Então, dado $y \in K$ existe $x \in F$ tal que $d'(gx, gy) < \epsilon_2$ para todo $g \in N_n$. Disso resulta que $d(gx, gy) < \epsilon_1$ para todo $g \in N_n$. Portanto, F é (N_n, ϵ_1) -gerador para K com respeito a d e $r_{n,d}(\epsilon_1, \Gamma, K) \leq r_{n,d'}(\epsilon_2, \Gamma, K)$. De modo análogo, vemos que um conjunto (N_n, ϵ_3) -gerador para K com respeito a d é um conjunto (N_n, ϵ_2) -gerador para K com respeito a d' e $r_{n,d'}(\epsilon_2, \Gamma, K) \leq r_{n,d}(\epsilon_3, \Gamma, K)$. Dessa forma, $r_d(\epsilon_1, \Gamma, K) \leq r_{d'}(\epsilon_2, \Gamma, K) \leq r_d(\epsilon_3, \Gamma, K)$. Fazendo $\epsilon_1 \rightarrow 0$, concluímos que $h_{\alpha,d}(\Gamma, K) = h_{\alpha,d'}(\Gamma, K)$ e $h_{\alpha,d}(\Gamma) = h_{\alpha,d'}(\Gamma)$.

(b) Basta ver que um conjunto (N_n, ϵ) -separado em K_1 é (N_n, ϵ) -separado em K_2 .

(c) Seja E um conjunto (N_n, ϵ) -separado em K . Note que $E_i = E \cap K_i$ é (N_n, ϵ) -separado em K_i . Logo, temos $\#E \leq \#E_1 + \dots + \#E_m$. Em particular, $s_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq \sum_{i=1}^m s_n(\epsilon, \Gamma, K_i)$. Observe então que para cada $i = 1, \dots, m$, $(s_n(\epsilon, \Gamma, K_i))_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais maiores ou iguais a 1 com

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\epsilon, \Gamma, K_i) = s(\epsilon, \Gamma, K_i).$$

Logo, pelo lema 2.15 (adaptado para limite superior), concluímos que

$$s(\epsilon, \Gamma, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left(\sum_{i=1}^m s_n(\epsilon, \Gamma, K_i) \right) = \max \{s(\epsilon, \Gamma, K_i); i = 1, \dots, m\}.$$

Portanto, $h_\alpha(\Gamma, K) \leq \max_{i=1, \dots, m} h_\alpha(\Gamma, K_i)$. Agora, supondo X compacto, tome $\{B_1, \dots, B_r\}$ cobertura aberta de X . Note que esta cobertura pode ser tomada de modo que cada B_i tenha

diâmetro arbitrariamente pequeno. Como $X = \text{cl}(B_1) \cup \dots \cup \text{cl}(B_r)$ e cada $\text{cl}(B_i)$ é compacto em X , segue pelos resultados que acabamos de provar que

$$h_\alpha(\Gamma) = h_\alpha(\Gamma, X) \leq \max_{i=1, \dots, r} h_\alpha(\Gamma, \text{cl}(B_i)) \leq h_\alpha(\Gamma),$$

donde concluímos o desejado. \square

O próximo resultado ilustra em qual sentido este conceito de entropia é consistente com o definido para aplicações. Mais precisamente, a partir dele podemos concluir que a entropia topológica das ações de semigrupos é uma generalização da entropia topológica para aplicações.

Proposição 4.16. *Sejam $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{Z}^+$ e a ação gerada pela aplicação $f : X \rightarrow X$, isto é, $\Gamma(n, x) = f^n(x)$ no qual $f^n = f \circ \dots \circ f$ (n vezes). Denote por $h(f)$ a entropia topológica da aplicação f no sentido da definição 3.4. Observe que para o caso em que $G = \mathbb{Z}$ devemos assumir f aplicação bijetiva, uniformemente contínua e com inversa uniformemente contínua. Dessa forma, com as devidas adequações sobre f , podemos concluir que em ambos os casos Γ é uma ação uniforme. Então, seguem as afirmações:*

- (a) *Em ambos os casos, $G = \mathbb{Z}$ ou $G = \mathbb{Z}^+$, temos $h_{\alpha_0^+}(\Gamma) = h(f)$, no qual α_0^+ é um sistema regular em G formado pelos elementos $N_n^+ = [0, n] := \{0, 1, \dots, n\}$.*
- (b) *Seja $G = \mathbb{Z}$. Se X é compacto, então $h_{\alpha_0}(\Gamma) = 2h(f) = 2h(f^{-1}) = h(f) + h(f^{-1})$, no qual α_0 é um sistema regular em G formado pelos elementos $N_n = [-n, n]$. Para X arbitrário, temos $\max\{h(f), h(f^{-1})\} \leq h_{\alpha_0}(\Gamma) \leq h(f) + h(f^{-1})$.*

Demonstração: (a) Mostraremos que para $\alpha = \alpha_0^+$ a definição de $h_\alpha(\Gamma)$ coincide com $h(f)$. De fato, considere $K \subset X$ compacto. Se F é $(n+1, \epsilon/2)$ -gerador para K com respeito a f , no sentido da definição 3.1, dado $x \in K$ existe $y \in F$ tal que $d(f^j x, f^j y) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ para todo $0 \leq j < n+1$, isto é, para todo $j \in N_n^+ = [0, n]$. Logo, F é (N_n^+, ϵ) -gerador para K com respeito a Γ . De modo análogo, se F é $(N_n^+, \epsilon/2)$ -gerador para K temos que F é $(n+1, \epsilon/2)$ -gerador para K . Assim, $r_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq r_{n+1}(\epsilon/2, f, K) \leq r_n(\epsilon/2, \Gamma, K)$ e, portanto, $h_\alpha(\Gamma) = h(f)$.

(b) Considere X compacto e fixe $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Tome F conjunto $(2n + 1, \epsilon/2)$ -gerador para X com respeito a aplicação f . Mostraremos que $F' = f^n(F)$ é (N_n, ϵ) -gerador para X com respeito a Γ . De fato, seja $x \in X$ e $z = f^{-n}x$. Então, $x = f^n z$ e existe $y \in F$ tal que $d(f^j z, f^j y) \leq \epsilon/2 < \epsilon$ para todo $0 \leq j < 2n + 1$. Logo, $y' = f^n y \in F'$ e

$$d(f^j x, f^j y') = d(f^j f^n z, f^j f^n y) < \epsilon \text{ para todo } |j| \leq n,$$

donde segue o desejado. De modo análogo, se F' é $(N_n, \epsilon/2)$ -gerador para X com respeito a Γ , temos que $F = f^{-n}(F')$ é $(2n + 1, \epsilon/2)$ -gerador para X com respeito a f . Dessa forma, $r_n(\epsilon, \Gamma, X) \leq r_{2n+1}(\epsilon/2, f, X) \leq r_n(\epsilon/2, \Gamma, X)$. Da primeira desigualdade obtemos

$$\begin{aligned} r(\epsilon, \Gamma, X) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_{2n+1}(\epsilon/2, f, X) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n} \frac{1}{2n+1} \log r_{2n+1}(\epsilon/2, f, X) = 2r(\epsilon/2, f, X). \end{aligned}$$

Pela segunda desigualdade, $2r(\epsilon/2, f, X) \leq r(\epsilon/2, \Gamma, X)$. Portanto, $h_{\alpha_0}(\Gamma, X) = 2h(f, X)$. Mas, sendo X compacto, $h_{\alpha_0}(\Gamma) = 2h(f)$. Neste caso, também temos $h(f) = h(f^{-1})$ (proposição 2.9 (c)). Assim, $h_{\alpha_0}(\Gamma) = 2h(f) = 2h(f^{-1}) = h(f) + h(f^{-1})$.

Assuma agora que X é arbitrário e fixe $K \subset X$ compacto, $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Note que um conjunto (N_n, ϵ) -gerador para K com respeito a Γ é (n, ϵ) -gerador para K com respeito a f e f^{-1} . Disso resulta que $r_n(\epsilon, f, K) \leq r_n(\epsilon, \Gamma, K)$ e $r_n(\epsilon, f^{-1}, K) \leq r_n(\epsilon, \Gamma, K)$. Portanto, $h(f) \leq h_{\alpha_0}(\Gamma)$ e $h(f^{-1}) \leq h_{\alpha_0}(\Gamma)$.

Para verificar a outra desigualdade, considere $F = \{x_1, \dots, x_k\}$ conjunto (n, ϵ) -gerador para K com respeito a f e $k = r_n(\epsilon, f, K)$. Denote

$$B_n(\epsilon, x) = \{y \in X ; d(f^i x, f^i y) \leq \epsilon, 0 \leq i < n\}.$$

Então, para cada $j = 1, \dots, k$, tome $K_j = K \cap B_n(\epsilon, x_j)$. Note que K_j é compacto e $K = \bigcup_{i=1}^k K_i$. Além disso, se $x, y \in K_j$ temos $x, y \in B_n(\epsilon, x_j)$ e assim

$$d(f^i x, f^i y) \leq d(f^i x, f^i x_j) + d(f^i x_j, f^i y) \leq 2\epsilon \text{ para todo } 0 \leq i < n,$$

ou seja, $y \in B_n(2\epsilon, x)$. Agora, fixe $F_j \subset K_j$ conjunto (n, ϵ) -separado com respeito a f^{-1} e $\#F_j = s_n(\epsilon, f^{-1}, K_j)$. Como um conjunto (n, ϵ) -separado maximal é (n, ϵ) -gerador, temos que F_j é (n, ϵ) -gerador para K_j com respeito a f^{-1} e ainda

$$\#F_j \leq r_n(\epsilon/2, f^{-1}, K_j) \leq r_n(\epsilon/2, f^{-1}, K).$$

Afirmamos que $F' = \bigcup_{j=1}^k F_j$ é $(N_{n-1}, 3\epsilon)$ -gerador para K com respeito a Γ . Com efeito, dado $x \in K$ temos que $x \in K_j$ para algum j . Consequentemente, existe $y \in F_j$ tal que $d(f^{-i}x, f^{-i}y) \leq \epsilon < 3\epsilon$ para todo $0 \leq i < n$. Por outro lado, desde que $x, y \in K_j$ implica $y \in B(2\epsilon, x)$, temos $d(f^i x, f^i y) \leq 2\epsilon < 3\epsilon$ para todo $0 \leq i < n$. Logo, $d(f^i x, f^i y) < 3\epsilon$ para $|i| \leq n - 1$. Portanto, F' é $(N_{n-1}, 3\epsilon)$ -gerador para K com respeito a Γ e

$$\begin{aligned} r_{n-1}(3\epsilon, \Gamma, K) &\leq \#F' \leq \sum_{j=1}^k \#F_j \leq k \cdot r_n(\epsilon/2, f^{-1}, K) \\ &= r_n(\epsilon, f, K) \cdot r_n(\epsilon/2, f^{-1}, K). \end{aligned}$$

Dessa forma, $h_{\alpha_0}(\Gamma, K) \leq h(f, K) + h(f^{-1}, K)$ e $h_{\alpha_0}(\Gamma) \leq h(f) + h(f^{-1})$. \square

Observação 4.17. Note que em geral $h_{\alpha_0}(\Gamma) \neq 2h(f)$. Por exemplo, se $X = \mathbb{R}$ e f é definida por $f(x) = 2x$, então $h(f) = \log 2 > 0$ e $h(f^{-1}) = 0$. Assim, pelo que acabamos de provar, $h_{\alpha_0}(\Gamma) = h(f) \leq 2h(f)$.

A próxima proposição apresenta uma relação entre a entropia topológica de uma ação e a entropia topológica de uma aplicação no caso geral.

Proposição 4.18. *Para qualquer ação uniforme Γ de um semigrupo localmente compacto G sobre um espaço métrico X e qualquer sistema regular $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ em G temos*

$$h_{\alpha}(\Gamma) \geq \sup_{g \in N_1} h(g),$$

no qual $h(g)$ denota a entropia topológica da aplicação $g : x \mapsto gx$ de X em X .

Demonstração: Fixe $g \in N_1$ e considere um subconjunto compacto K de X , $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Como α é um sistema regular, temos $(N_1)^n \subset N_n$. Então, $g^j \in N_n$ para todo $j = 1, \dots, n$. Consequentemente, um conjunto F (N_n, ϵ) -gerador de K com respeito a Γ é (n, ϵ) -gerador com respeito a aplicação g . Basta ver que $d(gx, gy) < \epsilon$ para todo $g \in N_n$ implica, em particular, $d(g^j x, g^j y) < \epsilon$ para todo $0 \leq j < n$. Assim, $r_n(\epsilon, g, K) \leq r_n(\epsilon, \Gamma, K)$ e, portanto, $h(g) \leq h_{\alpha}(\Gamma)$. \square

4.1.2 Exemplo: A Entropia de um Semifluxo Contínuo

A seguir definimos a entropia topológica de um semifluxo contínuo. Na verdade, fixando-se um sistema regular apropriado, vemos que esta definição é equivalente àquela dada para ações de semigrupos. Entretanto, aqui sua construção segue de maneira análoga a apresentada anteriormente para aplicações. Em certo sentido, isto facilita a visão da entropia de ações enquanto generalização da entropia de aplicações.

Antes, porém, lembramos que um semifluxo contínuo sobre o espaço métrico (X, d) é uma aplicação contínua $\Phi : \mathbb{R}^+ \times X \rightarrow X$ satisfazendo:

- (i) $\Phi(0, x) = x$ para todo $x \in X$;
- (ii) $\Phi(t + s, x) = \Phi(t, \Phi(s, x))$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$ e para todo $x \in X$.

Fixado $t \in \mathbb{R}^+$ também temos que a aplicação tempo- t é dada por

$$\begin{aligned} \Phi_t : X &\longrightarrow X \\ x &\longmapsto \Phi_t(x) = \Phi(t, x). \end{aligned}$$

O semifluxo Φ é uma ação do semigrupo localmente compacto $(\mathbb{R}^+, +)$ sobre o espaço métrico (X, d) . Neste caso, dizemos que a ação Φ é uniforme (ou uniformemente contínua) se

$$\forall t_0, \epsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall t \in [0, t_0], x, y \in X : d(x, y) < \delta \Rightarrow d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < \epsilon. \quad (4.2)$$

Exemplo 4.19. Considere $\Phi : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, no qual $\Phi(t, (x_1, x_2)) = (e^t x_1, e^t x_2)$. É fácil ver que Φ é um semifluxo contínuo. Além disso, fixados $\epsilon > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$, tome $\delta = \epsilon/e^{t_0}$. Dessa forma, se $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tais que $d(x, y) < \delta$, temos

$$d(e^t x, e^t y) = \max\{|e^t x_1 - e^t y_1|, |e^t x_2 - e^t y_2|\} \leq e^{t_0} d(x, y) < \epsilon,$$

para todo $t \in [0, t_0]$. Portanto, Φ é um semifluxo contínuo uniforme.

Agora, para cada número real $T > 0$ podemos definir uma métrica em X , equivalente a métrica d , por

$$d_{T, \Phi}(x, y) = \max_{t \in [0, T]} d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)).$$

Então, dados $\epsilon > 0$ e K um subconjunto compacto de X , um subconjunto F de K é chamado (T, ϵ) -gerador de K com respeito a Φ se, dado $y \in K$, existe $x \in F$ tal que $d_{T, \Phi}(x, y) < \epsilon$. Um subconjunto E de X é chamado (T, ϵ) -separado com respeito a Φ se $d_{T, \Phi}(x, y) \geq \epsilon$ para todo $x, y \in E$ com $x \neq y$. Assim, definimos

$$r_T(\epsilon, \Phi, K) := \min\{\#F; F \subset K, F \text{ é } (T, \epsilon)\text{-gerador para } K\};$$

$$r(\epsilon, \Phi, K) := \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log r_T(\epsilon, \Phi, K).$$

De modo análogo, temos $s_T(\epsilon, \Phi, K)$ e $s(\epsilon, \Phi, K)$. A entropia topológica $h(\Phi)$ do semifluxo Φ é então definida por

$$h(\Phi, K) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} r(\epsilon, \Phi, K) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} s(\epsilon, \Phi, K);$$

$$h(\Phi) := \sup\{h(\Phi, K); K \subset X, K \text{ compacto}\}.$$

O próximo teorema relaciona a entropia topológica do semifluxo Φ com a entropia topológica da aplicação tempo-1 Φ_1 . A partir dele, fixado o sistema regular $\alpha = (N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ com $N_n = [0, n]$ em \mathbb{R}^+ , concluímos que a definição de entropia de um semifluxo dada acima é equivalente a definição de entropia de uma ação, isto é, $h(\Phi) = h_\alpha(\Phi)$.

Teorema 4.20. *A entropia topológica de um semifluxo Φ é igual a entropia topológica da aplicação tempo-1, ou seja, $h(\Phi) = h(\Phi_1)$.*

Demonstração: Fixe um conjunto compacto $K \subset X$ e números reais $T, \epsilon > 0$. Sejam F um conjunto (T, ϵ) -gerador para K com respeito ao semifluxo Φ e considere $n \in \mathbb{N}$ o maior número natural com $n - 1 \leq T$. Então, para cada $y \in K$, existe algum $x \in F$ tal que $d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < \epsilon$ para todo $t \in [0, T]$. Observe que, sendo Φ semifluxo, temos $\Phi_j = (\Phi_1)^j$ para todo $j \in \mathbb{N}_0$. Dessa forma,

$$d_{n, \Phi_1}(x, y) = \max_{0 \leq j \leq n-1} d((\Phi_1)^j(x), (\Phi_1)^j(y)) \leq \max_{t \in [0, T]} d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < \epsilon.$$

Assim, concluímos que F é um conjunto (n, ϵ) -gerador para K com respeito a aplicação Φ_1 . Então, $r_n(\epsilon, \Phi_1, K) \leq r_n(\epsilon, \Phi, K)$ e

$$\begin{aligned} r(\epsilon, \Phi_1, K) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, \Phi_1, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\epsilon, \Phi, K) \\ &\leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log r_T(\epsilon, \Phi, K) = r(\epsilon, \Phi, K). \end{aligned}$$

Portanto, $h(\Phi_1, K) \leq h(\Phi, K)$ e, sendo K compacto arbitrário, temos $h(\Phi_1) \leq h(\Phi)$.

Para mostrarmos a desigualdade inversa, sejam $T, \epsilon > 0$. Como Φ é uniforme, existe $\delta > 0$ tal que se $x, y \in X$ e $d(x, y) < \delta$, então $d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) < \epsilon$ para todo $t \in [0, 1]$. Sejam $n \in \mathbb{N}$ o menor número natural com $T \leq n - 1$ e F um conjunto (n, δ) -gerador para K com respeito a Φ_1 . Então, para cada $x \in K$, existe algum $y \in F$ tal que $d_{n, \Phi_1}(x, y) < \delta$. Note que para cada $t \in [0, T]$ existem únicos $j \in \{0, 1, \dots, n - 1\}$ e $s \in [0, 1)$ tais que $t = j + s$. Disso resulta

$$d(\Phi_t(x), \Phi_t(y)) = d(\Phi_s(\Phi_j(x)), \Phi_s(\Phi_j(y))) = d(\Phi_s((\Phi_1)^j(x)), \Phi_s((\Phi_1)^j(y))) < \epsilon$$

para todo $t \in [0, T]$. Logo, temos que F é um conjunto (T, ϵ) -gerador para K com respeito ao semifluxo Φ . Deste modo, $r_T(\epsilon, \Phi, K) \leq r_n(\delta, \Phi_1, K)$. Note que, sendo n o menor natural com $T \leq n - 1$, temos necessariamente $T \geq n - 2$. Então, escrevemos

$$\begin{aligned} r(\epsilon, \Phi, K) &= \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log r_T(\epsilon, \Phi, K) \leq \limsup_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log r_n(\delta, \Phi_1, K) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-2} \log r_n(\delta, \Phi_1, K) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log r_n(\delta, \Phi_1, K) = r(\delta, \Phi_1, K). \end{aligned}$$

Portanto, $h(\Phi, K) \leq h(\Phi_1, K)$ e, sendo K compacto arbitrário, $h(\Phi) \leq h(\Phi_1)$. \square

4.2 Ações Conjugadas, Subações e Ações Quocientes

4.2.1 Ações Conjugadas

O objetivo principal aqui é verificar sob quais condições a entropia de duas ações de semigrupos coincidem. As próximas considerações mostram, em particular, que h_α é invariante por conjugação. Isto será importante para a demonstração de resultados e principalmente, em alguns casos, no que se refere à simplificação do cálculo da entropia.

Sejam então (X, d) , (Y, σ) espaços métricos, G, H semigrupos localmente compactos e $\Gamma : G \times X \rightarrow X$, $\Lambda : H \times Y \rightarrow Y$ ações uniformes com $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$, $\beta = (M_1, M_2, \dots)$ sistemas regulares em G e H , respectivamente. Finalmente, suponha a existência de um homomorfismo de semigrupos $\varphi : G \rightarrow H$ e de uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ tais que

o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & X & \xrightarrow{\Gamma} & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow f & & \downarrow f \\ H & \times & Y & \xrightarrow{\Lambda} & Y \end{array} \quad (4.3)$$

comute, ou seja, $f \circ \Gamma = \Lambda \circ (\varphi \times f)$.

Casos especiais surgem, por exemplo, quando φ é uma aplicação inclusão de um sub-semigrupo G de H e f é a identidade de $X = Y$, ou quando φ é a aplicação quociente $G \rightarrow H = G/N$ para um subgrupo normal compacto N de um grupo G e $f : X \rightarrow Y = X/N$ é a aplicação órbita para a ação de N sobre X . No primeiro caso Γ é uma subação de Λ e no segundo caso Λ é uma ação quociente. Ambas são apresentadas com mais detalhes posteriormente.

Retornando ao caso geral, apresentamos a seguinte definição.

Definição 4.21. (i) Dizemos que conjuntos compactos são levantados por meio de f se para cada compacto $L \subset Y$ existe um compacto $K \subset X$ com $f(K) = L$.

(ii) O sistema regular α será chamado β -rico para φ com respeito a ação Λ se existem $a > 0$ e $c > 0$ tais que para todo $n \in \mathbb{N}$, $h \in M_n$ e $y, y' \in Y$, com $\sigma(y, y') \leq a$, existe $g \in N_n$ para o qual $\sigma(\varphi(g)y, \varphi(g)y') \geq c\sigma(hy, hy')$.

Exemplos que ilustrem estas situações serão descritos adiante. Antes, porém, apresentamos uma importante proposição que apresenta condições que nos permitem comparar a entropia das ações Γ e Λ definidas para o caso geral acima.

Proposição 4.22. (a) Seja f injetiva e tal que a aplicação $f^{-1} : f(X) \rightarrow X$ é uniformemente contínua. Se $\varphi(N_n) \subset M_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$, então $h_\alpha(\Gamma) \leq h_\beta(\Lambda)$.

(b) Seja f uma aplicação uniformemente contínua tal que conjuntos compactos são levantados por meio de f e α é β -rico para φ com respeito a Λ . Então $h_\alpha(\Gamma) \geq h_\beta(\Lambda)$.

Demonstração: **(a)** Fixe $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e considere um compacto arbitrário $K \subset X$ com $L = f(K) \subset Y$. As hipóteses sobre f garantem a existência de $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X$, $\sigma(f(x), f(y)) < \delta$ implica $d(x, y) < \epsilon$. Tome F' um subconjunto (M_n, δ) -gerador para L com

respeito a Λ tal que $\#F' = r_n(\delta, \Lambda, L)$. Segue que $F = f^{-1}(F') \subset K$ e, pela injetividade de f , $F' = f(F)$. Além disso, temos $\#F = \#F'$. Mostraremos que F é (N_n, ϵ) -gerador para K com respeito a Γ . De fato, dado $x \in K$ existe $y' \in F'$ tal que $d(hf(x), hy') < \delta$ para todo $h \in M_n$. Então, para $y = f^{-1}(y') \in F$ e $g \in N_n$ temos $\sigma(\varphi(g)f(x), \varphi(g)f(y)) < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned} \sigma(f(gx), f(gy)) &= \sigma((f \circ \Gamma)(g, x), (f \circ \Gamma)(g, y)) \\ &= \sigma((\Lambda \circ (\varphi \times f))(g, x), (\Lambda \circ (\varphi \times f))(g, y)) \\ &= \sigma(\varphi(g)f(x), \varphi(g)f(y)) < \delta. \end{aligned}$$

Portanto, $d(gx, gy) < \epsilon$ para todo $g \in N_n$ e assim F é (N_n, ϵ) -gerador para K com respeito a Γ . Consequentemente, $r_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq r_n(\delta, \Lambda, L)$, donde vem $r(\epsilon, \Gamma, K) \leq r(\delta, \Lambda, L)$. Dessa forma, $h_\alpha(\Gamma, K) \leq h_\beta(\Lambda, L) \leq h_\beta(\Lambda)$ e, sendo K compacto arbitrário, temos $h_\alpha(\Gamma) \leq h_\beta(\Lambda)$.

(b) Fixe um compacto $L \subset Y$ e tome $K \subset X$ compacto com $f(K) = L$. Como α é β -rico, existem $a > 0$ e $c > 0$ tais que para $n \in \mathbb{N}$, $h \in M_n$ e $y, y' \in Y$, com $\sigma(y, y') \leq a$, existe $g \in N_n$ para o qual $\sigma(\varphi(g)y, \varphi(g)y') \geq c\sigma(hy, hy')$. Podemos assumir $c \leq 1$. Dado $\epsilon > 0$, $\epsilon \leq a$, a continuidade uniforme de f implica a existência de $\delta > 0$ tal que para $x, y \in X$ $d(x, y) < \delta$ nos dá $\sigma(f(x), f(y)) < c\epsilon$. Agora, fixado $n \in \mathbb{N}$, seja $E \subset L$ subconjunto (M_n, ϵ) -separado com respeito a Λ . Então, podemos encontrar $E' \subset f^{-1}(E) \cap K$ com $f(E') = E$ e $\#E' = \#E$. Mostraremos que $E' \subset K$ é um subconjunto (N_n, δ) -separado com respeito a Γ . Dados $x \neq y$ em E' devemos provar que $d(gx, gy) \geq \delta$ para algum $g \in N_n$. Se $d(x, y) \geq \delta$ tome $g = e$. Se $d(x, y) < \delta$ então, conforme visto acima, $\sigma(f(x), f(y)) < c\epsilon \leq \epsilon \leq a$. Como $f(x) \neq f(y)$ são elementos de E existe $h \in M_n$ com $\sigma(hf(x), hf(y)) \geq \epsilon$. Agora, a escolha de a e c garante a existência de $g \in N_n$ tal que

$$\sigma(\varphi(g)f(x), \varphi(g)f(y)) \geq c\sigma(hf(x), hf(y)) \geq c\epsilon.$$

Então, $\sigma(f(gx), f(gy)) = \sigma(\varphi(g)f(x), \varphi(g)f(y)) \geq c\epsilon$ e, pela escolha de δ , $d(gx, gy) \geq \delta$. Logo, E' é (N_n, δ) -separado para K com respeito a Γ e $s_n(\delta, \Gamma, K) \geq s_n(\epsilon, \Lambda, L)$. Portanto, $h_\alpha(\Gamma) \geq h_\beta(\Lambda)$. \square

Observação 4.23. Em particular, se f é uma bijeção tal que ambas f e f^{-1} são uniformemente contínuas e $\varphi(N_n) = M_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, dizemos que o par (f, φ) é uma conjugação

(ou equivalência) entre as ações Γ e Λ . Na existência de uma tal conjugação dizemos que as ações Γ e Λ são conjugadas.

Como consequência direta da proposição 4.22 obtemos o seguinte:

Corolário 4.24. *Se as ações Γ e Λ são conjugadas, então $h_\alpha(\Gamma) = h_\beta(\Lambda)$.*

Exemplo 4.25.

- (a) Seja $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua sobrejetiva, então se f é própria (ou seja, se para todo compacto K em Y tivermos $f^{-1}(K)$ compacto) temos que conjuntos compactos são levantados por meio de f ;
- (b) Sejam X um espaço métrico localmente compacto e $f : X \rightarrow Y$ uma aplicação contínua, sobrejetiva e aberta. Nestas condições, também temos que conjuntos compactos são levantados por meio de f ;
- (c) Para uma ação uniforme $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ com $\alpha = (N_n)_{n=1}^\infty$ sistema regular em G , denote $Y = X \times X$, $H = G \times G$ e seja β definido por $M_n = N_n \times N_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Defina φ e f como sendo inclusões diagonais, ou seja, $f(x) = (x, x)$ e $\varphi(g) = (g, g)$ e considere a métrica em Y dada por $\sigma((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max\{d(x_1, x_2), d(y_1, y_2)\}$. Então, para a ação uniforme

$$\Lambda((g_1, g_2), (x_1, x_2)) = (\Gamma(g_1, x_1), \Gamma(g_2, x_2))$$

temos que α é β -rico para φ com respeito a Λ ;

- (d) Sejam $\Gamma_i : G \times X_i \rightarrow X_i$, $i = 1, 2$, ações uniformes de G sobre os espaços métricos (X_i, d_i) . Considere o produto $X = X_1 \times X_2$ com a métrica $d = \max\{d_1, d_2\}$. Defina a ação $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ por $\Gamma(g, (x_1, x_2)) = (gx_1, gx_2)$. Além disso, denote $f = id$, $\sigma = d$, $Y = X$, $H = G \times G$ e defina o sistema regular β em G e o homomorfismo φ como em (b). Seja então a ação uniforme

$$\Lambda((g_1, g_2), (x_1, x_2)) = (\Gamma_1(g_1, x_1), \Gamma_2(g_2, x_2)).$$

Novamente temos que α é β -rico para φ com respeito a Λ .

O item (a) acima é imediato. Para mostrarmos o item (b), considere $L \subset Y$ compacto. Devemos encontrar $K \subset X$ compacto tal que $f(K) = Y$. De fato, sabemos que $f^{-1}(L)$ é fechado em X . Logo, o conjunto $f^{-1}(L)$, visto enquanto subespaço topológico de X , é localmente compacto (veja [17], p. 185). Dessa forma, para cada $x \in f^{-1}(L)$, existe algum compacto C_x de X contido em $f^{-1}(L)$ e que contém alguma vizinhança aberta de x . Em particular, $x \in \text{int}(C_x) \subset C_x$. Note que, sendo f aberta, podemos obter uma subcobertura aberta $\{f(\text{int}(C_{x_i})); i = 1, \dots, n\}$ de L . Denote então $K = \cup_{i=1, \dots, n} C_{x_i}$. Segue que K é compacto em X e $f(K) = L$.

Observe agora que o item (c) do exemplo acima é um caso particular do item (d). Para uma verificação deste último, considere o diagrama comutativo abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & X & \xrightarrow{\Gamma} & X \\ \downarrow \varphi & & \downarrow id & & \downarrow id \\ G \times G & \times & Y & \xrightarrow{\Lambda} & Y \end{array}$$

Denote $h = (g_1, g_2) \in M_n$. Para $i = 1, 2$, temos

$$\sigma(\varphi(g_i)(x_1, x_2), \varphi(g_i)(y_1, y_2)) = \max \{d_1(g_i x_1, g_i y_1), d_2(g_i x_2, g_i y_2)\}.$$

Seja então $d_j(g_k x_j, g_k y_j) = \max_{i=1,2} \{d_1(g_i x_1, g_i y_1), d_2(g_i x_2, g_i y_2)\}$. Logo, para $g_k \in N_n$, $(x_i, y_i) \in X$ temos

$$\begin{aligned} \sigma(\varphi(g_k)(x_1, x_2), \varphi(g_k)(y_1, y_2)) &= d_j(g_k x_j, g_k y_j) \\ &\geq \max \{d_1(g_1 x_1, g_1 y_1), d_2(g_2 x_2, g_2 y_2)\} \\ &= \sigma(h(x_1, x_2), h(y_1, y_2)), \end{aligned}$$

donde segue que α é β -rico para φ com respeito a Λ .

A seguinte proposição pode ser usada para estimar a entropia de ações produto. Em muitos casos, obtemos uma expressão exata.

Proposição 4.26. *Para $i = 1, 2$, seja $\Gamma_i : G_i \times X_i \rightarrow X_i$ ação uniforme do semigrupo localmente compacto G_i , com sistema regular $\alpha_i = (N_n^{(i)})_{n=1}^\infty$, sobre o espaço métrico (X_i, d_i) . Considere o espaço produto $X = X_1 \times X_2$ com métrica $d = \max \{d_1, d_2\}$.*

(a) Sejam $G = G_1 = G_2$, $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ e a ação uniforme $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ dada por $\Gamma(g, (x_1, x_2)) = (gx_1, gx_2)$. Então,

$$\max \{h_\alpha(\Gamma_1), h_\alpha(\Gamma_2)\} \leq h_\alpha(\Gamma) \leq h_\alpha(\Gamma_1) + h_\alpha(\Gamma_2)$$

e $s_n(\epsilon, \Gamma, K_1 \times K_2) \geq s_n(\epsilon, \Gamma_1, K_1) \cdot s_n(\epsilon, \Gamma_2, K_2)$ para todo $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e todo compacto $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$.

(b) Sejam $G = G_1 \times G_2$, o sistema regular $\alpha = (N_n)_{n=1}^\infty$ em G com $N_n = N_n^{(1)} \times N_n^{(2)}$ e a ação uniforme Γ dada por $\Gamma((g_1, g_2), (x_1, x_2)) = (\Gamma_1(g_1, x_1), \Gamma_2(g_2, x_2))$. Então,

$$\max \{h_{\alpha_1}(\Gamma_1), h_{\alpha_2}(\Gamma_2)\} \leq h_\alpha(\Gamma) \leq h_{\alpha_1}(\Gamma_1) + h_{\alpha_2}(\Gamma_2).$$

Além disso, $s_n(\epsilon, \Gamma, K_1 \times K_2) \geq s_n(\epsilon, \Gamma_1, K_1) \cdot s_n(\epsilon, \Gamma_2, K_2)$ para todo $\epsilon > 0$, $n \in \mathbb{N}$ e todo compacto $K_1 \subset X_1$, $K_2 \subset X_2$.

Demonstração: A afirmação em (a) segue de (b). De fato, primeiro denote por Λ a ação do item (a) e considere $G_2 = G_1$ no item (b). Tome $f = id$ e $\varphi(g) = (g, g)$. Então, $f \circ \Lambda = \Gamma \circ (\varphi \times f)$. Logo, as ações Λ e Γ são conjugadas e, portanto, $h_{\alpha_1}(\Lambda) = h_\alpha(\Gamma)$. Supondo (b) válido o resultado segue.

Agora, seja $K = K_1 \times K_2$, no qual K_i é um subconjunto compacto de X_i , $i = 1, 2$. Para $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$ fixados, seja F_i um subconjunto de K_i $(N_n^{(i)}, \epsilon)$ -gerador para K_i . Então, $F = F_1 \times F_2$ é um subconjunto de K (N_n, ϵ) -gerador para K com $\#F_1 \cdot \#F_2$ elementos. De fato, dado $(x_1, x_2) \in K$ com $x_i \in K_i$, podemos encontrar $y_i \in F_i$ tal que $d_i(g_i x_i, g_i y_i) < \epsilon$ para todo $g_i \in N_n^{(i)}$. Logo, para $(y_1, y_2) \in F$, temos

$$d((g_1, g_2)(x_1, x_2), (g_1, g_2)(y_1, y_2)) = \max \{d_1(g_1 x_1, g_1 y_1), d_2(g_2 x_2, g_2 y_2)\} < \epsilon$$

para todo $(g_1, g_2) \in N_n$, o que conclui o desejado. É claro que $r_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq \#F_1 \cdot \#F_2$ e, em particular, $r_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq r_n(\epsilon, \Gamma_1, K_1) \cdot r_n(\epsilon, \Gamma_2, K_2)$. Portanto, $h_\alpha(\Gamma) \leq h_{\alpha_1}(\Gamma_1) + h_{\alpha_2}(\Gamma_2)$. Para obter a desigualdade contrária, seja E_i um subconjunto de K_i $(N_n^{(i)}, \epsilon)$ -separado. Então, é fácil ver que $E = E_1 \times E_2$ é um subconjunto de K (N_n, ϵ) -separado com $\#E_1 \cdot \#E_2$ elementos e assim $s_n(\epsilon, \Gamma, K) \geq s_n(\epsilon, \Gamma_1, K_1) \cdot s_n(\epsilon, \Gamma_2, K_2)$. Em particular, $s_n(\epsilon, \Gamma, K) \geq s_n(\epsilon, \Gamma_i, K_i)$ donde vem $h_{\alpha_i}(\Gamma_i) \leq h_\alpha(\Gamma)$, $i = 1, 2$. \square

Exemplo 4.27. Para $i = 1, \dots, k$, seja $f_i : X_i \rightarrow X_i$ aplicação bijetiva uniformemente contínua e com inversa uniformemente contínua, no qual (X_i, d_i) é um espaço métrico. Defina $X = X_1 \times \dots \times X_k$, com métrica $d = \max\{d_1, \dots, d_k\}$ e considere a ação $\Gamma : G^k \times X \rightarrow X$, $G = \mathbb{Z}$, definida por $\Gamma((n_1, \dots, n_k), (x_1, \dots, x_k)) = (f_1^{n_1}(x_1), \dots, f_k^{n_k}(x_k))$. Assuma que α_0 é o sistema regular padrão de G dado conforme proposição 4.16 (b) e α o sistema regular em G^k definido por $N_n \times \dots \times N_n$ (k vezes). Então, pela proposição 4.26 (b) temos

$$\max_{1 \leq i \leq k} h_{\alpha_0}(\Gamma_i) \leq h_{\alpha}(\Gamma) \leq \sum_{i=1}^k h_{\alpha_0}(\Gamma_i),$$

no qual $\Gamma_i : G \times X_i \rightarrow X_i$ é a ação gerada por f_i . Note que $h_{\alpha}(\Gamma) \geq h_{\alpha_0}(\Gamma_i)$ para todo $i = 1, \dots, k$ implica $h_{\alpha}(\Gamma) > 0$ quando $h(f_i) > 0$ para algum $i = 1, \dots, k$. De fato, também pela proposição 4.16 (b), temos $\max\{h(f_i), h(f_i^{-1})\} \leq h_{\alpha_0}(\Gamma_i) \leq h(f_i) + h(f_i^{-1})$. Logo, se $h(f_i) > 0$ para algum $i = 1, \dots, k$, temos $h_{\alpha_0}(\Gamma_i) > 0$ e, portanto, $h_{\alpha_0}(\Gamma) > 0$.

4.2.2 Subações e Ações Quocientes

Nesta seção consideraremos ações de grupos. Dada uma ação uniforme $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ de um grupo localmente compacto G sobre um espaço métrico (X, d) e um subgrupo fechado H de G , consideremos a ação induzida, ou subação, dada por

$$\Gamma|_H : H \times X \longrightarrow X$$

de H sobre X . É claro que esta ação ainda permanece uniforme. Por outro lado, se além de fechado, H é compacto e normal podemos considerar a ação quociente

$$\Gamma/H : G/H \times X/H \longrightarrow X/H,$$

de G/H sobre o espaço X/H das H -órbitas em X definida por

$$\Gamma/H(Hg, Hx) = HgHx = Hgx.$$

É importante ressaltar que o espaço topológico X/H das H -órbitas está bem definido no sentido de que cada H -órbita, $Hx = \{hx ; h \in H\}$, é uma classe de equivalência da relação de equivalência: $x \sim y$ se, e somente se, existe $h \in H$ tal que $y = hx$. Assim, duas órbitas ou

são disjuntas ou coincidem. A ação Γ/H também está bem definida. De fato, dados $x \in X$ e $g_1, g_2 \in G$, se $Hg_1 = Hg_2$ então existe $h \in H$ tal que $g_2 = hg_1$. Logo, $g_2x = hg_1x$ e, portanto, $Hg_1x = Hg_2x$. Além disso, temos que X/H é um espaço métrico, basta considerar a métrica σ sobre X/H definida por

$$\sigma(Hx, Hy) = \min_{h_1, h_2 \in H} d(h_1x, h_2y). \quad (4.4)$$

Podemos verificar que esta métrica gera a topologia quociente de X/H .

Mostraremos que Γ/H é uma ação uniforme, isto é, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para $Hx, Hy \in G/H$, $\sigma(Hx, Hy) < \delta$ implica $\sigma(Hgx, Hgy) < \epsilon$ para todo $g \in N$, no qual N é um subconjunto compacto em G . De fato, note que existem $h'_1, h'_2 \in H$ tais que $\sigma(Hx, Hy) = d(h'_1x, h'_2y)$. Além disso, como Γ é uma ação uniforme, dados $N \subset G$ compacto e $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(h'_1x, h'_2y) < \delta$ implica $d(gh'_1x, gh'_2y) < \epsilon$ para todo $g \in N$. Logo, se $\sigma(Hx, Hy) < \delta$ temos

$$\begin{aligned} \sigma(Hgx, Hgy) &= \min_{h_1, h_2 \in H} d(h_1gx, h_2gy) \\ &= \min_{h_1, h_2 \in H} d(gh_1x, gh_2y) \leq d(gh'_1x, gh'_2y) < \epsilon \end{aligned}$$

para todo $g \in N$. Portanto, Γ/H é uma ação uniforme.

Agora, considere o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \times & X & \xrightarrow{\Gamma} & X \\ \downarrow p_H & & \downarrow q_H & & \downarrow q_H \\ G/H & \times & X/H & \xrightarrow{\Gamma/H} & X/H \end{array} \quad (4.5)$$

no qual $p_H : G \rightarrow G/H$ é a projeção canônica e $q_H : X \rightarrow X/H$ a aplicação quociente. Assim, temos $q_H \circ \Gamma = (\Gamma/H) \circ (p_H \times q_H)$.

Assuma, por fim, que um sistema regular $\alpha = (N_n)_n$ em G está fixado. Desde que H é fechado e p_H é homomorfismo contínuo, dotamos H e G/H respectivamente com os seguintes sistemas regulares

$$\alpha_H = (N_n \cap H)_n \quad \text{e} \quad \alpha/H = (p_H(N_n))_n.$$

A seguir, temos um resultado que nos dá condições para reduzir o cálculo da entropia de uma ação de um grupo G restringindo-se a um dos seus subgrupos. A demonstração será omitida, mas pode ser encontrada em [10].

Teorema 4.28. *Seja α um sistema fortemente regular em G e H um subgrupo fechado de G tal que o espaço das classes laterais à esquerda G/H é compacto. Então, $\alpha_H = (N_n \cap H)_n$ é um sistema regular em H e $h_{\alpha_H}(\Gamma|_H) = h_\alpha(\Gamma)$.*

Observação 4.29. A aplicação q_H , vista no diagrama (4.5), é uniformemente contínua pois $\sigma(Hx, Hy) \leq d(x, y)$. Além disso, q_H é uma aplicação própria (veja [4], p. 38) e, portanto, conjuntos compactos são levantados por meio de q_H . Por outro lado, a aplicação p_H , sendo sobrejetiva, implica que α é α/H -rico para p_H com respeito a Γ/H . Dessas afirmações, pela proposição 4.22 (b), concluímos que $h_\alpha(\Gamma) \geq h_{\alpha/H}(\Gamma/H)$.

O seguinte exemplo ilustra que $h_\alpha(\Gamma) = h_{\alpha/H}(\Gamma/H)$ não vale em geral.

Exemplo 4.30. Seja H o toro bidimensional, isto é, $H = \mathbb{R}^2/\sim$, no qual \sim é a relação de equivalência que identifica dois pontos no plano se suas coordenadas correspondentes diferem por inteiros. Então, podemos ver $H = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$. Uma métrica bi-invariante d_H em H pode ser definida em termos de uma métrica sobre \mathbb{R}^2 tomando-se a distância entre dois pontos de X como a mínima distância entre quaisquer representantes destes pontos em \mathbb{R}^2 . Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Como A possui entradas inteiras e $\det A = 1$ é fácil ver que $A(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z}^2$. Portanto, A induz um endomorfismo f sobre H dado por

$$\begin{aligned} f : H &\longrightarrow H \\ (x, y) &\longmapsto f(x, y) = (x + y, x + 2y). \end{aligned}$$

Os autovalores de A são $\lambda_{1,2} = (3 \pm \sqrt{5})/2$. Note que H é um grupo de Lie. Logo, pela proposição 3.20, temos $h(f) = h(A) = \log \frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq 0$.

Agora, considere o produto semidireto $G = H \rtimes_f \mathbb{Z}$ cuja operação é definida por

$$(x, m) \cdot (y, n) = (x + \eta(m)y, m + n) = (x + f^m(y), m + n)$$

e no qual o homomorfismo $\eta : \mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(H)$ é dado por $\eta(m) = f^m$. Se \mathbb{Z} possui a topologia discreta, observamos que $G = H \rtimes_f \mathbb{Z}$ com a topologia produto é um grupo topológico. De

fato, a aplicação

$$\begin{aligned}\psi : H \times \mathbb{Z} &\longrightarrow H \\ (x, m) &\longmapsto \psi(x, m) = \eta(m)x = f^m x\end{aligned}$$

é contínua, pois dado A aberto em H temos $\psi^{-1}A = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (f^{-m}A, m)$ aberto em $H \times \mathbb{Z}$ (Exemplo 1.6). Além disso, G é localmente compacto. Note também que H é um subgrupo aberto normal de G . Na verdade, vemos H enquanto subconjunto de G pelo isomorfismo com $H \times \{0\}$ que, por sua vez, é claramente um subgrupo aberto normal de G .

Considere o grupo topológico G/H , no qual a sua topologia é a induzida pela aplicação quociente. Não é difícil ver que G/H é isomorfo a \mathbb{Z} . Defina a ação

$$\begin{aligned}\Gamma : G \times H &\longrightarrow H \\ ((x, m), y) &\longmapsto \Gamma((x, m), y) = x + f^m(y) = \pi_H((x, m) \cdot (y, 0))\end{aligned}$$

no qual $\pi_H : G \rightarrow H$ é a projeção sobre a primeira coordenada. Note que Γ é uma ação de grupo contínua e uniforme. A continuidade segue do fato de Γ ser vista enquanto composição de funções contínuas. Para verificar a uniformidade de Γ , observe que todo compacto N em G está contido num compacto da forma $K = H \times [-n, n]$. Por outro lado, desde que f e f^{-1} são aplicações uniformemente contínuas, dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x, y \in H$, $d_H(x, y) < \delta$ implica $d_H(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon$ para todo $m \in [-n, n] \subset \mathbb{Z}$. Então, para $d_H(x, y) < \delta$ temos

$$\begin{aligned}d_H(gx, gy) &= d_H((z, m)x, (z, m)y) = d_H(z + f^m(x), z + f^m(y)) \\ &= d_H(f^m(x), f^m(y)) < \epsilon\end{aligned}$$

para todo $g = (z, m) \in K$. Portanto, Γ é uniforme. Agora, definimos o sistema regular padrão $\alpha = (N_n)_n$ em G pondo $N_n = \{(x, \epsilon) ; x \in H, |\epsilon| \leq n\}$. Note que $N_n = (N_1)^n$ para todo $n \geq 1$ e $(0, 0) \in N_n$. Além disso, N_n é compacto pois $N_n = \bigcup_{|\epsilon| \leq n} H \times \{\epsilon\}$.

Mostraremos então que $h_\alpha(\Gamma) > 0$. Para tanto, seja o subgrupo $L = \{(0, m) ; m \in \mathbb{Z}\}$ de G . É fácil ver que L é isomorfo a \mathbb{Z} . Além disso, o espaço das classes laterais à esquerda G/L é compacto. Para verificar esta última afirmação, primeiro note que H é isomorfo à

G/L . Então, observe o diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_H} & H \\ \downarrow p_L & \searrow g & \\ G/L & & \end{array}$$

no qual g é o isomorfismo entre H e G/L dado por $g(x) = (x, 0)L$. Como π_H é uma aplicação quociente e $p_L = g \circ \pi_H$ é contínua, temos que o isomorfismo g é contínuo. Disso concluímos que G/L é compacto. Agora, desde que α é um sistema fortemente regular em G , $L = \{0\} \times \mathbb{Z}$ um subgrupo fechado de G e G/L compacto, pelo teorema 4.28, temos que $\beta = (N_n \cap L)_n$ é um sistema regular em L e $h_\alpha(\Gamma) = h_\beta(\Gamma|_L)$. Então, considere

$$\begin{array}{ccccc} L \times H & & \xrightarrow{\Gamma|_L} & & H \\ \downarrow i & & \downarrow id & & \downarrow id \\ \mathbb{Z} \times H & & \xrightarrow{\Lambda} & & H \end{array}$$

no qual i é o isomorfismo entre L e \mathbb{Z} dado por $i(0, m) = m$ e Λ a ação gerada por f , ou seja, $\Lambda(n, z) = f^n(z)$. É fácil ver que Γ e Λ são ações conjugadas. Logo, $h_\beta(\Gamma|_L) = h_{\alpha_0}(\Lambda)$ e, conforme a proposição 4.16 (b), temos

$$h_\alpha(\Gamma) = h_\beta(\Gamma|_L) = h_{\alpha_0}(\Lambda) > h(f) > 0.$$

Por outro lado, como H age transitivamente sobre $X = H$, temos $X \in X/H$ e assim X/H contém apenas uma classe. Consequentemente, a entropia de Γ/H é zero e, portanto, $h_{\alpha/H}(\Gamma/H) < h_\alpha(\Gamma)$.

4.3 Medidas Homogêneas e Ações Lineares

No capítulo anterior definimos medida homogênea para uma medida de Borel μ sobre um espaço métrico (X, d) com relação a uma aplicação uniformemente contínua $f : X \rightarrow X$. Agora, generalizamos estes resultados para ações uniformes. Em particular, também vemos que a noção de medida homogênea se apresenta como uma ferramenta útil no estudo de algumas ações uniformes lineares.

4.3.1 Medidas Homogêneas

Seja $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ uma ação uniforme do semigrupo localmente compacto G sobre o espaço métrico (X, d) . No lema 4.8, dado $\epsilon > 0$ e N um subconjunto compacto de G , para cada $x \in X$ definimos o conjunto

$$D_N(x, \epsilon, \Gamma) = \{y \in X ; d(gx, gy) < \epsilon \text{ para todo } g \in N\}$$

e provamos que é uma vizinhança aberta de x em X . Nestas condições, apresentamos a definição abaixo.

Definição 4.31. *Uma medida de Borel μ em X será chamada Γ -homogênea se as seguintes condições são satisfeitas:*

- (i) $\mu(K) < \infty$ para qualquer compacto $K \subset X$ e existe um compacto $K \subset X$ com $\mu(K) > 0$;
- (ii) Para cada $\epsilon > 0$ existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\mu(D_N(y, \delta, \Gamma)) \leq c\mu(D_N(x, \epsilon, \Gamma))$$

para todos os subconjuntos compactos N de G e todo $x, y \in X$.

Dado um sistema regular $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ em G e uma medida μ Γ -homogênea sobre X , definimos também

$$k_\alpha(\Gamma) := k_\alpha(\mu, \Gamma) := \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_{N_n}(x, \epsilon, \Gamma)),$$

com $x \in X$ arbitrário. Segue da condição (ii) que esta definição não depende do x escolhido.

A seguir apresentamos um exemplo de medida Γ -homogênea.

Exemplo 4.32. Seja X um grupo localmente compacto com uma métrica invariante à direita d e uma medida de Haar invariante à direita μ . Considere uma ação uniforme linear Γ de um semigrupo G sobre X , isto é, para cada $g \in G$ a aplicação $x \mapsto gx$ de X em X é um endomorfismo. Então, afirmamos que μ é Γ -homogênea.

Para uma verificação, note que para $x \in X$, $g \in G$ e $\epsilon > 0$ temos

$$g^{-1}B_\epsilon(gx) = (g^{-1}B_\epsilon(1))x, \tag{4.6}$$

no qual 1 denota a identidade em X . Para a prova desta igualdade observe que yx pertence ao lado direito da igualdade se, e somente se, $gy \in B_\epsilon(1)$. Logo, como d é invariante à direita, temos $d(g(yx), gx) = d((gy)(gx), gx) = d(gy, 1) < \epsilon$. Mas esta desigualdade vale se, e somente se, $g(yx) \in B_\epsilon(gx)$, o que prova (4.6). Agora, como μ é uma medida de Haar temos $\mu(K) < \infty$ para qualquer compacto $K \subset X$. Além disso, existe U aberto em G tal que

$$0 < \mu(U) = \sup \{ \mu(K) ; K \subset U \text{ e } K \text{ compacto} \}.$$

Logo, deve existir K de modo que $\mu(K) > 0$. Por fim, pela definição do conjunto $D_N(x, \epsilon, \Gamma)$ e por (4.6) podemos ver que

$$D_N(x, \epsilon, \Gamma) = \bigcap_{g \in N} g^{-1} B_\epsilon(gx) = \bigcap_{g \in N} (g^{-1} B_\epsilon(1)x) = D_N(1, \epsilon, \Gamma)x,$$

para qualquer compacto $N \subset G$. Consequentemente, $\mu(D_N(x, \epsilon, \Gamma)) = \mu(D_N(1, \epsilon, \Gamma))$ para cada $x \in X$ e cada $\epsilon > 0$. Portanto, μ é Γ -homogênea.

Como anteriormente, uma medida Γ -homogênea pode ser usada para calcular entropia topológica.

Proposição 4.33. *Sejam Γ uma ação uniforme do semigrupo G localmente compacto sobre o espaço métrico localmente compacto (X, d) e μ uma medida Γ -homogênea sobre X . Então, para cada sistema regular α em G , temos $h_\alpha(\Gamma) = k_\alpha(\Gamma)$.*

Demonstração: Fixe um compacto $K \subset X$ com $\mu(K) > 0$. Note que existe um compacto $L \subset X$ com $K \subset \text{int}(L)$. De fato, para cada $x \in K$ e U_x vizinhança aberta de x com fecho compacto, seja V_x vizinhança aberta contendo x tal que $\text{cl}(V_x) \subset U_x$. Assim, podemos ver $K \subset \bigcup_{i=1}^m V_{x_i}$. Logo, basta tomar $L = \bigcup_{i=1}^m \text{cl}(V_{x_i})$. Fixe então $\epsilon > 0$ pequeno suficiente tal que $B_\epsilon(K) \subset \text{int}(L)$. Como μ é Γ -homogênea, existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que

$$\mu(D_N(y, \delta, \Gamma)) \leq c\mu(D_N(x, \epsilon/2, \Gamma))$$

para todo compacto $N \subset G$ e todo $x, y \in X$.

Agora, considere $E \subset K$ (N_n, ϵ) -separado com respeito a Γ . Afirmamos que

$$\bigcup_{x \in E} D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma) \subset L.$$

Além disso, se x e y são elementos distintos de E então

$$D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma) \cap D_{N_n}(y, \epsilon/2, \Gamma) = \emptyset.$$

No primeiro caso, se $y \in D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma)$ então, em particular, $y \in B_{\epsilon/2}(x) \subset B_\epsilon(K) \subset L$. No segundo caso, se supormos $w \in D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma) \cap D_{N_n}(y, \epsilon/2, \Gamma)$, teremos $d(x, w) < \epsilon/2$, $d(y, z) < \epsilon/2$ e $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) < \epsilon$, o que contradiz $d(gx, gy) \geq \epsilon$ para todo $g \in N_n$. Consequentemente,

$$\sum_{x \in E} \mu(D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma)) = \mu\left(\bigcup_{x \in E} D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma)\right) \leq \mu(L) < \infty.$$

Logo, fixado $z \in X$ concluímos que

$$\#E \cdot \mu(D_{N_n}(z, \delta, \Gamma)) \leq c \sum_{x \in E} \mu(D_{N_n}(x, \epsilon/2, \Gamma)) \leq c\mu(L) < \infty.$$

Então, para $\#E = s_n(\epsilon, \Gamma, K)$, $\log s_n(\epsilon, \Gamma, K) \leq -\log \mu(D_{N_n}(z, \delta, \Gamma)) + \log(c\mu(L))$ e

$$s(\epsilon, \Gamma, K) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_{N_n}(z, \delta, \Gamma)).$$

Tomando-se o limite com $\epsilon \rightarrow 0$ ($\delta \rightarrow 0$), obtemos $h_\alpha(\Gamma, K) \leq k_\alpha(\Gamma)$.

Para provar a desigualdade inversa, seja $F \subset K$ (N_n, δ) -gerador para K com respeito a Γ . Então, $K \subset \bigcup_{x \in F} D_{N_n}(x, \delta, \Gamma)$ e

$$0 < \mu(K) \leq \mu\left(\bigcup_{x \in F} D_{N_n}(x, \delta, \Gamma)\right) \leq \sum_{x \in F} \mu(D_{N_n}(x, \delta, \Gamma)).$$

Assim, fixado $z \in X$, podemos ver

$$\#F \cdot c\mu(D_{N_n}(z, \epsilon/2, \Gamma)) \geq \sum_{x \in F} \mu(D_{N_n}(x, \delta, \Gamma)) \geq \mu(K) > 0.$$

Deste modo, para $\#F = r_n(\delta, \Gamma, K)$, $\log r_n(\delta, \Gamma, K) \geq \log(\mu(K)/c) - \log \mu(D_{N_n}(z, \epsilon/2, \Gamma))$.

Isto implica

$$r(\delta, \Gamma, K) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_{N_n}(z, \epsilon/2, \Gamma)).$$

Dessa forma, $h_\alpha(\Gamma, K) \geq k_\alpha(\Gamma)$. Portanto, $h_\alpha(\Gamma, K) = k_\alpha(\Gamma)$ para todo compacto $K \subset X$ com $\mu(K) > 0$. Isto prova a afirmação. \square

4.3.2 Ações Lineares

Seja \mathbb{F} igual a \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Por um espaço topológico linear entendemos um espaço vetorial X equipado com uma topologia tal que as aplicações soma $s : X \times X \rightarrow X$ dada por $s(x, y) = x + y$ e multiplicação por escalar $m : \mathbb{F} \times X \rightarrow X$ dada por $m(c, x) = cx$ são contínuas. Se um espaço vetorial X é normado, isto é, possui a norma $\|\cdot\|$, então $d(x, y) = \|x - y\|$ define uma métrica em X . Com a topologia gerada pela métrica, X torna-se um espaço topológico linear.

Dizemos simplesmente que X é um espaço linear, se é um espaço topológico linear real ou complexo com dimensão finita e munido com um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$, no qual $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ e d é a métrica sobre X gerada por esta norma. Além disso, consideramos ações uniformes lineares $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ de grupos localmente compactos G sobre X . Lembramos que uma ação Γ é linear se para cada $g \in G$ a aplicação $x \mapsto gx$ é linear. Assuma também que o sistema regular $\alpha = (N_1, N_2, \dots)$ em G está fixado.

Exemplo 4.34. Sejam X, Y espaços lineares de mesma dimensão finita e $f : X \rightarrow Y$ um isomorfismo. Considere aplicações lineares $T : X \rightarrow X$ e $S : Y \rightarrow Y$ tais que $f \circ T = S \circ f$. Conforme na proposição 4.16, seja $G = \mathbb{Z}^+$ munido com o sistema regular α_0^+ e as ações $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ e $\Lambda : G \times Y \rightarrow Y$ geradas por T e S , respectivamente. Note que Γ e Λ são ações lineares. Além disso, como $f \circ \Gamma = \Lambda \circ (id \times f)$, podemos ver também que as ações Γ e Λ são conjugadas. Dessa forma, concluímos que $h(T) = h_{\alpha_0^+}(\Gamma) = h_{\alpha_0^+}(\Lambda) = h(S)$.

Seja agora Y um subespaço linear de X que é invariante sob Γ , isto é, $gY = Y$ para todo $g \in G$. De maneira óbvia definimos a restrição

$$\Gamma|_Y : G \times Y \longrightarrow Y$$

de Γ sobre Y . Além disso, definimos a ação quociente

$$\Gamma/Y : G \times X/Y \longrightarrow X/Y$$

por $\Gamma/Y(g, x + Y) = gx + Y$. Em Y consideramos a métrica determinada por d e em X/Y a métrica σ induzida pela norma

$$\|x + Y\|_1 = \inf_{y \in Y} \|x + y\| = \min_{y \in Y} \|x + y\|.$$

Note então que a uniformidade da ação Γ/Y segue da uniformidade da ação Γ . É comum chamar Y um G -submódulo de X e X/Y um módulo quociente.

Observação 4.35. Em [10] encontramos a seguinte proposição, cuja demonstração reproduzimos a seguir. Contudo, observamos que não conseguimos demonstrar que $s_n(\epsilon, \Gamma|_Y, K_1) \cdot s_n(\epsilon, \Gamma/Y, K_2) \leq s_n(\epsilon, \Gamma, K)$ implica em $s(\epsilon, \Gamma|_Y, K_1) + s(\epsilon, \Gamma/Y, K_2) \leq s(\epsilon, \Gamma, K)$. Mesmo assim, este fato não reduz o interesse neste estudo e nos exemplos posteriores.

Proposição 4.36. *Para cada subespaço linear invariante Y e cada sistema regular α em G temos $h_\alpha(\Gamma) \geq h_\alpha(\Gamma|_Y) + h_\alpha(\Gamma/Y)$.*

Demonstração: Denote por Z o complemento ortogonal de Y em X , então $X = Y \oplus Z$ e a aplicação quociente $\pi : X \rightarrow X/Y$ leva Z isomorficamente sobre X/Y . Seja K um subconjunto compacto de X . É suficiente considerar o caso $K = K_1 + K_2$ com $K_1 \subset Y$, $K_2 \subset Z$. Fixe $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, sejam $E_i \subset K_i$, $i = 1, 2$, com $\#E_1 = s_n(\epsilon, \Gamma|_Y, K_1)$, $\#E_2 = s_n(\epsilon, \Gamma/Y, \pi(K_2))$ e tais que E_1 é um conjunto (N_n, ϵ) -separado de K_1 com relação a $\Gamma|_Y$ e $\pi(E_2)$ é um conjunto (N_n, ϵ) -separado de $\pi(K_2)$ com relação a Γ/Y .

Mostraremos que $E = E_1 + E_2$ é (N_n, ϵ) -separado para K com respeito a Γ . Sejam $x_1 \neq x_2$ elementos de E . Então, escrevemos $x_i = y_i + z_i$ com $y_i \in E_1$, $z_i \in E_2$. Primeiro assumamos que $z_1 \neq z_2$. Então, $\pi(z_1) \neq \pi(z_2)$ são elementos de $\pi(E_2)$ e, portanto, existe $g \in N_n$ com $\sigma(g\pi(z_1), g\pi(z_2)) \geq \epsilon$. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} d(gx_1, gx_2) &= \|gx_1 - gx_2\| = \|g(x_1 - x_2)\| = \|g((y_1 + z_1) - (y_2 + z_2))\| \\ &= \|g(z_1 - z_2) + g(y_1 - y_2)\| \geq \|g(z_1 - z_2) + Y\|_1 = \|\pi(g(z_1 - z_2))\|_1 \\ &= \|\pi(gz_1) - \pi(gz_2)\|_1 = \|g\pi(z_1) - g\pi(z_2)\|_1 \geq \epsilon. \end{aligned}$$

Agora, assumamos que $z_1 = z_2$. Então, como $x_1 \neq x_2$ em E devemos ter $y_1 \neq y_2$. Logo, existe $g \in N_n$ tal que $d(gy_1, gy_2) \geq \epsilon$. Assim, $d(gx_1, gx_2) = \|g(x_1 - x_2)\| = \|g(y_1 - y_2)\| \geq \epsilon$. Portanto, E é um conjunto (N_n, ϵ) -separado de K com respeito a Γ e

$$s_n(\epsilon, \Gamma|_Y, K_1) \cdot s_n(\epsilon, \Gamma/Y, K_2) = \#E \leq s_n(\epsilon, \Gamma, K).$$

Dessa forma, devemos ter $s(\epsilon, \Gamma, K) \geq s(\epsilon, \Gamma|_Y, K_1) + s(\epsilon, \Gamma/Y, K_2)$. Fazendo-se $\epsilon \rightarrow 0$, obtemos $h_\alpha(\Gamma) \geq h_\alpha(\Gamma|_Y) + h_\alpha(\Gamma/Y)$. \square

O exemplo abaixo mostra que a igualdade acima nem sempre vale, mesmo se o sistema regular α é o padrão.

Exemplo 4.37. Seja o grupo multiplicativo

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; a, b \in \mathbb{R}, a > 0 \right\}.$$

Podemos ver G com a topologia induzida de \mathbb{R}^4 , logo temos que G é um grupo topológico localmente compacto conexo. Considere o compacto

$$N_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2} \leq a \leq 2, |b| \leq 1 \right\} \subset G.$$

e defina o sistema regular α por $N_n = (N_1)^n$. Observe que

$$N_n = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{2^n} \leq a \leq 2^n \text{ e } |b| \leq 2^n - 1 \right\}.$$

O grupo G age naturalmente sobre o espaço linear $X = \mathbb{R}^2$. Podemos representar esta ação por $\Gamma : G \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ no qual

$$\Gamma \left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (y, z) \right) = (ay + bz, z).$$

Ao invés de utilizarmos em \mathbb{R}^2 a métrica proveniente da norma $\|\cdot\|$, utilizamos outra que é uniformemente equivalente à ela. Denotando $x = (y, z)$, $x' = (y', z')$ definimos

$$d(x, x') = \max\{|y - y'|, |z - z'|\}.$$

Não é difícil ver que Γ é uma ação linear. Para verificar a uniformidade de Γ , primeiro note que para N compacto em G existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $N \subset N_n$ (veja exemplo 4.3). Mostraremos que, fixado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(Ax, Ax') < \epsilon$ para toda matriz $A \in N_n$ quando $d(x, x') < \delta$. De fato, temos $d(Ax, Ax') = \max\{|(ay + bz) - (ay' + bz')|, |z - z'|\}$ e ainda $|(ay + bz) - (ay' + bz')| \leq 2^n(|y - y'| + |z - z'|)$. Então, basta tomar $\delta = \epsilon/2^{n+1}$.

Observe agora que Γ deixa o subespaço $Y = \mathbb{R} \times \{0\}$ invariante. Mostraremos que $h_\alpha(\Gamma/Y) = 0$ e $h_\alpha(\Gamma|_Y) = \log 2$. Para tanto, novamente fixe $\epsilon > 0$ e um compacto K em X .

No primeiro caso, sabemos que o conjunto X/Y é dado pela relação de equivalência \sim , no qual $(y, z) \sim (y', z')$ se, e somente se, existe $(w, 0) \in Y$ tal que $(y, z) = (y', z') + (w, 0)$. Note então que $A(y, z) \sim (y, z)$ para todo $(y, z) \in X$ e $A \in G$. Logo, $\Gamma/Y(A, (y, z) + Y) = (y, z) + Y$. Dessa forma, $r_n(\epsilon, \Gamma/Y, K)$ é constante para todo $n \in \mathbb{N}$ e $h_\alpha(\Gamma/Y) = 0$. No segundo caso, considere a ação $\Lambda : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\Lambda(c, w) = cw$, no qual \mathbb{R}_*^+ possui o sistema regular gerado por $N_1 = [1/2, 2]$. Não é difícil ver que Λ e $\Gamma|_Y$ são ações conjugadas e, portanto, $h_\alpha(\Gamma|_Y) = \log 2$.

Mostraremos por fim que $h_\alpha(\Gamma) = 2 \log 2$. Para tanto utilizaremos a proposição 4.33 e o fato da medida de Lebesgue μ sobre X ser Γ -homogênea (veja exemplo 4.32). Fixe $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$. Por definição, $D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma) = \{x \in X; d(gx, g0) < \epsilon \text{ para todo } g \in N_n\}$, ou seja, $D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)$ consiste dos elementos $x = (y, z) \in X$ tais que $d(Ax, 0) < \epsilon$ para cada matriz $A \in N_n$. Considerando que $Ax = (ay + bz, z)$ podemos ver

$$\begin{aligned} x \in D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma) &\Leftrightarrow d((ay + bz, z), (0, 0)) < \epsilon \text{ para todo } A \in G \\ &\Leftrightarrow |ay + bz| < \epsilon, |z| < \epsilon \text{ para todo } \frac{1}{2^n} \leq a \leq 2^n, |b| \leq 2^{n-1}. \end{aligned}$$

A partir disso, verifica-se que $D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)$ está contido no quadrilátero K em X determinado pelas retas $2^n y + (2^n - 1)z = \pm\epsilon$, $2^n y - (2^n - 1)z = \pm\epsilon$. Na verdade, temos $D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma) = K$. Portanto,

$$\mu(D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)) = \mu(K) = \frac{\epsilon}{2^{n+1}} \cdot \frac{\epsilon}{2^n - 1}.$$

Note que estamos nas condições da proposição 4.33. Logo, temos

$$\begin{aligned} h_\alpha(\Gamma) &= k_\alpha(\Gamma) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \left(\frac{\epsilon}{2^{n+1}} \cdot \frac{\epsilon}{2^n - 1} \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\log 2^{n-1} + \log(2^n - 1)}{n} \right) = 2 \log 2. \end{aligned}$$

Portanto, neste caso, obtemos $h_\alpha(\Gamma) > h_\alpha(\Gamma|_Y) + h_\alpha(\Gamma/Y)$.

Este exemplo mostra que $\sup_{g \in N_1} h(g) < h_\alpha(\Gamma)$ (proposição 4.18). De fato, nas condições do exemplo acima, cada $A \in N_1$ representa uma aplicação linear em X cujos autovalores são a e 1 . Logo, pelo teorema 3.19, temos $h(A) = \max\{0, \log a\} \leq \log 2$, enquanto que

$h_\alpha(\Gamma) = 2 \log 2$. Além disso, para $A \in N_1$ temos também $h(A) + h(A^{-1}) \leq \log 2$ o que implica

$$h_\alpha(\Gamma) > \sup_{A \in N_1} (h(A) + h(A^{-1})). \quad (4.7)$$

Observamos que no exemplo 4.37 o elemento gerador de α , N_1 , não é simétrico. O próximo exemplo mostra que a desigualdade estrita (4.7) pode ocorrer mesmo se N_1 é simétrico.

Exemplo 4.38. Sejam $G = X = \mathbb{R}^2$ e a ação uniforme $\Gamma : G \times X \rightarrow X$ definida por $\Gamma((u, v), (x, y)) = (e^u x, e^v y)$. Assim, qualquer $(u, v) \in G$ determina uma aplicação linear em X dada pela matriz

$$g_{u,v} = \begin{pmatrix} e^u & 0 \\ 0 & e^v \end{pmatrix}.$$

Considere o sistema regular α em G gerado pelo conjunto $N_1 = \{(u, v) \in G; |u \pm v| \leq 1\}$. Claramente, N_1 é uma vizinhança compacta simétrica do vetor nulo em \mathbb{R}^2 e podemos ver $N_n = (N_1)^n = \{(u, v) \in G; |u \pm v| \leq n\}$. Assumindo $\log = \ln$, para cada $(u, v) \in N_1$, afirmamos que

$$h(g_{u,v}) + h(g_{u,v}^{-1}) \leq |u \pm v| \leq 1 \quad \text{e} \quad \max_{(u,v) \in N_1} (h(g_{u,v}) + h(g_{u,v}^{-1})) = 1.$$

Para uma verificação, basta observar que e^u, e^v são autovalores de $g_{u,v}$, $1/e^u, 1/e^v$ são autovalores de $g_{u,v}^{-1}$ e, por exemplo, no caso em que $u, v > 0$, temos $h(g_{u,v}) = u + v$ e $h(g_{u,v}^{-1}) = 0$ (teorema 3.19). Para os demais casos, o procedimento é análogo. Além disso, note que para $u = v = 1/2$ temos $h(g_{u,v}) + h(g_{u,v}^{-1}) = 1$.

Agora, para calcular $h_\alpha(\Gamma)$ aplicaremos a proposição 4.33. Fixe $\epsilon > 0$. Sendo d métrica em X oriunda da norma, para $(u, v) \in N_n$ temos

$$d(g_{u,v}(x, y), g_{u,v}(0, 0)) = \|(e^u x, e^v y) - (0, 0)\| = \|(e^u x, e^v y)\|.$$

Dessa forma, $D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \|(e^u x, e^v y)\| < \epsilon \text{ para todo } (u, v) \in N_n\}$. Como em \mathbb{R}^2 as normas são equivalentes, assumimos $\|(\xi, \eta)\| = \max\{|\xi|, |\eta|\}$. Logo, temos a igualdade

$$D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; |x| < \frac{\epsilon}{e^n}, |y| < \frac{\epsilon}{e^n} \right\}.$$

De fato, observe que fixado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o maior valor de $\|(e^u x, e^v y)\|$ é obtido para $(0, n)$ ou $(n, 0)$ em N_n . Então, ao supormos $|x| < \frac{\epsilon}{e^n}$ e $|y| < \frac{\epsilon}{e^n}$ obtemos

$$\|(e^u x, e^v y)\| \leq \max\{e^n |x|, |y|\} < \epsilon \quad \text{ou} \quad \|(e^u x, e^v y)\| \leq \max\{|x|, e^n |y|\} < \epsilon.$$

Por outro lado, se $\|(e^u x, e^v y)\| < \epsilon$ para todo $(u, v) \in N_n$, em particular $\|(e^n x, e^0 y)\| < \epsilon$ e $\|(e^0 x, e^n y)\| < \epsilon$. Assim, $|x| < \frac{\epsilon}{e^n}$ e $|y| < \frac{\epsilon}{e^n}$ donde concluímos a igualdade. Logo, vemos que $\mu(D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)) = 4\epsilon^2 e^{-2n}$ e, estando satisfeitas as condições da proposição 4.33, temos

$$\begin{aligned} h_\alpha(\Gamma) = k_\alpha(\Gamma) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log \mu(D_{N_n}(0, \epsilon, \Gamma)) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log 4\epsilon^2 e^{-2n} \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} \log e^{-2n} = 2. \end{aligned}$$

Este é um exemplo no qual $h_\alpha(\Gamma) > \max_{(u,v) \in N_1} (h(g_{u,v}) + h(g_{u,v}^{-1})) = 1$.

Assuma agora que G é um grupo localmente compacto e conexo. Então, dada uma vizinhança compacta U da identidade em G e uma ação uniforme Γ de G sobre (X, d) , denotamos por $h_U(\Gamma)$ a entropia topológica de Γ com respeito ao sistema regular padrão $\alpha_U = (U, U^2, U^3, \dots)$. Pelo exemplo 4.3, temos que α_U é um sistema fortemente regular.

Observação 4.39. Note que se $h_U(\Gamma) = 0$ para a algum U , então $h_V(\Gamma) = 0$ para toda vizinhança compacta V da identidade em G . De fato, para qualquer V existe $k = k(V) \in \mathbb{N}$ com $V \subset U^k$ e assim $V^n \subset U^{kn}$ para todo n . Logo, podemos ver que $h_V(\Gamma) \leq k h_U(\Gamma)$. Dessa forma, se G admite uma ação linear com entropia não nula, vemos que isso não depende da escolha do sistema regular padrão, isto é, da escolha de U .

Cada representação contínua

$$\begin{aligned} A : G &\longrightarrow Gl(k, \mathbb{C}) \\ g &\longmapsto A_g \end{aligned}$$

gera de modo natural uma ação linear Γ do grupo G sobre \mathbb{C}^k por

$$\begin{aligned} \Gamma : G \times \mathbb{C}^k &\longrightarrow \mathbb{C}^k \\ (g, x) &\longmapsto \Gamma(g, x) = A_g(x). \end{aligned}$$

Dada uma vizinhança compacta U da identidade em G , definimos a entropia topológica da representação A por $h_U(A) = h_U(\Gamma)$.

Para a prova do teorema 4.42 precisamos de alguma preparação técnica.

Observação 4.40. Dado um inteiro arbitrário $k > 1$, denote $\mathcal{T}_k = \mathcal{T}(k, \mathbb{C})$ o grupo das matrizes $k \times k$ complexas, invertíveis e triangulares superiores. Para $\lambda \geq 1$, $\rho > 0$ seja $U_k(\lambda, \rho)$ o conjunto das matrizes $A = (a_{ij}) \in \mathcal{T}_k$ tais que $|a_{ii}| \leq \lambda$ para todo i e $|a_{ij}| \leq \rho$ para todo $i \neq j$. Temos que $U_k(\lambda, \rho)$ é um subconjunto compacto de \mathcal{T}_k contendo a matriz identidade I . Além disso, se supormos $\lambda > 1$, então $U_k(\lambda, \rho)$ é uma vizinhança de I em \mathcal{T}_k .

Lema 4.41. Para cada inteiro $k > 1$ e qualquer $\rho > 0$, $\lambda \geq 1$ existe um polinômio real $p_i(x)$ de grau i , $i = 0, 1, \dots, k-1$, tal que para cada $A = (a_{ij}) \in (U_k(\lambda, \rho))^n$ temos $|a_{ij}| \leq \lambda^n p_{j-i}(n)$, $1 \leq i \leq j \leq k$.

Demonstração: Inicialmente observamos que $U_k(\lambda, \rho) = \lambda U_k(1, \rho/\lambda)$, $\rho > 0$ e $\lambda \geq 1$. Então, para a prova do lema é suficiente considerar o caso $\lambda = 1$. De fato, assuma que o lema seja válido para este caso (isto é, é válido para toda matriz em $(U_k(1, \theta))^n$ com $\theta > 0$ qualquer). Da igualdade acima temos

$$(U_k(\lambda, \rho))^n = (\lambda U_k(1, \rho/\lambda))^n = \lambda^n (U_k(1, \rho/\lambda))^n,$$

para qualquer $\rho > 0$ e $\lambda \geq 1$. Logo, dado $B = (b_{ij}) \in (U_k(\lambda, \rho))^n$ obtemos que $B = \lambda^n A$ para algum $A = (a_{ij}) \in (U_k(1, \rho/\lambda))^n$. Mas, $|b_{ij}| = |\lambda^n a_{ij}| = \lambda^n |a_{ij}| \leq \lambda^n \rho_{j-i}(n)$, $1 \leq i \leq j \leq k$. Portanto, o lema é válido para qualquer $\lambda \geq 1$.

Sem perda de generalidade, também podemos assumir que os coeficientes dos polinômios p_{j-i} são positivos. Fixe então $\rho > 0$, assuma $\lambda = 1$ e por brevidade denote $U_k = U_k(1, \rho)$. Para a prova usaremos indução sobre k . Mostraremos primeiro que é válido para $k = 2$. Neste caso, dado $A = (a_{ij}) \in (U_2)^n$, basta tomar os polinômios $p_1(x) = \rho x$ e $p_0(x) = 1$. Logo, temos $|a_{ij}| \leq \rho n = p_1(n)$ se $i \neq j$ e $|a_{ii}| \leq 1 = p_0(n)$, $i, j = 1, 2$. Assuma então que para algum $k > 1$ existam polinômios p_i tais que $|a_{ij}| \leq p_{j-i}(n)$, $1 \leq i \leq j \leq k$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $A = (a_{ij}) \in (U_k)^n$.

Agora, devemos encontrar polinômios P_i com propriedades similares para as matrizes em $(U_{k+1})^n$. Primeiro note que para uma matriz $A \in \mathcal{T}_{k+1}$ podemos escrever

$$A = \begin{pmatrix} B & \xi \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

no qual $B \in \mathcal{T}_k$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ vetor coluna, $0 = (0, 0, \dots, 0)$ vetor linha com k entradas nulas e $\mu \in \mathbb{C}$. Para uma tal matriz bloco utilizamos a notação $A = (B \mid \xi \mid \mu)$. Em particular, se $A = (a_{ij}) \in (U_{k+1})^n$ também temos

$$A = (B^{(1)} \mid \xi^{(1)} \mid \mu^{(1)}) \cdots (B^{(n)} \mid \xi^{(n)} \mid \mu^{(n)}),$$

com $(B^{(t)} \mid \xi^{(t)} \mid \mu^{(t)}) \in U_{k+1}$ para cada $t = 1, \dots, n$. Por indução podemos verificar que

$$A = \left(C^{(n)} \left| \sum_{t=1}^n C^{(t-1)} \eta^{(t)} \right| \mu \right),$$

no qual $\mu = \mu^{(1)} \cdots \mu^{(n)}$,

$$|\eta_j^{(t)}| \leq |\xi_j^{(t)}|, \quad j = 1, \dots, k, \quad (4.8)$$

e $C^{(t)} = (c_{ij}^{(t)}) = B^{(1)} \cdots B^{(t)} \in (U_k)^{(t)}$ para $t = 1, \dots, n$. A hipótese indutiva implica

$$|c_{ij}^{(t)}| \leq p_{j-i}(t), \quad 1 \leq i \leq j \leq k < k+1, \quad (4.9)$$

para todo $t = 1, \dots, n$. Em particular, para $t = n$ temos $|a_{ij}| \leq p_{j-i}(n)$, $1 \leq i \leq j \leq k$. Ainda faltam ser verificadas as entradas $a_{(i)(k+1)}$ da última coluna de A . Note então que $a_{(k+1)(k+1)} \leq 1$ e

$$a_{(i)(k+1)} = \sum_{t=1}^n d_i^{(t)}, \quad d_i^{(t)} = \sum_{j=i}^k c_{ij}^{(t-1)} \eta_j^{(t)}$$

para todo $i = 1, \dots, k$. Note também que $|c_{ii}^{(t)}| \leq 1$ e $|\xi_j^{(t)}| \leq \rho$ para todo $i, j = 1, \dots, k$.

Assim, por (4.8) e (4.9) temos

$$|d_i^{(t)}| = \left| \sum_{j=i}^k c_{ij}^{(t-1)} \eta_j^{(t)} \right| \leq \sum_{j=i}^k |c_{ij}^{(t-1)}| |\eta_j^{(t)}| \leq \rho \sum_{j=i}^k |c_{ij}^{(t-1)}| \leq \rho \sum_{j=i}^k p_{j-i}(t-1) \leq Q_{k-i}(t), \quad (4.10)$$

no qual $p_0 = 1$ e

$$Q_s(x) = \rho \sum_{r=0}^s p_r(x) \quad (4.11)$$

é um polinômio de grau s com coeficientes positivos.

É um resultado conhecido (veja, por exemplo, em [2]) que para cada inteiro $m \geq 1$ existe um polinômio R_{m+1} de grau $m+1$ tal que

$$1 + 2^m + 3^m + \dots + n^m = R_{m+1}(n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Então, por (4.10) e (4.11) temos

$$\begin{aligned} |a_{(i)(k+1)}| &\leq \sum_{t=1}^n |d_i^{(t)}| \leq \sum_{t=1}^n Q_{k-i}(t) = \sum_{t=1}^n \sum_{r=0}^{k-i} a_{(r)(k-i)} t^{k-i-r} \\ &= \sum_{r=0}^{k-i} a_{(r)(k-i)} \sum_{t=1}^n t^{k-i-r} = \sum_{r=0}^{k-i} a_{(r)(k-i)} R_{k-i-r+1}(n) \leq P_{k+1-i}(n), \end{aligned}$$

onde $P_{k+1-i}(x)$ é um polinômio de grau $k+1-i$ obtido do polinômio $\sum_{r=0}^{k-i} a_{(r)(k-i)} R_{k-i-r+1}(x)$ trocando-se os coeficientes negativos pelos seus valores absolutos. Isto prova a afirmação. \square

Teorema 4.42. *Sejam G um grupo solúvel, conexo e localmente compacto, U um subconjunto compacto contendo a identidade em G e*

$$A : G \rightarrow Gl(k, \mathbb{C}), \quad g \mapsto A_g$$

uma representação contínua do grupo G tal que

$$\lambda = \sup_{g \in U} \max_{\mu \in \text{Spec} A_g} |\mu| > 1.$$

Então, $h_U(\Gamma) \leq 2k \log \lambda$. Se existe $g \in U$ com $|\mu| = \lambda > 1$ para cada $\mu \in \text{Spec} A_g$ temos

$$h_U(\Gamma) = 2k \log \lambda.$$

Demonstração: Como G é solúvel e conexo, pelo teorema 1.8 podemos assumir que, para cada $g \in G$, A_g é uma matriz em \mathcal{T}_k . Dado $M \in Gl(k, \mathbb{C})$ definimos a norma em $Gl(k, \mathbb{C})$ como sendo

$$\|M\| = \sup_{\|x\|_s=1} \|Mx\|_s,$$

onde $\|\cdot\|_s$ é a norma em \mathbb{C}^k definida por

$$\|x\|_s = \|(x_1, \dots, x_k)\|_s = \max\{|x_1|, \dots, |x_k|\}.$$

Mostraremos que existe $\rho > 0$ tal que $A(U) \subset U_k(\lambda, \rho)$. De fato, desde que $Gl(k, \mathbb{C})$ é um espaço métrico, $U \subset G$ compacto e A representação contínua, temos que $A(U)$ é compacto. Logo, existe $r > 0$ tal que para todo $M = (m_{ij})$ em $A(U)$, $\|M\| \leq r$. Observe então que dado $x = (0, \dots, 1, 0, \dots) \in \mathbb{C}^k$ com 1 na n -ésima coordenada $1 \leq n \leq k$, temos $\|x\|_s = 1$ e

$$\|Mx\|_s \leq \|M\| < r.$$

Contudo, $|m_{ln}| \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{|m_{in}|\} = \|Mx\|_s$ para $1 \leq l \leq k$. Portanto, $|m_{ij}| \leq \|M\| < r$ para todo $1 \leq i, j \leq k$. Mas, para M triangular superior, temos m_{ii} autovalor de M para todo i . Assim, $|m_{ii}| \leq \lambda$ para todo i . Tomando-se então $\rho = r$, temos $A(U) \subset U_k(\lambda, \rho)$.

Mostraremos agora que existe $P(x)$ com coeficientes reais positivos tal que $\|M\| \leq \lambda^n P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $M \in A(U^n)$. Note que $A(U^n) = (A(U))^n \subset (U_k(\lambda, \rho))^n$. Observe também que para $x = (x_1, \dots, x_k)$, com $\|x\|_s = 1$, temos $|x_i| \leq 1$ para todo $i = 1, \dots, k$. Logo, para uma matriz $M \in \mathcal{T}_k$, obtemos

$$|m_{i1}x_1 + \dots + m_{ik}x_k| \leq |m_{i1}| + \dots + |m_{ik}| \quad \text{para todo } i = 1, \dots, k.$$

Então,

$$\|Mx\|_s = \max_{i=1, \dots, k} \{|m_{i1}x_1 + \dots + m_{ik}x_k|\} \leq \max_{i=1, \dots, k} \{|m_{i1}| + \dots + |m_{ik}|\}$$

para todo $M \in \mathcal{T}_k$ e todo $x \in \mathbb{C}^k$ tal que $\|x\|_s = 1$. Dessa forma,

$$\|M\| = \sup_{\|x\|_s=1} \|Mx\|_s \leq \max_{i=1, \dots, k} \{|m_{i1}| + \dots + |m_{ik}|\} \leq \sum_{i,j} |m_{ij}|. \quad (4.12)$$

Pelo lema 4.41 para cada $M = (m_{ij})$ em $A(U^n) \subset (U_k(\lambda, \rho))^n$ podemos encontrar polinômios $p_i(x)$ com coeficientes reais positivos tais que $|m_{ij}| \leq \lambda^n p_{j-i}(n)$, $1 \leq i \leq j \leq k$ e para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, fixando-se n , por (4.12) obtemos

$$\|M\| \leq \sum_{i,j} |m_{ij}| \leq \lambda^n \sum_{i,j} p_{j-i}(n) = \lambda^n P(n).$$

Agora, sabemos que existe um isomorfismo $f : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{R}^{2k}$. Logo, devemos ter f uniformemente contínua, cuja inversa é uniformemente contínua. Considere então o diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} G & \times & \mathbb{C}^k & \xrightarrow{\Gamma} & \mathbb{C}^k \\ \downarrow id & & \downarrow f & & \downarrow f \\ G & \times & \mathbb{R}^{2k} & \xrightarrow{\Lambda} & \mathbb{R}^{2k} \end{array}$$

no qual a ação uniforme Λ é dada de modo que $f \circ \Gamma = \Lambda \circ (id \times f)$. Deste modo, concluímos que (f, id) é uma conjugação para as ações Γ e Λ . Portanto, $h_U(\Gamma) = h_U(\Lambda)$.

Fixe $\epsilon > 0$ e considere um cubo compacto $K = [-a, a]^{2k}$, $a \in \mathbb{N}$, em \mathbb{R}^{2k} com a métrica dada pela norma do máximo. Dado $n \in \mathbb{N}$ vamos construir um subconjunto (U^n, ϵ) -gerador para K . Para tanto denote

$$m = \left\lceil \frac{\lambda^n P(n)}{\epsilon} \right\rceil + 1,$$

no qual $[x] = \max\{z \in \mathbb{Z}; z \leq x\}$. Além disso, considere $F = \{j/m; j = 0, \pm 1, \dots, \pm am\}$. Como $-am \leq j \leq am$, temos $F \subset [-a, a] \subset \mathbb{R}$ e $F^{2k} \subset K$.

Mostraremos que $E = F^{2k}$ é um conjunto (U^n, ϵ) -gerador para K com respeito a Λ . De fato, se tivermos $x = (x_1, \dots, x_{2k})$ em K , então para cada $x_i \in [-a, a]$ podemos encontrar $y_i \in F$ tal que $|x_i - y_i| \leq 1/m$. Logo, para $y = (y_1, \dots, y_{2k})$ em E temos

$$d(x, y) = \|x - y\|_s = \max_{1 \leq i \leq 2k} |x_i - y_i| \leq \frac{1}{m}.$$

Então, para $g \in U^n$ temos $M = A_g \in A(U^n)$ e

$$d(gx, gy) = \|Mx - My\|_s = \|M(x - y)\|_s \leq \|M\| \cdot \|x - y\|_s \leq \lambda^n P(n) \cdot \frac{1}{m} < \epsilon,$$

no qual a última desigualdade segue de $\epsilon = \frac{\lambda^n P(n)}{m-1} > \frac{\lambda^n P(n)}{m}$. Assim, E é um conjunto (U^n, ϵ) -gerador para K com respeito a Λ . Dessa forma, $r_n(\epsilon, \Lambda, K) \leq \#E \leq (2am + 1)^{2k}$ e

$$\begin{aligned} r(\epsilon, \Lambda, K) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(2am + 1)^{2k} \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} \log \left(2a \left(\frac{\lambda^n P(n)}{\epsilon} + 1 \right) + 1 \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} \log \left(\frac{2a\lambda^n P(n)}{\epsilon} + 2a + 1 \right) \\ &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} \log \left(\frac{2a\lambda^n P(n) + 2a\epsilon + \epsilon}{\epsilon} \right). \end{aligned}$$

Como $\lambda > 1$, observe que dado $\epsilon' > 0$ podemos encontrar n suficientemente grande tal que $2a\epsilon + \epsilon \leq \epsilon'\lambda^n$. Então,

$$\log \left(\frac{2a\lambda^n P(n) + 2a\epsilon + \epsilon}{\epsilon} \right) \leq \log \left(\frac{(2aP(n) + \epsilon')\lambda^n}{\epsilon} \right) = \log \frac{2aP(n) + \epsilon'}{\epsilon} + n \log \lambda.$$

Continuando obtemos

$$\begin{aligned} r(\epsilon, \Lambda, K) &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} \left[\log \frac{2aP(n) + \epsilon'}{\epsilon} + n \log \lambda \right] \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} \log \frac{2aP(n) + \epsilon'}{\epsilon} + \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{2k}{n} (n \log \lambda) \\ &\leq 2k \log \lambda. \end{aligned}$$

Logo, $h_\alpha(\Lambda, K) \leq 2k \log \lambda$ e, portanto, $h_U(\Gamma) = h_U(\Lambda) \leq 2k \log \lambda$.

Assuma agora que existe $g \in U$ com $|\mu| = \lambda > 1$ para cada $\mu \in \text{Spec}A_g$. Podemos ver A_g enquanto aplicação linear do espaço linear \mathbb{C}^k . Então, considere a aplicação linear \tilde{A}_g do espaço linear \mathbb{R}^{2k} tal que $f \circ A_g = \tilde{A}_g \circ f$. Logo, temos $h(A_g) = h(\tilde{A}_g)$.

Podemos ver a aplicação linear \tilde{A}_g como a aplicação linear A_g “realificada”. De maneira geral, se μ_j , $j = 1, \dots, k$, são os autovalores de uma aplicação linear sobre um espaço vetorial complexo, então os autovalores desta aplicação, vista enquanto aplicação linear sobre o realificado deste espaço, passam a ser $\mu_j, \bar{\mu}_j$, $j = 1, \dots, k$ (veja [18], p. 108).

Então, por hipótese e pelo teorema 3.19 temos que

$$h(A_g) = h(\tilde{A}_g) = \sum_{|\mu|>1} \log |\mu| = 2k \log \lambda.$$

Mas pela proposição 4.18 também sabemos que $h_U(\Gamma) \geq h(A_g)$. Logo, $h_U(\Gamma) \geq 2k \log \lambda$ e, portanto, $h_U(\Gamma) = 2k \log \lambda$. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] R. L. Adler, A. G. Konheim e M. H. McAndrew - Topological entropy, Trans. Americ. Math. Soc. 114 (1965), 309-319.
- [2] T. M. Apostol - Calculus, v.1, ed.2, John Wiley and Sons, New York, 1967.
- [3] R. Bowen - Entropy for Group Endomorphisms and Homogeneous spaces, Trans. Americ. Math. Soc. 153 (1971), 401-414.
- [4] G. Bredon - Introduction to Compact Transformation Groups, Academic Press, New York, 1972.
- [5] M. P. do Carmo - Geometria Riemanniana, Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2008.
- [6] F. Colonius, C. Kawan - Invariance Entropy for Control Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics 48 (2009), 1701-1721.
- [7] T. F. Ferraiol - Entropia e Ações de Grupos de Lie, Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, 2008.
- [8] L. W. Goodwyn - Topological Entropy Bounds Measure Theoretic Entropy, Proc. Amer. Math. Soc. 23(1969), 679-688.
- [9] E. Hewitt, K. Ross - Abstract Harmonic Analysis, vol.1, ed. 2, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [10] K. H. Hofmann, L. N. Stojanov - Topological Entropy of Group and Semigroup Actions, Advances in Mathematics 115 (1995), 54-98.

-
- [11] A. Katok - Fifty years of entropy in dynamics: 1958-2007, *Journal of Modern Dynamics* 4 (2007), 545-596.
- [12] A. I. Khinchin - The Entropy Concept in Probability Theory, *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, vol. VIII, no. 3 (1953), 3-20.
- [13] A. I. Khinchin - *Mathematical Foundations of Information Theory*, Bover Publications, New York, 1957.
- [14] L. Loomis - *An Introduction to Abstract Harmonic Analysis*, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1953.
- [15] R. Mañe - *Teoria Ergódica*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1983.
- [16] D. Montgomery, L. Zippin - *Topological Transformations Groups*, Interscience, New York/London, 1955.
- [17] J. R. Munkres - *Topology*, ed.2, Prentice Hall, New Jersey, 2000.
- [18] L. A. B. San Martin - *Álgebras de Lie*, ed.2, Editora Unicamp, Campinas, 2010.
- [19] C. E. Shannon - A Mathematical Theory of Communication, *The Bell System Technical Journal*, 27 (1948), 379-423.
- [20] M. van der Put, M. F. Singer - *Galois Theory of Linear Differential Equations*, Springer, New-York, 2003.
- [21] P. Walters - *An Introduction to Ergodic Theory*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1982.