SEMIGRUPO DE VALORES DE CURVAS PLANAS COM VÁRIOS RAMOS

Eduardo Michel Vieira Gomes

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Marcelo Escudeiro Hernandes

Maringá - PR

2007

A minha família: Ademir, Sônia, Elis e Elton.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes, por sua dedicada e atenciosa orientação, constante empenho, sua paciência e conselhos valiosos;

A minha amada família pelo apoio, amor e por sempre acreditarem em mim;

A minha atenciosa e leal namorada Elisângela Düsman;

A todos meus amigos e amigas que contribuiram, de uma forma ou outra, para a realização deste trabalho;

À Ruth, Giancarlo, Chrystyen, João Henrique e Marcio Lorin pela marcante colaboração durante esta fase da minha vida;

Aos companheiros Fernando, André Ricardo, Anderson, Jimmy, Michel, Nazira, Liu, André, Emerson e Carlos;

À Profª Drª Maria Elenice Hernandes e aos funcionários do DMA, em especial à Lúcia.

À CAPES, pelo apoio financeiro;

À banca de qualificação, pelas sugestões que contribuíram para a versão final deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, estudamos o semigrupo de valores S de uma curva plana com $d \geq 2$ ramos.

A descrição explícita de S é dada em termos dos semigrupos de valores das curvas com $d-1$ ramos e de um conjunto finito de elementos chamados maximais relativos, os quais podem ser obtidos em termos dos maximais absolutos, por meio de uma propriedade de simetria.

Finalmente os pontos maximais absolutos são descritos em termos da teoria de contato maximal.

Abstract

In this work, we study the semigroup S of values of a plane curve with $d \geq 2$ branches.

The explicit description is given by the semigroup of values of plane curves with $d-1$ branches and a finite set of elements called relative maximals which can be obtained in terms of absolute maximals by means of a symmetry property.

Finally, we can describe the absolute maximals using the theory of maximal contact.

Sumário

1 Preliminares **3**

1.1 Curvas Planas 3

1.2 Interseção de Curvas 6

1.3 Semigrupos 7

1.4 Contato 10

2 Semigrupo de Uma Curva Redutível **17**

2.1 Algumas Propriedades Algébricas 17

2.2 Geração do Semigrupo de Valores 22

2.3 A Simetria do Conjunto dos Maximais 29

3 Descrição dos Pontos Maximais Absolutos **47**

Introdução

Neste trabalho estudamos o semigrupo de valores de curvas planas com vários ramos, o qual está intimamente ligado com a classificação topológica de curvas planas.

O problema da classificação topológica de curvas planas irredutíveis foi resolvido por Brauner e Zariski por volta de 1930. Foi mostrado que duas curvas planas irredutíveis são topologicamente equivalentes (equisingulares) se, e somente se, elas têm o mesmo semigrupo de valores, ou, equivalentemente, possuem os mesmos expoentes característicos. Mas e o caso redutível? Zariski mostrou, em 1966, que duas curvas planas reduzidas são equisingulares se, e somente se, elas têm o mesmo número de ramos, cada ramo de uma curva é equisingular a um ramo da outra e o índice de interseção entre dois ramos correspondentes é preservado.

Em 1972, Waldi provou que duas curvas planas reduzidas com vários ramos são equisingulares se, e somente se, elas possuem o mesmo semigrupo de valores S. Uma questão natural que surge, é de como obter o semigrupo de valores S, a partir dos semigrupos de cada ramo e do índice de interseção entre estes ramos.

Garcia, em 1980, respondeu parcialmente esta questão para 2 ramos, basicamente quando os ramos possuem tangentes distintas. Em 1984, Bayer respondeu totalmente a questão para dois ramos.

Delgado, em 1987, estudou o caso de curvas planas para vários ramos, generalizando resultados de Garcia e Bayer, mostrando como obter S a partir dos semigrupos de cada ramo e do índice de interseção entre eles.

Neste trabalho, dissertamos sobre os resultados obtidos por Delgado. No entanto, nosso enfoque se diferencia do de Delgado, pelo fato de enquanto este considera curvas sobre um corpo algebricamente fechado qualquer, utilizando assim parametrizações de Hamburguer-Noether, consideramos o corpo dos números complexos e portanto, parametrizações de Newton-Puiseux.

Iniciamos o trabalho com um capítulo contendo os principais resultados para curvas planas irredutíveis, o leitor encontrará as demonstrações omitidas em [H]. No capítulo II por meio do teorema da geração, provamos que é possível determinar S, se conhecemos os semigrupos das curvas planas com $d' < d$ ramos e o conjunto dos elementos chamados maximais relativos de S, o qual é um conjunto finito. Com o teorema da simetria, asseguramos que o conjunto dos maximais relativos e absolutos são simétricos com respeito a um elemento bem determinado de S . No capítulo III apresentamos uma maneira explícita de obter os maximais absolutos irredutíveis, com os quais podemos calcular todos os maximais absolutos e finalizamos o capítulo, com um algoritmo para a determinação do semigrupo S. Todas as demonstrações do capítulo II e III são baseadas em [D], quando não for o caso, faremos menção ao autor.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos conceitos e resultados básicos da teoria de curvas planas irredutíveis que serão usados nos demais capítulos. Como a maioria dos resultados são conhecidos pelos iniciados na teoria, preferimos omitir várias das demonstrações para não desviar dos objetivos centrais do trabalho, os interessados poderão encontrá-las em [H].

1.1 Curvas Planas

Dedicamos esta seção a apresentação das definições e conceitos básicos de curvas planas.

Definição 1.1 *Uma* **curva plana** *é uma classe de equivalência de elementos não nulos do ideal maximal* $\mathcal{M} = \langle X, Y \rangle$ *do anel das séries formais* $\mathbb{C}[[X,Y]]$*, módulo a relação de associado.*

Se $f \in \mathcal{M}\backslash\{0\} \subset \mathbb{C}[[X,Y]]$, denotaremos por (f) a curva determinada por f, ou seja,

$$(f) = \{u.f; u \text{ é uma unidade de } \mathbb{C}[[X,Y]]\}.$$

Portanto, $(f) = (g)$ se, e somente se, existe uma unidade $u \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ tal que $f = u.g$.

Uma curva plana (f) é dita irredutível, se a série f for irredutível em $\mathbb{C}[[X,Y]]$, caso contrário, diremos que a curva é redutível. Note que a irredutibilidade (ou redutibilidade) independe do representante da curva.

Definição 1.2 *Seja $f \in \mathbb{C}[[X,Y]] \backslash \{0\}$ e escreva*

$$f = F_n + F_{n+1} + ...,$$

onde cada F_i é um polinômio homogêneo de grau i e $F_n \neq 0$. O inteiro n é chamado de **multiplicidade** *de f e denotado por $mult(f)$.*

É fato conhecido que podemos escrever $F_n = \prod_{i=1}^{r} (a_i X + b_i Y)^{e_i}$. Cada uma das retas $a_i X + b_i Y$ é chamada **reta tangente** à curva (f). Duas curvas são ditas **transversais** se não possuem retas tangentes em comum.

Como a multiplicidade de uma série é igual à de qualquer um de seus associados, define-se a multiplicidade da curva (f) como sendo a multiplicidade de f. Uma curva de multiplicidade 1 será dita **suave**. Caso a multiplicidade seja maior do que 1, diremos que a curva é **singular**.

Muitas das propriedades de uma curva plana são preservadas por mudança de coordenadas em $\mathbb{C}[[X,Y]]$, isto é, através de um $\mathbb{C}$-automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$. Isto serve de motivação para a próxima definição.

Definição 1.3 *Dadas duas curvas planas (f) e (g), diremos que elas são* **equivalentes***, escrevendo $(f) \sim (g)$, se existir um $\mathbb{C}$-automorfismo Φ de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, tal que*

$$(\Phi(f)) = (g).$$

Em outras palavras, (f) e (g) são equivalentes, se existirem um $\mathbb{C}$-automorfismo Φ e uma unidade u de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, tais que

$$\Phi(f) = u.g.$$

O caráter redutível ou irredutível de uma curva, bem como a sua multiplicidade, entre muitos outros conceitos, se conservam por equivalência de curvas.

A abordagem que adotaremos neste trabalho é a de tratar as curvas planas dadas através de parametrizações. Para tanto utilizaremos o teorema de Newton-Puiseux. Por este teorema, temos que toda curva plana irredutível dada por uma série de potências $f(X,Y)$, admite (a menos de uma mudança de coordenadas)uma parametrização da forma

$$\left\{\begin{array}{l} x = t^{\beta_0} \\ y = \varphi(t). \end{array}\right.$$

Tal parametrização será chamada de **parametri-zação de Newton-Puiseux**.

Dada uma parametrização de Newton-Puiseux de uma curva (f), podemos através de mudanças de coordenadas e de parâmetro (se necessário), considerar que esta seja dada na forma

$$(f): \left\{\begin{array}{ll} x = & t^{\beta_0} \\ y = & t^{\beta_1} + \displaystyle\sum_{i\,>\,\beta_1} a_i t^i \end{array}\right.$$

onde $mult(f) = \beta_0 < \beta_1$ e β_1 não é divisível por β_0.

Chamamos de **expoentes característicos** da curva plana irredutível (f) aos inteiros $\beta_0, \beta_1, ..., \beta_g$ obtidos, de uma parametrização como acima, do seguinte modo:

Considere $e_0 = \beta_0$ e para $i \geq 1$ defina

$$\beta_i = min\{j \ ; \ a_j \neq 0 \text{ e } e_{i-1} \text{ não divide } j\},$$

$$e_i = mdc(\beta_i, e_{i-1}).$$

Pode-se mostrar que existe um inteiro $g > 0$, chamado **gênero** da curva plana irredutível, tal que $e_g = 1$. Assim, os expoentes característicos de uma curva plana irredutível são em número finito.

Exemplo 1.4 *Seja*

$$(f): \left\{\begin{array}{ll} x = & t^8 \\ y = & t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + ... \end{array}\right.$$

Então,

$$\begin{aligned} \beta_0 = e_0 = &\ 8 \text{ e } \beta_1 = 12 \\ e_1 = &\ mdc(12,8) = 4, \quad logo \quad \beta_2 = 22 \\ e_2 = &\ mdc(22,4) = 2, \quad logo \quad \beta_3 = 23 \\ e_3 = &\ mdc(23,2) = 1. \end{aligned}$$

Assim, os expoentes característicos de (f) *são* $8, 12, 22$ *e* 23.

1.2 Interseção de Curvas

Nesta seção abordaremos o conceito de índice de interseção entre duas curvas. Para isto, introduziremos algumas definições e resultados.

Seja $f \in \mathcal{M}$. Denotaremos por $\langle f \rangle$ o ideal gerado por f em $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

Define-se o **anel de coordenadas** da curva (f), como sendo a $\mathbb{C}$-álgebra

$$\mathcal{O}_f = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f \rangle}.$$

Quando f é irredutível, temos que $\mathcal{O}_f$ é um domínio, mais ainda, neste caso é um anel local. O corpo de frações $\mathcal{K}_f$ de $\mathcal{O}_f$, isto é, $\{\frac{g}{h};\ g,h \in \mathcal{O}_f;\ h \neq 0\}$ é isomorfo a $\mathbb{C}(t)$ e o fecho integral $\widetilde{\mathcal{O}}_f = \{h \in \mathcal{K}_f;\ h^n + a_1 h^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \text{ com } a_i \in \mathcal{O}_f\}$ de $\mathcal{O}_f$ é isomorfo a $\mathbb{C}[[t]]$.

O próximo resultado mostra que o anel $\mathcal{O}_f$ é um importante invariante das classes de equivalência de curvas planas.

Teorema 1.5 *Dadas duas curvas planas* (f) *e* (g), *tem-se que* $(f) \sim (g)$ *se, e somente se,* $\mathcal{O}_f \simeq \mathcal{O}_g$, *isto é,* $\mathcal{O}_f$ *e* $\mathcal{O}_g$ *são isomorfos como* $\mathbb{C}$*-álgebras.*

Demonstração: Veja demonstração em [H]. $\square$

Definição 1.6 *Sejam* $f, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. *O* **índice de interseção** *de* f *e* g *é dado por*

$$I(f,g) = dim_{\mathbb{C}} \tfrac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f,g \rangle} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

Observe que $I(f,g) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_f}{\langle g' \rangle}$, onde g' representa a imagem de $g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ em $\mathcal{O}_f$.

O índice de interseção possui propriedades notáveis, abaixo apresentamos as principais.

Teorema 1.7 *Sejam $f, g, h, u, v \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, Φ um automorfismo de $\mathbb{C}[[X,Y]]$, com u e v unidades. O índice de interseção é totalmente caracterizado pelas seguintes propriedades:*

i) $I(f,g) < \infty$ se, e somente se, f e g são primos entre si em $\mathbb{C}[[X,Y]]$.

ii) $I(f,g) = I(g,f)$.

iii) $I(\Phi(f), \Phi(g)) = I(uf, vg) = I(f,g)$.

iv) $I(f, gh) = I(f,g) + I(f,h)$.

v) $I(f,g) = 1$ se, e somente se, (f) e (g) são suaves e transversais.

vi) $I(f, g + hf) = I(f,g)$.

O teorema abaixo, fornece uma outra maneira de calcular o índice de interseção.

Teorema 1.8 *Sejam f, $g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ e $f = f_1 ... f_r$ uma decomposição para f em fatores irredutíveis com f_i e f_j não associados para todo $i \neq j$, então*

$$I(f,g) = \sum_{i=1}^{r} v_i(g),$$

onde $v_i(g) = ord_t\ g(x_i(t), y_i(t))$ com $(x_i(t), y_i(t))$ uma parametrização de Newton-Puiseux de (f_i).

1.3 Semigrupos

Nesta seção introduziremos o conceito de semigrupo de valores de uma curva plana irredutível, bem como suas principais propriedades.

Definição 1.9 *Seja $S \neq \emptyset$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ contendo o elemento 0. Dizemos que S é um* **semigrupo** *em $\mathbb{N}$, se S é fechado para a adição.*

Se $v_0, ..., v_r \in \mathbb{N}$, então o conjunto

$$\langle v_0, ..., v_r \rangle = \{\lambda_0 v_0 + ... + \lambda_r v_r; \lambda_0, ..., \lambda_r \in \mathbb{N}\}$$

é um semigrupo em $\mathbb{N}$, chamado semigrupo gerado por $v_0, ..., v_r$. Os elementos $v_0, ..., v_r$, são chamados geradores de S.

Dado um semigrupo S em $\mathbb{N}$, os elementos do conjunto $\mathbb{N} \setminus S$ são chamados de lacunas de S. Um semigrupo pode ter finitas ou infinitas lacunas. Quando o número de lacunas de S é finito, existe um único elemento $c \in S$, chamado **condutor** de S, tal que

$a)$ $c - 1 \notin S$.

$b)$ se $z \in \mathbb{N}$ e $z \geq c$, então $z \in S$.

Definição 1.10 *O* **semigrupo de valores** *associado a uma curva plana irredutível (f) é o conjunto*

$$S(f) = \{I(f, g); g \in \mathbb{C}[[X, Y]] \setminus \langle f \rangle\} \subset \mathbb{N}.$$

Para verificar que $S(f)$ é de fato um semigrupo, basta observar as propriedades de índice de interseção. Além disto, o semigrupo de valores de uma curva plana irredutível tem condutor c. Mais ainda, $z \in S(f)$ se, e somente se, $c - 1 - z \notin S(f)$ (Veja [H]).

Para obter o sistema mínimo de geradores de $S(f)$, é suficiente considerarmos $v_0 = min\ S(f) \setminus \{0\}$ e $v_i = min\ S(f) \setminus \langle v_0, ..., v_{i-1} \rangle$. Procedendo deste modo, temos $v_0, v_1, ..., v_g \in S(f)$, tais que $S(f) = \{\alpha_0 v_0 + \cdots + \alpha_g v_g; \alpha_i \in \mathbb{N}\} = \langle v_0, ..., v_g \rangle$. A escolha do índice g para o último expoente característico bem como para o último gerador de $S(f)$ não foi uma coincidência. De fato, Zariski mostrou como obter o sistema mínimo de geradores de $S(f)$ a partir dos expoentes característicos (veja [H] cap. 6) a saber, temos as relações

$$v_0 = \beta_0$$

$$v_{i+1} = n_i v_i + \beta_{i+1} - \beta_i,$$

onde $n_0 = 1$, $n_i = \dfrac{e_{i-1}}{e_i}$ e $e_k = mdc(\beta_0, ..., \beta_k)$.

Observação 1.11 *Através do sistema mínimo de geradores do semigrupo $S(f) = \langle v_0, v_1, ..., v_g\rangle$ de uma curva plana irredutível (f), podemos obter o condutor de $S(f)$ pela fórmula (veja [H] Proposição 2, Capítulo 7)*

$$c = \sum_{i=1}^{g}(n_i - 1)v_i - v_0 + 1.$$

Deste modo, podemos calcular o semigrupo de valores de uma curva plana irredutível e seu condutor, usando os expoentes característicos.

Exemplo 1.12 *Considere a curva dada no exemplo 1.4, ou seja,*

$$(f): \begin{cases} x = t^8 \\ y = t^{12} + 3t^{16} - t^{20} + 2t^{22} + 8t^{23} + \cdots \end{cases}$$

Vimos que $\beta_0 = 8$, $\beta_1 = 12$, $\beta_2 = 22$ e $\beta_3 = 23$. Assim,

$$\begin{array}{ll} v_0 = 8 & n_0 = 1 \\ v_1 = n_0 v_0 + \beta_1 - \beta_0 = \beta_1 = 12 & n_1 = 2 \\ v_2 = n_1 v_1 + \beta_2 - \beta_1 = 34 & n_2 = 2 \\ v_3 = n_2 v_2 + \beta_3 - \beta_2 = 69 & n_3 = 2. \end{array}$$

Logo, $S(f) = \langle 8, 12, 34, 69\rangle$ e neste caso, temos que $c = 108$.

Definição 1.13 *Sejam S um semigrupo de $\mathbb{N}$ com condutor c e $p \in S \setminus \{0\}$. Definimos a* **seqüência de Apéry** *$a_0, ..., a_{p-1}$ de S, com relação à p, como:*

$$a_0 = 0$$

$$a_j = min\left(S \setminus \bigcup_{i=0}^{j-1}(a_i + p_i\mathbb{N})\right),\ 1 \leq j \leq p-1,$$

onde, $a_i + p\mathbb{N} = \{a_i + \lambda p; \lambda \in \mathbb{N}\}$.

A seqüência de Apéry possui muitas propriedades, dentre elas destacamos:

a) $0 = a_0 < a_1 < ... < a_{p-1}$.

b) $a_i \not\equiv a_j \; mod \; p$, $0 \leq i < j \leq p-1$.

c) $S = \bigcup_{j=0}^{p-1}(a_j + p\mathbb{N})$.

d) $c = a_{p-1} - (p-1)$.

Mais ainda, se S é o semigrupo de uma curva plana irredutível, então

e) $a_{p-1} - a_i = a_{p-1-i}$, para todo $0 \leq i \leq p-1$.

As justificativas das propriedades acima podem ser encontradas em [H].

Exemplo 1.14 *Seja a curva* (f) *dada no exemplo 1.4, vimos no exemplo 1.12 que* $S(f) = \langle 8, 12, 34, 69 \rangle$ *e neste caso, temos que a seqüência de Apéry de S(f) com relação à 8 é:*

$$0, 12, 34, 46, 69, 81, 103, 115.$$

1.4 Contato

Nesta seção apresentamos o conceito de contato entre curvas planas irredutíveis. A fórmula do contato é clássica e possui várias propriedades. A noção de contato será amplamente utilizada no último capítulo deste trabalho.

Sejam (f) e (h) duas curvas planas irredutíveis com as seguintes parametrizações de Newton-Puiseux:

$$(f) : \begin{cases} x = & t^n \\ y = & \varphi(t) = \sum_{i \geq i_0} a_i t^i \end{cases}$$

$$(h) : \begin{cases} x = & t_1^m \\ y = & \psi(t_1) = \sum_{j \geq j_0} b_j t_1^j \end{cases}$$

com expoentes característicos $\beta_0, ..., \beta_g$ e $\beta'_0, ..., \beta'_{g'}$ respectivamente.

Definição 1.15 *Sejam (f) e (h) como acima. Dizemos que as curvas (f) e (h) têm* **contato** *de ordem $\alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$, se*

$$\alpha = max_{\zeta,\varsigma} ord_x(\varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}}) - \psi(\varsigma x^{\frac{1}{m}})),$$

onde ζ e $\varsigma \in \mathbb{C}$ são, respectivamente, uma $n-$ésima e uma $m-$ésima raiz da unidade.

De agora em diante estaremos escolhendo uma parametrização para (f) e (h) que atinge o máximo na definição acima. Deste modo, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.16 *Sejam (f) e (h) duas curvas planas irredutíveis cujas parametrizações são como as dadas anteriormente e com ordem de contato α, de modo que $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$ para algum $q \geq 1$. Então*

$$\frac{n}{m} = \frac{e_i}{e'_i} = \frac{\beta_i}{\beta'_i} = \frac{v_i}{v'_i} \qquad \begin{cases} 0 \leq i \leq q-1, \text{ se } \alpha = \frac{\beta_q}{n} \\ 0 \leq i \leq q, \text{ se } \alpha > \frac{\beta_q}{n}. \end{cases}$$

Demonstração: Sejam

$$\varphi(x^{\frac{1}{n}}) = a_{i_0} x^{\frac{i_0}{n}} + a_{i_1} x^{\frac{i_1}{n}} + ... + a_{i_r} x^{\frac{i_r}{n}} + ...$$

e

$$\psi(x^{\frac{1}{m}}) = b_{j_0} x^{\frac{j_0}{m}} + b_{j_1} x^{\frac{j_1}{m}} + ... + b_{j_s} x^{\frac{j_s}{m}} + ...$$

com $a_{i_0}...a_{i_{r+1}} \neq 0, b_{j_0}...b_{j_{s+1}} \neq 0$ e $\frac{i_r}{n} < \alpha \leq \frac{i_{r+1}}{n}$.

Suponhamos que $\alpha = min\{\frac{i_{r+1}}{n}, \frac{j_{s+1}}{m}\}$, então $r = s$ e

$$\tfrac{i_l}{n} = \tfrac{j_l}{m},\ a_{i_l} = b_{j_l},\ l = 0, ..., r.$$

Por outro lado, $a_{i_{r+1}} \neq b_{j_{r+1}}$ se $\frac{i_{r+1}}{n} = \frac{j_{r+1}}{m}$. Agora, dado que $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$ e $mdc(mn, mi_0, ..., mi_l) = m.mdc(n, i_0, ..., i_l) = n.mdc(m, j_0, ..., j_l)$, o resultado segue das definições de e_i, e'_j, β_i, β'_j e da relação entre estes inteiros e os elementos do sistema mínimo de geradores do semigrupo de cada curva dada na seção anterior. $\square$

A proposição anterior motiva a seguinte definição:

$$r = r_{fh} = max\{j \in \mathbb{N}; \frac{v_i}{v_0} = \frac{v_i'}{v_0'}, \forall i, 0 \leq i \leq j\}.$$

Se $S(f) = S(h)$, então $r_{fh} = g = g'$. Por outro lado, se $S(f) \neq S(h)$, então $\frac{\beta_{r+1}}{n} \neq \frac{\beta'_{r+1}}{m}$ e a ordem de contato α entre (f) e (h) satisfaz

$$\alpha < max\{\frac{\beta_{r+1}}{n}, \frac{\beta'_{r+1}}{m}\},$$

que também é válido quando $S(f) = S(h)$, considerando que $\beta_{r+1} = \infty$.

O próximo resultado, relaciona o contato entre duas curvas e o índice de interseção entre elas.

Teorema 1.17 *Sejam (f) e (h) dadas como no início da seção. Suponha que (f) e (h) tenham ordem de contato α e $S(f) = \langle v_0, ..., v_g \rangle$ onde $v_0 = n$. Se $\alpha < \frac{\beta_1}{n}$, então $I(f,h) = \alpha nm$. Mais ainda, assumindo $n_0 = 1$, temos que as afirmações abaixo são equivalentes.*

i) $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$, *para algum* $q \in \{1, ..., g\}$.

ii) $\frac{I(f,h)}{m} = \frac{v_q}{n_0 \ldots n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_1 \ldots n_q}$.

Demonstração: Sejam $G_i = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^{e_i} = 1\}$ e $G_0 = \{\zeta \in \mathbb{C}; \zeta^n = 1\}$. Dado que a curva (f) está associada ao polinômio $\prod_{\zeta \in G_0} (Y - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}}))$ (Veja [H]), temos pelo teorema 1.8 que

$$I(f,h) = ord_{t_1} f(t_1^m, \psi(t_1)) = m.ord_x f(x, \psi(x^{\frac{1}{m}})) = m.ord_x \prod_{\zeta \in G_0} \left(\psi(x^{\frac{1}{m}}) - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}})\right)$$
$$= m. \sum_{\zeta \in G_0} ord_x \left(\psi(x^{\frac{1}{m}}) - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}})\right)$$

$$= m \sum_{i=1}^{g+1} \sum_{\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i} ord_x \left(\psi(x^{\frac{1}{m}}) - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}})\right), \tag{1.1}$$

onde $G_{g+1} = \emptyset$.

Note que da expressão acima, segue que se $\alpha < \frac{\beta_1}{n}$, então $I(f,h) = \alpha nm$.

i) $\Rightarrow$ *ii)* Suponhamos agora que $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$, para algum $q \in \{1, ..., g\}$. Note que $\zeta^{\beta_i} \neq 1$, sempre que $\zeta \in G_{i-1} \setminus G_i$ para $i = 1, ..., q-1$. Assim

$$ord_x\left(\psi(x^{\frac{1}{m}}) - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{n}})\right) = \frac{\beta_i}{n}. \tag{1.2}$$

Vamos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1) Suponha $\alpha = \frac{\beta_q}{n}$.

Neste caso, quando $\zeta \in G_{q-1}$, temos que

$$ord_x\left(\psi(x^{\frac{1}{n}}) - \varphi(\zeta x^{\frac{1}{m}})\right) = ord_x\left(\psi(x^{\frac{1}{n}}) - \varphi(x^{\frac{1}{m}})\right) = \frac{\beta_q}{n} = \alpha. \tag{1.3}$$

A igualdade anterior e (1.2), juntamente com o fato de que $\sharp G_{i-1} \setminus G_i = e_{i-1} - e_i$, nos dá por (1.1) que

$$I(f,h) = m\left(e_{q-1}\alpha + \sum_{i=1}^{q-1}(e_{i-1} - e_i)\frac{\beta_i}{n}\right).$$

Usando a definição de n_i e a relação entre os expoentes característicos e os elementos do sistema mínimo de geradores do semigrupo, obtemos

$$\frac{I(f,h)}{m} = \alpha e_{q-1} + \frac{1}{n}e_{q-1}(v_q - \beta_q) = \frac{\beta_q}{n}e_{q-1} + \frac{1}{n}e_{q-1}(v_q - \beta_q) = \frac{v_q}{n_0 \ldots n_{q-1}}.$$

Caso 2) Considere $\frac{\beta_q}{n} < \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n}$.

Neste caso, também para $\zeta \in G_q$, temos que a igualdade (1.3) é verificada. Deste fato e de (1.2) em (1.1), obtemos que

$$I(f,h) = m\left(e_q\alpha + \sum_{i=1}^{q}(e_{i-1} - e_i)\frac{\beta_i}{n}\right).$$

Como no caso anterior, temos que

$$\frac{I(f,h)}{m} = e_q\alpha + \frac{1}{n}e_q(v_{q+1} - \beta_{q+1}) = e_q\alpha + \frac{1}{n}e_q(n_q v_q - \beta_q) = \frac{v_q}{n_0 \ldots n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_1 \ldots n_q}.$$

ii) $\Rightarrow$ *i)* Suponhamos que, para algum $q \in \{1, ..., g\}$ tenhamos,

$$\frac{I(f,h)}{m} = \frac{v_q}{n_0 \ldots n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_1 \ldots n_q}.$$

Se (f) e (h) têm ordem de contato $\widetilde{\alpha}$, com $\frac{\beta_{\widetilde{q}}}{n} \leq \widetilde{\alpha} < \frac{\beta_{\widetilde{q}+1}}{n}$, então temos que provar que $q = \widetilde{q}$ e $\alpha = \widetilde{\alpha}$.

Da primeira parte da demonstração, temos que $\widetilde{q} > 0$ e

$$\frac{I(f,h)}{m} = \frac{v_{\widetilde{q}}}{n_0 ... n_{\widetilde{q}-1}} + \frac{n\widetilde{\alpha} - \beta_{\widetilde{q}}}{n_1 ... n_{\widetilde{q}}}.$$

Vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1) Suponha que $q \neq \widetilde{q}$ e $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$.

Devemos então mostrar que se

$$\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \frac{\beta_{q+1}}{n} \quad \text{e} \quad \frac{\beta_{\widetilde{q}}}{n} \leq \widetilde{\alpha} < \frac{\beta_{\widetilde{q}+1}}{n},$$

então temos

$$\frac{v_q}{n_0 ... n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_1 ... n_q} \neq \frac{v_{\widetilde{q}}}{n_0 ... n_{\widetilde{q}-1}} + \frac{n\widetilde{\alpha} - \beta_{\widetilde{q}}}{n_1 ... n_{\widetilde{q}}}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $q < \widetilde{q}$, e é suficiente mostrar o caso $\widetilde{q} = q + 1$. Nesta situação temos que

$$\frac{v_{\widetilde{q}}}{n_0 ... n_{\widetilde{q}-1}} + \frac{n\widetilde{\alpha} - \beta_{\widetilde{q}}}{n_1 ... n_{\widetilde{q}}} = \frac{v_{q+1}}{n_0 ... n_q} + \frac{n\widetilde{\alpha} - \beta_{q+1}}{n_1 ... n_{q+1}} \geq \frac{v_{q+1}}{n_0 ... n_q}$$

$$= \frac{n_q v_q + \beta_{q+1} - \beta_q}{n_0 ... n_q} = \frac{v_q}{n_0 ... n_{q-1}} + \frac{\beta_{q+1} - \beta_q}{n_0 ... n_q} > \frac{v_q}{n_0 ... n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_0 ... n_q}.$$

Caso 2) Suponha que $q = \widetilde{q}$ e $\alpha \neq \widetilde{\alpha}$.

Sem perda de generalidade podemos supor $\frac{\beta_q}{n} \leq \alpha < \widetilde{\alpha} < \frac{\beta_{q+1}}{n}$ e assim

$$\frac{v_q}{n_0 ... n_{q-1}} + \frac{n\widetilde{\alpha} - \beta_q}{n_1 ... n_q} > \frac{v_q}{n_0 ... n_{q-1}} + \frac{n\alpha - \beta_q}{n_1 ... n_q}$$

provando o resultado. □

Observe que o teorema anterior nos dá uma maneira de calcular o índice de interseção de duas curvas, quando ambas estão na forma paramétrica.

Exemplo 1.18 *Sejam*

$$(f):\begin{cases} x = & t^4 \\ y = & \varphi(t) = t^6 + t^{10} - t^{11} \end{cases}$$

onde $\beta_0 = 4, \beta_1 = 6, \beta_2 = 11, n_1 = n_2 = 2,\ v_0 = 4, v_1 = 6,\ v_2 = 13$ *e*

$$(h):\begin{cases} x = & t_1^2 \\ y = & \psi(t_1) = t_1^3 - t_1^5, \end{cases}$$

onde $\beta_0' = v_0' = 2, \beta_1' = v_1' = 3, n_1' = 2.$

Temos que

$$\alpha = max_{\zeta,\varsigma} ord_x(\varphi(\zeta x^{\frac{1}{4}}) - \psi(\varsigma x^{\frac{1}{2}})) = \frac{5}{2}.$$

Assim, $\frac{3}{2} = \frac{\beta_1}{\beta_0} \leq \alpha < \frac{\beta_2}{\beta_0} = \frac{13}{4}$ *e pelo teorema anterior temos que*

$$\frac{I(f,h)}{2} = \frac{v_1}{n_0} + \frac{v_0\alpha - \beta_1}{n_1} = 8,$$

e portanto, $I(f,h) = 16$.

Observação 1.19 *Sejam* (f), (g) *e* (h) *curvas planas irredutíveis,* α_{fg}, α_{fh} *e* α_{gh} *o contato entre as curvas, como indicam os índices.*

1) *Segue do teorema anterior, que se* $\alpha_{fh} < \alpha_{gh}$, *então* $I(f,h) < I(g,h)$.

2) *Dentre os números* α_{fg}, α_{fh} *e* α_{gh}, *há dois iguais e o terceiro é maior ou igual aos outros.*

Sejam (f) uma curva plana irredutível fixa com semigrupo de valores $S(f)$, de gênero g e (h) uma curva plana irredutível qualquer, denotaremos por $gen(h)$ seu gênero. Introduzimos abaixo a noção de contato maximal entre (f) e todas as curvas (h), com a restrição de que $gen(h) \leq g$.

Definição 1.20 *Dada uma curva plana irredutível* (f) *com semigrupo de valores dado por* $S(f) = \langle v_0, v_1, ..., v_g \rangle$, *dizemos que uma curva plana irredutível* (h), *com* $gen(h) = \gamma \leq g$, *tem* **contato maximal** *de ordem* γ *com* (f), *se*

$$I(f,h) = v_{\gamma+1},$$

onde $v_{g+1} = \infty$.

Observe que sempre podemos obter uma curva (h), satisfazendo as condições da definição anterior. Por exemplo, se

$$(f):\begin{cases} x = & t^{\beta_0} \\ y = & t^{\beta_1} + \displaystyle\sum_{i>\beta_1} a_i t^i, \end{cases}$$

então uma curva (h) com gênero γ que tem contato maximal de ordem γ com (f) é dada por

$$(h):\begin{cases} x = & t^{\frac{\beta_0}{e_\gamma}} \\ y = & t^{\frac{\beta_1}{e_\gamma}} + \displaystyle\sum_{i>\frac{\beta_1}{e_\gamma}}^{\frac{\beta_{\gamma+1}}{e_\gamma}-1} a_i t^i. \end{cases}$$

Em particular, temos que (f) tem contato maximal de ordem g consigo própria.

Capítulo 2

Semigrupo de Uma Curva Redutível

Neste capítulo introduziremos o objeto central deste trabalho, o semigrupo de valores S de uma curva plana com $d \geq 2$ ramos, bem como um procedimento para a determinação do mesmo. Por meio do teorema da geração, que apresentaremos adiante, provaremos que é possível determinar S, se conhecemos os semigrupos das curvas planas com $d' < d$ ramos e o conjunto dos elementos chamados maximais relativos de S, o qual é finito. Com o teorema da simetria provaremos que os pontos maximais relativos e absolutos são simétricos com respeito a um elemento de S bem determinado.

2.1 Algumas Propriedades Algébricas

Seja (f) uma curva plana reduzida com d ramos, isto é, $f = f_1.f_2...f_d \in \mathcal{M} \setminus \{0\}$, onde cada $f_j \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ é irredutível e f_i não é associado a f_j para todo $i \neq j$.

Denotemos por $\mathcal{O} = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f \rangle}$ e $\mathcal{O}_j = \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\langle f_j \rangle}$ para $1 \leq j \leq d$, por $\widetilde{\mathcal{O}}$ e $\widetilde{\mathcal{O}_j}$ representaremos o fecho integral de $\mathcal{O}$ e $\mathcal{O}_j$ respectivamente, como definimos no capítulo anterior. Temos que $\widetilde{\mathcal{O}}$ é isomorfo a $\widetilde{\mathcal{O}_1} \times ... \times \widetilde{\mathcal{O}_d}$(Veja [G]) e como $\widetilde{\mathcal{O}_i} \simeq \mathbb{C}[[t_i]]$ temos que $\widetilde{\mathcal{O}} \simeq \mathbb{C}[[t_1]] \times ... \times \mathbb{C}[[t_d]]$.

Dados dois anéis R_1 e R_2, com $R_1 \subset R_2$. Definimos o ideal condutor de R_1 em

R_2, como sendo o ideal $\{r \in R_1;\ r.R_2 \subset R_1\}$. Deste modo, $\mathcal{C}_j$ denotará o ideal condutor de $\mathcal{O}_j$ em $\widetilde{\mathcal{O}_j}$ e $\mathcal{C}$ representará o ideal condutor de $\mathcal{O}$ em $\widetilde{\mathcal{O}}$.

Temos uma inclusão natural de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d$ dada por:

$$\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathcal{O} & \to & \mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d \\ & g + fA & \mapsto & (g + f_1 A, ..., g + f_d A) \end{array}$$

onde $A = \mathbb{C}[[X, Y]]$ e $g \in A$.

No que segue identificaremos $\mathcal{O}$ com sua imagem $\varphi(\mathcal{O})$.

Observação 2.1 *Consideremos em $\mathcal{O}$ o ideal gerado pelos elementos (módulo f): $\prod_{k\neq 1} f_k, ..., \prod_{k\neq d} f_k$, onde $\prod_{k\neq i} f_k = f_1 ... f_{i-1} f_{i+1} ... f_d$. É fácil ver que, via inclusão, esse ideal de $\mathcal{O}$, fica identificado com o ideal de $\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d$, dado por*

$$\prod_{k\neq 1} f_k \mathcal{O}_1 \times ... \times \prod_{k\neq d} f_k \mathcal{O}_d.$$

Denotando por $\mathcal{C}'$ o ideal condutor de $\mathcal{O}$ em $\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d$, temos a seguinte proposição:

Proposição 2.2 *Com as notações anteriores, temos que*

$$\mathcal{C}' = \prod_{k\neq 1} f_k \mathcal{O}_1 \times ... \times \prod_{k\neq d} f_k \mathcal{O}_d.$$

Demonstração: É claro que $\mathcal{C}' \supseteq \prod_{k\neq 1} f_k \mathcal{O}_1 \times ... \times \prod_{k\neq d} f_k \mathcal{O}_d$.

Para mostrarmos a outra inclusão, seja $g \in A = \mathbb{C}[[X, Y]]$ qualquer. Assim, $g + fA = (g + f_1 A, ..., g + f_d A)$. Se $g + fA \in \mathcal{C}'$, então temos que

$$(g + fA).(1, 0, ..., 0) = (g + f_1 A, 0, ..., 0) \in \mathcal{O}$$

$$(g + fA).(0, 1, ..., 0) = (0, g + f_2 A, ..., 0) \in \mathcal{O}$$

$$\vdots$$

$$(g + fA).(0, ..., 0, 1) = (0, ..., 0, g + f_d A) \in \mathcal{O}.$$

Deste modo, para cada $1 \leq j \leq d$ existe $g_j \in A$, tal que $(0, ..., 0, g+f_jA, 0, ..., 0) = (g_j + f_1A, ..., g_j + f_dA)$. Assim, vemos que $g_j = \prod_{k \neq j} f_k h_j$ para algum $h_j \in A$. Logo, $g + f_jA = \prod_{k \neq j} f_k h_j + f_jA$. Isso mostra que $\mathcal{C}' \subseteq \prod_{k \neq 1} f_k \mathcal{O}_1 \times ... \times \prod_{k \neq d} f_k \mathcal{O}_d$. □

Denotemos agora por $\mathcal{C}''$ o ideal condutor de $\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d$ em $\widetilde{\mathcal{O}}$. Evidentemente $\mathcal{C}'' = \mathcal{C}_1 \times ... \times \mathcal{C}_d$. Deste modo, temos que $\mathcal{C}'\mathcal{C}'' \subseteq \mathcal{C}$, isto é, $\prod_{k \neq 1} f_k \mathcal{C}_1 \times ... \times \prod_{k \neq d} f_k \mathcal{C}_d \subseteq \mathcal{C}$. Esta inclusão é conseqüência do seguinte resultado geral.

Lema 2.3 *Sejam $R \subseteq S \subseteq T$ anéis, C_1 o ideal condutor de R em S, C_2 o ideal condutor de S em T e C_3 o ideal condutor de R em T, então temos que $C_1C_2 \subseteq C_3$.*

Demonstração: A demonstração deste resultado é imediata. □

A proposição abaixo, descreve precisamente o ideal condutor $\mathcal{C}$.

Proposição 2.4 *Com as notações introduzidas anteriormente, temos que*

$$\mathcal{C} = \prod_{k \neq 1} f_k \mathcal{C}_1 \times ... \times \prod_{k \neq d} f_k \mathcal{C}_d.$$

Demonstração: Vimos que $\prod_{k \neq 1} f_k \mathcal{C}_1 \times ... \times \prod_{k \neq d} f_k \mathcal{C}_d \subseteq \mathcal{C}$.

Agora seja $g \in A = \mathbb{C}[[X, Y]]$ qualquer. Se $g + fA \in \mathcal{C}$, então $g + fA \in \mathcal{C}'$, isto é, $(g + f_1A, ..., g + f_dA) \in \prod_{k \neq 1} f_k \mathcal{O}_1 \times ... \times \prod_{k \neq d} f_k \mathcal{O}_d$.

Deste modo, existem $h_j \in A$ para todo $1 \leq j \leq d$, tais que $(g+f_1A, ..., g+f_dA) = (\prod_{k \neq 1} f_k h_1 + f_1A, ..., \prod_{k \neq d} f_k h_d + f_dA)$.

Mostraremos que $h_j + f_jA \in \mathcal{C}_j$, para todo $1 \leq j \leq d$.

Uma vez que estamos supondo $(\prod_{k \neq 1} f_k h_1 + f_1A, ..., \prod_{k \neq d} f_k h_d + f_dA) \in \mathcal{C}$, segue que $(\prod_{k \neq 1} f_k h_1 + f_1A, ..., \prod_{k \neq d} f_k h_d + f_dA)(0 \times ... \times \widetilde{\mathcal{O}_j} \times ... \times 0) \subseteq \mathcal{O}$ e assim, $(0, ..., (\prod_{k \neq j} f_k h_j + f_jA)\widetilde{\mathcal{O}_j}, ..., 0) \subseteq \mathcal{O}$.

Para mostrar que $h_j + f_jA \in \mathcal{C}_j$, basta mostrar que $(h_j + f_jA)p_j \in \mathcal{O}_j$, para todo $p_j \in \widetilde{\mathcal{O}_j}$.

Sabemos que $(0, ..., (\prod_{k \neq j} f_k h_j + f_jA)p_j, ..., 0) \in \mathcal{O}$. Logo, existe $g_j \in A$, tal que $(0, ..., (\prod_{k \neq j} f_k h_j + f_jA)p_j, ..., 0) = (g_j + f_1A, ..., g_j + f_dA)$. Assim, temos que $g_j = \prod_{k \neq j} f_k q_j$ para algum $q_j \in A$, e deste modo $(\prod_{k \neq j} f_k h_j + f_jA)p_j = \prod_{k \neq j} f_k q_j + f_jA$.

Usando que $\mathcal{O}_j$ é domínio, podemos cancelar $\prod_{k \neq j} f_k$ em ambos os lados e obtemos então que $(h_j + f_jA)p_j = q_j + f_jA \in \mathcal{O}_j$. Isso mostra que $(h_j + f_jA)\widetilde{\mathcal{O}_j} \subseteq \mathcal{O}_j$ e portanto, $h_j + f_jA \in \mathcal{C}_j$. □

Sabemos que, para cada $1 \leq j \leq d$, vale a igualdade:

$$dim_{\mathbb{C}}(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}_j}{\mathcal{O}_j}) = dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}_j}{\mathcal{C}_j}),$$

que pode ser vista como conseqüência da simetria do semigrupo $S(f_j)$. Na verdade, tal igualdade se mantém para curvas com vários ramos, como mostra o próximo resultado.

Teorema 2.5 *Toda curva plana é Gorenstein, isto é,* $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}}) = dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}})$.

Demonstração: Como observamos acima, o teorema é válido para o caso irredutível. Para o caso redutível, basta mostrar que:

1) $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d}) = dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}})$.

2) $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d}{\mathcal{O}}) = dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'})$.

Vejamos:

1) Temos que $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\widetilde{\mathcal{O}}}{\mathcal{O}_1 \times ... \times \mathcal{O}_d}) = \sum_{j=1}^{d} dim_{\mathbb{C}}(\frac{\widetilde{\mathcal{O}j}}{\mathcal{O}_j}) = \sum_{j=1}^{d} dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}j}{\mathcal{C}_j})$. Por outro lado, $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{C}'}{\mathcal{C}}) = \sum_{j=1}^{d} dim_{\mathbb{C}} \left(\frac{\prod_{k \neq j} f_k.\mathcal{O}_j}{\prod_{k \neq j} f_k.\mathcal{C}_j} \right) = \sum_{j=1}^{d} dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}j}{\mathcal{C}_j})$, onde a última igualdade é conseqüência do isomorfismo de $\mathbb{C}$-espaços vetoriais:

$$\mathcal{O}_j \to \prod_{k\neq j} f_k.\mathcal{O}_j$$
$$g + f_j A \mapsto \prod_{k\neq j} f_k.g + f_j A.$$

2) Como $\dfrac{\frac{\mathcal{O}_1\times\ldots\times\mathcal{O}_d}{\mathcal{O}}}{\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}} \simeq \frac{\mathcal{O}_1\times\ldots\times\mathcal{O}_d}{\mathcal{C}'}$, basta demonstrar que $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}_1\times\ldots\times\mathcal{O}_d}{\mathcal{C}'}) = 2.dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'})$.

Temos que

$$dim_{\mathbb{C}}(\tfrac{\mathcal{O}_1\times\ldots\times\mathcal{O}_d}{\mathcal{C}'}) = \sum_{j=1}^{d} dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}_j}{\prod_{k\neq j} f_k.\mathcal{O}_j}) = \sum_{j=1}^{d} I(f_j, \prod_{k\neq j} f_k) = 2. \sum_{1\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j),$$

onde a segunda igualdade segue da definição do índice de interseção.

Assim, devemos mostrar que $dim_{\mathbb{C}}(\frac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}) = \sum_{1\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j)$. Pela proposição 2.2 e pela observação 2.1, temos que

$$dim_{\mathbb{C}}(\tfrac{\mathcal{O}}{\mathcal{C}'}) = dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\left(\prod_{k\neq 1} f_k, \ldots, \prod_{k\neq d} f_k\right)}.$$

Resta então, mostrar que $dim_{\mathbb{C}} \dfrac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\left(\prod_{k\neq 1} f_k, \ldots, \prod_{k\neq d} f_k\right)} = \sum_{1\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j)$.

Mostremos tal igualdade por indução sobre d.

Para $d = 2$, a igualdade corresponde justamente a definição de índice de interseção de 2 ramos. Suponhamos que a igualdade seja verificada para $d-1$ ramos $f_j \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. Em particular, para $f_2, f_3, \ldots, f_d$ temos:

$$dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\left(\prod_{k\neq 1,2} f_k, \ldots, \prod_{k\neq 1,d} f_k\right)} = \sum_{2\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j).$$

Agora pelo isomorfismo

$$\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{(f_1, \prod_{k\neq 1} f_k)} \approx \frac{\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\mathcal{H}}}{\frac{(f_1, \prod_{k\neq 1} f_k)}{\mathcal{H}}},$$

onde $\mathcal{H} = (\prod_{k\neq 1} f_k, ..., \prod_{k\neq d} f_k)$, temos que

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\mathcal{H}} = \sum_{k=2}^{d} I(f_1, f_k) + dim_{\mathbb{C}}\frac{\left(f_1, \prod_{k\neq 1} f_k\right)}{\mathcal{H}}.$$

Por outro lado, considerando os ideais em $\mathbb{C}[[X,Y]]$, temos que

$$\frac{\left(f_1, \prod_{k\neq 1} f_k\right)}{\mathcal{H}} \approx \frac{(f_1)}{(\prod_{k\neq 2} f_k, ..., \prod_{k\neq d} f_k)} \approx \frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{(\prod_{k\neq 1,2} f_k, ..., \prod_{k\neq 1,d} f_k)},$$

onde o primeiro isomorfismo é induzido pela projeção módulo $\prod_{k\neq 1} f_k$ e o segundo é induzido pela multiplicação por f_1.

Usando que, $dim_{\mathbb{C}}\frac{\mathbb{C}[[X,Y]]}{\left(\prod_{k\neq 1,2} f_k, ..., \prod_{k\neq 1,d} f_k\right)} = \sum_{2\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j)$, temos que

$$dim_{\mathbb{C}}\frac{\left(f_1, \prod_{k\neq 1} f_k\right)}{\mathcal{H}} = \sum_{2\leq i<j\leq d} I(f_i, f_j),$$

o que mostra o resultado. □

2.2 Geração do Semigrupo de Valores

Como na seção anterior, (f) denota uma curva plana reduzida sobre $\mathbb{C}$, dada por $f = f_1...f_d \in \mathbb{C}[[X,Y]]$, com $d \geq 2$.

Definição 2.6 *O* **semigrupo** $S = S(f)$ *associado a* (f) *é o conjunto*

$$S = S(f) = \{(\alpha_1, ..., \alpha_d) \in \mathbb{N}^d;\ \textit{existe } h \in \mathbb{C}[[X,Y]] \textit{ tal que } I(f_i, h) = \alpha_i\}.$$

Veja que de fato S é um semigrupo, uma vez que $I(f_i, h) = 0$ sempre que h é uma unidade de $\mathbb{C}[[X,Y]]$ e $I(f_i, hg) = I(f_i, h) + I(f_i, g)$ para todo $h, g \in \mathbb{C}[[X,Y]]$. Assim, $(0, ..., 0) \in S$ e S é fechado com respeito a adição.

No que segue, denotaremos por I o conjunto $\{1, ..., d\}$, os elementos de $\mathbb{N}^d$ serão representados por letras gregas e sobre $\mathbb{N}^d$ consideremos a ordem parcial

$$\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha_i \leq \beta_i, \ \forall i \in I.$$

Além disto, como no capítulo 1, indicaremos $I(f_i, h)$ por $v_i(h)$ e $\underline{v}(h)$ representa $(v_1(h), ..., v_d(h))$. Note que, se $h \in \mathcal{O}$ é uma reta transversal a todos os ramos, então temos que $v(h) = min\ S \setminus \{0\}$. Lembremos também que, o fecho integral de $\mathcal{O}$ é $\widetilde{\mathcal{O}} = \mathbb{C}[[t_1]] \times ... \times \mathbb{C}[[t_d]]$ e o ideal condutor de $\mathcal{O}$ em $\widetilde{\mathcal{O}}$ é $\mathcal{C} = (t_1^{\rho_1}) \times ... \times (t_d^{\rho_d})$, com $\rho_i = c_i + \sum_{1 \leq i < j \leq d} I(f_i, f_j)$, onde c_i é o condutor do semigrupo S_i do ramo (f_i). (Veja proposição 2.4). Segue assim que $\rho + \mathbb{N}^d \subset S$, onde $\rho = (\rho_1, ..., \rho_d)$ e mais ainda, ρ é o menor elemento em S com esta propriedade. O elemento ρ será chamado **condutor** de S.

As propriedades que seguem serão freqüentemente utilizadas nos resultados que apresentaremos.

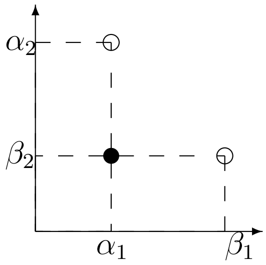
Propriedade 2.7 (Propriedade A) *Sejam α, $\beta \in S$, então*

$$inf(\alpha, \beta) = (min\{\alpha_1, \beta_1\}, ..., min\{\alpha_d, \beta_d\}) \in S.$$

Demonstração: Se $\alpha, \beta \in S$, então existem $w, z \in \mathcal{O}$ tais que $\underline{v}(w) = \alpha$ e $\underline{v}(z) = \beta$. Além disto, para qualquer $a \in \mathbb{C}$ temos que $w + az \in \mathcal{O}$ e a menos de um valor bem determinado de a, temos que $v_i(z + aw) = min\{v_i(z), v_i(w)\}$. Portanto, a menos de um número finito de possibilidades para $a \in \mathbb{C}$, temos que

$$\underline{v}(w + az) = (min\{\alpha_1, \beta_1\}, ..., min\{\alpha_d, \beta_d\})$$

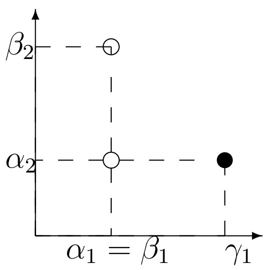
e portanto, $inf(\alpha, \beta) = v(w + az) \in S$. $\square$



Propriedade A para o caso de dois ramos.

Note que a propriedade acima é valida também para mais de dois elementos de S, ou seja, se $\alpha^1, ..., \alpha^d \in S$, então $inf(\alpha^1, ..., \alpha^d) \in S$. Mais ainda, se $v_i(z) = v_i(w)$ para algum $i \in I$, então existe um único $a \in \mathbb{C}$ tal que $v_i(z + aw) > v_i(z) = v_i(w)$ e assim, temos a seguinte propriedade:

Propriedade 2.8 (Propriedade B) *Dados $\alpha, \beta \in S$ com $\alpha_i = \beta_i$ para algum $i \in I$, existe $\gamma \in S$ com $\gamma_i > \alpha_i = \beta_i$ e $\gamma_k \geq min\{\alpha_k, \beta_k\}$ para todo $k \in I$, valendo a igualdade se $\alpha_k \neq \beta_k$.*



Propriedade B para o caso de dois ramos.

Agora, para um dado $\alpha \in \mathbb{N}^d$ e $J = \{i_1, ..., i_n\} \subset I$ definimos:

$$\overline{F}_J(\alpha) := \overline{F}_{i_1,...,i_n}(\alpha) = \{\beta \in \mathbb{N}^d; \beta_i = \alpha_i, \forall i \in J \text{ e } \beta_k > \alpha_k, \forall k \notin J\},$$

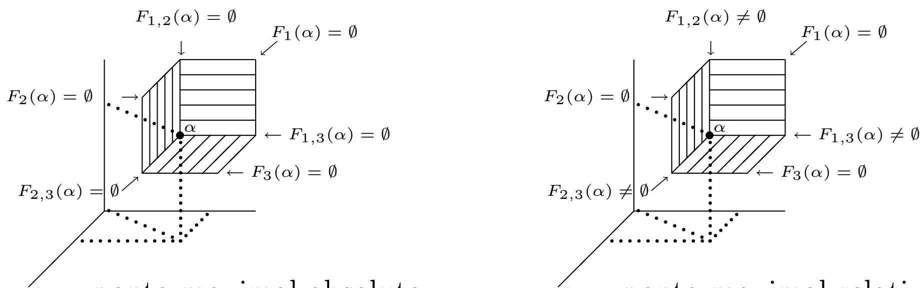
$$\overline{F}(\alpha) = \bigcup_{i=1}^d \overline{F_i}(\alpha),$$

$$F_J(\alpha) := F_{i_1,...,i_n}(\alpha) = \overline{F_J}(\alpha) \bigcap S \text{ e}$$

$$F(\alpha) = \overline{F}(\alpha) \bigcap S.$$

Se $pr_J : \mathbb{N}^d \to \mathbb{N}^{\sharp J}$ denota a projeção natural correspondente ao conjunto de índices J, então indicaremos $S_J = \{pr_J(\alpha); \alpha \in S\}$.

Definição 2.9 *Um elemento $\alpha \in S$ será chamado* **maximal**, *se $F(\alpha) = \emptyset$. Se, mais ainda, tivermos que $F_J(\alpha) = \emptyset$ para todo $J \subset I$, $J \neq I$ e $J \neq \emptyset$, então α será chamado de* **maximal absoluto**. *Se α é maximal e $F_J(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$, tal que $\sharp J \geq 2$, então α será chamado* **maximal relativo**.



α = ponto maximal absoluto $\qquad$ α = ponto maximal relativo

Observação 2.10 *No caso $d = 2$, todos os pontos maximais são caracterizados pela condição $F_1(\alpha) = F_2(\alpha) = \emptyset$, logo não existe diferença entre maximais absolutos e maximais relativos.*

O lema abaixo nos dá uma outra caracterização dos pontos maximais relativos.

Lema 2.11 *Dado um semigrupo $S \subset \mathbb{N}^d$ e $\alpha \in \mathbb{N}^d$ com as seguintes propriedades:*

i) existe $i \in I$ com $F_i(\alpha) = \emptyset$,

ii)$F_{i,j}(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$.

Então α é um maximal relativo de S.

Demonstração: Primeiro, verificaremos que α é um maximal de S.

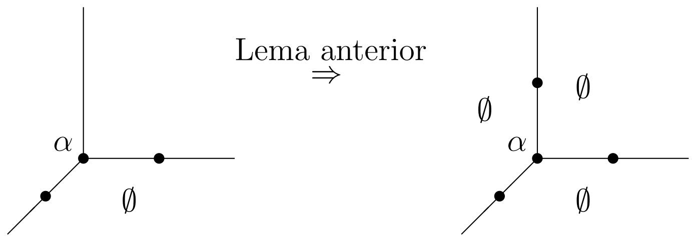
Tome $\alpha^j \in F_{i,j}(\alpha)$ para cada $j \in I \setminus \{i\}$, então $\alpha \in S$, dado que pela propriedade A, temos que $\alpha = inf\{\alpha^j, j \in I \setminus \{i\}\}$. Agora assuma que $\gamma \in F_k(\alpha)$ para algum

$k \in I \setminus \{i\}$, então temos que $pr_k(\alpha^k) = pr_k(\gamma) = \alpha_k$ e pela propriedade B aplicada a γ e α^k, existe $\beta \in S$ tal que $\beta_k > \alpha_k$, $\beta_i = \alpha_i$, $\beta_j \geq min\{\gamma_j, \alpha_j^k\} > \alpha_j$, para todo $j \in I \setminus \{i, k\}$ e então $\beta \in F_i(\alpha)$, contradizendo a hipótese i). Segue assim, que α é um maximal.

Mostraremos agora que $F_J(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J = 2$.

Se $k, l \in I \setminus \{i\}$, dado que $pr_i(\alpha^l) = pr_i(\alpha^k) = \alpha_i$, então novamente pela propriedade B aplicada a α^l e α^k, existe $\beta \in S$ tal que $\beta \in F_{k,l}(\alpha)$.

Finalmente, se $J \subset I$, com $\sharp J > 2$, escrevemos $J = I_1 \cup ... \cup I_t$ com $\sharp I_i = 2$ e tomemos $\gamma^i \in F_{I_i}(\alpha)$. Então pela propriedade A, temos que $\gamma = inf\{\gamma^1, ..., \gamma^t\} \in F_J(\alpha)$ e assim $F_J(\alpha) \neq \emptyset$. □



Note que para $d = 2$, o lema anterior garante que $F_1(\alpha) = \emptyset$ se, e somente se, $F_2(\alpha) = \emptyset$.

Observe, ainda, que para todo maximal α de S temos que $\alpha < \rho$, onde ρ é o condutor de S, logo o conjunto $M(S)$ dos maximais de S é finito.

O teorema abaixo evidencia a importância dos pontos maximais relativos para a obtenção do semigrupo de uma curva reduzida com vários ramos.

Teorema 2.12 (Geração) *Sejam $\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ o conjunto dos maximais relativos de S e $\beta \in \mathbb{N}^d$ tal que, $pr_J(\beta) \in S_J$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J = d - 1$. Então temos que $\beta \in S$ se, e somente se, $\beta \notin \overline{F}(\alpha^i)$ para todo $i = 1, ..., n$.*

Demonstração: A condição necessária é evidente.

Para provar a condição suficiente, dado $\delta \in \mathbb{N}^d$ vamos considerar o seguinte conjunto,

$$F_i^j(\delta) = \{\beta \in S \text{ tal que, } \beta_i = \delta_i \text{ , } \beta_r \geq \delta_r \text{ para } r \leq j \text{ e } \beta_s > \delta_s \text{ para } s > j, s \neq i\}.$$

Suponhamos por absurdo que $\beta = (\beta_1, ..., \beta_d) \in \mathbb{N}^d$ satisfaz as condições do teorema, mas que $\beta \notin S$. Então existe $j \in I$ tal que $F_j^d(\beta) = \emptyset$, caso contrário, isto é, se existisse $\gamma^j \in F_j^d(\beta)$ para todo $j \in I$ teríamos, pela propriedade A, que $\beta = inf\{\gamma^j, j \in I\} \in S$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $j = 1$, isto é, $F_1^d(\beta) = \emptyset$.

Consideremos $i \geq 1$ o menor inteiro para o qual existem $\beta_{i+1}^*, ..., \beta_d^* \in \mathbb{N}$ e $\gamma^{i+1}, ..., \gamma^d \in S$ tais que, definindo $\beta^{i+1} = (\beta_1, ..., \beta_i, \beta_{i+1}^*, ..., \beta_d^*) \in \mathbb{N}^d$ e $F_{1,k}^i(\beta^{i+1}) := F_k^i(\beta^{i+1}) \cap F_1^d(\beta^{i+1})$, temos

1) $\beta_k^* < \beta_k$ e $\gamma^k \in F_{1,k}^i(\beta^{i+1})$ para $k = i+1, ..., d$.

2) $F_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$.

Note que tal inteiro existe. De fato, por hipótese, temos que existe $\gamma \in S$ tal que $pr_{I \setminus \{d\}}(\gamma) = pr_{I \setminus \{d\}}(\beta)$. Se $\gamma_d > \beta_d$, então $\gamma \in F_1^d(\beta)$, mas $F_1^d(\beta) = \emptyset$. Se $\gamma_d = \beta_d$, então teríamos que $\beta = \gamma \in S$, uma contradição pois $\gamma \in S$ e $\beta \notin S$, assim segue que $\gamma_d < \beta_d$.

Deste modo, faz sentido considerar

$$\gamma_d^* = max\{pr_d(\gamma); \gamma \in F_1^d(\beta_1, ..., \beta_{d-1}, 0)\}$$

e além disto, como vimos, $\gamma_d^* < \beta_d$.

Tomemos um elemento $\gamma^d \in F_1(\beta_1, ..., \beta_{d-1}, 0)$ tal que $pr_d(\gamma^d) = \gamma_d^*$ e denote $\beta^d = (\beta_1, ..., \beta_{d-1}, \gamma_d^*)$. Veja que $\gamma^d \in F_{1,d}^{d-1}(\beta^d)$ e além disto, note que $F_1^{d-1}(\beta^d) = \emptyset$ pois, se existisse $\eta \in F_1^{d-1}(\beta^d)$, teríamos que

$$\eta_1 = \beta_1^d = \beta_1, \, \eta_i \geq \beta_i^d = \beta_i, \forall i \leq d-1 \text{ e } \eta_d > \beta_d^d = \gamma_d^*,$$

contrariando a maximalidade de γ_d^*. Assim mostramos que $d-1$ satisfaz as condições 1) e 2) anteriores.

Vamos mostrar agora que $i = 1$. De fato, assuma que $i > 1$ e considere $\beta_0^{i+1} = (\beta_1, ..., \beta_{i-1}, 0, \beta_{i+1}^*, ..., \beta_d^*)$. O conjunto $F_1^i(\beta_0^{i+1})$ é não vazio, pois por hipótese temos $(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, ..., \beta_d) \in S_{I\setminus\{i\}}$, segue que existe $(\beta_1, ..., \beta_{i-1}, n, \beta_{i+1}, ..., \beta_d) \in S$ para algum $n \in \mathbb{N}$ satisfazendo $n < \beta_i$, dado que $F_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$. Agora seja $\beta_i^* = max\{pr_i(\alpha), \alpha \in F_1^i(\beta_0^{i+1})\} < \beta_i$, pois $F_1^i(\beta^{i+1}) = \emptyset$, tome $\gamma^i \in F_1^i(\beta_0^{i+1})$ tal que $pr_i(\gamma^i) = \beta_i^*$ e considere o elemento $\beta^i = (\beta_1, ..., \beta_{i-1}, \beta_i^*, \beta_{i+1}^*, ..., \beta_d^*) \in \mathbb{N}^d$.

Dado que $\gamma^k \in F_{1,k}^i(\beta^{i+1})$ e $\beta_i^* < \beta_i$, temos que $\gamma^k \in F_{1,k}^{i-1}(\beta^i)$ para todo índice $k = i+1, ..., d$. Por construção, $\gamma^i \in F_{1,i}^{i-1}(\beta^i)$ e da definição de β_i^*, segue que $F_1^{i-1}(\beta^i) = \emptyset$, assim $i-1$ satisfaz as condições 1) e 2) acima, o que é uma contradição devido a minimalidade de i.

Deste modo, existe $\beta^* := \beta^2 = (\beta_1, \beta_2^*, ..., \beta_d^*) \in \mathbb{N}^d$ com $\beta_i^* < \beta_i$, $F_1(\beta^*) = F_1^1(\beta^*) = \emptyset$ e $\gamma^i \in F_{1,i}^1(\beta^*) = F_{1,i}(\beta^*)$, para todo $i \geq 2$. Segue então, do lema anterior, que β^* é um maximal relativo de S e $\beta \in \overline{F}_1(\beta^*)$ o que contraria nossa hipótese. Isto completa a prova do teorema. □

Observação 2.13 *O teorema acima fornece um procedimento para determinar o semigrupo de valores de uma curva plana com d ramos, se conhecemos os semigrupos das curvas com $d' < d$ ramos e os maximais relativos de S.*

Além disto, vale observar que tal teorema foi provado por Garcia em [G] para o caso $d = 2$. Neste caso seu enunciado torna-se mais simples, como apresentamos no corolário abaixo.

Corolário 2.14 (Garcia) *Sejam $d = 2$ e $\{\alpha^1, ..., \alpha^n\}$ o conjunto dos pontos máximos de S. Temos que $S = \{\beta \in S_1 \times S_2; \beta \notin \overline{F}(\alpha^i)$ para todo $i = 1, ..., n\}$.*

As figuras 2.1 e 2.2 no final do capítulo apresentam alguns exemplos de semigrupos de curvas com 2 e 3 ramos.[1]

2.3 A Simetria do Conjunto dos Maximais

Nesta seção apresentaremos um resultado que expressa a propriedade de simetria dos pontos maximais relativos e absolutos em relação a um ponto bem determinado de S. Entre outros fatos, tal resultado nos diz que para obter S, podemos nos concentrar nos pontos maximais absolutos em vez dos relativos. Antes porém, introduziremos alguns conceitos, notações e resultados auxiliares.

De agora em diante, dado $J \subset I$ denotaremos por f^J a série de potências dada por $f^J = \prod_{i \notin J} f_i$ e por $\varepsilon^J = pr_J(\underline{v}(f^J)) \in S_J$, isto é, $pr_j(\varepsilon^J) = \sum_{k \notin J} v_j(f_k) = \sum_{k \notin J} I(f_j, f_k)$ para todo $j \in J$. Em particular, quando $J = \{j\}$, escrevemos $\varepsilon^j := \varepsilon^J = \sum_{i \neq j} v_j(f_i) \in S_j$.

Considere o semigrupo $\overline{S}$, dado pela imagem da aplicação $\underline{v} : \mathcal{O} \to \overline{\mathbb{N}}^d$ considerando $v_i(0) = \infty$ para todo $i \in I$.

Fixemos $J \subset I$ e um subconjunto B de S_J, denotemos por $P_J(B)$ o conjunto $P_J(B) = \{\beta \in S, pr_J(\beta) \in B\}$. Se $B = \{\alpha\}$, então escrevemos simplesmente $P_J(\alpha)$ e denotamos por $\alpha_\infty \in \overline{\mathbb{N}}^d$ o elemento definido por $pr_J(\alpha_\infty) = \alpha$ e $pr_i(\alpha) = \infty$ para todo $i \notin J$.

Para futuras referências, apresentamos o seguinte lema:

Lema 2.15 *Com as notações anteriores temos que $\alpha_\infty \notin \overline{S}$ se, e somente se, existe $\gamma \in \mathbb{N}^d$ tal que $pr_J(\gamma) = \alpha$ e $F_J(\gamma) = \emptyset$.*

Demonstração: Imediata. □

[1]Os exemplos mencionados foram obtidos de uma rotina implementada em Maple por M. E. Hernandes.

Um outro modo de caracterizar o fato de $\alpha_\infty \in \overline{S}$ é dado no resultado abaixo.

Proposição 2.16 *Sejam $J \subset I$ e $\alpha \in S_J$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\alpha_\infty \in \overline{S}$.

ii) $\alpha - \varepsilon^J \in S_J$.

Demonstração: $i) \Rightarrow ii)$ Se $\alpha_\infty \in \overline{S}$, então existe $h \in \mathcal{O}$ tal que $\underline{v}(h) = \alpha_\infty$, isto é, $v_k(h) = \infty$, para todo $k \notin J$. Disto segue que $h = gf_k$, para algum $g \in \mathcal{O}$ e todo $k \notin J$. Temos então que $h = h' \prod_{k \notin J} f_k$, com $h' \in \mathcal{O}$ e $h' \neq 0$ em $\mathcal{O}_j$ para todo $j \in J$, ou seja, $v_j(h') < \infty$, para todo $j \in J$. Assim, temos que $pr_J(\alpha_\infty) = pr_J(\underline{v}(h)) = \varepsilon^J + pr_J(\underline{v}(h')) \in S_J$.

$ii) \Rightarrow i)$ Se $\alpha - \varepsilon^J \in S_J$, então temos que existe $h \in \mathcal{O}$, tal que $pr_J(\underline{v}(h)) = \alpha - \varepsilon^J = \alpha - pr_J(\underline{v}(\prod_{k \notin J} f_k))$ e assim, $\underline{v}(h \prod_{k \notin J} f_k) = \alpha_\infty \in \overline{S}$. $\square$

Observe que a proposição anterior generaliza o caso de dois ramos obtido por Garcia, no sentido de caracterizar quando $F_i(\alpha)$ é infinito, mais explicitamente temos o seguinte corolário.

Corolário 2.17 (Garcia) *Sejam $d = 2$ e $\alpha \in S$, temos que $F_1(\alpha)$ (respectivamente $F_2(\alpha)$) é infinito se, e somente se, $pr_1(\alpha) - v_1(f_2) \in S_1$ (respectivamente $pr_2(\alpha) - v_2(f_1) \in S_2$).*

Demonstração: Considere $J = \{1\}$, temos pelo lema 2.15 que $F_1(\alpha)$ é infinito se, e somente se, $(pr_J(\alpha))_\infty \in \overline{S}$, que pela proposição anterior é equivalente a $pr_J(\alpha) - \varepsilon^J \in S_J$, como $\varepsilon^1 = v_1(f_2)$, o resultado segue. $\square$

Definição 2.18 *Seja $\gamma \in S$. Definimos o* **conjunto de Apéry** *de S com relação à γ, como sendo o conjunto*

$$A_\gamma(S) = \{\beta \in S; \beta - \gamma \notin S\}.$$

Os elementos do conjunto

$$N_\gamma(S) = \{\beta \in S; F(\beta) \subset A_\gamma(S)\}$$

serão chamados de **vértices de Apéry** *com relação à* γ.

Observação 2.19 *Note que se* α *é maximal de* S, *então* $\alpha \in N_\gamma(S)$ *para todo* $\gamma \in S$ *e* $\alpha + \gamma \in N_\gamma(S)$. *Assim, em geral, o conjunto* $N_\gamma(S)$ *não está contido em* $A_\gamma(S)$. *Além disto, se* $d = 1$, *então* $A_\gamma(S) = N_\gamma(S)$ *é o clássico conjunto de Apéry para* S, *apresentado na seção 1.3.*

A figura 2.3 dada no final do capítulo apresenta exemplos de conjunto e vértices de Apéry de um semigrupo com 2 ramos.[2]

A próxima proposição relaciona os vértices de Apéry de S com vértices de Apéry de S_J.

Proposição 2.20 *Sejam* $\gamma \in S$, $\alpha \in N_\gamma(S)$ *e* $J \subset I$, *então* $pr_J(\alpha)$ *é um vértice de Apéry de* S_J *com relação à* $pr_J(\gamma) + \varepsilon^J \in S_J$. *Em particular, se* α *é um maximal de* S, *então* $pr_J(\alpha)$ *é um vértice de Apéry de* S_J *com relação à* ε^J.

Demonstração: É suficiente provar a proposição para o caso $\sharp J = d - 1$, dado que para todo J podemos usar sucessivas projeções para um dos índices e obter o caso desejado.

Vamos assumir que $J = I \setminus \{d\}$ e considerar $\alpha^d = pr_J(\alpha)$ e $\beta = pr_J(\gamma) + \varepsilon^J \in S_J$.

Se para algum $j \in J$ temos $\eta \in F_j(\alpha^d)$ e $\eta \notin A_\beta(S_J)$, então $\eta - \beta \in S_J$. Pela proposição anterior, temos $(\eta - pr_J(\gamma))_\infty \in \overline{S}$ e assim pelo lema 2.15, para algum $\theta > \alpha_d - \gamma_d$ temos $\eta^* = (\eta_1 - \gamma_1, ..., \eta_{d-1} - \gamma_{d-1}, \theta) \in S$. Dado que $pr_i(\eta^* + \gamma) > \alpha_i$ para todo $i \in J \setminus \{j\}$, temos que $\eta^* + \gamma \in F_j(\alpha)$ e $\eta^* + \gamma \notin A_\gamma(S)$ o que é uma

[2]Os exemplos mencionados foram obtidos através de uma rotina implementada em Maple por M. E. Hernandes.

contradição, visto que $\alpha \in N_\gamma(S)$. Então $pr_J(\alpha)$ é um vértice de Apéry com relação a $pr_J(\gamma) + \varepsilon^J$.

Se α é um maximal, então pela observação 2.19, temos que $\alpha \in N_\gamma(S)$ para todo $\gamma \in S$, em particular tomando $\gamma = (0, ..., 0)$ temos que o resultado segue imediatamente da primeira parte da proposição. $\square$

Corolário 2.21 (Garcia) *Sejam $d = 2$ e α um ponto maximal de S, então temos que $pr_1(\alpha) \in A_{v_1(f_2)}(S_1)$ e $pr_2(\alpha) \in A_{v_2(f_1)}(S_2)$.*

Demonstração: Pela proposição anterior, temos que $pr_i(\alpha) \in N_{\varepsilon^i}(S_i)$. O resultado segue, lembrando que $\varepsilon^1 = v_1(f_2)$, $\varepsilon^2 = v_2(f_1)$ e notando que pela observação 2.19, no caso de um ramo, temos que $N_{\varepsilon^i}(S_i) = A_{\varepsilon^i}(S_i)$. $\square$

No restante destas notas, consideramos o elemento

$$\tau = (c_1 + \varepsilon^1 - 1, c_2 + \varepsilon^2 - 1, ..., c_d + \varepsilon^d - 1) \in \mathbb{N}^d,$$

onde c_i é o condutor do semigrupo S_i do ramo (f_i).

Observe que, se $\gamma \in S$ e $\alpha \in N_\gamma(S)$, então pela proposição anterior, temos que $\alpha_i \in N_{\gamma_i + \varepsilon^i}(S_i)$, mas pela observação 2.19, temos que $N_{\gamma_i+\varepsilon^i}(S_i) = A_{\gamma_i+\varepsilon^i}(S_i)$ assim, $\alpha_i - \varepsilon^i - \gamma_i \notin S_i$. Conseqüentemente das propriedades do conjunto de Apéry dos semigrupos S_i, obtemos que $\alpha_i \leq c_i + \varepsilon^i + \gamma_i - 1$. Deste modo, temos que

$$\alpha \in N_\gamma(S) \Rightarrow \alpha \leq \tau + \gamma$$

$$\alpha \in M(S) \Rightarrow \alpha \leq \tau,$$

onde $M(S)$ denota o conjunto dos pontos maximais de S.

A proposição abaixo, servirá como caso inicial para o teorema que segue.

Proposição 2.22 (Garcia) *Seja $d = 2$, então τ é ponto maximal de S e $\tau + (1, 1)$ é condutor de S.*

Demonstração: Inicialmente, note que $c_i + \varepsilon^i - 1 \geq c_i$, assim existe uma curva (h_i) tal que $v_i(h_i) = c_i + \varepsilon^i - 1$ para $i = 1, 2$. Conseqüentemente, existem $\alpha_1 > 0$ e $\beta_1 > 0$ tais que

$$\underline{v}(h_1) = (c_1 + \varepsilon^i - 1, \beta_1) \in S,$$

$$\underline{v}(h_2) = (\alpha_1, c_2 + \varepsilon^2 - 1) \in S.$$

Como $c_i + \varepsilon^i - 1 - \varepsilon^i = c_i - 1 \notin S_i$ segue, do corolário 2.17, que $F_1(c_1 + \varepsilon^1 - 1, \beta_1)$ e $F_2(\alpha_1, c_2 + \varepsilon^2 - 1)$ são finitos. Tomemos $(c_1 + \varepsilon^1 - 1, \beta)$ e $(\alpha, c_2 + \varepsilon^2 - 1)$ com $\beta \geq \beta_1$ e $\alpha \geq \alpha_1$, os pontos máximos de $F_1(c_1 + \varepsilon^1 - 1, \beta_1)$ e $F_2(\alpha, c_2 + \varepsilon^2 - 1)$ respectivamente.

Pelo corolário 2.21, temos que $\beta \in A_{\varepsilon^2}(S_2)$ e $\alpha \in A_{\varepsilon^1}(S_1)$, assim $\beta \leq c_2 + \varepsilon^2 - 1$ e $\alpha \leq c_1 + \varepsilon^1 - 1$.

Suponha que $\beta < c_2 + \varepsilon^2 - 1$, então $\beta' = c_2 + \varepsilon^2 - 1 - \beta > 0$ e pela propriedade $e)$ da seqüência de Apéry, dada na seção 3 do capítulo 1, temos que $\beta' \in A_{\varepsilon^2}(S_2) \subset S_2$.

Se (g) é uma curva tal que $v_2(g) = \beta'$, então existe $\alpha' > 0$ tal que $\underline{v}(g) = (\alpha', \beta') \in S$ e assim

$$(c_1 + \varepsilon^1 - 1, \beta) + (\alpha', \beta') = (c_1 + \varepsilon^1 - 1 + \alpha', c_2 + \varepsilon^2 - 1) \in S.$$

Mas lembre-se que $(\alpha, c_2 + \varepsilon^2 - 1)$ é ponto máximo, então

$$c_1 + \varepsilon^1 - 1 \geq \alpha \geq c_1 + \varepsilon^1 - 1 + \alpha' > c_1 + \varepsilon^1 - 1$$

um absurdo.

Segue assim que, $\beta = c_2 + \varepsilon^2 - 1$ e portanto $\tau = (c_1 + \varepsilon^1 - 1, c_2 + \varepsilon^2 - 1) \in S$ e é ponto máximo de S.

Agora provaremos que $\tau + (1, 1)$ é o condutor de S.

Dado $(c_1 + \varepsilon^1 + \alpha, c_2 + \varepsilon^2 + \beta) \in \mathbb{N}^2$, com $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, considere $h_1 f_1 + h_2 f_2$, onde

$$v_1(h_2) = \alpha + c_1 \in S(f_1) \text{ e } v_2(h_1) = \beta + c_2 \in S(f_2).$$

Temos que $\underline{v}(h_1f_1 + h_2f_2) = (v_1(h_2f_2), v_2(h_1f_1)) = (\alpha + \varepsilon^1 + c_1, \beta + \varepsilon^2 + c_2)$, isto é, $\rho \leq \tau + (1, 1)$. Mas, como τ é maximal de S, temos que $\tau < \rho$, seguindo assim $\rho = \tau + (1, 1)$. □

O teorema abaixo, generaliza a proposição anterior para $d > 2$.

Teorema 2.23 *Seja S o semigrupo de uma curva plana com d ramos. Temos que τ é um maximal relativo de S. Mais ainda, $\tau + (1, ..., 1)$ é o condutor de S.*

Demonstração: Provaremos por indução sobre d.

Para $d = 2$, o resultado segue da proposição anterior.

Denotaremos por $I(i)$ o conjunto $I - \{i\}$ e assumiremos que o resultado seja verdadeiro para os semigrupos $S_{I(i)}$ e cada semigrupo tenha seu correspondente τ^i. Dado que $\tau^i \in S_{I(i)}$, então pela proposição 2.16, temos que $(\tau^i + \varepsilon^{I(i)})_\infty \in \overline{S}$, além disto, segue do lema 2.15, que existe $\widetilde{\tau}^i \in S$, com $pr_{I(i)}(\widetilde{\tau}^i) = \tau^i + \varepsilon^{I(i)} = pr_{I(i)}(\tau)$ e $pr_i(\widetilde{\tau}^i) > pr_i(\tau)$. Segue então, que $\tau = inf\{\widetilde{\tau}^i, i \in I\} \in S$.

Mostremos que $\tau + \underline{1}$ é o condutor ρ de S, onde $\underline{1} = (1, ..., 1) \in \mathbb{N}^d$. Tome $\gamma \geq \tau + \underline{1}$. Dado que, por hipótese de indução, o condutor de $S_{I(i)}$ é $\tau^i + \underline{1}^i$ (onde $\underline{1}^i = pr_{I(i)}(\underline{1})$), temos então que $pr_J(\gamma) \in S_J$, para todo $J \subset I$ com $J \neq I$. Mais ainda, se α é um maximal de S, então temos necessariamente que $\alpha \leq \tau$ e pelo teorema da geração 2.12, temos $\gamma \in S$, assim o condutor ρ de S é tal que $\rho \leq \tau + 1$. Agora dado que $c_i - 1 \notin S_i$, da proposição 2.16, segue que $(c_i + \varepsilon^i - 1)_\infty \notin \overline{S}$, então pelo lema 2.15, existe $\gamma \in \mathbb{N}^d$ com $\gamma_i = c_i + \varepsilon^i - 1$, satisfazendo $F_i(\gamma) = \emptyset$. Isto implica que $\rho_i \geq c_i + \varepsilon^i$, para todo $i \in I$, e portanto $\rho = \tau + \underline{1}$.

Agora vejamos que τ é um maximal de S. Assuma que para algum $l \in I$ exista $\alpha \in F_l(\tau)$, isto é, $\alpha_l = c_l + \varepsilon^l - 1$ e $\alpha_j > c_j + \varepsilon^j - 1$ para todo $j \in I \backslash \{l\}$. Tome i o maior inteiro tal que, existam $\alpha'_{l+1}, ..., \alpha'_i$ com $\alpha'_k > \alpha_k$, para $l < k \leq i$, de modo que $\alpha(i) = (\alpha_1, ..., \alpha_{l-1}, c_l + \varepsilon^l - 1, \alpha'_{l+1}, ..., \alpha'_i, \alpha_{i+1}, ..., \alpha_d) \in S$. Se $i < d$, tome $\beta \in F_{i+1}(\alpha(i))$, que existe, pois $\beta \geq \rho$. Dado que $\beta_{i+1} = \alpha_{i+1}$, usando a propriedade B, aplicada ao índice $i+1$, obtemos $\alpha(i+1) = (\alpha_1, ..., \alpha_{l-1}, c_l + \varepsilon^l - 1, \alpha'_{l+1}, ..., \alpha'_{i+1}, \alpha_{i+2}, ..., \alpha_d) \in S$, contrariando a maximalidade de i.

Deste modo, $i = d$ e temos que $\alpha^1 = \alpha(d) \in F_l(\alpha)$ para todo $l \leq d$. Agora, por recorrência, podemos construir uma seqüência $\alpha, \alpha^1, ..., \alpha^{n+1}, ...$ tal que $\alpha^n \in F_l(\tau)$ e $\alpha^{n+1} \in F_l(\alpha^n)$, para todo $n \geq 1$. Assim, pelo lema 2.15, temos que $(c_l + \varepsilon^l - 1)_\infty \in \overline{S}$ o que é uma contradição. Segue que $F_l(\tau) = \emptyset$ para todo $l \in I$, e assim temos que $F(\tau) = \emptyset$, concluindo que τ é um maximal de S.

Resta mostrar que τ é maximal relativo. Para tanto, seja $J \subset I$, $J \neq I$ com $\sharp J \geq 2$. Temos que $pr_J(\tau) = \tau_J + \varepsilon^J$, onde τ_J é em S_J, o elemento análogo a τ. Pela proposição 2.16, temos que $(pr_J(\tau))_\infty \in \overline{S}$, e em particular, pelo lema 2.15, temos que $F_J(\tau) \neq \emptyset$. □

Veja que a proposição 2.4 já nos permite concluir que o condutor do semigrupo S é $\tau + \underline{1}$, o que o teorema anterior nos dá, é uma outra forma de obter tal resultado.

Os próximos resultados nos auxiliarão no último teorema deste capítulo.

Lema 2.24 *Seja $\alpha \in S$ e denote por α' o elemento $\tau - \alpha \in \mathbb{N}^d$. Então temos que:*

i) $F(\alpha') = \emptyset$.

ii) Se, mais ainda, $F_J(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, então $F_A(\alpha') = \emptyset$ para todo $A \subset I$, $A \neq I$.

Demonstração: *i)* Se $\beta \in F(\alpha')$, então é evidente que $\beta + \alpha \in F(\tau)$. Como $\beta + \alpha \in S$, teríamos que τ não seria maximal de S, contrariando o teorema anterior, logo $F(\alpha') = \emptyset$.

ii) Tomemos $A \subset I$ com $\sharp A \leq d-1$. Supondo por absurdo que $F_A(\alpha') \neq \emptyset$, tome $\beta \in F_A(\alpha')$. Dado que $F_J(\alpha) \neq \emptyset$ para o conjunto $J = (I - A) \bigcup \{i\}$, onde $i \in A$, considere $\beta' \in F_J(\alpha)$. Então $\beta + \beta' \in F_i(\tau)$ o que é um absurdo. □

Observe que o lema anterior não garante que se $\alpha \in S$, então $\alpha' = \tau - \alpha$ é um elemento de S. Caso $\alpha' \in S$, então teremos que α' é um elemento maximal de S.

Proposição 2.25 (Garcia) *Sejam $d = 2$ e α um elemento maximal de S, então $\tau - \alpha$ também é um maximal de S.*

Demonstração: Pelo lema 2.24, basta demonstrar que $\alpha' = \tau - \alpha \in S$. Para isso vamos usar indução sobre $\alpha'_1 = c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \alpha_1$.

Se $\alpha'_1 = 0$, então $\alpha = \tau$ e $\alpha' = (0, 0) \in S$.

Suponhamos então que $\alpha'_1 > 0$ e $\alpha' \notin S$.

Afirmação: Se $\gamma' = \tau - \gamma \notin S$ e γ é ponto maximal, então existem δ e η, maximais de S, tais que $\gamma' \in \overline{F}_1(\delta)$ e $\gamma' \in \overline{F}_2(\eta)$.

Provemos a afirmação. Como γ é ponto maximal, temos pelo corolário 2.21, que $\gamma_i \in A_{\varepsilon^i}(S_i)$, então pela propriedade e) da seqüência de Apéry apresentada na seção 1.3, temos que $\gamma'_i = c_i + \varepsilon_i - 1 - \gamma_i \in A_{\varepsilon^i}(S_i)$. Pelo corolário 2.17, existem maximais δ e η de S, tais que $\gamma'_1 = \delta_1$ e $\gamma'_2 = \eta_2$. Se $\gamma'_2 < \delta_2$ ou $\gamma'_1 < \eta_1$, então como $\delta + \gamma,\ \eta + \gamma \in S$ e

$$\tau_1 = \gamma'_1 + \gamma_1 = \delta_1 + \gamma_1,\ \tau_2 = \gamma'_2 + \gamma_2 < \delta_2 + \gamma_2,$$
$$\tau_1 = \gamma'_1 + \gamma_1 < \eta_1 + \gamma_1 \text{ e } \tau_2 = \gamma'_2 + \gamma_2 = \eta_2 + \gamma_2,$$

teríamos que $\delta + \gamma \in F_1(\tau)$ ou $\eta + \gamma \in F_2(\tau)$ um absurdo, uma vez que τ é maximal de S. Segue assim, que $\gamma'_2 > \delta_2$ e $\gamma'_1 > \eta_1$, ou seja, $\gamma' \in \overline{F}_1(\delta)$ e $\gamma' \in \overline{F}_2(\eta)$. O que prova a afirmação.

Voltemos a proposição.

Segue da afirmação acima, para $\gamma = \alpha$ que existe um maximal η de S tal que $\alpha' \in \overline{F}_2(\eta)$.

Considere $\eta' = \tau - \eta$. Como $\eta'_2 = \tau_2 - \eta_2 = \tau_2 - \alpha'_2 = \alpha_2$ e $\eta'_1 = \tau_1 - \eta_1 > \tau_1 - \alpha'_1 = \alpha_1$, temos que $\eta' \in \overline{F}_2(\alpha)$. Mas α é maximal de S, portanto $\eta \notin S$.

Novamente pela afirmação, usando $\gamma = \eta$, segue que existe δ maximal de S, tal que $\eta' \in \overline{F}_1(\delta)$.

Mas deste modo, temos que $\delta_1 = \eta'_1 > \alpha_1$ e assim $c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \delta_1 < c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \alpha_1 = \alpha'_1$, segue por hipótese de indução, que $\delta' = \tau - \delta \in S$. No entanto, como $\delta'_1 = c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \eta'_1 = \eta_1$ e $\delta'_2 = c_2 + \varepsilon^2 - 1 - \delta_2 > c_2 + \varepsilon^2 - 1 - \eta'_2 = \eta_2$, temos que $\delta \in \overline{F}_1(\eta)$ o que é um absurdo, uma vez que $\delta \in S$ e η é maximal de S. Segue portanto, que $\alpha' \in S$ $\square$

Lema 2.26 *Seja $\alpha \in S$ um elemento tal que $F_i(\alpha) = \emptyset$. Então existem $J \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, $i \in J$ e $\alpha^* \in S_J$ um maximal relativo de S_J, tal que $\alpha^*_j \leq \alpha_j$ para todo $j \in J$.*

Demonstração: Inicialmente, observe que se $d = 2$, então basta considerar $J = I$ e $\alpha = \alpha^*$.

Possibilidade A: Suponha que existe $j \in I \setminus \{i\}$ tal que $F_{i,j}(\alpha) \neq \emptyset$.

Reordenando os eixos se necessário, que corresponde a uma reordenação dos ramos da curva, podemos considerar o maior índice k, com $i < k \leq d+1$, tal que $F_{i,j}(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $1 < j < k$ e $F_{i,l}(\alpha) = \emptyset$ para todo $k \leq l \leq d$.

Mostremos a possibilidade A por indução sobre o número $r(\alpha) = d + 1 - k$, isto é, sobre o número de índices l, tais que $F_{i,l}(\alpha) = \emptyset$.

Se $r(\alpha) = 0$, então pelo lema 2.11, temos que α é maximal relativo de S.

Se $r(\alpha) > 0$, então considere $I' = I \setminus \{k\}$ e $pr_{I'}(\alpha) \in S_{I'}$.

A.**1** Suponha $F_i(pr_{I'}(\alpha)) = \emptyset$. Se $\sharp I' = 2$, então $pr_{I'}(\alpha)$ é maximal relativo de $S_{I'}$ e satisfaz as condições do lema. Se $\sharp I' > 2$, então como $F_{i,j}(pr_{I'}(\alpha)) \neq \emptyset$, para todo $1 < j < k$, segue que $r(pr_{I'}(\alpha)) = d - k < r(\alpha)$ e por hipótese de indução, existe $J \subset I' \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, $i \in J$ e $\alpha^* \in S_J$ maximal relativo de S_J, tal que $\alpha^*_i = (pr_{I'}(\alpha))_i = \alpha_1$ e $\alpha^*_j \leq (pr_{I'}(\alpha))_j = \alpha_j$, para todo $j \in J$.

A.**2** Suponha $F_i(pr_{I'}(\alpha)) \neq \emptyset$. Tomemos $\beta \in P_{I'}(F_i(pr_{I'}(\alpha)))$ (veja definição no início da seção 2.3) de modo que a $k-$ésima coordenada β_k de β seja máxima, que existe uma vez que $F_{i,k}(\alpha) = \emptyset$. Aplicando a propriedade A para α e β, temos que

$$\alpha' = inf(\alpha, \beta) = (\alpha_1, ..., \alpha_{k-1}, \beta_k, \alpha_{k+1}, ..., \alpha_d) \in S$$

e além disto, $F_i(\alpha') = \emptyset$ e $F_{i,j}(\alpha') \neq \emptyset$, para todo $1 < j < k+1$. Assim, $r(\alpha') = d + 1 - (k+1) < r(\alpha)$ e por hipótese de indução, existe $J \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, $i \in J$ e $\alpha^* \in S_J$ maximal relativo de S_J, tal que $\alpha^*_i = \alpha'_i = \alpha_i$ e $\alpha^*_j \leq \alpha'_j \leq \alpha_j$ para todo $j \in J$.

Possibilidade B: Suponha $F_{i,l}(\alpha) = \emptyset$ para todo $l \in I \setminus \{i\}$.

Mostremos a possibilidade B por indução sobre o número de ramos d de α.

Considere $I' = I \setminus \{k\}$ com $k \neq i$ e $pr_{I'}(\alpha) \in S_{I'}$. Claramente se $d = 2$, então o resultado segue.

B.1 Se $F_i(pr_{I'}(\alpha)) = \emptyset$ e $F_{i,l}(pr_{I'}(\alpha)) = \emptyset$ para todo $l \in I' \setminus \{i\}$, então por hipótese de indução, existiria $J \subset I' \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, $i \in J$ e $\alpha^* \in S_J$ maximal relativo de S_J, tal que $\alpha^*_i = (pr_{I'}(\alpha))_i = \alpha_i$ e $\alpha^*_j \leq (pr_{I'}(\alpha))_j = \alpha_j$ para todo $j \in J$.

B.2 Se $F_i(pr_{I'}(\alpha)) = \emptyset$ e existe $l \in I' \setminus \{i\}$, tal que $F_{i,l}(pr_{I'}(\alpha)) \neq \emptyset$, então $pr_{I'}(\alpha)$ se enquadra na possibilidade A e obtemos o resultado.

B.3 Se $F_i(pr_{I'}(\alpha)) \neq \emptyset$, então como no caso A.2, podemos encontrar $\alpha' \in S$, tal que $F_i(\alpha') = \emptyset$, porém $F_{i,l}(\alpha') = \emptyset$, para todo $l \in I \setminus \{i\}$. Agora repetimos a análise da possibilidade B para α', como o caso B.3 não pode ocorrer sempre, caso contrário obteríamos um elemento de S com a k-ésima coordenada nula, obrigatoriamente em algum momento, nos enquadraremos no caso B.1 ou B.2, o que conclui o resultado. $\square$

Encerramos este capítulo com um resultado que garante que os pontos maximais relativos e absolutos de S se determinam mutuamente a partir de τ.

Teorema 2.27 (Simetria)

A)Seja $\alpha \in S$. Temos que α é um maximal de S se, e somente se, $\alpha' = \tau - \alpha \in S$. Mais ainda, se α e β são tais que $\alpha + \beta = \tau$, então β é maximal absoluto de S se, e somente se, α é maximal relativo de S.

B) Sejam $\alpha, \gamma \in S$. Temos que $\alpha \in N_\gamma(S)$ se, e somente se, $\tau + \gamma - \alpha \in S$. Neste caso, temos que $\tau + \gamma - \alpha \in N_\gamma(S)$.

Demonstração: Provaremos $A)$ e $B)$ simultaneamente usando a seguinte indução:

Chamaremos $A(d)$ para $d \geq 2$ e $B(d)$ para $d \geq 1$ as afirmações $A)$ e $B)$ respectivamente, para semigrupos com d ramos. Agora denotaremos $C(n) = A(d)$, se $n = 2d - 2$ e $C(n) = B(d)$, se $n = 2d - 1$. Assim, para provar $A(d)$ e $B(d)$, provaremos a condição $C(n)$ por indução sobre n.

Note que $C(1) = B(1)$ é um resultado conhecido. De fato, como $n = d = 1$, temos pela observação 2.19, que $N_\gamma(S) = A_\gamma(S)$ e que $\tau = \rho - 1$ onde ρ é o condutor de S. Deste modo, $\tau + \gamma = c - 1 + \gamma$ é o maior elemento do conjunto de Apéry de S com respeito à γ (veja propriedade $d)$ da seqüência de Apéry no final da seção 1.3). Agora, se $\alpha \in A_\gamma(S) = N_\gamma(S)$, temos que $\tau + \gamma - \alpha = c - 1 + \gamma - \alpha \in A_\gamma(S) = N_\gamma(S) \subset S$ (veja propriedade $e)$ da seqüência de Apéry no final da seção 1.3).

Temos que $C(2) = A(2)$ é a proposição 2.25.

Assuma que $C(m)$ é verdadeira para todo $m < n$. Para provar que $C(n)$ é verdadeira vamos separar a demonstração em dois casos.

Caso 1) $\mathbf{n = 2d - 2}$.

Por hipótese de indução, a afirmação $C(n-1) = B(d-1)$ é verdadeira. Basta então mostrar que $B(d-1)$ implica $C(n) = A(d)$. Note que as condições suficientes para ambas as afirmações em $A(d)$ são evidentes pelo lema 2.24. De fato, na primeira afirmação, temos que $\alpha \in S$ e além disso, se $\theta \in F(\alpha)$, então $\theta \in F(\tau - \alpha')$ e, conseqüentemente $\theta + \alpha' \in F(\tau)$ pois $\alpha' \in S$, o que é um absurdo, dado que $F(\tau) = \emptyset$. Logo $F(\alpha) = \emptyset$, e portanto, α é um maximal de S. Na segunda afirmação, temos que $\tau - \alpha = \beta$, e do fato de $F_J(\alpha) \neq \emptyset$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J \geq 2$, pois α é maximal relativo de S, segue do item $ii)$ do lema 2.24, que $F_A(\beta) = \emptyset$ para todo $A \subset I, A \neq I$. Como, pela primeira afirmação, $\beta \in S$, temos que β é maximal absoluto de S.

Provaremos a necessidade da condição na primeira afirmação de $A(d)$, primeiro no caso em que α é maximal relativo. Para isto, usaremos indução sobre $\alpha'_1 = c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \alpha_1$.

Se $\alpha'_1 = 0$, então $\alpha = \tau$ e $\alpha' = \underline{0} = (0, ..., 0) \in S$.

Vamos assumir que $\alpha'_1 > 0$, isto é, $\alpha < \tau$ e, suponhamos por absurdo, que $\alpha' \notin S$.

Dado que α é maximal, da proposição 2.20, temos que $pr_J(\alpha) \in N_{\epsilon^J}(S_J)$ para todo $J \subset I$. Usando que $B(d-1)$ é verdadeira para S_J com $\sharp J = d-1$, obtemos $\tau^J + \varepsilon^J - pr_J(\alpha) = pr_J(\tau - \alpha) = pr_J(\alpha') \in S_J$, para todo $J \subset I$ tal que $\sharp J = d-1$.

Tome um índice $i \in I \setminus \{1\}$, temos que $F_i^d(\alpha') = \emptyset$ (veja definição de $F_i^d(\alpha')$ na demonstração do teorema 2.12). De fato, se $F_i^d(\alpha') \neq \emptyset$ para algum $i \in I$, então deveria haver ao menos um índice $k \neq i$, tal que se $\beta \in F_i^d(\alpha')$, então $\beta_k > \alpha'_k$, pois caso contrário, $\beta = \alpha' \in S$, o que seria um absurdo. Tome $L \subset I$ o conjunto dos índices tais que $\beta_l = \alpha'_l$, para todo $l \in L$. Note que $L \neq I$ e $\beta \in F_L(\alpha')$, mas como α é maximal relativo, isto contradiria o lema 2.24. Portanto, $F_i^d(\alpha') = \emptyset$ para todo $i \in I$. Desta forma, segue da demonstração do teorema da geração 2.12, que existe um maximal relativo $\beta \in S$, tal que $\alpha' \in \overline{F}_i(\beta)$. Além disso, temos

$\beta' := \tau - \beta \in \overline{F}_i(\alpha)$ e $\beta' \notin S$. De fato, como $\alpha' \in \overline{F}_i(\beta)$, temos que $\tau \in \overline{F}_i(\alpha+\beta)$, donde $\tau - \beta \in \overline{F}_i(\alpha)$. Disto, e do fato de α ser um maximal relativo de S, segue que $\tau - \beta = \beta' \notin S$.

Como antes, temos que $pr_J(\beta') \in S_J$, para todo $J \subset I$, tal que $\sharp J = d-1$ e $F_1^d(\beta') = \emptyset$. Pois, se existisse $\gamma \in F_1^d(\beta')$, teríamos $\gamma_1 = \beta'_1$ e $\gamma_l \geq \beta'_l$ para todo $l \geq 1$. Com certeza deve haver índices tais que $\gamma_l = \beta'_l$ com $l > 1$ pois, caso contrário, $\gamma \in F_1(\beta')$. Porém $F_A(\beta') = \emptyset$ para todo $A \subset I$ $A \neq L$, basta lembrar que β é maximal relativo de S e usar o lema 2.24. Denotando por L, o conjunto de índices tais que $\gamma_l = \beta'_l$, para todo $l \in L$, temos que $\gamma_j > \beta'_j$ para todo $j \in I \setminus L$, assim $\beta' = \gamma \in S$ se $I = L$, ou $\gamma \in F_L(\beta')$, o que em ambos os casos não pode ocorrer.

Novamente pelo teorema da geração 2.12, existe um maximal relativo $\mu \in S$ com $\beta' \in \overline{F}_1(\mu)$. Dado que $\mu_1 > \alpha_1$, pois $\mu_1 = \beta'_1$ e $\beta' \in \overline{F}_i(\alpha)$ com $i \neq 1$, temos que $c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \mu_1 < c_1 + \varepsilon^1 - 1 - \alpha_1$ e, por hipótese de indução, obtemos que $\mu' := \tau - \mu \in S$ o que é um absurdo, pois $\mu' \in \overline{F}_1(\beta)$ com β um maximal relativo de S. Portanto, $\alpha' \in S$.

Agora seja α um maximal arbitrário de S. Provaremos que $\alpha' \in S$. Se tivermos $\alpha' \notin S$ então, como antes, $pr_J(\alpha') \in S_J$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J = d-1$, e pelo teorema da geração 2.12, temos que $\alpha' \in \overline{F}(\beta)$ para algum maximal relativo $\beta \in S$. Como mostramos antes, temos $\beta' = \tau - \beta \in S$. Mas, $\alpha' = \tau - \alpha$ e $\alpha' \in \overline{F}(\beta)$, assim existe $i \in I$, tal que $\alpha'_i = \beta_i$ e $\alpha'_j > \beta_j$ para todo $j \in I \setminus \{i\}$. Deste modo, $\alpha_i = \tau_i - \alpha'_i = \tau_i - \beta_i = \beta'_i$ e $\alpha_j = \tau_j - \alpha'_j < \tau_j - \beta_j = \beta'_j$ ou seja, $\beta' \in \overline{F}_i(\alpha) \subset \overline{F}(\alpha)$, o que é um absurdo, pois $\beta' \in S$ e α é maximal de S. Portanto, $\alpha' \in S$.

Provaremos agora a necessidade da condição para a segunda afirmação do caso $C(n) = A(d)$. Como $\beta \in S$, segue da primeira afirmação que $\alpha \in S$ e do item $i)$ do lema 2.24, que α é maximal. Assuma que α é maximal, mas não é relativo. Pelo lema 2.26, existe $J \subset I$ com $1 \in J, \sharp J \geq 2$ e $\alpha^* \in S_J$ um maximal relativo de S_J, tal que $\alpha_1^* = \alpha_1$ e $\alpha_j^* \leq \alpha_j$ para todo $j \in J$.

Se $J = I$, considere o conjunto $L = \{i \in I; \alpha_i^* = \alpha_i\}$. Temos que $1 \in L \subset I$, $L \neq I$ e $\alpha \in F_L(\alpha^*)$, logo $\tau - \beta \in F_L(\alpha^*)$ e conseqüentemente $\tau - \alpha^* \in S$ pela primeira parte da afirmação A, e $\tau - \alpha^* \in F_L(\beta)$ e portanto, β não é maximal absoluto, o que é uma contradição.

Agora, se $J \neq I$, então, por hipótese de indução, $\tau^J - \alpha^*$ é um maximal absoluto de S_J e, pela proposição 2.16, temos $(\tau^J - \alpha^* + \varepsilon^J)_\infty \in \overline{S}$. Logo, temos que existe $\gamma \in P_J(\tau^J - \alpha^* + \varepsilon^J)$ (veja definição no início da seção 2.3) com $\gamma_j > \beta_j$, para todo $j \notin J$. Considerando o conjunto $L = \{j \in J; \alpha_j^* = \alpha_j\}$, temos que $\gamma \in F_L(\beta)$. Com efeito, se $l \in I \setminus J$, então $\gamma_l > \beta_l$. Se, por outro lado, $l \in J \setminus L$, temos que $\gamma_j = \tau_j^J - \alpha_j^* + {\varepsilon^J}_j \geq \tau_j^J - \alpha_j + {\varepsilon^J}_j = \beta_j$, pois $\alpha_j^* \leq \alpha_j$ para todo $j \in J$. Além disto, $\gamma_l = \tau_l^J - \alpha_l^* + {\varepsilon^J}_l = (\tau^J + \varepsilon^J)_l - \alpha_l^* = \tau_l - \alpha_l = \beta_l$ para todo $l \in L$. Portanto, β não é maximal absoluto de S, novamente uma contradição.

Caso 2) $\mathbf{n = 2d - 1}$.

Por hipótese de indução, assumiremos que $A(d) = C(n-1)$ e $B(d-1) = C(n-2)$ são verdadeiras. Provaremos que $B(d-1)$ e $A(d)$ implicam $B(d) = C(n)$.

Mostremos inicialmente a condição suficiente. Suponha que exista $\beta \in F(\alpha)$, mas $\beta \notin A_\gamma(S)$. Neste caso, temos $\beta - \gamma \in F_i(\alpha - \gamma) \subset F(\alpha - \gamma)$ para algum $i \in I$. Mas, por hipótese, $\tau - (\alpha - \gamma) =: \eta \in S$, então $\tau - \eta = \alpha - \gamma$ e pelo lema 2.24, $F(\alpha - \gamma) = \emptyset$, o que nos dá uma contradição. Logo, $F(\alpha) \subset A_\gamma(S)$ e portanto, $\alpha \in N_\gamma(S)$.

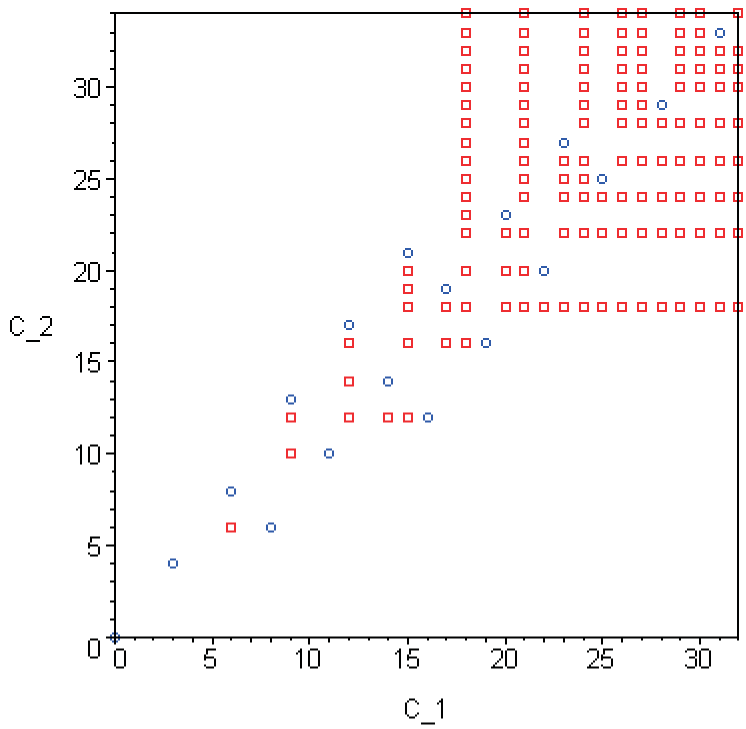
Agora seja $\eta := \tau + \gamma - \alpha$, com $\alpha \in N_\gamma(S)$. Pela proposição 2.20, temos que $pr_J(\alpha) \in N_{pr_J(\gamma)+\varepsilon^J}(S_J)$, para todo $J \subset I$ com $\sharp J = d - 1$. Dado que $pr_J(\tau) = \tau^J + \varepsilon^J$, temos, por $B(d-1)$, que $pr_J(\eta) \in S_J$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J = d - 1$. Assim, aplicando o teorema da geração 2.12 à η, temos que se $\eta \notin S$, então existe um maximal relativo $\beta \in S$, tal que $\eta \in \overline{F}(\beta)$. Usando $A(d)$ aplicada ao maximal β, obtemos $\tau - \beta \in S$, o que é um absurdo. De fato, como $\eta \in \overline{F}(\beta)$, temos que

$\beta_i = \eta_i = \tau_i + \gamma_i - \alpha_i$ para algum $i \in I$ e $\beta_j < \eta_j = \tau_j + \gamma_j - \alpha_j$ para todo $j \neq i$. Logo $(\tau - \beta) + \gamma \in F_i(\alpha) \subset F(\alpha) \subset A_\gamma(S)$ e assim, $\tau - \beta = (\tau - \beta + \gamma) - \gamma \notin S$. Portanto, $\eta = \tau + \gamma - \alpha \in S$.

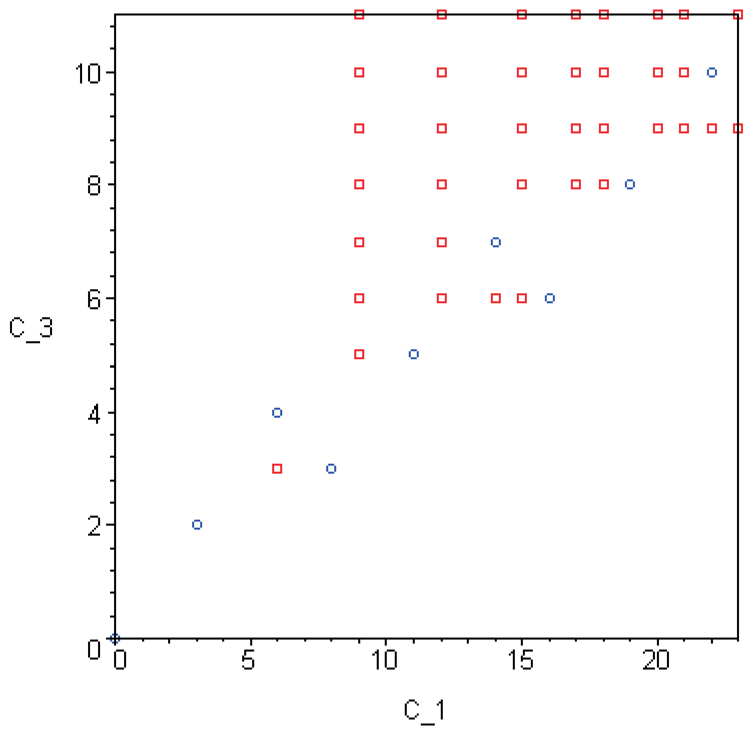
Para a última afirmação do teorema, observe que $\tau + \gamma - (\tau + \gamma - \alpha) = \alpha \in S$, assim pela primeira parte da afirmação B), temos que $\tau + \gamma - \alpha \in N_\gamma(S)$.

$\square$

Observe que em virtude do teorema da geração 2.12 e do teorema anterior, podemos determinar o semigrupo de valores S de uma curva com d ramos, se conhecermos os semigrupos com $d-1$ ramos e os pontos maximais absolutos de S. No próximo capítulo, abordaremos a questão de determinar tais pontos.

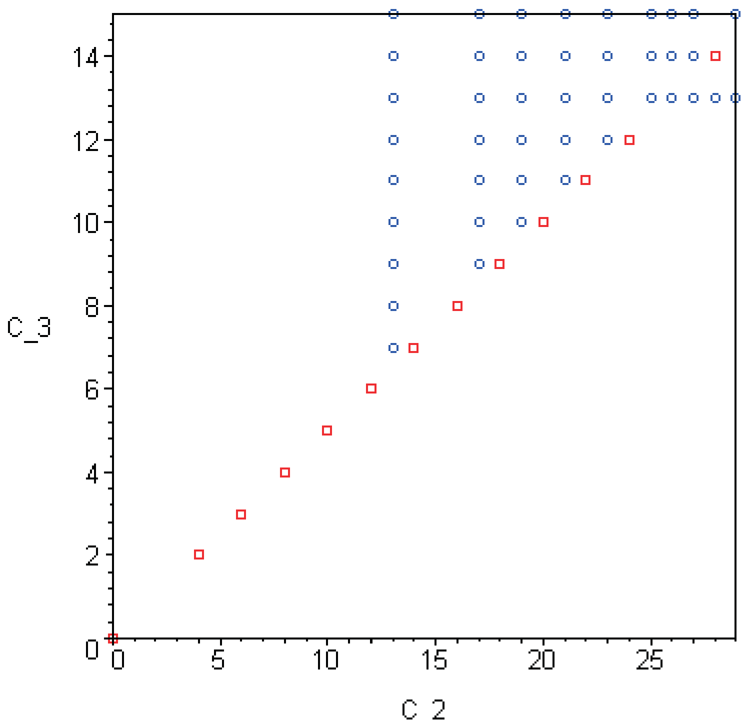


Maximal_points_for_the_semigroup = [[0,0],[3,4],[6,8],[8,6],[9,13],[11,10],[12,17],[14,14],[15,21],[16,12],[17,19],[19,16],[20,23],[22,20],[23,27],[25,25],[28,29],[31,33]]

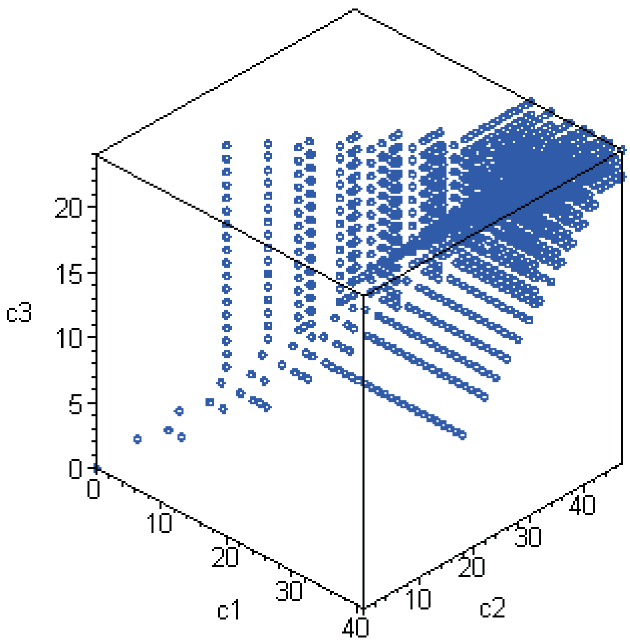


Maximal_points_for_the_semigroup = [[0,0],[3,2],[6,4],[8,3],[11,5],[14,7],[16,6],[19,8],[22,10]]

Figura 2.1: Acima: Semigrupo das curvas $C_1 = (t^3, t^8 + t^{10})$ e $C_2 = (t^4, t^6 + t^7)$. Abaixo: Semigrupo das curvas $C_1 = (t^3, t^8 + t^{10})$ e $C_3 = (t^2, t^3 + t^4)$. Legenda: $\circ$ representa um Ponto Maximal.



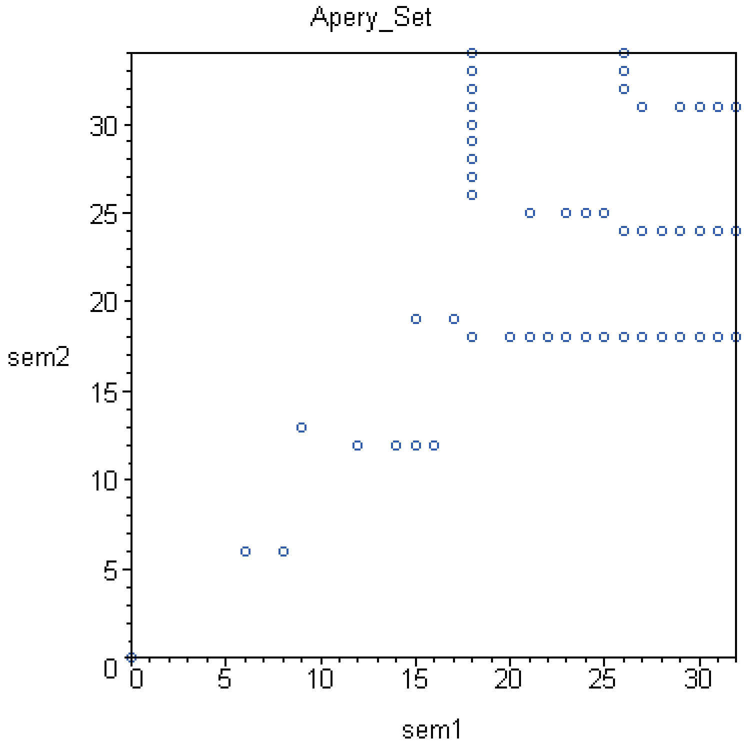
Maximal_points_for_the_semigroup =
[[0,0],[4,2],[6,3],[8,4],[10,5],[12,6],[14,7],[16,8],[18,9],[20,10],[22,11],[24,12],[28,14]]



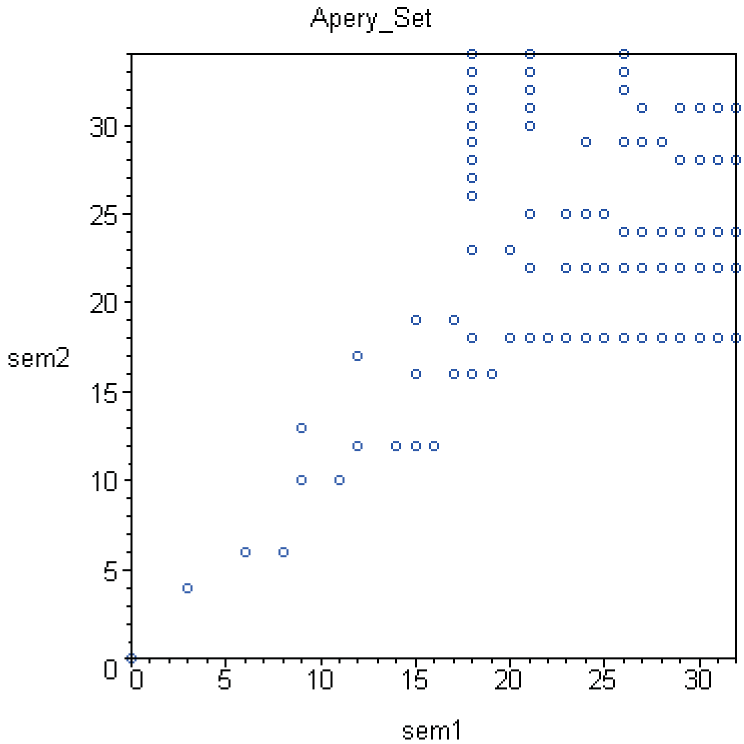
absolute_maximals =
{[6,8,4],[8,6,3],[19,16,8],[11,10,5],[0,0,0],[22,20,10],[14,14,7],[16,12,6],[3,4,2]}

relative_maximals = {[21,30,15],[40,46,23],[26,32,16],[37,42,21],[34,38,19],[24,34,17],[18,26,13],
[29,36,18],[32,40,20]}

Figura 2.2: Acima: Semigrupo das curvas $C_2 = (t^4, t^6 + t^7)$ e $C_3 = (t^2, t^3 + t^4)$, onde $\circ$ representa um Ponto Maximal. Abaixo: Semigrupo das curvas $C_1 = (t^3, t^8 + t^{10}), C_2 = (t^4, t^6 + t^7)$ e $C_3 = (t^2, t^3 + t^4)$.



Apery_corners={[3, 4], [0, 0], [8, 6], [6, 8], [9, 12], [9, 13], [12, 17], [11, 10], [14, 14], [16, 12], [15, 21], [17, 19], [17, 18], [18, 25], [19, 16], [20, 23], [22, 20], [23, 27], [25, 24], [25, 25], [26, 31], [28, 29], [31, 33], [32, 34]}



Apery_corners={[6, 8], [0, 0], [3, 4], [8, 6], [11, 10], [9, 13], [9, 12], [12, 17], [12, 16], [15, 21], [14, 14], [16, 12], [17, 18], [17, 19], [18, 25], [19, 16], [20, 23], [20, 22], [21, 29], [22, 20], [23, 27], [25, 24], [25, 25], [26, 31], [28, 28], [28, 29], [31, 33], [32, 34]}

Figura 2.3: Base e vértices de Apéry do semigrupo de $C_1 = (t^3, t^8 + t^{10})$ e $C_2 = (t^4, t^6 + t^7)$ com respeito aos pontos $(3, 4)$ e $(6, 8)$ respectivamente.

Capítulo 3

Descrição dos Pontos Maximais Absolutos

Neste capítulo, abordaremos a questão de determinar os pontos maximais absolutos do semigrupo de valores S de uma curva plana com vários ramos. A estratégia será a de obter um conjunto finito, bem caracterizado, que contém alguns dos pontos maximais absolutos. Embora tal conjunto não contenha todos os pontos maximais absolutos, podemos obter todos estes pontos a partir daqueles que pertencem ao conjunto descrito.

Seja (f) uma curva plana reduzida com $f = f_1...f_d$, onde cada $f_i \in \mathbb{C}[[X,Y]]$ é irredutível. No que segue, para cada ramo (f_i), $\beta_0^i, ..., \beta_{g_i}^i$ denotam os expoentes característicos, $v_0^i, ..., v_{g_i}^i$ o sistema mínimo de geradores de $S_i = S(f_i)$ e $n_k^i = \frac{e_{k-1}^i}{e_k^i}$, onde $e_k^i = mdc(\beta_0^i, ..., \beta_k^i) = mdc(v_0^i, ..., v_k^i)$. Além disto, indicaremos o contato entre (f_i) e (f_j) por α_{ij} e $r_{ij} = max\{k \in \mathbb{N};\ \frac{v_l^i}{v_l^j} = \frac{v_0^i}{v_0^j},\ \forall l;\ 0 \leq l \leq k\}$.

Definimos o contato entre $(f_1), ..., (f_d)$ como

$$\alpha_{1,...,d} = min\{\alpha_{ij},\ 1 \leq i < j \leq d\}.$$

Para $n \geq 0$ considere o conjuntos

$$\mathcal{W}^n = \{i \in I;\ g_i \geq n\},$$

onde g_i é o gênero da curva plana (f_i),

$$\mathcal{T}^n = \{A \in \wp(\mathcal{W}^n);\ \text{existe uma curva plana de gênero } n \text{ que tem contato maximal de ordem } n \text{ com } (f_i), \text{ para todo } i \in A\ \},$$

onde $\wp(\mathcal{W}^n)$ denota o conjunto das partes de $\mathcal{W}^n$ e

$$\mathbb{M}^n = \{\ \text{conjunto dos elementos maximais de } \mathcal{T}^n \text{ com respeito a inclusão }\}.$$

A partir das definições anteriores temos o seguinte resultado.

Lema 3.1 *Considere os ramos (f_1) e (f_2). Se $\frac{\beta_q^1}{\beta_0^1} \leq \alpha_{12} < \frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}$ e $\frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1} \leq \frac{\beta_{q+1}^2}{\beta_0^2}$, então:*

1. *Para $n < q$, temos $\mathbb{M}^n = \{\{1,2\}\}$.*
2. *Para $n > q$, temos que:*
   (a) *Se $n \leq min\{g_1, g_2\}$, então $\mathbb{M}^n = \{\{1\},\{2\}\}$.*
   (b) *Se $g_2 < n \leq g_1$, então $\mathbb{M}^n = \{\{1\}\}$.*
   (c) *Se $g_1 < n \leq g_2$, então $\mathbb{M}^n = \{\{2\}\}$.*
   (d) *Se $n > max\{g_1, g_2\}$, então $\mathbb{M}^n = \emptyset$.*
3. *Para $n = q$, temos que:*
   (a) *Se $\alpha_{12} < min\{\frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{q+1}^2}{\beta_0^2}\}$, então $\mathbb{M}^q = \{\{1\},\{2\}\}$*
   (b) *Se $\alpha_{12} = min\{\frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{q+1}^2}{\beta_0^2}\}$, então toda curva com contato maximal de ordem n com (f_2) tem também com (f_1). Em particular, $\mathbb{M}^q = \{\{1,2\}\}$.*

Demonstração:

1. Suponha $n < q$, temos, pela proposição 1.16, que $\frac{\beta_i^1}{\beta_0^1} = \frac{\beta_i^2}{\beta_0^2}$ para todo $i < q$, ou seja, para $i \leq n$. Agora o resultado segue, tomando uma curva, como descrita no final da seção 1.4, tendo contato de ordem n com (f_1) e (f_2).

2. Se $n > q$, então como $\frac{\beta_q^1}{\beta_0^1} \leq \alpha_{12} < \frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}$ não é possível obter uma mesma curva com contato maximal de ordem n com (f_1) e (f_2) simultaneamente.

   Se $n \leq min\{g_1, g_2\}$, então podemos obter uma curva com contato maximal de ordem n para (f_1) e outra para (f_2).

   Se $g_2 < n \leq g_1$, então podemos obter uma tal curva para (f_1), mas não para (f_2). Caso análogo, quando $g_1 < n \leq g_2$.

   Se $n > max\{g_1, g_2\}$, então para nenhuma das curvas é possível obter uma curva com contato maximal de ordem n.

3. Suponha $n = q$.

   Se $\alpha_{12} = min\{\frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{q+1}^2}{\beta_0^2}\}$, então tomando uma curva com contato maximal de ordem n com (f_2), esta terá o mesmo contato com (f_1).

   Se $\alpha_{12} < min\{\frac{\beta_{q+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{q+1}^2}{\beta_0^2}\}$, então o resultado segue como no item a) de 2.

$\square$

Exemplo 3.2 *Seja $f = f_1 f_2 f_3$ uma curva plana, onde*

$$(f_1) : \begin{cases} x = & t_1^4 \\ y = & t_1^6 + t_1^7 \end{cases} \quad (f_2) : \begin{cases} x = & t_2^3 \\ y = & t_2^4 + t_2^5 \end{cases} \quad (f_3) : \begin{cases} x = & t_3^3 \\ y = & t_3^4. \end{cases}$$

Para $q = 0$, temos que $\mathcal{W}^0 = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}^0 = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ e $\mathbb{M}^0 = \{\{1, 2, 3\}\}$. A saber,

$$(h_0) : \begin{cases} x = & t \\ y = & t^2 \end{cases}$$

tem gênero 0 e contato maximal de ordem 0 com (f_1), (f_2) e (f_3).

Para $q = 1$, temos que $\mathcal{W}^1 = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{T}^1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\} = \mathbb{M}^1$, onde

$$(h_1) : \begin{cases} x = & t^2 \\ y = & t^3 \end{cases}$$

tem gênero 1 e contato maximal de ordem 1 com (f_1). Para (f_2) e (f_3) tomamos elas próprias.

Quando $q = 2$, *obtemos que* $\mathcal{W}^2 = \{1\}$, $\mathcal{T}^2 = \mathbb{M}^2 = \{\{1\}\}$, *onde a curva de gênero 2 com contato maximal de ordem 2 com* (f_1) *é ela própria.*

Além disto, temos que $\mathcal{W}^n = \mathcal{T}^n = \mathbb{M}^n = \emptyset$ *para todo* $n \geq 3$.

Se (h) é uma curva com contato maximal de ordem q para todos ramos (f_i) com $i \in E \subset I$, então indicaremos com " $*$ " os dados numéricos relativos à (h). Desta forma, $\beta_0^*, ..., \beta_q^*$ denotam os expoentes característicos de (h) e assim por diante.

Proposição 3.3 *Sejam* $q > 0$, $E \in \mathbb{M}^q$ *e* (h) *uma curva plana com contato maximal de ordem* n *para todo ramo* (f_i) *com* $i \in E$. *Temos que* $v_i(h) = v_{q+1}^i$, *se* $i \in E$ *e* $v_j(h) = \frac{I(f_i,f_j)}{e_q^i}$, *se* $j \notin E$.

Demonstração: É imediato da definição de $\mathbb{M}^q$, que $v_i(h) = v_{q+1}^i$ para todo $i \in E$. Escolha $i \in E$, tal que $\frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i} \geq \frac{\beta_{q+1}^k}{\beta_0^k}$ para todo $k \in E$ e tome $j \notin E$. Denotando o contato de (h) com (f_i) por α_{hi}, temos que $\alpha_{hi} = \frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i}$ para todo $i \in E$.

Se $\alpha_{ij} > \alpha_{hi}$, então $\alpha_{ij} > \frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i}$ e, em particular, teríamos que $\frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i} = \frac{\beta_{q+1}^j}{\beta_0^j}$(proposição 1.16). Neste caso, (h) teria contato maximal de ordem q com (f_j), ou seja, $j \in E$, uma contradição.

Se $\alpha_{ij} = \alpha_{hi} = \frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i}$, então pela proposição 1.16, temos que $\frac{\beta_k^i}{\beta_0^i} = \frac{\beta_k^j}{\beta_0^i}$ para todo $k = 0, ..., q$. Podemos ter $\frac{\beta_{q+1}^j}{\beta_0^j} \leq \frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i}$ ou $\frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i} < \frac{\beta_{q+1}^j}{\beta_0^j}$.

No primeiro caso, (h) também teria contato maximal de ordem q com (f_j), e assim $j \in E$, uma contradição. No segundo caso, podemos exibir uma curva plana (h') que teria contato maximal de ordem q com (f_l) para todo $l \in E$ e com (f_j), mas neste caso, E não seria maximal em $\mathcal{T}^q$, uma contradição.

Disto, segue que $\alpha_{ij} < \alpha_{hi} = \frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i}$, assim pela observação 1.19, temos que $\alpha_{hj} = \alpha_{ij}$.

Pela definição de contato entre ramos, temos que existe $k \in \{0, ..., r_{ij}\}$, tal que uma das possibilidades ocorre:

a) $\frac{\beta^i_k}{\beta^i_0} \leq \alpha_{hj} < \frac{\beta^i_{k+1}}{\beta^i_0}$, se $k < r_{ij}$,

b) $\alpha_{hj} = min\{\frac{\beta^i_{k+1}}{\beta^i_0}, \frac{\beta^j_{k+1}}{\beta^j_0}\}$, se $k = r_{ij}$.

No primeiro caso, temos pelo teorema 1.17 que

$$I(f_i, f_j) = v^j_0 \left(\frac{v^i_k}{n^i_0 ... n^i_{k-1}} + \frac{v^i_0 \alpha_{hj} - \beta^i_k}{n^i_1 ... n^i_k} \right) \text{ e } I(h, f_j) = v^j_0 \left(\frac{v^*_k}{n^*_0 ... n^*_{k-1}} + \frac{v^*_0 \alpha_{hj} - \beta^*_k}{n^*_1 ... n^*_k} \right).$$

Como $\alpha_{ij} = \alpha_{hj}$, pela proposição 1.16, temos $v^*_0 = \frac{v^i_0}{e^i_q}$, $v^*_k = \frac{v^i_k}{e^i_q}$, $\beta^*_k = \frac{\beta^i_k}{e^i_q}$ e $n^i_l = n^*_l$ para todo $l \leq q$. Segue assim que

$$v_j(h) = I(h, f_j) = \frac{I(f_i, f_j)}{e^i_q}.$$

No segundo caso, temos

$$I(f_i, f_j) = min\{e^j_k v^i_{k+1}, e^i_k v^j_{k+1}\} \text{ e } I(h, f_j) = min\{e^j_k v^*_{k+1}, e^*_k v^j_{k+1}\}.$$

Se $k = q$, então $\alpha_{hj} = \frac{\beta^j_{q+1}}{\beta^j_0}$, pois $\alpha_{hj} < \alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$, assim $I(f_i, f_j) = e^i_q v^j_{q+1}$. Além disto, $v^*_{q+1} = \infty$ e $e^*_q = 1$, logo $I(h, f_j) = v^j_{q+1}$ e o resultado segue.

Se $k < q$, então como $v^*_l = \frac{v^i_l}{e^i_q}$ e $e^*_l = \frac{e^i_l}{e^i_q}$ para todo $l \leq q$, temos que

$$I(h, f_j) = min\left\{ \frac{e^j_k v^i_{k+1}}{e^i_q}, \frac{e^i_k v^j_{k+1}}{e^i_q} \right\} = \frac{I(f_i, f_j)}{e^i_q}.$$

$\square$

Definição 3.4 *Seja* $q \geq 0$. *Definimos como* **valores de contato maximal** *de gênero* q *para* (f) *os elementos do conjunto*

$$V^q(f) = \{\underline{v}(h_E); E \in \mathbb{M}^q\},$$

onde (h_E) *denota uma curva com contato maximal de ordem* q *com* (f_i) *para todo* $i \in E$. *Por razões técnicas, para* $q = -1$ *definimos* $V^{-1}(f) = \{(v^1_0, ..., v^d_0)\}$ *caso todos os ramos de* (f) *tenham a mesma tangente e* $V^{-1}(f) = \emptyset$ *caso contrário. Os* **valores de contato maximal** *para* (f) *são os elementos do conjunto*

$$\overline{V}(f) = \bigcup_{q=-1}^{\infty} V^q(f) \subset \overline{S}.$$

Note que, se $m = max\{g_i;\ i \in I\}$, então $V^q(f) = \emptyset$ para $q > m$, e portanto $\overline{V}(f)$ é um conjunto finito.

Além disto, se $q = g_i$ para algum $i \in I$, então a curva plana (f_i) tem contato maximal de ordem g_i com ela mesma, conseqüentemente $v_i(f_i) = \infty$, e portanto, segue que $\overline{V}(f) \not\subset S$.

Deste modo, podemos particionar $\overline{V}(f)$ em duas partes: $V_\infty(f) = \overline{V}(f) \backslash \big(\overline{V}(f) \cap S\big)$ e $V(f) = \overline{V}(f) \cap S$. Assim fica claro, que $\overline{V}(f) = V_\infty(f) \cup V(f)$ e $V_\infty(f) = \{\underline{v}(f_1), ..., \underline{v}(f_d)\}$.

Exemplo 3.5 *Usando a mesma curva plana do exemplo 3.2, temos que:*

$$V^{-1}(f) = \{(4,3,3)\}, \textit{ pois } (f_1),\ (f_2) \textit{ e } (f_3) \textit{ possuem mesma tangente.}$$

$$V^0(f) = \{\underline{v}(h_0) = (6,4,4)\}.$$

$$V^1(f) = \{\underline{v}(h_1) = (13,8,8), \underline{v}(f_2) = (16,\infty,13), \underline{v}(f_3) = (16,13,\infty)\}.$$

$$V^2(f) = \{\underline{v}(f_1) = (\infty,16,16)\}.$$

Assim,

$$V(f) = \{(4,3,3),(6,4,4),(13,8,8)\}.$$

Observação 3.6 *Se λ é um maximal absoluto de S e $\lambda = \beta + \gamma$ com $\beta, \gamma \in S$, então temos que β e γ também são maximais absolutos de S. De fato, suponhamos que β não seja maximal absoluto de S. Assim, temos que $F_J(\beta) \neq \emptyset$ para algum $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, logo existe $\overline{\beta} \in S$ tal que, $\overline{\beta}_j = \beta_j$ se $j \in J$ e $\overline{\beta}_l > \beta_l$ se $l \in I \setminus J$. Mas desta forma, temos que $\overline{\beta} + \gamma \in F_J(\lambda)$, pois $\overline{\beta}_j + \gamma_j = \beta_j + \gamma_j = \lambda_j$ para todo $j \in J$ e $\overline{\beta}_l + \gamma_l > \beta_l + \gamma_l = \lambda_l$ para todo $l \in I \setminus J$, o que é uma contradição, pois λ é maximal absoluto de S.*

Como conseqüência da observação anterior, todo maximal absoluto λ de S pode ser escrito como $\lambda = \sum_{i=1}^{t} \lambda^i$, onde λ^i é um maximal absoluto que é irredutível em S, isto é, um elemento que não se decompõe como soma de dois elementos não nulos de S. Tais elementos serão chamados de **maximais absolutos irredutíveis** de S. Note que do teorema da geração 2.12 e do teorema da simetria 2.27, a determinação do semigrupo S se reduz ao cálculo dos maximais absolutos irredutíveis e do conhecimento do semigrupo de curvas planas com um ramo a menos.

Descrevemos agora, o conjunto de todos os maximais absolutos irredutíveis de um semigrupo de valores. Como veremos, no final do capítulo, este conjunto desempenhará papel crucial para a obtenção do semigrupo S. A proposição abaixo segue nesta direção.

Proposição 3.7 *Se $\mu \in V(f)$, então μ é um maximal absoluto irredutível de S.*

Demonstração: Se $\mu \in V^{-1}(f)$, então $\mu = (v_0^1, ..., v_0^d)$ e está claro que μ é um maximal absoluto irredutível de S. Obviamente, nesta situação, estamos supondo todos os ramos de (f) com a mesma tangente.

Assuma que $\mu \in V^q(f)$ com $q \geq 0$. Considere $E(\mu) = \{i \in I; \mu_i = v_{q+1}^i\}$ e seja $i \in E(\mu)$ um índice tal que $\frac{\beta_{q+1}^i}{\beta_0^i} \geq \frac{\beta_{q+1}^k}{\beta_0^k}$ para todo $k \in E(\mu)$. Se (h) é uma curva tal que $v_i(h) = v_{q+1}^i$, então pelo lema 3.1 (caso 3), segue que $v_k(h) = v_{q+1}^k$ para todo $k \in E(\mu)$ e conseqüentemente, pela proposição 3.3, temos que $\underline{v}(h) = \mu$, pois $v_j(h) = \frac{I(f_i, f_j)}{e_q^i}$ para todo $j \notin E(\mu)$. Em particular, $P_S(v_{q+1}^i) = \{\mu\}$, ou seja, $F_i^d(\mu) = \{\mu\}$, o que é equivalente a μ ser maximal de S.

Agora assuma que para algum $J \subset I$, $J \neq \emptyset$, existe $\beta \in F_J(\mu)$. Desde que $F_i^d(\mu) = \{\mu\}$, temos que $i \notin J$. Tomando $j \in J$, obtemos $\beta_j = \mu_j$ e $\beta_k > \mu_k$ para todo $k \in I \setminus J$. Aplicando a propriedade B para μ e β, segue que existe $\gamma \in S$, tal que $\gamma_i = \mu_i$, $\gamma_j > \mu_j$ e $\gamma_k \geq \mu_k$ para todo $k \in I \setminus \{i, j\}$, isto é, $\gamma \in F_i^d(\mu) \setminus \{\mu\}$, o que é uma contradição com o fato de $F_i^d(\mu) = \{\mu\}$. Logo μ é maximal absoluto.

Observando que v^i_{q+1} é um elemento do sistema mínimo de geradores de S_i, concluímos que v^i_{q+1} é irredutível, e conseqüentemente, μ é irredutível. Portanto, μ é um maximal absoluto irredutível de S. $\square$

Para o caso de dois ramos, a proposição anterior pode ser reescrita da seguinte forma:

Corolário 3.8 (Bayer) *Sejam $d = 2$ e $(\mu_1, \mu_2) = \mu \in S$ um ponto maximal. Se μ_1 ou μ_2 pertence ao sistema mínimo de geradores de S_1 ou S_2 respectivamente, então μ é um ponto maximal absoluto irredutível de S.*

Seja μ um maximal absoluto irredutível de S e tome (h) uma curva tal que $\mu = \underline{v}(h)$. No que segue, assumiremos sem perda de generalidade que $\alpha_{h1} \geq \alpha_{hi}$ para todo $i \in I$.

Os próximos resultados permitirão concluir que a recíproca do teorema anterior é verdadeira, caracterizando assim, todos os maximais absolutos irredutíveis de S.

Proposição 3.9 *Com as notações anteriores, suponha que $\alpha_{h1} < \alpha_{1,\ldots,d}$. Então $v(h) = (v^1_{r+1}, ..., v^d_{r+1})$, onde $\frac{\beta^*_r}{\beta^*_0} \leq \alpha_{h1} < \frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}$, $\frac{\beta^1_q}{\beta^1_0} \leq \alpha_{1,\ldots,d} < \frac{\beta^1_{q+1}}{\beta^1_0}$ e $r < q$.*

Demonstração: Note inicialmente que $\alpha_{h1} < \alpha_{1,\ldots,d} \leq \alpha_{1i}$ para todo $i = 2, ..., d$, assim, pela observação 1.19, temos que, $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$ para todo $i = 1, ..., d$.

Além disto, temos que

$$\alpha_{hi} < min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}\right\} \text{ para algum } i \Leftrightarrow \alpha_{hi} < min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0}\right\} \text{ para todo } j.$$

De fato, se $\alpha_{hi} < min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}\right\}$ e $\alpha_{hi} = min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0}\right\}$ para algum $j \neq i$, então como $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$, devemos ter que $\alpha_{hi} = \alpha_{h1} = \frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0}$.

Como $\frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0} = \alpha_{h1} = \alpha_{hi} < \alpha_{1,\ldots,d} \leq \alpha_{lk}$ para todo $l, k \in I$, temos que $\frac{\beta^l_{r+1}}{\beta^l_0} = \frac{\beta^k_{r+1}}{\beta^k_0}$ para todo $l, k \in I$. Assim

$$\alpha_{hi} = \alpha_{h1} < min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}\right\} = min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0}\right\} = \frac{\beta^j_{r+1}}{\beta^j_0} = \alpha_{h1} = \alpha_{hi},$$

o que é um absurdo.

Deste modo, temos a seguinte situação:

$a)$ Se $\alpha_{hi} < min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}\right\}$ para algum $i \in I$, então o mesmo vale para todo $i \in I$. Neste caso, teremos, pela proposição 1.16 e teorema 1.17 que $v_i(h) = e^*_{r-1}v^i_r + \left(\frac{\beta^i_0\alpha_{hi}-\beta^i_r}{e^i_r}\right)e^i_r e^*_r$, note que $\left(\frac{\beta^i_0\alpha_{hi}-\beta^i_r}{e^i_r}\right) \in \mathbb{N}$.

$b)$ Se $\alpha_{hi} = min\left\{\frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}, \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}\right\}$ para algum $i \in I$, então o mesmo vale para todo $i \in I$ e mais, $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}$ e conseqüentemente $v_i(h) = e^*_r v^i_{r+1}$ para todo $i \in I$.

Observe que, no caso $b)$, não podemos ter $r = q$. De fato, como $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}$, então $\alpha_{ij} \geq \alpha_{1,...,d} > \alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}$ para todo $j \neq i$, mas assim $\alpha_{ij} > \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$, ou seja, $\frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0} = \frac{\beta^j_{q+1}}{\beta^j_0}$ para todo j, isto é, $\alpha_{1,...,d} > \frac{\beta^j_{q+1}}{\beta^j_0}$ para todo j, o que contradiz o fato de que $\frac{\beta^1_q}{\beta^1_0} \leq \alpha_{1,...,d} < \frac{\beta^1_{q+1}}{\beta^1_0}$.

Seja em $a)$ ou em $b)$, da proposição 1.16, temos que $\frac{v_i(h)}{\beta^i_0} = \frac{v_j(h)}{\beta^j_0}$ para todos $i, j \in I$.

Veja que e^i_q divide $v_i(h)$ qualquer que seja o caso $a)$ ou $b)$. Deste modo, temos $v_i(h) \in \langle v^i_0, v^i_1, ..., v^i_q\rangle$, ou seja, $v_i(h) = \sum_{l=0}^{q}\lambda_l v^i_l$, com $\lambda_l \in \mathbb{N}$. Assim, $\underline{v}(h) = \sum_{l=0}^{q}\lambda_l(v^1_l, ..., v^d_l)$.

Mas $\underline{v}(h)$ é maximal absoluto irredutível, assim devemos ter $\lambda_l = 0$, a menos de um índice, e tal índice não nulo deve ser 1, ou seja, $\underline{v}(h) = (v^1_l, ..., v^d_l)$.

Lembrando que $\frac{\beta^*_r}{\beta^*_0} \leq \alpha_{hi} < \frac{\beta^*_{r+1}}{\beta^*_0}$, segue que $v^i_l = e^*_r v^i_{r+1}$, o que implica que $l = r+1$ e mais, que (h) tem gênero r e contato maximal de ordem r com cada (f_i), portanto $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{r+1}}{\beta^i_0}$ e $r < q$. $\square$

Proposição 3.10 *Com as mesmas notações introduzidas anteriormente, assuma que* $\alpha_{h1} = \alpha_{1,...,d}$. *Temos que* $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$ *e* $v(h) = (v^1_{q+1}, ..., v^d_{q+1})$ *para todo* $i \in I$ *e algum* $q \geq 0$.

Demonstração: Note que $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$ para todo $i \in I$. De fato, pelo comentário que antecede a proposição 3.9 estamos supondo que $\alpha_{h1} \geq \alpha_{hi}$, se α_{h1} fosse maior que α_{hi} para algum $i \in I$, $i \neq 1$, então teríamos que $\alpha_{1i} = \alpha_{hi} < \alpha_{h1}$, mas $\alpha_{h1} = \alpha_{1,\ldots,d} \leq min\{\alpha_{ij}; i \neq j \ e \ i,j \in I\} \leq \alpha_{1i}$, ou seja, $\alpha_{1i} < \alpha_{h1} \leq \alpha_{1i}$, o que seria um absurdo.

Provemos que $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$ para todo $i \in I$.

Como vimos $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$. Situemos α_{hi} da forma $\frac{\beta^*_q}{\beta^*_0} \leq \alpha_{hi} < \frac{\beta^*_{q+1}}{\beta^*_0}$, para algum $q \geq 0$. Podemos ter $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$ ou $\alpha_{hi} < \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$.

Se $\alpha_{hi} < \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$ para algum i, então $v_i(h) = \beta^*_0 \left(\frac{v^i_q}{n^i_0 \ldots n^i_{q-1}} + \frac{\beta^i_0 \alpha_{hi} - \beta^i_q}{n^i_1 \ldots n^i_q} \right) = e^*_{q-1} v^i_q + \left(\frac{\beta^i_0 \alpha_{hi} - \beta^i_q}{e^i_q} \right) e^*_q$.

Tomemos $j \in I$, tal que $\alpha_{ij} = \alpha_{1,\ldots,d} = \alpha_{ih}$. Podemos ter duas situações:

1) $\alpha_{hj} < \frac{\beta^j_{q+1}}{\beta^j_0}$ e assim $v_j(h) = e^*_{q-1} v^j_q + \left(\frac{\beta^j_0 \alpha_{hj} - \beta^j_q}{e^j_q} \right) e^*_q$ ou

2) $\alpha_{hj} = \frac{\beta^j_{q+1}}{\beta^j_0}$ e assim $v_j(h) = e^*_q v^j_{q+1}$.

Considere (h') uma curva tal que $\alpha_{h'i} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$. Note que $\alpha_{h'j} = \alpha_{hj}$ e $\alpha_{h'k} \geq \alpha_{hk}$ para todo $k \in I \setminus \{i,j\}$. Além disto, (h') pode ser construída de modo que $\beta^{h'}_l = \beta^*_l$ para todo $l < q$, em particular, teremos que $e^{h'}_l = e^*_l$ para todo $l < q$. Assim, teremos que

$$v_i(h') = e^{h'}_q v^i_{q+1} = e^*_q v^i_{q+1} > e^*_{q-1} v^i_q + \left(\frac{\beta^i_0 \alpha_{hi} - \beta^i_q}{e^i_q} \right) e^*_q = v_i(h),$$

$$v_j(h') = v_j(h) \text{ e}$$

$$v_k(h') \geq v_k(h).$$

Deste modo $\underline{v}(h)$ não seria maximal absoluto, o que é uma contradição.

Segue então, que $\alpha_{hi} = \frac{\beta^i_{q+1}}{\beta^i_0}$ para todo $i \in I$, e temos que $v_i(h) = e^*_q v^i_{q+1}$ para todo $i \in I$, ou seja, $\underline{v}(h) = e^*_q(v^1_{q+1}, \ldots, v^d_{q+1})$. Uma vez que $\underline{h}$ é maximal absoluto irredutível, devemos ter $e^*_q = 1$ e o resultado fica provado. $\square$

Observação 3.11 *Seja* (h) *uma curva plana irredutível tal que* $\alpha_{h1} > \alpha_{1i}$. *Se*

$\frac{\beta_r^*}{\beta_0^1} \leq \alpha_{h1} < \frac{\beta_{r+1}^*}{\beta_0^1}$, *então temos que* $\frac{I(f_1,f_i)}{e_r^1} = \frac{I(h,f_i)}{e_r^*}$. *De fato, como* $\alpha_{h1} > \alpha_{1i}$ *segue que* $\alpha_{1i} = \alpha_{hi}$. *Situando* $\frac{\beta_s^i}{\beta_0^i} \leq \alpha_{hi} < \frac{\beta_{s+1}^i}{\beta_0^i}$, *temos que*

$$\frac{I(f_1,f_i)}{v_0^1} = \frac{v_s^i}{n_0^i \ldots n_{s-1}^i} + \frac{v_0^i \alpha_{1i} - \beta_s^i}{n_1^i \ldots n_s^i} = \frac{v_s^i}{n_0^i \ldots n_{s-1}^i} + \frac{v_0^i \alpha_{hi} - \beta_s^i}{n_1^i \ldots n_s^i} = \frac{I(h,f_i)}{v_0^*}.$$

Note que, pela proposição 1.16, temos que $\frac{v_0^1}{v_0^*} = \frac{e_j^1}{e_j^*}$ *para todo* $j = 0, ..., k$, *com* $k = s-1$ *se* $\alpha_{hi} = \frac{\beta_s^i}{\beta_0^i}$ *e* $k = s$ *se* $\alpha_{hi} > \frac{\beta_s^i}{\beta_0^i}$. *Segue assim, que*

$$\frac{I(f_1,f_i)}{e_r^1} = \frac{I(h,f_i)}{e_r^*}.$$

Proposição 3.12 *Com as mesmas hipóteses dos resultados anteriores, assuma que* $\alpha_{h1} > \alpha_{1,\ldots,d}$, *onde* $\frac{\beta_r^*}{\beta_0^*} \leq \alpha_{h1} < \frac{\beta_{r+1}^*}{\beta_0^*}$, *então temos que* $I(h,f_i) = e_r^* v_{r+1}^i$ *para todos os índices* $i \in I$ *para os quais* $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$.

Demonstração: Basta mostrar que $I(h,f_1) = e_r^* v_{r+1}^1$.

Sabemos que:

$$1)\ I(h,f_1) = e_r^* v_{r+1}^1, \text{ se } \alpha_{h1} = \frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}.$$

$$2)\ I(h,f_1) = e_{r-1}^* v_r^1 + (v_0^1 \alpha_{h1} - \beta_0^1) e_r^*, \text{ se } \alpha_{h1} < \frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}.$$

Suponha que $I(h,f_1) \neq e_r^* v_{r+1}^1$, assim temos que $I(h,f_1) = e_{r-1}^* v_r^1 + (v_0^1 \alpha_{h1} - \beta_r^1) e_r^* < e_r^* v_{r+1}$.

Considere agora (h') uma curva plana irredutível, cuja parametrização coincide com a de (h) até o termo de contato entre (h) e (f_1) e acrescentemos termos de modo que $\alpha_{h'1} = \frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}$. Deste modo, temos que $v_1(h') = e_r^* v_{r+1}^1 > v_1(h)$, $v_k(h') \geq v_k(h)$ para todo $k \in I \setminus \{1\}$ e além disto, se tomarmos $\emptyset \neq J \subset I \setminus \{1\}$ tal que $\alpha_{j1} = \alpha_{1,\ldots,d}$ para todo $j \in J$, que certamente existe, teremos que $\alpha_{jh'} < \alpha_{1h}$. Pela observação 3.11, temos que

$$\frac{v_j(h')}{e_r^{h'}} = \frac{v_j(f_1)}{e_r^1} = \frac{v_j(h)}{e_r^*}.$$

Como (h) e (h') coincidem até α_{h1}, temos que $e_r^{h'} = e_r^*$ e assim $v_j(h') = v_j(h)$. Desta forma, temos que $\underline{v}(h') \in F_J(\underline{v}(h))$, o que seria uma contradição com o fato de $v(h)$ ser maximal absoluto. Portanto, segue que $v_1(h) = e_r^* v_{r+1}^1$, mais geralmente $v_i(h) = e_r^* v_{r+1}^i$, para todos os índices para os quais $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$. $\square$

O próximo teorema caracteriza, finalmente, todos os maximais absolutos irredutíveis de S.

Teorema 3.13 *Temos que $\mu \in S$ é um maximal absoluto irredutível se, e somente se, μ é um dos valores de contato maximal, isto é, $\mu \in V(f)$.*

Demonstração: $(\Leftarrow)$ Segue da proposição 3.7.

$(\Rightarrow)$ Seja (h) é uma curva plana irredutível, tal que $v(h) = \mu$ e suponha sem perda de generalidade que $\alpha_{h1} \geq \alpha_{hi}$ para todo $i \in I$.

Se $\alpha_{h1} \leq \alpha_{1,\ldots,d}$, então o resultado segue das proposições 3.9 e 3.10. Suponha então que $\alpha_{h1} > \alpha_{1,\ldots,d}$ e situe $\frac{\beta_r^*}{\beta_0^*} < \alpha_{h1} < \frac{\beta_{r+1}^*}{\beta_0^*}$.

Se $e_r^* > 1$, então podemos considerar uma curva plana irredutível (h') com gênero r e contato maximal de ordem r com (h), a saber, se (h) admite uma parametrização da forma

$$\begin{cases} x = t^{v_0^*} \\ y = t^{v_1^*} + \sum\limits_{i > v_1^*} a_i t^{i^*}. \end{cases} ,$$

Consideramos a curva (h') como sendo a curva definida por

$$\begin{cases} x = t^{\frac{v_0^*}{e_r^*}} \\ y = t^{\frac{v_1^*}{e_r^*}} + \sum\limits_{v_1^* < i < \beta_{r+1}^*} a_i t^{\frac{i^*}{e_r^*}}. \end{cases}$$

Temos que $\alpha_{hh'} > \alpha_{h1} \geq \alpha_{hi}$, então pela observação 3.11, segue que

$$\frac{v_i(h)}{e_r^*} = \frac{v_i(h')}{e_r^{h'}}$$

mas se (h') tem gênero r, temos que $e_r^{h'} = 1$ e $v_i(h) = e_r^* v_i(h')$. Uma vez que $v(h') \in S$, teríamos que $v(h)$ não poderia ser maximal absoluto irredutível, portanto temos que $e_r^* = 1$, ou seja, (h) tem gênero r.

Além disto, se $\alpha_{hi} < \alpha_{h1}$, então pela observação 3.11, temos que

$$I(f_i, h) = \tfrac{I(f_1, f_i)}{e_r^1}.$$

Se $\alpha_{hi} = \alpha_{h1}$, então pela proposição 3.12, temos que $I(f_i, h) = v_{r+1}^i$.

Agora considere $E(\mu) = \{k \in I; I(f_i, h) = v_{r+1}^i\} \supset \{k \in I; \alpha_{hk} = \alpha_{h1}\}$. Vamos mostrar que $E(\mu) \in \mathbb{M}^r$.

Se existisse $j \in I$, $j \notin E(\mu)$ tal que $E' = E(\mu) \cup \{j\} \in \mathcal{T}^r$, então deveríamos ter $\alpha_{hj} < \alpha_{h1}$ e assim $\alpha_{hj} = \alpha_{1j}$. Como $E' \in \mathcal{T}^r$, existiria (h') de gênero r que teria contato maximal de ordem r com (f_i) e (f_j), em virtude do lema 3.1, deveríamos ter que $\alpha_{1j} = min\left\{\frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{r+1}^j}{\beta_0^j}\right\}$ e assim $\alpha_{hj} = min\left\{\frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}, \frac{\beta_{r+1}^j}{\beta_0^j}\right\} < \alpha_{h1} = \frac{\beta_{r+1}^1}{\beta_0^1}$. Conseqüentemente $\alpha_{hj} = \frac{\beta_{r+1}^j}{\beta_0^j}$ e $I(f_j, h) = v_{r+1}^j$, acarretando que $j \in E(\mu)$, um absurdo. Portanto $E(\mu) \in \mathbb{M}^r$ e o teorema segue. □

O teorema abaixo é uma outra versão do teorema da geração 2.12, levando-se em conta os resultados anteriores que descrevem os pontos maximais absolutos irredutíveis, bem como o teorema da simetria 2.27.

Teorema 3.14 *Seja $V(f) = \{\mu^1, ..., \mu^m\}$ os valores de contato maximal para (f), isto é, o conjunto dos pontos maximais absolutos irredutíveis do semigrupo S. Considere o conjunto*

$$\mathcal{L} = \left\{\mathcal{E} = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mu^i; \lambda_i \in \mathbb{N},\ \mathcal{E} < \tau\right\}$$

e $\mathcal{L}' = \{\tau - \gamma; \gamma \in \mathcal{L}\}$. Seja $\beta \in \mathbb{N}^d$ um elemento tal que $pr_J(\beta) \in pr_J(S)$ para todo $J \subset I$ com $\sharp J = d - 1$. Então temos:

$$\beta \in S \text{ se, e somente se, } \beta \notin \overline{F}(\delta) \text{ para todo } \delta \in \mathcal{L}'.$$

Demonstração: Para provar a necessidade, basta observar que $\mathcal{L} \subset S$ e então, pelo lema 2.24, temos que, $F(\tau - \gamma) = \emptyset$ para todo $\gamma \in \mathcal{L}$. Por outro lado, dado que todos os maximais absolutos estão contidos em $\mathcal{L}$ então, pelo teorema da simetria 2.27, todos os maximais relativos estão contidos em $\mathcal{L}'$ e portanto, a condição suficiente segue do teorema da geração 2.12. $\square$

Note no entanto, que o conjunto $\mathcal{L}$ descrito no teorema anterior pode conter uma quantidade muito maior de pontos do que o conjunto dos pontos maximais absolutos de S, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 3.15 *Considere (f) a curva plana dada no exemplo 3.2. Como vimos no exemplo 3.5,*

$$V(f) = \{(4,3,3),(6,4,4),(13,8,8)\}.$$

Assim, o conjunto $\mathcal{L}$ é

$$\begin{gathered}\mathcal{L} = \{(40,26,26),(20,14,14),(14,10,10),(46,30,30),(20,15,15),(33,23,23),\\ (26,19,19),(46,32,32),(26,18,18),(27,18,18),(33,22,22),(0,0,0),\\ (13,8,8),(26,16,16),(39,24,24),(6,4,4),(19,12,12),(32,20,20),\\ (45,28,28),(12,8,8),(25,16,16),(38,24,24),(18,12,12),(31,20,20),\\ (44,28,28),(24,16,16),(37,24,24),(30,20,20),(43,28,28),(36,24,24),\\ (42,28,28),(4,3,3),(17,11,11),(30,19,19),(43,27,27),(10,7,7),\\ (23,15,15),(26,23,23),(16,11,11),(29,19,19),(42,27,27),(22,15,15),\\ (40,27,27),(46,31,31),(8,6,6),(21,14,14),(34,22,22),(39,26,26),\\ (32,22,22),(45,30,30),(38,26,26),(44,30,30),(12,9,9),(25,17,17),\\ (38,25,25),(18,13,13),(31,21,21),(44,29,29),(24,17,17),(37,25,25),\\ (30,21,21),(43,29,29),(36,25,25),(42,29,29),(16,12,12),(29,20,20),\\ (22,16,16),(35,24,24),(28,20,20),(41,28,28),(34,24,24),(40,28,28),\end{gathered}$$

$$(39,27,27),(32,23,23),(45,31,31),(38,27,27),(44,31,31),(24,18,18),$$

$$(37,26,26),(30,22,22),(43,30,30),(36,26,26),(42,30,30),(28,21,21),$$

$$(41,29,29),(34,25,25),(40,29,29),(46,33,33),(32,24,24),(45,32,32),$$

$$(38,28,28),(44,32,32),(36,27,27),(42,31,31),(40,30,30),(44,33,33)\}.$$

$$(35,23,23),(28,19,19),(41,27,27),(34,23,23)\}.$$

No entanto, o conjunto dos pontos maximais absolutos de $S(f)$ é

$$\{(4,3,3),(27,18,18),(6,4,4),(17,11,11),(18,13,13),(8,6,6),$$

$$(10,7,7),(19,12,12),(25,17,17),(12,9,9),(13,8,8),(21,14,14),$$

$$(14,10,10),(23,15,15),(31,21,21),(0,0,0)\},$$

que foi computado por meio de uma rotina implementada em Maple.

Bibliografia

[B] Bayer, V. A. dos Santos, **Semigrupo associado a duas curvas irredutíveis algebróides**. Tese de doutorado. IMPA. 1984.

[D] Delgado de La Mata, F., **The semigroup of values of a curve singularity with several branches**. Manuscripta Math. 59, 347-374. 1987.

[G] Garcia, A. L. P., **Semigrupos associados a pontos singulares de curvas algebróides planas redutíveis.** Tese de doutorado. IMPA. 1980.

[H] Hefez, A., **Irreducible plane curve singularities.** Real and Complex Singularities, 1-120. Lectures Notes in Pure and Appl. Math., 232 Dekker, New York, 2003.

■