

**Uma Equação Diferencial de Segunda Ordem com  
Múltiplos Pontos de Fronteira via Teorema de  
Krasnoselskii**

**Emerson Vitor Castelani**

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

**Orientador: Prof. Dr. Ma To Fu**

Maringá - PR

2006

# Uma Equação Diferencial de Segunda Ordem com Múltiplos Pontos de Fronteira via Teorema de Krasnoselskii

por

**Emerson Vitor Castelani**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Aprovada por:

Prof. Dr. Ma To Fu (UEM)

(Orientador)

Prof. Dr. Olimpio Hiroshi Miyagaki (UFV)

Prof. Dr. João Batista de Mendonça Xavier (UFPR)

Prof. Dr. Doherty Andrade (UEM)

Maringá, 17 de fevereiro de 2006

*Este trabalho é dedicado a meus pais Mauri e Lourdes e a minha irmã Giselle.*

# Agradecimentos

Ao Professor Ma To Fu pela orientação, amizade e apoio necessários para que este trabalho pudesse ser concluído.

A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática da UEM, em especial, as pessoas que contribuíram diretamente na minha formação acadêmica.

Aos componentes da banca examinadora e a CAPES pelo auxílio financeiro.

E finalmente a minha família e aos verdadeiros amigos por todo apoio que me deram.

## Resumo

No presente trabalho apresentamos alguns teoremas da teoria de pontos fixos, dentre eles, os teoremas de ponto fixo de Krasnoselskii para cones em espaços de Banach e a Alternativa de Leray-Schauder. Esses resultados são aplicados no estudo de soluções positivas para a classe de problemas de valor de contorno de segunda ordem com múltiplos pontos de fronteira

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})), \end{cases}$$

onde  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas, possivelmente não-lineares, e  $\eta_1, \dots, \eta_{m-2}$  são dados em  $(0, 1)$ .

## Abstract

In this work we present some theorems from fixed point theory, among them, the fixed point theorems of Krasnoselskii to cones in Banach spaces and the Alternative of Leray-Schauder. These results are applied in the study of positive solutions to the class of second order multi-point boundary value problems

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0, & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, & u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})), \end{cases}$$

where  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  and  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  are continuous functions, possibly nonlinear, and  $\eta_1, \dots, \eta_{m-2}$  are given in  $(0, 1)$ .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>2</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>4</b>
1.1 Alguns Conceitos Topológicos . . . . .	4
1.2 Os Teoremas de Brouwer e Schauder . . . . .	5
<b>2 Teoremas de Ponto Fixo em Cones</b>	<b>19</b>
2.1 Aplicações essenciais . . . . .	19
2.2 Alternativa de Leray-Schauder . . . . .	21
2.3 Teoremas de Ponto Fixo de Krasnoselskii . . . . .	25
<b>3 Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Múltiplos Pontos de Fronteira</b>	<b>35</b>
3.1 Existência e Multiplicidade de Soluções via Alternativa de Leray-Schauder	35
3.2 Soluções Positivas via Teorema de Krasnoselskii . . . . .	39
<b>4 Soluções Numéricas</b>	<b>45</b>
4.1 Resultados de Existência . . . . .	45
4.2 Soluções Iterativas . . . . .	47
4.3 Método de Tiros . . . . .	49

# Introdução

A aplicação de teoremas de ponto fixo no estudo de equações diferenciais não lineares é um procedimento atual e efetivo. Mais recentemente, diversos estudos sobre a existência de soluções positivas para equações diferenciais ordinárias foram realizados, sendo motivados pela publicação do livro de D. Guo e V. Lakshmikantham [7], onde é apresentada novas aplicações do teorema de Krasnoselskii [11] para cones em espaços de Banach.

No Capítulo 1 apresentamos os teoremas de ponto fixo de Banach, Brouwer e Schauder. Os teoremas de Krasnoselskii para cones são apresentados no Capítulo 2. Seguiremos a metodologia apresentada no livro de Agarwal, Meehan e O'Regan [1].

Os teoremas de pontos fixos estudados nos Capítulos 1 e 2 são então aplicados ao estudo de soluções positivas de uma classe de equações diferenciais de segunda ordem com múltiplo pontos de fronteira. Mais precisamente, no Capítulo 3, estudamos problemas do tipo

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0 & 0 < t < 1, \\ u(0) = 0, \quad u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases}$$

onde  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções contínuas possivelmente não-lineares e  $\eta_1, \dots, \eta_{m-2} \in (0, 1)$ . Esta classe de problemas tem sido muito estudada por diversos autores, entre outros, [9, 8, 10]. Transformando-o numa equação integro-diferencial da forma

$$u(t) = h(t) + \int_0^1 k(t, s)f(s, u(s), u'(s))ds, \text{ para } t \in [0, 1],$$

os resultados são obtidas por meio do Teorema de Ponto Fixo de Krasnoselskii e da Alternativa de Leray-Schauder. Os resultados do Capítulos 3 complementam estudos

anteriores contidos em [10, 15, 16].

No Capítulo 4 apresentamos dois algoritmos computacionais para obtenção de soluções numéricas de problemas de segunda ordem com três pontos de fronteira. Não há registro de estudos numéricos para essa classe de problemas. Os resultados foram aceitos para publicação em forma de artigo, na revista *Communications in Applied Analysis* (ver [3]).

# Capítulo 1

## Preliminares

No presente capítulo apresentaremos conceitos necessários para o bom desenvolvimento da dissertação. Em particular, apresentaremos os teoremas de ponto fixo de Brouwer e de Schauder.

### 1.1 Alguns Conceitos Topológicos

**Definição 1.1.** *Dois espaços topológicos  $X$  e  $Y$  são homeomorfos se existe uma bijeção  $f : X \rightarrow Y$  contínua com inversa contínua. A aplicação  $f$  é dita um homeomorfismo.*

**Definição 1.2.** *Um espaço topológico  $X$  tem a propriedade do ponto fixo se, toda aplicação contínua  $f : X \rightarrow X$  tem um ponto fixo.*

**Teorema 1.3.** *Se  $X$  tem a propriedade do ponto fixo e  $X$  é homeomorfo a  $Y$  então  $Y$  tem a propriedade do ponto fixo.*

**Demonstração:** Sejam  $h : X \rightarrow Y$  um homeomorfismo e  $g : Y \rightarrow Y$  uma aplicação contínua. Devemos mostrar que  $g$  tem ponto fixo em  $Y$ . Note que

$$h^{-1} \circ g \circ h : X \rightarrow X$$

é contínua. Como  $X$  tem a propriedade do ponto fixo, existe  $x_0 \in X$  com

$$h^{-1} \circ g \circ h(x_0) = x_0.$$

Logo,  $g(y_0) = y_0$  onde  $y_0 = h(x_0)$  e portanto,  $Y$  tem a propriedade do ponto fixo.  $\square$

**Definição 1.4.** *Um subconjunto  $A$  de um espaço topológico  $X$  é um retrato de  $X$  se existe uma aplicação contínua  $r : X \rightarrow A$  com  $r(a) = a$  para todo  $a \in A$ . A aplicação  $r$  é denominada retração.*

**Teorema 1.5.** *Se  $X$  tem a propriedade do ponto fixo e  $A$  é um retrato de  $X$  então  $A$  tem a propriedade do ponto fixo.*

**Demonstração:** Sejam  $f : A \rightarrow A$  uma aplicação contínua e  $r : X \rightarrow A$  uma retração. Vamos mostrar que  $f$  tem um ponto fixo em  $A$ . Observe que

$$f \circ r : X \rightarrow A \subset X$$

é contínua. Como  $X$  tem a propriedade do ponto fixo, segue que existe  $x_0 \in X$  com  $f \circ r(x_0) = x_0$ . Como  $f(r(x_0)) \in A$  temos que  $x_0 \in A$ . Assim,  $r(x_0) = x_0$  e conseqüentemente,  $f(x_0) = x_0$  onde  $x_0 \in A$ .

## 1.2 Os Teoremas de Brouwer e Schauder

Nesta seção vamos devotar nossos esforços em demonstrar o teorema de ponto fixo de Brouwer, bem como uma generalização do mesmo, isto é, o teorema de Schauder, o qual será de grande utilidade posteriormente.

**Teorema 1.6.** *(Brouwer) A bola fechada unitária no  $\mathbb{R}^n$  tem a propriedade do ponto fixo.*

A demonstração deste resultado será feita de maneira muito construtiva, ou seja, vamos apresentar uma série de resultados que serão necessários na prova. No que segue, estaremos considerando o  $\mathbb{R}^n$  munido do produto interno

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

e norma

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Também,  $B^n$  e  $S^{n-1}$  denotarão, respectivamente, a bola fechada unitária e a esfera unitária no  $\mathbb{R}^n$ :

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\} \text{ e } S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| = 1\}.$$

**Definição 1.7.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Uma aplicação  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita de classe  $C^1$  se esta tem uma extensão contínua em uma vizinhança aberta de  $A$  na qual a extensão é continuamente diferenciável.*

**Teorema 1.8.** *Sejam  $A$  um subconjunto compacto do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  em  $A$ . Então existe uma constante  $L \geq 0$  (constante de Lipschitz) com*

$$\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|, \text{ para todo } x, y \in A.$$

**Demonstração:** Como  $f$  é de classe  $C^1$  em  $A$  então pela desigualdade do valor médio (ver [12]), dados  $x, y \in A$  existe  $a \in A$  tal que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \left[ \sup_{t \in (0,1)} \|f'(tx + (1-t)y)\| \right] \|x - y\|.$$

Então,  $\|f(x) - f(y)\| \leq L\|x - y\|$ .  $\square$

**Teorema 1.9.** *Sejam  $A$  um domínio limitado e fechado (isto é, o fecho de um aberto conexo) em  $\mathbb{R}^n$  e  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^1$  em  $A$ . Então existe um intervalo  $(-\epsilon, \epsilon)$ , para algum  $\epsilon > 0$ , no qual a função*

$$\phi : t \mapsto \text{Vol}(f_t(A))$$

*é um polinômio de grau menor ou igual a  $n$ ; aqui  $f_t : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dado por  $f_t(x) = x + tF(x)$  e  $\text{Vol}$  refere-se ao volume de Lebesgue no  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Ver [5].  $\square$

**Definição 1.10.** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$ . Um campo vetorial  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dito regular se  $f(x) \neq 0$ ,  $\forall x \in A$ , e unitário se  $\|f(x)\| = 1$ ,  $\forall x \in A$ . O campo  $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dito tangente a  $S^{n-1}$  se  $\langle x, f(x) \rangle = 0$ ,  $\forall x \in S^{n-1}$ .*

**Teorema 1.11.** *Suponha que  $F : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$  é um campo vetorial unitário de classe  $C^1$  que é tangente a  $S^{n-1}$ . Então para  $t > 0$  suficientemente pequeno,*

$$f_t(S^{n-1}) = (1 + t^2)^{\frac{1}{2}} S^{n-1},$$

onde  $f_t : x \mapsto x + tF(x)$ .

**Demonstração:** Defina

$$F^*(x) = \|x\|F\left(\frac{x}{\|x\|}\right), x \in \mathbb{R}^n - \{0\}.$$

É imediato que tal aplicação está bem definida e é de classe  $C^1$ . Considere

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{2} \leq \|x\| \leq \frac{3}{2}\}.$$

Sendo  $F^*$  de classe  $C^1$  e  $A$  compacto, temos do Teorema 1.8 que  $F^*$  é Lipschitziana em  $A$ , digamos de constante  $L$ . Assim, suponha  $t > 0$  com  $t < \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{L}\}$ . Fixe  $z \in S^{n-1}$  e defina  $G : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por  $G(x) = z - tF^*(x)$ . Agora, como  $\|F(y)\| = 1$  para  $y \in S^{n-1}$  e  $|t| < \frac{1}{3}$  temos que  $G : A \rightarrow A$ . Também, dados  $x, y \in A$  temos

$$\begin{aligned} \|G(x) - G(y)\| &= |t|\|F^*(x) - F^*(y)\| \\ &\leq |t|L\|x - y\|. \end{aligned}$$

Uma vez que  $|t|L < 1$  segue que  $G$  é uma contração, logo, pelo teorema de Banach temos que  $G$  tem ponto fixo  $x \in A$ , ou seja,

$$x + tF^*(x) = z.$$

Agora, como  $1 = \langle x + tF^*(x), x + tF^*(x) \rangle$  e usando o fato de que  $\|F(u)\| = 1, \forall u \in S^{n-1}$  e  $\langle v, F(v) \rangle = 0, \forall v \in S^{n-1}$ , segue imediatamente que  $\|x\| = (1 + t^2)^{-1/2}$ . Daí, temos que  $y = (1 + t^2)^{1/2}x \in S^{n-1}$ , e portanto,  $f_t(y) = y + tF(y) = (1 + t^2)^{1/2}z$ . Assim, mostramos que  $(1 + t^2)^{1/2}S^{n-1} \subset f_t(S^{n-1})$  para  $0 < t < \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{L}\}$ . Agora, devemos mostrar que  $f_t(S^{n-1}) \subset (1 + t^2)^{1/2}S^{n-1}$ . Dessa forma, seja  $z \in f_t(S^{n-1})$  então  $z = y + tF(y)$  onde

$y \in S^{n-1}$ . Assim,

$$\begin{aligned}
\|z\| &= \|y + tF(y)\| \\
&= \langle y + tF(y), y + tF(y) \rangle^{1/2} \\
&= (\langle y, y \rangle + t^2 \langle F(y), F(y) \rangle + 2t \langle y, F(y) \rangle)^{1/2} \\
&= (1 + t^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

o que prova a inclusão desejada, e portanto,  $f_t(S^{n-1}) = (1 + t^2)^{1/2} S^{n-1}$ .  $\square$

**Teorema 1.12.** *Seja  $k \in \{1, 2, \dots\}$ . Então não existe campo vetorial unitário de classe  $C^1$  tangente a  $S^{2k}$ .*

**Demonstração:** Suponha que exista tal campo vetorial, digamos  $F : S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$ . Sejam  $a, b \in \mathbb{R}$  tais que,  $0 < a < 1 < b$  e considere  $A = \{x \in \mathbb{R}^{2k+1}; a \leq \|x\| \leq b\}$  e  $F^* : A \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  dada por

$$F^*(x) = \|x\| F\left(\frac{x}{\|x\|}\right).$$

Sendo  $F$  tangente a  $S^{2k}$ , temos que  $F^*$  é tangente a qualquer esfera concêntrica com  $S^{2k}$  que está contida em  $A$ . De fato, seja  $S(c)$  uma esfera concêntrica a  $S^{2k}$  e raio  $c$ , onde  $a < c < b$ . Seja  $x \in S(c)$  então  $x = c \frac{x}{\|x\|}$ , logo

$$\langle x, F^*(x) \rangle = \left\langle c \frac{x}{\|x\|}, \|x\| F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\rangle = c^2 \left\langle \frac{x}{\|x\|}, F\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \right\rangle = 0c^2 = 0.$$

Seja  $f_t(x) = x + tF^*(x)$ , então aplicando o Teorema 1.11 a cada esfera contida em  $A$  concluímos que,

$$f_t(A) = (1 + t^2)^{1/2} A$$

para  $t > 0$  suficientemente pequeno. Conseqüentemente,

$$\text{Vol}(f_t(A)) = (1 + t^2)^{\frac{2k+1}{2}} \text{Vol}(A).$$

Entretanto,  $(1 + t^2)^{\frac{2k+1}{2}}$  não coincide com um polinômio em nenhuma vizinhança de zero, o que contradiz o Teorema 1.9.  $\square$

**Teorema 1.13.** *Seja  $k \in \{1, 2, 3, \dots\}$ . Então não existe campo vetorial contínuo, regular, tangente a  $S^{2k}$ .*

**Demonstração:** Suponha que exista um campo vetorial  $F$  com estas características. Como  $F$  é regular e contínuo segue que

$$m = \min\{\|F(x)\|; x \in S^{2k}\} > 0.$$

Pelo teorema de Aproximação de Weierstrass<sup>1</sup> (aplicado a cada componente de  $F$ ) existe um campo vetorial  $P : S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  tal que

$$\|P(x) - F(x)\| < \frac{m}{2}, \forall x \in S^{2k},$$

onde cada componente de  $P$  é um polinômio (e conseqüentemente de classe  $C^\infty$ ). Também, como

$$\|P(x)\| \geq \|F(x)\| - \|P(x) - F(x)\| > \frac{m}{2}, \forall x \in S^{2k},$$

então  $P$  é regular. Agora, considere o seguinte campo vetorial

$$\begin{aligned} Q : S^{2k} &\rightarrow \mathbb{R}^{2k+1} \\ x &\mapsto P(x) - \langle P(x), x \rangle x. \end{aligned}$$

Posto que  $P$  é de classe  $C^\infty$  segue que  $Q$  também é de classe  $C^\infty$ . Ainda,  $Q$  é tangente a  $S^{2k}$ . De fato, seja  $x \in S^{2k}$ , então

$$\langle x, Q(x) \rangle = \langle x, P(x) - \langle P(x), x \rangle x \rangle = \langle x, P(x) \rangle - \langle P(x), x \rangle \|x\|^2 = 0,$$

logo a afirmação. Além disso, para cada  $x \in S^{2k}$  e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|Q(x)\| &\geq \|P(x)\| - \|Q(x) - P(x)\| \\ &> \frac{m}{2} - |\langle P(x), x \rangle| = \frac{m}{2} - |\langle P(x) - F(x), x \rangle| \\ &\geq \frac{m}{2} - \|P(x) - F(x)\| > 0, \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Tal resultado pode ser visto em [12].

o que mostra que  $Q$  é regular. Dessa forma, podemos definir o campo

$$R : S^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$$

$$x \mapsto \frac{Q(x)}{\|Q(x)\|}$$

que é contínuo, unitário e tangente a  $S^{2k}$ , o que contradiz o teorema anterior.  $\square$

O espaço  $\mathbb{R}^n$  pode ser visto como um subespaço de  $\mathbb{R}^{n+1}$  por identificar cada ponto  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  com o ponto  $(x_1, \dots, x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ . Dessa forma, qualquer ponto de  $\mathbb{R}^{n+1}$  pode ser representado como  $(x, x_{n+1})$  com  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $x_{n+1} \in \mathbb{R}$ . Com esta notação, podemos dividir a esfera unitária  $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  em hemisfério superior

$$S_+^n = \{(x, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \geq 0\}$$

e o hemisfério inferior

$$S_-^n = \{(x, x_{n+1}) \in S^n; x_{n+1} \leq 0\}.$$

A esfera unitária

$$S^{n-1} = S_+^n \cap S_-^n$$

é o equador. Sejam  $e_{n+1} = (0, \dots, 0, 1)$  (pólo norte) e  $-e_{n+1} = (0, \dots, 0, -1)$  (pólo sul).

Como sabemos, a projeção estereográfica de  $e_{n+1}$  em  $S^n$  é a aplicação

$$S_+ : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$$

$$x \mapsto \left( \frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{\|x\|^2 - 1}{1 + \|x\|^2} \right),$$

que é de classe  $C^\infty$  e transforma  $B^n$  em  $S_-^n$ . Além disso,  $S_+(x) = x, \forall x \in S^{n-1}$ . Da mesma forma, definimos a projeção  $S_-$  de  $-e_{n+1}$  em  $S^n$  pela aplicação

$$S_- : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$$

$$x \mapsto \left( \frac{2x}{1 + \|x\|^2}, \frac{1 - \|x\|^2}{1 + \|x\|^2} \right).$$

Tais projeções serão usadas na demonstração do teorema central desta seção.

*Demonstração do Teorema de Brouwer:* Vamos supor inicialmente que  $n = 2k$ . Suponhamos também que exista uma aplicação contínua  $f : B^{2k} \rightarrow B^{2k}$  que não tem ponto fixo. Defina o campo vetorial  $G : B^{2k} \rightarrow \mathbb{R}^{2k+1}$  por

$$G(x) = x - f(x).$$

É claro que  $G$  é regular em  $B^{2k}$ . Ainda, para cada  $x \in S^{2k-1}$ , temos

$$\langle G(x), x \rangle = 1 - \langle x, f(x) \rangle > 0.$$

De fato, por Cauchy-Schwarz temos que,  $\langle x, f(x) \rangle \leq \|x\| \|f(x)\| \leq 1$ . Agora, se  $\langle x, f(x) \rangle = 1$  então  $f(x) = x$  o que não ocorre, logo devemos ter  $\langle x, f(x) \rangle < 1$ , provando a afirmação. Dessa forma, está bem definida a aplicação

$$F(x) = x - \left( \frac{1 - \|x\|^2}{1 - \langle x, f(x) \rangle} \right) f(x), \quad x \in B^{2k}. \quad (1.1)$$

Observe que, se  $F(x) = 0$  com  $x \in B^{2k}$  então  $0, x$  e  $f(x)$  são colineares, logo, pela fórmula de projeção ortogonal (vide [?] ou [4]), temos

$$\langle x, f(x) \rangle x = \|x\|^2 f(x). \quad (1.2)$$

Assim, por (1.1) devemos ter  $f(x) = x$  o que é um absurdo. Portanto,  $F$  é regular em  $B^{2k}$ . Observe ainda que  $F(x) = x$  se  $x \in S^{2k-1}$ .

Para cada  $x \in B^{2k}$  considere o conjunto  $\{x + tF(x); t \in [0, 1]\}$ . A imagem deste conjunto sob  $S_+$  é um arco diferenciável com ponto inicial pertencente a  $S_-^{2k}$ . Assim, defina o campo vetorial  $T_-$  em  $S_-^{2k}$  por

$$\begin{aligned} T_-(y) &= \left\{ \frac{d}{dt} S_+(x + tF(x)) \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2} ((1 + \|x\|^2)F(x) - 2\langle x, F(x) \rangle x, 2\langle x, F(x) \rangle) \end{aligned}$$

onde,  $y = S_+(x) \in S_-^{2k}$ , para  $x \in B^{2k}$ . Observe que tal aplicação está bem definida pois  $S_+(x + tF(x))$  é um arco diferenciável. Além disso, se  $F(x) \neq 0, x \in B^{2k}$  então  $T_-(y) \neq 0$ . Para ver isto, suponha que  $T_-(y) = 0$  então,  $2\langle x, F(x) \rangle x = (1 + \|x\|^2)F(x)$ . Agora, como

$\langle x, F(x) \rangle = 0$  segue que,  $F(x) = 0$  o que é uma contradição. Assim,  $T_-(y) = 0$ . Observe ainda que  $T_-$  é contínua. Também,  $T_-$  é tangente a  $S^{2k}$ . Para verificar esta afirmação devemos mostrar que  $\langle T_-(y), y \rangle = 0$  para  $y = S_+(x) \in S_-^{2k}$ . Com efeito,

$$\begin{aligned} \langle T_-(y), y \rangle &= \langle ((1 + \|x\|^2)F(x) - 2\langle x, F(x) \rangle x, 2\langle x, F(x) \rangle), (2x, \|x\|^2 - 1) \rangle \\ &= 2(1 + \|x\|^2)\langle x, F(x) \rangle - 4\langle x, F(x) \rangle \|x\|^2 + 2\langle x, F(x) \rangle (\|x\|^2 - 1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Além disso, como  $F(x) = x$  se  $x \in S^{2k-1}$  então

$$T_-(y) = \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2} [(1 + \|x\|^2)x - 2\|x\|^2 x, 2\|x\|^2] = e_{n+1},$$

para  $y \in S^{2k-1}$ .

De maneira similar, podemos definir o campo vetorial  $T_+$  em  $S_+^{2k}$  por

$$\begin{aligned} T_+(y) &= \left\{ \frac{d}{dt} S_-(x - tF(x)) \right\} \Big|_{t=0} \\ &= \frac{2}{(1 + \|x\|^2)^2} (2\langle x, F(x) \rangle x - (1 + \|x\|^2)F(x), 2\langle x, F(x) \rangle) \end{aligned}$$

onde,  $y = S_-(x) \in S_+^{2k}$ . É fácil ver que  $T_+(y) = T_-(y)$  para todo  $y \in S^{2k-1}$  e que tal campo goza das mesmas propriedades de  $T_-$ . Agora considere para cada  $y \in S^{2k}$  a aplicação

$$T(y) = \begin{cases} T_-(y) & y \in S_-^{2k} \\ T_+(y) & y \in S_+^{2k} \end{cases}. \quad (1.3)$$

Observe que  $T$  é contínua pois  $T_+$  e  $T_-$  o são e  $T_+ = T_-$  em  $S^{2k-1}$ . Ainda, sendo  $T_+$  e  $T_-$  campos tangentes a  $S^{2k}$  e regulares, segue que  $T$  é tangente a  $S^{2k}$  e regular, o que contradiz o teorema anterior.

Assim,  $f$  tem um ponto fixo e portanto nossa prova está completa se  $n = 2k$ . Para provar o resultado para  $B^n = B^{2k-1}$  basta observar que se  $f : B^{2k-1} \rightarrow B^{2k-1}$  é contínua então

$$\begin{aligned} g : B^{2k} &\rightarrow B^{2k} \\ (x, x_{2k}) &\mapsto (f(x), 0) \end{aligned}$$

tem ponto fixo, digamos  $(x_0, 0)$ . Logo,  $f(x_0) = x_0$ . Portanto,  $f$  tem ponto fixo.  $\square$

Nosso interesse agora é exibir uma generalização do Teorema de Brouwer, a saber, o Teorema de ponto fixo de Schauder. Para tanto, vamos apresentar resultados que nos auxiliarão na prova deste último.

**Teorema 1.14.** *(Projeção sobre um convexo fechado) Sejam  $H$  um espaço de Hilbert,  $K \subset H$  convexo, fechado e não-vazio. Então para cada  $f \in H$  existe um único  $u \in K$  tal que*

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|. \quad (1.4)$$

Além disso,  $u$  se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in K \\ \langle f - u, v - u \rangle \leq 0, \forall v \in K \end{cases}. \quad (1.5)$$

Escrevemos  $u = P_K f$  a projeção de  $f$  sobre  $K$ .

**Demonstração:** Ver [2]. $\square$

**Proposição 1.15.** *Nas mesmas hipóteses do teorema anterior se verifica*

$$|P_K f_1 - P_K f_2| \leq |f_1 - f_2|, \forall f_1, f_2 \in H.$$

**Demonstração:** Pondo  $u_1 = P_K f_1$  e  $u_2 = P_K f_2$  resulta de (1.4), (1.5) e do Teorema 1.14 que

$$\langle f_1 - u_1, v - u_1 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K, \quad (1.6)$$

$$\langle f_2 - u_2, v - u_2 \rangle \leq 0 \quad \forall v \in K. \quad (1.7)$$

Substituindo  $v$  por  $u_2$  em (1.6) e  $v$  por  $u_1$  em (1.7), obtemos

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Portanto,  $\|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ .  $\square$

**Teorema 1.16.** *Todo subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$ , não vazio, fechado e convexo é um retrato de  $\mathbb{R}^n$ .*

**Demonstração:** Para cada  $x \in \mathbb{R}^n$ , nós sabemos que existe um único  $y = P_C(x) \in C$  com

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - u\|; u \in C\},$$

isto é,  $P_C$  é aplicação que associa a cada  $x \in \mathbb{R}^n$  o ponto mais próximo de  $C$ . Ainda,  $P_C$  é pela proposição anterior, lipschitziana, logo contínua e portanto uma retração de  $\mathbb{R}^n$  em  $C$ .  $\square$

**Teorema 1.17.** *Todo subconjunto  $C$  de  $\mathbb{R}^n$  convexo, fechado, limitado e não-vazio tem a propriedade do ponto fixo.*

**Demonstração:** Note que  $C$  está contido em alguma bola fechada  $B^*$  do  $\mathbb{R}^n$ . Pelo Teorema de Brouwer temos que  $B^n$  tem ponto fixo, logo, como  $B^n$  e  $B^*$  são homeomorfos, segue que  $B^*$  tem a propriedade do ponto fixo. Sendo  $C$  um retrato do  $\mathbb{R}^n$  (Teorema 1.16) temos que  $C$  é retrato de  $B^*$ , dessa forma,  $C$  tem a propriedade do ponto fixo (Teorema 1.5).  $\square$

Desde que um espaço vetorial normado  $X$  seja isomorfo ao  $\mathbb{R}^n$  com  $\dim X = n$ , temos pelo resultado anterior que, todo subconjunto não vazio de  $X$  que seja convexo, fechado e limitado tem a propriedade do ponto fixo. Gostaríamos de estender o Teorema 1.17 para um espaço de dimensão infinita. Para isso, devemos impor novas condições sobre as funções consideradas. Apenas a continuidade não nos garante tal extensão. Como contra-exemplo, considere

$$l_2 = \{x = (x_1, x_2, \dots); \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$$

e

$$B = \{x \in l_2; \|x\| \leq 1\}.$$

Defina

$$\begin{aligned} f : B &\rightarrow \partial B \subset B \\ x &\mapsto (\sqrt{1 - \|x\|^2}, x_1, x_2, \dots). \end{aligned}$$

Como as componentes de  $f$  são contínuas segue que  $f$  é contínua, entretanto  $f$  não tem ponto fixo. De fato, se existisse tal ponto, deveríamos ter  $x_i = x_{i+1}, \forall i \in \mathbb{N}$ . Logo, a correspondente série converge se, e somente se,  $x_i = 0, \forall i \in \mathbb{N}$ . Daí,  $(0, 0, \dots) = f(0, 0, \dots) = (1, 0, \dots)$  o que é absurdo.

**Definição 1.18.** *Sejam  $X$  e  $Y$  espaços vetoriais normados. Uma aplicação  $F : X \rightarrow Y$  é dita compacta se  $F(X)$  está contido num subconjunto compacto de  $Y$ . Uma aplicação compacta  $F : X \rightarrow Y$  é dita de dimensão finita quando  $F(X)$  está contido num subespaço de dimensão finita de  $Y$ .*

Seja  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  um subconjunto finito de um espaço vetorial normado  $E = (E, \|\cdot\|)$ . Para cada  $\epsilon > 0$  dado considere o conjunto

$$A_\epsilon = \bigcup_{i=1}^n B(a_i, \epsilon)$$

onde,  $B(a_i, \epsilon) = \{x \in E; \|x - a_i\| < \epsilon\}$ . Para cada  $i = 1, \dots, n$  seja  $\mu_i : A_\epsilon \rightarrow \mathbb{R}$  a aplicação dada por

$$\mu_i(x) = \max\{0, \epsilon - \|x - a_i\|\}.$$

Denotaremos por  $co(A)$  o menor conjunto convexo contendo  $A$ . A *projeção de Schauder* é a aplicação

$$\begin{aligned} P_\epsilon : A_\epsilon &\rightarrow co(A) \\ x &\mapsto \frac{\sum_{i=1}^n \mu_i(x) a_i}{\sum_{i=1}^n \mu_i(x)}. \end{aligned}$$

Note que  $P_\epsilon$  está bem definida pois, se  $x \in A_\epsilon$  então  $x \in B(a_i, \epsilon)$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$  e portanto,  $\sum_{i=1}^n \mu_i(x) \neq 0$ . Também,  $P_\epsilon(A_\epsilon) \subset co(A)$  pois cada  $P_\epsilon(x)$  é uma combinação convexa dos pontos  $a_1, \dots, a_n$ .

**Teorema 1.19.** *Sejam  $C$  um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado e  $A = \{a_1, \dots, a_n\} \subset C$ . Se  $P_\epsilon$  denota a projeção de Schauder, então*

(i)  $P_\epsilon$  é uma aplicação contínua e compacta.

(ii)  $\|x - P_\epsilon(x)\| < \epsilon, \forall x \in A_\epsilon$ .

**Demonstração:** Como cada  $\mu_i$  é contínua, temos que  $P_\epsilon$  é uma aplicação contínua. Para mostrar a compacidade, seja  $\{P_\epsilon(x_m)\}_{m=1}^\infty$  uma seqüência qualquer em  $P_\epsilon(A_\epsilon)$ . Considere

$$\mu(x) = \sum_{i=1}^n \mu_i(x)$$

então,

$$P_\epsilon(x_m) = \sum_{i=1}^n \frac{\mu_i(x_m)a_i}{\mu(x_m)}.$$

Note que para cada  $m \in \{1, 2, \dots\}$ ,

$$\left( \frac{\mu_1(x_m)}{\mu(x_m)}, \dots, \frac{\mu_n(x_m)}{\mu(x_m)} \right) \in [0, 1]^n$$

portanto a compacidade do cubo implica na compacidade da aplicação  $P_\epsilon$ . Assim, demonstramos (i). Para provar (ii), note que dado  $x \in A_\epsilon$  tem-se,

$$\begin{aligned} \|x - P_\epsilon(x)\| &= \frac{1}{\mu(x)} \left\| \mu(x)x - \sum_{i=1}^n \mu_i a_i \right\| \\ &\leq \frac{1}{\mu(x)} \sum_{i=1}^n \mu_i(x) \|x - a_i\| \\ &< \frac{1}{\mu(x)} \epsilon \mu(x) = \epsilon \end{aligned}$$

pois  $\mu_i(x) = 0$  quando  $\|x - a_i\| \geq \epsilon$ , completando assim a demonstração.  $\square$

Nosso próximo resultado é conhecido como teorema de aproximação de Schauder.

**Teorema 1.20.** *Sejam  $C$  um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado  $E$  e  $F : E \rightarrow C$  uma aplicação contínua e compacta. Então para cada  $\epsilon > 0$  existe um subconjunto finito  $A = \{a_1, \dots, a_n\}$  em  $F(E)$  e uma aplicação contínua de dimensão finita  $F_\epsilon : E \rightarrow C$  com as seguintes propriedades:*

- (i)  $\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon, \forall x \in E$ .
- (ii)  $F_\epsilon(E) \subset \text{co}(A) \subset C$ .

**Demonstração:**  $F(E)$  está contido num subconjunto compacto  $K$  de  $C$ , portanto, como  $K$  é totalmente limitado segue que existe um conjunto  $\{a_1, \dots, a_n\} \subset F(E)$  com  $F(E) \subset$

$A_\epsilon$ . Seja  $P_\epsilon : A_\epsilon \rightarrow co(A)$  a projeção de Schauder e defina a aplicação

$$\begin{aligned} F_\epsilon : E &\rightarrow C \\ x &\mapsto P_\epsilon(F(x)). \end{aligned}$$

Observe que, se  $x \in E$  então  $F(x) \in A_\epsilon$ . Logo, pelo teorema anterior,  $\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon$ . Ainda, por construção,  $F_\epsilon(E) \subset P_\epsilon(A_\epsilon) \subset co(A) \subset C$ , encerrando a prova.  $\square$

Antes de provarmos o teorema do ponto fixo de Schauder, introduziremos o conceito de  $\epsilon$ -ponto fixo.

**Definição 1.21.** *Sejam  $D$  um subconjunto de um espaço vetorial normado  $E$  e  $F : D \rightarrow E$  uma aplicação. Dado  $\epsilon > 0$ , um ponto  $d \in D$  com  $\|d - F(d)\| < \epsilon$  é chamado um  $\epsilon$ -ponto fixo de  $F$ .*

**Teorema 1.22.** *Sejam  $D$  um subconjunto fechado de um espaço vetorial normado  $E$  e  $F : D \rightarrow E$  uma aplicação contínua e compacta. Então  $F$  tem um ponto fixo se, e somente se,  $F$  tem um  $\epsilon$ -ponto fixo.*

**Demonstração:** É claro que se  $F$  tem ponto fixo então  $F$  tem um  $\epsilon$ -ponto fixo. Vamos mostrar a recíproca. Suponha que  $F$  tem um  $\epsilon$ -ponto fixo. Agora para cada  $n \in \{1, 2, \dots\}$  seja  $d_n$  um  $(\frac{1}{n})$ -ponto fixo para  $F$ , logo,

$$\|d_n - F(d_n)\| \leq \frac{1}{n} \tag{1.8}$$

Como  $F$  é compacta,  $F(D)$  está contida num subconjunto  $K$  de  $E$  e portanto existe uma subsequência  $(F(d_{n_k}))$  de  $(F(d_n))$  com  $F(d_{n_k}) \rightarrow x \in K$  quando  $k \rightarrow \infty$ . De (1.8) segue que  $d_{n_k} \rightarrow x$  quando  $k \rightarrow \infty$ . Sendo  $D$  fechado temos que  $x \in D$ . Ainda, da continuidade de  $F$  temos que  $F(d_{n_k}) \rightarrow F(x)$  então, novamente por (1.8), temos  $\|x - F(x)\| = 0$  e portanto  $F(x) = x$ .  $\square$

Agora vamos provar o teorema de ponto fixo de Schauder.

**Teorema 1.23.** *Seja  $C$  um subconjunto convexo e fechado de um espaço vetorial normado  $E$ . Então toda aplicação contínua e compacta  $F : C \rightarrow C$  tem um ponto fixo.*

**Demonstração:** Em vista do resultado anterior, basta demonstrarmos que  $F$  tem um  $\epsilon$ -ponto *fixo* para todo  $\epsilon > 0$ . Assim, seja  $\epsilon > 0$ . Temos pelo Teorema 1.20 que existe  $F_\epsilon : C \rightarrow C$  contínua e de dimensão finita com

$$\|F_\epsilon(x) - F(x)\| < \epsilon, \forall x \in C \quad (1.9)$$

e

$$F_\epsilon(C) \subset co(A) \subset C,$$

para algum conjunto finito  $A \subset C$ . Desde que  $co(A)$  é limitado, fechado e  $F_\epsilon(co(A)) \subset co(A)$  temos pelo Teorema 1.17 que existe  $x_\epsilon \in co(A)$  com  $x_\epsilon = F_\epsilon(x_\epsilon)$ . Então, por (1.9) temos

$$\|x_\epsilon - F(x_\epsilon)\| < \epsilon.$$

Portanto,  $F$  tem um  $\epsilon$ -ponto *fixo* e conseqüentemente,  $F$  tem ponto fixo.  $\square$

# Capítulo 2

## Teoremas de Ponto Fixo em Cones

Passaremos nossa atenção neste capítulo ao estudo analítico de alguns teoremas de bastante relevância dentro da teoria de ponto fixo, a saber, a Alternativa de Leray-Schauder e os teoremas de ponto fixo de Krasnoselskii. No que segue, estaremos considerando  $E$  um espaço de Banach,  $C \subset E$  fechado e convexo,  $U$  um subconjunto aberto de  $C$ .

### 2.1 Aplicações essenciais

Denotaremos por  $K(\bar{U}, C)$  o conjunto de todas as aplicações  $F : \bar{U} \rightarrow C$  contínuas e compactas e, por  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ , o conjunto de todas as aplicações  $F \in K(\bar{U}, C)$  com  $x \neq F(x)$ ,  $\forall x \in \partial U$ . Deste último conjunto ( $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ ), vamos retirar uma classe de funções especiais (*aplicações essenciais*) que serão úteis mais adiante para analisarmos conceitos topológicos sobre este conjunto, mais especificamente, as *homotopias*.

**Definição 2.1.** *Uma aplicação  $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  é dita essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  se, toda aplicação  $G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  com  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$  tem ponto fixo em  $U$ . Do contrário tal aplicação é dita não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ , isto é, existe uma aplicação  $G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  sem ponto fixo com  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$ .*

Como exemplo natural de uma aplicação essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ , considere a aplicação constante  $F(\bar{U}) = p$ ,  $p \in U$ . Tal aplicação é muito útil nesta teoria. As-

sim, vamos mostrar que  $F$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Com efeito, seja  $G : \bar{U} \rightarrow C$  uma aplicação compacta e contínua com  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U} = p$ . Seja  $J : C \rightarrow C$  dada por

$$J(x) = \begin{cases} G(x), & \text{se } x \in \bar{U} \\ p, & \text{se } x \in C - \bar{U} \end{cases}.$$

É fácil ver que  $J$  está bem definida. Além disso, como  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U} = p$  e  $F$  e  $G$  são contínuas segue que  $J$  é contínua. Como  $F$  e  $G$  são compactas segue que  $J$  é compacta. Assim, pelo teorema de ponto fixo de Schauder temos que  $J$  tem um ponto fixo  $x \in C$ . Posto que  $p$  pertence a  $U$  então  $x \in U$ . Assim,  $x = J(x) = G(x)$  e portanto  $x$  é ponto fixo de  $G$ , resultando que  $F$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .

**Observação 2.2.** Se  $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  então  $F$  tem ponto fixo em  $U$ .

**Definição 2.3.** Duas aplicações  $F$  e  $G$  pertencentes a  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  são ditas homotópicas em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ , se existe uma aplicação contínua e compacta  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow C$  tal que  $H_t(\cdot) = H(\cdot, t) : \bar{U} \rightarrow C$  pertence a  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , com  $H_0 = F$  e  $H_1 = G$ . Neste caso,  $H$  é dita uma homotopia entre  $F$  e  $G$ .

**Notação:**  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .

**Teorema 2.4.** Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um subconjunto de  $E$  fechado e convexo,  $U$  um subconjunto aberto de  $C$  e  $F, G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Suponha que

$$x \neq tG(x) + (1 - t)F(x), \forall (x, t) \in \partial U \times [0, 1].$$

Então  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .

**Demonstração:** Seja  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow C$  dada por

$$H(x, t) = tG(x) + (1 - t)F(x).$$

Vamos mostrar que  $H$  é uma aplicação contínua e compacta. De fato, sendo  $F$  e  $G$  aplicações contínuas temos imediatamente que  $H$  é uma aplicação contínua. Dessa forma

resta mostrarmos a compacidade. Assim, seja  $((x_n, t_n))_{n \in \mathbb{N}}$  uma seqüência em  $\bar{U} \times [0, 1]$ . Sem perda de generalidade, podemos supor  $t_n \rightarrow t \in [0, 1]$ . Como  $F$  e  $G$  são compactas, existe uma subseqüência  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  tal que

$$F(x_{n_k}) \rightarrow v \in C$$

e

$$G(x_{n_k}) \rightarrow u \in C$$

quando  $k \rightarrow \infty$ .

Devido a convexidade de  $C$  temos que

$$H(x_{n_k}, t_{n_k}) = t_{n_k}G(x_{n_k}) + (1 - t_{n_k})F(x_{n_k}) \rightarrow tu + (1 - t)v \in C$$

quando  $k \rightarrow \infty$ . Assim,  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow C$  é uma aplicação compacta. Além disso, como  $x \neq tG(x) + (1 - t)F(x), \forall (x, t) \in \partial U \times [0, 1]$  temos que  $H_t \in K_{\partial U}(\bar{U}, C), \forall t \in [0, 1]$ . Também,  $H_0 = F$  e  $H_1 = G$ . Portanto,  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .  $\square$

## 2.2 Alternativa de Leray-Schauder

A seguir, vamos relacionar os conceitos vistos na seção anterior, ou seja, caracterizaremos aplicações não essenciais em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  em termos de homotopias.

**Teorema 2.5.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um subconjunto de  $E$  fechado e convexo,  $U$  um subconjunto aberto de  $C$  e  $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Então as seguintes condições são equivalentes:*

- (i)  $F$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ ;
- (ii) Existe uma aplicação  $G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  que não possui ponto fixo e é tal que  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .

**Demonstração:** Suponha que  $F$  é não essencial, então existe uma aplicação  $G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  que não possui ponto fixo e é tal que  $G|_{\partial U} = F|_{\partial U}$ . Agora, suponha que

existe  $x \in \partial U$  e  $t \in [0, 1]$  com

$$x = tG(x) + (1 - t)F(x).$$

Como  $F|_{\partial U} = G|_{\partial U}$  segue que  $x = G(x)$ , o que é uma contradição. Logo, segue do teorema anterior que  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Assim, mostramos que (i)  $\Rightarrow$  (ii).

Vamos mostrar (ii)  $\Rightarrow$  (i). Seja  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow C$  uma homotopia entre  $F$  e  $G$ . Considere

$$B = \{x \in \bar{U} : x = H(x, t) \text{ para algum } t \in [0, 1]\}.$$

Se  $B = \emptyset$  então para cada  $t \in [0, 1]$  temos que  $H_t$  não tem ponto fixo em  $\bar{U}$  e, em particular,  $F$  não tem ponto fixo em  $\bar{U}$  e portanto é não-essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Assim, suponha que  $B \neq \emptyset$ . A continuidade de  $H$  implica que  $B$  é fechado em  $\bar{U}$ . Ainda  $B \cap \partial U = \emptyset$  pois  $H_t \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Logo, pelo Lema de Uryshon (ver [14]), segue que existe uma função contínua  $\mu : \bar{U} \rightarrow [0, 1]$  com  $\mu(\partial U) = 1$  e  $\mu(B) = 0$ . Desta forma, podemos definir a aplicação  $J : \bar{U} \rightarrow C$  dada por  $J(x) = H(x, \mu(x))$ . Como  $H$  é compacta, contínua e  $\mu$  é contínua temos que  $J$  é contínua e compacta. Além disso, se  $x \in \partial U$  temos que

$$J(x) = H(x, 1) = F(x).$$

Portanto,  $J|_{\partial U} = F|_{\partial U}$ . Ainda,  $x \neq J(x)$  para todo  $x \in \bar{U}$  pois do contrário, isto é, se  $x = J(x)$  para algum  $x \in \bar{U}$  então  $x = H(x, \mu(x))$ . Logo,

$$x \in B \Rightarrow \mu(x) = 0 \Rightarrow x = H(x, \mu(x)) = H(x, 0) = G(x) \Rightarrow x = G(x)$$

o que é uma contradição. Conseqüentemente,  $J \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  e  $J$  não tem ponto fixo em  $\bar{U}$ . Também,  $J|_{\partial U} = F|_{\partial U}$  e portanto,  $F$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .  $\square$

Vimos no Teorema 2.5 condições necessárias e suficientes para determinar quando duas funções em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  são homotópicas. Agora, vamos mostrar que propriedade de ser essencial é invariante por homotopias em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .

**Teorema 2.6.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um subconjunto fechado e convexo de  $E$  e  $U$  um subconjunto aberto de  $C$ . Suponha que  $F, G \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  e  $F \simeq G$ . Então,  $F$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  se, e somente se,  $G$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .*

**Demonstração:** Se  $F$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  então pelo teorema anterior existe uma aplicação  $T \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  sem ponto fixo com  $F \simeq T$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Como  $G \simeq F$  temos  $G \simeq T$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  então, novamente pelo teorema anterior, temos que  $G$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . De maneira análoga, podemos concluir que se  $G$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  então  $F$  é não essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ , encerrando a prova do teorema.  $\square$

A propriedade de uma aplicação ser essencial é, em certo sentido, muito forte, pois uma aplicação essencial “contagia” com a mesma propriedade outras aplicações que se aproximam na sua fronteira. Dito de maneira formal temos o seguinte resultado.

**Teorema 2.7.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um subconjunto fechado e convexo de  $E$  e  $U$  um subconjunto aberto de  $C$ . Suponha que  $F \in K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Então existe  $\epsilon > 0$  com as seguintes propriedades:*

(i) *cada aplicação contínua e compacta  $G : \bar{U} \rightarrow C$  satisfazendo  $\|F(x) - G(x)\| < \epsilon \forall x \in \partial U$ , pertence à  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .*

(ii)  *$G$  (como descrito em i) é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .*

**Demonstração:** Como  $F : \bar{U} \rightarrow C$  é uma aplicação compacta e sem ponto fixo em  $\partial U$ , temos pelo Teorema 1.22, que existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\|x - F(x)\| \geq \epsilon, \forall x \in \partial U$ . Se  $G : \bar{U} \rightarrow C$  satisfaz

$$\|G(x) - F(x)\| < \epsilon, \forall x \in \partial U$$

então,

$$\|G(x) - x\| \geq \|x - F(x)\| - \|G(x) - F(x)\| > \epsilon - \epsilon = 0$$

e portanto,  $G$  não possui ponto fixo em  $\partial U$ . Agora,

$$\|G(x) - F(x)\| < \epsilon \leq \|x - F(x)\|, x \in \partial U. \quad (2.1)$$

Assim,  $x \neq tG(x) + (1 - t)F(x), \forall x \in \partial U$  e  $t \in [0, 1]$ .

De fato, suponha que existe  $x \in \partial U$  e  $t \in [0, 1]$  tal que

$$x = tG(x) + (1 - t)F(x)$$

então

$$\|x - F(x)\| = \|tG(x) - (1-t)F(x) - F(x)\| = \|t(G(x) - F(x))\| \leq \|G(x) - F(x)\|$$

portanto,

$$\|x - F(x)\| \leq \|G(x) - F(x)\|. \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2) temos uma contradição. Então,  $x \neq tG(x) + (1-t)F(x)$ ,  $\forall(x, t) \in \partial U \times [0, 1]$ . Logo, do Teorema 2.4 segue que  $F \simeq G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  e do teorema anterior segue que  $G$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ .  $\square$

Agora, vamos apresentar um teorema de suma importância no presente trabalho, cuja demonstração é motivada por aspectos topológicos vistos nos resultados anteriores. Contudo, vale observar que tal teorema também pode ser demonstrado usando diretamente o teorema de ponto fixo de Schauder (ver [1]).

**Teorema 2.8.** *(Alternativa de Leray-Schauder) Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um subconjunto fechado e convexo de  $E$ ,  $U$  um subconjunto aberto de  $C$  e  $p \in U$ . Então toda aplicação contínua e compacta  $F : \bar{U} \rightarrow C$  tem ao menos uma das seguintes propriedades:*

*Ou*

*(A1)  $F$  tem um ponto fixo em  $\bar{U}$ , ou*

*(A2) existe  $u \in \partial U$  e um  $\lambda \in (0, 1)$  com  $u = \lambda F(u) + (1 - \lambda)p$ .*

**Demonstração:** Suponha que (A2) não ocorra e  $x \neq F(x)$ ,  $\forall x \in \partial U$  (do contrário não teríamos o que fazer). Seja  $G : \bar{U} \rightarrow C$  a aplicação constante  $u \mapsto p$  e considere a aplicação contínua e compacta  $H : \bar{U} \times [0, 1] \rightarrow C$  dada por

$$H(x, t) = tF(x) + (1 - t)p.$$

Devido a (A2) temos que para cada  $t \in [0, 1]$ ,  $x \neq H_t(x)$  para todo  $x \in \partial U$ . Assim,  $H$  define uma homotopia entre  $F$  e  $G$  em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$ . Dessa forma, como  $G$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  e aplicando o Teorema 2.6 temos que  $F$  é essencial em  $K_{\partial U}(\bar{U}, C)$  e portanto existe  $x \in U$  com  $x = F(x)$ .  $\square$

## 2.3 Teoremas de Ponto Fixo de Krasnoselskii

Nesta seção apresentaremos os teoremas de ponto fixo de Krasnoselskii e algumas generalizações dos mesmos. Tais resultados são muito úteis para demonstrar a existência de múltiplas soluções em diversos problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias.

No presente estudo, denotaremos  $E = (E, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach e  $C$  um subconjunto de  $E$  não vazio, fechado e convexo com  $\alpha u + \beta v \in C$  para todo  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$  e  $u, v \in C$ . Seja  $\rho > 0$ , denotaremos

$$B_\rho = \{x; x \in C e \|x\| < \rho\}, S_\rho = \{x; x \in C e \|x\| = \rho\}$$

e  $\bar{B}_\rho = \{B_\rho \cup S_\rho\}$ .

**Teorema 2.9.** *Sejam  $E$  e  $C$  como descritos anteriormente e  $r, R$  constantes tais que  $0 < r < R$ . Suponha que  $F \in K(\bar{B}_R, C)$  e que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$x \neq F(x), \forall x \in S_r \cup S_R. \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} F : \bar{B}_r \rightarrow C \text{ é não-essencial em } K_{S_r}(\bar{B}_r, C) \\ \text{ie, } F|_{\bar{B}_r} \text{ é não-essencial em } K_{S_r}(\bar{B}_r, C). \end{cases} \quad (2.4)$$

e

$$F : \bar{B}_R \rightarrow C \text{ é essencial em } K_{S_R}(\bar{B}_R, C). \quad (2.5)$$

Então  $F$  tem um ponto fixo em  $\Omega = \{x; x \in C \text{ e } r \leq \|x\| < R\}$ .

**Demonstração:** Suponha que  $F$  não tem ponto fixo em  $\Omega$ . A condição (2.4) implica que existe uma aplicação  $\theta \in K(\bar{B}_r, C)$  com  $\theta|_{S_r} = F|_{S_r}$  e  $x \neq \theta(x), \forall x \in \bar{B}_r$ . Assim, podemos definir a aplicação

$$\Phi : \bar{B}_R \rightarrow C$$

dada por

$$x \mapsto \begin{cases} F(x), \text{ se } r < \|x\| \leq R \\ \theta(x), \text{ se } 0 \leq \|x\| \leq r \end{cases}$$

Das hipóteses sobre  $F$  e  $\theta$  temos que  $\Phi$  é contínua e compacta, portanto,  $\Phi \in K(\overline{B}_R, C)$ . Além disso, como  $\theta$  não tem ponto fixo em  $\overline{B}_r$  e  $F$  não tem ponto fixo em  $\Omega$  segue que  $\Phi$  não tem ponto fixo em  $\overline{B}_R$ . Logo,  $\Phi \in K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ ,  $\Phi|_{S_R} = F|_{S_R}$  e  $\Phi$  não tem ponto fixo em  $\overline{B}_R$ , então  $F$  é não essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$  o que é uma contradição em vista de (2.5).  $\square$

Como vimos anteriormente, aplicações essenciais e homotopias estão intimamente ligadas. Dessa forma, é natural analisarmos o resultado anterior em vista de homotopias.

**Teorema 2.10.** *Sejam  $E$  e  $C$  como descritos anteriormente,  $r$  e  $R$  constantes tais que,  $0 < r < R$  e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$\left\{ \begin{array}{l} N : \overline{B}_R \times [0, 1] \rightarrow C \text{ é uma aplicação contínua e compacta com} \\ N(x, 0) = 0 \forall x \in \overline{B}_R \text{ e é tal que para cada } t \in [0, 1], x \neq N(x, t), \forall x \in S_R. \end{array} \right. \quad (2.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} H : \overline{B}_r \times [0, 1] \rightarrow C \text{ é uma aplicação contínua e compacta} \\ e \text{ é tal que para cada } t \in [0, 1], x \neq H(x, t), \forall x \in S_r. \end{array} \right. \quad (2.7)$$

$$H(\cdot, 1)|_{\overline{B}_r} = N(\cdot, 1)|_{\overline{B}_r} \quad (2.8)$$

e

$$x \neq H(x, 0), \forall x \in B_r. \quad (2.9)$$

Então  $N(\cdot, 1)$  tem ponto fixo em  $\Omega = \{x; x \in C \text{ e } r < \|x\| < R\}$ .

**Demonstração:** Vimos anteriormente que a aplicação nula é uma aplicação essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ . Note que  $N(\cdot, 1) \simeq N(\cdot, 0)$  por (2.6). Assim, como  $N(\cdot, 0) \equiv 0$  segue do Teorema 2.6 que  $N(\cdot, 1)$  é essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ . Além disso,  $H(\cdot, 0)$  é não essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . De fato, de (2.7) segue que  $H(\cdot, 0) \in K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$  e de (2.9) segue que  $H(\cdot, 0)$  não tem ponto fixo em  $B_r$ , logo não é essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . Agora, por (2.7) temos que  $H(\cdot, 1) \simeq H(\cdot, 0)$  e novamente pelo Teorema 2.6 segue que  $H(\cdot, 1)$  é não-essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . Em vista de (2.8) temos que

$$N(\cdot, 1) = H(\cdot, 1) : \overline{B}_r \rightarrow C$$

é não essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . Também, de (2.6), (2.7) e (2.8) segue imediatamente que  $N(x, 1) \neq x, \forall x \in S_R \cup S_r$ . Dessa forma, temos

- i.  $N(\cdot, 1) : \overline{B}_R \rightarrow C$  é essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ ;
- ii.  $N(\cdot, 1) : \overline{B}_r \rightarrow C$  é não essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ ;
- iii.  $N(x, 1) \neq x, \forall x \in S_R \cup S_r$ .

Logo, do Teorema 2.9 segue que  $N(\cdot, 1)$  tem um ponto fixo em  $\Omega = \{x; x \in C \text{ e } r < \|x\| < R\}$ .  $\square$

Baseados no teorema anterior, apresentaremos agora, o teorema de Krasnoselskii de compressão de cone.

**Teorema 2.11.** *Sejam  $E$  e  $C$  como descritos anteriormante,  $F \in K(\overline{B}_R, C)$  e  $r, R$  constantes tais que  $0 < r < R$  e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$x \neq \lambda F(x) \text{ para } \lambda \in [0, 1] \text{ e } x \in S_R \quad (2.10)$$

e

$$\begin{cases} \text{existe um } v \in C - \{0\} \text{ com } x \neq F(x) + \delta v \\ \text{para quaisquer } \delta > 0 \text{ e } x \in S_r. \end{cases} \quad (2.11)$$

Então  $F$  tem um ponto fixo em  $\overline{\Omega} = \{x; x \in C \text{ e } r \leq \|x\| \leq R\}$ .

**Demonstração:** Suponha que  $x \neq F(x)$  para todo  $x \in S_r \cup S_R$  (pois do contrário não temos o que demonstrar). Da compacidade de  $F$ , temos que existe  $M > 0$  tal que

$$\|F(x)\| \leq M, \forall x \in \overline{B}_r.$$

Ainda, seja  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\delta_0 \|v\| > M + r. \quad (2.12)$$

Sejam  $N(\cdot, t) = tF(\cdot)$  e  $H(\cdot, t) = T(\cdot) + (1 - t)\delta_0 v$ . Vamos aplicar o teorema anterior, assim, observe que as condições (2.10) e (2.11) (com  $\delta = (1 - t)\delta_0$ ) implicam que (2.6) e (2.7) são satisfeitas. Além disso, (2.8) também ocorre pois

$$N(x, 1) = F(x) = H(x, 1), \forall x \in \overline{B}_r.$$

Finalmente, (2.12) implica que (2.9) é satisfeito, pois

$$H(x, 0) = F(x) + \delta_0 v \Rightarrow \|H(x, 0)\| \geq \|F(x)\| - \delta_0 \|v\| > M - (M + r) = r = \|x\|.$$

Portanto, o resultado segue do Teorema 2.10.  $\square$

A rigor, o teorema anterior é do ponto vista analítico bastante sofisticado, entretanto sua aplicação é muito trabalhosa. Assim, somos levados a apresentar uma forma mais sucinta deste resultado. Em verdade, o teorema seguinte é mais conhecido como teorema de Krasnoselskii de compressão de cone do que o resultado anterior. Tal fato deve-se à sua interpretação geométrica. Dessa forma, passaremos esta referência ao próximo resultado.

**Teorema 2.12.** *(Teorema de Krasnoselskii de Compressão de Cone) Sejam  $E = (E, \|\cdot\|)$  um espaço de Banach,  $C \subseteq E$  um cone e  $\|\cdot\|$  crescente com respeito a  $C$ . Além disso, sejam  $r, R$  constantes com  $0 < r < R$ . Suponha que  $F : \overline{\Omega}_R \cap C \rightarrow C$  é uma aplicação contínua, compacta e satisfaz as seguintes condições:*

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_R \cap C \quad (2.13)$$

e

$$\|F(x)\| > \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C. \quad (2.14)$$

Então  $F$  tem um ponto fixo em  $C \cap \{x \in E : r \leq \|x\| \leq R\}$ .

**Observação 2.13.**  $\|\cdot\|$  ser crescente com respeito a  $C$  significa que dados  $u, v$  em  $C$  vale a desigualdade:

$$\|u + v\| \geq \|u\|.$$

**Demonstração:** Primeiramente, vamos mostrar que a condição (2.13) implica em (2.10). Com efeito, suponha que existem  $x \in S_R$  e  $\lambda \in [0, 1)$  com  $x = \lambda F(x)$ , então

$$R = \|x\| = |\lambda| \|F(x)\| < \|F(x)\| \leq \|x\| = R,$$

o que é uma contradição.

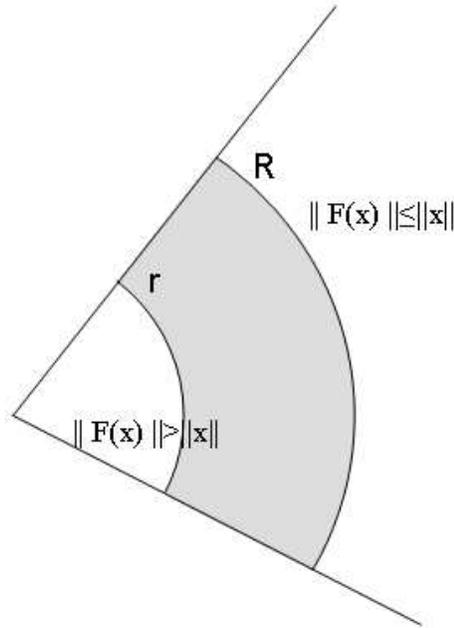


Figura 2.1: Interpretação geométrica do teorema.

Agora vamos mostrar que (2.14) implica em (2.11). De fato, suponha que existe  $v \in C - \{0\}$  com  $x = F(x) + \delta v$  para algum  $\delta > 0$  e  $x \in S_r$ . Desde que  $\|\cdot\|$  é crescente com respeito a  $C$  e  $\delta v \in C$  nós temos,

$$\|x\| = \|F(x) + \delta v\| \geq \|F(x)\| > \|x\|,$$

o que é uma contradição. Dessa forma, aplicando o Teorema 2.11 temos que  $F$  tem ponto fixo em  $C \cap \{x \in E : r \leq \|x\| \leq R\}$ .  $\square$

A partir de agora, nossa atenção volta-se em apresentar o teorema de Krasnoselskii de expansão de cone. Dessa forma, precisamos do seguinte resultado.

**Teorema 2.14.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um cone em  $E$  e  $r, R$  constantes tais que  $0 < r < R$ . Suponha que  $F \in K(\overline{B}_R, C)$  e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$x \neq F(x) \text{ para todo } x \in S_r \cup S_R, \tag{2.15}$$

$$F : \overline{B}_r \rightarrow C \text{ é essencial em } K_{S_r}(\overline{B}_r, C) \quad (2.16)$$

e

$$F : \overline{B}_R \rightarrow C \text{ é não essencial em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \quad (2.17)$$

Então,  $F$  tem ao menos dois pontos fixos  $x_0$  e  $x_1$  tais que  $x_0 \in B_r$  e  $x_1 \in \Omega = \{x : x \in C \text{ e } r < \|x\| < R\}$ .

**Demonstração:** É imediato de (2.16) que  $F$  tem um ponto fixo em  $B_r$ . Então, resta verificar que  $F$  tem ponto fixo em  $\Omega$ . Para tanto, vamos supor que tal fato não ocorra, isto é,  $F$  não tem ponto fixo em  $\overline{\Omega}$  e vamos construir uma aplicação contínua e compacta em  $\overline{B}_r$  que coincide com  $F$  em  $S_r$  e não possui ponto fixo, contradizendo assim o fato de  $F$  ser essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . Dessa forma, seja  $\Psi = F|_{\overline{\Omega}}$ . A condição (2.17) implica que existe uma aplicação  $\theta : \overline{B}_R \rightarrow C$  contínua e compacta com  $\theta|_{S_R} = F|_{S_R}$  e  $x \neq \theta(x)$  para todo  $x \in \overline{B}_R$ . Assim, fixemos  $\rho \in (0, r)$  e consideremos a aplicação  $\Phi$  dada por

$$\Phi(x) = \begin{cases} \frac{\rho}{R}\theta\left(\frac{R}{\rho}x\right), & \text{se } 0 \leq \|x\| \leq \rho, \\ \frac{(r-\rho)\|x\|}{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}\Psi\left(\frac{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|}\right), & \text{se } \rho \leq \|x\| \leq r \\ \Psi(x), & \text{se } r \leq \|x\| \leq R \end{cases} .$$

Observe que  $\Phi : \overline{B}_R \rightarrow C$  está bem definida. De fato, se  $0 \leq \|x\| \leq \rho$ , então  $\|\frac{R}{\rho}x\| \leq \frac{R}{\rho}\rho = R$ , ainda, se  $\rho \leq \|x\| \leq r$ , então

$$\left\| \frac{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|}x \right\| \geq \frac{|(R-\rho)r-(R-r)r|}{|(r-\rho)|} = r$$

e

$$\left\| \frac{(R-\rho)r-(R-r)\|x\|}{(r-\rho)\|x\|}x \right\| \leq \frac{|(R-\rho)r-(R-r)\rho|}{|(r-\rho)|} = R.$$

Portanto a aplicação  $\Phi$  está bem definida. Também, como  $\Psi$  e  $\theta$  são contínuas e compactas segue imediatamente que a aplicação  $\Phi$  é contínua e compacta. Além disso,

$$\Phi|_{S_R} = \Psi|_{S_R} = F|_{S_R} \text{ e } \Phi|_{\overline{\Omega}} = \Psi|_{\overline{\Omega}} = F|_{\overline{\Omega}},$$

e como  $\theta$  não tem ponto fixo em  $\overline{B}_R$  e  $F$  não tem ponto fixo em  $\overline{\Omega}$ , segue que  $\Phi$  não tem ponto fixo em  $\overline{B}_R$ . Assim, a restrição  $\Phi : \overline{B}_r \rightarrow C$  é uma aplicação contínua, compacta,

sem ponto fixo em  $\overline{B}_r$  e é tal que,

$$\Phi|_{S_r} = \Psi|_{S_r} = F|_{S_r}$$

o que é uma contradição em vista da condição (2.16).  $\square$

A seguir vamos provar o teorema de Krasnoselskii de expansão de um cone.

**Teorema 2.15.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um cone em  $E$  e  $r, R$  constantes com  $0 < r < R$ . Suponha que  $F \in K(\overline{B}_R, C)$  e suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

$$x \neq \lambda F(x) \text{ para todo } \lambda \in [0, 1) \text{ e } x \in S_r \quad (2.18)$$

e

$$\begin{cases} \text{existe um } v \in C - \{0\} \text{ com} \\ x \neq F(x) + \delta v \text{ para qualquer } \delta > 0 \text{ e } x \in S_R. \end{cases} \quad (2.19)$$

Então  $F$  tem um ponto fixo em  $\overline{\Omega} = \{x : x \in C \text{ e } r \leq \|x\| \leq R\}$ .

**Demonstração:** Suponha que  $x \neq F(x)$  para todo  $x \in S_r \cup S_R$ , pois do contrário não teríamos o que fazer. Vamos aplicar o teorema anterior para demonstrar este resultado. Assim, considere a aplicação  $H : \overline{B}_r \times [0, 1] \rightarrow C$  definida por

$$H(x, \lambda) = \lambda F(x).$$

Por (2.18) segue que  $H_t \in K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Como  $F$  é uma aplicação contínua e compacta segue que  $H$  é uma aplicação contínua e compacta. Portanto,  $H$  define uma homotopia em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$  entre  $H_0 = 0$  e  $H_1 = F$ . Como a aplicação nula é essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$  segue pelo Teorema 2.6 que  $F : \overline{B}_r \rightarrow C$  é essencial em  $K_{S_r}(\overline{B}_r, C)$ . Assim, a condição (2.16) do teorema anterior está satisfeita. Agora, seja  $\delta_0 > 0$  tal que

$$\|\delta_0 v\| > \sup_{x \in S_R} \|F(x)\| + R. \quad (2.20)$$

Considere a aplicação  $N : \overline{B}_R \times [0, 1] \rightarrow C$  definida por

$$N(x, \lambda) = F(x) + \lambda \delta_0 v.$$

Do fato de  $F$  ser contínua e compacta segue que  $N$  é contínua e compacta, assim, da condição (2.19) segue que  $N$  define uma homotopia em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$  entre  $N_0 = F$  e  $N_1 = F + \delta_0 v$ , ie,

$$N_0 \simeq N_1 \text{ em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \quad (2.21)$$

Sejam  $\lambda \in [0, 1]$  e  $x \in S_R$ , então a desigualdade (2.20) implica que

$$\|\delta_0 v + \lambda F(x)\| > R = \|x\|.$$

Assim,

$$x \neq \lambda F(x) + \delta_0 v \text{ se } \lambda \in [0, 1] \text{ e } x \in S_R. \quad (2.22)$$

Seja  $G : \overline{B}_R \rightarrow C$  a aplicação constante  $G(x) = \delta_0 v$ . Considere a aplicação  $J : \overline{B}_R \times [0, 1] \rightarrow C$  definida por

$$J(x, \lambda) = \delta_0 v + \lambda F(x).$$

De (2.22) e do fato de  $F$  ser contínua e compacta segue que  $J$  é uma homotopia em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$  entre  $J_0 = G$  e  $J_1 = N_1$ , isto é,

$$N_1 \simeq G \text{ em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \quad (2.23)$$

Logo, de (2.21) e (2.23) temos que

$$N_0 \simeq G \text{ em } K_{S_R}(\overline{B}_R, C). \quad (2.24)$$

Agora,  $G(x) = \delta_0 v$  para todo  $x \in \overline{B}_R$  e  $\delta_0 v \in C - \overline{B}_R$ . Logo,  $G$  é não-essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$ . Dessa forma, pelo Teorema 2.6 temos que  $N_0 = F$  é não-essencial em  $K_{S_R}(\overline{B}_R, C)$  implicando assim na condição (2.17) do teorema anterior, encerrando a demonstração do resultado.  $\square$

**Teorema 2.16.** *(Teorema de Krasnoselskii de Expansão de Cone) Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um cone em  $E$  e  $\|\cdot\|$  crescente com respeito a  $C$ . Além disso, sejam  $r, R$  constantes tais que  $0 < r < R$  e suponha  $F : \overline{\Omega}_R \cap C \rightarrow C$  (aqui,  $\Omega_R = \{x \in E : \|x\| < R\}$ ) uma aplicação contínua, compacta e que satisfaz as seguintes condições:*

$$\|F(x)\| > \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_R \cap C \quad (2.25)$$

e

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C. \quad (2.26)$$

Então  $F$  tem ponto fixo em  $C \cap \{x \in E : r \leq \|x\| \leq R\}$ .

**Demonstração:** A idéia é usar o resultado anterior, isto é, mostrar que (2.25) implica em (2.19) e (2.26) implica em (2.18). Dessa forma, vamos mostrar a primeira implicação. Então, suponha que existe  $v \in C - \{0\}$  com  $x = F(x) + \delta v$  para algum  $\delta > 0$  e algum  $x \in S_R$ . Posto que  $\|\cdot\|$  é crescente com respeito a  $C$  e  $\delta v \in C$ , temos

$$\|x\| = \|F(x) + \delta v\| \geq \|F(x)\| > \|x\|$$

o que é uma contradição.

Agora vamos mostrar que (2.26) implica em (2.18). Assim, suponha que existe  $x \in S_r$  e existe  $\lambda \in [0, 1)$  com  $x = \lambda F(x)$ . Então,

$$r = \|x\| = \lambda \|F(x)\| < \|F(x)\| \leq \|x\| = r$$

o que também é uma contradição.  $\square$

Em seqüência, vamos combinar alguns teoremas a fim de estabelecer existência de múltiplos pontos fixos.

**Teorema 2.17.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um cone em  $E$  e  $\|\cdot\|$  crescente com respeito a  $C$ . Além disso, sejam  $r, R$  constantes tais que  $0 < r < R$  e suponha  $F : \bar{\Omega}_R \cap C \rightarrow C$  (aqui,  $\Omega_R = \{x \in E : \|x\| < R\}$ ) uma aplicação contínua, compacta e que satisfaz as seguintes condições:*

$$x \neq F(x) \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C, \quad (2.27)$$

$$\|F(x)\| > \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_R \cap C \quad (2.28)$$

e

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C. \quad (2.29)$$

Então  $F$  tem ao menos dois pontos fixos  $x_0$  e  $x_1$  com  $x_0 \in \Omega_r \cap C$  e  $x_1 \in C \cap (\bar{\Omega}_R - \bar{\Omega}_r)$ .

**Demonstração:** Primeiramente, observe que a condição (2.29) implica que  $x \neq F(x)$  para todo  $\lambda \in [0, 1)$  e  $x \in \partial_E \Omega_r \cap C$ , assim, pela Alternativa de Laray-Schauder segue que  $F$  tem um ponto fixo  $x_0 \in C \cap \overline{\Omega}_r$ . Agora, em vista de (2.27) segue que  $x_0 \in \Omega_r \cap C$ . Além disso, o Teorema 2.16 implica que  $F$  tem um ponto fixo  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \Omega_r)$ . Observe que  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \overline{\Omega}_r)$ . De fato, se  $x_1 \in C$  e  $\|x_1\| = r$ , temos que  $x_1 \in \partial_E \Omega_r \cap C$ , o que contradiz (2.27). Portanto,  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \overline{\Omega}_r)$ , encerrando a demonstração do resultado.  $\square$

**Teorema 2.18.** *Sejam  $E$  um espaço de Banach,  $C$  um cone em  $E$  e  $\|\cdot\|$  crescente com respeito a  $C$ . Além disso, sejam  $L, r$  e  $R$  constantes tais que  $0 < L < r < R$  e suponha  $F : \overline{\Omega}_R \cap C \rightarrow C$  uma aplicação contínua, compacta e que satisfaz as seguintes condições:*

$$x \neq F(x) \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C, \quad (2.30)$$

$$\|F(x)\| > \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_L \cap C, \quad (2.31)$$

$$\|F(x)\| \leq \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_r \cap C \quad (2.32)$$

e

$$\|F(x)\| > \|x\| \text{ para todo } x \in \partial_E \Omega_R \cap C. \quad (2.33)$$

Então  $F$  tem ao menos dois pontos fixos  $x_0$  e  $x_1$  com  $x_0 \in C \cap (\Omega_r - \Omega_L)$  e  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \overline{\Omega}_r)$ .

**Demonstração:** Em vista de (2.31), (2.32) e do Teorema 2.12 segue imediatamente que  $F$  tem um ponto fixo  $x_0 \in C \cap (\overline{\Omega}_r - \Omega_L)$ . Ainda, pela condição (2.30) segue que  $x_0 \in C \cap (\Omega_r - \Omega_L)$ . Agora, pelas condições (2.32), (2.33) e pelo Teorema 2.16 temos que existe  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \Omega_r)$  ponto fixo de  $F$ . Novamente, da condição (2.30) temos que  $x_1 \in C \cap (\overline{\Omega}_R - \overline{\Omega}_r)$ , donde segue o resultado.  $\square$

# Capítulo 3

## Equações Diferenciais de Segunda Ordem com Múltiplos Pontos de Fronteira

No presente capítulo vamos ilustrar as idéias e resultados obtidos no capítulo anterior.

### 3.1 Existência e Multiplicidade de Soluções via Alternativa de Leray-Schauder

No que segue, vamos considerar o seguinte tipo de problema de valor de fronteira:

$$\begin{cases} u''(x) + F(x, u(x), u'(x)) = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas possivelmente não lineares e  $\eta_1, \dots, \eta_{m-2} \in (0, 1)$ . Classicamente, problemas envolvendo equações diferenciais de segunda ordem exigem condições de fronteira em dois pontos, entretanto, no problema dado por (3.1) notamos a presença de *m-pontos de fronteira*, a saber,  $\{0, \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{m-2}, 1\}$ . Essa classe de problemas foi proposta pela escola soviética [9] e desde então diversas variações

delas foram estudadas. Neste sentido, nosso intuito nesta seção é aplicar a Alternativa de Leray-Schauder para mostrar a existência de solução para o problema (3.1).

Inicialmente, sabemos que as soluções de (3.1) podem ser escritas como

$$u(x) = \int_0^1 G(x, t)F(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x,$$

onde  $G$  é a função de Green para o problema  $u''(x) + F(x) = 0$  com  $u(0) = u(1) = 0$ , ou seja,

$$G(x, t) = \begin{cases} x(1-t), & \text{se } x \leq t \\ t(1-x), & \text{se } t \leq x \end{cases}. \quad (3.2)$$

Denotaremos por  $C^1[0, 1]$  o espaço das funções continuamente diferenciáveis definidas em  $[0, 1]$  munido da norma

$$\|u\|_{C^1} = \|u\|_{\infty} + \|u'\|_{\infty} = \max_{0 \leq x \leq 1} |u(x)| + \max_{0 \leq x \leq 1} |u'(x)|.$$

Dessa forma, mostrar que existe solução para o problema (3.1) é equivalente a mostrar que o operador  $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$  definido por

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)F(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x$$

tem ponto fixo. Neste sentido, temos o seguinte teorema.

**Teorema 3.1.** *Sejam  $F : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  contínuas e suponha que existe uma constante  $\rho$ , independente de  $\lambda$ , tal que  $\|u\|_{C^1} \neq \rho$ , para toda solução  $u \in C^1[0, 1]$  de*

$$u(x) = \lambda \left( \int_0^1 G(x, t)F(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \right), x \in [0, 1] \quad (3.3)$$

onde  $\lambda \in (0, 1)$ . Então, o problema (3.1) tem ao menos uma solução  $u^* \in C^1[0, 1]$  tal que  $\|u^*\|_{C^1} \leq \rho$ .

**Demonstração:** Primeiramente, temos pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, que o operador  $T$  definido acima é contínuo e compacto. Além disso, sabemos que a solução de (3.3) é um ponto fixo de  $\lambda T$ . Dessa forma, seja

$$U = \{u \in C^1[0, 1]; \|u\|_{C^1} < \rho\}.$$

Então, como  $\|u\|_{C^1} \neq \rho$  ( $u \in C^1[0, 1]$ , solução de (3.3)), temos pela Alternativa de Leray-Schauder (fazendo  $p = 0$ ) que existe uma solução  $u^* \in \bar{U}$  de (3.2) tal que  $\|u^*\|_{C^1} \leq \rho$ .  $\square$

O resultado que acabamos de demonstrar garante a existência de solução geral para o problema proposto em (3.1). Agora, vamos apresentar um resultado que caracteriza um pouco mais a solução do supracitado problema.

**Teorema 3.2.** *Suponha que as seguintes condições ocorram:*

- A1.  $F(t, u, v) \geq 0$  para todo  $(t, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  e  $g(w) > 0, \forall w \in \mathbb{R}^{m-2}$ .
- A2.  $F(t, u, v) \leq a(t)w(|u|) + b(t)h(|v|)$  onde  $a, b : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  são contínuas e  $h, w : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  são contínuas e crescentes.
- A3.  $g(v) \leq r(\|v\|_\infty)$ , para todo  $v \in \mathbb{R}^{m-2}$  onde,  $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é contínua e crescente.
- A4. Existe  $\alpha > 0$  tal que  $\frac{d}{2}(w(\alpha) + h(\alpha)) + r(\alpha) < \frac{\alpha}{2}$  onde

$$d = \max\left\{\max_{s \in [0, 1]} |a(s)|, \max_{s \in [0, 1]} |b(s)|\right\}.$$

Então, o problema (3.1) tem ao menos uma solução positiva  $u^* \in C^1[0, 1]$  tal que  $\|u^*\|_{C^1} < \alpha$ , isto é,  $0 < u^*(t) < \alpha$  para todo  $t \in (0, 1]$ .

**Demonstração:** A idéia da demonstração deste resultado é aplicar o teorema anterior. Assim, considere

$$u(x) = \int_0^1 G(x, t) \widehat{F}(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \quad (3.4)$$

onde  $\widehat{F}(s, u, v) = F(s, |u|, v)$ ,  $(s, u, v) \in [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Note que  $\widehat{F}$  está bem definida e é contínua. É imediato de (A1) que,

$$u \text{ é não-nula e } u(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1].$$

Dessa forma, considere

$$u(x) = \lambda \left( \int_0^1 G(x, t) \widehat{F}(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \right) \quad (3.5)$$

Observe que,

$$G(x, t) = \begin{cases} t(1-x) & t \leq x \\ x(1-t) & x \leq t \end{cases} \quad (3.6)$$

e

$$\partial_x G(x, t) = \begin{cases} -t & t \leq x \\ (1-t) & x \leq t \end{cases} \quad (3.7)$$

logo,

$$G(x, t) = |\partial_x G(x, t)| \leq |\partial_x G(x, t)|.$$

Ainda, é fácil verificar que

$$\int_0^1 |\partial_x G(x, t)| dt \leq \frac{1}{2}. \quad (3.8)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(x)| = u(x) &= \lambda \left( \int_0^1 G(x, t) \widehat{F}(t, u(t), u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \right) \\ &\leq \int_0^1 G(x, t) F(t, |u(t)|, u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \\ &\leq \int_0^1 |\partial_x G(x, t)| F(t, |u(t)|, u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x, \end{aligned}$$

logo, por (A2), (A3) e (3.8) temos

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_0^1 |\partial_x G(x, t)| (a(t)w(|u(t)|) + b(t)h(|u'(t)|)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \\ &\leq w(\|u\|_\infty) \max_{t \in [0,1]} |a(t)| \int_0^1 |\partial_x G(x, t)| dt \\ &\quad + h(\|u'\|_\infty) \max_{t \in [0,1]} |b(t)| \int_0^1 |\partial_x G(x, t)| dt + r(\max\{|u(\eta_1)|, \dots, |u(\eta_{m-2})|\}) \\ &\leq \frac{d}{2} w(\|u\|_\infty) + \frac{d}{2} h(\|u'\|_\infty) + r(\|u\|_\infty) \end{aligned}$$

onde  $d$  é definido em (A4). Então,

$$\|u\|_\infty \leq \frac{d}{2} (w(\|u\|_\infty) + h(\|u'\|_\infty)) + r(\|u\|_\infty). \quad (3.9)$$

Além disso, posto que

$$|u'(x)| \leq \int_0^1 |\partial_x G(x, t)| F(t, |u(t)|, u'(t)) dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))$$

e procedendo como anteriormente concluímos que

$$\|u'\|_\infty \leq \frac{d}{2}(w(\|u\|_\infty) + h(\|u'\|_\infty)) + r(\|u\|_\infty). \quad (3.10)$$

Assim,

$$\|u\|_{C^1} \leq d(w(\|u\|_\infty) + h(\|u'\|_\infty)) + 2r(\|u\|_\infty). \quad (3.11)$$

Comparando (3.11) e (A4) segue que,  $\|u\|_{C^1} \neq \alpha$ . Dessa forma, aplicando o teorema anterior temos que (3.4) tem uma solução  $u^* \in C^1[0, 1]$  tal que  $\|u^*\|_{C^1} \leq \alpha$  com  $u^*(t) > 0$  para todo  $t \in (0, 1]$  ( $u^*(0) = 0$ ). Note que, se procedermos como foi feito acima concluímos que  $\|u^*\|_{C^1} < \alpha$ . É fácil verificar que  $u^*$  é solução de (3.1). De fato,

$$\begin{aligned} u^*(x) &= \int_0^1 G(x, t) \widehat{F}(t, u^*(t), u^{*'}(t)) dt + g(u^*(\eta_1), \dots, u^*(\eta_{m-2}))x \\ &= \int_0^1 G(x, t) F(t, |u^*(t)|, u^{*'}(t)) dt + g(u^*(\eta_1), \dots, u^*(\eta_{m-2}))x \\ &= \int_0^1 G(x, t) F(t, u^*(t), u^{*'}(t)) dt + g(u^*(\eta_1), \dots, u^*(\eta_{m-2}))x \end{aligned}$$

encerrando a prova do teorema.  $\square$

## 3.2 Soluções Positivas via Teorema de Krasnoselskii

Nesta seção vamos modificar o problema (3.1) a fim de aplicar o teorema de Krasnoselskii visto anteriormente. Assim, o novo problema com múltiplos pontos de fronteira é

$$\begin{cases} u''(t) + f(t, u(t)) = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{cases} \quad (3.12)$$

onde  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas possivelmente não lineares e  $\eta_1, \dots, \eta_{m-2} \in (0, 1)$ . Como visto anteriormente, sabemos que as soluções do problema (3.12) são pontos fixos do operador

$$T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1] \quad (3.13)$$

dado por

$$Tu(x) = \int_0^1 G(x,t)f(t,u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})), \quad (3.14)$$

onde  $C[0, 1]$  é o espaço das funções contínuas definidas em  $[0, 1]$  e equipado com a norma

$$\|u\|_{C^0} = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|,$$

e  $G$  é função de Green vista anteriormente, isto é,

$$G(x,t) = \begin{cases} t(1-x) & t \leq x \\ x(1-t) & x \leq t \end{cases}. \quad (3.15)$$

Observe que  $G$  tem as seguintes características:

i.  $G(x,t) \leq G(t,t)$  para todo  $(x,t) \in [0, 1] \times [0, 1]$ ;

ii.  $G(x,t) \geq pG(t,t)$  para todo  $(x,t) \in [p, 1-p] \times [0, 1]$  e  $0 < p < \frac{1}{2}$ .

Seja  $K = \{u \in C[0, 1]; u(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]\}$ . É fácil verificar que  $K$  define um cone em  $C[0, 1]$ . A seguir, exibiremos um resultado que garante a existência de uma solução neste cone com uma certa caracterização para mesma.

**Teorema 3.3.** *Suponha que as seguintes condições são satisfeitas:*

(B1)  $f$  é contínua em  $[0, 1] \times \mathbb{R}$  e  $f(x, u) \geq 0$  para todo  $(x, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+$ ;

(B2)  $f(x, u) \leq q(x)w(|u|)$ ,  $\forall (x, u) \in [0, 1] \times \mathbb{R}$ , onde  $q : [0, 1] \rightarrow [0, +\infty)$  e  $w : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  são contínuas com  $w$  não decrescente;

(B3)  $g : \mathbb{R}^{m-2} \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua, positiva e  $g(v) \leq r(\|v\|_\infty)$  onde  $\|v\|_\infty = \max\{|v_1|, \dots, |v_{m-2}|\}$  e  $r : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  é contínua e não decrescente;

(B4) Existe  $\alpha > 0$  tal que  $\alpha > dw(\alpha) + r(\alpha)$  onde

$$d = \sup_{x \in [0,1]} \int_0^1 G(x,t)q(t)dt;$$

(B5)  $f(x, u) \geq \tau(x)w(|u|)$  para todo  $(x, u) \in [p, 1-p] \times \mathbb{R}$  onde  $\tau : [p, 1-p] \rightarrow (0, +\infty)$  é contínua;

(B6) Existe  $\beta > 0$  com  $\beta < w(p\beta) \int_p^{1-p} G(\sigma, t)\tau(t)dt$  onde  $\sigma \in [0, 1]$  é definido por

$$\int_p^{1-p} G(\sigma, t)\tau(t)dt = \sup_{x \in [0,1]} \int_p^{1-p} G(x, t)\tau(t)dt.$$

Nestas condições o problema (3.12) tem uma solução positiva  $u^* \in C[0, 1]$  com

(a)  $\alpha < \|u^*\|_{C^0} \leq \beta$  e

$$\min_{x \in [p, 1-p]} u^*(x) > p\alpha \text{ se } \alpha < \beta$$

ou,

(b)  $\beta \leq \|u^*\|_{C^0} < \alpha$  e

$$\min_{x \in [p, 1-p]} u^*(x) > p\beta \text{ se } \alpha > \beta.$$

**Demonstração:** Pelo teorema de Arzelá-Ascoli temos que o operador  $T : C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$  dado anteriormente é contínuo e compacto. Agora, seja

$$C = \{u \in C[0, 1]; u(x) \geq 0 \text{ e } \min_{x \in [p, 1-p]} u(x) \geq p\|u\|_{C^0}\}.$$

É fácil verificar que  $C$  trata-se de um cone em  $C[0, 1]$ . Além disso, observe que  $T : C \rightarrow C$ .

De fato, temos por (B1)

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \geq 0$$

para todo  $x \in [0, 1]$ . Assim, por (i) temos que

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &= (Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \\ &\leq \int_0^1 G(t, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \end{aligned}$$

donde,

$$\|Tu\|_{C^0} \leq \int_0^1 G(t, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})). \quad (3.16)$$

Por outro lado, para cada  $x \in [p, 1-p]$  e por (ii) temos

$$\begin{aligned} (Tu)(x) &= \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \\ &\geq \int_0^1 pG(t, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))p \\ &= p \left( \int_0^1 G(t, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \right) \end{aligned}$$

logo, por (3.16) segue que

$$(Tu)(x) \geq p\|Tu\|_{C^0}, \forall x \in [p, 1-p]$$

e portanto,

$$\min_{x \in [p, 1-p]} (Tu)(x) \geq p\|Tu\|_{C^0}$$

donde segue que  $T(C) \subseteq C$ .

Sejam

$$\Omega_\alpha = \{u \in C[0, 1]; \|u\|_{C^0} < \alpha\}$$

e

$$\Omega_\beta = \{u \in C[0, 1]; \|u\|_{C^0} < \beta\},$$

vamos mostrar que:

$$\|Tu\|_{C^0} < \|u\|_{C^0} \text{ para todo } u \in C \cap \partial\Omega_\alpha \quad (3.17)$$

$$\|Tu\|_{C^0} > \|u\|_{C^0} \text{ para todo } u \in C \cap \partial\Omega_\beta. \quad (3.18)$$

Assim, seja  $u \in C \cap \partial\Omega_\alpha$  então,  $\|u\|_{C^0} = \alpha$ . Dessa forma, por (B2), (B3) e (B4) temos:

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &= (Tu)(x) \leq \int_0^1 G(x, t)q(t)w(u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})) \\ &\leq \int_0^1 G(x, t)q(t)w(\|u\|_{C^0})dt + r(\max\{u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2})\}) \\ &\leq w(\|u\|_{C^0}) \int_0^1 G(x, t)q(t)dt + r(\|u\|_{C^0}) \\ &\leq dw(\|u\|_{C^0}) + r(\|u\|_{C^0}). \end{aligned}$$

Então,  $\|Tu\|_{C^0} \leq dw(\|u\|_{C^0}) + r(\|u\|_{C^0}) = dw(\alpha) + r(\alpha) < \alpha = \|u\|_{C^0}$ . Portanto,  $\|Tu\|_{C^0} < \|u\|_{C^0}$  para todo  $u \in C \cap \partial\Omega_\alpha$ . Vamos mostrar a desigualdade dada em (3.18).

Assim, seja  $u \in C \cap \partial\Omega_\beta$  então, pela hipótese (B5) segue que

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &= (Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t))dt + g(u(\eta_1), \dots, u(\eta_{m-2}))x \\ &\geq \int_p^{1-p} G(x, t)\tau(t)w(u(t))dt. \end{aligned}$$

Agora, como  $u \in C$  e tomando  $\sigma$  definido em B6, temos

$$\begin{aligned}
|Tu(\sigma)| &\geq \int_p^{1-p} G(\sigma, t)\tau(t)w(u(t))dt \\
&\geq \int_p^{1-p} G(\sigma, t)\tau(t)w(p\|u\|_{C^0})dt \\
&= w(p\|u\|_{C^0}) \int_p^{1-p} G(\sigma, t)\tau(t)dt \\
&> \beta = \|u\|_{C^0}.
\end{aligned}$$

Portanto,  $\|Tu\|_{C^0} > \|u\|_{C^0}$  para todo  $u \in C \cap \partial\Omega_\beta$ . Assim, pelo Teorema 2.12 (se  $\beta < \alpha$ ) ou pelo Teorema 2.16 (se  $\alpha < \beta$ ), segue que existe um ponto fixo  $u^* \in C \cap \{u \in C[0, 1] : \min\{\alpha, \beta\} \leq \|u\|_{C^0} \leq \max\{\alpha, \beta\}\}$ , logo,  $\min\{\alpha, \beta\} \leq \|u^*\|_{C^0} \leq \max\{\alpha, \beta\}$ , então, usando o fato de  $u^* \in C$  segue que

$$\min_{x \in [p, 1-p]} u^*(x) \geq p \min\{\alpha, \beta\}.$$

Agora, vimos que

$$\|Tu\|_{C^0} < \|u\|_{C^0}, \text{ se } \|u\|_{C^0} = \alpha$$

e

$$\|Tu\|_{C^0} > \|u\|_{C^0}, \text{ se } \|u\|_{C^0} = \beta,$$

então como  $u^*$  é ponto fixo de  $T$  segue que  $\|u^*\|_{C^0} \neq \alpha$  e  $\|u^*\|_{C^0} \neq \beta$ . Dessa forma,

$$\alpha < \|u^*\|_{C^0} < \beta \text{ e } \min_{x \in [p, 1-p]} u^*(x) > p\alpha \text{ se, } \alpha < \beta$$

ou

$$\beta < \|u^*\|_{C^0} < \alpha \text{ e } \min_{x \in [p, 1-p]} u^*(x) > p\beta \text{ se, } \beta < \alpha.$$

□

**Observação 3.4.** O Teorema 3.2 visto na seção anterior, continuaria válido se considerássemos a função  $f$  dada no Teorema 3.3 com as hipóteses (B1)-(B4) (bastaria fazer  $F(x, u, v) = f(x, u)$ ), isto é, existe solução positiva  $u \in C[0, 1]$  com  $\|u\|_{C^0} \leq \alpha$  para o problema (3.12).

**Teorema 3.5.** *Suponha que (B1)-(B6) ocorram com  $\alpha < \beta$ . Então, o problema (3.12) tem ao menos duas soluções positivas  $u_0, u_1 \in C[0, 1]$  tais que*

$$0 < \|u_0\|_{C^0} < \alpha < \|u_1\|_{C^0} < \beta \text{ e } \min_{x \in [p, 1-p]} u_1(x) > p\alpha.$$

**Demonstração:** Da observação anterior temos que a existência de  $u_0$ . Do Teorema 3.3 segue imediatamente a existência de  $u_1$  e portanto o resultado.  $\square$

# Capítulo 4

## Soluções Numéricas

Neste capítulo vamos apresentar soluções numéricas para o problema

$$\begin{cases} u''(x) + f(x, u(x), u'(x)) = 0 \\ u(0) = 0, u(1) = g(u(\eta)) \end{cases}, \quad (4.1)$$

onde  $f : [0, 1] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas e  $\eta \in (0, 1)$ .

### 4.1 Resultados de Existência

Iniciaremos nosso estudo apresentando resultados que, em verdade, não são tão fortes como os vistos anteriormente mas contribuirão para estabelecer condições para o estudo numérico que se inicia.

**Teorema 4.1.** *Suponha que existem constantes positivas  $a_f, a_g, b_f, b_g$  tais que:*

$$|f(x, u, w)| \leq a_f(|u| + |w|) + b_f, \quad (4.2)$$

$$|g(u)| \leq a_g|u| + b_g \quad (4.3)$$

e

$$\frac{a_f}{2} + a_g < \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

para todo  $x \in [0, 1]$  e  $u, w \in \mathbb{R}$ . Então o problema (4.1) tem solução.

**Demonstração:** Considere operador  $T : C^1[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$  definido por

$$(Tu)(x) = \int_0^1 G(x, t)f(t, u(t), u'(t))dt + g(u(\eta))x$$

Sabemos que as possíveis soluções de (4.1) são pontos fixos do operador  $T$ . Posto que este operador é contínuo e compacto (Arzela-Ascoli), vamos mostrar que existe  $R > 0$  tal que  $T : \overline{B}(0, R) \rightarrow \overline{B}(0, R)$ . Daí, seguirá do teorema de Schauder que  $T$  tem ponto fixo. Com efeito, temos de (4.2) e (4.3) que,

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f(x, u(x), u'(x))| \leq a_f \|u\|_{C^1} + b_f \quad (4.5)$$

e

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |g(u(x))| \leq a_g \|u\|_{C^1} + b_g. \quad (4.6)$$

Então, como

$$\int_0^1 |G(x, t)|dt \leq \frac{1}{8} \text{ e } \int_0^1 |\partial_x G(x, t)|dt \leq \frac{1}{2}, \quad (4.7)$$

para todo  $x \in [0, 1]$ , concluímos que

$$\begin{aligned} |(Tu)(x)| &\leq \frac{1}{8} \max_{0 \leq x \leq 1} |f(x, u(x), u'(x))| + |g(u(\eta))| \\ &\leq \left( \frac{a_f}{8} + a_g \right) \|u\|_{C^1} + \frac{b_f}{8} + b_g. \end{aligned}$$

Procedendo de maneira similar, podemos constatar também que

$$|(Tu)'(x)| \leq \left( \frac{a_f}{2} + a_g \right) \|u\|_{C^1} + \frac{b_f}{2} + b_g.$$

Assim, pela hipótese (4.4) temos que

$$\max\{|Tu(x)|, |(Tu)'(x)|\} \leq \frac{R}{2},$$

para  $\|u\|_{C^1} \leq R$  tomando  $R$  suficientemente grande. Portanto, existe  $R > 0$  tal que  $\|Tu\|_{C^1} \leq R$  sempre que  $\|u\|_{C^1} \leq R$ , encerrando a demonstração do resultado.  $\square$

As soluções dadas pelo teorema anterior não podem ser calculadas iterativamente. Soluções iterativas são usualmente obtidas utilizando o Princípio de Contração (ver [1]). Neste sentido vamos precisar do resultado seguinte.

**Teorema 4.2.** *Suponha que as hipóteses do Teorema 4.1 ocorram. Além disso, suponha também que*

$$\frac{5d_f}{8} + 2d_g < 1, \quad (4.8)$$

onde,

$$d_f = \max\{|\partial_u f(x, u, w)| + |\partial_w f(x, u, w)|; |u| + |w| \leq R \text{ e } x \in [0, 1]\}$$

e

$$d_g = \max\{|g'(u)|; |u| \leq R\},$$

sendo  $R$  o raio dado no teorema anterior. Nestas condições, o problema (4.1) tem uma única solução. Além disso, esta solução é limite uniforme da seqüência iterativa  $u^{k+1} = Tu^k$ .

**Demonstração:** Vimos no teorema anterior que existe  $R > 0$  tal que  $T$  aplica  $\overline{B}(0, R)$  em  $\overline{B}(0, R)$ . Portanto, pelo teorema de ponto fixo de Banach, basta mostrarmos que  $T$  é uma contração em  $\overline{B}(0, R)$ . De fato, usando (4.7) e o teorema do valor médio, temos que

$$\begin{aligned} |(Tu - Tv)(x)| &\leq \frac{1}{8} \max |f(x, u, u') - f(x, v, v')| + |g(u(\eta)) - g(v(\eta))| \\ &\leq \frac{d_f}{8} \|u - v\|_{C^1} + d_g \|u - v\|_{C^1} \end{aligned}$$

e

$$\|Tu - Tv\|_{C^1} \leq \left( \frac{5d_f}{8} + 2d_g \right) \|u - v\|_{C^1}.$$

Assim, de (4.8) segue que  $T$  é uma contração em  $\overline{B}(0, R)$ , donde segue o resultado.  $\square$

## 4.2 Soluções Iterativas

Em vista do resultado anterior, vamos exibir simulações numéricas para o problema (4.1) por meio da fórmula

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= \int_0^x t(1-x)F(t, u^k(t), u^{k'}(t))dt \\ &\quad + \int_x^1 x(1-t)F(t, u^k(t), u^{k'}(t))dt + g(u(\eta))x, \end{aligned} \quad (4.9)$$

onde as integrais podem ser computadas usando a regra do trapézio e as aproximações de  $u(\eta)$  são calculadas via interpolação por spline cúbico. De maneira simples temos o seguinte algoritmo.

**Algoritmo 1**

- 1- Defina uma malha uniformemente espaçada  $\{x_j\}$ .
- 2- Escolha uma aproximação inicial  $u_j^0 = u^0(x_j)$ .
- 3- Para  $N = 1, 2, 3, \dots$ 
  - Compute  $u^N(\eta)$  usando interpolação por spline cúbico.
  - Compute  $u_j^{N+1}$  usando a formula (4.9) com a regra do trapézio.
  - Teste a convergência.
- 4- Finalize as iterações.

**Exemplo 1:** Considere o seguinte problema linear

$$\begin{aligned} u''(x) &= -6x \quad 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, \quad u(1) = g(u(\eta)), \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde  $g(t) = s/2$ , para vermos a dependência do método com relação ao valor de  $\eta$ . As soluções exatas para  $\eta = 0.12$ ,  $\eta = 0.58$  e  $\eta = 0.98$  são respectivamente,

$$u(x) = \frac{31223}{29375}x - x^3, \quad u(x) = \frac{225611}{177500}x - x^3 \quad \text{and} \quad u(x) = \frac{44117}{42500}x - x^3.$$

Obtivemos soluções numéricas considerando malhas com espaçamentos  $h = 0.1$  e  $h = 0.05$ , com aproximação inicial  $u^0 = 0$  e vários valores para  $\eta$ . Os resultados estão expostos nas tabelas 1 e 2, onde

$$E^N = \max |u_j^N - u(x_j)|,$$

representa o erro absoluto máximo na  $N$ -ésima iteração.

Tabela 1: Espaçamento da malha  $h = 0.1$ 

Iteration	$E^k (\eta = 0.12)$	$E^k (\eta = 0.58)$	$E^k (\eta = 0.98)$
1	.629106e-1	.271047e-0	.380470e-1
2	.377465e-2	.786099e-1	.198258e-1
3	.226494e-3	.228029e-1	.108974e-1
10	.165500e-7	.125188e-4	.237733e-2
20	.165500e-7	.858690e-5	.231920e-2
30	.165500e-7	.858690e-5	.231915e-2

Table 2: iterative method with mesh size  $h = 0.05$ 

Iteration	$E^k (\eta = 0.12)$	$E^k (\eta = 0.58)$	$E^k (\eta = 0.98)$
1	.629106e-1	.271047e-0	.380470e-1
2	.377463e-2	.786038e-1	.186396e-1
3	.226478e-3	.227951e-1	.913001e-2
10	.300000e-9	.393350e-5	.553160e-4
20	.300000e-9	.430000e-8	.651050e-5
30	.300000e-9	.520000e-8	.663300e-5

Pelo exposto acima, observamos que as soluções numéricas de (4.1) são muito sensíveis aos valores de  $\eta$ . As aproximações de  $u(\eta)$ , por meio de spline cúbico, perdem exatidão quando  $\eta$  aproxima-se de 1. Isso deve-se ao fato de que a condição de fronteira em  $x = 0$  é exata então as aproximações são melhores do que próximo de  $x = 1$  onde estas são calculadas usando outras aproximações.

### 4.3 Método de Tiros

Em alguns casos os métodos de tiros (ver [6]) fornecem resultados mais precisos do que o método iterativo usado anteriormente. Assim, vamos determinar soluções numéricas

para o problema (4.1) usando este método. Dessa forma, devemos transformar (4.1) no seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} u'' = f(x, u, u') & 0 < x < 1 \\ u(0) = 0 \\ u'(0) = v \end{cases} \quad (4.11)$$

cuja solução  $u = u(x, v)$  é aproximada usando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4). Então o problema é reduzido em determinar um vetor velocidade  $v$  tal que

$$u(1, v) - g(u(\eta, v)) = 0. \quad (4.12)$$

Assim, dados as aproximações iniciais  $v_0$  e  $v_1$ , temos através de um argumento de iteração linear

$$v_{k+1} = v_{k-1} + \frac{(g(u(\eta, v_k)) - u(1, v_k - 1))(v_k - v_{k-1})}{u(1, v_k) - u(1, v_{k-1})}, \quad k = 1, 2, 3... \quad (4.13)$$

converge para a solução de (4.12). De maneira simples, temos o seguinte algoritmo.

**Algoritmo 2**

- 1- Defina uma malha uniformemente espaçada  $\{x_j\}$ .
- 2- Escolha velocidades iniciais  $v_0, v_1$ .
- 3- Compute  $u_j(v_1) = u(x_j, v_1)$  usando RK4.
- 4- Para  $N = 1, 2, 3...$ 
  - Compute  $u(\eta, v_N)$  usando interpolação por spline cúbico.
  - Compute  $v_{N+1}$  pelo método das secantes (4.13).
  - Compute  $u_j(v_{N+1})$  usando RK4.
  - Teste a convergência.
- 4- Finalize as iterações.

**Observação 4.3.** *O método de tiros propriamente dito consiste em transformarmos um problema de valor de fronteira em um problema de valor inicial onde o vetor velocidade inicial deste novo problema é determinado de maneira que as soluções dos dois problemas coincidam.*

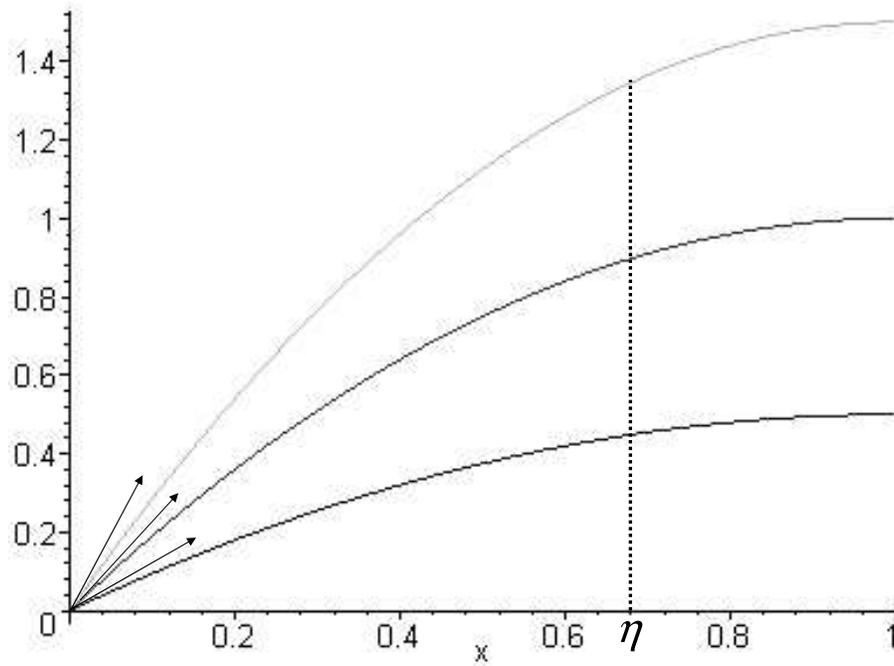


Figura 4.1: Método de tiros.

**Exemplo 2:** Considere o seguinte problema não linear

$$\begin{aligned} u''(x) &= u'^2 - 9x^4 + 3x^2 - 6x - 0.25, & 0 < x < 1, \\ u(0) &= 0, & u(1) &= g(u(\eta)), \end{aligned} \tag{4.14}$$

onde

$$g(s) = s^2 - 0.5180491164.$$

The exact solution is  $u(x) = 0.5x - x^3$ .

A solução exata é  $u(x) = 0.5x - x^3$ . Iremos comparar as soluções numéricas obtidas usando os dois algoritmos apresentados. Para o método iterativo (algoritmo 1) tomaremos  $u_j^0 = 0$  como chute inicial e as aproximações das derivadas  $u_j'$  são calculadas usando a fórmula de diferenças finitas centradas. Para o método de tiros, tomaremos velocidades iniciais  $v_0 = 0$  e  $v_1 = 1$ . Os resultados obtidos, fazendo  $h = 0.1$ , estão expostos na tabela a seguir.

Tabela 3:  $f$  dependendo de  $u'$  e  $\eta = 0.37$

Iteração	$E^N(\textit{iterativo})$	$E^N(\textit{tiros})$
1	.180491e-1	.2833946e-1
2	.177919e-2	.1053749e-1
3	.113632e-2	.1036038e-2
10	.115503e-2	.1498592e-4
20	.115503e-2	.1498592e-4
30	.115503e-2	.1498592e-4

O exemplo 2 mostra que o método de tiros pode ser mais vantajoso do que o método iterativo. Isto deve-se ao fato de que, neste exemplo,  $f$  depende essencialmente em  $u'$  e como o método iterativo computa as aproximações desta derivada usando diferenças finitas combinadas com regra do trapézio, é natural uma certa perda de exatidão nas soluções obtidas por este.

Finalizando nosso estudo numérico, vamos exibir um exemplo que mostra que os métodos apresentam resultados comparáveis quando  $\eta$  é próximo de 1.

**Exemplo 3:** Vamos considerar o mesmo problema apresentado no exemplo 1 e analisar os resultados do método de tiros para vários valores de  $\eta$ .

Tabela 4: Método de tiros com  $h = 0.1$  e vários valores de  $\eta$

Iteration	$E^k (\eta = 0.12)$	$E^k (\eta = 0.58)$	$E^k (\eta = 0.98)$
1	.339718e-2	.707489e-1	.178432e-1
2	.203845e-3	.205226e-2	.980768e-2
3	.122457e-4	.595706e-2	.587025e-3
10	.147000e-7	.875500e-5	.211289e-2
20	.147000e-7	.772900e-5	.208725e-2
30	.147000e-7	.772900e-5	.208723e-2

Como podemos observar na tabela acima as aproximações da solução também são sensíveis aos valores de  $\eta$  como foi observado no método iterativo visto anteriormente.

# Referências Bibliográficas

- [1] AGARWAL, R.P.; O'REGAN, D.; MEEHAN, M. **Fixed Point Theory and Applications**, Cambridge University Press, 2001.
- [2] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle, Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.
- [3] CASTELANI, E.V.; MA, T.F. Numerical solutions for a second order three-point boundary value problem, **Communications in Applied Analysis**. (aceito para publicação).
- [4] COELHO, F.U.; LOURENÇO, M.L. **Um Curso de Álgebra Linear**, Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.
- [5] GOEBEL, K.; KIRK W. A. **Topics in Metric Fixed Point Theory**, Cambridge University Press, 1990.
- [6] GOLUB, G.H.; ORTEGA, J.M. **Scientific Computing and Differential Equations**, Academic Press, San Diego, 1992.
- [7] GUO, D.; LAKSHMIKANTHAM, V. **Nonlinear Problems in Abstract Cones**, Academic Press, Orlando, 1988.
- [8] GUPTA, C.P.; TROFIMCHUK, S.I. A shaper condition for the solvability of a three-point second order boundary value problem, **Journal of Mathematical Analysis Aad Applications**, vol. 205, 586-597, 1997.

- [9] IL'IN, V.A.; MOISEEV, E.I. A nonlocal boundary value problem for the Sturm-Liouville operator in the differential and difference treatments, **Soviet Math. Dokl.** vol. 34, 507-511, (1987).
- [10] KARAKOSTAS, G.L.; TSAMATOS P.C. Sufficient conditions for the existence of nonnegative solutions of a nonlocal boundary value problem, **Applied Mathematics Letters**, vol. 15, 401-407, 2002.
- [11] KRASNOSEL'SKII, M.A. **Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations**, Noordhoff, Groningen, 1964.
- [12] LIMA, E.L. **Análise no  $\mathbf{R}^n$** , IMPA, Rio de Janeiro, 2002.
- [13] LIU, X.; QIU, J. ; GUO, Y. Three positive solutions for second-order m-point boundary value problems, **Applied Mathematics and Computation**, vol. 156, 733-742, 2004.
- [14] MUNKRES, J.R. **Topology**, Second Edition, Prentice-Hall, New Jersey, 2000.
- [15] THOMPSON, H.B.; TISDELL, C. Three-point boundary value problems for second-order, ordinary, differential equations, **Mathematical and Computer Modelling**, vol. 34, 311-318, 2001.
- [16] WEB, J.R.L. Positive solutions of some three point boundary value problems via fixed point index theory, **Nonlinear Analysis**, vol. 47, 4319-4332, 2001.
- [17] ZEIDLER, E. **Nonlinear Functional Analysis and its Applications: Part 1: Fixed-Point Theorems**, Springer Verlag, New York, 1989.