

UMA DEMONSTRAÇÃO PROBABILÍSTICA DO TEOREMA DE CHENG-LIOUVILLE

Eduardo de Amorim Neves

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Ryuichi Fukuoka

Maringá - PR

Fevereiro, 2008

UMA DEMONSTRAÇÃO PROBABILÍSTICA DO TEOREMA DE CHENG-LIOUVILLE

Eduardo de Amorim Neves

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Ryuichi Fukuoka - UEM

(Orientador)

Prof. Dr. Paulo Régis Caron Ruffino - UNICAMP

Prof. Dr. Alexandre José Santana - UEM

Maringá - PR

Fevereiro, 2008

A minha mãe e meus avós.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela dádiva da vida.

Agradeço ao professor e amigo Ryuichi Fukuoka, pelos ensinamentos e pela extrema paciência e dedicação não só durante este trabalho mas durante todos esses anos em que fui seu aluno.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, pela contribuição na minha formação acadêmica.

Ao professor Pedro José Catuogno pela ajuda com o artigo.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos companheiros de graduação e pós-graduação pela agradável convivência, pelos excelentes churrascos e claro pela grande ajuda que vocês me deram durante toda essa jornada.

Finalmente, um agradecimento especial a minha família, pois sem ela nada disso teria acontecido.

Resumo

O seguinte teorema é devido a S.-Y.Cheng [6]:

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação harmônica entre variedades Riemannianas completas, e suponha que M tem curvatura de Ricci não negativa, N tem curvatura seccional não positiva e N é simplesmente conexa. Se f tem crescimento sublinear assintótico, então f é constante.

Há uma demonstração probabilística deste teorema devido a Seth Stafford [25].

O objetivo deste trabalho é detalhar esta demonstração para o caso $N = \mathbb{R}^n$.

Abstract

The following theorem due to S.-Y.Cheng [6]:

Let $f : M \rightarrow N$ be a harmonic map, where M and N are complete Riemannian manifolds. Suppose that M has nonnegative Ricci curvature, N has nonpositive sectional curvature, and N is simply connected. If f has sublinear asymptotic growth, then f must be a constant map.

There is a probabilistic proof of this theorem due to the Seth Stafford [25].

The aim of this work is to reproduce this proof with details for the case $N = \mathbb{R}^n$.

Sumário

Introdução	1
1 Geometria Riemanniana	3
1.1 Variedades Diferenciáveis	3
1.2 Métricas e Conexões Riemannianas	11
1.3 Geodésicas	18
1.4 Curvaturas e Campos de Jacobi	22
1.5 Imersões Isométricas	28
1.6 Variedades Completas	28
2 Cálculo Tensorial	32
2.1 Tensores em Espaços Vetoriais	32
2.2 Campos de Tensores em uma Variedade	34
2.3 Fórmula de Bochner	38
3 Teorema da Comparação de Bishop	42
3.1 Preliminares	42
3.2 Demonstração do Teorema da Comparação de Bishop	47
4 Cálculo Estocástico	52

4.1	Elementos da Teoria da Medida	52
4.2	Esperança e Esperança Condicional	57
4.3	Processos Estocásticos e Martingales	61
4.4	Integração Estocástica	63
5	Movimento Browniano	69
5.1	Movimento Browniano no Espaço Euclidiano	69
5.2	Equações Diferenciais Estocásticas	77
5.3	Movimento Browniano em Variedades	83
6	Teorema de Cheng-Liouville	87
6.1	Preliminares	87
6.2	Demonstração do Teorema de Cheng-Liouville para $N = \mathbb{R}^n$	96
	Bibliografia	97

Introdução

Em 1980, S.-Y.Cheng generalizou o célebre teorema de Liouville de Análise Complexa para aplicações harmônicas entre variedades Riemannianas completas. Mais precisamente Cheng demonstrou o seguinte teorema:

Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação harmônica entre variedades Riemannianas completas, e suponha que M tem curvatura de Ricci não negativa, N tem curvatura seccional não positiva e N é simplesmente conexa. Se f tem crescimento sublinear assintótico, então f é constante.

A este teorema vamos referir como teorema de Cheng-Liouville.

Dez anos mais tarde em 1990, Seth Stafford demonstrou esta generalização do teorema de Liouville feita por Cheng utilizando teoria de Probabilidade.

Neste trabalho demonstraremos o teorema acima utilizando a mesma técnica do artigo do Stafford [25], para o caso em que $N = \mathbb{R}^n$. Para realizar tal demonstração precisaremos estudar duas grandes áreas da Matemática, que são Geometria e Probabilidade, mais especificamente Geometria Riemanniana e Cálculo Estocástico.

Dividimos este trabalho da seguinte maneira:

No primeiro capítulo estudaremos os conceitos básicos da Geometria Riemanniana que serão utilizados no restante do trabalho.

No segundo capítulo abordaremos os conceitos necessários para podermos definir o Laplaciano em variedades Riemannianas e demonstrar a fórmula de Bochner.

No terceiro capítulo veremos as definições e resultados necessários para demonstrar o teorema da comparação de Bishop.

No capítulo 4 apresentaremos uma introdução ao Cálculo Estocástico contendo as definições e os resultados básicos dessa teoria, tais como: espaço de probabilidade, esperança, esperança condicional, processos estocásticos, martingales e integração estocástica.

No Capítulo 5 vamos estudar um dos principais objetos do Cálculo Estocástico que é o movimento Browniano. Na última seção deste capítulo vamos relacionar a geometria Riemanniana e o Cálculo Estocástico definindo o movimento Browniano em variedades Riemannianas.

Por fim, o último capítulo é dedicado a demonstração do teorema do artigo do Stafford [25], para o caso em que $N = \mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

Geometria Riemanniana

Neste capítulo abordaremos os conceitos fundamentais da Geometria Riemanniana que serão essenciais para o restante do trabalho. Ressaltamos que a teoria sobre variedades diferenciáveis e Geometria Riemanniana apresentadas neste capítulo podem ser encontradas em do Carmo [7], e por isso omitiremos a maioria das demonstrações dos resultados apresentados neste capítulo.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Ao longo deste trabalho o termo diferenciável significará de classe C^∞ .

Definição 1.1 *Uma variedade diferenciável de dimensão n é um conjunto M munido de uma família de aplicações injetoras $x_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ de abertos U_α de \mathbb{R}^n em M tais que:*

$$(1) \bigcup_{\alpha} x_\alpha(U_\alpha) = M.$$

(2) *Se x_α e x_β são tais que $x_\alpha(U_\alpha) \cap x_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$, então $x_\alpha^{-1}(W)$ e $x_\beta^{-1}(W)$ são abertos em \mathbb{R}^n e a aplicação $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha : x_\alpha^{-1}(W) \rightarrow U_\beta$ é diferenciável.*

(3) *A família $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ é maximal em relação às condições (1) e (2).*

Denotaremos uma variedade diferenciável de dimensão n por M^n .

Definição 1.2 Dado $p \in x_\alpha(U_\alpha)$ dizemos que (U_α, x_α) é uma parametrização (ou sistema de coordenadas) de M em p , e chamamos $x_\alpha(U_\alpha)$ de vizinhança coordenada em p .

Definição 1.3 Uma estrutura diferenciável em M é uma família de parametrizações $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ que satisfazem (1) e (2).

Observação 1.4 Uma estrutura diferenciável $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, x_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ dá origem a uma única estrutura diferenciável maximal $\tilde{\mathcal{A}}$ da seguinte maneira:

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M; x_\alpha^{-1} \circ \varphi \text{ e } \varphi^{-1} \circ x_\alpha \text{ são de classe } C^\infty$$

em seu domínio de definição para todo $\alpha \in I\}$.

Portanto, com um certo abuso de linguagem, podemos dizer que uma variedade diferenciável é um conjunto munido com uma estrutura diferenciável.

O exemplo a seguir mostra que um conjunto M pode admitir mais de uma estrutura diferenciável maximal.

Exemplo 1.5 Considere em \mathbb{R} as seguintes estruturas diferenciáveis: $\mathcal{A} = (\mathbb{R}, I)$, que possui a aplicação identidade I como única parametrização e $\mathcal{B} = (\mathbb{R}, \varphi(t) = t^3)$. Assim as estruturas máximas determinadas por \mathcal{A} e \mathcal{B} são distintas, pois $\varphi^{-1} \circ I = \sqrt[3]{t}$ não é diferenciável em 0 e portanto $\varphi \notin \mathcal{A}$.

Observação 1.6 Uma estrutura diferenciável em um conjunto M induz de maneira natural uma topologia em M . Para tanto basta definir que $A \subset M$ é um aberto de M se $x_\alpha^{-1}(A \cap x_\alpha(U_\alpha))$ é um aberto de \mathbb{R}^n para todo α . Assim com esta topologia os conjuntos $x_\alpha(U_\alpha)$ são abertos e as aplicações x_α são contínuas.

Observação 1.7 No decorrer da dissertação, vamos supor que as variedades diferenciáveis têm topologias naturais que satisfazem o axioma de Hausdorff e o axioma

da base enumerável, isto é, dados dois pontos distintos da variedade existem vizinhanças destes pontos que não se interceptam e a variedade pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.

Antes de prosseguirmos no estudo de variedades diferenciáveis, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 1.8 *O espaço euclidiano \mathbb{R}^n , com a estrutura diferenciável dada pela identidade é uma variedade diferenciável.*

Exemplo 1.9 (Superfícies regulares do \mathbb{R}^n). *Um subconjunto $S^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$ é uma superfície regular de dimensão k se para cada $p \in S^k$ existem uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^n e uma aplicação $\varphi : U \subset \mathbb{R}^k \rightarrow S^k \cap V$ de um aberto $U \subset \mathbb{R}^k$ sobre $S^k \cap V$ tais que:*

(a) φ é diferenciável. Isto significa que se escrevermos

$$\varphi(x_1, \dots, x_k) = (f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)), \quad (x_1, \dots, x_k) \in U,$$

as funções $f_1(x_1, \dots, x_k), \dots, f_n(x_1, \dots, x_k)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em U .

(b) φ é um homeomorfismo.

(c) $d\varphi_q : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ é injetiva para todo $q \in U$.

Não é difícil mostrar que superfícies regulares do \mathbb{R}^n são variedades diferenciáveis de dimensão $k \leq n$.

Exemplo 1.10 *Sejam M^m e N^n variedades diferenciáveis com estruturas diferenciáveis $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ e $\mathcal{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in J}$ respectivamente. Então, o produto cartesiano $M \times N$ com a estrutura diferenciável $\mathcal{C} = \{(U_\alpha \times V_\beta, (\varphi_\alpha, \psi_\beta))\}_{(\alpha, \beta) \in I \times J}$ é uma variedade diferenciável de dimensão $m + n$.*

Exemplo 1.11 Como caso particular do exemplo acima, podemos considerar o produto cartesiano $\mathbb{T}^n = \underbrace{\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1}_{n\text{-vezes}}$ chamado de *n-toro*.

A próxima definição vem introduzir a idéia de diferenciabilidade de aplicações definidas em variedades diferenciáveis.

Definição 1.12 Uma aplicação entre variedades diferenciáveis $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é dita diferenciável em $p \in M$, se dada qualquer parametrização $y : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow N$ em $\varphi(p)$, existe uma parametrização $x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ em p tal que $\varphi(x(U)) \subset y(V)$ e a aplicação $y^{-1} \circ \varphi \circ x : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em $x^{-1}(p)$. Dizemos que φ é diferenciável em um aberto de M se for diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Observação 1.13 Pela condição (2) da Definição 1.1, temos que a definição acima não depende da escolha das parametrizações.

Definição 1.14 Se $\varphi : M \rightarrow N$ é diferenciável, inversível e a sua inversa φ^{-1} é diferenciável então dizemos que φ é um difeomorfismo. Neste caso M é dita difeomorfa a N .

Definição 1.15 Dizemos que $\varphi : M \rightarrow N$ é um difeomorfismo local em $p \in M$ se existem vizinhanças U de p e V de $\varphi(p)$ tais que $\varphi|_U : U \rightarrow V$ é um difeomorfismo. Se para todo ponto $p \in M$, existe uma aplicação φ que seja um difeomorfismo local, dizemos então que M é localmente difeomorfa a N .

Observação 1.16 Toda variedade diferenciável M^n é localmente difeomorfa ao \mathbb{R}^n .

Com os conceitos definidos acima podemos estender a noção de vetor tangente às variedades diferenciáveis.

Definição 1.17 Seja M uma variedade diferenciável. Uma aplicação diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ é chamada curva diferenciável em M .

Definição 1.18 Seja $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M . Suponha que $\alpha(0) = p \in M$ e seja $\mathcal{D}(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em M . Então, definimos o vetor tangente à curva α em $t = 0$ como a função $\alpha'(0) : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha)}{dt} \right|_{t=0}$, $f \in \mathcal{D}(M)$.

Definição 1.19 Um vetor tangente em $p \in M$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes à M em p será indicado por T_pM .

Podemos expressar o vetor tangente à uma curva α em $t = 0$ com $\alpha(0) = p$ via uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M^n$ em $p = \varphi(0, \dots, 0)$ do seguinte modo:

Denote $\varphi^{-1} \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$. Assim pela injetividade de φ , tem-se $\varphi^{-1} \circ \alpha(0) = (x_1(0), \dots, x_n(0)) = (0, \dots, 0)$.

Então podemos representar o vetor tangente à α em $t = 0$ por:

$$\alpha'(0)f = \left. \frac{d(f \circ \alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ \alpha(t))}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d(f \circ \varphi)(x_1(t), \dots, x_n(t))}{dt} \right|_{t=0}.$$

Aplicando a regra da cadeia na última expressão obtemos

$$\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial(f \circ \varphi)}{\partial x_i}(x_1(0), \dots, x_n(0)) = \left(\sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t=0} \right) f$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t=0} : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ é definido como sendo o vetor tangente da curva $\beta_i(t) = \varphi(x_1(0), \dots, x_i(0) + t, \dots, x_n(0))$ em $t = 0$, e denotaremos $\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{t=0} f$ por $\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$. Sendo assim, podemos expressar $\alpha'(0) \in T_pM$ no sistema de coordenadas (U, φ) por

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^n x'_i(0) \frac{\partial}{\partial x_i}(p).$$

A expressão acima mostra que o vetor tangente a uma curva α em $t = 0$ depende apenas das derivadas de α em um sistema de coordenadas.

Observação 1.20 O conjunto T_pM , com as operações usuais de soma e multiplicação por escalar, forma um \mathbb{R} -espaço vetorial n -dimensional chamado espaço

tangente de M em p . A escolha de uma parametrização (U, φ) determina uma base para T_pM . De fato, basta considerar o conjunto $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\right\}$.

Sendo assim dados $p \in M$, $v \in T_pM$ e $f \in \mathcal{D}(M)$, podemos definir a derivada direcional de f em p na direção de v , denotada por, $vf = \left.\frac{d(f \circ \alpha)}{dt}\right|_{t=0}$, onde α é qualquer curva diferenciável em M com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. A aplicação $T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $v \mapsto vf$ é linear e $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$ tem-se:

$$(i) \quad v(f + g) = vf + vg.$$

$$(ii) \quad v(fg) = g(vf) + f(vg).$$

Exemplo 1.21 (O fibrado tangente). *Seja M^n uma variedade diferenciável e $\{(U_\alpha, x_\alpha)\}$ sua estrutura diferenciável máxima. Indicaremos por $(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha)$ as coordenadas de um ponto em U_α e por $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1^\alpha}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n^\alpha}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $x_\alpha(U_\alpha)$.*

O conjunto $TM = \{(p, v); p \in M, v \in T_pM\}$ munido da família de aplicações injetoras $\{(U_\alpha \times \mathbb{R}^n), y_\alpha\}$, onde $y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ é definido por

$$y_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, v_1, \dots, v_n) = \left(x_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha}\right),$$

é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$, chamada de fibrado tangente de M .

Agora com a definição de espaço tangente podemos estender às variedades diferenciáveis a noção de diferencial de uma aplicação diferenciável.

Definição 1.22 *Sejam M, N variedades diferenciáveis, e $\varphi : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $p \in M$ e $v \in T_pM$ definimos a diferencial de φ em p , como sendo $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$, dada por $d\varphi_p(v) = (\varphi \circ \alpha)'(0)$, onde $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon)$ é uma curva diferenciável com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Observe que a aplicação $d\varphi_p : T_pM \rightarrow T_{\varphi(p)}N$ é linear e não depende da escolha da curva α .*

Definição 1.23 *Sejam M e N variedades diferenciáveis e $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ uma aplicação diferenciável. A aplicação φ é chamada imersão se $d\varphi_p$ é injetora $\forall p \in M$. Além disso, se $\varphi : M \rightarrow \varphi(M)$ é um homeomorfismo, onde $\varphi(M)$ tem a topologia induzida de N , dizemos que φ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, então dizemos que M é uma subvariedade de N .*

Exemplo 1.24 *Todo subconjunto aberto de uma variedade diferenciável M é uma subvariedade de M .*

Exemplo 1.25 *Uma superfície regular $S^k \subset \mathbb{R}^n$, $k \leq n$, é uma subvariedade de \mathbb{R}^n*

Observação 1.26 *Se $\varphi : M^m \rightarrow N^n$ é uma imersão, então segue pelo teorema do núcleo e imagem de espaços vetoriais que $m \leq n$. A diferença $n - m$ é chamada a codimensão da imersão φ .*

Teorema 1.27 (Whitney). *Dada uma variedade diferenciável M^n , existe um mergulho $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ tal que a imagem $\varphi(M)$ é fechada em \mathbb{R}^{2n+1} .*

Demonstração: Ver Whitney [26]. □

Definição 1.28 *Um campo de vetores X em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor $X(p) \in T_pM$. Considerando uma parametrização (U, x) com $x(0) = p$, podemos escrever o vetor $X(p) \in T_pM$ na base $\{\frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p)\}$ de T_pM da seguinte maneira:*

$$X(p) = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

onde cada a_i é uma função real definida em $x(U)$ isto é $a_i : x(U) \rightarrow \mathbb{R}$.

O campo X é dito diferenciável se cada função a_i é diferenciável para alguma (e, portanto para qualquer) parametrização.

Denotaremos por $\mathcal{X}(M)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis definidos em M . Note que $\mathcal{X}(M)$ tem uma estrutura de $\mathcal{D}(M)$ -módulo além da estrutura natural de \mathbb{R} -espaço vetorial.

Definição 1.29 *Um campo de vetores X ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é correspondência que a cada $t \in I$ associa um vetor $X_t \in T_{\alpha(t)}M$. Dizemos que um campo de vetores X ao longo de uma curva é diferenciável se para toda função diferenciável f em M , a função $t \mapsto X_t f$ é diferenciável em I . Denotaremos por $\mathcal{X}(\alpha)$ o conjunto dos campos de vetores diferenciáveis ao longo de α .*

Daqui em diante vamos considerar apenas campos de vetores diferenciáveis.

Podemos também interpretar um campo de vetores X como sendo uma aplicação $X : \mathcal{D}(M) \rightarrow \mathcal{D}(M)$ definida do seguinte modo:

$$X(f)(p) = X(p)f = \left(\sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \right) f = \sum_{i=1}^n a_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p).$$

Com esta interpretação, dados campos de vetores X, Y de M , podemos considerar as funções $X(Y(f))$ e $Y(X(f))$, onde $f \in \mathcal{D}(M)$, e obter o seguinte resultado:

Lema 1.30 *Dados dois campos de vetores X e Y em M , existe um único campo de vetores de M , denotado por $[X, Y]$ e chamado de colchete, tal que para todo $f \in \mathcal{D}(M)$ tem-se $[X, Y](f) = X(Y(f)) - Y(X(f))$.*

Além disso, o campo $[X, Y]$ possui as seguintes propriedades:

Proposição 1.31 *Se X, Y e Z são campos de vetores diferenciáveis em M , $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$ então:*

- (a) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade);
- (b) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ (linearidade);
- (c) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi);
- (d) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.2 Métricas e Conexões Riemannianas

Nesta seção estudaremos variedades diferenciáveis munidas de uma estrutura métrica.

Definição 1.32 *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto p de M um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ no espaço tangente T_pM e que varia diferenciavelmente no seguinte sentido:*

Dados quaisquer dois campos de vetores diferenciáveis X, Y definidos em M , a aplicação $p \in M \mapsto \langle X(p), Y(p) \rangle_p$ é de classe C^∞ .

Isto equivale a dizer que as funções g_{ij} definidas em uma vizinhança coordenada $x(U)$ de M pela expressão $g_{ij}(p) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle_p$ são de classe C^∞ em $x(U)$.

Definição 1.33 *Uma variedade M munida de uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é chamada variedade Riemanniana e será denotada por $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. É comum também denotar a métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ por g .*

Exemplo 1.34 \mathbb{R}^n munido do produto interno usual é uma variedade Riemanniana.

Exemplo 1.35 (Espaço Hiperbólico). *O espaço hiperbólico n -dimensional é uma variedade Riemanniana definida como $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, munido da métrica $\langle u, v \rangle_p = \frac{u \cdot v}{x_n^2}$, onde $p = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{H}^n$, $u, v \in T_p\mathbb{H}^n$ e “ \cdot ” denota o produto interno usual do \mathbb{R}^n .*

Exemplo 1.36 *Dada uma imersão $\varphi : M^n \rightarrow N^{n+k}$ onde N é uma variedade Riemanniana com métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ podemos definir uma métrica (\cdot, \cdot) em M do seguinte modo: $(u, v)_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{f(p)}$ $u, v \in T_pM$. Nestas condições, a métrica (\cdot, \cdot) é dita métrica induzida por φ .*

O conceito de partição da unidade que definiremos a seguir tem como finalidade garantir a existência de métricas Riemannianas em uma variedade diferenciável.

De um modo mais geral a partição da unidade é uma ferramenta muito utilizada para estender um objeto local de uma variedade para um objeto global.

Definição 1.37 *Seja M uma variedade diferenciável. Uma família de abertos $V_\alpha \subset M$ com $\bigcup_\alpha V_\alpha = M$ é localmente finita se todo ponto $p \in M$ possui uma vizinhança U tal que $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$ apenas para um número finito de índices.*

Definição 1.38 *O suporte de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o fecho do conjunto dos pontos onde f é diferente de zero.*

Definição 1.39 *Dizemos que uma família $\{f_\alpha\}$ de funções diferenciáveis $f_\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma partição da unidade se:*

(1) *Para todo α , $f_\alpha \geq 0$ e o suporte de f_α está contido em uma vizinhança coordenada $V_\alpha = x_\alpha(U_\alpha)$.*

(2) *A família $\{V_\alpha\}$ é localmente finita.*

(3) $\sum_\alpha f_\alpha(p) = 1$, *para todo $p \in M$ (esta condição faz sentido, pois em cada p , $f_\alpha(p) \neq 0$ para apenas um número finito de índices).*

Dizemos que a partição $\{f_\alpha\}$ da unidade é subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

O teorema a seguir justifica as considerações feitas na Observação 1.7.

Teorema 1.40 *Uma variedade diferenciável M possui uma partição diferenciável da unidade se, e somente se, toda componente conexa de M é Hausdorff e tem base enumerável.*

Demonstração: Ver Brickell [2]. □

Com a teoria vista acima, podemos provar a existência de métricas Riemannianas em variedades diferenciáveis de Hausdorff e com base enumerável.

Proposição 1.41 *Toda variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável possui uma métrica Riemanniana.*

Demonstração: Como M é uma variedade diferenciável de Hausdorff e com base enumerável, temos pelo teorema acima que M possui uma partição da unidade. Seja $\{f_\alpha\}$ uma partição da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_\alpha\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Agora observe que em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ podemos definir uma métrica Riemanniana $\langle \cdot, \cdot \rangle_p^\alpha$ induzida pelo sistema de coordenadas (U_α, x_α) da seguinte maneira

$$\langle u, v \rangle_p^\alpha = \langle d(x_\alpha^{-1})_p(u), d(x_\alpha^{-1})_p(v) \rangle_q, \quad q = x_\alpha^{-1}(p),$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é a métrica canônica de $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$. Portanto, podemos definir uma métrica Riemanniana em M por meio da expressão

$$\langle u, v \rangle_p = \sum_{\alpha} f_{\alpha}(p) \langle u, v \rangle_p^{\alpha}, \quad u, v \in T_p M.$$

É fácil ver que esta expressão se trata realmente de uma métrica Riemanniana sobre a variedade diferenciável M . □

Com a teoria de campos de vetores e métrica Riemanniana, podemos definir o gradiente de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$ como sendo um campo de vetores ∇f em M dado por $\langle \nabla f, X \rangle = X(f)$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$. Usando a definição de derivada direcional vista na seção anterior, pode-se mostrar que $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$ tem-se:

$$(i) \nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g.$$

$$(ii) \nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g.$$

Além disso, o conceito de métrica Riemanniana nos permite calcular comprimentos de curvas diferenciáveis e ainda nos permite definir volume em uma variedade Riemanniana M .

Definição 1.42 *Sejam M uma variedade Riemanniana e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável. Definimos o comprimento de arco da curva α de a a b onde $[a, b] \subset I$*

por:

$$l_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\langle \alpha'(t), \alpha'(t) \rangle} dt.$$

Definição 1.43 *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e (U, φ) uma parametrização com $\{x_i\}$ o sistema de coordenadas locais associado. Dada $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com suporte contido em U , define-se a integral de h sobre M por*

$$\int_M h dV = \int_{\varphi(U)} (\sqrt{\det(g_{ij})} h) \circ \varphi^{-1} dx_1 \dots dx_n.$$

Agora se h é uma função contínua em M , define-se a integral de h sobre M por

$$\int_M h dV = \sum_{\alpha \in I} \int_M f_\alpha h dV,$$

onde $\{f_\alpha, \alpha \in I\}$ é uma partição da unidade subordinada à cobertura $\{V_\alpha\}$.

Definimos o volume $Vol(M)$ de M por

$$Vol(M) = \int_M dV = \sum_{\alpha \in I} \int_M f_\alpha dV.$$

$dV = \sqrt{\det(g_{ij})} dx_1 \dots dx_n$ é chamado elemento de volume da variedade Riemanniana.

A expressão acima está bem definida, isto é, não depende dos sistemas de coordenadas escolhido nem da partição da unidade associada.

Definição 1.44 *Uma isometria entre variedades Riemannianas M e N é um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow N$ tal que para todo $p \in M$ e todo par $u, v \in T_p M$ temos $\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$. Neste caso dizemos que M é isométrico a N .*

Definição 1.45 *Sejam M e N variedades Riemannianas. Uma aplicação diferenciável $\varphi : M \rightarrow N$ é uma isometria local em $p \in M$ se existir uma vizinhança $U \subset M$ de p tal que $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ é um difeomorfismo satisfazendo $\langle u, v \rangle_p = \langle d\varphi_p(u), d\varphi_p(v) \rangle_{\varphi(p)}$.*

Agora vamos introduzir o conceito de derivação sobre campos de vetores de M e isto é feito através da conexão afim.

Definição 1.46 Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$, a qual $\nabla(X, Y)$ será denotada por $\nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades:

$$(1) \nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$$

$$(2) \nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$$

$$(3) \nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y,$$

onde $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ e $f, g \in \mathcal{D}(M)$.

Seja (U, φ) uma parametrização de M em p e $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $X = \sum_{i=1}^n x_i X_i$, e $Y = \sum_{j=1}^n y_j Y_j$. Pela definição de conexão afim, temos que

$$\nabla_X Y = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j \Gamma_{ij}^k + X(y_k) \right) X_k \quad (1.1)$$

onde $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k X_k$. As funções Γ_{ij}^k são chamadas de símbolos de Christoffel da conexão ∇ .

Note que a expressão local de uma conexão afim, nos mostra que para calcular $(\nabla_X Y)(p)$, só precisamos do valor de $X(p)$ e do valor de Y ao longo de uma curva tangente a X em p .

Aqui podemos novamente usar a partição da unidade, para garantir a existência de uma conexão afim em uma variedade diferenciável M . Para isso, basta considerar em cada vizinhança coordenada $x_\alpha(U_\alpha)$ uma conexão afim ∇^α pela expressão (1.1), com $\Gamma_{ij}^k = 0$. Então definimos a conexão afim em M por

$$\nabla_X Y = \sum_{\alpha} f_{\alpha} \nabla_X^{\alpha} Y.$$

onde $\{f_{\alpha}\}$ é uma partição da unidade de M subordinada a uma cobertura $\{V_{\alpha}\}$ de M por vizinhanças coordenadas. Com isso provamos a seguinte proposição:

Proposição 1.47 Toda variedade diferenciável M possui uma conexão afim ∇ .

Exemplo 1.48 Sobre \mathbb{R}^n , temos uma conexão afim ∇ dada por:

$$(\nabla_X Y)_p = (X_p(Y_1), \dots, X_p(Y_n)), \text{ onde } Y = (Y_1, \dots, Y_n) \text{ e } p \in \mathbb{R}^n.$$

Exemplo 1.49 Seja $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ a esfera unitária com a métrica induzida pelo \mathbb{R}^{n+1} . Então uma conexão afim em \mathbb{S}^n pode ser dada por: $\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} - \langle \tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}, N \rangle N$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão afim do \mathbb{R}^{n+1} , \tilde{X} e \tilde{Y} são as extensões dos campos X e Y respectivamente em \mathbb{R}^{n+1} , N é a normal de \mathbb{S}^n e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica a métrica do \mathbb{R}^{n+1} .

O próximo resultado mostra que a escolha de uma conexão afim ∇ em M origina uma derivada de campos de vetores ao longo de curvas. E esta derivada vai nos permitir definir paralelismo na variedade M .

Teorema 1.50 Seja M uma variedade diferenciável munida de uma conexão afim ∇ . Para cada curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$, a conexão ∇ determina um único operador $\frac{D}{dt} : \mathcal{X}(\alpha) \rightarrow \mathcal{X}(\alpha)$ que possui as seguintes propriedades:

$$(a) \frac{D}{dt}(aX + bY) = a \frac{DX}{dt} + b \frac{DY}{dt}, \text{ para todo } a, b \in \mathbb{R}.$$

$$(b) \frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f \frac{DX}{dt}, \text{ para todo } f \in \mathcal{D}(M).$$

(c) Se $X \in \mathcal{X}(M)$, então a restrição X_t de X ao longo de α satisfaz $\frac{DX_t}{dt} = \nabla_{\frac{d\alpha}{dt}} X$.

Tal operador é chamado de derivada covariante ao longo da curva α .

Se $\alpha(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ é uma expressão local de $\alpha(t)$, podemos representar localmente um campo $X \in \mathcal{X}(\alpha)$ por $X_t = \sum_{j=1}^n v^j(t) \frac{\partial}{\partial x_j}(\alpha(t))$. Então usando a definição de conexão afim e as propriedades (a) e (b) do teorema acima temos

$$\frac{DX_t}{dt} = \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n v^j \frac{dx_i}{dt} \Gamma_{ij}^k \right\} \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (1.2)$$

Definição 1.51 Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Um campo de vetores X ao longo de uma curva $\alpha : I \rightarrow M$ é chamado paralelo quando $\frac{DX_t}{dt} = 0$, para todo $t \in I$.

Usando a equação (1.2) a definição de campo paralelo é equivalente a um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em $v^k(t)$,

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k v^j \frac{dx_i}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.3)$$

Como o sistema de equações acima é linear em $v^k(t)$, então existe uma única solução definida em todo $t \in I$ satisfazendo a condição inicial $v^k(t_0) = v_0$. Portanto temos a seguinte proposição:

Proposição 1.52 *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim ∇ . Seja $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M e $v_0 \in T_{\alpha(t_0)}M$. Então existe um único campo de vetores paralelo X ao longo de α , tal que $X_{t_0} = v_0$. X_t é chamado de transporte paralelo de v_0 ao longo de α .*

Note que, até agora métricas e conexões foram tratadas de forma independentes. Porém, uma vez fixada uma métrica Riemanniana em uma variedade M , queremos determinar uma conexão que esteja relacionada com esta métrica em um certo sentido. Esta relação vai determinar a conexão de maneira única.

Definição 1.53 *Uma conexão afim ∇ em uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é dita compatível com a métrica se*

$$X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad \forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M).$$

A conexão afim ∇ é dita simétrica quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y] \quad \text{para todo } X, Y \in \mathcal{X}(M).$$

É importante ressaltar que em um sistema de coordenadas (U, φ) , o fato da conexão ∇ ser simétrica implica que para todo $i, j = 1, \dots, n$,

$$\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0, \quad \text{onde } X_i \text{ denota } \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Teorema 1.54 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M satisfazendo as condições:*

(a) ∇ é simétrica.

(b) ∇ é compatível com a métrica Riemanniana.

A conexão dada pelo teorema acima é denominada conexão de Levi-Civita ou conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.55 *Seja M uma variedade Riemanniana e ∇ a conexão Riemanniana. Considere a aplicação*

$$\tau_t = \tau_{\alpha, t_0, t} : T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow T_{\alpha(t)}M$$

definida por: $\tau_{\alpha, t_0, t}(v)$ é o transporte paralelo do vetor v ao longo da curva α de t_0 a t . Então τ_t é uma isometria.

Exemplo 1.56 *As conexões afins apresentadas nos exemplos 1.48 e 1.49 são as respectivas conexões Riemannianas do \mathbb{R}^n com a métrica usual e do \mathbb{S}^n com a métrica induzida do \mathbb{R}^{n+1} .*

1.3 Geodésicas

No que se segue, M será uma variedade Riemanniana munida de sua conexão Riemanniana.

Definição 1.57 *Uma curva diferenciável $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt} \left(\frac{d\gamma}{dt} \right) = 0$ no ponto t_0 . Se γ é uma geodésica para todo $t \in I$, dizemos simplesmente que γ é uma geodésica. Se $[a, b] \subset I$ e $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica, então a restrição de γ a $[a, b]$ é chamada segmento de geodésica que liga $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

Note que, se γ é uma geodésica, então $|\gamma'(t)|$ é constante para todo $t \in I$. De fato,

$$\frac{d}{dt}(|\gamma'(t)|^2) = \frac{d}{dt}\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = 2\langle \frac{D\gamma'}{dt}(t), \gamma'(t) \rangle = 0.$$

Portanto, o comprimento de arco de uma geodésica γ a partir de $\gamma(t_0)$ é dado por

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\gamma'(u)| du = c(t - t_0).$$

onde $c = |\gamma'(t)|$ será suposto sempre não nulo.

Além disso, em um sistema de coordenadas (U, φ) em torno de $\gamma(t_0)$, γ será uma geodésica se, e somente se, satisfazer o sistema de equações diferenciais de 2º ordem

$$\frac{d^2x_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{dx_i}{dt} \frac{dx_j}{dt} = 0, \quad k = 1, \dots, n,$$

onde $\gamma(t) = \varphi(x_1(t), \dots, x_n(t))$ na parametrização (U, φ) . A existência e unicidade da equação acima satisfazendo condições iniciais $x_i(t_0) = x_{i0}$ e $\frac{dx_i}{dt}(t_0) = v_{i0}$ nos leva ao seguinte teorema.

Teorema 1.58 (*Existência e unicidade de geodésicas*). *Sejam M uma variedade Riemanniana, $p \in M$ e $v \in T_pM$, $v \neq 0$. Então, existe um $\epsilon > 0$ e uma única geodésica $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$.*

Exemplo 1.59 *No \mathbb{R}^n , munido da métrica usual, as geodésicas são as retas.*

Exemplo 1.60 *Na esfera S^n , munida da métrica induzida pelo \mathbb{R}^{n+1} , as geodésicas são os círculos máximos.*

Denotaremos a geodésica $\gamma(t)$ de M que no instante $t = 0$ passa por p com velocidade v por $\gamma(t, p, v)$.

Podemos aumentar ou diminuir a velocidade de uma geodésica alterando assim o seu intervalo de definição. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

Lema 1.61 (*Homogeneidade de uma geodésica*). Se a geodésica $\gamma(t, p, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, p, av)$ com $a \in \mathbb{R}, a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e vale a igualdade $\gamma(t, p, av) = \gamma(at, p, v)$.

No intuito de definir a aplicação exponencial, precisaremos da seguinte proposição.

Proposição 1.62 Dado $p \in M$ e $a > 1$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável, $\gamma : (-a, a) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ e $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM; q \in V, v \in T_qM, |v| < \epsilon\}$ tal que $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-a, a)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_qM$, com $|v| < \epsilon$.

Com isto, podemos definir o conceito de aplicação exponencial da seguinte maneira. Seja $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ um aberto dado pela proposição anterior. Então a aplicação $\exp : \mathcal{U} \rightarrow M$ dada por

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma(|v|, q, \frac{v}{|v|}), \quad (q, v) \in \mathcal{U}$$

é chamada a aplicação exponencial em \mathcal{U} .

É usual considerar a aplicação exponencial restrita a bola aberta $B_\epsilon(0) \subset T_qM$, ou seja definiremos $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \rightarrow M$ por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$.

Geometricamente, se $v \neq 0$, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade $\frac{v}{|v|}$. No caso em que $|v| = 0$ temos $\exp_q(v) = q$.

Teorema 1.63 Dado $p \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M .

Definição 1.64 Se \exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem em T_pM , $\exp_p V = U$ é chamada uma vizinhança normal de p . Se $B_\epsilon(0)$ é tal que $\overline{B_\epsilon(0)} \subset V$, chamamos $\exp_p(B_\epsilon(0)) = B_\epsilon(p)$ de bola normal ou bola geodésica de centro p e raio ϵ .

Agora vamos estudar algumas propriedades minimizantes das geodésicas.

Definição 1.65 *Uma curva diferenciável por partes na variedade Riemanniana M é uma aplicação contínua $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ satisfazendo a seguinte condição: Existe uma partição $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = b$ de $[a, b]$ tal que as restrições $\alpha|_{[t_i, t_{i+1}]}$, $i = 0, \dots, k-1$, são diferenciáveis.*

Definição 1.66 *Um segmento de geodésica $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é chamado minimizante se $l(\gamma) \leq l(\alpha)$, para qualquer curva α diferenciável por partes ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$.*

A proposição a seguir nos diz que as geodésicas minimizam localmente o comprimento de arco. Mais precisamente tem-se:

Proposição 1.67 *Dados $p \in M$, U uma vizinhança normal de p e $B \subset U$ uma bola geodésica de centro em p . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$ um segmento de geodésica com $\gamma(0) = p$. Se $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva diferenciável por partes ligando $\gamma(0)$ a $\gamma(1)$, então $l(\gamma) \leq l(\alpha)$ e se a igualdade vale então $\gamma([0, 1]) = \alpha([0, 1])$.*

É importante observar que se considerarmos um arco suficientemente grande de geodésica ele pode deixar de ser minimizante. Por exemplo as geodésicas de uma esfera que partem de um ponto p não são minimizantes depois que passam pelo antípoda de p . Portanto, a proposição acima não é global. Mas a recíproca vale globalmente.

Proposição 1.68 *Se uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow M$, normalizada e diferenciável por partes é minimizante, então α é uma geodésica.*

Definiremos agora o referencial geodésico, que será útil na demonstração da fórmula de Bochner.

O referencial geodésico é construído da seguinte maneira: Dados $p \in M$, U uma bola geodésica de centro em p , q um ponto qualquer de U , γ uma geodésica

minimizante ligando p a q e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de T_pM . Então transportando paralelamente cada vetor dessa base ao longo de γ , obtemos uma base ortonormal $E_1(q), \dots, E_n(q)$ para T_qM . Estendendo esta construção para todos pontos de U , obtemos n campos de vetores diferenciáveis E_1, \dots, E_n em U que satisfazem:

$$(a) E_i(p) = e_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$(b) \{E_1(q), \dots, E_n(q)\} \text{ é uma base ortonormal de } T_qM, \forall q \in U.$$

$$(c) \nabla_{E_i} E_j(p) = 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$$

Uma n -upla de campos de vetores assim construídos é chamado de referencial geodésico em p .

1.4 Curvaturas e Campos de Jacobi

A curvatura que definiremos a seguir tem sinal oposto à curvatura definida em do Carmo [7].

Definição 1.69 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$ uma aplicação $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ dada por*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z, \quad Z \in \mathcal{X}(M),$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Proposição 1.70 *A curvatura R de uma variedade Riemanniana satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) R é $\mathcal{D}(M)$ -bilinear em $\mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M)$, isto é,

$$R(fX_1 + gX_2, Y_1) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_2, Y_1),$$

$$R(X_1, fY_1 + gY_2) = fR(X_1, Y_1) + gR(X_1, Y_2),$$

$f, g \in \mathcal{D}(M)$, $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \in \mathcal{X}(M)$.

(b) Para todo par $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, o operador curvatura $R(X, Y) : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(M)$ é $\mathcal{D}(M)$ -linear, isto é,

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W,$$

$$R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z,$$

$f \in \mathcal{D}(M)$, $Z, W \in \mathcal{X}(M)$.

(c) (Primeira Identidade de Bianchi).

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

(d) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(Y, X)Z, T \rangle$.

(e) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = -\langle R(X, Y)T, Z \rangle$.

(f) $\langle R(X, Y)Z, T \rangle = \langle R(Z, T)X, Y \rangle$.

Em um sistema de coordenadas (U, φ) em torno de um ponto $p \in M$, indicaremos por $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$ e escrevemos $R(X_i, X_j)X_k = \sum_{s=1}^n R_{ijk}^s X_s$. Assim, pela linearidade de R temos

$$R(X, Y)Z = \sum_{s=1}^n \left\{ \sum_{i,j,k=1}^n R_{ijk}^s a_i b_j c_k \right\} X_s, \quad (1.4)$$

onde $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^n b_j X_j$, e $Z = \sum_{k=1}^n c_k X_k$. Para exprimirmos R_{ijk}^s em termos dos símbolos de Christoffel escrevemos,

$$\begin{aligned} R(X_i, X_j)X_k &= \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_k - \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_k - \nabla_{[X_i, X_j]} X_k \\ &= \nabla_{X_i} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l X_l \right) - \nabla_{X_j} \left(\sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l X_l \right) \\ &= \sum_{l=1}^n \left\{ X_i(\Gamma_{jk}^l) X_l + \Gamma_{jk}^l \underbrace{\nabla_{X_i} X_l}_{= \sum_{s=1}^n \Gamma_{il}^s X_s} \right\} - \sum_{l=1}^n \left\{ X_j(\Gamma_{ik}^l) X_l + \Gamma_{ik}^l \underbrace{\nabla_{X_j} X_l}_{= \sum_{s=1}^n \Gamma_{jl}^s X_s} \right\} \end{aligned}$$

$$= \sum_{s=1}^n \left\{ \underbrace{X_i(\Gamma_{jk}^s) + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l \Gamma_{il}^s - X_j(\Gamma_{ik}^s) - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \Gamma_{jl}^s}_{R_{ijk}^s} \right\} X_s.$$

Observe que a equação (1.4) mostra que o valor de $R(X, Y)Z$ no ponto p depende somente dos valores de X, Y, Z em p e dos valores das funções R_{ijk}^s em p .

Definiremos agora outros tipos de curvaturas que são importantes no estudo das variedades Riemannianas.

Dado um espaço vetorial V , indicaremos por $|u \wedge v|$ a expressão $\sqrt{|u|^2|v|^2 - \langle u, v \rangle^2}$ que representa a área do paralelogramo gerado por u e v .

Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional de $T_p M$ e $u, v \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então

$$K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{|u \wedge v|^2}.$$

não depende da escolha dos vetores $u, v \in \sigma$. Com esse fato, a definição abaixo é consistente.

Definição 1.71 *Dados $p \in M$, $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional de $T_p M$ e $\{u, v\}$ é uma base qualquer de σ . Definimos a curvatura seccional $K(p, \sigma)$ de σ em p pela expressão:*

$$K(p, \sigma) = K(u, v) = \frac{\langle R(u, v)v, u \rangle}{|u \wedge v|^2}.$$

Dada uma variedade Riemanniana $(M, \langle \cdot, \cdot \rangle, \nabla, R)$, podemos considerar ainda outros tipos de curvaturas. Para isso, fixe um vetor unitário $v \in T_p M$ e complete-o de modo a obter uma base ortonormal $\{v_1, \dots, v_{n-1}, v_n = v\}$ de $T_p M$. Assim definimos:

Curvatura de Ricci na direção de v :

$$Ric_p(v) = \sum_{i=1}^n \langle R(v_i, v)v, v_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Curvatura Escalar em p :

$$K(p) = \sum_{j=1}^n Ric_p(v_j) = \sum_{i,j=1}^n \langle R(v_i, v_j)v_j, v_i \rangle, \quad j = 1, \dots, n.$$

As expressões acima não dependem das bases ortonormais escolhidas.

Agora iremos introduzir o conceito de campos de Jacobi, que tem por finalidade relacionar curvatura e geodésicas. Conforme veremos, a curvatura $K(p, \sigma)$, $\sigma \in T_pM$, indica quão rapidamente “se afastam” as geodésicas que saem de p e são tangentes a σ . Além disso, os campos de Jacobi permitem obter uma caracterização relativamente simples das singularidades da aplicação exponencial.

Definição 1.72 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se para todo $t \in [0, a]$ vale a seguinte equação diferencial:*

$$\frac{D^2 J(t)}{dt^2} + R(J(t), \gamma'(t))\gamma'(t) = 0.$$

Esta equação pode ser reduzida a um sistema de equações diferenciais de 2º ordem da seguinte maneira:

Tome uma base ortonormal $\{E_1, \dots, E_n\}$ de $T_{\gamma(0)}M$. Transporte paralelamente ao longo de γ cada vetor desta base; obtemos assim, uma base ortonormal $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ de $T_{\gamma(t)}M$ para todo $t \in [0, a]$. Desta forma, podemos escrever

$$J(t) = \sum_{j=1}^n c_j(t)E_j(t)$$

onde $c_j(t)$ são funções diferenciáveis definidas em $[0, a]$. Como os campos $E_j(t)$ são paralelos ao longo de γ , temos

$$\frac{DJ}{dt}(t) = J'(t) = \sum_{j=1}^n c_j'(t)E_j(t), \quad \frac{D^2 J}{dt^2}(t) = J''(t) = \sum_{j=1}^n c_j''(t)E_j(t)$$

por outro lado temos que:

$$R(J, \gamma')\gamma' = \sum_{i=1}^n \langle R(J, \gamma')\gamma', E_i \rangle E_i = \sum_{i,j=1}^n c_j \langle R(E_j, \gamma')\gamma', E_i \rangle E_i = \sum_{i,j=1}^n c_j a_{ij} E_j$$

onde $a_{ij} = \langle R(E_j, \gamma')\gamma', E_i \rangle$. Sendo assim, a equação que define os campos de Jacobi (chamada de equação de Jacobi), fica na seguinte forma

$$J'' + R(\gamma', J)\gamma' = \sum_{j=1}^n \{c_j'' + \sum_{i=1}^n c_j a_{ij}\} E_j = 0$$

ou seja, equivalente ao sistema de equações diferenciais lineares $c_j'' + \sum_{i=1}^n c_j a_{ij} = 0$ com $j = 1, \dots, n$. Deste modo um campo de Jacobi é determinado pelas suas condições iniciais $J(0)$ e $J'(0)$ ou seja, $c_j(0)$ e $c_j'(0)$ com $j = 1, \dots, n$.

Exemplo 1.73 Dada uma geodésica $\gamma(t)$ em uma variedade Riemanniana M , temos campos de Jacobi ao longo de γ dados por $J(t) = \gamma'(t)$ e $J(t) = t\gamma'(t)$.

Proposição 1.74 Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Então um campo de Jacobi J ao longo de γ com $J(0) = 0$ é dado por:

$$J(t) = (d \exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0)), \quad t \in [0, a].$$

Em particular se $B_\epsilon(\gamma(0))$ é uma bola geodésica e $J'(0)$ é ortogonal a $\gamma'(0)$, então $J(t)$ é um campo coordenado angular em coordenadas polares.

Teorema 1.75 Seja $p \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Seja $w \in T_v(T_p M)$ com $|w| = 1$ e seja J o campo de Jacobi ao longo de γ dado por $J(t) = (d \exp_p)_{tw}(tw)$, $0 \leq t \leq a$. Então o desenvolvimento de Taylor de $|J(t)|^2$ em torno de $t = 0$ é dado por

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(w, v)v, w \rangle t^4 + o(t^4)$$

O corolário abaixo contém essencialmente a relação entre geodésicas e curvatura, que mencionamos acima.

Corolário 1.76 Nas mesmas condições do teorema anterior seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco, $|w| = 1$ e $\langle w, v \rangle = 0$, a

expressão $\langle R(w, v)v, w \rangle$ é a curvatura seccional em p segundo o plano gerado por v e w . Neste caso,

$$|J(t)|^2 = t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + o(t^4)$$

$$|J(t)| = t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + o(t^3)$$

Agora iremos relacionar as singularidades da aplicação exponencial com os campos de Jacobi.

Definição 1.77 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica. O ponto $\gamma(t_0)$ é conjugado de $\gamma(0) = p$ ao longo de γ , $t_0 \in (0, a]$, se existe um campo de Jacobi J ao longo de γ , não identicamente nulo, com $J(0) = 0 = J(t_0)$.*

Exemplo 1.78 *Uma variedade Riemanniana M com curvatura seccional não positiva, não possui pontos conjugados.*

De fato, se existisse um campo de Jacobi J não-nulo ao longo de uma geodésica $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ com $\gamma(0) = p$ e $J(0) = J(a) = 0$, então

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle = \left\langle \frac{D^2J}{dt^2}, J \right\rangle + \left\langle \frac{DJ}{dt}, \frac{DJ}{dt} \right\rangle = \underbrace{-\langle R(J, \gamma')\gamma', J \rangle}_{\geq 0} + \left| \frac{DJ}{dt} \right|^2 \geq 0.$$

Portanto a função $F(t) = \langle \frac{DJ}{dt}, J_t \rangle$ é não decrescente em $F(0) = F(a) = 0$ e então $F = 0$. Mas temos que $\frac{d}{dt} \langle J, J \rangle = 2 \langle \frac{DJ}{dt}, J \rangle = 2F = 0$. Conclui-se assim que $J = 0$, absurdo.

Proposição 1.79 *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$. O ponto γ_{t_0} , $t_0 \in (0, a]$, é conjugado de p ao longo de γ se, e somente se, $v_0 = t_0\gamma'(0)$ é um ponto crítico de \exp_p .*

1.5 Imersões Isométricas

Definição 1.80 *Sejam M^n e \widetilde{M}^{n+k} variedades Riemannianas de dimensões n e $n+k$, respectivamente. Uma imersão $f : M^n \rightarrow \widetilde{M}^{n+k}$ é dita isométrica se*

$$\langle u, v \rangle_p = \langle df_p(u), df_p(v) \rangle_{f(p)}, \quad (1.5)$$

para todo p de M e todo $u, v \in T_p M$. Dizemos que f é um mergulho isométrico se f é um mergulho que satisfaz (1.5) para todo p de M e todo $u, v \in T_p M$.

Já mencionamos que uma imersão f é localmente um mergulho, ou seja, para cada p em M existe uma vizinhança U de p tal que $f|_U : U \rightarrow \widetilde{M}$ é um mergulho. Nesse sentido, podemos identificar U com sua imagem $f(U)$, isto é, interpretaremos f localmente como a aplicação inclusão. Assim, para cada p em M o espaço tangente $T_p M$ será considerado um subespaço de $T_p \widetilde{M}$ de dimensão n e isto induz à seguinte decomposição:

$$T_p \widetilde{M} = T_p M \oplus T_p M^\perp, \quad (1.6)$$

onde $T_p M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_p M$ em $T_p \widetilde{M}$. O espaço $T_p M^\perp$ tem dimensão k e é chamado de *espaço normal* a M em p . Assim como temos o fibrado tangente TM , definimos o *fibrado normal* $TM^\perp = \{(p, v); p \in M \text{ e } v \in T_p M^\perp\}$.

Observe que podemos definir métricas Riemannianas no fibrado normal. A métrica induzida no fibrado normal pela imersão f é definida por $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_{\widetilde{M}} \forall u, v \in T_p M^\perp$, onde usamos a identificação (1.6). Esta métrica será usada posteriormente para estender objetos de uma subvariedade fechada M de \mathbb{R}^n para o espaço ambiente \mathbb{R}^n .

1.6 Variedades Completas

De agora em diante, exceto quando explicitamente mencionado, as variedades serão supostas conexas.

Definição 1.81 Uma variedade Riemanniana M é dita completa se para todo $p \in M$, a aplicação exponencial \exp_p , está definida para todo $v \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de p estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Intuitivamente, isto significa que as variedades Riemannianas completas não possuem “furos” ou fronteiras.

Exemplo 1.82 O \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana é uma variedade completa, uma vez que as suas geodésicas são as retas $\gamma(t) = at + b$ que estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.83 O semi-plano aberto $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_n); x_n > 0\}$ munido da métrica induzida pelo \mathbb{R}^n não é uma variedade completa. De fato, a geodésica $\gamma(t) = (0, \dots, 0, t)$ está parametrizada pelo comprimento de arco e no entanto, só está definida para $t > 0$.

Definição 1.84 Seja M uma variedade Riemanniana e $p, q \in M$. A distância entre p e q é definida por $d(p, q) = \text{ínfimo dos comprimentos de todas as curvas diferenciáveis por partes em } M \text{ unindo } p \text{ a } q$.

Definição 1.85 Um subconjunto A de uma variedade Riemanniana M é dito limitado, quando existe uma constante $c > 0$ tal que $d(p, q) \leq c$ para quaisquer $p, q \in A$.

Proposição 1.86 A distância d é uma métrica sobre a variedade Riemanniana M . Além disso, a topologia induzida por esta métrica coincide com a topologia natural de M e fixado $p \in M$, a função $d(x, p)$, $x \in M$, é contínua.

Teorema 1.87 (Hopf e Rinow). Seja M uma variedade Riemanniana e $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) \exp_p está definida em todo o T_pM .

(b) Os conjuntos fechados e limitados de M são compactos.

(c) (M, d) é um espaço métrico completo.

(d) M é completa.

(e) Existe uma família de compactos $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que $K_n \subset \text{int}(K_{n+1}) \forall n \in \mathbb{N}$ com $\bigcup_{\infty} K_n = M$ tal que se $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos de M satisfazendo $q_n \notin \overset{n}{K}_n \forall n \in \mathbb{N}$, então $d(p, q_n) \rightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

(f) Para todo $q \in M$ existem uma geodésica minimizante ligando p a q .

Sejam M uma variedade Riemanniana completa, $p \in M$ e $\gamma : [0, \infty) \rightarrow M$ uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Foi visto na seção 1.3 que para $t > 0$ suficientemente pequeno $\gamma([0, t])$ é uma geodésica minimizante, isto é, $d(\gamma(0), \gamma(t)) = t$. Além disso, se $\gamma([0, t_1])$ não é minimizante, o mesmo acontece para todo $t > t_1$.

Indicaremos por $C(v) = C(\gamma(t, p, v)) = \sup\{t > 0; d(p, \gamma(t)) = t\}$. No caso em que $C(v) < \infty$ o ponto $\gamma(C(v))$ é chamado ponto mínimo ou cut point de p ao longo de γ ; caso contrário, diz-se que tal ponto mínimo não existe.

Definição 1.88 *Seja M uma variedade Riemanniana completa e $p \in M$. Chamamos cut locus de p o conjunto $C_m(p)$, formado pela união dos cut points de p ao longo de todas as geodésicas que partem de p . Se o cut locus de p é vazio, dizemos que p é um polo de M .*

Proposição 1.89 *Suponha que $\gamma(t_0)$ é o ponto mínimo de $p = \gamma(0)$ ao longo de γ .*

Então:

(a) *ou $\gamma(t_0)$ é o primeiro ponto conjugado de $\gamma(0)$ ao longo de γ ,*

(b) *ou existe uma geodésica $\sigma \neq \gamma$ de p a $\gamma(t_0)$ tal que $l(\sigma) = l(\gamma)$.*

Reciprocamente, se (a) ou (b) se verifica, então existe \tilde{t} em $(0, t_0]$ tal que $\gamma(\tilde{t})$ é o ponto mínimo de p ao longo de γ .

Capítulo 2

Cálculo Tensorial

O objetivo deste capítulo é demonstrar a fórmula de Bochner. Para isso utilizamos essencialmente as referências Dubrovin [8], Luciano [18] e Spivak [24].

2.1 Tensores em Espaços Vetoriais

Ao longo desta seção consideraremos V um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão finita n e V^* seu espaço dual.

Definição 2.1 *Um tensor do tipo (m, s) sobre V é uma forma $(m + s)$ -linear*

$$T : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{m\text{-fatores}} \times \underbrace{V \times \dots \times V}_{s\text{-fatores}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Observação 2.2 *O conjunto dos tensores do tipo (m, s) sobre V , munido das operações abaixo é um \mathbb{R} -espaço vetorial (n^{m+s}) -dimensional, denotado por $V^{m,s}$.*

$$(T_1 + T_2)(f_1, \dots, f_m, v_1, \dots, v_s) = T_1(f_1, \dots, f_m, v_1, \dots, v_s) + T_2(f_1, \dots, f_m, v_1, \dots, v_s)$$

$$(\lambda.T_1)(f_1, \dots, f_m, v_1, \dots, v_s) = \lambda.T_1(f_1, \dots, f_m, v_1, \dots, v_s).$$

Observe que $V^{1,0} = V^{**}$ e $V^{0,1} = V^*$. E convencionaremos $V^{0,0} = \mathbb{R}$.

Definição 2.3 *Seja T_1 um tensor de tipo (m_1, s_1) e T_2 um tensor de tipo (m_2, s_2) . O produto tensorial $T_1 \otimes T_2$ entre T_1 e T_2 é um tensor de tipo $(m_1 + m_2, s_1 + s_2)$*

definido como

$$\begin{aligned} & (T_1 \otimes T_2)(f_1, \dots, f_{m_1}, \dots, f_{m_1+m_2}, v_1, \dots, v_{s_1}, \dots, v_{s_1+s_2}) \\ &= T_1(f_1, \dots, f_{m_1}, v_1, \dots, v_{s_1}) \cdot T_2(f_{m_1+1}, \dots, f_{m_1+m_2}, v_{s_1+1}, \dots, v_{s_1+s_2}). \end{aligned}$$

Agora, vamos supor que V é um \mathbb{R} -espaço vetorial munido de um produto interno g . Note que $g \in V^{0,2}$.

Definição 2.4 *Sejam $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V , $\{h_1, \dots, h_n\}$ sua base dual e $T \in V^{m,s}$. Definimos a norma $\|T\|$ de T por:*

$$\|T\|^2 = \sum_{i_1, \dots, i_m, j_1, \dots, j_s=1}^n T(h_{i_1}, \dots, h_{i_m}, e_{j_1}, \dots, e_{j_s})^2.$$

Observação 2.5 *Lembre-se que V é isomorfo a V^* através do isomorfismo:*

$$\begin{aligned} \Phi : V &\longrightarrow V^* \\ v &\longmapsto f_v : V \longrightarrow \mathbb{R} \\ &u \longmapsto g(v, u) \end{aligned}$$

Assim $v \in V$, está em correspondência com $f_v \in V^$ definida por $f_v(u) = g(v, u), \forall u \in V$. E dado $f \in V^*$ existe um único $v_f \in V$ tal que $f(u) = g(v_f, u), \forall u \in V$.*

Seja M uma variedade Riemanniana. Como $T_p M$ é um espaço vetorial, podemos definir neste espaço os seguintes tensores.

Exemplo 2.6 *O tensor curvatura pode ser considerado como um tensor do tipo $(0, 4)$ em $T_p M$ definido por $(u, v, z, w) \mapsto \langle R(u, v)z, w \rangle, u, v, z, w \in T_p M$.*

A partir do tensor curvatura podemos definir o tensor de Ricci que terá um papel fundamental em nosso trabalho.

Definição 2.7 Dada uma variedade Riemanniana M e $p \in M$, consideremos uma base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $T_p M$. Então, para quaisquer $u, v \in T_p M$ definimos o tensor de Ricci, denotado por Ric , como o tensor de tipo $(0, 2)$ dado por

$$Ric(u, v) = \sum_{k=1}^n \langle R(e_k, u, v), e_k \rangle.$$

É importante observar que esta definição não depende da escolha da base ortonormal em $T_p M$.

2.2 Campos de Tensores em uma Variedade

No capítulo anterior, observamos que dada uma variedade diferenciável M e um ponto $p \in M$, o espaço tangente à M em p é um \mathbb{R} -espaço vetorial. Neste caso, vamos denotar o espaço vetorial dos tensores de tipo (m, s) sobre $T_p M$ por $T_p^{m,s} M$.

Definição 2.8 Um campo de tensores T de tipo (m, s) em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um tensor $T(p) \in T_p^{m,s} M$. Um campo de formas lineares é chamado de 1-forma. O conjunto dos campos de tensores de tipo (m, s) definidos em M será denotado por $\Gamma(T^{m,s} M)$.

Definição 2.9 Dizemos que uma 1-forma ω em M é diferenciável se e somente se $\omega(X)$ é diferenciável para todos os campos de vetores diferenciáveis X em M .

Definição 2.10 Um campo de tensores T de tipo (m, s) em M é dito diferenciável se, e somente se, $T(\omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, X_s)$ é diferenciável para toda m -upla de 1-formas diferenciáveis $\omega_1, \dots, \omega_m$ em M e toda s -upla X_1, \dots, X_s de campos de vetores diferenciáveis em M .

Denotaremos os campos de tensores diferenciáveis do tipo (m, s) em M por $\Gamma^\infty(T^{m,s} M)$.

Como T_pM é um espaço vetorial com produto interno, temos pela Observação 2.5 que T_pM é isomorfo a $(T_pM)^*$. Assim podemos identificar o vetor $X(p) \in T_pM$ com o funcional linear $\omega_{X(p)} \in (T_pM)^* = T_p^{0,1}M$ dado por $\omega_{X(p)}(u) = g(X(p), u)$. Desta maneira um campo de vetores diferenciável X pode ser visto como um campo de tensores do tipo $(0, 1)$ isto é uma 1-forma. Portanto, $\mathcal{X}(M)$ pode ser identificado com $\Gamma^\infty(T^{0,1}M)$.

Dada uma variedade diferenciável M munido de uma conexão afim ∇ . Podemos estender a noção de derivada covariante de campos de vetores aos campos de tensores. A definição desta derivada é motivada pela regra do produto de funções reais.

Definição 2.11 *Seja $\omega \in \Gamma^\infty(T^{0,1}M)$ e X e Y campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável M . Definimos o operador $\nabla_Y : \Gamma^\infty(T^{0,1}M) \rightarrow \Gamma^\infty(T^{0,1}M)$ por*

$$(\nabla_Y \omega)(X) = Y(\omega(X)) - \omega(\nabla_Y X).$$

Definição 2.12 *Sejam $\omega_1, \dots, \omega_m \in \Gamma^\infty(T^{0,1}M)$ e X_1, \dots, X_s, Y campos de vetores diferenciáveis em uma variedade diferenciável M . Definimos o operador $\nabla_Y : \Gamma^\infty(T^{m,s}M) \rightarrow \Gamma^\infty(T^{m,s}M)$ por*

$$\begin{aligned} (\nabla_Y T)(\omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, X_s) &= Y(T(\omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, X_s)) \\ &- T(\nabla_Y \omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, X_s) - \dots - T(\omega_1, \dots, \nabla_Y \omega_m, X_1, \dots, X_s) \\ &- T(\omega_1, \dots, \omega_m, \nabla_Y X_1, \dots, X_s) - \dots - T(\omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, \nabla_Y X_s). \end{aligned}$$

Chamamos $\nabla_Y T$ de derivada covariante de T em relação à Y .

Definição 2.13 *Dado um campo de tensores diferenciáveis T de tipo (m, s) em uma variedade diferenciável M , definimos a diferencial covariante de T como um campo de tensores diferenciável ∇T de tipo $(m, s + 1)$ em M dado por*

$$\nabla T(\omega_1, \dots, \omega_m, Y, X_1, \dots, X_s) = \nabla_Y T(\omega_1, \dots, \omega_m, X_1, \dots, X_s).$$

Exemplo 2.14 Considere g a métrica Riemanniana em M . Veja que g é um campo de tensores de tipo $(0, 2)$ em M , e portanto ∇g é de tipo $(0, 3)$. Assim, para todo $X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$ obtemos

$$\begin{aligned}\nabla g(Z, Y, X) &= Z(g(X, Y)) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y) \\ &= Z\langle X, Y \rangle - \langle \nabla_Z X, Y \rangle - \langle X, \nabla_Z Y \rangle.\end{aligned}$$

Exemplo 2.15 Considere $f \in \mathcal{D}(M)$. Sabemos que f é um campo de tensores de tipo $(0, 0)$, e dado $X \in \mathcal{X}(M)$, temos que $df(X) = \nabla f(X) = X(f) = \langle \nabla f, X \rangle$. Veja que o primeiro ∇f é a diferencial covariante recém definida e que o último ∇f é o clássico vetor gradiente. Sendo assim, o gradiente de f visto como campo de vetores pode ser identificado com a diferencial covariante da função f . Note ainda que a diferencial covariante de funções coincide com a diferencial clássica df e não depende da métrica Riemanniana devido a primeira igualdade.

Proposição 2.16 Seja M uma variedade diferenciável, $T_1, T_2 \in \Gamma^\infty(T^{m,s}M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $X \in \mathcal{X}(M)$. Então, se ∇ é a diferencial covariante de tensores, temos que:

- (a) $\nabla_X(\lambda T_1 + T_2) = \lambda \nabla_X T_1 + \nabla_X T_2$.
- (b) $\nabla_X(T_1 \otimes T_2) = (\nabla_X T_1) \otimes T_2 + T_1 \otimes (\nabla_X T_2)$.

Demonstração: Os itens (a) e (b) seguem imediatamente da Observação 2.2 e das Definições 2.3 e 2.11. □

A partir de agora, ∇ será a conexão Riemanniana de uma variedade Riemanniana (M, g) .

Definição 2.17 Seja $f \in \mathcal{D}(M)$. O campo de tensores de tipo $(0, 2)$ $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$ em M dado por $\nabla(\nabla f)(X, Y) = X(\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y)$, $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ é chamado de Hessiano de f .

Proposição 2.18 *O Hessiano de f é simétrico. Isto é, $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$.*

Demonstração: De fato,

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X, Y) - \nabla^2 f(Y, X) &= X(\nabla f(Y)) - \nabla f(\nabla_X Y) - Y(\nabla f(X)) + \nabla f(\nabla_Y X) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) + \nabla f([Y, X]) = [X, Y](f) + [Y, X](f) = 0,\end{aligned}$$

ou seja, $\nabla^2 f(X, Y) = \nabla^2 f(Y, X)$. □

Com o objetivo de definir o Laplaciano de uma função $f \in \mathcal{D}(M)$, precisaremos primeiramente dos seguintes conceitos.

Definição 2.19 *Seja T um campo de tensores de tipo $(0, m)$ definido em uma variedade Riemanniana n -dimensional. Definimos o operador divergente de T , $\text{div}T$, como um campo de tensores de tipo $(0, m - 1)$ dado por*

$$\text{div}T(v_2, \dots, v_m) = \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} T)(e_k, v_2, \dots, v_m),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Definição 2.20 *Dada uma variedade Riemanniana M^n , consideremos $X \in \mathcal{X}(M)$, $p \in M$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de $T_p M$. Então definimos o divergente de X em p por*

$$\text{div}X(p) = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{e_k} X, e_k \rangle.$$

Pelo que já observamos acima, é possível associarmos a cada campo de vetores $X \in \mathcal{X}(M)$ uma 1-forma ω_X . Afirmamos que $\text{div}\omega_X = \text{div}X$. De fato,

$$\begin{aligned}\text{div}\omega_X &= \sum_{k=1}^n (\nabla_{e_k} \omega_X)(e_k) = \sum_{k=1}^n \nabla_{e_k} (\omega_X(e_k)) - \omega_X(\nabla_{e_k} e_k) \\ &= \sum_{k=1}^n \nabla_{e_k} \langle X, e_k \rangle - \langle X, \nabla_{e_k} e_k \rangle = \sum_{k=1}^n e_k \langle X, e_k \rangle - \langle X, \nabla_{e_k} e_k \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \nabla_{e_k} X, e_k \rangle.\end{aligned}$$

Definição 2.21 Dada $f \in \mathcal{D}(M)$ definimos o Laplaciano de f em $p \in M$ como

$$\Delta f = \sum_{k=1}^n \nabla^2 f(e_k, e_k) = \operatorname{div}(\nabla f),$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Em coordenadas locais

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^n g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x_k} \right), \quad (2.1)$$

onde g^{ij} são os elementos da matriz inversa de (g_{ij}) .

Lema 2.22 Seja M uma variedade Riemanniana e $f, g \in \mathcal{D}(M)$. Então:

- (a) $\Delta(f + g) = \Delta f + \Delta g$.
- (b) $\Delta(fg) = f\Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g\Delta f$.

Demonstração: Basta usar as definições de Laplaciano e Hessiano junto com as propriedades de gradiente vistas na seção 1.2. □

2.3 Fórmula de Bochner

Sejam X_i , $i = 1, 2, 3$ campos de vetores em M e $f \in \mathcal{D}(M)$. Conforme a definição de diferencial covariante de tensores, temos que

$$\begin{aligned} X_1(f) &= \nabla_{X_1} f = \nabla f(X_1) \\ X_2 X_1(f) &= X_2(\nabla f(X_1)) = \nabla^2 f(X_2, X_1) + \nabla f(\nabla_{X_2} X_1) \\ X_3 X_2 X_1(f) &= \nabla^3 f(X_3, X_2, X_1) + \nabla^2 f(\nabla_{X_3} X_2, X_1) + \nabla^2 f(X_2, \nabla_{X_3} X_1) \\ &\quad + \nabla^2 f(X_3, \nabla_{X_2} X_1) + \nabla f(\nabla_{X_3} \nabla_{X_2} X_1). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Dados $T, S \in \Gamma^\infty(T^{m,s} M)$, temos pela Proposição 2.16 que

$$\nabla_X(T \otimes S) = \nabla_X T \otimes S + T \otimes \nabla_X S.$$

$$\begin{aligned}
\text{Então, } \nabla^2(\nabla f \otimes \nabla f)(X_i, X_i, X_j, X_j) &= \nabla_{X_i} \nabla_{X_i}(\nabla f \otimes \nabla f)(X_j, X_j) \\
&= [\nabla_{X_i}(\nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f) + \nabla_{X_i}(\nabla f \otimes \nabla_{X_i} \nabla f)](X_j, X_j) \\
&= [\nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f + 2\nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla_{X_i} \nabla f + \nabla_{X_i} \nabla_{X_i} \nabla f \otimes \nabla f](X_j, X_j) \\
&= 2(\nabla^2 f \otimes \nabla^2 f)(X_i, X_j, X_i, X_j) + 2(\nabla^3 f \otimes \nabla f)(X_i, X_i, X_j, X_j). \tag{2.3}
\end{aligned}$$

Pela Definição 2.4 temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla f\|^2 &= \sum_{j=1}^n (\nabla f(e_j))^2, \\
\text{e } \Delta \|\nabla f\|^2 &= \text{div}(\nabla \|\nabla f\|^2) = \sum_{i=1}^n (\nabla_{e_i} \nabla \|\nabla f\|^2)(e_i) = \sum_{i=1}^n \nabla^2(\|\nabla f\|^2)(e_i, e_i) \\
&= \sum_{i,j=1}^n \nabla^2(\nabla f \otimes \nabla f)(e_i, e_i, e_j, e_j), \forall f \in \mathcal{D}(M). \tag{2.4}
\end{aligned}$$

onde $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base ortonormal de $T_p M$.

Com isso, podemos demonstrar o primeiro resultado fundamental para a prova do teorema de Cheng-Liouville.

Teorema 2.23 (Fórmula de Bochner). *Seja M uma variedade Riemanniana e $f \in \mathcal{D}(M)$. Então,*

$$\frac{1}{2} \Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

Demonstração: Para cada $p \in M$ vamos considerar o referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\}$ ortonormal definido em uma vizinhança U de p . Assim, de (2.4) e (2.3) temos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \Delta(\|\nabla f\|^2) &= \|\nabla^2 f\|^2 + \sum_{i,j=1}^n \nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) \cdot \nabla f(E_j) \\
&= \|\nabla^2 f\|^2 + \sum_{i,j=1}^n \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) \cdot \nabla f(E_j) + [\nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i)] \nabla f(E_j) \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Primeiramente observe que

$$\begin{aligned}
\nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) &= (\nabla_{E_i} \nabla^2 f)(E_i, E_j) \\
&= E_i(\nabla^2 f(E_i, E_j)) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} E_i, E_j) - \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_i} E_j) \\
&= E_i(\nabla^2 f(E_i, E_j)) = E_i(\nabla^2 f(E_j, E_i))
\end{aligned}$$

pela simetria de $\nabla^2 f$ e o fato de (E_1, \dots, E_n) ser um referencial geodésico ortonormal.

Analogamente obtemos $\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) = E_i(\nabla^2 f(E_j, E_i))$ e portanto

$$\nabla^3 f(E_i, E_i, E_j) = \nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) \quad (2.6)$$

Além disso, note que

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^n \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) \cdot \nabla f(E_j) &= \sum_{i,j=1}^n (\nabla_{E_j} \nabla^2 f)(E_i, E_i) \nabla f(E_j) \\
= \sum_{i,j=1}^n E_j(\nabla^2 f(E_i, E_i)) \nabla f(E_j) - \nabla^2 f(\nabla_{E_j} E_i, E_i) \nabla f(E_j) - \nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_i) \cdot \nabla f(E_j) \\
&= \sum_{i,j=1}^n E_j(\nabla^2 f(E_i, E_i)) \cdot \nabla f(E_j)
\end{aligned}$$

pois $\nabla_{E_j} E_i = 0$. Com isso, temos que

$$\sum_{i,j=1}^n \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) \cdot \nabla f(E_j) = \sum_{i,j=1}^n \nabla_{E_j} (\Delta f) \cdot \nabla f(E_j) = \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle. \quad (2.7)$$

Substituindo (2.6) e (2.7) em (2.5) tem-se

$$\frac{1}{2} \Delta(\|\nabla f\|^2) = \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j=1}^n [\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) - \nabla^3 f(E_j, E_i, E_i)] \nabla f(E_j) \quad (2.8)$$

Agora, usando (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla^3 f(E_i, E_j, E_i) &= E_i E_j E_i(f) - \nabla^2 f(\nabla_{E_i} E_j, E_i) - \nabla^2 f(E_j, \nabla_{E_i} E_i) \\
-\nabla^2 f(E_i, \nabla_{E_j} E_i) - \nabla f(\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i) &= E_i E_j E_i(f) - \nabla f(\nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i)
\end{aligned} \quad (2.9)$$

De modo análogo, tem-se

$$\nabla^3 f(E_j, E_i, E_i) = E_j E_i E_i(f) - \nabla f(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i) \quad (2.10)$$

Substituindo (2.9) e (2.10) em (2.8) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \Delta(\|\nabla f\|^2) &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j=1}^n [E_i, E_j] E_i(f) \cdot \nabla f(E_j) \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^n \nabla f(\nabla_{E_j} \nabla_{E_i} E_i - \nabla_{E_i} \nabla_{E_j} E_i) \cdot \nabla f(E_j) \\ &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j=1}^n \nabla f(R(E_j, E_i) E_i) \nabla f(E_j) \\ &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle R(E_j, E_i) E_i, \nabla f \rangle \nabla f(E_j) \\ &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \sum_{i,j=1}^n \langle R(\nabla f(E_j) E_j, E_i) E_i, \nabla f \rangle \\ &= \|\nabla^2 f\|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + Ric(\nabla f, \nabla f). \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. □

Capítulo 3

Teorema da Comparação de Bishop

Neste capítulo demonstraremos o teorema da comparação de Bishop que é um dos resultados fundamentais na demonstração do teorema de Cheng-Liouville. Utilizamos aqui as referências Chavel [4] e [5].

3.1 Preliminares

Nesta seção introduziremos os conceitos necessários para a demonstração do teorema da comparação de Bishop. Começaremos nosso estudo relembrando alguns resultados de Álgebra Linear que serão úteis neste capítulo.

Teorema 3.1 (*Desigualdade de Cauchy-Schwarz*). *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então*

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|, \quad \forall u, v \in V.$$

Lema 3.2 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e $T : V \rightarrow V$ um operador linear. Então o traço da matriz de T independe da base \mathcal{B} de V . Portanto podemos definir o traço $\text{tr}T$ de T .*

Lema 3.3 *Seja V um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão finita n e $T : V \rightarrow V$ é um operador linear diagonalizável. Então $\frac{(\text{tr}T^2)}{n} \leq \text{tr}T^2$.*

Demonstração: Como T é diagonalizável, existe um base \mathcal{B} de V tal que a matriz de T é da forma

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n \end{bmatrix}$$

Então pela definição da função traço temos que $\text{tr}[T]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n a_i$, e isso implica que

$\text{tr}[T^2]_{\mathcal{B}} = \sum_{i=1}^n a_i^2$. Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz temos que

$$\text{tr}T = \sum_{i=1}^n 1 \cdot a_i \leq \left(\sum_{i=1}^n 1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} \cdot (\text{tr}T^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Portanto, $\frac{(\text{tr}T)^2}{n} \leq \text{tr}T^2$. A igualdade é válida se, e somente se, T é múltiplo escalar da identidade. \square

Lema 3.4 *Seja V um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão finita n com produto interno.*

Sejam, $A, B : V \rightarrow V$ operadores lineares com adjuntos A^ e B^* respectivamente.*

Então

(a) $(A + B)^* = A^* + B^*$.

(b) $(A^*)^* = A$.

(c) $(AB)^* = B^*A^*$.

(d) *Se A é um isomorfismo então $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.*

Teorema 3.5 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Então para todo operador linear auto-adjunto $A : V \rightarrow V$, existe uma base ortonormal de V formada por autovetores de A*

Agora vamos fixar algumas notações e provar alguns lemas técnicos, que vão nos auxiliar na demonstração do teorema da comparação de Bishop.

Para $k \in \mathbb{R}$ denotaremos por \mathbf{S}_k a solução da equação diferencial $\psi'' + k\psi = 0$, que satisfaz as condições iniciais $\mathbf{S}_k(0) = 0$ e $\mathbf{S}'_k(0) = 1$. Assim

$$\mathbf{S}_k(t) = \begin{cases} \frac{\sin \sqrt{k}t}{\sqrt{k}}, & k > 0; \\ t, & k = 0; \\ \frac{\sinh \sqrt{-k}t}{\sqrt{-k}}, & k < 0. \end{cases}$$

E denotaremos por \mathbf{C}_k a solução da equação diferencial $\psi'' + k\psi = 0$, que satisfaz as condições iniciais $\mathbf{C}_k(0) = 1$ e $\mathbf{C}'_k(0) = 0$. Assim

$$\mathbf{C}_k(t) = \begin{cases} \cos \sqrt{k}t, & k > 0; \\ 1, & k = 0; \\ \cosh \sqrt{-k}t, & k < 0. \end{cases}$$

Das duas soluções acima obtemos as seguintes relações:

$$\mathbf{S}'_k = \mathbf{C}_k, \quad \mathbf{C}'_k = -k\mathbf{S}_k, \quad \mathbf{C}_k^2 + k\mathbf{S}_k^2 = 1, \quad \left(\frac{\mathbf{C}_k}{\mathbf{S}_k}\right)' = \left(\frac{\mathbf{S}'_k}{\mathbf{S}_k}\right)' = -\mathbf{S}_k^{-2}. \quad (3.1)$$

Indicaremos por $\mathbf{Ct}_k(t) = \frac{\mathbf{C}_k(t)}{\mathbf{S}_k(t)}$ e por \mathbf{arcCt}_k a função inversa de $\mathbf{Ct}_k(t)$, cujos domínios são respectivamente

$$\begin{cases} (0, \frac{\pi}{\sqrt{k}}), & k > 0; \\ (0, +\infty), & k \leq 0 \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} (-\infty, +\infty), & k > 0; \\ (\sqrt{-k}, +\infty), & k \leq 0. \end{cases}$$

Definição 3.6 *Seja V um \mathbb{R} -espaço vetorial e $\mathcal{L}(V, V)$ é o conjunto das transformações lineares de V em V . Um caminho de transformações lineares é uma aplicação $\mathbf{A} : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$.*

Lema 3.7 *Se $\mathbf{A} : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(V, V)$ é um caminho de transformações lineares então é válida a seguinte propriedade:*

$$(a) \quad (\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}.$$

Se V é um espaço vetorial com produto interno, então

$$(b) \quad (\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)'.$$

Demonstração: (a) Com efeito, primeiramente note que,

$$0 = I' = (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1})' = \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})'.$$

Isto é, $\mathbf{A}(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}$. Portanto, $(\mathbf{A}^{-1})' = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}$.

$$(b) \langle \mathbf{A}u, v \rangle' = \langle \mathbf{A}'u, v \rangle + \langle \mathbf{A}u, 0 \rangle = \langle u, (\mathbf{A}')^*v \rangle.$$

$$\text{Mas, } \langle \mathbf{A}u, v \rangle' = \langle u, \mathbf{A}^*v \rangle' = \langle 0, \mathbf{A}^*v \rangle + \langle u, (\mathbf{A}^*)'v \rangle = \langle u, (\mathbf{A}^*)'v \rangle.$$

Portanto, $\langle u, (\mathbf{A}')^*v \rangle = \langle u, (\mathbf{A}^*)'v \rangle$, para todo $u, v \in V$. Logo $(\mathbf{A}')^* = (\mathbf{A}^*)'$. \square

Definição 3.8 *Sejam M uma variedade Riemanniana, v um vetor unitário em T_pM , v^\perp o complemento ortogonal de v em T_pM e γ a geodésica que satisfaz $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Seja $\tau_t = \tau_{\gamma,0,t} : T_{\gamma(0)}M \rightarrow T_{\gamma(t)}M$ o transporte paralelo ao longo de γ . Considere o caminho de transformações lineares $\mathbf{A}(\cdot; v) : [0, a] \rightarrow \mathcal{L}(v^\perp, v^\perp)$ dada por $\mathbf{A}(t; v)u = \tau_t^{-1}J(t)$, onde $u \in v^\perp$, $J(t)$ é o campo de Jacobi ao longo de $\gamma(t, p, v)$ determinado pelas condições iniciais, $J(0) = 0$, $(\nabla_{\gamma'(t)}J)(0) = u$.*

Para qualquer geodésica γ em M e $t \in \mathbb{R}$, denotamos $\gamma'(t)^\perp$ o complemento ortogonal de $\gamma'(t)$ em $T_{\gamma(t)}M$. E além disso, definimos o operador curvatura:

$$\mathbf{R}_t : \gamma'(t)^\perp \rightarrow \gamma'(t)^\perp \quad \text{por} \quad \mathbf{R}_t u = R(u, \gamma'(t))\gamma'(t).$$

Note ainda que pela Proposição 1.70 \mathbf{R}_t é um operador linear auto-adjunto.

Lema 3.9 *Seja $v \in T_pM$, v^\perp seu complemento ortogonal em T_pM e γ a geodésica que satisfaz $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = v$. Então a aplicação $\mathfrak{R}(t) : v^\perp \rightarrow v^\perp$ definido por $\mathfrak{R}(t)u = (\tau_t^{-1}\mathbf{R}_t\tau_t)(u)$ é linear e auto-adjunto.*

Demonstração: Basta observar que \mathfrak{R} é composta por isometrias e aplicações auto-adjuntas. \square

Lema 3.10 *A aplicação $\mathbf{A}(t; v)$ da definição 3.8 satisfaz a equação $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = 0$ com condições iniciais $\mathbf{A}(0; v) = 0$, $\mathbf{A}'(0; v) = I$.*

Demonstração: Para tal demonstração precisaremos do seguinte fato:

- Sejam X e Y campos de vetores numa variedade Riemanniana M . Sejam $p \in M$ e $\alpha : I \rightarrow M$ uma curva tal que $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t) = X(\alpha(t))$. Então

$$(\nabla_X Y)(p) = \left. \frac{d}{dt} (\tau_{\alpha, t_0, t}^{-1}(Y(\alpha(t)))) \right|_{t=t_0}.$$

Para economizar notação omitiremos o índice referente a curva α em τ_t .

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'(t; v)u &= \frac{d}{dt}(\tau_{0,t}^{-1}(J(t))) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{0,t+\Delta t}^{-1}J(t+\Delta t) - \tau_{0,t}^{-1}J(t)}{\Delta t} \right) \\ &= \tau_{t,0} \circ \tau_{0,t} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{0,t+\Delta t}^{-1}J(t+\Delta t) - \tau_{0,t}^{-1}J(t)}{\Delta t} \right). \end{aligned}$$

Agora pela Proposição 1.55 temos que $\tau_{0,t}$ é uma isometria assim temos

$$\tau_{0,t}^{-1} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(\frac{\tau_{t+\Delta t, t} J(t+\Delta t) - J(t)}{\Delta t} \right) = \tau_{0,t}^{-1} \frac{DJ(t)}{dt}. \quad (3.2)$$

Analogamente temos

$$\mathbf{A}''(t; v)u = \frac{d}{dt}(\tau_{0,t}^{-1} \frac{DJ(t)}{dt}) = \tau_{0,t}^{-1} \frac{D^2 J(t)}{dt^2}$$

Logo, $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = \left(\tau_{0,t}^{-1} \frac{D^2 J(t)}{dt^2} \right) + [\tau_{0,t}^{-1} \mathbf{R}_t \tau_{0,t}] (\tau_{0,t}^{-1} J(t))$ e como J é um campo de Jacobi então

$$\begin{aligned} \left(\tau_{0,t}^{-1} \frac{D^2 J(t)}{dt^2} \right) + [\tau_{0,t}^{-1} \mathbf{R}_t \tau_{0,t}] (\tau_{0,t}^{-1} J(t)) &= -\tau_{0,t}^{-1} R(J, \gamma') \gamma'(t) + \tau_{0,t}^{-1} \mathbf{R}_t J(t) \\ &= -\tau_{0,t}^{-1} R(J, \gamma') \gamma'(t) + \tau_{0,t}^{-1} R(J, \gamma') \gamma'(t) = 0 \end{aligned}$$

Portanto $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = 0$. Usando (3.2) e a definição de $\mathbf{A}(t; v)$ é fácil verificar que $\mathbf{A}(t; v)$ satisfaz as condições iniciais. \square

Lema 3.11 *Sejam \mathbf{A} e \mathbf{B} dois caminhos das transformações lineares de V que satisfazem as equações $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{B}'' + \mathfrak{R}\mathbf{B} = 0$ respectivamente. Então o Wronskiano $W(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}')^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* \mathbf{B}'$ é constante.*

Demonstração:
$$\begin{aligned} W'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= [(\mathbf{A}')^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* \mathbf{B}']' = [(\mathbf{A}')^* \mathbf{B}]' - [\mathbf{A}^* \mathbf{B}']' \\ &= [(\mathbf{A}')^*]' \mathbf{B} + (\mathbf{A}')^* \mathbf{B}' - (\mathbf{A}^*)' \mathbf{B}' - \mathbf{A}^* \mathbf{B}'' \end{aligned}$$

Usando o item (a) do Lema 3.7 tem-se

$$W'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (\mathbf{A}'')^* \mathbf{B} - \mathbf{A}^* \mathbf{B}''.$$

Agora como por hipótese $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = 0$ e $\mathbf{B}'' + \mathfrak{R}\mathbf{B} = 0$ temos

$$W'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = (-\mathfrak{R}\mathbf{A})^* \mathbf{B} + \mathbf{A}^* \mathfrak{R}\mathbf{B} = [\mathbf{A}^* \mathfrak{R} - (\mathfrak{R}\mathbf{A})^*] \mathbf{B} = [\mathbf{A}^* \mathfrak{R} - \mathbf{A}^* \mathfrak{R}^*] \mathbf{B}$$

E pelo Lema 3.9, \mathfrak{R} é auto-adjunto, logo

$$W'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = [\mathbf{A}^* \mathfrak{R} - \mathbf{A}^* \mathfrak{R}] \mathbf{B} = 0.$$

Assim $W'(\mathbf{A}, \mathbf{B}) = 0$, e conseqüentemente $W(\mathbf{A}, \mathbf{B})$ é constante. \square

Proposição 3.12 *Seja $\mathbf{A} : [a, b] \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ um caminho de transformação lineares de classe C^1 . Então sobre um conjunto aberto tal que $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ temos*

$$\text{tr} \mathbf{A}' \mathbf{A}^{-1} = \frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}}$$

Demonstração: Basta desenvolver \mathbf{A}^{-1} como a transposta da matriz dos cofatores sobre o determinante de \mathbf{A} e fazer os cálculos. \square

3.2 Demonstração do Teorema da Comparação de Bishop

Teorema 3.13 (da Comparação de Bishop). *Seja M uma variedade Riemanniana, $\gamma(t, p, v)$ uma geodésica e κ uma constante tal que $\text{Ric}(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq (n-1)\kappa$ para todo $t \in (0, C(v)]$. Então*

$$\frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} \leq (n-1) \frac{(\mathbf{S}_\kappa)'}{\mathbf{S}_\kappa}, \quad \text{em } (0, C(v)) \quad (3.3)$$

$$\det \mathbf{A} \leq \mathbf{S}_\kappa^{n-1}, \quad \text{em } (0, C(v)] \quad (3.4)$$

A igualdade em (3.3) ocorre num ponto $t_0 \in (0, C(v)]$ se, e somente se,

$$\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}_\kappa(t)I, \quad \mathfrak{R}(t) = \kappa I$$

para todo $t \in (0, t_0]$.

Demonstração: Seja $v \in T_p M$ e v^\perp seu complemento ortogonal em $T_p M$. Pelo Lema 3.10 temos que \mathbf{A} é solução da equação $\mathbf{A}'' + \mathfrak{R}\mathbf{A} = 0$. Assim podemos usar o Lema 3.11 para concluir que $W(\mathbf{A}, \mathbf{A})$ é constante. Mas ainda pelo lema 3.10 temos que \mathbf{A} satisfaz as condições $\mathbf{A}(0, v) = 0$ e $\mathbf{A}'(0, v) = I$, da onde segue-se que $W(\mathbf{A}, \mathbf{A}) = 0$. Considere $U = \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}$ em $(0, t) \subset (0, C(v))$. Desta forma U é auto-adjunto. Com efeito,

$$\begin{aligned} U^* - U &= (\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1})^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*(\mathbf{A}')^* - \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^*(\mathbf{A}')^*\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} - (\mathbf{A}^*)^{-1}\mathbf{A}^*\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*[(\mathbf{A}')^*\mathbf{A} - \mathbf{A}^*\mathbf{A}']\mathbf{A}^{-1}. \\ &= (\mathbf{A}^{-1})^*W(\mathbf{A}, \mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^*.0.\mathbf{A}^{-1} = 0. \end{aligned}$$

E ainda U é solução da equação

$$U' + U^2 + \mathfrak{R} = 0. \quad (3.5)$$

De fato,

$$\begin{aligned} U' + U^2 + \mathfrak{R} &= (\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1})' + (\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1})^2 + \mathfrak{R} = (\mathbf{A}''\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1})') + (\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}) + \mathfrak{R} \\ &= (-\mathfrak{R}\mathbf{A})\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1})' + \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} + \mathfrak{R} = \mathbf{A}'(\mathbf{A}^{-1})' + \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} \\ &= \mathbf{A}'(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}) + \mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} = 0. \end{aligned}$$

Aplicando a função traço em (3.5) e usando os teoremas 3.5 e 3.3 junto com a hipótese de que $Ric(\gamma'(t), \gamma'(t)) \geq (n-1)\kappa$ obtemos:

$$0 = trU' + trU^2 + tr\mathfrak{R} \geq (trU)' + \frac{(trU)^2}{n-1} + (n-1)\kappa.$$

Além disso, segue da Proposição 3.12 que $trU = tr\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1} = \frac{(det\mathbf{A})'}{det\mathbf{A}}$. Assim denotando trU por ϕ a desigualdade acima fica

$$\phi' + \frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa \leq 0. \quad (3.6)$$

Considere $\psi = (n-1)\frac{\mathbf{C}_k}{\mathbf{S}_k}$. Então, $\psi' + \frac{\psi^2}{n-1} + (n-1)\kappa = 0$.

De fato, pelas equações (3.1), temos que

$$\psi' + \frac{\psi^2}{n-1} + (n-1)\kappa = \left((n-1)\frac{\mathbf{C}_k}{\mathbf{S}_k} \right)' + \frac{1}{n-1} \left((n-1)\frac{\mathbf{C}_k}{\mathbf{S}_k} \right)^2 + (n-1)\kappa = 0 \quad (3.7)$$

Observe ainda que $\Psi =: \frac{\psi^2}{n-1} + (n-1)\kappa > 0$ no domínio de ψ .

Note que $\phi \sim \frac{n-1}{t}$ quando $t \downarrow 0$ assim existe $\epsilon_0 > 0$ tal que

$$\Phi := \frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa > 0, \text{ em } (0, \epsilon_0).$$

A demonstração do teorema será feita em duas partes.

1°Parte. Suponha que $\Phi > 0$ para todo $(0, t)$ com $t \in (0, C(v))$. Então a desigualdade em (3.6) implica que

$$\frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa} \geq 1. \quad (3.8)$$

integrando em ambos os lados obtemos

$$\int_0^t \frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa}(\tau) d\tau \geq t. \quad (3.9)$$

Mas como $\frac{d}{dt} \text{arcCt}_k(t) = \frac{-1}{t^2+k}$ a integral acima se torna

$$\text{arcCt}_k \left(\frac{\phi(t)}{n-1} \right) \geq t. \quad (3.10)$$

Então aplicando \mathbf{Ct}_k em ambos os lados e observando que \mathbf{Ct}_k é decrescente, segue que a desigualdade acima se inverte e assim $\phi \leq \psi$ que é (3.3). A desigualdade (3.4)

segue do fato de que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{det\mathbf{A}}{\mathbf{S}_k^{n-1}} = 1$ e por causa que a desigualdade (3.3) implica em

$$\left(\frac{det\mathbf{A}}{\mathbf{S}_k^{n-1}} \right)' \leq 0.$$

Agora vamos provar que a igualdade em (3.3) ocorre num ponto $t_0 \in (0, C(v))$ se, e somente se $\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}_\kappa(t)I$ e $\mathfrak{R}(t) = \kappa I$ para todo $t \in (0, t_0]$.

(\Leftarrow) trivial.

(\Rightarrow) Se temos a igualdade em (3.3) no ponto $t_0 \in (0, C(v))$, então temos $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ o que equivale à igualdade em (3.10). Mas isso implica na igualdade em (3.9) em $t = t_0$ que por sua vez implica na igualdade em (3.6) no intervalo $(0, t_0]$. Pois se existisse um ponto $t_1 \in (0, t_0]$ tal que não se verifica a igualdade em (3.6) teríamos, refazendo as contas acima, que $\phi < \psi$ o que contradiz com a nossa hipótese.

Agora observe que a igualdade em (3.6) no intervalo $(0, t_0]$ implica que $\phi = \psi$, $tr\mathfrak{R} = (n-1)\kappa$ e U é um múltiplo escalar da identidade para cada $t \in (0, t_0]$. Então utilizando a equação (3.5) e o fato de que U é um múltiplo escalar da identidade para cada t , segue que \mathfrak{R} é um múltiplo escalar da identidade para cada t , isto é, $\mathfrak{R}(t) = \kappa I$ para todo $t \in (0, t_0]$.

Finalmente, como U é um múltiplo escalar da identidade e seu traço é identicamente igual a $tr(\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}) = \frac{(det\mathbf{A})'}{det\mathbf{A}} = (n-1)\frac{\mathbf{C}_\kappa}{\mathbf{S}_\kappa}$ temos pelo lema 3.3 que

$$\mathbf{A}'\mathbf{A}^{-1}(t) = \frac{\mathbf{C}_\kappa(t)}{\mathbf{S}_\kappa(t)}I$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Agora note que resolver a equação acima é equivalente a resolver

$$\begin{cases} \mathbf{A}'(t) = \frac{\mathbf{C}_\kappa(t)}{\mathbf{S}_\kappa(t)}\mathbf{A}(t), \\ \mathbf{A}(0) = 0 \text{ e } \mathbf{A}'(0) = I, \end{cases}$$

cuja solução é $\mathbf{A}(t) = \mathbf{S}_\kappa(t)I$ para todo $t \in (0, t_0]$ como queríamos demonstrar.

2ºParte. Vamos considerar o caso em que existe $t \in (0, C(v))$ na qual a desigualdade $\Phi > 0$ não é válida para todo $(0, t]$. Então existe $t_0 \in (0, t]$ tal que $\Phi > 0$ em $(0, t_0)$, e $\Phi(t_0)$ é igual a 0. Mas então $\phi(t_0) < \psi(t_0)$, pois $\Psi > 0$. Então, usando a 1ª parte, temos que $\phi \leq \psi$ para todo $t \in (0, t_0]$.

Se $\phi \leq \psi$ no intervalo $(0, t)$, então nós já temos (3.3) em $(0, t]$. Caso contrário, suponha por absurdo que existe um $t_1 \in (t_0, t)$ maximal tal que $\phi \leq \psi$ em $(0, t_1)$.

Em particular $\phi = \psi$ em t_1 . Então $\Phi(t_1) > 0$ e existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $\Phi|_{(t_1, t_1 + \epsilon_1)} > 0$ que implica que (3.8) é válido de t_1 até qualquer $s \in (t_1, t_1 + \epsilon_1)$. Integrando (3.8) de t_1 a $s \in (t_1, t_1 + \epsilon_1)$ temos que $\phi \leq \psi$ em $(t_1, t_1 + \epsilon_1)$, o que é uma contradição com a maximalidade de t_1 . Portanto temos (3.3) no intervalo $(0, t]$.

Vejamos o caso da igualdade. Então existe $t_0 \in (0, t]$ tal que $\phi(t_0) = \psi(t_0)$, o que implica $\Phi(t_0) > 0$, e portanto existe $\epsilon > 0$ tal que $\Phi|_{(t_0 - \epsilon, t_0]} > 0$.

Se $\Phi > 0$ em $(0, t_0)$, veja a parte 1. Caso contrário, suponha por absurdo que existe t_1 maximal em $(0, t_0)$ tal que $\Phi(t_1) = 0$. Neste caso, sabemos que $\phi(t_1) < \psi(t_1)$.

Por outro lado, temos que

$$\frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa} \geq 1.$$

no intervalo (t_1, t_0) . Integrando, temos que

$$\mathbf{arcCt}_\kappa \frac{\phi(t_0)}{n-1} - \mathbf{arcCt}_\kappa \frac{\phi(t_1)}{n-1} = \int_{t_1}^{t_0} \frac{-\phi'}{\frac{\phi^2}{n-1} + (n-1)\kappa} \geq t_0 - t_1.$$

Mas $\phi(t_0) = \psi(t_0)$ implica

$$\mathbf{arcCt}_\kappa \frac{\phi(t_0)}{n-1} = t_0.$$

Daí temos que

$$-\mathbf{arcCt}_\kappa \frac{\phi(t_1)}{n-1} \geq -t_1 \Leftrightarrow \frac{\phi(t_1)}{n-1} \geq \mathbf{Ct}_\kappa(t_1) \Leftrightarrow \phi(t_1) \geq \psi(t_1)$$

o que nos dá a contradição desejada. □

Capítulo 4

Cálculo Estocástico

Neste capítulo abordaremos os conceitos essenciais do cálculo estocástico que serão utilizados nos capítulos posteriores.

4.1 Elementos da Teoria da Medida

As referências usadas nesta seção foram Castro [3], Fernandez [11] e Kallenberg [14].

Definição 4.1 *Uma σ -álgebra sobre um conjunto Ω é uma coleção $\mathcal{A} \neq \emptyset$ de subconjuntos de Ω que possui as seguintes propriedades:*

(1) *Se $A \in \mathcal{A}$ então $A^c \in \mathcal{A}$.*

(2) *Se $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{A}$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.*

O par (Ω, \mathcal{A}) é chamado espaço mensurável e os elementos de \mathcal{A} de conjuntos mensuráveis.

Note que em particular, todas σ -álgebras de Ω contém os conjuntos \emptyset e Ω . Além disso, a intersecção arbitrária de σ -álgebras é uma σ -álgebra.

Definição 4.2 *Seja S uma classe arbitrária de subconjuntos de Ω . A menor σ -álgebra que contém S é chamada σ -álgebra gerada por S e denotada por $\sigma(S)$. Em particular quando Ω é um espaço métrico ou topológico e S é a classe de todos os*

conjuntos abertos de Ω , $\sigma(S)$ é denotada por $\mathfrak{B}(S)$ e chamada σ -álgebra de Borel. Os elementos de $\mathfrak{B}(S)$ são chamados conjuntos Borelianos.

Note que, a σ -álgebra gerada por S é simplesmente a intersecção de todas as σ -álgebras de Ω que contém S .

Daqui em diante as σ -álgebras consideradas sobre espaços métricos ou topológicos sempre será a σ -álgebra de Borel.

Definição 4.3 *Dados dois espaços mensuráveis (Ω, \mathcal{A}) e (Ω', \mathcal{A}') , dizemos que uma aplicação $f : \Omega \rightarrow \Omega'$ é \mathcal{A} - \mathcal{A}' -mensurável ou simplesmente mensurável, se para todo $A' \in \mathcal{A}'$ tem-se $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$. Denotaremos por $\sigma(f)$ a menor σ -álgebra em \mathcal{A} que torna f mensurável.*

Proposição 4.4 *Qualquer aplicação contínua entre dois espaços topológicos S e T é mensurável com as respectivas σ -álgebras de Borel $\mathfrak{B}(S)$ e $\mathfrak{B}(T)$.*

Usaremos os símbolos $\overline{\mathbb{R}}$ e $\overline{\mathbb{R}}_+$ para denotar os conjuntos $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$ e $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ respectivamente.

Lema 4.5 *Sejam (Ω, \mathcal{A}) um espaço mensurável, $f_n, f, g : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ funções mensuráveis e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então:*

- (a) $f + g, f - g, f.g, \lambda f$ são funções mensuráveis e quando $g \neq 0$ em Ω tem-se que $\frac{f}{g}$ é mensurável.
- (b) A composição de funções mensuráveis é mensurável.
- (c) $\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n$ e $\liminf_{n \rightarrow \infty} f_n$ são funções mensuráveis.
- (d) Se f_n converge pontualmente a f , então f é mensurável.
- (e) Se $f_n \geq 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ é mensurável.

Definição 4.6 Dado um subconjunto $A \subset \Omega$ a função $1_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{se } \omega \in A; \\ 0, & \text{se } \omega \notin A. \end{cases}$$

é chamada função indicadora de A .

A combinação linear de funções indicadoras é chamada função simples ou função escada.

Desta maneira uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é simples se, e somente se, existem constantes $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ e subconjuntos $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ dois a dois disjuntos tais que $f = \lambda_1 1_{A_1} + \dots + \lambda_n 1_{A_n}$. Além disso, f é mensurável se, e somente se, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$.

A próxima proposição será essencial na construção da integral de funções mensuráveis que veremos mais adiante.

Proposição 4.7 Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável. Então existe uma sequência de funções simples $f_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que converge para f . Se $f \geq 0$, a sequência pode ser tomada crescente.

Definição 4.8 Uma medida sobre (Ω, \mathcal{A}) é uma função $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ tal que:

- (1) $\mu(A) \geq 0$, para todo $A \in \mathcal{A}$.
- (2) $\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$, se $A_k \in \mathcal{A}$ são dois a dois disjuntos.

A tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ é chamado espaço de medida.

Uma medida \mathcal{P} na qual $\mathcal{P}(\Omega) = 1$ é chamada medida de probabilidade. E a tripla $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ é denominado espaço de probabilidade. Neste caso os elementos $A \in \mathcal{A}$ são chamados eventos e $\mathcal{P}(A)$ a probabilidade do evento A ocorrer.

Definição 4.9 Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida. Dizemos que um subconjunto $B \subset \Omega$ tem medida nula se existe um conjunto mensurável $A \in \mathcal{A}$ tal que $B \subset A$ e $\mu(A) = 0$. A σ -álgebra \mathcal{A} é dita completa se ela contém todos os subconjuntos de medida nula de Ω .

Definição 4.10 Diz-se que uma propriedade vale quase sempre (q.s.) em Ω , se o conjunto dos pontos em que ela não se verifica tem medida nula. Em espaços de probabilidade, é comum usar-se a expressão quase certamente (q.c.).

Lema 4.11 Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $A_n \in \mathcal{A}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então:

- (a) Se $A \subseteq B$ e $\mu(B) < \infty$ então $\mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A)$.
- (b) Se $A_n \uparrow A$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.
- (c) Se $A_n \downarrow A$ e $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(A_{n_0}) < \infty$ então $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu(A)$
- (d) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.
- (e) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ então $\mu(\limsup A_n) = 0$.

Nosso próximo passo é definir em um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ o conceito de integral para funções mensuráveis de Ω em $\overline{\mathbb{R}}$.

Primeiramente vamos assumir que f seja uma função mensurável simples e não negativa. Assim $f = \sum_{k=1}^n \lambda_k 1_{A_k}$, para algum $n \in \mathbb{N}$, $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ e $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$. Define-se a integral de f como

$$\int f d\mu = \sum_{k=1}^n \lambda_k \mu(A_k).$$

Observe que a integral de f está bem definida no seguinte sentido:

$$\text{Se } f = \sum_{i=1}^n a_i 1_{A_i} = \sum_{j=1}^m b_j 1_{B_j}, \text{ então } \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j).$$

Agora para estender a integral para qualquer função mensurável não negativa f , utilizaremos a Proposição 4.7 para obter uma sequência de funções mensuráveis simples e não negativas $\{f_n\}$ tal que $f_n \uparrow f$. E assim definimos a integral de f por:

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

O próximo resultado garante que a integral de f está bem definida no seguinte sentido: Se $\{f_n\}$ e $\{g_n\}$ são duas sequências de funções mensuráveis simples e não

negativas tais que $f_n \uparrow f$ e $g_n \uparrow f$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu$.

Lema 4.12 *Se $\{f_n\}$ é uma seqüência crescente de funções mensuráveis simples e não negativas tal que $f_n \uparrow f$ e g é uma função mensurável simples não negativa tal que $f \geq g$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int g d\mu$.*

Antes de prosseguirmos na direção de definir a integral de uma função mensurável não necessariamente não negativa, introduziremos mais alguns conceitos gerais sobre funções. Dada uma função $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, podemos definir as funções f^+ e f^- chamadas, respectivamente, parte positiva e parte negativa de f , da seguinte maneira: $f^+ = \max\{0, f\}$ e $f^- = \min\{0, -f\}$. Observe que tanto f^+ quanto f^- são funções não negativas e ainda $f = f^+ - f^-$ e $|f| = f^+ + f^-$. Agora com esta teoria, podemos definir em um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ o conceito de integral para uma função mensurável de Ω em $\overline{\mathbb{R}}$.

Definição 4.13 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função mensurável qualquer. Dizemos que f é integrável se:*

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ e } \int f^- d\mu < \infty$$

ou seja se,

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Dado $A \in \mathcal{A}$ definimos a integral de f sobre A por

$$\int_A f d\mu = \int f \cdot 1_A d\mu.$$

Dado um espaço de medida $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ e $1 \leq p < \infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ a classe de funções mensuráveis $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que $\int |f|^p d\mu < \infty$.

Lema 4.14 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida, $f \in L^p(\Omega)$ com $p > 1$ e $g \in L^q(\Omega)$ com $q = \frac{p}{p-1}$, então $f \cdot g \in L^1(\Omega)$.*

4.2 Esperança e Esperança Condicional

As referências usadas nesta seção foram Kallenberg [14] e San Martin [23]. Daqui em diante trabalharemos essencialmente com espaços de probabilidade.

Definição 4.15 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e (Ω', \mathcal{A}') um espaço mensurável. Uma aplicação mensurável $\xi : \Omega \rightarrow \Omega'$ é chamada elemento aleatório. Quando $\Omega' = \mathbb{R}$, ξ é dita variável aleatória, e no caso em que $\Omega' = \mathbb{R}^n$, ξ é denominada vetor aleatório.*

Um elemento aleatório ξ de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ em um espaço mensurável (Ω', \mathcal{A}') , induz uma medida de probabilidade \mathcal{P}_ξ em (Ω', \mathcal{A}') definida da seguinte maneira: Dado um conjunto mensurável $B \in \mathcal{A}'$ definimos \mathcal{P}_ξ por:

$$\mathcal{P}_\xi(B) = \mathcal{P}(\xi^{-1}(B)).$$

A medida de probabilidade induzida por ξ em Ω' é chamada distribuição de ξ .

Dizemos que dois elementos aleatórios $\xi : \Omega' \rightarrow \Omega$ e $\eta : \Omega'' \rightarrow \Omega$ tem a mesma distribuição se $\mathcal{P}_\xi = \mathcal{P}_\eta$.

Dado um vetor aleatório $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, chamaremos de função de distribuição de probabilidade de ξ à função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{P} \left(\bigcap_{i=1}^n \{\xi_i \leq x_i\} \right), \quad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Lema 4.16 *Sejam ξ e η vetores aleatórios com funções de distribuição de probabilidade F e G . Então ξ e η tem a mesma distribuição se, e somente se, $F = G$.*

Vejamos alguns exemplos clássicos de funções de distribuição:

Exemplo 4.17 *Distribuição uniforme em $[0, 1)$*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 4.18 *Distribuição de Bernoulli com parâmetro $p \in [0, 1]$*

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ 1 - p, & 0 \leq x < 1; \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

Exemplo 4.19 *Distribuição normal (ou Gaussiana) com parâmetro $a \in \mathbb{R}$ e $b > 0$*

$$F(x) = \frac{1}{b\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-a}{b}\right)^2} dt.$$

Definição 4.20 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e $\xi : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma variável aleatória. A esperança ou média de ξ é definida pela integral:*

$$E\xi = \int \xi d\mathcal{P} = \int x d\mathcal{P}_\xi,$$

quando tal integral existe. Dado $A \in \mathcal{A}$ definimos a esperança de ξ sobre A por

$$E(\xi; A) = E(\xi 1_A) = \int_A \xi d\mathcal{P}.$$

Um vetor aleatório $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ é dito integrável se cada uma de suas funções coordenadas ξ_k for integrável. Neste caso podemos definir a esperança de um vetor aleatório por:

$$E\xi = (E\xi_1, \dots, E\xi_n).$$

Lema 4.21 *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e ξ, η variáveis aleatórias integráveis. Então são válidas as seguintes propriedades:*

- (a) $E(a\xi + b\eta) = aE\xi + bE\eta$, para todo $a, b \in \mathbb{R}$ e $\xi, \eta \in L(\Omega)$
- (b) Se $\xi \geq \eta$ então $E\xi \geq E\eta$.
- (c) Se ξ é uma variável aleatória constante igual a C , então $E\xi = C$.
- (d) Se $A, B \subset \Omega$ e $A \cap B = \emptyset$ então $E(\xi; A \cup B) = E(\xi; A) + E(\xi; B)$.

Definição 4.22 *A covariância de duas variáveis aleatórias $\xi, \eta \in L^2(\Omega)$ é definida por: $cov(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi E\eta$, onde $E\xi\eta$ existe por causa do Lema 4.14. E a variância de uma variável aleatória $\xi \in L^2(\Omega)$ é definida por: $var(\xi) = cov(\xi, \xi) = E\xi^2 - (E\xi)^2$.*

Faremos agora a construção da esperança condicional através do teorema de Radon-Nikodym.

Definição 4.23 *Seja (Ω, \mathcal{A}) um espaço mensurável e ν, μ medidas em (Ω, \mathcal{A}) . Dizemos que ν é absolutamente contínua com respeito a μ se todo conjunto de medida nula em $(\Omega, \mathcal{A}, \nu)$ tem medida nula em $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.*

Teorema 4.24 (Radon-Nikodym). *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ um espaço de medida e ν uma medida absolutamente contínua com respeito a μ . Então existe uma função f \mathcal{A} -mensurável e não negativa única *q.c.* tal que para cada $A \in \mathcal{A}$ tem-se*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Demonstração: Ver Royden [22]. □

Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade. Para construir a esperança condicional $E[\xi|\mathcal{F}]$ de uma variável aleatória integrável ξ com respeito a uma sub- σ -álgebra $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, decomponha $\xi = \xi^+ - \xi^-$ e defina a medida μ^+ em Ω por

$$\mu^+(A) = \int_A \xi^+ d\mathcal{P}.$$

É claro que μ^+ é absolutamente contínua com respeito a \mathcal{P} . Assim a restrição de μ^+ à \mathcal{F} também é absolutamente contínua com respeito a $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}|_{\mathcal{F}})$. Portanto pelo teorema de Radon-Nikodym, existe uma função \mathcal{F} -mensurável única *q.c.*, o qual denotaremos por $E[\xi^+|\mathcal{F}]$, tal que

$$\mu^+(A) = \int_A E[\xi^+|\mathcal{F}] d\mathcal{P}|_{\mathcal{F}}$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Do mesmo modo, podemos definir $E[\xi^-|\mathcal{F}]$.

Definição 4.25 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade, ξ uma variável aleatória integrável e $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ uma sub- σ -álgebra. Definimos a esperança condicional $E[\xi|\mathcal{F}]$ de ξ com respeito a σ -álgebra \mathcal{F} , como*

$$E[\xi|\mathcal{F}] = E[\xi^+|\mathcal{F}] - E[\xi^-|\mathcal{F}],$$

onde $E[\xi^+|\mathcal{F}]$ e $E[\xi^-|\mathcal{F}]$ são definidos conforme anteriormente.

Lema 4.26 *Seja ξ uma variável aleatória com $E|\xi| < \infty$ e $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ uma sub- σ -álgebra. Então:*

- (a) *Se ξ é \mathcal{F} -mensurável, então $E[\xi|\mathcal{F}] = \xi$ q.c.*
- (b) *Se $\xi = C$ q.c., onde C é uma constante, então $E[\xi|\mathcal{F}] = C$ q.c.*
- (c) *Se $\xi \geq 0$ q.c., então $E[\xi|\mathcal{F}] \geq 0$ q.c.*
- (d) *$|E[\xi|\mathcal{F}]| \leq E[|\xi| | \mathcal{F}]$ q.c.*
- (e) *Se η é outra variável aleatória integrável e a e b são constantes. Então,*
 $E[(a\xi + b\eta)|\mathcal{F}] = aE[\xi|\mathcal{F}] + bE[\eta|\mathcal{F}]$ q.c.
- (f) $E(E[\xi|\mathcal{F}]) = E\xi$.
- (g) *Se $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, então $E[\xi|\mathcal{F}] = E\xi$.*

Para uso posterior vamos introduzir a noção de independência.

Definição 4.27 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e T um conjunto de índices. Os eventos $A_t \in \mathcal{A}$, $t \in T$ são ditos independentes se, para quaisquer índices distintos $t_1, \dots, t_n \in T$, tivermos:*

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{k=1}^n A_{t_k}\right) = \prod_{k=1}^n \mathcal{P}(A_{t_k}).$$

Uma família $\{C_t\}_{t \in T} \subset \mathcal{A}$, é independente se para cada seleção de $A_t \in C_t$ os eventos $\{A_t, t \in T\}$ são independentes.

Uma família de elementos aleatórios $\xi_t : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\Omega', \mathcal{A}')$, $t \in T$ é independente se para quaisquer $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{A}'$ os eventos $\xi_{t_1}^{-1}(B_1), \dots, \xi_{t_k}^{-1}(B_k)$ com $k < \infty$, são independentes.

Teorema 4.28 *Uma condição necessária e suficiente para que as variáveis aleatórias ξ_1, \dots, ξ_n sejam independentes é*

$$\mathcal{P}(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n) = \mathcal{P}(\xi_1 \leq x_1) \dots \mathcal{P}(\xi_n \leq x_n)$$

para todo $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

Lema 4.29 *Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade, \mathcal{F} uma sub- σ -álgebra de \mathcal{A} e ξ uma variável aleatória \mathcal{F} -mensurável com $E|\xi| < \infty$. Se $\sigma(\xi)$ é independente de \mathcal{F} , então $E[\xi|\mathcal{F}] = E\xi$ q.c..*

4.3 Processos Estocásticos e Martingales

Nesta seção utilizamos novamente as referências Kallenberg [14] e San Martin [23].

Definição 4.30 *Um processo estocástico é uma estrutura constituída de um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, um conjunto não vazio de índices T , um espaço mensurável (Ω', \mathcal{A}') e uma aplicação $X : \Omega \times T \rightarrow \Omega'$, tal que para cada $t \in T$, a aplicação $X_t : \Omega \rightarrow \Omega'$ dada por $X_t(\omega) = X(\omega, t)$ é um elemento aleatório.*

Para cada $\omega \in \Omega$, a aplicação $X(\omega) : T \rightarrow \Omega'$, dado por $X(\omega)(t) = X(\omega, t)$, é chamada de trajetória de ω .

Em outras palavras, um processo estocástico é uma coleção de elementos aleatórios definidos num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$, indexadas por um conjunto de índices T .

Definição 4.31 *Dois processos estocásticos X e X' definidos no mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ e no mesmo conjunto de índices T são chamados modificações um do outro se $\mathcal{P}(\{\omega \in \Omega; X_t(\omega) = X'_t(\omega)\}) = 1$ para todo $t \in T$, isto é, se $X_t = X'_t$ q.c. para todo $t \in T$.*

Definição 4.32 *Seja $X : \Omega \times T \rightarrow \Omega'$ um processo estocástico com T e Ω' espaços topológicos. Dizemos que o processo X é contínuo se para todo $\omega \in \Omega$ a aplicação $X(\omega) : T \rightarrow \Omega'$ é contínua. E dizemos que um processo $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável se $E(|X_t|) < \infty$ para todo $t \in T$.*

Definição 4.33 Um processo estocástico $X : \Omega \times [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ é dito ter incrementos independentes se para todo $a \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < b$, as variáveis aleatórias

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

são independentes.

Daremos aqui os resultados básicos sobre uma classe muito importante de processos estocásticos chamados martingales.

Definição 4.34 Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e $T \subset \overline{\mathbb{R}}$ um conjunto de índices. Uma filtração sobre T é uma família $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $t \in T$ não decrescente de sub- σ -álgebras de \mathcal{A} . Se para todo $t \in T$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$, dizemos que a filtração \mathcal{F} é contínua à direita. Uma filtração é dita completa se a σ -álgebra \mathcal{A} é completa e cada \mathcal{F}_t contém todos os subconjuntos de medida nula em \mathcal{A} .

Definição 4.35 Um processo X é dito adaptado à filtração $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ se X_t é \mathcal{F}_t -mensurável para todo $t \in T$.

Dado um conjunto de índices T e uma família de espaços mensuráveis $(\Omega_t, \mathcal{A}_t)$, $t \in T$, podemos munir o conjunto $\prod_{t \in T} \Omega_t$ com a σ -álgebra produto $\otimes_{t \in T} \mathcal{A}_t$ definida por $\otimes_{t \in T} \mathcal{A}_t = \sigma(\{A_t \times \prod_{s \neq t} \Omega_s; A_t \in \mathcal{A}_t\})$. Assim o conjunto $(\prod_{t \in T} \Omega_t, \otimes_{t \in T} \mathcal{A}_t)$ torna-se um espaço mensurável.

Definição 4.36 Sejam $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$ uma filtração sobre \mathbb{R}_+ . Dizemos que um processo $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é progressivo se sua restrição a $\Omega \times [0, t]$ é $\mathcal{F}_t \otimes \mathfrak{B}[0, t]$ -mensurável para todo $t \geq 0$.

Definição 4.37 Um tempo de parada relativo à filtração $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}$, $t \in T$ é uma variável aleatória τ tal que para todo $t \in T$ o conjunto $\{\omega \in \Omega; \tau(\omega) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Dado um tempo de parada τ podemos associar a seguinte σ -álgebra

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{A}; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t, t \in T\}.$$

Definição 4.38 Um processo estocástico $M : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é chamado um *martingale* com respeito a filtração \mathcal{F} , ou um \mathcal{F} -*martingale* se:

- (1) M é integrável.
- (2) M é adaptado a \mathcal{F} .
- (3) $E[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ q.c. para todo $s \leq t$, $s, t \in \mathbb{R}_+$.

Se a igualdade em (3) é substituída por \leq ou \geq temos o que é chamado de *supermartingale* e *submartingale*, respectivamente.

Um processo $M = (M^1, \dots, M^n)$ em \mathbb{R}^n é *martingale* se M^1, \dots, M^n são *martingales unidimensionais*.

Lema 4.39 Se M é um *martingale* tal que $M_0 = 0$ então $E(M_t) = 0$, $\forall t \in T$.

Lema 4.40 Seja $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ um processo estocástico contínuo e integrável. Então é válida a seguinte propriedade:

$$E\left(\int_0^t X_s ds\right) = \int_0^t E(X_s) ds.$$

Demonstração: Consequência imediata do Teorema de Tonelli, ver Royden [22].

□

No próximo capítulo estudaremos os movimentos Brownianos, que estão entre os principais exemplos de *martingales*.

4.4 Integração Estocástica

Nesta seção, utilizamos as referências Kallenberg [14] e Protter [20].

Começaremos esta seção definindo a integral de Stieltjes.

Seja $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $\pi = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t\}$ uma partição de $[0, t]$ e $|\pi| = \sup |t_{i+1} - t_i|$, $i = 0, \dots, n-1$ a norma da partição π . Dizemos que a função A tem variação limitada em intervalos finitos se para todo t

$$V_t(A) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |A(t_i) - A(t_{i-1})| < \infty.$$

Nesse caso $V_t(A)$ é a variação total de A até o tempo t . Para definirmos a integral de Stieltjes considere $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com variação limitada em intervalos finitos e π uma partição de $[0, t]$. A integral de Stieltjes é definida por:

$$\int_0^t f(t) dA(t) = \lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(t_i^*) (A(t_i) - A(t_{i-1})),$$

se o limite existir, onde t_i^* é um ponto amostral no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Observe que a integral de Riemann na reta é uma integral de Stieltjes. De fato, basta considerar a função $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, como sendo a função identidade.

Definição 4.41 *Um processo X é de variação limitada em intervalos finitos se ele é contínuo e todas as suas trajetórias são de variação limitada em intervalos finitos.*

Primeiro vamos fazer a construção da integral de Itô para processos predizíveis do tipo escada, isto é, processos da forma:

$$V_t = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 1_{\{\tau_k < t\}}, \quad t \geq 0,$$

onde ξ_k são variáveis aleatórias \mathcal{F}_{τ_k} -mensuráveis $\forall k \in \mathbb{N}$, τ_k são tempos de parada tal que $\tau_k \uparrow \infty$ q.c..

Então para qualquer processo X , definimos a integral estocástica elementar $V \cdot X$ por

$$(V \cdot X)_t = \int_0^t V_s dX_s = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k (X_t - X_{t \wedge \tau_k}),$$

onde $(V \cdot X)_t$ e $\int_0^t V_s dX_s$ são apenas notações que representam o mesmo objeto e a soma do lado direito converge porque para cada trajetória existe somente um número finito de termos não nulos. Note ainda que $(V \cdot X)_0 = 0$.

Para definirmos a integral estocástica para processos mais gerais, precisaremos dos seguintes conceitos:

Definição 4.42 *Um processo M é um martingale local se ele é adaptado e se existe uma sequência de tempos de parada $\tau_n \uparrow \infty$ tal que $M_{\tau_n \wedge t} - M_0$ é um martingale para cada $n \in \mathbb{N}$.*

Teorema 4.43 *Se M é um martingale local contínuo de variação limitada em intervalos finitos, então M é constante q.c..*

Teorema 4.44 *Para quaisquer martingales locais e contínuos M e N , existe q.c. um único processo contínuo $[M, N]$ de variação limitada em intervalos finitos tal que $[M, N]_0 = 0$ e $MN - [M, N] =$ martingale local chamado de variação cruzada de M e N . Além disso, o processo $[M, N]$ é q.c. simétrico e bilinear. No caso em que $M = N$, denotamos $[M, M]$ por $[M]$ e chamamos $[M]$ de variação quadrática de M .*

Vamos denotar por $L(M)$ a classe de todos os processos progressivos V tal que $(V^2 \cdot [M])_t$ exista no sentido da integração de Stieltjes q.c. para todo $t \in T$.

O teorema a seguir define e garante a existência e unicidade da integral estocástica de um processo $V \in L(M)$ com respeito a um martingale local contínuo M .

Teorema 4.45 *Para todo martingale local contínuo M e para qualquer processo $V \in L(M)$, existe q.c. um único martingale local contínuo $V \cdot M$ tal que $(V \cdot M)_0 = 0$ e $[V \cdot M, N] = V \cdot [M, N]$ q.c. para todo martingale local contínuo N .*

O martingale local $V \cdot M$ também denotado por $\int V dM$, é chamado integral estocástica ou integral de Itô.

Definição 4.46 Um processo $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ é um semimartingale contínuo se ele pode ser escrito como a soma $X = M + A$ onde M é um martingale local contínuo e A é um processo adaptado, contínuo de variação limitada em intervalos finitos com $A_0 = 0$.

Um processo $X = (X^1, \dots, X^n)$ é um semimartingale contínuo no \mathbb{R}^n se cada um dos processos coordenados X^1, \dots, X^n são semimartingales contínuos em \mathbb{R} .

Utilizando o Teorema 4.43 é fácil verificar que um semimartingale $X = M + A$ se decompõe de maneira única.

De fato, suponha que X possa ser escrito como $X = M + A$ e $X = N + B$ onde M, N são martingales locais contínuos e A, B são processos adaptados, contínuos de variação limitada em intervalos finitos com $A_0 = 0$ e $B_0 = 0$.

Assim $0 = X - X = (M + A) - (N + B) = (M - N) + (A - B)$ isso implica que $M - N = B - A$, isto é, o martingale local contínuo do lado esquerdo da equação é de variação limitada em intervalos finitos. Logo pelo Teorema 4.43 $M - N$ é constante *q.c.*, mas $(M - N)_0 = (B - A)_0 = B_0 - A_0 = 0$. Portanto $M = N$ e consequentemente $B = A$, como queríamos demonstrar.

Agora denote por $L(A)$ a classe dos processos progressivos V tal que o processo $(V \cdot A)_t$ existe no sentido da integração de Stieltjes. Então para qualquer semimartingale contínuo $X = M + A$ podemos escrever $L(X) = L(M) \cap L(A)$ e assim definir a integral de um processo $V \in L(X)$ como a soma $V \cdot X = V \cdot M + V \cdot A$.

Note ainda que o processo $V \cdot X$ é também um semimartingale contínuo com decomposição $V \cdot M + V \cdot A$.

Podemos estender o conceito de variação quadrática e variação cruzada para semimartingales X e Y com decomposições $M + A$ e $N + B$ respectivamente. Basta

definirmos $[X] = [M]$ e $[X, Y] = [M, N]$.

Proposição 4.47 *Sejam X e Y dois semimartingales contínuos, $U \in L(X)$ e $V \in L(Y)$. Então $U \cdot X$ e $V \cdot Y$ são semimartingales e ainda satisfazem a seguinte equação*

$$[U \cdot X, V \cdot Y] = (UV) \cdot [X, Y] \text{ q.c.}$$

A próxima proposição estabelece a regra da cadeia para integral estocástica.

Proposição 4.48 *Considere um semimartingale contínuo X e dois processos progressivos U e V , onde $V \in L(X)$. Então $U \in L(V \cdot X)$ se, e somente se, $UV \in L(X)$, e neste caso $U \cdot (V \cdot X) = (UV) \cdot X$ q.c..*

Teorema 4.49 (Integração por partes). *Para quaisquer semimartingales contínuos X e Y , tem-se:*

$$XY = X_0Y_0 + X \cdot Y + Y \cdot X + [X, Y] \text{ q.c.}$$

Apresentaremos agora uma das principais fórmulas do Cálculo Estocástico devido ao matemático Kiyosi Itô. Esta fórmula tem muitas aplicações no estudo de equações diferenciais estocásticas que veremos mais adiante.

Teorema 4.50 (Fórmula de Itô). *Seja $X = (X^1, \dots, X^n)$ um semimartingale contínuo em \mathbb{R}^n e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então:*

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n f'_i(X) \cdot X^i + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} f''_{ij}(X) \cdot [X^i, X^j] \text{ q.c.,}$$

onde f'_i representa a derivada parcial de f em relação a x_i .

Outra forma é dado pela expressão

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) dX_s^i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) d[X^i, X^j]_s.$$

Note que o resultado acima mostra que a classe de semimartingales contínuos é preservado sob aplicações de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$.

Para uso posterior convém fazer uma modificação na integral de Itô, de modo que nesta nova integral valem as regras usuais do Cálculo.

Definição 4.51 *Sejam X e Y semimartingales contínuos com $X \in L(Y)$, definimos a integral de Stratonovich por:*

$$\int_0^t X \circ dY = (X \cdot Y)_t + \frac{1}{2}[X, Y]_t, \quad t \geq 0$$

onde o primeiro termo do lado direito é no sentido da integral de Itô.

Proposição 4.52 *Para qualquer semimartingale contínuo $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ e para qualquer função $f \in C^3(\mathbb{R}^n)$, temos*

$$f(X_t) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t f'_i(X) \circ dX^i, \quad q.c., \quad t \geq 0.$$

A maior vantagem da integral de Stratonovich para a integral de Itô é que a integral de Stratonovich segue as regras usuais do Cálculo. No entanto, os processos estocásticos definidos por integrais de Stratonovich em relação a uma martingale local não definem em geral uma martingale local como no caso da integral de Itô.

Capítulo 5

Movimento Browniano

O objetivo deste capítulo é definir o movimento Browniano em uma variedade. As referências utilizadas aqui foram Hsu [13] e San Martin [23].

5.1 Movimento Browniano no Espaço Euclidiano

O movimento Browniano foi introduzido em 1827 pelo botânico Robert Brown ao observar o movimento aleatório de uma partícula de pólen imersa num líquido, mas o tratamento matematicamente rigoroso do movimento Browniano só foi dado quase um século depois em 1923 pelo matemático americano Norbert Wiener.

Definição 5.1 *Um processo de Wiener ou movimento Browniano unidimensional é uma processo estocástico $W : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ que satisfaz:*

- (1) *Todas suas trajetórias começam na origem q.c.*
- (2) *W tem incrementos independentes.*
- (3) *Para $0 \leq s < t$, o incremento $W_t - W_s$ tem distribuição normal (Gaussiana) com média 0 e variância $t - s$.*

$$\mathcal{P}(W_t - W_s \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx.$$

Observação 5.2 *Um cálculo direto mostra que $W_t - W_s$ é uma distribuição com média 0 e variância $(t - s)$.*

Ao ler a definição acima uma pergunta natural é: Será que tal processo existe? A resposta é afirmativa e no restante desta seção trabalharemos na direção de responder esta questão.

Seja T um conjunto de índices não vazio e \mathbb{R}^T o conjunto das funções de T em \mathbb{R} . Um subconjunto de \mathbb{R}^T da forma $C(t_1, \dots, t_n; B) = \{f \in \mathbb{R}^T; (f(t_1), \dots, f(t_n)) \in B\}$ onde $n \in \mathbb{N}$, $t_1, \dots, t_n \in T$ e B pertence a σ -álgebra de Borel $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$, é chamado cilindro de \mathbb{R}^T em t_1, \dots, t_n com base B . E a classe S de todos os cilindros de \mathbb{R}^T , determina uma σ -álgebra $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^T)$ em \mathbb{R}^T , onde $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^T)$ é a σ -álgebra gerada por S .

Para cada subconjunto $u = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, definimos $|u| = \text{card}(u) = n < \infty$ e a projeção π_u de \mathbb{R}^T em $\mathbb{R}^{|u|}$ por $\pi_u(f) = (f(t_1), \dots, f(t_n))$.

Note que, com esta notação, $C(u; B) = C(t_1, \dots, t_n; B) = \pi_u^{-1}(B)$.

Agora para cada $v = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\} \subset u$ com $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ e $|v| = k \leq n$, definiremos a projeção $\pi_{u,v}$ de $\mathbb{R}^{|u|}$ em $\mathbb{R}^{|v|}$ por $\pi_{u,v}(x_1, \dots, x_n) = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$.

As aplicações π_u e $\pi_{u,v}$ são respectivamente $\mathfrak{C}(\mathbb{R}^T) - \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$ e $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|}) - \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|v|})$ mensuráveis.

Definição 5.3 *Uma família de medidas de probabilidade $\{\mathcal{P}_u; u \subset T \text{ com } |u| < \infty, u \neq \emptyset \text{ e } \mathcal{P}_u \text{ medida de probabilidade em } \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})\}$ é dita ser consistente no sentido de Kolmogorov se:*

$$\mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)) = \mathcal{P}_v(B)$$

para todo $v \subset u$ e $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|v|})$.

Um processo estocástico define uma família de medidas de probabilidade consistente no sentido de Kolmogorov.

De fato, seja $X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}$ um processo estocástico definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Para cada subconjunto $u = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ a aplicação

$\omega \mapsto (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega))$, induz uma medida de probabilidade \mathcal{P}_u em $(\mathbb{R}^{|u|}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|}))$ definida por $\mathcal{P}_u(A) = \mathcal{P}[\omega \in \Omega; (X_{t_1}(\omega), \dots, X_{t_n}(\omega)) \in A]$ para todo $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$. A família de medidas de probabilidade $\{\mathcal{P}_u; u \subset T \text{ com } |u| < \infty\}$ é chamado conjunto das distribuições de dimensão finita do processo X .

Afirmção: Esta família de medidas de probabilidade é consistente no sentido de Kolmogorov.

De fato, seja $v = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\} \subset \{t_1, \dots, t_n\} = u$ e $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|v|})$ então

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_v(B) &= \mathcal{P}((X_{t_{i_1}}, \dots, X_{t_{i_k}}) \in B) = \mathcal{P}(\pi_{u,v}(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) \\ &= \mathcal{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in \pi_{u,v}^{-1}(B)) = \mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)). \end{aligned}$$

A recíproca também é verdadeira, isto é, se $\{\mathcal{P}_u\}$ é uma família de medidas de probabilidade consistente no sentido de Kolmogorov, então, existe um processo X cujo conjunto das distribuições de dimensão finita deste processo coincide com esta família. E isto é, consequência direta do seguinte teorema:

Teorema 5.4 (de Extensão de Kolmogorov). *Seja $\{\mathcal{P}_u; u \subset T \text{ com } |u| < \infty \text{ e } \mathcal{P}_u \text{ probabilidade em } \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})\}$ uma família consistente de medidas de probabilidade. Então existe uma única medida de probabilidade \mathcal{P} em $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{C}(\mathbb{R}^T))$ que satisfaz*

$$\mathcal{P}(C(u; B)) = \mathcal{P}_u(B)$$

para todo $u = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T, |u| = n < \infty$ e $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$.

Pelo teorema de extensão de Kolmogorov existe uma única medida de probabilidade \mathcal{P} em $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{C}(\mathbb{R}^T))$ que satisfaz, $\mathcal{P}(C(u; A)) = \mathcal{P}_u(A)$ para todo $u = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T, |u| = n < \infty$ e $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$. Considere em $(\mathbb{R}^T, \mathfrak{C}(\mathbb{R}^T), \mathcal{P})$ o processo estocástico $X : \mathbb{R}^T \times T \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $X(f, t) = f(t)$. Assim

$$\mathcal{P}_u(A) = \mathcal{P}(\pi_u^{-1}(A)) = \mathcal{P}(\{f \in \mathbb{R}^T; \pi_u(f) \in A\}) = \mathcal{P}((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in A),$$

como queríamos demonstrar.

Mostremos agora a existência do movimento Browniano. Afirmamos que se W é um movimento Browniano, então o conjunto das distribuições de dimensão finita do processo W é dado pela família de medidas de probabilidade em $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$ definida por

$$\mathcal{P}_u(A) = \begin{cases} \int_A \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n, & 0 \in u; \\ \int_A \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n, & 0 \notin u. \end{cases} \quad (5.1)$$

onde $t_0 = 0, x_0 = 0$ e $\delta_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é a função delta de Dirac definida por

$$\int_A \delta_0(x) dx = \begin{cases} 1, & \text{se } 0 \in A; \\ 0, & \text{se } 0 \notin A. \end{cases}$$

De fato, suponha que $0 \in u$ e $u = \{t_1, \dots, t_n\}$ onde $0 = t_1 < \dots < t_n$ e $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$ com $A = A_1 \times \dots \times A_n$.

$$\mathcal{P}_u(A) = \mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1, \dots, W_{t_n} \in A_n)$$

$$= \mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} - W_{t_1} \in A_2 - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in A_n - W_{t_{n-1}})$$

Como os incrementos de W são independentes segue do Teorema 4.28 que a igualdade acima é igual a

$$\mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1) \cdot \mathcal{P}(W_{t_2} - W_{t_1} \in A_2 - W_{t_1}) \dots \mathcal{P}(W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in A_n - W_{t_{n-1}}). \quad (5.2)$$

Usando o item (3) da definição de movimento Browniano e observando que

$$\mathcal{P}(W_{t_2} - W_{t_1} \in A_2 - W_{t_1}) = \int_{A_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \exp\left(-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) dx_2.$$

a equação (5.2) se torna

$$\begin{aligned} & \int_{A_1} \delta_0(x_1) dx_1 \int_{A_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2-t_1)}} \exp\left(-\frac{(x_2-x_1)^2}{2(t_2-t_1)}\right) dx_2 \dots \\ & \dots \int_{A_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n-t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{(x_n-x_{n-1})^2}{2(t_n-t_{n-1})}\right) dx_n \\ & = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i-t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i-x_{i-1})^2}{2(t_i-t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathcal{P}_u(A) = \int_{A_1} \dots \int_{A_n} \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n. \quad (5.3)$$

O caso em que $0 \notin u$ é análogo.

Note que para cada u , \mathcal{P}_u em (5.1) é uma medida de probabilidade cuja função de distribuição de probabilidade coincide com o obtido pela fórmula (5.3). Portanto, pelo Lema 4.16, \mathcal{P}_u em (5.1) é a única medida em $\mathbb{R}^{|u|}$ que satisfaz (5.3).

Por outro lado, considere $\{\mathcal{P}_u\}$ a família de medidas de probabilidade em $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$ definida por (5.1). Temos que esta família é consistente no sentido de Kolmogorov. De fato, tome qualquer $v = \{t_{i_1}, \dots, t_{i_k}\} \subset u$ com $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ e qualquer $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|v|})$. Assim tem-se

$$\mathcal{P}_v(B) = \int_B \delta_0(x_{t_1}) \prod_{j=2}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}} \exp\left(-\frac{(x_{i_j} - x_{i_{j-1}})^2}{2(t_{i_j} - t_{i_{j-1}})}\right) dx_{t_1} \dots dx_{t_k}.$$

Para fixar as idéias considere $v = \{1, \dots, k\}$ e $\pi_{u,v}^{-1}(B) = B \times \mathbb{R}^{n-k}$. Assim temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)) &= \mathcal{P}_u(B \times \mathbb{R}^{n-k}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \int_B \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Mas como

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_i = 1$$

temos

$$\mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)) = \int_B \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^k \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_1 \dots dx_k.$$

Logo $\mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)) = \mathcal{P}_v(B)$. Pode-se ver facilmente que $\mathcal{P}_u(\pi_{u,v}^{-1}(B)) = \mathcal{P}_v(B)$ vale também para todo $v \subset u$ e $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|v|})$. Portanto esta família de medidas de probabilidade em $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^{|u|})$ é consistente no sentido de Kolmogorov.

Assim pelo que foi demonstrado no início desta seção existe um processo W cujo conjunto das distribuições de dimensão finita deste processo coincide com esta família. Vamos provar que este processo é um movimento Browniano.

O item (1) da definição de movimento Browniano segue direto de (5.1) pois o termo $\delta_0(x_1)$ implica que as trajetórias saem da origem *q.c.*. Para provar o item (2), considere $0 = t_1 < \dots < t_n$ e $A_1, \dots, A_n \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ (O caso $t_1 > 0$ é análogo). Assim

$$\begin{aligned}
& \mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} - W_{t_1} \in A_2, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in A_n) \\
&= \mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1, W_{t_2} \in A_2 + W_{t_1}, \dots, W_{t_n} \in A_n + W_{t_{n-1}}) \\
&= \int_{A_1} \int_{A_2 + W_{t_1}} \dots \int_{A_n + W_{t_{n-1}}} \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{(x_i - x_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_n \dots dx_1. \\
&= \int_{A_1} \int_{A_2} \dots \int_{A_n} \delta_0(x_1) \prod_{i=2}^n \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_i - t_{i-1})}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right) dx_n \dots dx_1. \\
&= \int_{A_1} \delta_0(x_1) dx_1 \int_{A_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_2 - t_1)}} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2(t_2 - t_1)}\right) dx_2 \dots \\
&\quad \dots \int_{A_n} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_n - t_{n-1})}} \exp\left(-\frac{x_n^2}{2(t_n - t_{n-1})}\right) dx_n. \\
&= \mathcal{P}(W_{t_1} \in A_1) \dots \mathcal{P}(W_{t_n} - W_{t_{n-1}} \in A_n).
\end{aligned}$$

Logo W tem incrementos independentes. O item (3) da definição de movimento Browniano é imediata. Portanto o processo W é um movimento Browniano.

Vamos mostrar agora que todo movimento Browniano tem uma modificação contínua. Para isso precisaremos primeiro de dois resultados.

Teorema 5.5 *Seja (S, ρ) um espaço métrico completo e $X : \Omega \times \mathbb{R}^n \rightarrow S$ um processo estocástico. E suponha que para algum $a, b, c > 0$ tem-se*

$$E[\rho(X_t, X_s)]^a \leq c \|t - s\|^{n+b}, \quad s, t \in \mathbb{R}^n.$$

*Então X tem uma versão contínua, e para qualquer $d \in (0, \frac{b}{a})$ o processo X é *q.c.* localmente Holder contínua com expoente d .*

Lema 5.6 *Se ξ é uma variável aleatória com distribuição normal e esperança 0, então para todo $a > 0$*

$$E(|\xi|^a) = C_a [E(|\xi|^2)]^{\frac{a}{2}},$$

onde C_a é uma constante real positiva que depende de a .

Demonstração: Seja ξ_v uma variável aleatória com distribuição normal, média 0 e variância v . Assim

$$E(|\xi_1|^a) = 2 \int_0^\infty \frac{x^a}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx = \hat{C}_a$$

e

$$E(|\xi_v|^a) = 2 \int_0^\infty \frac{y^a}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{y^2}{2v}\right) dy.$$

Fazendo a mudança de variável $y = x\sqrt{v}$ temos $dy = dx\sqrt{v}$. E substituindo na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} E(|\xi_v|^a) &= 2 \int_0^\infty \frac{(x\sqrt{v})^a}{\sqrt{2\pi v}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \sqrt{v} \\ &= \hat{C}_a v^{\frac{a}{2}}. \end{aligned}$$

Em particular quando $a = 2$ temos $E(|\xi_v|^2) = \hat{C}_2 v$. Assim $[E(|\xi_v|^2)]^{\frac{a}{2}} = \hat{C}_2^{\frac{a}{2}} v^{\frac{a}{2}}$.

$$E(|\xi_v|^a) = \hat{C}_a v^{\frac{a}{2}} = \frac{\hat{C}_a}{\hat{C}_2^{\frac{a}{2}}} [E(|\xi_v|^2)]^{\frac{a}{2}} = C_a [E(|\xi_v|^2)]^{\frac{a}{2}}.$$

□

Proposição 5.7 *Todo movimento Browniano W tem uma versão contínua.*

Demonstração: Seja $W : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ um movimento Browniano. Assim as variáveis aleatórias $W_t - W_s$ tem distribuição normal e esperança 0 para todo $s, t \in \mathbb{R}_+$ com $s < t$. Então dado $a > 0$ temos pelo lema acima que

$$E(|W_t - W_s|^a) = C_a [E(|W_t - W_s|^2)]^{\frac{a}{2}} = C_a (t - s)^{\frac{a}{2}}$$

onde a última igualdade vem do fato de que

$$t - s = \text{var}(W_t - W_s) = E(W_t - W_s)^2 - \underbrace{[E(W_t - W_s)]^2}_0$$

Tomando $a > 2, b = \frac{a}{2} - 1$ e $c = C_a$ temos

$$E(|W_t - W_s|^a) = c|t - s|^{1+b}, \quad s, t \in \mathbb{R}_+.$$

Portanto pelo teorema anterior W tem uma versão contínua. \square

Daqui em diante, sempre quando citarmos um movimento Browniano, estaremos nos referindo a uma versão contínua do mesmo. Vamos finalizar esta seção, mostrando que todo movimento Browniano é um martingale com respeito a uma certa filtração.

Teorema 5.8 *Considere um movimento Browniano $W : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ e uma filtração $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ definida por $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; 0 \leq s \leq t)$. Assim W é um \mathcal{F} -martingale quadrado integrável com variação quadrática $[W_t] = t$.*

Demonstração: De fato, da definição de movimento Browniano e da definição da filtração \mathcal{F} segue que W é integrável e adaptado. Agora se $s \leq t$, $s, t \in [0, T]$, temos pela definição de movimento Browniano e pelos Lemas 4.26 e 4.29 que

$$E[W_t | \mathcal{F}_s] - W_s = E[W_t - W_s | \mathcal{F}_s] = E(W_t - W_s) = 0.$$

Portanto $E[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s$ q.c. para todo $s \leq t$, $s, t \in [0, T]$. Donde segue que W é um martingale com respeito a filtração \mathcal{F} .

Agora vamos mostrar que W é quadrado integrável. Como os incrementos de W são independentes, podemos usar o Lema 4.29 para obter

$$E[(W_t - W_s)^2 | \mathcal{F}_s] = E(W_t - W_s)^2 = (t - s).$$

Assim $E(W_t^2) = t < \infty \quad \forall t \in [0, T]$ e portanto W é quadrado integrável.

Resta mostrar que a variação quadrática $[W_t] = t$. Para isso basta mostrar que $W_t^2 - t$ é martingale, assim pela unicidade da variação quadrática (veja o Teorema 4.44) teremos o desejado. É fácil ver que $W_t^2 - t$ é integrável e adaptado a \mathcal{F} . Agora para provar que $E[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s$ q.c. para todo $s \leq t$, $s, t \in [0, T]$ usaremos novamente o Lema 4.29 juntamente com o fato de que $E(W_t^2) = t < \infty \quad \forall t \in [0, T]$.

$$E[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] - (W_s^2 - s) = E[(W_t^2 - t) - (W_s^2 - s) | \mathcal{F}_s] = E(W_t^2 - t - W_s^2 + s)$$

$$= E(W_t^2) - E(W_s^2) + E(s - t) = t - s + (s - t) = 0$$

Portanto $E[W_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = W_s^2 - s$ q.c. para todo $s \leq t$, $s, t \in [0, T]$. \square

Definição 5.9 *Um movimento Browniano no espaço euclidiano \mathbb{R}^n é um processo $W = (W^1, \dots, W^n)$ tal que os processos $W^i : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ são movimentos Brownianos unidimensionais independentes.*

5.2 Equações Diferenciais Estocásticas

Primeiramente formularemos o tipo de equação diferencial estocástica que iremos trabalhar no \mathbb{R}^n . Esta por sua vez permitirá definir movimento Browniano em uma variedade Riemanniana. A referência utilizada nesta seção foi Hsu [13].

No que se segue $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ é um espaço de probabilidade com filtração \mathcal{F} completa e contínua à direita.

Para definirmos tal equação precisaremos:

(i) Uma aplicação $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_{n \times l}$ localmente lipschitziana, isto é, $\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0$ (dependendo de ϵ) tal que $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \delta_\epsilon |x - y| \quad \forall x, y \in B_\epsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \epsilon\}$.

Vale lembrar também que no caso em que δ_ϵ independe de ϵ dizemos que σ é globalmente lipschitziana.

(ii) Um semimartingale contínuo $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$.

(iii) Um tempo de parada $\tau : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$

Denotaremos por $\Omega \times [0, \tau)$ o conjunto $\{(\omega, \tau) \in \Omega \times \mathbb{R}_+; \omega \in \Omega, t \in [0, \tau(\omega))\}$. Então para um semimartingale contínuo $X : \Omega \times [0, \tau) \rightarrow \mathbb{R}^n$, vamos considerar a seguinte equação diferencial estocástica:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma(X_s) dZ_s, \quad 0 \leq t < \tau \quad (5.4)$$

onde esta integral estocástica é no sentido de Itô. Iremos nos referir a esta equação por $SDE(\sigma, Z, X_0)$.

Em termos matriciais,

$$\sigma(x) = \begin{bmatrix} \sigma_1^1(x) & \dots & \sigma_l^1(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_1^n(x) & \dots & \sigma_l^n(x) \end{bmatrix}_{n \times l}, \quad Z_t = \begin{bmatrix} Z_t^1 \\ \vdots \\ Z_t^l \end{bmatrix}_{l \times 1},$$

$$\int_0^t \sigma(X_s) dZ_s = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l \sigma_i^1(X_s) \cdot Z_s^i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^l \sigma_i^n(X_s) \cdot Z_s^i \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

Por simplicidade, restringimos nossa situação para um caso típico onde o semimartingale Z tem a forma especial $Z_t = (W_t, t)$ onde W é um movimento Browniano $(l-1)$ -dimensional e $\sigma = (\sigma_1, b)$ com $\sigma_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_{n \times (l-1)}$ e $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Neste caso a equação torna-se:

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sigma_1(X_s) dW_s + \int_0^t b(X_s) ds \quad (5.5)$$

Note que aqui estamos considerando que a solução exista somente até um tempo de parada τ , desta maneira estamos incorporando a possibilidade que a solução possa explodir num tempo finito. Nosso objetivo nesta seção é garantir a existência e unicidade da solução desta equação diferencial estocástica até seu tempo de explosão.

Para o caso em que não se tem tempo de explosão, temos o seguinte resultado:

Teorema 5.10 *Se σ é globalmente lipschitziana e X_0 é quadrado integrável. Então $SDE(\sigma, Z, X_0)$ tem uma única solução $X : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$.*

No teorema acima, a solução X ocorre em todo tempo $t \geq 0$, porque assumimos que a matriz dos coeficientes de σ é globalmente Lipschitz, e esta hipótese implica que a σ pode crescer no máximo linearmente. Agora quando a matriz σ é localmente Lipschitz, existe a possibilidade da solução explodir num tempo finito. Para esse caso, temos o seguinte resultado.

Teorema 5.11 *Se $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{M}_{n \times l}$ é localmente lipschitziana, $Z : \Omega \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^l$ um semimartingale contínuo e X_0 um vetor aleatório \mathcal{F}_0 -mensurável. Então existe uma única solução X de $SDE(\sigma, Z, X_0)$ até seu tempo de explosão $e(X)$.*

Para aplicações futuras, tomaremos um ponto de vista mais geral e definiremos o tempo de explosão de uma trajetória num espaço métrico localmente compacto M . Usaremos a notação $\hat{M} = M \cup \{\partial M\}$ para denotar a compactificação de M por um ponto.

Um caminho λ em M com tempo de explosão $e(\lambda) > 0$ é uma aplicação contínua $\lambda : \mathbb{R}_+ \rightarrow M$ tal que $\lambda_t \in M$ para todo $t \in [0, e(\lambda))$ e se $e(\lambda) < \infty$, $\lambda_t \in \partial M$ para todo $t \geq e(\lambda)$. O espaço dos caminhos em M com tempo de explosão será denotado por $W(M)$. Em $W(M)$ está naturalmente associado o processo $X : W(M) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \hat{M}$ dado por $X(\lambda, s) = X_s(\lambda) = \lambda_s$. E consideraremos nesse espaço a filtração $\mathfrak{B}(W(M))_* = \{\mathfrak{B}_t ; t \geq 0\}$ formada pelas σ -álgebras $\mathfrak{B}_t = \sigma\{X_s ; s \leq t\}$.

Agora vamos formular a equação diferencial estocástica através da integral de Stratonovich. Esta formulação será bem conveniente para o estudo da equação diferencial estocástica em variedades diferenciáveis.

Sejam V_α , $\alpha = 1, \dots, l$ campos de vetores diferenciáveis em \mathbb{R}^n . Assim cada V_α pode ser considerado como uma aplicação $V_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ e desta maneira $V = (V_1, \dots, V_l)$ pode ser visto como uma aplicação de \mathbb{R}^n em $\mathbb{M}_{n \times l}$. Então considerando Z e X_0 como antes, escrevemos a equação diferencial estocástica de Stratonovich por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t V(X_s) \circ dZ_s \quad (5.6)$$

onde a integral é no sentido de Stratonovich. Como V é um conjunto de l -campos de vetores em \mathbb{R}^n podemos reescrever a equação acima por

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^l V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha \quad (5.7)$$

Utilizando a fórmula de Itô, pode-se demonstrar a seguinte proposição.

Proposição 5.12 *Seja X a solução da equação (5.7) e $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^l V_\alpha f(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq s < e(X). \quad (5.8)$$

Demonstração: Pela fórmula de Itô temos

$$f(X) = f(X_0) + \sum_{i=1}^n f'_i(X) \cdot X^i + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} f''_{ij}(X) \cdot [X^i, X^j] \quad (5.9)$$

e como X é solução da equação (5.7) temos

$$X_t = X_0 + \int_0^t \sum_{\alpha=1}^l V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha. \quad (5.10)$$

Então substituindo (5.10) em (5.9) e usando a definição da integral de Stratonovich obtemos

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^n f'_i(X) \cdot (V_\alpha^i(X) \cdot Z^\alpha)}_A + \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'_i(X) \cdot [V_\alpha^i(X), Z^\alpha] \\ &\quad + \underbrace{\sum_{\alpha,\beta=1}^l \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} f''_{ij}(X) \cdot [V_\alpha^i(X) \cdot Z^\alpha, V_\beta^j(X) \cdot Z^\beta]}_B \\ &= A + B + \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} f'_i(X) \cdot [V_\alpha^i(X), Z^\alpha]. \end{aligned}$$

Agora usando a fórmula da integração por partes

$$XY = X_0 Y_0 + X \cdot Y + Y \cdot X + [X, Y]$$

para $X = f'_i$ e $Y = V_\alpha^i(X)$ tem-se

$$\begin{aligned} f(X) &= A + B + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^n [f'_i(X) V_\alpha^i(X), Z^\alpha] - \sum_{\alpha=1}^l \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} [V_\alpha^i(X) \cdot f'_i(X), Z^\alpha] \\ &= A + B + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^l \frac{1}{2} [V_\alpha f(X), Z^\alpha]}_C - \underbrace{\sum_{\alpha=1}^l \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} [V_\alpha^i(X) \cdot f''_{ij}(X) \cdot X^j, Z^\alpha]}_D \end{aligned}$$

onde a última passagem em D , foi utilizado a fórmula de Itô em $f'_i(X)$. Usando Itô em X^j de D , observamos que $B = D$ e concluímos que

$$\begin{aligned} f(X) &= A + C = f(X_0) + V_\alpha f(X) \cdot Z^\alpha + \frac{1}{2}[V_\alpha f(X), Z^\alpha] \\ &= f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X) \circ dZ^\alpha \end{aligned}$$

□

Agora com esta nova formulação podemos iniciar o estudo das equações diferenciais estocásticas em uma variedade diferenciável M .

Definição 5.13 *Sejam M uma variedade diferenciável, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade, \mathcal{F} uma filtração completa e contínua à direita de \mathcal{A} e τ um \mathcal{F} -tempo de parada. Um processo contínuo $X : \Omega \times [0, \tau) \rightarrow M$ é um semimartingale contínuo se $f(X)$ for um semimartingale contínuo em $\mathbb{R} \ \forall f \in C^\infty(M)$.*

Observação 5.14 *O conjunto das funções que devemos testar para verificar se X é um semimartingale contínuo em M pode ser reduzido para $C_k^\infty(M) = \{\text{funções diferenciáveis com suporte compacto}\}$, isto é, se $f(X)$ é um semimartingale contínuo real para todo $f \in C_k^\infty(M)$, então X é um semimartingale contínuo em M .*

Uma equação diferencial estocástica numa variedade M é definida por l -campos de vetores V_1, \dots, V_l em M , um semimartingale Z em \mathbb{R}^l e um elemento aleatório X_0 com valores em M funcionando como condição inicial da solução. Então definimos a equação diferencial estocástica numa variedade M por:

$$X_t = X_0 + \int_0^t V_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha \quad (5.11)$$

e referimos a esta equação por $SDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$.

Definição 5.15 *Um semimartingale $X : \Omega \times [0, \tau) \rightarrow M$ é solução de $SDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$ até o tempo de parada τ se para todo $f \in C^\infty(M)$ temos*

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t V_\alpha f(X_s) \circ dZ_s^\alpha, \quad 0 \leq t < \tau, \quad \alpha = 1, \dots, l. \quad (5.12)$$

Agora usaremos o teorema de Whitney (1.27) para fixar um mergulho de M em \mathbb{R}^n . Assim podemos considerar M como uma subvariedade fechada de \mathbb{R}^n e desta maneira cada campo vetorial V_α pode se visto como uma função diferenciável em $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$. Com isso, podemos estender os campos V_α de M para campos \tilde{V}_α em \mathbb{R}^n usando o teorema da vizinhança tubular da seguinte maneira:

Teorema 5.16 (Vizinhança Tubular). *Existe um difeomorfismo h de uma vizinhança aberta U de $M \subset \mathbb{R}^n$ no fibrado normal TM^\perp .*

Demonstração: Ver Guillemin [12]. □

Coloque uma métrica $\|\cdot\|$ no fibrado normal TM^\perp da mesma maneira que fizemos na seção 1.6 e defina as seguintes aplicações:

$h : U \subset M \rightarrow TM^\perp$ o difeomorfismo definido no teorema da vizinhança tubular.

$i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação inclusão de M no \mathbb{R}^n como subvariedade fechada.

$\pi : TM^\perp \rightarrow M$, por $\pi(p, v) = p$.

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, uma função diferenciável dada por

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty); \\ 1, & \text{se } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}); \\ \text{crescente em,} & \text{se } x \in [-1, -\frac{1}{2}]; \\ \text{decrecente em,} & \text{se } x \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Agora note que, $\tilde{V}_\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por

$$\tilde{V}_\alpha(y) = \begin{cases} \psi(\|h(y)\|^2) \cdot di_{\pi \circ h(y)}(V_\alpha), & \text{se } y \in U; \\ 0, & \text{se } y \notin U, \end{cases}$$

estende o campo V_α a \mathbb{R}^n .

E como a equação

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{V}_\alpha(X_s) \circ dZ_s^\alpha \tag{5.13}$$

tem uma única solução sobre \mathbb{R}^n até seu tempo de explosão $e(X)$ é de se esperar que se X começa em M e os campos de vetores \tilde{V}_α são tangentes em M , então X

nunca deixa M até seu tempo de explosão. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição 5.17 *Seja X a solução da equação estendida (5.13) até seu tempo de explosão $e(X)$ com $X_0 \in M$. Então, $X_t \in M$ para todo $t \in [0, e(X))$. Com isso $X|_{(M \times [0, \tau))}$ é uma solução de $SDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$.*

É importante observar que a solução não depende nem do mergulho de M e nem da extensão dos campos de vetores V_α de M . Isto se deve ao seguinte teorema.

Teorema 5.18 *Suponha que $\Phi : M \rightarrow N$ seja um difeomorfismo e X uma solução de $SDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$. Então $\Phi(X)$ é uma solução de $SDE(\Phi_*V_1, \dots, \Phi_*V_l; Z, \Phi(X_0))$ sobre N , onde $\Phi_* : \mathcal{X}(M) \rightarrow \mathcal{X}(N)$ dada por $(\Phi_*V)f(y) = V(f \circ \Phi)(x)$, com $y = \Phi(x)$ e $f \in C^\infty(N)$.*

Demonstração: Seja $Y = \Phi(X)$ e $f \in C^\infty(N)$. Aplicando (5.12) em $f \circ \Phi \in C^\infty(M)$ e usando $V_\alpha(f \circ \Phi)(X_s) = (\Phi_*V_\alpha)f(Y_s)$, obtemos

$$\begin{aligned} f(Y_t) &= f(Y_0) + \int_0^t V_\alpha(f \circ \Phi)(X_s) \circ dZ_s^\alpha \\ &= f(Y_0) + \int_0^t (\Phi_*V_\alpha)f(Y_s) \circ dZ_s^\alpha. \end{aligned}$$

Portanto $Y = \Phi(X)$ é uma solução de $SDE(\Phi_*V_1, \dots, \Phi_*V_l; Z, \Phi(X_0))$. □

Teorema 5.19 *Existe uma única solução de $SDE(V_1, \dots, V_l; Z, X_0)$ até seu tempo de explosão.*

5.3 Movimento Browniano em Variedades

A construção do movimento Browniano em variedades Riemannianas será feito através de um processo de difusão. Ver Hsu [13].

Para isso considere L um operador elíptico de segunda ordem sobre uma variedade diferenciável M de dimensão d , isto é, um operador que num sistema de coordenadas $x : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^d$ é da forma:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d a^{ij}(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i,j=1}^d b^i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (5.14)$$

onde $x_i : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de x , $b = \{b^i\} : U \rightarrow \mathbb{R}^d$ são funções diferenciáveis e $a = \{a^{ij}\} : U \rightarrow \mathbb{M}_{d \times d}$ é diferenciável, onde a matriz $\mathbb{M}_{d \times d}$ é simétrica com autovalores não negativos.

Além disso, tome $f \in C^2(M)$, $\lambda \in W(M)$ e defina:

$$M^f(\lambda)_t = f(\lambda_t) - f(\lambda_0) - \int_0^t Lf(\lambda_s) ds, \quad 0 \leq t < e(\lambda). \quad (5.15)$$

Definição 5.20 *Seja $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ um espaço de probabilidade e \mathcal{F} uma filtração completa e contínua à direita de \mathcal{A} . Um processo estocástico \mathcal{F} -adaptado $X : \Omega \rightarrow W(M)$ é chamado de processo de difusão gerado por L se X é um semimartingale contínuo em M até o tempo de explosão $e(X)$ e*

$$M^f(X)_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t Lf(X_s) ds, \quad 0 \leq t < e(X), \quad (5.16)$$

é um \mathcal{F} -martingale local $\forall f \in C^\infty(M)$.

Definição 5.21 *Uma medida de probabilidade μ sobre a filtração natural do espaço $(W(M), \mathfrak{B}(W(M))_*)$ é chamada medida de difusão gerada por L se*

$$M^f(x)_t = f(x_t) - f(x_0) - \int_0^t Lf(x_s) ds, \quad 0 \leq t < e(x),$$

é um $\mathfrak{B}(W(M))_*$ -martingale local $\forall f \in C^\infty(M)$.

Mergulhando M em \mathbb{R}^n como uma subvariedade fechada através do teorema de Whitney (1.27) podemos estender o operador L para um operador \tilde{L} do mesmo tipo no espaço ambiente. Isso é feito da seguinte maneira: Denote por $z = (z^1, \dots, z^n)$ as coordenadas de um ponto no espaço ambiente e denote por f^α a função $f^\alpha(z) = z^\alpha$,

$z \in M$. Agora defina a aplicação $\Gamma(f, g) = L(fg) - fLg - gLf$, $f, g \in C^\infty$. Assim fazendo cálculos obtemos

$$\Gamma(f, g) = a^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Observe ainda que se g^1, \dots, g^n são funções diferenciáveis em M , então a matriz $\{\Gamma(g^\alpha, g^\beta)\}$ tem autovalores não negativos em todo M . Seja $\tilde{a}^{\alpha\beta} = \Gamma(f^\alpha, f^\beta)$ e $\tilde{b}^\alpha = Lf^\alpha$ funções diferenciáveis em M . Com isso podemos estender as funções matriciais \tilde{a} e \tilde{b} ao espaço ambiente e continuaremos chamando as extensões por \tilde{a} e \tilde{b} respectivamente. A extensão é feita de modo análogo ao que fizemos para campos de vetores na seção anterior. Assim o operador

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{a}^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial z^\alpha \partial z^\beta} + \sum_{\alpha=1}^n \tilde{b}^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, \quad (5.17)$$

é um operador elíptico e estende L para o espaço ambiente no sentido do lema abaixo.

Lema 5.22 *Seja $f \in C^\infty(M)$. Então para qualquer extensão \tilde{f} de f para o \mathbb{R}^n tem-se: $\tilde{L}\tilde{f} = Lf$ em M .*

O processo de difusão X gerado por \tilde{L} em \mathbb{R}^n é construído por uma solução da equação diferencial estocástica da forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t \tilde{\sigma}(X_s) dW_s + \int_0^t \tilde{b}(X_s) ds \quad (5.18)$$

onde W é um movimento Browniano no \mathbb{R}^n , X_0 é um vetor aleatório em \mathbb{R}^n independente de W e $\tilde{\sigma} = \tilde{a}^{\frac{1}{2}}$. Usando a fórmula de Itô verifica-se que um processo X satisfazendo a equação (5.18) é um processo de difusão gerado por \tilde{L} se $\tilde{a} = \tilde{\sigma}\tilde{\sigma}^T$.

De fato, denotando a derivada parcial de f em relação a z^i por f'_i , temos que

$$\begin{aligned} f(X) &= f(X_0) + \sum_{i=1}^n f'_i(X) \cdot \tilde{\sigma}^i(X) \cdot W + \int_0^t \sum_{i=1}^n f'_i(X) \tilde{b}^i(X) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^n f''_{ij}(X) \cdot [\tilde{\sigma}_\alpha^i(X) \cdot W^\alpha, \tilde{\sigma}_\beta^j(X) \cdot W^\beta] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f(X_0) + \text{martingale} + \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(X) f'_i(X) ds \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j,\alpha,\beta=1}^n f''_{ij}(X) \tilde{\sigma}_\alpha^i(X) \tilde{\sigma}_\beta^j(X) \cdot [W^\alpha, W^\beta] \\
&= f(X_0) + \text{martingale} + \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(X) f'_i(X) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j,\alpha=1}^n f''_{ij}(X) \tilde{\sigma}_\alpha^i(X) \tilde{\sigma}_\alpha^j(X) ds \\
&= f(X_0) + \text{martingale} + \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(X) f'_i(X) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n f''_{ij}(X) \tilde{a}^{ij} ds.
\end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido à simetria de $\tilde{\sigma}$. Portanto

$$f(X) - f(X_0) - \int_0^t \sum_{i=1}^n \tilde{b}^i(X) f'_i(X) ds - \frac{1}{2} \int_0^t \sum_{i,j=1}^n f''_{ij}(X) \tilde{a}^{ij} ds = \text{martingale}.$$

Pela definição de processo de difusão temos o desejado.

Os teoremas seguintes garantem a existência e a unicidade no sentido de distribuição de um processo de difusão gerado por L com condição inicial μ_0 .

Teorema 5.23 *Seja L um operador diferenciável elíptico de segunda ordem sobre uma variedade diferenciável M e μ_0 uma medida de probabilidade em M . Então existe uma medida de difusão gerada por L com condição inicial μ_0 .*

Teorema 5.24 *Uma medida de difusão gerada por L com uma dada condição inicial é única em distribuição.*

Como o Laplaciano é um operador diferenciável elíptico de segunda ordem sobre M (isto segue de (2.1)), podemos definir um processo de difusão gerado pelo Laplaciano. Agora, com os conceitos vistos acima podemos finalmente definir o movimento Browniano em uma variedade Riemanniana.

Definição 5.25 *Seja M uma variedade Riemanniana. O processo de difusão gerado por $\frac{1}{2}\Delta$ é chamado movimento Browniano em M .*

Capítulo 6

Teorema de Cheng-Liouville

6.1 Preliminares

Começaremos esse capítulo fixando as notações e definindo os objetos básicos para demonstrar alguns lemas que serão utilizados na demonstração do teorema de Cheng-Liouville. As referências que utilizamos neste capítulo foram Eells [9], Hsu [13] e Stafford [25].

Sejam (V, g) e (U, h) espaços vetoriais com produto interno e $\phi : V \rightarrow U$ uma transformação linear. Seja $\{e_1, \dots, e_n\}$ uma base ortonormal de V . A norma de ϕ é dada implicitamente por

$$\|\phi\|^2 = \sum_{i=1}^n h(\phi(e_i), \phi(e_i)).$$

Sejam (M, g) e (N, h) variedades Riemannianas, com M compacta e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. O funcional energia $E(f)(x)$ de f no ponto $x \in M$ é definido por $E(f)(x) = \|df(x)\|^2$. A energia total $E(f)$ de f é dada por

$$E(f) = \int_M \|df(x)\|^2 dV_g,$$

onde dV_g é o elemento de volume de M . Dizemos que f é harmônica se f é o ponto crítico do funcional energia. Em outras palavras, se $F : M \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow N$ é uma família a um parâmetro de aplicações diferenciáveis com $F(\cdot, 0) = f$, então

$$\frac{d}{dt} E(F(\cdot, t))|_{t=0} = 0.$$

Façamos alguns cálculos no caso $N = \mathbb{R}$. Uma variação de f pode se realizada por $F(t, x) = f(x) + t\eta(x)$, onde $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ e $\eta : M \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(F(\cdot, t)) &= \lim_{t \rightarrow 0} \int_M \frac{\|\nabla(f(x) + t\eta(x))\|^2 - \|\nabla f(x)\|^2}{t} dV_g \\ &= \int_M \nabla f(x) \cdot \nabla \eta(x) dV_g = - \int_M \Delta f(x) \eta(x) dV_g. \end{aligned}$$

Portanto, usando argumentos variacionais usuais, temos que $\Delta f = 0$. É claro que se $\Delta f = 0$, então f é ponto crítico do funcional energia.

Agora considere o caso $N = \mathbb{R}^n$. Seja $f = (f_1, \dots, f_n)$ a decomposição de f em coordenadas. Faça o mesmo para $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$. Por um cálculo direto, temos que

$$E(f) = - \int_M \sum_{i=1}^n (\Delta f_i) \eta_i dV_g.$$

Se considerarmos deformações do tipo $\eta = (0, \dots, 0, \eta_i, 0, \dots, 0)$, obtemos $\Delta f_i = 0$. Portanto, se f é harmônica, então $\Delta f_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Reciprocamente, é imediato que se $\Delta f_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$, então f é harmônica.

Se M não é compacto, então dizemos que f é harmônica se f for ponto crítico do funcional energia para deformações com suporte compacto. Neste caso, calculamos a energia total em um domínio compacto de M que contém o suporte da deformação. Com isso temos a seguinte proposição

Proposição 6.1 *Seja M uma variedade Riemanniana e $f = (f_1, \dots, f_n) : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável. Então f é harmônica se, e somente se, $\Delta f_i = 0 \forall i = 1, \dots, n$.*

Definição 6.2 *Sejam $B_a = \{x \in M; r(x) \leq a\}$, e $m_f(a) = \max_{x \in B_a} \|f(x)\|$. Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem crescimento sublinear assintótico quando,*

$$\limsup_{a \rightarrow \infty} a^{-1} m_f(a) = 0.$$

Note que $m_{f^2}(a) = (m_f(a))^2$. De fato,

$$m_{f^2}(a) = \max_{x \in B_a} \|f^2(x)\| = \max_{x \in B_a} \|f(x)\|^2 = \max_{x \in B_a} \|f(x)\| \cdot \max_{x \in B_a} \|f(x)\| = (m_f(a))^2 \quad (6.1)$$

Teorema 6.3 *Seja W um movimento Browniano na variedade Riemanniana completa M e $r(x)$ a função distância em M do ponto $w_0 \in M$. Então existe um movimento Browniano β_t na reta e um processo L não decrescente, com crescimento somente no cut locus de w_0 , tal que*

$$r(W_t) = \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r(W_s) ds - L_t. \quad (6.2)$$

Demonstração: Ver Hsu [13] e Kendall [15]. □

O teorema a seguir mostra que as trajetórias de movimento Browniano em variedades Riemannianas completas com curvatura de Ricci não negativa tem tempo de explosão infinito.

Definição 6.4 *Uma variedade Riemanniana é dita estocasticamente completa se para todo $p \in M$, um movimento Browniano começando em p não explode q.c..*

Teorema 6.5 *Seja M uma variedade Riemanniana completa. Suponha que $\kappa(r)$ é uma função negativa, não crescente e contínua em $[0, \infty)$ tal que*

$$\kappa(r) \leq (d-1)^{-1} \inf\{Ric(p) : r(p) = r\}.$$

Se

$$\int_c^\infty \frac{dr}{\sqrt{-\kappa(r)}} = \infty,$$

então M é estocasticamente completa. Em particular, se a curvatura de Ricci é limitada inferiormente por $k < 0$, então M é estocasticamente completa.

Demonstração: Ver Hsu [13]. □

Teorema 6.6 *O tempo que um movimento Browniano passa pelo cut locus é zero q.c..*

Para o que se segue estaremos no seguinte contexto:

$(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ é um espaço de probabilidade, M é uma variedade Riemanniana completa com curvatura de Ricci não negativa, W é um movimento Browniano na variedade M com $W_0 = w_0 \in M$, $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ é a função distância em M do ponto $w_0 \in M$ e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável.

Lema 6.7 *Se a curvatura de Ricci de M é não negativa e $\Delta f = 0$. Então:*

$$E(f^2(W_t)) \geq f^2(W_0) + \|\nabla f(W_0)\|^2 t.$$

Demonstração: Sabemos pelo Lema 2.22 que $\Delta f g = f \Delta g + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle + g \Delta f$, assim temos que em particular $\Delta f^2 = 2f \Delta f + 2\|\nabla f\|^2$. Então usando a hipótese de que $\Delta f = 0$ segue que

$$\Delta f^2 = 2\|\nabla f\|^2. \quad (6.3)$$

Agora como W é o movimento Browniano na variedade Riemanniana M cujas trajetórias começam em $w_0 \in M$, temos por definição que W é um processo de difusão gerado por $\frac{1}{2}\Delta$. Assim aplicando a fórmula (5.16) em $f^2 \in C^\infty(M)$ temos que

$$f^2(W_t) - f^2(w_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta f^2(W_s) ds = \text{martingale}. \quad (6.4)$$

Aplicando a esperança em ambos os lados de (6.4), e usando (6.3) junto com o fato de que a esperança do martingale do lado direito da equação (6.4) é zero temos:

$$E(f^2(W_t) - f^2(w_0)) = E\left(\int_0^t \|\nabla f(W_s)\|^2 ds\right). \quad (6.5)$$

Agora como $\|\nabla f\|^2 \in C^\infty(M)$ podemos aplicar novamente a fórmula (5.16) para esta função, assim obtemos

$$\|\nabla f(W_s)\|^2 - \|\nabla f(w_0)\|^2 - \frac{1}{2} \int_0^s \Delta \|\nabla f(W_r)\|^2 dr = \text{martingale}.$$

Logo,

$$E(\|\nabla f(W_s)\|^2) = E(\|\nabla f(w_0)\|^2) + E\left(\frac{1}{2} \int_0^s \Delta \|\nabla f(W_r)\|^2 dr\right).$$

Aplicando a fórmula de Bochner na equação acima e usando o fato de que $\Delta f = 0$, tem-se

$$E(\|\nabla f(W_s)\|^2) = E(\|\nabla f(w_0)\|^2) + E\left(\int_0^s \|\nabla^2 f(W_r)\|^2 + Ric(\nabla f(W_r), \nabla f(W_r)) dr\right).$$

Agora como a curvatura de $Ric^M \geq 0 \Rightarrow E\left(\int_0^s Ric(\nabla f(W_r), \nabla f(W_r)) dr\right) \geq 0$ e como $\|\nabla^2 f(W_r)\|^2 \geq 0 \Rightarrow E\left(\int_0^s \|\nabla^2 f(W_r)\|^2 dr\right) \geq 0$, segue que:

$$E(\|\nabla f(W_s)\|^2) \geq \|\nabla f(w_0)\|^2. \quad (6.6)$$

Assim de (6.5), (6.6) e do Lema 4.40 resulta que:

$$E(f^2(W_t) - f^2(w_0)) = E\left(\int_0^t \|\nabla f(W_s)\|^2 ds\right) = \int_0^t E(\|\nabla f(W_s)\|^2) ds \geq \int_0^t \|\nabla f(w_0)\|^2 ds.$$

Logo,

$$E(f^2(W_t)) \geq E(f^2(w_0)) + \int_0^t \|\nabla f(w_0)\|^2 ds = f^2(w_0) + \|\nabla f(w_0)\|^2 t.$$

Donde segue o resultado. □

Lema 6.8 *Suponha que a curvatura de Ricci de M é não negativa e r é a função distância em M do ponto w_0 . Então: $E(r^2(W_t)) \leq nt$, onde n é a dimensão de M .*

Demonstração: A demonstração sera feita em duas partes.

1ºParte: Vamos supor que $w_0 \in M$ é um polo de M . Com esta condição $r^2 \in C^\infty(M)$. Para mostrar esse fato, basta mostrar que a função \exp_{w_0} é um difeomorfismo de $T_{w_0}M$ em M . De fato, primeiramente note que \exp_{w_0} é sobrejetora pois dado um ponto $p \in M$, existe uma geodésica que liga w_0 a p . Agora suponha por absurdo que \exp_{w_0} não seja injetora, assim deve existir dois vetores que são levados num mesmo ponto p e assim teríamos as seguintes possibilidades:

(i) Uma das geodésicas que ligam w_0 a p (ou ambas) não é minimizante e isso implica que esta geodésica possui um cut point. Absurdo pois w_0 é polo.

(ii) Ambas as geodésicas são minimizantes. Neste caso, ambas as geodésicas deixam de ser minimizantes a partir de p . Com isso, p é um cut point de ambas as geodésicas, o que é um absurdo.

Portanto \exp_{w_0} é injetora. A \exp_{w_0} é um difeomorfismo local pois caso contrário teríamos uma contradição com a Proposição 1.89. Com isso, mostra-se que \exp_{w_0} é diferenciável. Agora note que $\exp_{w_0}^{-1}$ também é diferenciável, pois dado $p \in M$, existe uma vizinhança V de $\exp_{w_0}^{-1}(p)$ tal que $\exp_{w_0}|_V$ é difeomorfismo. Portanto $\exp_{w_0}^{-1}|_{\exp_{w_0}(V)}$ é um difeomorfismo e com isso $\exp_{w_0}^{-1}$ é diferenciável. Logo \exp_{w_0} é um difeomorfismo. Por fim, como $r^2 = d^2 \circ \exp_{w_0}^{-1}$ onde $d^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2$ é a função distância de w_0 em $T_{w_0}M$ segue que $r^2 \in C^\infty(M)$ pois é a composta de funções diferenciáveis.

Como $r^2 \in C^\infty(M)$ temos que é válida a equação abaixo

$$r^2(W_t) - r^2(w_0) - \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s) ds = \text{martingale},$$

mas pela definição de r temos que $r^2(w_0) = 0 \Rightarrow E(r^2(w_0)) = 0$. Então aplicando a esperança em ambos os lados da equação acima obtemos

$$E(r^2(W_t)) = E\left(\frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s) ds\right). \quad (6.7)$$

O Laplaciano em coordenadas polares é dado por $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} \frac{\partial}{\partial r} + \Delta^\theta$, onde Δ^θ denota os termos no qual não contém qualquer derivadas radiais, $\det \mathbf{A}$ denota o elemento de volume de M em coordenadas polares (vide Definição 3.8) e Proposição 1.74 e $(\det \mathbf{A})' = \frac{\partial \det \mathbf{A}}{\partial r}$. Então segue que

$$\Delta r^2 = 2 + \frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} 2r. \quad (6.8)$$

Agora note que estamos nas condições do teorema da comparação de Bishop com $\kappa = 0$. Assim temos que $\frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} \leq (n-1) \frac{\mathbf{C}_0}{\mathbf{S}_0}$. E como $\mathbf{S}_0(r) = r$, obtemos

$$\frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} \leq \frac{n-1}{r}. \quad (6.9)$$

De (6.8) e (6.9) temos $\Delta r^2 = 2 + \frac{(\det \mathbf{A})'}{\det \mathbf{A}} 2r \leq 2 + \frac{n-1}{r} 2r = 2 + 2n - 2 = 2n$. Isto é

$$\Delta r^2 \leq 2n. \quad (6.10)$$

Assim de (6.10) tem-se

$$\frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s) ds \leq \int_0^t n ds = nt. \quad (6.11)$$

Portanto aplicando a esperança em ambos os lados de (6.11) e usando (6.7) obtemos:

$$E(r^2(W_t)) \leq nt.$$

2ºParte: Agora vamos supor que w_0 não é polo de M . Neste caso vamos fazer as seguintes convenções: $\nabla r = \Delta r = 0$ em w_0 e no cut locus de w_0 . Podemos fazer tal convenção pois o tempo que as trajetórias passam pelo cut locus é zero *q.c.*. Note que estamos nas condições do Teorema 6.3 e assim é válida a seguinte equação

$$r(W_t) = \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r(W_s) ds - L_t, \quad (6.12)$$

onde β_t é um movimento Browniano na reta e L_t é um processo não decrescente. Desta forma β_t e L_t são semimartingales e como $\frac{1}{2} \int_0^t \Delta r(W_s) ds$ também é um semimartingale, segue que $r(W_t)$ é um semimartingale. Portanto podemos aplicar a fórmula de Itô para $r(W_t)$ e $f(z) = z^2$ e obter

$$\begin{aligned} f(r(W_t)) &= f(r(w_0)) + \int_0^t f'(r(W_s)) d(r(W_s)) + \frac{1}{2} \int_0^t f''(r(W_s)) d[r(W_s)] \\ &\Leftrightarrow r^2(W_t) = \int_0^t 2r(W_s) d(r(W_s)) + \int_0^t d[r(W_s)] \end{aligned} \quad (6.13)$$

Agora note que

$$[r(W_t)] = \int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds. \quad (6.14)$$

De fato, como $r(W_t)$ é um semimartingale temos pela definição de variação quadrática para semimartingale que

$$[r(W_t)] = [\beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r(W_s) ds - L_t, \beta_t + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r(W_s) ds - L_t] = [\beta_t, \beta_t] = t.$$

Agora como $\|\nabla r\| = 1$ *q.c.* fora do cut locus, temos que

$$\int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds = t = [r(W_t)].$$

Assim substituindo (6.12) e (6.14) em (6.13) tem-se

$$\begin{aligned} r^2(W_t) &= \int_0^t 2r(W_s)d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^s \Delta r(W_u)du - L_s + \int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds \\ &= \int_0^t 2r(W_s)d\beta_s + \int_0^t 2r(W_s)d\left(\frac{1}{2} \int_0^s \Delta r(W_u)du\right) - \int_0^t 2r(W_s)dL_s + \int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Mas note também que pela Proposição 4.48 temos que

$$\int_0^t 2r(W_s)d\left(\frac{1}{2} \int_0^s \Delta r(W_u)du\right) = \int_0^t r(W_s)\Delta r(W_s)ds. \quad (6.16)$$

Agora substituindo (6.16) na equação (6.15) tem-se

$$r^2(W_t) = \int_0^t 2r(W_s)d\beta_s + \int_0^t r(W_s)\Delta r(W_s)ds - \int_0^t 2r(W_s)dL_s + \int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds.$$

E como

$$\Delta r^2 = 2r\Delta r + 2\|\nabla r\|^2 \Rightarrow \frac{1}{2}\Delta r^2 = r\Delta r + \|\nabla r\|^2.$$

temos que

$$\int_0^t r(W_s)\Delta r(W_s)ds + \int_0^t \|\nabla r(W_s)\|^2 ds = \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s)ds.$$

Assim

$$r^2(W_t) = \int_0^t 2r(W_s)d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s)ds - \int_0^t 2r(W_s)dL_s. \quad (6.17)$$

Então aplicando a esperança em ambos os lados na equação acima obtemos

$$\begin{aligned} E(r^2(W_t)) &= E\left(\int_0^t 2r(W_s)d\beta_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s)ds - \int_0^t 2r(W_s)dL_s\right) \\ &= E\left(\int_0^t 2r(W_s)d\beta_s\right) + E\left(\frac{1}{2} \int_0^t \Delta r^2(W_s)ds\right) - E\left(\int_0^t 2r(W_s)dL_s\right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Mas $\int_0^t 2r(W_s)d\beta_s$ é uma integral de Itô, isto é, um martingale local contínuo que tem trajetória começando na origem. Assim pelo Lema 4.39 tem-se

$$E\left(\int_0^t 2r(W_s)d\beta_s\right) = 0.$$

Logo a equação (6.18) se torna

$$\begin{aligned} E(r^2(W_t)) &= E\left(\frac{1}{2}\int_0^t \Delta r^2(W_s)ds\right) - E\left(\int_0^t 2r(W_s)dL_s\right) \\ &\leq E\left(\frac{1}{2}\int_0^t \Delta r^2(W_s)ds\right) \leq nt, \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade é porque L_s é um processo não decrescente. A segunda desigualdade é devido ao Teorema 6.6 junto com a 1ª parte da demonstração. Da 1ª e 2ª parte temos o desejado. \square

Lema 6.9 *Se $\limsup_{a \rightarrow \infty} a^{-1}m_f(a) = 0$, então para todo $c > 0$, existe algum $C > 0$ tal que para todo $t > 0$, $Ef^2(W_t) \leq ct + C$, ou seja $Ef^2(W_t)$ é sublinear em t .*

Demonstração: Como $\limsup_{a \rightarrow \infty} a^{-1}m_f(a) = 0$ temos por definição que, para todo $\epsilon > 0$ existe $A > 0$ tal que para todo $a > A \Rightarrow |a^{-1}m_f(a)| < \epsilon$. Isto é $\forall \epsilon > 0$ e $a > A$ temos $m_f(a) < a\epsilon$. Além disso, para $a < A$ tem-se que $B_a \subset B_A$ logo

$$m_{f^2}(a) \leq m_{f^2}(A). \quad (6.19)$$

Fixando t e usando o item (a) do Lema 4.21 e observando que $\{r(W_t) \leq A\} \cap \{r(W_t) > A\} = \emptyset$ e $\{r(W_t) \leq A\} \cup \{r(W_t) > A\} = \Omega$ temos

$$\begin{aligned} E(f^2(W_t)) &= E(f^2(W_t); \Omega) = E(f^2(W_t); \{r(W_t) \leq A\} \cup \{r(W_t) > A\}) \\ &= E(f^2(W_t); \{r(W_t) \leq A\}) + E(f^2(W_t); \{r(W_t) > A\}). \end{aligned} \quad (6.20)$$

É claro que em $\{r(W_t) \leq A\}$, $f^2(W_t) \leq m_{f^2}(A)$ Logo,

$$E(f^2(W_t); \{r(W_t) \leq A\}) \leq E(m_{f^2}(A); \{r(W_t) \leq A\})$$

$$\leq m_{f^2}(A) \cdot \mathcal{P}(\{r(W_t) \leq A\}) \leq m_{f^2}(A) \cdot 1 = m_{f^2}(A).$$

Portanto, escolhendo $C = m_{f^2}(A)$ a desigualdade acima fica

$$E(f^2(W_t); \{r(W_t) \leq A\}) \leq C. \quad (6.21)$$

Agora para $\{r(W_t) > A\}$ temos

$$E(f^2(W_t); \{r(W_t) > A\}) \leq E(r^2(W_t)\epsilon^2; \{r(W_t) > A\}) \leq \epsilon^2 E(r^2(W_t)) \stackrel{\text{lema 6.8}}{\leq} \epsilon^2(nt).$$

Então escolhendo $\epsilon = \sqrt{\frac{c}{n}}$ tem-se:

$$E(f^2(W_t); \{r(W_t) > A\}) \leq ct. \quad (6.22)$$

Substituindo 6.21 e 6.22 em 6.20 obtemos o desejado. \square

6.2 Demonstração do Teorema de Cheng-Liouville para $N = \mathbb{R}^n$

Teorema 6.10 (de Cheng-Liouville na reta). *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação harmônica com crescimento sublinear assintótico, definida em uma variedade Riemanniana completa M com curvatura de Ricci não negativa, então f é uma aplicação constante.*

Demonstração: Primeiramente note que estamos nas condições dos Lemas 6.7, 6.8 e 6.9. Suponha por absurdo que f não seja constante. Assim existe um ponto $w_0 \in M$ tal que $\nabla f(w_0) \neq 0$. Então pelo Lema 6.7 temos que:

$$E(f^2(W_t)) \geq f^2(w_0) + \|\nabla f(w_0)\|^2 t.$$

E pelo Lema 6.9 temos que para cada $c > 0$ fixado, existe $C > 0$ tal que $\forall t > 0$

$$E(f^2(W_t)) \leq ct + C.$$

Então escolhendo $c < \|\nabla f(w_0)\|^2$ tem-se que existe $t_0 > 0$ tal que para todo $t > t_0$ é válida a seguinte desigualdade:

$$f^2(w_0) + \|\nabla f(w_0)\|^2 t > ct + C.$$

Logo $E(f^2(W_t)) \geq f^2(w_0) + \|\nabla f(w_0)\|^2 t > ct + C \geq E(f^2(W_t))$ para todo $t > t_0$. Isto é $E(f^2(W_t)) > E(f^2(W_t))$ para todo $t > t_0$, o que é um absurdo. Portanto f é constante. \square

Agora para estender o teorema de Cheng-Liouville para o \mathbb{R}^n precisaremos da seguinte proposição, cuja demonstração é imediata.

Proposição 6.11 *Uma aplicação $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ tem crescimento sublinear assintótico se cada uma de suas funções coordenadas tem crescimento sublinear assintótico.*

Teorema 6.12 (de Cheng-Liouville sobre \mathbb{R}^n). *Se $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação harmônica com crescimento sublinear assintótico, definida em uma variedade Riemanniana completa M com curvatura de Ricci não negativa. Então f é uma aplicação constante.*

Demonstração: Basta observar que cada uma das funções coordenadas de f estão nas condições do Teorema de Cheng-Liouville na reta. \square

Bibliografia

- [1] Aubin, Thierry., Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry, Springer-Verlag, New York, 1997.
- [2] Brickell, F. and Clark, R., Differentiable Manifolds, Van Nostrand Reinhold Co., London, 1970.
- [3] Castro Jr, Augusto A., Curso de Teoria da Medida, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1ªedição, 2004.
- [4] Chavel, Isaac., Riemannian Geometry: A Modern Introduction, Cambridge University Press, New York, 1993.
- [5] Chavel, Isaac., Eigenvalues in Riemannian Geometry, Academic Press, Orlando, 1984.
- [6] Cheng, S.-Y., A Liouville theorem for harmonic maps, Proc. Sympos. Pure Math. **36**, 147-151, AMS, Providence, R. I.
- [7] do Carmo, Manfredo P., Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 3ª edição, 2005.
- [8] Dubrovin, B.A., Fomenko A.T. and Novikov S.P., Modern Geometry - Methods and Applications Volume I, Springer-Verlag, New York, 1984.
- [9] Eells, James. and Lemaire, Luc., Selected Topics in Harmonic Maps, Regional Conference Series in Mathematics, n°50, Rhode Island, 1983.

- [10] Emery, Michel., Stochastic Calculus in Manifolds, Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [11] Fernandez, Pedro J., Medida e Integração, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1º edição, 1976.
- [12] Guillemin, V. and Pollack, Alan., Differential Topology, Printice-Hall, New Jersey, 1974.
- [13] Hsu, Elton P., Stochastic Analysis on Manifolds, American Mathematical Society, Vol.38, Rhode Island, 2001.
- [14] Kallenberg, Olav., Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [15] Kendall, Wilfrid S., The Radial Part of Brownian Motion on a Manifold: A Semimartingale Property, The Annals of Probability, vol.15, Nº4, 1491-1500, 1987.
- [16] Lima, Elon Lages., Álgebra Linear, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 3º edição, 1998.
- [17] Lima, Elon Lages., Curso de Análise Volume 2, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 8º edição, 2005.
- [18] Luciano, Chiara M.S. e Fukuoka, Ryuichi (Orientador)., Hipersuperfícies Compactas no Espaço Euclidiano com r -ésima curvatura Média Constante, Dissertação de Mestrado, UEM, Maringá, 2007.
- [19] Medeiros, Luis A. e Mello, Eliel A., A Integral de Lebesgue, Textos de Métodos Matemáticos, Rio de Janeiro, 4º edição, 1989.
- [20] Protter, Philip., Stochastic Integration and Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1990.

- [21] Revuz, Daniel. and Yor, Marc., Continuous Martingales and Brownian Motion, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [22] Royden, H.L., Real Analysis, The Macmillan Company, London, 4^oedition, 1970.
- [23] San Martin, Luiz. e Marques, Mauro S. F., Cálculo Estocástico, IMPA, Rio de Janeiro, 18^acolóquio Brasileiro de Matemática, 1991.
- [24] Spivak, Michael., A Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Publish OR Perish INC, Houston Texas, 3^oedition, 1999.
- [25] Stafford, Seth., A Probabilistic Proof of S.Y.Cheng's Liouville Theorem, The Annals of Probability, Vol.18, N^o 4, 1816-1822, 1990.
- [26] Whitney, Hassler., Differential Manifolds, Annals of Math, Vol.37, N^o2, 645-680, 1936.