Métodos algébricos na obtenção de formas normais reversíveis equivariantes

Eralcilene Moreira Terézio

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA - PMA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
ORIENTADORA: Profª. Drª. Patricia Hernandes Baptistelli

MÉTODOS ALGÉBRICOS NA OBTENÇÃO DE FORMAS NORMAIS REVERSÍVEIS EQUIVARIANTES

Eralcilene Moreira Terézio

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática - PMA/UEM, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Maringá - PR
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Seção de Biblioteca – CPAQ/UFMS, Aquidauana, MS, Brasil)

T316m

Terézio, Eralcilene Moreira
Métodos algébrico na obtenção de formas normais reversíveis equivariantes / Eralcilene Moreira Terézio. -- Maringá, PR, 2014.
92 f. ; il. ; 30 cm.

Orientador: Patrícia Hernandes Baptistelli
Dissertação (mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Matemática. Departamento de Matemática. Universidade Estadual de Maringá.

1. Álgebra linear. 2. – Sistema linear. 3 - Algoritmos . I. Baptistelli, Patrícia Hernandes. II. Título.

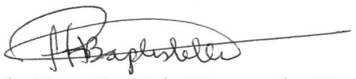
CDD (22) 512.5

ERALCILENE MOREIRA TERÉZIO

MÉTODOS ALGÉBRICOS NA OBTENÇÃO DE FORMAS NORMAIS REVERSÍVEIS EQUIVARIANTES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:



Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Prof. Dr. Cláudio Aguinaldo Buzzi
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – S. J. Rio Preto

Profa. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 31 de março de 2014.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Aos meus filhos, Felipe e Miguel.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por ter me capacitado, sustentado e instruído até aqui.

Em especial, agradeço ao meu namorado amado, Cleilton, pelo seu amor, sua amizade, cumplicidade, companheirismo e principalmente pela paciência comigo. E aos meus filhos, Felipe e Miguel, por serem a razão do meu viver.

Aos meus pais, Cid e Eralda, por tanto incentivo. Tenho certeza que estou realizando um sonho de vocês. Aos meus irmãos, Eralci e Eralciéli. Aos meus lindos sobrinhos Letícia, Larissa, Giovana e Hugo. Aos cunhados Carina e Ozéias e à família do Cleilton, que agora é minha também. Com certeza a família é o meu porto seguro.

À minha orientadora, professora Patricia, por ter aceitado me orientar e por sua paciência e dedicação para a realização deste trabalho. Não posso me esquecer das conversas, conselhos e distrações que foram vitais para que tudo desse certo. Também agradeço à professora Elenice por fazer esta ponte entre mim e a professora Patricia. Tenho um enorme carinho por vocês duas.

Aos amigos da pós-graduação, pela companhia e horas de estudo juntos! Também aos professores do departamento de Matemática da UEM, que fizeram parte da minha vida acadêmica.

Por fim, agradeço ao CNPq e à CAPES pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a conclusão desta dissertação.

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar um método algébrico para determinar formas normais formais para campos de vetores reversíveis equivariantes. O procedimento é uma adaptação do método clássico dado por Belitskii [8, 9] e Elphick *et al.* [17] combinado com ferramentas da teoria de invariantes de grupos.

Palavras-chave: Formas normais, teoria de invariantes, simetrias, reversibilidades, operador homológico.

Abstract

This work aims to present an algebraic method to determine formal normal forms for reversible equivariant vector fields. We adapt the classical method given by Belitskii [8, 9] and Elphick *et al.* [17] and we use tools from invariant theory of groups.

Keywords: Normal forms, invariant theory, symmetries, reversibilities, homological operator.

Sumário

Introdução **1**

1 Preliminares **4**
1.1 Germes de aplicações 4
1.2 Teoria de representação 5
1.3 Teoria de invariantes 10
1.4 Teoria reversível equivariante 14
1.4.1 Calculando geradores 17
1.5 Teoria de invariantes para o produto direto 27
1.5.1 Ação diagonal 29

2 Teoria de formas normais **33**
2.1 O método do operador adjunto 34
2.2 O método de Elphick *et al.* 46
2.3 Formas normais equivariantes 51
2.4 Formas normais reversíveis equivariantes 56

3 Formas normais $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes **67**
3.1 Classificação de involuções 68
3.2 Algoritmo 69
3.3 Exemplos 73
3.3.1 O caso não ressonante 74
3.3.2 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ 78
3.3.3 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2 : 0)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^3$ 83
3.3.4 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2 : 0)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$ 87

Referências **93**

Índice de notações **96**

Índice Remissivo **98**

Introdução

O termo "sistemas dinâmicos" refere-se a uma área da Matemática que estuda os sistemas físicos que evoluem e alteram sua configuração com o tempo. Estes sistemas podem ser aplicados em muitas áreas da ciência, por exemplo, para modelar fenômenos biológicos, problemas em Astronomia, Mecânica e Eletrônica. Na maioria das vezes, não é possível encontrar soluções exatas para tais sistemas. Por este motivo o que se procura é uma compreensão qualitativa ou topológica das soluções. Quando o interesse é bifurcações de pontos de equilíbrio ou de soluções periódicas, a redução de Lyapunov-Schmidt e a teoria de formas normais são facilitadores no estudo de sistemas. A importância desta última despertou o interesse de vários autores como Belitskii [8, 9], Birkhoff [10], Elphick *et al.* [17] e Poincaré [29], que desenvolveram a teoria como uma ferramenta para o estudo local do comportamento qualitativo de campos vetoriais. Outros autores têm usado a teoria de formas normais em diferentes contextos para o estudo de ciclos limites, famílias de órbitas periódicas, equilíbrios relativos e soluções periódicas relativas, como por exemplo [15, 21, 24, 26, 27].

Consideramos o sistema

$$\dot{x} = h(x), \tag{1}$$

definido em um espaço vetorial de dimensão finita V, onde $h : V \longrightarrow V$ é um campo vetorial de classe C^∞ (suave). O interesse da dinâmica em teoria de formas normais é local, em torno de um ponto singular que assumimos ser a origem. Logo, $h(0) = 0$ e h é suave em torno deste ponto. O método clássico da teoria de formas normais consiste em realizar mudanças de coordenadas em torno de $x = 0$ que são perturbações da identidade, $\xi = \mathrm{Id} + \xi^k$, onde $k \geq 2$ e ξ^k é um polinômio homogêneo de grau k. O objetivo é, mantendo a parte linear do sistema, extinguir o maior número possível de termos de grau k no campo vetorial original, obtendo um campo vetorial conjugado a (1) escrito em uma forma mais simples e mais conveniente. Belitskii [8, 9] reduz este problema ao cálculo do núcleo do chamado operador homológico. Considerando uma série de potências formal

para o campo vetorial h como

$$L + h^2 + h^3 + \ldots,$$

onde L é a linearização do campo h na origem e h^k é um polinômio homogêneo de grau k, o operador homológico está associado ao adjunto L^t da linearização L. Em cada nível k, o método consiste em restringir o operador homológico ao espaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k e determinar o seu núcleo. Em [16] encontramos outro método para fazer isto, a saber, o método de representação matricial, que considera a matriz do operador homológico a fim de obter o seu núcleo. Ambos são eficientes se truncarmos a série de potências de h em um baixo grau, pois os cálculos se tornam cada vez mais complicados conforme o grau aumenta.

O foco deste trabalho é quando o campo vetorial h é reversível equivariante sob a ação de um grupo de Lie compacto Γ. Este é o caso em que as equações que regem o sistema são invariantes pela ação de Γ, que é formado pelas simetrias e antissimetrias do problema. Mais especificamente, dados um grupo de Lie compacto Γ agindo em V e $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ um epimorfismo (homomorfismo sobrejetor) de grupos, dizemos que h em (1) é $\Gamma-$reversível-equivariante se

$$h(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma h(x), \ \forall \gamma \in \Gamma, \ x \in V. \tag{2}$$

Neste caso, $\gamma \in \Gamma_+ = \ker \sigma$ é chamado simetria de Γ e $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_+$ é chamado antissimetria ou reversibilidade de Γ. Do ponto de vista da dinâmica, $\gamma \in \Gamma$ aplica trajetórias do sistema (1) sobre outras trajetórias, preservando a direção no tempo se $\gamma \in \Gamma_+$ e revertendo a direção no tempo se $\gamma \in \Gamma \backslash \Gamma_+$. No caso em que σ é o homomorfismo trivial, dizemos que h satisfazendo (2) é $\Gamma-$equivariante (Γ não possui reversibilidades).

É grande o interesse no estudo de sistemas dinâmicos que são reversíveis equivariantes e o início deste estudo foi essencialmente a classificação de campos vetoriais lineares reversíveis equivariantes, em termos da teoria de representação de grupos, feita por Lamb e Roberts em [22]. Muitos outros resultados apareceram desde então, como por exemplo [2, 4, 5, 13, 14, 26], entre outros. Segue do método clássico que se h é reversível equivariante sob a ação de um grupo Γ, então a forma normal herda as simetrias e antissimetrias do sistema se as mudanças de coordenadas forem $\Gamma-$equivariantes.

No contexto geral, Elphick *et al.*[17] fornecem um método algébrico alternativo ao método de Belitskii, em que é possível obter a forma normal escolhendo termos não lineares

que são equivariantes sob a ação de um grupo $\mathbf{S}$ a um parâmetro, dado por

$$\mathbf{S} = \overline{\{e^{sL^t} : \ s \in \mathbb{R}\}}.$$

Quando h em (1) é $\Gamma-$equivariante, a forma normal truncada é $\mathbf{S} \times \Gamma-$equivariante ([18, Theorem XVI 5.9]). Neste trabalho, mostramos que se h é $\Gamma-$reversível-equivariante, então a forma normal truncada é $\mathbf{S} \rtimes \Gamma-$reversível-equivariante (Teorema 2.29). Uma das vantagens deste resultado é poder truncar a série de potências de h em qualquer grau, pois a dificuldade de se computar os geradores para o módulo dos $\mathbf{S} \rtimes \Gamma-$reversíveis-equivariantes independe do grau. Para isto, usamos ferramentas algébricas da teoria de invariantes.

O trabalho está organizado como segue. No Capítulo 1, introduzimos notações, definições e resultados preliminares referentes à teoria de invariantes. Destacamos dentre os resultados o algoritmo para o cálculo de geradores reversíveis equivariantes sob a ação de um grupo de Lie compacto. Para estabelecer o algoritmo, usamos os chamados operadores de Reynolds, que são homomorfismos de módulos sob o anel de invariantes cuja restrição à sua imagem é a identidade. Notamos que, em geral, o grupo $\mathbf{S}$ não é compacto e compacidade é assumida nos algoritmos. Entretanto, observamos que estes podem ser igualmente usados sempre que o anel de invariantes e o módulo dos equivariantes sob a ação de $\mathbf{S}$ forem finitamente gerados.

O Capítulo 2 descreve a teoria de formas normais. A primeira seção expõe o método clássico, desenvolvido primeiramente por Belitskii. A Seção 2.2 expõe a alternativa proposta por Elphick *et al.* estabelecida pela determinação dos geradores $\mathbf{S}-$equivariantes. A Seção 2.3 se dedica a uma adaptação do método de Elphick para se obter formas normais para o sistema (1), impondo que h seja $\Gamma-$equivariante. A Seção 2.4 ganha destaque com o Teorema 2.29, que é o cerne do nosso trabalho, ou seja, esta seção expõe um método algébrico para se obter formas normais para o sistema (1) quando h é $\Gamma-$reversível-equivariante.

O Capítulo 3 está dedicado a exemplos que ilustram o método exposto na Seção 2.4. Com base no algoritmo 1.36, aplicamos o Teorema 2.29 e provamos um método para encontrar geradores para o módulo dos $\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes.

Capítulo 1

Preliminares

Como mencionamos na Introdução, as simetrias e antissimetrias de um sistema dinâmico regido por EDOs são especificadas em termos de um grupo de transformações que preservam a estrutura das equações. Desta forma, a descrição formal da ocorrência de simetrias e antissimetrias em um modelo matemático se dá por meio da teoria de representação de grupos. Neste capítulo, apresentamos alguns conceitos básicos desta teoria como o de ação de um grupo em um espaço vetorial e o de integração invariante. Também apresentamos conceitos e resultados referentes à teoria de invariantes de grupos compactos, que fornecem uma base teórica para muitos dos cálculos apresentados neste trabalho. Na Seção 1.4, introduzimos definições e resultados da teoria reversível equivariante, destacando o Teorema 1.35, que nos fornece um método algébrico para se determinar geradores reversíveis equivariantes. Começamos introduzindo o conceito de germe de uma aplicação. Para maiores detalhes, podemos ver [1, 2, 18, 19].

1.1 Germes de aplicações

Consideramos o conjunto de todas as aplicações $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^p$, de classe C^∞, definidas em alguma vizinhança U de um ponto $a \in U$. Neste conjunto, definimos a seguinte relação: Dadas $f_1 : U_1 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ e $f_2 : U_2 \longrightarrow \mathbb{R}^p$ aplicações suaves com U_1, U_2 abertos de $\mathbb{R}^n$ contendo a, dizemos que f_1 e f_2 são equivalentes, e denotamos $f_1 \sim f_2$, se existe um aberto $U \subset U_1 \cap U_2$ contendo a tal que $f_1|_U$ e $f_2|_U$ coincidem. Claramente, esta é uma relação de equivalência.

Definição 1.1. *As classes de equivalência pela relação acima são chamadas de germes de aplicações em a. Se f é um representante do germe em a então denotamos*

$f : (\mathbb{R}^n, a) \longrightarrow \mathbb{R}^p$.

Vamos comumente confundir o representante com o germe. Nosso maior interesse está em germes de aplicações de V em V e em germes de funções de V em $\mathbb{R}$, onde V é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial de dimensão finita. Sem perda de generalidade, assumimos a sendo a origem.

Denotamos por $\mathcal{P}_V$ o espaço das funções polinomiais $V \longrightarrow \mathbb{R}$, por $\vec{\mathcal{P}}_V$ o espaço das aplicações polinomiais $V \longrightarrow V$, por $\mathcal{E}_V$ o conjunto dos germes de funções $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ e por $\vec{\mathcal{E}}_V$ o conjunto dos germes de aplicações $g : (V, 0) \longrightarrow V$. $\mathcal{E}_V$ e $\vec{\mathcal{E}}_V$ também têm estrutura de espaço vetorial real. Além disso, $\mathcal{E}_V$ e $\mathcal{P}_V$ são anéis, enquanto que $\vec{\mathcal{E}}_V$ e $\vec{\mathcal{P}}_V$ são módulos sobre $\mathcal{E}_V$ e $\mathcal{P}_V$, respectivamente.

1.2 Teoria de representação

Nesta seção, apresentamos alguns tópicos básicos sobre grupos de Lie, dentre eles exemplos, ação em um espaço vetorial e a existência de uma integral invariante. Daqui em diante, assumimos familiaridade com conceitos elementares da teoria de grupos, tais como: subgrupos, subgrupos normais, homomorfismos e grupos quocientes. Assumimos também familiaridade com conceitos topológicos elementares em $\mathbb{R}^n$, como: conjuntos abertos, fechados e compactos.

Definição 1.2. *Um grupo G munido de uma operação $*$ é dito um grupo de Lie se satisfaz as seguintes condições:*

- *G é uma variedade diferenciável;*
- *As operações do grupo*

$$\begin{array}{rcl} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g,h) & \longmapsto & g * h \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

  são de classe C^∞.

Se a operação $*$ é comutativa, dizemos que o grupo de Lie $(G, *)$ é abeliano. E se G é uma variedade compacta dizemos que $(G, *)$ é um grupo de Lie compacto.

Exemplo 1.3. Seja $Gl(n)$ o grupo de todas as transformações lineares invertíveis de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, que pode ser visto como o grupo das matrizes reais $n \times n$ invertíveis, isto é,

$$Gl(n) = \{A \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : \ \det(A) \neq 0\}.$$

Vejamos que $Gl(n)$ é um grupo de Lie. Temos que $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial de dimensão n^2 e, portanto, é isomorfo a $\mathbb{R}^{n^2}$. Logo, $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é uma variedade diferenciável. Como a função determinante dada por

$$\begin{array}{rccc} \det: & M_{n\times n}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & \det(A) \end{array}$$

é uma aplicação contínua e $Gl(n)$ é a imagem inversa de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, segue que $Gl(n)$ é um aberto de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Portanto, $Gl(n)$ é uma variedade diferenciável. Além disso, as operações de $Gl(n)$ são C^∞. De fato, temos que a multiplicação de matrizes é polinomial e, portanto, C^∞. A inversão de matrizes é uma aplicação racional, com denominador diferente de 0, e assim C^∞. Portanto, $Gl(n)$ é um grupo de Lie.

Em nosso contexto, estamos interessados em grupos de Lie lineares. Podemos definí-los da seguinte forma:

Definição 1.4. *Um grupo de Lie linear é um subgrupo fechado* Γ *de* $Gl(n)$.

Ou seja, Γ é um subconjunto fechado de $Gl(n)$ com estrutura de grupo. O nome grupo de Lie linear faz sentido pois é um subgrupo do grupo de matrizes.

Proposição 1.5 ([1], Theorem 2.27)**.** *Um subgrupo fechado* H *de um grupo de Lie* G *é um subgrupo de Lie. Se* G *é compacto, então* H *é compacto.*

Segue da proposição acima que todo grupo de Lie linear é um subgrupo de Lie. Como $Gl(n) \subset M_{n\times n}(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$ e $\mathbb{R}^{n^2}$ é um espaço topológico, podemos falar das propriedades topológicas de grupos de Lie, bem como das algébricas. Em particular, dizemos que um grupo de Lie contido em $Gl(n)$ é compacto ou conexo se o for como subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$. De maneira mais geral, é possível provar que todo grupo de Lie compacto é topologicamente isomorfo a um grupo de Lie linear (Bourbaki [11]).

Exemplo 1.6. (a) O grupo ortogonal $O(n)$ consiste de todas as matrizes quadradas $n \times n$, com entradas em $\mathbb{R}$, que satisfazem $AA^t = I_n$, onde I_n denota a matriz identidade de ordem n e A^t é a transposta de A. Isto é, $O(n)$ consiste de todas as matrizes quadradas que satisfazem $A^{-1} = A^t$, onde $\det(A) = \pm 1$. É fácil verificar que $O(n)$ é um grupo de Lie linear compacto. Um caso particular é $O(2)$, que é formado pelas matrizes do tipo

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \text{-sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \text{-cos}\theta \end{pmatrix},$$

com $\theta \in \mathbb{R}$.

(b) O grupo ortogonal especial ou de rotações $SO(n)$ é formado por todas as matrizes $A \in O(n)$ tal que $\det(A) = 1$. Claramente, $SO(n)$ é um subgrupo fechado e limitado de $O(n)$, donde é um subgrupo de Lie compacto de $O(n)$. Em particular, $SO(2)$ consiste precisamente das rotações no plano

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \text{-sen}\theta \\ \text{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Vale observar que podemos identificar $SO(2)$ com o grupo do círculo S^1 por $R_\theta \longmapsto \theta$. Já o grupo $O(2)$ pode ser gerado por $SO(2)$ juntamente com a reflexão $\kappa = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(c) Consideramos $\mathbb{Z}_n$ o grupo cíclico de ordem n. Este grupo pode ser identificado com o grupo das matrizes 2×2 gerado por $R_{\frac{2\pi}{n}}$, donde segue que $\mathbb{Z}_n$ é um grupo de Lie.

(d) Consideramos o grupo diedral D_n, de ordem $2n$, gerado por $\mathbb{Z}_n$ junto com um elemento de ordem 2 que não comuta com $\mathbb{Z}_n$. Identificamos D_n com o grupo das matrizes 2×2 gerado por $R_{\frac{2\pi}{n}}$ e pela reflexão κ. Logo, D_n é um grupo de Lie linear que representa geometricamente o grupo das simetrias do polígono regular de n lados.

(e) Todo grupo finito é isomorfo a um grupo de Lie linear.

(f) O $n-$toro $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ (n parcelas) é isomorfo a um grupo de Lie linear. Para ver isto, identificamos $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in T^n$ com a matriz

$$\begin{pmatrix} R_{\theta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_{\theta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & R_{\theta_n} \end{pmatrix} \in Gl(2n).$$

Definição 1.7. *Sejam Γ um grupo de Lie munido de uma operação $*$ e V um espaço vetorial real de dimensão finita. Dizemos que Γ age (linearmente) em V se existe uma aplicação contínua*

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ & (\gamma, x) & \longmapsto & \gamma \cdot x \end{array}$$

tal que:

1. *Para cada* $\gamma \in \Gamma$ *a aplicação* $\rho_\gamma : V \longrightarrow V$ *dada por* $\rho_\gamma(x) = \gamma \cdot x$ *é linear;*

2. *Se* $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ *então* $\phi(\gamma_1, \phi(\gamma_2, x)) = \phi(\gamma_1 * \gamma_2, x)$, *ou seja,* $\gamma_1 \cdot (\gamma_2 \cdot x) = (\gamma_1 * \gamma_2) \cdot x$.

A aplicação ϕ é chamada uma ação de Γ em V. A aplicação ρ que associa γ a um elemento ρ_γ em $Gl(V)$, grupo das transformações lineares invertíveis de V em V, é chamada uma representação de Γ em V. Como para cada $\gamma \in \Gamma$, $\rho_\gamma : V \longrightarrow V$ é um operador linear, podemos associar a ρ_γ uma matriz $\rho(\gamma)$ numa certa base de V. Neste caso, a ação de $\gamma \in \Gamma$ em $x \in V$ pode ser vista como a multiplicação desta matriz pelo vetor x, ou seja, $\gamma \cdot x = \rho(\gamma)x$. No decorrer do texto, frequentemente omitimos o ponto " $\cdot$ ".

Naturalmente, a cada ação corresponde uma representação e vice-versa. Denotamos por (ρ, V) o espaço vetorial V sob a representação ρ de Γ em V. Quando não houver dúvidas quanto a usarmos a ação ou a representação de Γ em V, escrevemos γx ou $\rho(\gamma)x$ indistintamente.

Todo grupo de Lie compacto Γ em $Gl(n)$ pode ser identificado com um subgrupo do grupo ortogonal $O(n)$ (Proposição 1.10). Na prova deste resultado, os autores em [19] usam a integral de Haar, uma forma de integração que é invariante por translação de elementos de Γ e que pode ser definida abstratamente como uma operação que satisfaz três propriedades:

Definição 1.8. *Seja* $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua a valores reais. A operação*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma) \text{ ou } \int_\Gamma f \text{ ou } \int_\Gamma f \mathrm{d}\gamma \in \mathbb{R}$$

é uma integral de Haar em Γ *se satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *Linearidade:*

$$\int_\Gamma (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_\Gamma f + \mu \int_\Gamma g,$$

onde $f, g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ *são contínuas e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

(ii) *Positividade: Se* $f(\gamma) \geq 0$, *para todo* $\gamma \in \Gamma$, *então* $\int_\Gamma f \geq 0$;

(iii) *Invariância por translação:*

$$\int_{\gamma \in \Gamma} f(\delta\gamma) = \int_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma),$$

para qualquer $\delta \in \Gamma$ *fixado.*

Se Γ é compacto, então $\int_\Gamma 1$ é finita e podemos considerar $\int_\Gamma 1 = 1$. Isto define a integral de Haar normalizada. Além disso, se Γ é compacto então a integral de Haar é também invariante por translações à direita, isto é,

$$\int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma\delta) = \int_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma),$$

para todo $\delta \in \Gamma$ fixado.

A prova da existência e unicidade da integral de Haar é um resultado sofisticado que será omitido aqui. Para maiores detalhes podemos ver [27, II Theorem 1].

Observação 1.9. *Se Γ é um grupo de Lie finito de ordem $|\Gamma|$, então a integral de Haar normalizada em Γ é dada por*

$$\int_\Gamma f \equiv \frac{1}{|\Gamma|}\sum_{\gamma\in\Gamma} f(\gamma).$$

A definição de integral de Haar pode ser estendida para aplicações contínuas $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^m$, realizando a integração separadamente em cada entrada:

$$\int_\Gamma f(\gamma)\mathrm{d}\gamma = \int_\Gamma (f_1(\gamma),\ldots,f_m(\gamma))\mathrm{d}\gamma = \left(\int_\Gamma f_1(\gamma)\mathrm{d}\gamma,\ldots,\int_\Gamma f_m(\gamma)\mathrm{d}\gamma\right),$$

com $f_j : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, $\int_\Gamma f(\gamma)\ \mathrm{d}\gamma \in \mathbb{R}^m$.

A partir de agora, V e W denotam espaços vetoriais reais de dimensão finita. O próximo resultado garante que qualquer representação de um grupo de Lie compacto pode ser identificado com um grupo de matrizes ortogonais. Para tanto, seja $\langle\ ,\ \rangle : V\times V \longrightarrow \mathbb{R}$ um produto interno em V. A ideia da demonstração do resultado é construir, através da integral de Haar, um novo produto interno $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ invariante por Γ em V, ou seja, $\langle\ ,\ \rangle_\Gamma$ satisfaz

$$\langle\rho(\gamma)v,\rho(\gamma)w\rangle_\Gamma = \langle v,w\rangle_\Gamma,\ \forall\gamma\in\Gamma,\ v,w\in V.$$

Proposição 1.10 ([19], XII Proposition 1.3)**.** *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e seja $\rho(\gamma)$ a matriz associada a $\gamma \in \Gamma$ pela representação ρ. Então existe um produto interno em V tal que para todo $\gamma \in \Gamma$, $\rho(\gamma)$ é ortogonal, ou seja, $\rho(\gamma) \in O(n)$.*

Desta forma, sem perda de generalidade assumimos que se Γ é compacto então a ação de Γ em V é ortogonal. Um outro resultado é uma consequência do teorema de Fubini ([12], I Proposition 5.16), que nos dá a integral de Haar em um grupo de Lie compacto como a soma de duas integrais. O resultado é como segue:

Teorema 1.11. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e $\Sigma \subset \Gamma$ um subgrupo de índice 2 de Γ. Para qualquer $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua temos*

$$\int_{\Gamma} f(\gamma) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Sigma} f(\gamma) + \int_{\Sigma} f(\delta\gamma)\right),$$

para $\delta \in \Gamma \backslash \Sigma$ fixado.

A integração de Haar também será nossa ferramenta no Capítulo 2, na prova do Teorema 2.29.

1.3 Teoria de invariantes

O objetivo desta seção é apresentar uma forma eficiente de descrever aplicações que comutam com a ação de um grupo. Este é o primeiro passo para o estudo da estrutura de um sistema de equações invariantes pela ação dada. Destacamos dois resultados essenciais na teoria de invariantes: o teorema de Hilbert-Weyl, que dá uma base teórica para descrever os polinômios invariantes, e o Teorema 1.20, que garante que o módulo de equivariantes é finitamente gerado.

Definição 1.12. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V. Dizemos que uma função a valores reais $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é invariante sob a ação de Γ, ou é $\Gamma-$invariante, se*

$$f(\rho(\gamma)x) = f(x),$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$.

Um polinômio $\Gamma-$invariante é definido da mesma maneira tomando f como polinômio. Para mostrar que uma função f é invariante, basta verificar a condição de invariância para um conjunto de geradores de Γ.

Denotamos o conjunto das funções polinomiais $\Gamma-$invariantes em V por $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e o conjunto dos germes de funções $\Gamma-$invariantes $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $\mathcal{E}_V(\Gamma)$. Notamos que $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é um anel uma vez que somas e produtos de polinômios $\Gamma-$invariantes são ainda $\Gamma-$invariantes. Da mesma forma, $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ tem estrutura de anel.

Definição 1.13. *Dizemos que um conjunto finito $\{u_1, \ldots, u_s\}$ de funções polinomiais $\Gamma-$invariantes gera $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se todo polinômio invariante $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser escrito em função de $u_1, \ldots, u_s$, ou seja, se existe uma função polinomial $F : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

$$f(x) = F(u_1(x), \ldots, u_s(x)).$$

Este conjunto finito de geradores é chamado de base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ *e denotamos* $\mathcal{P}_V(\Gamma) = \langle u_1, \ldots, u_s \rangle$.

Teorema 1.14 ([19], XII Theorem 4.2 (Hilbert-Weyl))**.** *Seja* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V*. Então existe uma base de Hilbert para o anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Um resultado semelhante ao teorema anterior é válido para germes de funções $\Gamma-$invariantes de classe C^∞. O resultado é devido a Schwarz:

Teorema 1.15 ([19], XII Theorem 4.3)**.** *Sejam* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V*,* $\{u_1, \ldots, u_s\}$ *uma base de Hilbert para* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ *e* $f \in \mathcal{E}_V(\Gamma)$*. Então existe um germe* $F \in \mathcal{E}_s$ *tal que*

$$f(x) = F(u_1(x), \ldots, u_s(x)),$$

onde $\mathcal{E}_s$ *denota o anel dos germes de funções* $F : (\mathbb{R}^s, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ *numa vizinhança de* 0 *de classe* C^∞.

Exemplo 1.16. (a) Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\}$ agindo em $V = \mathbb{R}$ como $(-1)x = -x$. Assim, qualquer função que satisfaça $f(-x) = f(x)$ é invariante sob $\mathbb{Z}_2$, ou seja, f é uma função par. Se f é um polinômio invariante então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(x^2)$. Neste caso, $u(x) = x^2$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$.

(b) Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ como $\theta z = e^{\mathbf{i}\theta} z$. Uma função é invariante em S^1 se $f(e^{\mathbf{i}\theta} z) = f(z)$, para todo $\theta \in S^1$ e $z \in \mathbb{C}$. Desde que $\theta \mapsto e^{\mathbf{i}\theta}$ determina um círculo de raio $|z|$ centrado na origem, vemos que as funções que são S^1-invariantes são aquelas que são constantes no círculo.

Vamos agora mostrar que se f é um polinômio S^1-invariante em $\mathbb{C}$ então existe um polinômio $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\overline{z})$, ou seja, $\{u(z) = z\overline{z}\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$. Escrevemos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$f(z) = \sum a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta, \ a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}. \tag{1.1}$$

Como $f = \overline{f}$, segue que $a_{\beta\alpha} = \overline{a}_{\alpha\beta}$. Assim,

$$f(e^{\mathbf{i}\theta} z) = \sum a_{\alpha\beta} (e^{\mathbf{i}\theta} z)^\alpha \left(\overline{e^{\mathbf{i}\theta} z}\right)^\beta = \sum a_{\alpha\beta} e^{\alpha \mathbf{i}\theta} z^\alpha e^{-\beta \mathbf{i}\theta} \overline{z}^\beta.$$

Como $f(e^{\mathbf{i}\theta} z) = f(z)$ segue que $a_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} e^{\mathbf{i}\theta(\alpha-\beta)}$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Isto é satisfeito se $a_{\alpha\beta} = 0$ ou $e^{\mathbf{i}\theta(\alpha-\beta)} = 1$, o que implica que $\alpha = \beta$. Desta forma,

$f(z) = \sum a_{\alpha\alpha}(z\overline{z})^{\alpha}$. Ou seja, se $h(x) = \sum a_{\alpha\alpha}x^{\alpha}$ temos o resultado desejado.

(c) Seja $\Gamma = D_n$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, onde a rotação θ e a reflexão κ agem como

$$\theta z = e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}}z \quad \text{e} \quad \kappa z = \overline{z}.$$

Afirmamos que para todo polinômio D_n-invariante $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ existe um polinômio $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(z) = g(z\overline{z}, z^n + \overline{z}^n)$, isto é, $\{u_1(z) = z\overline{z},\ u_2(z) = z^n + \overline{z}^n\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$. Para provar esta afirmação, procedemos de modo análogo ao item anterior. Escrevemos f como em (1.1). Assim como no exemplo anterior, $f = \overline{f}$, o que implica que

$$\overline{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.2}$$

Como $f(e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}}z) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$, cálculos diretos nos mostram que

$$a_{\alpha\beta} = e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}(\alpha-\beta)}a_{\alpha\beta}. \tag{1.3}$$

Da invariância de f com relação a κ, temos $f(z) = f(\overline{z})$, donde

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.4}$$

De (1.2) e (1.4) temos que $\overline{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} = a_{\alpha\beta}$, donde temos

$$a_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

De (1.3), $a_{\alpha\beta} = 0$ ou $e^{\frac{2\pi\mathbf{i}}{n}(\alpha-\beta)} = 1$, o que implica que $a_{\alpha\beta} = 0$ a menos que

$$\alpha \equiv \beta (\text{mod } n). \tag{1.6}$$

De (1.4), (1.5) e (1.6), reescrevemos (1.1) como

$$f(z) = \sum_{\alpha\leq\beta} A_{\alpha\beta}(z^{\alpha}\overline{z}^{\beta} + \overline{z}^{\alpha}z^{\beta}),$$

onde $A_{\alpha\beta} = \begin{cases} a_{\alpha\beta},\ \alpha \neq \beta \\ \dfrac{a_{\alpha\beta}}{2},\ \alpha = \beta \end{cases}$. Agora, fatoramos as maiores potências de $z\overline{z}$ e

usamos novamente (1.6) para obter

$$f(z) = \sum_{\alpha \leq \beta} A_{\alpha\beta}(z\overline{z})^{\alpha}(\overline{z}^{\beta-\alpha} + z^{\beta-\alpha}) = \sum_{j,k} B_{jk}(z\overline{z})^{j}(z^{kn} + \overline{z}^{kn}),$$

com $B_{jk} \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{Z}$. Finalmente, usamos indutivamente a identificação

$$(z^{kn} + \overline{z}^{kn}) = (z^{n} + \overline{z}^{n})(z^{(k-1)n} + \overline{z}^{(k-1)n}) - (z\overline{z})^{n}(z^{(k-2)n} + \overline{z}^{(k-2)n})$$

para escrever f na forma

$$f(z) = \sum_{l,m} C_{lm}(z\overline{z})^{l}(z^{n} + \overline{z}^{n})^{m}.$$

Definindo $g(x,y) = \sum_{l,m} C_{lm}x^{l}y^{m}$, para certos $C_{l,m} \in \mathbb{R}$, obtemos o desejado.

Observação 1.17. *O cálculo para encontrar um conjunto de geradores para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser extremamente difícil. Em muitos casos, como no exemplo anterior, fazemos isto por meio de cálculos diretos. Em outros casos, como quando Γ é finitamente gerado, podemos ter o auxílio do software Singular [31], desde que sejam fornecidos ao programa a forma matricial dos geradores de Γ. Observamos que, em geral, podemos encontrar mais de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.*

Definição 1.18. *Sejam (ρ, V) e (η, W) os espaços V e W sob as representações ρ e η de Γ, respectivamente. Dizemos que uma aplicação $g : V \longrightarrow W$ comuta com Γ, ou é $\Gamma-$equivariante, se*

$$g(\rho(\gamma)x) = \eta(\gamma)g(x), \tag{1.7}$$

$\forall \gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Quando $W = V$ e $\eta = \rho$, dizemos que $g : V \longrightarrow V$ satisfazendo (1.7) é puramente equivariante.

Denotamos o conjunto das aplicações polinomiais $\Gamma-$equivariantes de V em W por $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, que é um módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Denotamos por $\vec{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ o conjunto dos germes de aplicações $\Gamma-$equivariantes de V em W, que também tem estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{E}_V(\Gamma)$. Quando $V = W$, as notações são $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$, respectivamente.

Definição 1.19. *Dizemos que as aplicações polinomiais $\Gamma-$equivariantes $g_1, \ldots, g_r : V \longrightarrow W$ geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se toda aplicação $\Gamma-$equivariante*

$g \in \vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ *pode ser escrita como*

$$g = f_1 g_1 + \ldots + f_r g_r,$$

para certos $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. *Neste caso, escrevemos* $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) = \mathcal{P}_V(\Gamma)\{g_1, \ldots, g_r\}$.

Uma definição análoga é feita para $\vec{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$. O seguinte teorema é a versão equivariante do Teorema 1.14.

Teorema 1.20 ([19], XII Theorem 6.8)**.** *Seja* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V *e em* W. *Então:*

(i) *O módulo* $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ *é finitamente gerado sobre o anel* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$;

(ii) *Sejam* $g_1, \ldots, g_r$ *os geradores do módulo* $\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ *sobre* $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. *Então* $\{g_1, \ldots, g_r\}$ *é um conjunto de geradores para o módulo* $\vec{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ *sobre o anel* $\mathcal{E}_V(\Gamma)$.

1.4 Teoria reversível equivariante

Em nosso trabalho, queremos determinar a forma normal de campos vetoriais em presença simultânea de simetrias e antissimetrias, chamados campos reversíveis equivariantes. Como no caso puramente equivariante, um primeiro passo para este estudo é a determinação das funções invariantes sob a ação do grupo Γ formado por todas as simetrias e antissimetrias presentes no sistema. De igual importância é a obtenção dos geradores das funções $\Gamma-$anti-invariantes em V e das aplicações $\Gamma-$reversíveis-equivariantes em V.

Nesta seção, apresentamos alguns resultados da teoria reversível equivariante de grupos de Lie compactos. O ponto de partida é definir um homomorfismo de grupos de Lie

$$\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2 = \{\pm 1\} \tag{1.8}$$

e reconhecer uma aplicação $\Gamma-$reversível-equivariante como uma aplicação $\Gamma-$equivariante sob ações distintas de Γ na fonte e na meta.

Consideramos, então, um homomorfismo σ como em (1.8). Este define uma representação unidimensional de Γ em $\mathbb{R}$. Denotamos $\Gamma_+ = \ker \sigma$ e $\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$. Quando σ é sobrejetor, temos Γ_+ um subgrupo normal de Γ de índice 2. Neste caso, $\dfrac{\Gamma}{\Gamma_+}$ é isomorfo a $\mathbb{Z}_2$ e chamamos Γ_+ de grupo de simetrias de Γ. Obviamente, o grupo Γ_+ depende da escolha de σ. Além disso, chamamos o conjunto Γ_- de conjunto de antissimetrias de Γ.

Mais ainda, fixada $\delta \in \Gamma_-$ uma antissimetria, temos $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$ sendo a única classe lateral não trivial de Γ_+ em Γ. De fato, obviamente $\delta\Gamma_+ \subseteq \Gamma_-$. Agora, se $\gamma \in \Gamma_-$ então $\gamma = \delta(\delta^{-1}\gamma) \in \delta\Gamma_+$, uma vez que $\delta^{-1} \in \Gamma_-$. Logo,

$$\Gamma = \Gamma_+ \dot{\cup}\, \delta\Gamma_+.$$

Baseados na dinâmica reversível equivariante, temos a seguinte definição:

Definição 1.21. *Dizemos que uma aplicação $h : V \longrightarrow V$ é reversível equivariante sob Γ, ou é $\Gamma-$reversível-equivariante, se*

$$h(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\rho(\gamma)h(x),\ \forall\ \gamma \in \Gamma,\ x \in V, \tag{1.9}$$

onde σ é um epimorfismo como em (1.8). Um elemento $\gamma \in \Gamma$ é chamado simetria de Γ se $\gamma \in \Gamma_+$ e é chamado antissimetria ou reversibilidade de Γ se $\gamma \in \Gamma_-$.

O conjunto $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $\Gamma-$reversíveis-equivariantes é um módulo graduado sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Introduzimos também o conjunto $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais anti-invariantes:

Definição 1.22. *Uma função polinomial $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é chamada anti-invariante sob Γ, ou $\Gamma-$anti-invariante, se*

$$f(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)f(x),\ \forall\ \gamma \in \Gamma,\ x \in V,$$

onde σ é um epimorfismo como em (1.8).

Claramente, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ é um módulo graduado sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Também, denotamos o conjunto dos germes de funções $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$ que são $\Gamma-$anti-invariantes por $\mathcal{F}_V(\Gamma)$ e o conjunto dos germes de aplicações $h : (V, 0) \longrightarrow V$ que são $\Gamma-$reversíveis-equivariantes por $\vec{\mathcal{F}}_V(\Gamma)$. Analogamente, $\mathcal{F}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{F}}_V(\Gamma)$ são módulos sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$.

Apresentamos, agora, o conceito de representação dual e concluímos que os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são finitamente gerados.

Definição 1.23. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e ρ uma representação de Γ em V. Dado um epimorfismo σ como em (1.8), definimos a representação*

$$\begin{array}{rccc} \rho_\sigma : & \Gamma & \longrightarrow & Gl(V) \\ & \gamma & \longmapsto & \sigma(\gamma)\rho(\gamma) \end{array}$$

como a representação dual de ρ. A ação correspondente é chamada de ação dual de Γ em V e é escrita como $(\gamma, x) \mapsto \rho_\sigma(\gamma)x$.

Notamos que $(\rho_\sigma)_\sigma = \rho$. Agora, (1.9) pode ser reescrito como

$$h(\rho(\gamma)x) = \rho_\sigma(\gamma)h(x),\ \forall\gamma \in \Gamma,\ x \in V.$$

Assim, se $h : V \longrightarrow V$ é uma aplicação $\Gamma-$reversível-equivariante, então h é $\Gamma-$equivariante de (ρ, V) em (ρ_σ, V). Do mesmo modo, se $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ é $\Gamma-$anti-invariante, então f é equivariante de (ρ, V) em $(\sigma, \mathbb{R})$. Pelo Teorema 1.20, $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ são módulos finitamente gerados sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Observação 1.24. *O produto de um número ímpar de funções anti-invariantes é uma função anti-invariante, enquanto que o produto de um número par de funções anti-invariantes é invariante. Mais geralmente temos:*

Lema 1.25. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V. Sejam $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma), p \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, $g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $h \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Então, $fp \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$, $fg,\ ph \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $fh,\ pg \in \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$.*

A demonstração do lema acima segue da definição de produto de aplicações, da linearidade da ação de Γ em V e do fato de que $f(x)$ e $p(x)$ são escalares, para todo $x \in V$.

Caracterizamos o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ como segue:

Lema 1.26. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V, Γ_+ o subgrupo de simetrias de Γ e $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Então*

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_V(\Gamma) &= \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+) :\ f(\delta x) = f(x),\ \forall\ x \in V\}, \\
\mathcal{Q}_V(\Gamma) &= \{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+) :\ f(\delta x) = -f(x),\ \forall\ x \in V\}, \\
\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) &= \left\{g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) :\ g(\delta x) = \delta g(x),\ \forall\ x \in V\right\}, \\
\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) &= \left\{g \in \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) :\ g(\delta x) = -\delta g(x),\ \forall\ x \in V\right\}.
\end{aligned}$$

Demonstração: Seja $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ tal que $f(\delta x) = f(x),\ \forall x \in V$. Se $\gamma \in \Gamma_+$, então $f(\gamma x) = f(x),\ \forall x \in V$. Agora, se $\gamma \in \Gamma_- = \delta\Gamma_+$, então $\gamma = \delta\gamma_1$ com $\gamma_1 \in \Gamma_+$. Assim,

$$f(\gamma x) = f(\delta\gamma_1 x) = f(\gamma_1 x) = f(x).$$

Logo, $f(\gamma x) = f(x),\ \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in V$, ou seja,

$$\{f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+) :\ f(\delta x) = f(x),\ \forall\ x \in V\} \subseteq \mathcal{P}_V(\Gamma).$$

A outra inclusão é clara.

As demais igualdades seguem de modo análogo, das definições de $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ e do fato de $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$. ■

1.4.1 Calculando geradores

Esta subseção descreve um algoritmo simbólico que estabelece os geradores de $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, para um dado grupo de Lie compacto Γ, usando os elementos de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e os geradores de $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Para isto, usamos a teoria de invariantes polinomial e mostramos como a estrutura algébrica do subgrupo normal $\Gamma_+ \lhd \Gamma$ pode ser usada para estabelecer as decomposições

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}_V(\Gamma) \qquad \text{e} \qquad \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \oplus \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$$

como somas diretas de módulos sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Estas decomposições são a base para a construção do algoritmo, juntamente com a existência dos chamados operadores de Reynolds.

Começamos observando que $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ é um subanel de $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, pois $\Gamma_+ \leq \Gamma$, gerando em $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ uma estrutura de $\mathcal{P}_V(\Gamma)-$módulo. Olhamos então para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como $\mathcal{P}_V(\Gamma)-$submódulos finitamente gerados de $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Além disso, $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, $\mathcal{Q}_V(\Gamma) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ são $\mathbb{R}-$espaços vetoriais.

Definição 1.27. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e σ um epimorfismo como em (1.8). Consideramos $\Gamma_+ = \ker\sigma$ e fixamos $\delta \in \Gamma_-$. Os operadores de Reynolds sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, denotados por $R : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{R} : \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, respectivamente, são dados por:*

$$R(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(\delta x)\right) \qquad e \qquad \vec{R}\,(g)(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) + \delta^{-1}g(\delta x)\right). \quad (1.10)$$

Os $\sigma-$operadores de Reynolds sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, denotados por $S : \mathcal{P}_V(\Gamma_+) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\vec{S} : \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, respectivamente, são dados por:

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(\delta x)\right) \qquad e \qquad \vec{S}\,(g)(x) = \frac{1}{2}\left(g(x) - \delta^{-1}g(\delta x)\right), \quad (1.11)$$

onde o sinal " $-$ " é devido ao valor de $\sigma(\delta)$.

Proposição 1.28. *Os operadores de Reynolds R e $\overrightarrow{R}$ definidos em (1.10) e S e $\overrightarrow{S}$ definidos em (1.11) satisfazem as seguintes propriedades:*

(i) *Eles são homomorfismos de $\mathcal{P}_V(\Gamma)-$módulos e*

$$R+S=\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)} \qquad e \qquad \overrightarrow{R}+\overrightarrow{S}=\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)},$$

onde $\mathrm{Id}_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$ e $\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)}$ denotam os operadores identidade em $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, respectivamente;

(ii) *Eles são projeções idempotentes com*

$$\ker R=\mathrm{Im}\ S=\mathcal{Q}_V(\Gamma) \qquad e \qquad \ker S=\mathrm{Im}\ R=\mathcal{P}_V(\Gamma),$$

$$\ker \overrightarrow{R}=\mathrm{Im}\ \overrightarrow{S}=\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) \qquad e \qquad \ker \overrightarrow{S}=\mathrm{Im}\ \overrightarrow{R}=\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma);$$

(iii) *Valem as seguintes decomposições:*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+)=\ker R\oplus \mathrm{Im}\ R=\ker S\oplus \mathrm{Im}\ S$$

$$e$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)=\ker \overrightarrow{R}\oplus \mathrm{Im}\ \overrightarrow{R}\ =\ker \overrightarrow{S}\oplus \mathrm{Im}\ \overrightarrow{S}.$$

Demonstração:

(i) Fixamos $\delta\in\Gamma_-$ e consideramos $f,g\in\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $p\in\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Assim, para todo $x\in V$ temos

$$\begin{aligned} R(f+g)(x) &= \frac{1}{2}\left((f+g)(x)+(f+g)(\delta x)\right)=\frac{1}{2}\left(f(x)+g(x)+f(\delta x)+g(\delta x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)+f(\delta x)\right)+\frac{1}{2}\left(g(x)+g(\delta x)\right)=R(f)(x)+R(g)(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(pg)(x) &= \frac{1}{2}\left((pg)(x)+(pg)(\delta x)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(p(x)g(x)+p(\delta x)g(\delta x)\right)=\frac{1}{2}\left(p(x)g(x)+p(x)g(\delta x)\right)\\ &= p(x)\left(\frac{1}{2}\left(g(x)+g(\delta x)\right)\right)=p(x)R(g)(x)=(pR(g))(x). \end{aligned}$$

Logo, R é um homomorfismo de $\mathcal{P}_V(\Gamma)-$módulos. Analogamente, podemos mostrar que S, $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{S}$ também são. Além disso, para todo $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e $x \in V$,

$$R(f)(x) + S(f)(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(\delta x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(\delta x)) = f(x),$$

donde $R + S = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$. Que $\overrightarrow{R} + \overrightarrow{S} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)}$ também segue diretamente das definições de $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{S}$ dadas em (1.10) e (1.11), respectivamente.

(ii) Vamos mostrar somente que $\ker R = \mathrm{Im}\ S = \mathcal{Q}_V(\Gamma)$. As demais igualdades seguem de forma análoga. Consideramos $f \in \ker R$ e fixamos $\delta \in \Gamma_-$. Assim, $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ satisfaz $R(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(\delta x)\right) = 0$, donde $f(\delta x) = -f(x), \forall\, x \in V$. Pelo Lema 1.26, $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$. Por outro lado, se $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ então $f(\delta x) + f(x) = 0,\ \forall\ x \in V$, isto é, $f \in \ker R$. Portanto, $\ker R = \mathcal{Q}_V(\Gamma)$.

Consideramos, agora, $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Então $S(f) \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e vamos mostrar que $S\left(\mathcal{P}_V(\Gamma_+)\right) \subseteq \mathcal{Q}_V(\Gamma)$. Como $\delta^2 \in \Gamma_+$,

$$S(f)(\delta x) = \frac{1}{2}\left(f(\delta x) - f(\delta^2 x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(\delta x) - f(x)\right) = -S(f)(x),$$

donde pelo Lema 1.26 segue o resultado. Reciprocamente, se $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ temos

$$S(f)(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) - f(\delta x)\right) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(x)\right) = f(x).$$

Assim, $f \in S\left(\mathcal{P}_V(\Gamma_+)\right)$. Portanto, $\mathrm{Im}\ S = \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como desejado.

Para mostrar que S é uma projeção, basta usar que $\mathrm{Im}\ S = \mathcal{Q}_V(\Gamma)$ e que $S|_{\mathcal{Q}_V(\Gamma)} = \mathrm{Id}_{\mathcal{Q}_V(\Gamma)}$, como mostrado acima. Portanto, $S^2 = S$. A prova que R, $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{S}$ são projeções segue de forma análoga.

(iii) A prova deste item decorre do fato de $R, S, \overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{S}$ serem projeções idempotentes. ■

Corolário 1.29. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e Γ_+ o subgrupo das simetrias de Γ. Valem as seguintes decomposições de módulos sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$:*

$$\mathcal{P}_V(\Gamma_+) = \mathcal{P}_V(\Gamma) \oplus \mathcal{Q}_V(\Gamma) \tag{1.12}$$

e

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+) = \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma) \oplus \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma). \tag{1.13}$$

Demonstração: Consequência direta da proposição anterior. ■

Agora, provamos uma sequência de resultados que nos dão um algoritmo simbólico para o cálculo de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}_V}(\Gamma)$ dos reversíveis equivariantes. A ideia básica é tirar proveito das decomposições em somas diretas do Corolário 1.29. Finalizamos esta subseção aplicando o algoritmo em alguns exemplos.

Primeiro, vamos mostrar como obter um conjunto de geradores para o módulo $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ dos anti-invariantes sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, a partir de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$.

Teorema 1.30. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V. Consideramos $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ e S o operador de Reynolds definido em (1.11). O conjunto*

$$\{S(u_1), \ldots, S(u_s)\}$$

é um conjunto de geradores para $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Fixamos $\delta \in \Gamma_-$ e $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Seja $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$. Como $R + S = \mathrm{Id}_{\mathcal{P}_V(\Gamma_+)}$, para cada $i \in \{1, \ldots, s\}$ vale que $u_i = R(u_i) + S(u_i)$. Para simplificar a notação, denotamos aqui $\widetilde{u_i} = S(u_i)$. Logo,

$$\{R(u_1), \ldots, R(u_s), \widetilde{u_1}, \ldots, \widetilde{u_s}\}$$

é uma outra base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Como $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma) \subset \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, temos

$$f(x) = \sum_{\alpha} a_\alpha \left[R(u_1)(x)\right]^{\alpha_1} \ldots \left[R(u_s)(x)\right]^{\alpha_s} \widetilde{u_1}\,(x)^{\beta_1} \ldots \widetilde{u_s}\,(x)^{\beta_s}, \tag{1.14}$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_1, \ldots, \beta_s) \in \mathbb{N}^{2s}$ e $a_\alpha \in \mathbb{R}$. Pela Proposição 1.28 (ii), $R(u_i) \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\widetilde{u_i} \in \mathcal{Q}_V(\Gamma)$. Agora,

$$\begin{aligned} f(\delta x) &= \sum_{\alpha} a_\alpha \left[R(u_1)(\delta x)\right]^{\alpha_1} \ldots \left[R(u_s)(\delta x)\right]^{\alpha_s} \widetilde{u_1}\,(\delta x)^{\beta_1} \ldots \widetilde{u_s}\,(\delta x)^{\beta_s} \\ &= \sum_{\alpha} (-1)^{\beta_1 + \ldots + \beta_s} a_\alpha \left[R(u_1)(x)\right]^{\alpha_1} \ldots \left[R(u_s)(x)\right]^{\alpha_s} \widetilde{u_1}\,(x)^{\beta_1} \ldots \widetilde{u_s}\,(x)^{\beta_s}. \end{aligned}$$

Deste modo, como $f(\delta x) = -f(x)$, para todo $x \in V$, temos que $a_\alpha = 0$ ou $(-1)^{\beta_1 + \ldots + \beta_s} = -1$. Ou seja, $a_\alpha = 0$ ou $\beta_1 + \ldots + \beta_s$ é um número ímpar. Neste caso, $\beta_1 + \ldots + \beta_{j-1} + (\beta_j - 1) + \beta_{j+1} + \ldots + \beta_s$ é par. Quando $a_\alpha = 0$, a parcela referente a α em (1.14) é nula.

Caso contrário, temos a parcela

$$K_\alpha(x)\ \widetilde{u_j}\ (x), \tag{1.15}$$

onde

$$K_\alpha(x) = a_\alpha R(u_1)(x)^{\alpha_1} \dots R(u_s)(x)^{\alpha_s} \widetilde{u_1}\ (x)^{\beta_1} \dots \widetilde{u}_{j-1}\ (x)^{\beta_{j-1}} \widetilde{u_j}\ (x)^{\beta_j - 1} \widetilde{u}_{j+1}\ (x)^{\beta_{j+1}} \dots \widetilde{u_s}\ (x).^{\beta_s}$$

Como $\beta_1 + \ldots + \beta_{j-1} + (\beta_j - 1) + \beta_{j+1} + \ldots + \beta_s$ é par, o produto

$$\widetilde{u_1}\ (x)^{\beta_1} \dots \widetilde{u}_{j-1}\ (x)^{\beta_{j-1}} \widetilde{u_j}\ (x)^{\beta_j - 1} \widetilde{u}_{j+1}\ (x)^{\beta_{j+1}} \dots \widetilde{u_s}\ (x)^{\beta_s}$$

é $\Gamma-$invariante, pela Observação 1.24. Logo, $K_\alpha \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Escrevemos h_j para a soma de todas as funções K_α que acompanham $\widetilde{u_j}$ como em (1.15). Assim,

$$f(x) = \sum_{j=1}^{s} h_j(x)\ \widetilde{u_j}\ (x) = \left(\sum_{j=1}^{s} h_j S(u_j) \right)(x),$$

com $h_j \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Portanto, $\{S(u_1), \dots, S(u_s)\}$ é um conjunto de geradores para $\mathcal{Q}_V(\Gamma)$ como módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. ■

Exemplo 1.31. Consideramos a ação do grupo $\Gamma = S_2$ em $\mathbb{R}^2$ pela permutação das coordenadas. Fixamos $\delta = (1\ 2) \in \Gamma_-$, de modo que $\Gamma_+ = \{(1)\}$. Assim, uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_+)$ é $\{u_1(x,y) = x,\ u_2(x,y) = y\}$. Daí

$$S(u_1)(x,y) = \frac{1}{2}(u_1(x,y) - u_1(\delta(x,y)) = \frac{1}{2}(x-y) \qquad \text{e}$$

$$S(u_2)(x,y) = \frac{1}{2}(u_2(x,y) - u_2(\delta(x,y)) = \frac{1}{2}(y-x) = -\frac{1}{2}(x-y).$$

Logo, $\{u(x,y) = x - y\}$ gera $\mathcal{Q}_{\mathbb{R}^2}(S_2)$.

Corolário 1.32. *Nas condições do Teorema 1.30, o conjunto*

$$\{S(u_0) \equiv 1, S(u_1), \dots, S(u_s)\}$$

gera o módulo $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Segue diretamente da decomposição (1.12) e do Teorema 1.30, uma vez que $\{1\}$ gera $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ como módulo sobre si mesmo. ■

Um fato interessante e que surge naturalmente em teoria de invariantes é que conhecida uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$, podemos construir uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. A demonstração do resultado também faz uso dos operadores de Reynolds R e S.

Teorema 1.33. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e R, S os operadores de Reynolds definidos em (1.10) e (1.11), respectivamente. Seja $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Então o conjunto*

$$\{R(u_i),\ S(u_i)S(u_j) :\ 1 \leq i, j \leq s\}$$

é uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: A prova pode ser feita de forma análoga à prova do Teorema 1.30, impondo agora a condição $f(\delta x) = f(x)$, para todo $x \in V$, e usando novamente que o produto de um número par de funções anti-invariantes é invariante (Observação 1.24). ■

O Teorema 1.20 nos garante a existência de um conjunto finito de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. No lema abaixo, estendemos este conjunto a um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ como um $\mathcal{P}_V(\Gamma)-$módulo. Usamos o lema juntamente com a decomposição (1.13) para obter o principal resultado desta subseção, o Teorema 1.35, que nos fornece um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}_V}(\Gamma)$ como módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Lema 1.34. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e $\{S(u_0) \equiv 1, S(u_1), \ldots, S(u_s)\}$ um conjunto de geradores para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ como no Corolário 1.32. Seja $\{H_0, \ldots, H_r\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$. Então*

$$\{H_{ij} = S(u_i)H_j,\ i = 0, \ldots, s \text{ e } j = 0, \ldots, r\}$$

é um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Se $G \in \overrightarrow{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ existem $p_j \in \mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ tais que

$$G = \sum_{j=0}^{r} p_j H_j. \tag{1.16}$$

Como $\{S(u_0),\ldots,S(u_s)\}$ gera $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$ como um módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, para cada $j\in\{0,\ldots,r\}$ existem $p_{ij}\in\mathcal{P}_V(\Gamma)$ tais que

$$p_j=\sum_{i=0}^{s}p_{ij}S(u_i). \tag{1.17}$$

De (1.16) e (1.17),

$$G=\sum_{j=0}^{r}p_jH_j=\sum_{j=0}^{r}\left(\sum_{i=0}^{s}p_{ij}S(u_i)\right)H_j=\sum_{i,j=0}^{s,r}p_{ij}\left(S(u_i)H_j\right),$$

onde $p_{ij}\in\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $S(u_i)H_j\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$. Portanto,

$$\{H_{ij}=S(u_i)H_j,\ i=0,\ldots,s \text{ e } j=0,\ldots,r\}$$

gera $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. ■

Teorema 1.35. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e $\{H_{00},\ldots,H_{sr}\}$ um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, como no lema anterior. Consideramos o $\sigma-$operador de Reynolds $\overrightarrow{S}$ definido em (1.11). Então,*

$$\left\{\overrightarrow{S}\left(H_{ij}\right),\ i=0,\ldots,s\ e\ j=0,\ldots,r\right\}$$

é um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Demonstração: Sejam $\{H_{00},\ldots,H_{sr}\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\widetilde{G}\in\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$. Pela Proposição 1.28 (ii), $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)=\text{Im }\overrightarrow{S}$. Logo, existe $G\in\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ tal que $\widetilde{G}=\overrightarrow{S}(G)$. Mas $G=\sum_{i,j=0}^{s,r}p_{ij}H_{ij}$, com $p_{ij}\in\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Logo,

$$\widetilde{G}=\overrightarrow{S}(G)=\overrightarrow{S}\left(\sum_{i,j=0}^{s,r}p_{ij}H_{ij}\right)=\sum_{i,j=0}^{s,r}p_{ij}\overrightarrow{S}(H_{ij}),$$

com $p_{ij}\in\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\overrightarrow{S}(H_{ij})\in\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$, como desejado. ■

Com base no teorema anterior, descrevemos um algoritmo que estabelece um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ das aplicações $\Gamma-$reversíveis-equivariantes sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$. Como os módulos $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$, $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ têm estrutura de módulos graduados sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, podemos supor que seus geradores são homogêneos.

Algoritmo 1.36. Geradores dos reversíveis equivariantes:

1. Consideramos Γ um grupo de Lie compacto;
2. Fixamos um epimorfismo $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ com kernel Γ_+;
3. Fixamos uma antissimetria $\delta \in \Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$;
4. Consideramos uma base de Hilbert homogênea $\{u_1, \ldots, u_s\}$ para $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
5. Consideramos $\{H_0, \ldots, H_r\}$ um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma_+)$;
6. Definimos $S(u_0) \equiv 1$. Para $i \in \{0, \ldots, s\}$ e $j \in \{0, \ldots, r\}$, fazemos $H_{ij} = S(u_i)H_j$;
7. Para $i \in \{0, \ldots, s\}$ e $j \in \{0, \ldots, r\}$, fazemos $\widetilde{H}_{ij} = \overrightarrow{S}\,(H_{ij})$.

Resultado: Conjunto de geradores homogêneos $\{\widetilde{H}_{ij} \colon 0 \leq i \leq s,\ 0 \leq j \leq r\}$ para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.

Exemplo 1.37. (a) Consideramos $\Gamma = D_n$ agindo em $\mathbb{C}$ como

$$\theta z = e^{\frac{2\pi \mathbf{i}}{n}} z \qquad \text{e} \qquad \kappa z = \overline{z}.$$

Vamos supor n par e fixar $\delta = R_{\frac{2\pi}{n}} \in \Gamma_-$. Assim $\Gamma_+ = D_{\frac{n}{2}}$. Por [18, XII Example 4.1(c)], temos que $u_1(z) = z\overline{z}$ e $u_2(z) = z^{\frac{n}{2}} + \overline{z}^{\frac{n}{2}}$ formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{\frac{n}{2}})$. Por [18, XII Example 5.4(c)], $H_0(z) = z$ e $H_1(z) = \overline{z}^{\frac{n}{2}-1}$ geram $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(D_{\frac{n}{2}})$ como $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_{\frac{n}{2}})-$módulo. Assim, $S(u_1) \equiv 0$ e $S(u_2) \equiv u_2$, onde S é definido em (1.11). Tomando $S(u_0) \equiv 1$, temos

$$\begin{aligned}
&H_{00} \equiv S(u_0)H_0 \equiv H_0 \ \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(D_n),\\
&H_{01} \equiv S(u_0)H_1 \equiv H_1 \ \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(D_n),\\
&H_{10} \equiv S(u_1)H_0 \equiv 0,\\
&H_{11} \equiv S(u_1)H_1 \equiv 0,\\
&H_{20}(z) = S(u_2)H_0(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \overline{z}^{\frac{n}{2}})z \ \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(D_n),\\
&H_{21}(z) = S(u_2)H_1(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \overline{z}^{\frac{n}{2}})\overline{z}^{\frac{n}{2}-1} \ \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(D_n).
\end{aligned}$$

Deste modo, a projeção $\overrightarrow{S}$ como em (1.11) nos dá

$$\overrightarrow{S}\,(H_{00}) \equiv 0,\ \overrightarrow{S}(H_{01})(z) = H_1(z) = \overline{z}^{\frac{n}{2}-1},\ \overrightarrow{S}(H_{10}) \equiv \overrightarrow{S}(H_{11}) \equiv 0,$$

$$\vec{S}(H_{20})(z) = (z^{\frac{n}{2}} + \overline{z}^{\frac{n}{2}})z \quad \text{e} \quad \vec{S}(H_{22}) \equiv 0.$$

Mas $(z^{\frac{n}{2}} + \overline{z}^{\frac{n}{2}})z = z^{\frac{n}{2}+1} + (z\overline{z})\overline{z}^{\frac{n}{2}-1}$ e como $z\overline{z} \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$, temos que o conjunto

$$\left\{\overline{z}^{\frac{n}{2}-1},\ z^{\frac{n}{2}+1}\right\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}\ (D_n)$ como $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)-$módulo.

(b) Consideramos $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ agindo em $\mathbb{R}^2$ como

$$-1(x, y) = (-x, -y).$$

Fixamos $\delta = -1 \in \Gamma_-$ de modo que $\Gamma_+ = \{1\}$. Temos que $u_1(x, y) = x$ e $u_2(x, y) = y$ formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$. Além disso, $H_0(x, y) = (1, 0)$ e $H_1(x, y) = (0, 1)$ geram o módulo $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}$. Pela definição em (1.11), segue que

$$\begin{aligned} S(u_1)(x, y) &= u_1(x, y) = x, \\ S(u_2)(x, y) &= u_2(x, y) = y. \end{aligned}$$

Assim, tomando $S(u_0) \equiv 1$ e definindo $H_{ij} = S(u_i)H_j$, para $i = 0, 1, 2$ e $j = 0, 1$, temos

$$H_{00}(x, y) = (1, 0),\ H_{01}(x, y) = (0, 1),\ H_{10}(x, y) = (x, 0),$$

$$H_{11}(x, y) = (0, x),\ H_{20}(x, y) = (y, 0) \quad \text{e} \quad H_{21}(x, y) = (0, y).$$

Como $H_{00},\ H_{01} \in \vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ e os demais pertencem a $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$,

$$\vec{S}(H_{00})(x, y) = H_{00}(x, y) = (1, 0), \quad \vec{S}(H_{01})(x, y) = H_{01}(x, y) = (0, 1)$$

e $\vec{S}\ (H_{ij}) \equiv 0,\ i = 1, 2,\ j = 0, 1$, onde $\vec{S}$ é definido em (1.11). Portanto,

$$\{(1, 0),\ (0, 1)\}$$

é um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2)$.

(c) Consideramos $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ agindo em $\mathbb{R}^2$ como

$$\kappa_1(x, y) = (x, -y) \qquad \text{e} \qquad \kappa_2(x, y) = (-x, y).$$

Fixamos $\delta = \kappa_1 \in \Gamma_-$ e $\kappa_2 \in \Gamma_+$ de modo que $\Gamma_+ = \{1,\ \kappa_2\}$. Temos que $u_1(x,y) = x^2$ e $u_2(x,y) = y$ formam uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_+)$. Por definição, $S(u_1) \equiv 0$ e $S(u_2)(x,y) = u_2(x,y) = y$. Além disso, $H_0(x,y) = (x,0)$ e $H_1(x,y) = (0,1)$ formam um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_+)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\Gamma_+)$. Tomando $S(u_0) \equiv 1$ e definindo $H_{ij} = S(u_i)H_j$, para $i = 0,1,2$ e $j = 0,1$, temos

$$H_{00} \equiv H_0,\ H_{01} \equiv H_1,\ H_{10} \equiv H_{11} \equiv 0,\ H_{20}(x,y) = (xy,0) \quad \text{e} \quad H_{21}(x,y) = (0,y).$$

Logo, $\overrightarrow{S}\ (H_{01})(x,y) = (0,1)$, $\overrightarrow{S}\ (H_{20})(x,y) = (xy,0)$ e as demais projeções são nulas. Portanto,

$$\{(0,1),\ (xy,0)\}$$

é um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2)$.

(d) Consideramos $\Gamma = O(2)$ agindo em $V = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, onde as rotações $\theta \in SO(2)$ e a reflexão κ agem como

$$\theta(z,x) = (e^{\mathbf{i}\theta}z, x) \qquad \text{e} \qquad \kappa(z,x) = (\overline{z}, -x).$$

Consideramos $\Gamma_+ = SO(2)$ e fixamos $\delta = \kappa \in \Gamma_-$. Uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}(SO(2))$ é $\{u_1(z,x) = z\overline{z}, u_2(z,x) = x\}$. Temos também que

$$H_0(z,x) = (\mathbf{i}z, 0),\ H_1(z,x) = (z,0) \quad \text{e} \quad H_2(z,x) = (0,1)$$

formam um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}\ (SO(2))$ sobre o anel dos invariantes por $SO(2)$. Além disso, $H_0,\ H_2 \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}(O(2))$ e $H_1 \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}(O(2))$. Agora, por definição, $S(u_1) \equiv 0$ e $S(u_2)(z,x) = u_2(z,x) = x$. Deste modo, tomando $S(u_0) \equiv 1$ e sendo $H_{ij} = S(u_i)H_j$ temos

$$H_{00} \equiv H_0,\ H_{01} \equiv H_1,\ H_{02} \equiv H_2,\ H_{10} \equiv H_{11} \equiv H_{12} \equiv 0,\ H_{20}(z,x) = (\mathbf{i}zx, 0),$$
$$H_{21}(z,x) = (zx,0) \quad \text{e} \quad H_{22}(z,x) = (0,x).$$

Como $H_{00},\ H_{02}$ e $H_{21} \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ e os demais são $\Gamma-$equivariantes, temos

$$\left\{\overrightarrow{S}\ (H_{00})(z,x) = (\mathbf{i}z,0),\ \overrightarrow{S}\ (H_{02})(z,x) = (0,1),\ \overrightarrow{S}\ (H_{21})(z,x) = (zx,0)\right\}$$

é um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}\times\mathbb{R}}(O(2))$ sobre o anel dos invariantes por $O(2)$.

1.5 Teoria de invariantes para o produto direto

Nosso objetivo, nesta seção, é descrever as ferramentas da teoria de invariantes para os produtos direto e semidireto de dois grupos arbitrários, necessárias para a obtenção de formas normais no contexto reversível equivariante. O produto semidireto de dois grupos é uma construção que generaliza o produto direto e que depende da existência de um homomorfismo. Denotamos por $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ o grupo dos automorfismos de Γ com a operação de composição.

Dados dois grupos Γ_1 e Γ_2, o produto semidireto de Γ_1 e Γ_2, denotado por $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$, é o produto direto $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ como conjunto munido de uma operação induzida por um homomorfismo

$$\mu : \Gamma_2 \longrightarrow \mathrm{Aut}(\Gamma_1), \tag{1.18}$$

onde

$$(\gamma_1, \gamma_2)\cdot_\mu(\tau_1, \tau_2) = (\gamma_1\mu(\gamma_2)\tau_1, \gamma_2\tau_2).$$

Por construção, $\Gamma_1 \lhd \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$. Se μ é o homomorfismo trivial, que leva $\gamma_2 \in \Gamma_2$ no automorfismo identidade de Γ_1, então $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 = \Gamma_1 \times \Gamma_2$.

Para o próximo resultado, consideramos (ρ, V) e (η, V) representações de Γ_1 e Γ_2 em V, respectivamente, e a operação $(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) \times V \longrightarrow V$ dada por

$$(\gamma_1, \gamma_2)x = \gamma_1(\gamma_2 x). \tag{1.19}$$

Então, temos:

Proposição 1.38. *A operação definida em (1.19) define uma ação do produto semidireto $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ em V se, e somente se, a representação de $\mu(\gamma_2)\gamma_1$ é uma conjugação, isto é,*

$$\rho(\mu(\gamma_2)\gamma_1) = \eta(\gamma_2)\rho(\gamma_1)\eta(\gamma_2)^{-1}.$$

Em particular, quando $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 = \Gamma_1 \times \Gamma_2$ como grupo, a operação em (1.19) define uma ação se, e somente se, as ações de Γ_1 e de Γ_2 comutam.

Demonstração: A operação (1.19) define uma ação se, e somente se,

(i) Para cada $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$, a aplicação $\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)} : V \longrightarrow V$, definida por

$$\varrho_{(\gamma_1,\gamma_2)}(x) = \gamma_1(\gamma_2 x),$$

é linear;

(ii) $(\gamma_1,\gamma_2)((\tau_1,\tau_2)x) = ((\gamma_1,\gamma_2)\cdot_\mu(\tau_1,\tau_2))x,\ \forall(\gamma_1,\gamma_2),(\tau_1,\tau_2)\in\Gamma_1\rtimes\Gamma_2,\ \forall x\in V.$

É simples ver que (i) ocorre, pois as ações de Γ_1 e Γ_2 em V são lineares. Assim, (1.19) define uma ação se, e somente se, vale (ii). Mas

$$(\gamma_1,\gamma_2)((\tau_1,\tau_2)x) = \gamma_1(\gamma_2(\tau_1(\tau_2 x)))$$

e

$$\begin{aligned}((\gamma_1,\gamma_2)\cdot_\mu(\tau_1,\tau_2))x &= (\gamma_1\mu(\gamma_2)\tau_1,\gamma_2\tau_2)x\\ &= \gamma_1\mu(\gamma_2)\tau_1(\gamma_2\tau_2)x.\end{aligned}$$

Portanto, em termos de representação, (ii) vale se, e somente se,

$$\rho(\gamma_1)\eta(\gamma_2)\rho(\tau_1)\eta(\tau_2) = \rho(\gamma_1)\rho(\mu(\gamma_2)\tau_1)\eta(\gamma_2)\eta(\tau_2),$$

o que ocorre se, e somente se, $\eta(\gamma_2)\rho(\tau_1) = \rho(\mu(\gamma_2)\tau_1)\eta(\gamma_2)$, ou seja,

$$\rho(\mu(\gamma_2)\tau_1) = \eta(\gamma_2)\rho(\tau_1)\eta(\gamma_2)^{-1},$$

para todo $\gamma_1,\tau_1\in\Gamma_1,\ \gamma_2,\tau_2\in\Gamma_2$. ■

É de nosso interesse considerarmos grupos Γ_1 e Γ_2 que admitam um produto semidireto com uma ação nas condições da Proposição 1.38 e, por isto, assumimos esta hipótese. Neste caso, escrevemos $\varrho:\Gamma_1\rtimes\Gamma_2\longrightarrow Gl(V)$ para a representação de $\Gamma_1\rtimes\Gamma_2$ em V, onde $\varrho(\gamma_1,\gamma_2)x = \rho(\gamma_1)\eta(\gamma_2)x$.

Supomos agora que o grupo Γ_1 possua somente simetrias e consideramos um epimorfismo $\sigma_2:\Gamma_2\longrightarrow\mathbb{Z}_2$ como em (1.8). Definimos outro epimorfismo $\widetilde{\sigma}$: $\Gamma_1\rtimes\Gamma_2\longrightarrow\mathbb{Z}_2$ por

$$\widetilde{\sigma}\,(\gamma_1,\gamma_2) = \sigma_2(\gamma_2). \tag{1.20}$$

O próximo resultado relaciona a teoria de invariantes para $\Gamma_1\rtimes\Gamma_2$ com a teoria de invariantes para cada grupo, Γ_1 e Γ_2, separadamente. Tal resultado será usado para deduzir formas normais de campos vetoriais $\Gamma-$reversíveis-equivariantes, onde a teoria de invariantes é aplicada a $\mathbf{S}\rtimes\Gamma$, para um grupo de simetrias $\mathbf{S}$ conveniente.

Proposição 1.39. *Sejam Γ_1 e Γ_2 grupos de Lie compactos agindo linearmente em V e consideramos o epimorfismo $\widetilde{\sigma}$ definido em (1.20). Então*

(i) $\mathcal{P}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \mathcal{P}_V(\Gamma_1) \cap \mathcal{P}_V(\Gamma_2)$;

(ii) $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_1) \cap \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_2)$;

(iii) $\mathcal{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \mathcal{P}_V(\Gamma_1) \cap \mathcal{Q}_V(\Gamma_2)$;

(iv) $\vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_1) \cap \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_2)$.

Demonstração: Demonstramos somente o item (iii). Os demais seguem de maneira análoga. Sejam $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2)$, $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \rtimes \Gamma_2$ e $x \in V$ arbitrários. Assim,

$$f(\gamma_1(\gamma_2 x)) = f((\gamma_1, \gamma_2)x) = \widetilde{\sigma}(\gamma_1, \gamma_2) f(x) = \sigma_2(\gamma_2) f(x).$$

Tomando $\gamma_1 = \mathrm{Id}$, temos $f(\gamma_2 x) = \sigma_2(\gamma_2) f(x)$, ou seja, $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma_2)$. Se tomarmos $\gamma_2 = \mathrm{Id}$, temos $f(\gamma_1 x) = f(x)$, ou seja, $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_1)$. Por outro lado, se $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma_1) \cap \mathcal{Q}_V(\Gamma_2)$, então $f(\gamma_1 x) = f(x)$ e $f(\gamma_2 x) = \sigma_2(\gamma_2) f(x)$, $\forall \gamma_1 \in \Gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_2$, $x \in V$. Logo,

$$f((\gamma_1, \gamma_2)x) = f(\gamma_1(\gamma_2 x)) = f(\gamma_2 x) = \sigma_2(\gamma_2) f(x) = \widetilde{\sigma}(\gamma_1, \gamma_2) f(x),$$

donde $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2)$. Portanto, vale a igualdade dada em (iii). ■

Observação 1.40. *Se supormos que Γ_1 possui também antissimetrias, ou seja, existe um epimorfismo $\sigma_1 : \Gamma_1 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ como em (1.8), podemos definir $\widetilde{\sigma}$: $\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ por*

$$\widetilde{\sigma}\,(\gamma_1, \gamma_2) = \sigma_1(\gamma_1)\sigma_2(\gamma_2). \tag{1.21}$$

Neste caso, os itens (iii) *e* (iv) *da Proposição 1.39 ficam como:*

$$\mathcal{Q}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \mathcal{Q}_V(\Gamma_1) \cap \mathcal{Q}_V(\Gamma_2) \quad e \quad \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_1 \rtimes \Gamma_2) = \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_1) \cap \vec{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_2).$$

Além disso, as igualdades da Proposição 1.39 também valem para o produto direto.

1.5.1 Ação diagonal

Sejam Γ_1 e Γ_2 grupos quaisquer agindo em V e W, respectivamente. As ações naturais de Γ_1 e Γ_2 induzidas em $V \times W$ são da forma

$$\gamma_1(x, y) = (\gamma_1 x, y) \quad \text{e} \tag{1.22}$$

$$\gamma_2(x,y) = (x, \gamma_2 y), \tag{1.23}$$

respectivamente. A ação diagonal do grupo $\Gamma_1 \times \Gamma_2$ em $V \times W$ é dada por

$$(\gamma_1, \gamma_2)(x,y) = (\gamma_1 x, \gamma_2 y).$$

Neste caso, se ρ e η são as representações de Γ_1 em V e de Γ_2 em W, respectivamente, a representação diagonal de $(\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma_1 \times \Gamma_2$ é denotada por $(\rho(\gamma_1), \eta(\gamma_2))$ e corresponde à matriz $\begin{pmatrix} \rho(\gamma_1) & 0 \\ 0 & \eta(\gamma_2) \end{pmatrix} \in Gl(V \times W)$.

Lema 1.41. *Sejam Γ_1 e Γ_2 grupos de Lie compactos agindo linearmente em V e W, respectivamente. Sejam $\{u_1, \ldots, u_r\}$ e $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ bases de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_1)$ e $\mathcal{P}_W(\Gamma_2)$, respectivamente. Consideramos $\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_1) = \mathcal{P}_V(\Gamma_1)\{f_1, \ldots, f_m\}$ e $\vec{\mathcal{P}}_W(\Gamma_2) = \mathcal{P}_W(\Gamma_2)\{g_1, \ldots, g_n\}$. Definimos $U_c : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ e $A_d : V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ como $U_c(x,y) = u_c(x)$ e $A_d(x,y) = \alpha_d(y)$, $c = 1, \ldots, r$, $d = 1, \ldots, s$. Também definimos $F_i : V \times W \longrightarrow V$ e $G_j : V \times W \longrightarrow W$ como $F_i(x,y) = f_i(x)$ e $G_j(x,y) = g_j(y)$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Então*

$$\{U_1, \ldots, U_r, A_1, \ldots, A_s\}$$

é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ e

$$\vec{\mathcal{P}}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) \left\{ \begin{pmatrix} F_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} F_m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ G_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ G_n \end{pmatrix} \right\}.$$

Demonstração: Sabemos da Proposição 1.39 (i) que

$$\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1 \times \Gamma_2) = \mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1) \cap \mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_2). \tag{1.24}$$

Escrevemos C_V e C_W para os conjuntos das funções $V \times W \longrightarrow \mathbb{R}$ que dependem apenas de $x \in V$ e de $y \in W$, respectivamente. Como $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma_1)$ segue que

$$\{U_1, \ldots, U_r\} \cup C_W$$

é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1)$, segundo a ação dada em (1.22). Analogamente,

$$\{A_1, \ldots, A_s\} \cup C_V$$

é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_2)$, segundo a ação dada em (1.23). Logo, de (1.24), temos que $\{U_1,\ldots,U_r,A_1,\ldots,A_s\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$, como queríamos.

Para provarmos a segunda parte do lema, tomamos $H\in\vec{\mathcal{P}}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Escrevemos $H\equiv(p,q)$, com $p:V\times W\longrightarrow V$ e $q:V\times W\longrightarrow W$. Desta forma, para quaisquer $(x,y)\in V\times W$ e $(\gamma_1,\gamma_2)\in\Gamma_1\times\Gamma_2$ temos

$$H(\gamma_1x,\gamma_2y)=H((\gamma_1,\gamma_2)(x,y))=(\gamma_1,\gamma_2)H(x,y)=(\gamma_1p(x,y),\gamma_2q(x,y)),$$

o que implica em

$$p(\gamma_1x,\gamma_2y)=\gamma_1p(x,y)\qquad\text{e}\qquad q(\gamma_1x,\gamma_2y)=\gamma_2q(x,y).\tag{1.25}$$

Para cada $y\in W$, definimos $p_y:V\longrightarrow V$ por $p_y(x)=p(x,y)$. De (1.25),

$$p_y(\gamma_1x)=p(\gamma_1x,y)=\gamma_1p(x,y)=\gamma_1p_y(x),$$

para todo $\gamma_1\in\Gamma_1$ e $x\in V$. Ou seja, $p_y\in\vec{\mathcal{P}}_V(\Gamma_1)$. Logo, podemos escrever $p_y(x)=\sum_{i=1}^{m}h_i^y(x)f_i(x)$, onde $h_i^y\in\mathcal{P}_V(\Gamma_1)$. Agora, definindo $h_i:V\times W\longrightarrow\mathbb{R}$ por $h_i(x,y)=h_i^y(x)$ vale que

$$p(x,y)=\sum_{i=1}^{m}h_i(x,y)F_i(x,y).$$

Como $h_i^y\in\mathcal{P}_V(\Gamma_1)$, $h_i\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1)$, segundo a ação dada em (1.22). Vamos mostrar que $h_i\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_2)$ e assim, por 1.24, temos $h_i\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$.

Como V é um espaço vetorial finitamente gerado escrevemos $p=(p_1,\ldots,p_t)$ e $F_i=(F_{i1},\ldots,F_{it})$, com $p_{\bar{i}},F_{i\bar{i}}:V\times W\longrightarrow\mathbb{R}$, $\bar{i}=1,\ldots,t$, para algum t. Assim para cada $\bar{i}=1,\ldots,t$ vale

$$p_{\bar{i}}(x,y)=\sum_{i=1}^{m}h_i(x,y)F_{i\bar{i}}(x,y).\tag{1.26}$$

Por (1.25), $p(x,\gamma_2y)=p(x,y)$, donde $p_{\bar{i}}(x,\gamma_2y)=p_{\bar{i}}(x,y)$, para todo $(x,y)\in V\times W$. Notamos aqui que

$$F_i(x,\gamma_2y)=f_i(x)=F_i(x,y),$$

para todo $(x,\,y)\in V\times W$, $1\leq i\leq m$. Logo, $F_{i\bar{i}}\,(x,\,\gamma_2y)=F_{i\bar{i}}\,(x,\,y)$, para todo $(x,y)\in V\times W$. Por (1.26), segue que $h_i(x,\gamma_2y)=h_i(x,y)$, ou seja, $h_i\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_2)$, segundo a ação dada em (1.23), como desejado.

Analogamente, provamos que

$$q(x,y)=\sum_{j=1}^{n}k_j(x,y)G_j(x,y),$$

onde $k_j\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$. Portanto,

$$H(x,y)=\sum_{i=1}^{m}h_i(x,y)\begin{pmatrix}F_i(x,y)\\0\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{n}k_j(x,y)\begin{pmatrix}0\\G_j(x,y)\end{pmatrix},$$

com $h_i,k_j\in\mathcal{P}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2)$ e $(F_i,0)^t,(0,G_j)^t\in\vec{\mathcal{P}}_{V\times W}(\Gamma_1\times\Gamma_2),\ i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n.$ ■

O próximo exemplo ilustra o Lema 1.41 e será usado para calcularmos determinadas formas normais reversíveis equivariantes no Capítulo 3.

Exemplo 1.42. Consideramos a ação de $\Gamma=S^1$ em $V=\mathbb{C}$ dada por $\theta z=e^{\mathbf{i}\theta}z$. Por [18, XII Examples 4.1(b), 5.4(a)], $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)=\langle z\overline{z}\rangle$ e $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}\ (S^1)=\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)\{z,\mathbf{i}z\}$. Consideramos a ação diagonal do toro $n-$dimensional T^n em $\mathbb{C}^n$ dada por

$$(\theta_1,\ldots,\theta_n)(z_1,\ldots,z_n)=(e^{\mathbf{i}\theta_1}z_1,\ldots,e^{\mathbf{i}\theta_n}z_n),$$

com $\theta_j\in S^1$ e $z_j\in\mathbb{C},\ 1\leq j\leq n$. Pelo Lema 1.41 vale

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(T^n)=\langle z_1\overline{z_1},\ldots,z_n\overline{z_n}\rangle$$

e

$$\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}^n}\ (T^n)=\mathcal{P}_{\mathbb{C}^n}(T^n)\left\{\begin{pmatrix}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{i}z_1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\ldots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\z_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\\mathbf{i}z_n\end{pmatrix}\right\}.$$

Capítulo 2

Teoria de formas normais

Como mencionamos na Introdução, a teoria de formas normais é uma ferramenta para o estudo local de campos vetoriais na vizinhança de um ponto singular do campo. A teoria clássica consiste em encontrar mudanças de coordenadas próximas à identidade que deixam o campo vetorial em uma forma "mais simples"ou mais conveniente para o estudo que desejamos fazer. No caso de um sistema de equações diferenciais lineares $\dot{x} = Ax$, uma mudança linear de coordenadas da forma $x = Py$ pode transformá-lo em um sistema

$$\dot{y} = (P^{-1}AP)y,$$

onde $P^{-1}AP$ é uma matriz que está em sua forma canônica de Jordan. Este processo não altera a estrutura topológica das órbitas. Um procedimento análogo pode ser realizado em um sistema de equações diferenciais não lineares a fim de obter equações mais simples, chamadas de formas normais. Neste caso, as mudanças de coordenadas são não lineares e as formas normais não são únicas.

Do mesmo modo, existe um interesse científico na teoria de formas normais para campos vetoriais reversíveis equivariantes, ou seja, em presença simultânea de simetrias e antissimetrias. O conjunto Γ formado por estes elementos tem estrutura de grupo e, neste caso, as mudanças de coordenadas próximas à identidade devem ser $\Gamma-$equivariantes. Além disso, a forma normal introduz um novo grupo de simetrias, que juntamente com Γ forma um produto semidireto.

Neste capítulo, apresentamos a teoria de formas normais para campos reversíveis equivariantes como uma adaptação da teoria desenvolvida por Belitskii [8, 9] e Elphick *et al.* [17]. Para isto, usamos ferramentas algébricas das teorias de invariantes e de representação de grupos. O capítulo é dividido como segue: a Seção 2.1 expõe o método

clássico desenvolvido por Belitskii [8, 9].

Na Seção 2.2, introduzimos o grupo de simetrias $\mathbf{S}$ e apresentamos um método alternativo devido a Elphick *et al.* [17], que reduz o problema de encontrar a forma normal de um campo de vetores ao de determinar geradores do módulo dos $\mathbf{S}-$equivariantes.

Na Seção 2.3, impomos condições de simetrias ao sistema e adaptamos o método de Elphick *et al.* a este caso. Por fim, a Seção 2.4 dedica-se ao tema central do trabalho, com a apresentação do método algébrico para encontrar formas normais no contexto reversível equivariante.

2.1 O método do operador adjunto

Descrevemos aqui o método clássico para encontrar formas normais para sistemas de equações diferenciais não lineares. Nossa principal referência é [16].

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, com $n \geq 1$, e $h \in \vec{\mathcal{E}}_V$, com $h(0) = 0$. Consideramos o sistema de equações diferenciais de classe $C^{r+1},\ r \geq 2$, dado por

$$\dot{x} \ = h(x),\ x \in V. \tag{2.1}$$

Um primeiro passo no estudo da dinâmica do sistema é obter resultados que determinam a forma normal de (2.1). O método clássico consiste de sucessivas mudanças de coordenadas na fonte da forma $\mathrm{Id}+\xi^k$, onde Id é o germe da identidade e ξ^k é o germe de um polinômio homogêneo de grau k.

Começamos introduzindo o espaço vetorial real das aplicações polinomiais homogêneas $g : V \longrightarrow V$ de grau k, denotado por $\vec{\mathcal{P}}_V^k$. Um monômio em $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ é uma expressão da forma $x^\alpha e_j$, onde $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ é um multi-índice com inteiros não negativos α_i, $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1} \ldots {x_n}^{\alpha_n}$ e $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)^t$ é o j-ésimo elemento da base canônica de $V \equiv \mathbb{R}^n$. Uma base para $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ é dada por

$$\{x^\alpha e_j :\ |\alpha| = k,\ 1 \leq j \leq n\},$$

onde $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, de modo que $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ é um espaço vetorial de dimensão finita igual a $n \begin{pmatrix} n+k-1 \\ k \end{pmatrix}$. Podemos definir um produto interno em $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ como segue:

Definição 2.1. *Consideramos* $p, q \in \vec{\mathcal{P}}_V^k$ *dados por* $p(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} x^\alpha e_j$ *e* $q(x) =$

$\sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k} q_{\alpha j}x^{\alpha}e_j$, *onde* $p_{\alpha j}, q_{\alpha j} \in \mathbb{R}$. *Definimos o produto interno* $\langle\ ,\ \rangle : \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k \times \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k \longrightarrow \mathbb{R}$ *por*

$$\langle p, q\rangle = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j}q_{\alpha j}\alpha!, \tag{2.2}$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \ldots \alpha_n!$.

Exemplo 2.2. Sejam $|\alpha| = |\beta| = k$, $p(x) = x^{\alpha}e_i$ e $q(x) = x^{\beta}e_j$ monômios em $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$ com $1 \leq i, j \leq n$. Assim

$$\langle p, q\rangle \ = \ \begin{cases} 1 \cdot 1 \cdot \alpha!, \text{ se } i = j \text{ e } \alpha = \beta \\ 1 \cdot 0 \cdot \alpha! + 0 \cdot 1 \cdot \beta!, \text{ se } i = j \text{ e } \alpha \neq \beta \\ 1 \cdot 0 \cdot \alpha! + 0 \cdot 1 \cdot \beta!, \text{ se } i \neq j \text{ e } \alpha = \beta \\ 1 \cdot 0 \cdot \alpha! + 0 \cdot 1 \cdot \beta!, \text{ se } i \neq j \text{ e } \alpha \neq \beta \end{cases} = \begin{cases} \alpha!, \text{ se } i = j \text{ e } \alpha = \beta \\ 0, \text{ nos demais casos.} \end{cases}$$

Definição 2.3. *Seja* $L : V \longrightarrow V$ *um operador. Para cada* $k \geq 2$, *definimos o operador linear* $Ad_L^k : \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$ *por*

$$Ad_L^k\alpha(y) = d\alpha(y)Ly - L\alpha(y), \tag{2.3}$$

onde $\alpha \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$ *e* $d\alpha(y)$ *denota a derivada de* α *em* $y \in V$.

Como $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$ admite um produto interno e sua dimensão é finita, Ad_L^k tem um operador adjunto $(Ad_L^k)^*$. O próximo teorema caracteriza este operador.

Teorema 2.4. *Sejam* $L : V \longrightarrow V$ *um operador e* Ad_L^k *como em (2.3). Para cada* $k \geq 2$, *o operador* $Ad_{L^*}^k$ *é o operador adjunto de* Ad_L^k *com respeito ao produto interno definido em (2.2), onde* L^* *é o adjunto de* L *com respeito ao produto canônico* $(\cdot, \cdot)$ *em* V.

Demonstração: Sejam $p, q \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$ e escrevemos

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i}x^{\alpha}e_i \qquad \text{e} \qquad q(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{|\beta|=k} q_{\beta j}x^{\beta}e_j.$$

Usando a linearidade de Ad_L^k, de $Ad_{L^*}^k$ e as propriedades de produto interno, temos

$$\begin{aligned}
\langle Ad_L^k p, q\rangle &= \left\langle Ad_L^k \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} x^\alpha e_i \right), \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} x^\beta e_j \right\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} Ad_L^k \left(x^\alpha e_i\right), x^\beta e_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=k}} p_{\alpha i} q_{\beta j} \langle Ad_L^k (x^\alpha e_i), x^\beta e_j\rangle
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle p, Ad_{L^*}^k q\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} x^\alpha e_i, Ad_{L^*}^k \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} x^\beta e_j \right) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha i} \left\langle x^\alpha e_i, \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\beta|=k} q_{\beta j} Ad_{L^*}^k \left(x^\beta e_j\right) \right\rangle \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{\substack{|\alpha|=k \\ |\beta|=k}} p_{\alpha i} q_{\beta j} \langle x^\alpha e_i, Ad_{L^*}^k (x^\beta e_j)\rangle.
\end{aligned}$$

Queremos mostrar que $\langle Ad_L^k p, q\rangle = \langle p, Ad_{L^*}^k q\rangle$. Para isto, basta provarmos que

$$\langle Ad_L^k f, g\rangle = \langle f, Ad_{L^*}^k g\rangle,$$

onde $f(x) = x^\alpha e_i$ e $g(x) = x^\beta e_j$, para todos α, β, i, j, com $|\alpha| = |\beta| = k$, e $1 \leq i, j \leq n$. Aqui, confundimos L com sua matriz e escrevemos $L = (a_{lm})$, com $1 \leq l, m \leq n$. Agora,

$$\begin{aligned}
Ad_L^k f(x) &= df(x)Lx - Lf(x) \\
&= \begin{pmatrix}
0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0 \\
\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \alpha_l a_{l1} \frac{x^\alpha}{x_l} & \dots & \displaystyle\sum_{l=1}^{n} \alpha_l a_{ln} \frac{x^\alpha}{x_l} \\
0 & \dots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \dots & 0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1i} x^\alpha \\ \vdots \\ a_{ni} x^\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l a_{lm} \dfrac{x^\alpha x_m}{x_l} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{1i}x^\alpha \\ \vdots \\ a_{ni}x^\alpha \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ou melhor, } Ad_L^k f(x) = \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_m}{x_l}\right) e_i - [a_{1i}x^\alpha e_1 + \ldots + a_{ni}x^\alpha e_n]$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l a_{lm} \frac{x^\alpha x_m}{x_l}\right) e_i - \sum_{l=1}^{n} a_{li}x^\alpha e_l.$$

Analogamente, como $L^* = L^t$, onde L^t é a transposta de L,

$$Ad_{L^t}^k g(x) = dg(x)L^t x - L^t g(x)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \beta_m a_{lm} \frac{x^\beta x_l}{x_m}\right) e_j - \sum_{m=1}^{n} a_{jm}x^\beta e_m.$$

Deste modo,

$$\langle Ad_L^k f(x), g(x)\rangle = \left\langle \left(\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l a_{lm} x^\alpha \frac{x_m}{x_l}\right) e_i - \sum_{l=1}^{n} a_{li}x^\alpha e_l, x^\beta e_j \right\rangle$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \alpha_l a_{lm} \left\langle x^\alpha \frac{x_m}{x_l} e_i, x^\beta e_j \right\rangle - \sum_{l=1}^{n} a_{li}\langle x^\alpha e_l, x^\beta e_j\rangle$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \left(\alpha_l a_{l1} \left\langle x^\alpha \frac{x_1}{x_l} e_i, x^\beta e_j \right\rangle + \ldots + \alpha_l a_{ln} \left\langle x^\alpha \frac{x_n}{x_l} e_i, x^\beta e_j \right\rangle\right)$$

$$-(a_{1i}\langle x^\alpha e_1, x^\beta e_j\rangle + \ldots + a_{ni}\langle x^\alpha e_n, x^\beta e_j\rangle)$$

$$= \begin{cases} \left(\sum_{l=1}^{n} \alpha_l a_{ll} - a_{ii}\right)\alpha!, & \text{se } i = j \text{ e } \alpha = \beta; \\ \alpha_l a_{lm}\beta!, & \text{se } i = j,\ \beta_l = \alpha_l - 1,\ \beta_m = \alpha_m + 1,\ \beta_s = \alpha_s, \\ & \text{para algum } l \neq m \text{ e todo } s \neq l, m; \\ -a_{ji}\alpha!, & \text{se } i \neq j \text{ e } \alpha = \beta; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

De forma análoga,

$$\langle f(x), Ad^k_{L^*} g(x)\rangle = \begin{cases} \left(\sum_{l=1}^{n} \beta_l a_{ll} - a_{ii}\right)\beta!, & \text{se } i=j \text{ e } \alpha=\beta; \\ \beta_l a_{lm}\alpha!, & \text{se } i=j,\ \alpha_l=\beta_l+1,\ \alpha_m=\beta_m-1,\ \beta_s=\alpha_s, \\ & \text{para algum } l\neq m \text{ e todo } s\neq l,m; \\ -a_{ji}\beta!, & \text{se } i\neq j \text{ e } \alpha=\beta; \\ 0, & \text{nos demais casos.} \end{cases}$$

Como na segunda linha de cada expressão temos

$$\begin{aligned} \alpha_l a_{lm}\beta! &= \alpha_l a_{lm}\beta_1!\ldots\beta_l!\ldots\beta_m!\ldots\beta_n! \\ &= \alpha_l a_{lm}\alpha_1!\ldots(\alpha_l-1)!\ldots(\alpha_m+1)!\ldots\alpha_n! \\ &= (\alpha_m+1)a_{lm}\alpha_1!\ldots\alpha_l!\ldots\alpha_m!\ldots\alpha_n! \\ &= \beta_m a_{lm}\alpha!, \end{aligned}$$

segue o resultado desejado. ■

Nosso intuito, agora, é encontrar uma mudança de coordenadas $x=\xi(y)$ que mantenha a parte linear de (2.1) e a dinâmica do fluxo numa vizinhança da origem. Seja $L=dh(0)$ a linearização de h na origem e consideramos uma série de potências formal em torno deste ponto:

$$L+h^2+h^3+\ldots,$$

onde para cada $k\geq 2,\ h^k\in\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$. Assim, (2.1) pode ser reescrito como

$$\dot{x} = Lx+H(x), \tag{2.4}$$

onde $H(x)=h^2(x)+h^3(x)+\ldots$, para x em torno da origem.

Consideramos $x=\xi(y)$ uma mudança de coordenadas C^r numa vizinhança Ω da origem, na qual $d\xi(y)$ é invertível, com $\xi(0)=0$. Então, $\dot{x} = d\xi(y)\dot{y}$ e de (2.4) temos

$$\dot{y} = d\xi(y)^{-1}\left(L\xi(y)+H(\xi(y))\right),\quad y\in\Omega, \tag{2.5}$$

onde $d\xi(y)^{-1}$ é a inversa de $d\xi(y)$ em Ω. Denotamos por $\varphi(y)$ o lado direito da equação (2.5) e por K a derivada de $d\xi(y)^{-1}$ com respeito a y. Assim, a Jacobiana de $\varphi(y)$ é dada por

$$J_{\varphi(y)}(y) = K(L\xi(y)+H(\xi(y)))+d\xi(y)^{-1}(Ld\xi(y)+dH(\xi(y))d\xi(y)).$$

Aplicando na origem,

$$\begin{aligned} J_{\varphi(y)}(0) &= d\xi(0)^{-1}Ld\xi(0) + d\xi(0)^{-1}dH(0)d\xi(0) \\ &= d\xi(0)^{-1}Ld\xi(0), \end{aligned}$$

pois $dH(0) = 0$. Logo, a parte linear de (2.5) é $d\xi(0)^{-1}Ld\xi(0)y$.

Assumindo que L já está na forma canônica e que a mudança de coordenadas $\xi(y)$ tem a forma $\xi(y) = y + O(|y|^2)$, com $y \to 0$, temos que $d\xi(0) = d\xi(0)^{-1} = \text{Id}$. Ou seja, a parte linear de (2.5) é Ly. Assim, através da mudança de coordenadas $x = \xi(y)$, escrevemos (2.5) como

$$\dot{y} = Ly + g(y), \quad y \in \Omega, \tag{2.6}$$

com $g(y)$ tendo termos de ordem ≥ 2.

A ideia é determinar a mudança de coordenadas de modo que (2.6) seja a forma mais simples possível. Por "mais simples"queremos dizer que as características essenciais do fluxo perto da origem são mais evidentes. Esta simplificação pode ser obtida, até termos de ordem específica, considerando uma sequência indutiva de mudanças de coordenadas próximas à identidade da forma

$$\xi(y) = y + \xi^k(y), \ y \in \Omega_k, \tag{2.7}$$

onde $\xi^k : (V, 0) \longrightarrow V$ é um germe de polinômio homogêneo de grau $k \geq 2$ e Ω_k é uma vizinhança da origem em V. Pelo Teorema da aplicação inversa, qualquer aplicação da forma (2.7) é um difeomorfismo em alguma vizinhança da origem, pois $d\xi(0) \neq 0$ e ξ é continuamente diferenciável. Além disso, para cada $k \geq 2$, a mudança de coordenadas (2.7) transforma o campo h de (2.1) no campo conjugado

$$q(y) = d\xi(y)^{-1}h(\xi(y)) \tag{2.8}$$

do sistema $\dot{y} = q(y), \ y \in \Omega$. Mais especificamente:

Definição 2.5. *Dois campos vetoriais $h, q : V \longrightarrow V$ são conjugados se existe um difeomorfismo $\Phi : V \longrightarrow V$ tal que $q = \Phi_* h$, onde*

$$\Phi_* h(x) = d\Phi(x)^{-1}h(\Phi(x)), \ x \in V.$$

Nos referimos ao campo $\Phi_* h$ como o pull-back de h por Φ.

De (2.7), para cada $y \in \Omega_k$,

$$d\xi(y) = \mathrm{Id} + d\xi^k(y),$$

donde

$$d\xi(y)^{-1} = \mathrm{Id} - d\xi^k(y) + (d\xi^k(y))^2 - (d\xi^k(y))^3 + \ldots = \mathrm{Id} - d\xi^k(y) + O(|y|^{2(k-1)}),$$

com $y \in \Omega_k$. Deste modo, truncando a série de h em k e lembrando que $d\xi^k(y)$ tem grau $k-1$, podemos reescrever (2.5) como

$$\begin{aligned}
\dot{y} &= d\xi(y)^{-1}(L\xi(y) + H(\xi(y))) \\
&= (\mathrm{Id} - d\xi^k(y) + O(|y|^{2k-2}))(Ly + L\xi^k(y) + h^2(y + \xi^k(y)) + \ldots + h^k(y + \xi^k(y))) \\
&= (Ly + L\xi^k(y) + h^2(y) + \ldots + h^k(y)) + \\
&\quad (-d\xi^k(y)Ly - d\xi^k(y)L\xi^k(y) - d\xi^k(y)h^2(\xi(y)) - \ldots - d\xi^k(y)h^k(\xi(y)) + O(|y|^{2k-1})) \\
&= Ly + h^2(y) + \ldots + h^{k-1}(y) + \left\{h^k(y) - (d\xi^k(y)Ly - L\xi^k(y))\right\} + O(|y|^{k+1}),
\end{aligned}$$

com $y \in \Omega_k$. Portanto,

$$\dot{y} = Ly + h^2(y) + \ldots + h^{k-1}(y) + (h^k(y) - Ad_L^k\xi^k(y)) + O(|y|^{k+1}), \tag{2.9}$$

onde Ad_L^k é como em (2.3). Observamos que no novo sistema os termos de ordem k são da forma $g^k = h^k - Ad_L^k\xi^k$, para algum $\xi^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$.

Consideramos agora $\mathcal{C}^k$ um subespaço complementar de $Ad_L^k(\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k)$ em $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$, isto é,

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k = Ad_L^k(\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k) \oplus \mathcal{C}^k,\ k \geq 2. \tag{2.10}$$

Portanto, $g^k = h^k - Ad_L^k\xi^k \in \mathcal{C}^k$, para algum complementar $\mathcal{C}^k$ apropriado.

Observação 2.6. *Veremos na demonstração do Teorema 2.7 que é possível escolher adequadamente $\xi^k(y)$ em (2.7) de modo a simplificar (anular) o termo $h^k(y)$ em (2.9). Notamos também que uma mudança de coordenadas deste tipo fixa a parte linear L, simplifica os termos de ordem k sem alterar os termos de ordem menor do que k, e altera os termos de ordem maior do que k.*

Obtemos, então, a simplificação desejada de (2.4):

Teorema 2.7. *Seja $h \in \vec{\mathcal{E}}_V$ um campo de vetores com $h(0) = 0$ e $dh(0) = L$. Consideramos a decomposição (2.10) de $\vec{\mathcal{P}}^k_V$, para $k = 2, \ldots, r$. Então existe uma sequência de transformações polinomiais próximas à identidade da forma $x = y + \xi^k(y),\ y \in \Omega_k$, onde $\xi^k \in \vec{\mathcal{P}}^k_V$ e Ω_k é uma vizinhança da origem, com $\Omega_{k+1} \subseteq \Omega_k$, tal que nas novas coordenadas o sistema (2.4) tem a forma*

$$\dot{y} \ = Ly + g^2(y) + \ldots + g^r(y) + O(|y|^{r+1}),\ y \in \Omega_r, \tag{2.11}$$

onde $g^k \in \mathcal{C}^k$ para $k = 2, \ldots, r$.

Demonstração: Seja h como nas hipóteses do teorema e consideramos

$$Lx + h^2(x) + \ldots + h^r(x) + O(|x|^{r+1})$$

uma série de potências formal de h. Para $k = 2$, a equação (2.9) é dada por

$$\dot{y} \ = Ly + (h^2(y) - Ad^2_L\xi^2(y) + O(|y|^3)), \quad y \in \Omega_2,$$

onde Ω_2 é pequena o suficiente para que $\mathrm{Id} + d\xi^2(y)$ seja invertível. Por (2.10), existem $f^2 \in Ad^2_L(\vec{\mathcal{P}}^2_V)$ e $g^2 \in \mathcal{C}^2$ tais que $h^2 = f^2 + g^2$. Escolhemos $\xi^2 \in \vec{\mathcal{P}}^2_V$ de forma que $Ad^2_L\xi^2 = f^2$. Logo,

$$\begin{aligned} \dot{y} &= Ly + (f^2(y) + g^2(y) - f^2(y) + O(|y|^3)) \\ &= Ly + g^2(y) + O(|y|^3),\ y \in \Omega_2. \end{aligned}$$

Agora procedemos por indução, lembrando que transformações da forma (2.7) não alteram termos de ordem menor que k. Assumimos o teorema válido para $2 \leq k \leq s-1 < r$, ou seja, existe uma mudança de coordenadas que transforma (2.4) em

$$\dot{x} \ = Lx + g^2(x) + \ldots + g^{s-1}(x) + h^s(x) + O(|x|^{s+1}), \quad x \in \Omega_{s-1},$$

onde $g^k \in \mathcal{C}^k$ para $k = 2, \ldots, s-1,\ h^s \in \vec{\mathcal{P}}^s_V$ e Ω_{s-1} é uma vizinhança da origem. Seja $x = y + \xi^s(y),\ y \in \Omega_s$, onde escolhemos $\xi^s \in \vec{\mathcal{P}}^s_V$ de modo que $h^s = Ad^s_L\xi^s + g^s$ para algum $g^s \in \mathcal{C}^s$. Além disso, $\Omega_s \subseteq \Omega_{s-1}$ é uma vizinhança da origem na qual $\mathrm{Id} + d\xi^s(y)$ é

invertível. Desta forma, a equação (2.9) para $k = s$ torna-se

$$\begin{aligned}\dot{y} &= Ly + g^2(y) + \ldots + g^{s-1}(y) + (h^s(y) - Ad_L^s\xi^s(y)) + O(|y|^{s+1}) \\ &= Ly + g^2(y) + \ldots + g^{s-1}(y) + (Ad_L^s\xi^s(y) + g^s(y) - Ad_L^s\xi^s(y)) + O(|y|^{s+1}) \\ &= Ly + g^2(y) + \ldots + g^{s-1}(y) + g^s(y) + O(|y|^{s+1}),\end{aligned}$$

com $y \in \Omega_s$, o que conclui a prova. ■

Definição 2.8. *Para cada $k \geq 2$, consideramos a decomposição (2.10). A seguinte equação truncada de (2.11)*

$$\dot{y} = Ly + g^2(y) + \ldots + g^r(y), \tag{2.12}$$

onde $g^k \in \mathcal{C}^k$, $k = 2, \ldots, r$, é chamada uma forma normal de (2.4) de ordem r.

Observação 2.9. *Neste trabalho, não estamos assumindo que as aplicações sejam analíticas, de forma que o novo sistema (2.11) obtido após as mudanças de coordenadas é formalmente conjugado a (2.4), no sentido de que as suas correspondentes séries de Taylor são conjugadas entre si. Desta maneira, um problema técnico surge quando o campo h é flat, ou seja, h e suas derivadas de todas as ordens se anulam na origem. Por este motivo, vamos desconsiderar este caso.*

Pelo Teorema 2.7, uma forma normal não é única para um dado L. Obviamente, ela depende da escolha dos subespaços complementares $\mathcal{C}^k$, $k = 2, \ldots, r$. Em [16] são apresentados dois métodos para determinar tal espaço. O primeiro é o método do operador adjunto, pois uma possível escolha para $\mathcal{C}^k$ é o complemento ortogonal de $Ad_L^k(\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k)$, caracterizado como $\ker\left(Ad_L^k\right)^*$. O segundo método é o de representação matricial, no qual usamos a matriz M_k do operador linear Ad_L^k com respeito a uma dada base de $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$, para $k \geq 2$ fixado. O método consiste em ver M_k como um operador linear em $\mathbb{R}^{d_k}$, com $d_k = \dim_{\mathbb{R}} \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$, e encontrar um subespaço complementar para a sua imagem em $\mathbb{R}^{d_k}$. Uma desvantagem destes dois métodos é que os seus cálculos se tornam mais complicados conforme o grau que truncamos a série de potências do campo aumenta. Descrevemos aqui apenas o método do operador adjunto, que foi primeiro introduzido por Belitskii [8, 9].

Consideramos o espaço vetorial $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V$ das aplicações polinomiais $g : V \longrightarrow V$ e observamos que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}_V$. Além disso, $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V$ é uma álgebra graduada dada por

$$\vec{\mathcal{P}}_V = \bigoplus_{k=1}^{\infty} \vec{\mathcal{P}}_V^k.$$

Definimos o operador linear $Ad_L : \vec{\mathcal{P}}_V \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V$, chamado operador homológico, por

$$Ad_L\xi(x) = d\xi(x)Lx - L\xi(x), \quad \xi \in \vec{\mathcal{P}}_V, \tag{2.13}$$

onde $L : V \longrightarrow V$ é um operador. Claramente, $Ad_L^k = Ad_L|_{\vec{\mathcal{P}}_V^k}$, visto que Ad_L é linear e preserva a graduação de $\vec{\mathcal{P}}_V$. Uma possível escolha proposta por Belitskii [8, 9] consiste em considerar o subespaço $\mathcal{C}^k$, em (2.10), como o complemento ortogonal $\ker Ad_{L^*}^k$, onde $Ad_{L^*}^k$ é o operador adjunto de Ad_L^k. Isto porque se W é um espaço vetorial de dimensão finita, para qualquer operador $A : W \longrightarrow W$, temos

$$\ker A^* = (A(W))^{\perp},$$

onde A^* é o operador adjunto de A e $\perp$ indica o subespaço ortogonal segundo algum produto interno definido em W. Assim, como $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ é de dimensão finita,

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_V^k &= Ad_L^k(\vec{\mathcal{P}}_V^k) \oplus (Ad_L^k(\vec{\mathcal{P}}_V^k))^{\perp} \\ &= Ad_L^k(\vec{\mathcal{P}}_V^k) \oplus \ker(Ad_L^k)^* \\ &= Ad_L^k(\vec{\mathcal{P}}_V^k) \oplus \ker Ad_{L^*}^k, \end{aligned}$$

a última igualdade seguindo do Teorema 2.4. Ou seja, um possível espaço complementar de $Ad_L^k(\vec{\mathcal{P}}_V^k)$ em $\vec{\mathcal{P}}_V^k$ é dado por $\ker Ad_{L^*}^k$. Segue, pelo Teorema 2.7, que o sistema (2.4) é formalmente conjugado a

$$\dot{x} = Lx + g^2(x) + g^3(x) + \ldots,$$

onde $g^k \in \ker Ad_{L^*}^k,\ k \geq 2$.

Portanto, o método do operador adjunto consiste em determinar soluções polinomiais g^k para $Ad_{L^*}^k g^k \equiv 0$. Mostramos agora que este processo equivale a encontrar os polinômios de um dado grau sem termos constantes e lineares que estão em $\ker Ad_{L^*}$. Para isto, consideramos um polinômio de grau r da forma

$$g = g^2 + \ldots + g^r,$$

onde $g^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k,\ k = 2, \ldots, r$. Então $g \in \ker Ad_L$ se, e somente se, $g^k \in \ker Ad_L^k$. De fato, temos que

$$\begin{aligned} Ad_L g &= Ad_L(g^2 + \ldots + g^r) \\ &= Ad_L g^2 + \ldots + Ad_L g^r \\ &= Ad_L^2 g^2 + \ldots + Ad_L^r g^r. \end{aligned}$$

Se $g^k \in \ker Ad_L^k,\ k = 2, \ldots, r$, então $Ad_L g \equiv 0$. Por outro lado, se $g \in \ker Ad_L$, então

$$0 = Ad_L^2 g^2 + \ldots + Ad_L^r g^r.$$

Como $Ad_L^k g^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k, 2 \leq k \leq r$, então cada $Ad_L^k g^k$ é identicamente nulo. Logo, $g^k \in \ker Ad_L^k$, para todo $2 \leq k \leq r$. Assim, uma forma normal de ordem r é obtida se determinarmos as soluções polinomiais ξ de grau r, sem constantes e termos lineares, da equação diferencial parcial $Ad_{L^*}\xi \equiv 0$. Em geral, esta não é uma tarefa fácil, uma vez que isto envolve resolver uma EDP. Um método alternativo para determinar $\mathcal{C}^k$ foi proposto por Elphick *et al.* [17] e é apresentado na próxima seção.

Exemplo 2.10. Consideramos $V = \mathbb{R}^2$ e o sistema (2.4) com $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ a matriz de $L = dh(0)$. Tomamos $\xi(x) = (\xi_1(x), \xi_2(x))^t$, onde $x = (x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2$ e ξ_i são polinômios escalares de grau $r \geq 2$. Então

$$\begin{aligned} Ad_{L^*}\xi(x) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) \\ \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_1}(x) & \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1(x) \\ \xi_2(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) \\ x_1 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) - \xi_1(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para encontrarmos as soluções polinomiais de $Ad_{L^*}\xi(x) = 0$, resolvemos o sistema

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) = 0 \\ x_1 \dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2}(x) - \xi_1(x) = 0, \end{cases}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Da primeira equação, temos que $\dfrac{\partial \xi_1}{\partial x_2}(x) = 0$. Logo, ξ_1 é constante em x_2 e como queremos as soluções polinomiais de grau r sem termos constantes e lineares podemos escrever

$$\xi_1(x_1, x_2) = x_1^2 \phi_1(x_1),$$

onde ϕ_1 é um polinômio de grau $r-2$. A segunda equação nos dá $\dfrac{\partial \xi_2}{\partial x_2} = x_1\phi_1(x_1)$, donde segue que

$$\xi_2(x_1, x_2) + \psi_1(x_1) = x_1\phi_1(x_1)x_2 + \psi_2(x_1),$$

onde tomamos ψ_1 e ψ_2 polinômios quaisquer de grau r sem termos constantes e lineares. Portanto,

$$\xi_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 \phi_1(x_1) + x_1^2 \phi_2(x_1),$$

onde ϕ_2 é um polinômio de grau $r-2$. Assim uma forma normal para (2.4) de ordem r é dada por

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1^2\phi_1(x_1) \\ x_1 x_2 \phi_1(x_1) + x_1^2 \phi_2(x_1) \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_1^2\phi_1(x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \phi_1(x_1) + x_1^2 \phi_2(x_1), \end{cases}$$

onde $r \geq 2$ é qualquer inteiro e $\phi_1,\ \phi_2$ são polinômios arbitrários de grau $r-2$. Logo, uma forma normal de ordem 2 é da forma

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + bx_1^2 \\ \dot{x}_2 = ax_1^2 + bx_1 x_2, \end{cases}$$

com $a, b \in \mathbb{R}$.

Observação 2.11. *Se considerarmos o espaço H_n^k dos polinômios homogêneos de grau k em n variáveis com valores em $\mathbb{C}^n$, podemos definir um produto interno de forma análoga a (2.2), como segue:*

$$\langle p, q \rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{|\alpha|=k} p_{\alpha j} \overline{q_{\alpha j}} \alpha!,$$

com $p, q \in H_k^n$. A teoria de formas normais também pode ser estudada neste contexto desde que V seja um espaço vetorial complexo. Neste caso, são válidos os Teoremas 2.4 e 2.7, com $L^* = \overline{L}^t$.

2.2 O método de Elphick *et al.*

Como vimos até agora, existem muitas escolhas possíveis para o complemento $\mathcal{C}^k$ em (2.10). Em [17], Elphick *et al.* nos mostram que existe uma escolha canônica para $\mathcal{C}^k$ em que os seus elementos comutam com um grupo $\mathbf{S}$ de aplicações a um parâmetro real, definido a partir da linearização L do campo de vetores (Teorema 2.17). Nesta seção, apresentamos este método alternativo, que nos permite usar ferramentas da teoria de invariantes e da teoria de representação de grupos para se obter uma forma normal para (2.1). Nossa principal referência aqui é [19].

Primeiramente, definimos o grupo $\mathbf{S}$ de simetrias a partir da matriz de $L = dh(0)$, onde h em (2.1) é o campo de vetores. Para isto, enunciamos o seguinte resultado:

Proposição 2.12. *Consideramos G um grupo topológico e $H \leq G$ um subgrupo.*

(i) ([30], Proposição 2.11). *O fecho $\overline{H}$ é também um subgrupo de G;*

(ii) *Se $p \in G$ comuta com H então p comuta com $\overline{H}$.*

Lembramos que V denota um espaço vetorial real de dimensão finita $n \geq 1$. Além disso, daqui em diante, confundimos $L = dh(0)$ com sua matriz que é uma matriz quadrada de ordem n. Definimos

$$\mathbf{R} = \left\{ e^{sL^t} : \ s \in \mathbb{R} \right\} \subset Gl(n).$$

O conjunto $\mathbf{R}$ é um grupo abeliano quando munido da operação de produto de matrizes, pois dados $e^{s_1 L^t}, \ e^{s_2 L^t} \in \mathbf{R}$ temos

$$e^{s_1 L^t} e^{s_2 L^t} = e^{(s_1+s_2)L^t} \in \mathbf{R},$$

com $e^{(s_1+s_2)L^t} = e^{(s_2+s_1)L^t} = e^{s_2 L^t} e^{s_1 L^t}$. Mas $\mathbf{R}$ pode não ser um grupo de Lie linear, uma vez que ele pode não ser fechado como vemos no Exemplo 2.14 (b). Entretanto, pela Proposição 2.12 (i), $\overline{\mathbf{R}} \subset Gl(n)$ é um grupo fechado e, portanto, um subgrupo de Lie de $Gl(n)$.

Definição 2.13. *Definimos o grupo de Lie $\mathbf{S}$ como*

$$\mathbf{S} = \overline{\mathbf{R}} = \overline{\{e^{sL^t} : \ s \in \mathbb{R}\}}. \tag{2.14}$$

Como $\mathbf{R}$ é abeliano, $\mathbf{S}$ também é. De fato, sejam $P, Q \in \mathbf{S} \backslash \mathbf{R}$. Então existem

sequências não constantes $(x_n),\ (y_n) \subset \mathbf{R}$ tais que $\lim x_n = P$ e $\lim y_n = Q$. Daí

$$\begin{aligned} PQ &= (\lim x_n)(\lim y_n) = \lim x_n y_n \\ &= \lim y_n x_n = (\lim y_n)(\lim x_n) = QP. \end{aligned}$$

Pela Proposição 2.12 (ii), $\mathbf{S}$ comuta com a matriz L^t, uma vez que $e^{sL^t}L^t = L^t e^{sL^t}$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, $\mathbf{S}$ é um grupo com ação natural em V dada pelo produto de matriz por vetor.

Exemplo 2.14. (a) Consideramos a matriz $L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Escrevemos $B = sL^t$, $s \in \mathbb{R}$, e denotamos por I_2 a matriz identidade de ordem 2. Logo, $B^i = s^i I_2$, se $i = 4n$; $B^i = s^i L^t$, se $i = 4n+1$; $B^i = -s^i I_2$ se $i = 4n+2$; $B^i = s^i L$, se $i = 4n+3$, para $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i s^{2i}}{(2i)!} & -\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i s^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i s^{2i+1}}{(2i+1)!} & \displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i s^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos s & -\text{sen } s \\ \text{sen } s & \cos s \end{pmatrix}$$

denota a matriz R_s de rotação de ângulo s no plano. Portanto, $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{R}} = \overline{\{R_s :\ s \in \mathbb{R}\}}$ é isomorfo ao grupo do círculo S^1.

(b) Consideramos a matriz

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Assim, para $s \in \mathbb{R}$,

$$B = sL^t = \begin{pmatrix} 0 & -s & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sqrt{2}s \\ 0 & 0 & \sqrt{2}s & 0 \end{pmatrix},\ B^2 = \begin{pmatrix} -s^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -s^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -(\sqrt{2}s)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -(\sqrt{2}s)^2 \end{pmatrix},$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 0 & s^3 & 0 & 0 \\ -s^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sqrt{2}s)^3 \\ 0 & 0 & -(\sqrt{2}s)^3 & 0 \end{pmatrix},\ B^4 = \begin{pmatrix} s^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s^4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{2}s)^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\sqrt{2}s)^4 \end{pmatrix},$$

e assim por diante, donde

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{s^{2i}}{(2i)!} & -\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i \frac{s^{2i+1}}{(2i+1)!} & 0 & 0 \\ \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{s^{2i+1}}{(2i+1)!} & \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{s^{2i}}{(2i)!} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(\sqrt{2}s)^{2i}}{(2i)!} & -\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(\sqrt{2}s)^{2i+1}}{(2i+1)!} \\ 0 & 0 & \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(\sqrt{2}s)^{2i+1}}{(2i+1)!} & \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i \frac{(\sqrt{2}s)^{2i}}{(2i)!} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos s & -\text{sen}s & 0 & 0 \\ \text{sen}s & \cos s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\sqrt{2}s & -\text{sen}\sqrt{2}s \\ 0 & 0 & \text{sen}\sqrt{2}s & \cos\sqrt{2}s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_{\sqrt{2}s} \end{pmatrix}.$$

Portanto,

$$\mathbf{R} = \left\{ \begin{pmatrix} R_s & 0 \\ 0 & R_{\sqrt{2}s} \end{pmatrix} :\ s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Consideramos $T^2 = S^1 \times S^1$, o toro bidimensional. Como $\mathbf{R} \neq T^2$ e $\overline{\mathbf{R}} = T^2$ ([22, VI Seção 7]), segue que $\mathbf{R}$ não é fechado, ou seja, $\mathbf{R}$ não é um subgrupo de Lie de $Gl(n)$.

(c) Em geral, $\mathbf{S}$ como definido em (2.14) pode não ser compacto. Por exemplo, se

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

então $B = sL^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ s & 0 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$, o que implica em $B^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, para todo $i \in \mathbb{N},\ i \geq 2$. Assim,

$$e^B = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix}.$$

Desta forma, concluímos que $\mathbf{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} :\ s \in \mathbb{R} \right\} \equiv \mathbb{R}$ é um conjunto ilimitado e, assim, não é compacto.

Quando a linearização L tem apenas autovalores puramente imaginários, podemos caracterizar $\mathbf{S}$ de uma maneira particular, como um l-toro $T^l = S^1 \times \ldots \times S^1$ (l parcelas), onde l é o número de autovalores algebricamente independentes de L. Mais especificamente, suponhamos que os autovalores não nulos de L sejam puramente imaginários. Podemos decompor L de maneira única como

$$L = D + N, \tag{2.15}$$

onde D é diagonal e N é nilpotente com $DN = ND$. A decomposição (2.15) é chamada de decomposição de Jordan-Chevalley. Então temos o seguinte resultado:

Teorema 2.15 ([19], XVI Proposition 5.7)**.** *Consideramos o grupo* $\mathbf{S}$ *como definido em (2.14) e a decomposição (2.15) de* L*. Então*

$$\mathbf{S} = \begin{cases} T^l, \text{ se } N = 0 \\ \mathfrak{R} \times T^l, \text{ se } N \neq 0, \end{cases}$$

onde l *é o número de autovalores algebricamente independentes de* L, $T^l = \overline{\{e^{sD} :\ s \in \mathbb{R}\}}$ *e* $\mathfrak{R} = \left\{e^{sN^t} :\ s \in \mathbb{R}\right\}$.

Provamos agora o seguinte lema, do qual depende a prova do principal teorema desta seção, o Teorema 2.17. O resultado nos mostra que o grupo $\mathbf{S}$ introduz, de fato, simetrias no problema, uma vez que os elementos de $\ker Ad^k_{L^*}$ são $\mathbf{S}-$equivariantes. Como V é um espaço vetorial real, tomamos $L^* = L^t$, onde L^t é a transposta da matriz L.

Lema 2.16. *Seja $p \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V$, para $k \geq 2$ fixado. Sejam $L = dh(0)$ a parte linear do campo de vetores h em (2.1) e o operador $Ad^k_{L^t}$ como em (2.3). Então,*

(i) $Ad^k_{L^t}p(x) = \dfrac{d}{ds}e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x)|_{s=0}$;

(ii) $\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}) = \ker Ad^k_{L^t}$, *onde* $\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}) = \left\{ p \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V \colon \ p \text{ comuta com } \mathbf{S} \right\}$.

Demonstração:

(i) Como L^t comuta com a exponencial e^{sL^t}, $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x) &= -L^te^{-sL^t}p(e^{sL^t}x) + e^{-sL^t}(dp)(e^{sL^t}x)L^te^{sL^t}x \\ &= e^{-sL^t}\left((dp)(e^{sL^t}x)L^te^{sL^t}x - L^tp(e^{sL^t}x)\right) \\ &= e^{-sL^t}Ad^k_{L^t}p(e^{sL^t}x). \end{aligned}$$

Quando $s = 0$, segue que

$$\frac{d}{ds}e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x)|_{s=0} = Ad^k_{L^t}p(x).$$

(ii) Se p comuta com $\mathbf{S}$, então $p(e^{sL^t}x) = e^{sL^t}p(x)$, para todo $s \in \mathbb{R}$, $x \in V$. Pelo item (i),

$$Ad^k_{L^t}p(x) = \frac{d}{ds}e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}p(x)|_{s=0} = 0,$$

para todo $x \in V$. Logo, $p \in \ker Ad^k_{L^t}$. Reciprocamente, se $Ad^k_{L^t}p \equiv 0$, então, pela demonstração do item (i), temos que $e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x)$ é uma função constante em s. Assim,

$$e^{-sL^t}p(e^{sL^t}x) = e^0p(e^0x) = p(x),$$

ou seja, $p(e^{sL^t}x) = e^{sL^t}p(x)$, para todo $s \in \mathbb{R}$ e $x \in V$. Logo, p comuta com $\mathbf{R}$. Pela Proposição 2.12 (ii) segue que p comuta com $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{R}}$. Portanto, $p \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$. ■

O próximo teorema é devido a Elphick *et al.* [17]. Ele nos fornece uma possível escolha para o complementar $\mathcal{C}^k$ de (2.10).

Teorema 2.17 ([19], XVI Theorem 5.3)**.** *Seja $\mathbf{S}$ como em (2.14). Então para $k \geq 2$,*

$$\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V = \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}) \oplus Ad^k_L(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V).$$

Demonstração: Pelo lema anterior temos $\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) = \ker Ad^k_{L^t}$. O resultado segue pelo método do operador adjunto. ■

Portanto, o método de Elphick *et al.* nos permite usar ferramentas da teoria de invariantes para se obter uma forma normal de um campo de vetores como em (2.11). Ele consiste em determinarmos os geradores de grau k do módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$ dos $\mathbf{S}-$equivariantes sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$.

2.3 Formas normais equivariantes

O objetivo desta seção é apresentar um método algébrico (Teorema 2.20) para a obtenção de formas normais para o sistema (2.1) impondo que $h \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_V$ seja $\Gamma-$equivariante, para um dado grupo de Lie compacto Γ. Neste contexto, o processo de encontrar uma forma normal pode ser feito pelo método do operador adjunto, primeiro resolvendo uma equação diferencial parcial e, então, impondo as simetrias do campo de vetores na forma normal. Apresentamos aqui um método alternativo, que é a versão equivariante do Teorema 2.17, com base no conhecimento da teoria de invariantes para Γ e $\mathbf{S}$. Nossa abordagem, na presente seção, baseia-se em [19].

Começamos com alguns resultados preliminares. Para tanto, consideramos o sistema (2.1) com $h \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$ e $h(0) = 0$, onde Γ é um grupo de Lie compacto. Tomamos $\mathbf{S}$ como em (2.14), onde $L = dh(0)$ é a linearização de h na origem. Observamos que L é $\Gamma-$equivariante. De fato, como $h(\gamma x) = \gamma h(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$, temos $dh(\gamma x)\gamma = \gamma dh(x)$. Em $x = 0,\ dh(0)\gamma = \gamma dh(0),\ \forall \gamma \in \Gamma$. Logo,

$$L\gamma x = dh(0)\gamma x = \gamma dh(0)x = \gamma Lx,\ \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in V,$$

ou seja, $L \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$.

As ações de Γ e de $\mathbf{S}$ em V comutam. De fato, como a ação de Γ comuta com L, ou seja, $L\gamma = \gamma L$ para todo $\gamma \in \Gamma$, temos $L^t\gamma^t = \gamma^t L^t$. Agora, usamos que a ação de Γ em V é ortogonal para obter $L^t\gamma^{-1} = \gamma^{-1}L^t$, donde $L^t\gamma = \gamma L^t$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Consequentemente, Γ comuta com $\mathbf{R} = \left\{e^{sL^t},\ s \in \mathbb{R}\right\}$ e, portanto, com $\mathbf{S} = \overline{\mathbf{R}}$ (Proposição 2.12 (ii)). Pela Proposição 1.38, temos definida uma ação $\varrho : (\Gamma \times \mathbf{S}) \times V \longrightarrow V$ por

$$\varrho\left((\gamma, e^{sL^t}), v\right) = \gamma(e^{sL^t}v), \tag{2.16}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$.

Para os próximos resultados, definimos a aplicação linear

$$\begin{array}{rcl} \star : \Gamma \times \vec{\mathcal{P}}_V & \longrightarrow & \vec{\mathcal{P}}_V \\ (\gamma, g) & \mapsto & \gamma \star g \end{array} \tag{2.17}$$

por $\gamma \star g(x) = \gamma^{-1} g(\gamma x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$.

Definição 2.18. *Sejam Γ um grupo de Lie compacto e $\star$ a aplicação dada em (2.17). Definimos $\overline{\pi} : \vec{\mathcal{P}}_V^k \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V^k$ como*

$$\overline{\pi}(Y) = \int_\Gamma \gamma \star Y d\gamma, \tag{2.18}$$

onde $\int_\Gamma$ é a integral de Haar normalizada em Γ.

A aplicação $\overline{\pi}$ comuta com $\mathbf{S}$. De fato, dado $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{rcl} e^{sL^t}\overline{\pi}(Y) & = & e^{sL^t} \displaystyle\int_\Gamma \gamma \star Y \mathrm{d}\gamma = \int_\Gamma e^{sL^t} \gamma \star Y \mathrm{d}\gamma \\ & = & \displaystyle\int_\Gamma e^{sL^t} \gamma^{-1} Y \gamma \mathrm{d}\gamma = \int_\Gamma \gamma^{-1} e^{sL^t} Y \gamma \mathrm{d}\gamma \\ & = & \displaystyle\int_\Gamma \gamma \star e^{sL^t} Y \mathrm{d}\gamma = \overline{\pi}(e^{sL^t} Y), \end{array}$$

a quarta igualdade seguindo pois Γ e $\mathbf{S}$ comutam. Pela Proposição 2.12 (ii), segue o desejado.

Lema 2.19. *Para cada $k \geq 2$, $\overline{\pi} : \vec{\mathcal{P}}_V^k \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V^k(\Gamma)$ é uma projeção linear.*

Demonstração: Pela linearidade da integral de Haar e da aplicação $\star$ segue que $\overline{\pi}$ é linear. Agora, notamos que

$$\tau \star \gamma \star Y = (\gamma\tau) \star Y, \tag{2.19}$$

para todo $\tau, \gamma \in \Gamma,\ Y \in \vec{\mathcal{P}}_V^k$. De fato, se $\tau, \gamma \in \Gamma$,

$$\begin{array}{rcl} \tau \star \gamma \star Y(x) & = & \tau \star (\gamma^{-1} Y(\gamma x)) \\ & = & \tau^{-1}(\gamma^{-1} Y(\gamma\tau x)) \\ & = & (\gamma\tau)^{-1} Y(\gamma\tau x) \\ & = & (\gamma\tau) \star Y(x), \end{array}$$

para todo $x \in V$. Assim, para $\tau \in \Gamma$ temos

$$\begin{aligned} \tau \star \overline{\pi}(Y) &= \int_\Gamma \tau \star \gamma \star Y \mathrm{d}\gamma \\ &= \int_\Gamma (\gamma\tau) \star Y \mathrm{d}\gamma \\ &= \int_\Gamma (\gamma\tau) \star Y \mathrm{d}(\gamma\tau) \\ &= \overline{\pi}(Y). \end{aligned}$$

Daí,

$$\overline{\pi}(Y)(x) = \tau \star \overline{\pi}(Y)(x) = \tau^{-1}\overline{\pi}(Y)(\tau x),$$

ou seja, $\overline{\pi}(Y)\left(\tau(x)\right) = \tau\overline{\pi}(Y)(x)$, para todo $\tau \in \Gamma,\ x \in V$. Portanto, $\overline{\pi}(Y) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$.

Agora se $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$, então $\gamma \star Y(x) = \gamma^{-1}Y(\gamma x) = \gamma^{-1}\gamma Y(x) = Y(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Neste caso,

$$\overline{\pi}(Y) = \int_\Gamma \gamma \star Y \mathrm{d}\gamma = \int_\Gamma Y \mathrm{d}\gamma = Y \int_\Gamma \mathrm{d}\gamma = Y. \tag{2.20}$$

Portanto, $\overline{\pi}(Y) = Y$ para todo $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) = \mathrm{Im}\ \overline{\pi}$, isto é, $\overline{\pi}$ é uma projeção. ■

Teorema 2.20. *Sejam* $\mathbf{S}$ *como em (2.14) e* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V*. Então para* $k \geq 2$,

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S}) \oplus Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)), \tag{2.21}$$

onde a ação de $\Gamma \times \mathbf{S}$ *em* V *é dada em (2.16).*

Demonstração: Começamos mostrando que

$$\overline{\pi}\big|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})} : \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S})$$

é uma projeção. De fato, seja $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \subset \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$. Pelo Lema 2.19, $\overline{\pi}(Y) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$. Além disso, $Y(e^{sL^t}x) = e^{sL^t}Y(x)$, para todo $s \in \mathbb{R},\ x \in V$. Como $\overline{\pi}$ comuta com $\mathbf{S}$ temos

$$\overline{\pi}(Y)(e^{sL^t}x) = \overline{\pi}(e^{sL^t}Y)(x) = e^{sL^t}\overline{\pi}(Y)(x),$$

para todo $s \in \mathbb{R},\ x \in V$. Portanto, $\overline{\pi}(Y) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})$. Assim, $\overline{\pi}(Y) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) \cap \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})$, ou seja, $\overline{\pi}(Y) \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S})$, pela Proposição 1.39 (i). Além disso, se $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S})$, então

$Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$ e, por (2.20), $\overline{\pi}(Y) = Y$. Assim, $\overline{\pi}(Y) = Y$, para todo $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S}) = \text{Im}\ \overline{\pi}|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})}$, ou seja, $\overline{\pi}|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})}$ é uma projeção. Agora, aplicamos $\overline{\pi}$ em

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \oplus Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V)$$

para obter

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) &= \overline{\pi}(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})) + \overline{\pi}(Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V)) \\ &= \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S}) + \overline{\pi}(Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V)). \end{aligned} \tag{2.22}$$

Para $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$ e $\gamma \in \Gamma$, temos $\mathrm{d}(\gamma \star Y)(x) = \gamma^{-1}(dY)(\gamma x)\gamma$. Segue que

$$\begin{aligned} \gamma \star Ad^k_L Y(x) &= \gamma^{-1} Ad^k_L Y(\gamma x) \\ &= \gamma^{-1}\left((dY)(\gamma x)L\gamma x - LY(\gamma x)\right) \\ &= \gamma^{-1}(dY)(\gamma x)L\gamma x - \gamma^{-1}LY(\gamma x) \\ &= \gamma^{-1}(dY)(\gamma x)\gamma Lx - L\gamma^{-1}Y(\gamma x) \\ &= \mathrm{d}(\gamma \star Y)(x)Lx - L\gamma \star Y(x) \\ &= Ad^k_L(\gamma \star Y)(x), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Assim,

$$\overline{\pi}(Ad^k_L Y) = \int_\Gamma \gamma \star Ad^k_L Y \mathrm{d}\gamma = \int_\Gamma Ad^k_L(\gamma \star Y)\mathrm{d}\gamma = Ad^k_L \int_\Gamma \gamma \star Y \mathrm{d}\gamma = Ad^k_L(\overline{\pi}(Y)),$$

para todo $Y \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$, onde a terceira igualdade segue da linearidade do operador $Ad^k_L,\ k \geq 2$. Logo, $\overline{\pi}(Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V)) = Ad^k_L(\overline{\pi}(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V)) = Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$. Portanto, (2.22) torna-se

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S}) + Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)). \tag{2.23}$$

Como $\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma \times \mathbf{S}) = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) \cap \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})$ e $\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \cap Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V) = \{0\}$, pelo Teorema 2.17, segue que a soma em (2.23) é direta. ■

Com base no teorema anterior, podemos agora obter uma forma normal de (2.1) para $h \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$ que preserva as simetrias de h. Para cada k fixado, $k \geq 2$, consideramos a mudança de coordenadas próxima à identidade $x = \xi(y)$, com $\xi(y)$ dado em (2.7). Queremos que após tais mudanças de coordenadas, o novo sistema preserve as simetrias do sistema original (2.1), ou seja, se h em (2.1) é $\Gamma-$equivariante, então q em (2.8) também é. Para isto, precisamos que ξ^k em (2.7) seja $\Gamma-$equivariante, ou seja, $\xi^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$. De fato, se

$$\xi^k(\gamma y) = \gamma \xi^k(y),\ \forall \gamma \in \Gamma,\ y \in V,$$

então, pela regra da cadeia,

$$d\xi^k(\gamma y)\gamma = \gamma d\xi^k(y),\ \forall\gamma\in\Gamma,\ y\in V.$$

Além disso, de (2.7) $\xi(\gamma y)=\gamma\xi(y)$, donde

$$d\xi(\gamma y)\gamma = \gamma d\xi(y),\ \forall\gamma\in\Gamma,\ y\in V.$$

De (2.8),

$$\begin{aligned} q(\gamma y) &= (d\xi(\gamma y))^{-1}h(\xi(\gamma y)) = \gamma d\xi(y)^{-1}\gamma^{-1}h(\gamma\xi(y)) \\ &= \gamma d\xi(y)^{-1}\gamma^{-1}\gamma h(\xi(y)) = \gamma d\xi(y)^{-1}h(\xi(y)) = \gamma q(y), \end{aligned}$$

como desejado. Portanto, podemos assumir que $\xi^k\in\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$. Neste caso, $Ad^k_L\xi^k$ como em (2.3) também é $\Gamma-$equivariante. De fato, para todo $\gamma\in\Gamma,\ y\in V$,

$$\begin{aligned} Ad^k_L\xi^k(\gamma y) &= (d\xi^k)(\gamma y)L\gamma y - L\xi^k(\gamma y) \\ &= (d\xi^k)(\gamma y)\gamma Ly - L\gamma\xi^k(y) \\ &= \gamma d\xi^k(y)Ly - \gamma L\xi^k(y) \\ &= \gamma\left(d\xi^k(y)Ly - L\xi^k(y)\right) = \gamma Ad^k_L\xi^k(y), \end{aligned}$$

a penúltima igualdade seguindo da linearidade da ação de Γ em V. Deste modo, $Ad^k_L|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)}\subset\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$ e consideramos Ad^k_L restrito às aplicações $\Gamma-$equivariantes de grau k.

Como na prova do Teorema 2.7, quando $h\in\overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$, podemos eliminar qualquer termo em

$$Lx + h^2(x) + h^3(x) + \ldots + h^r(x) + \ldots$$

que esteja em $Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$, com $2\le k\le r$, ou seja, g^k em (2.11) pertence ao subespaço complementar de $Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$. Por (2.21), $g^k\in\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}\times\Gamma)$. Está provado, assim, o seguinte resultado:

Teorema 2.21. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e consideramos $h\in\overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$, com $h(0)=0$ e $L=dh(0)$. Seja $\mathbf{S}$ definido como em (2.14). Então a forma normal de $\dot{x}=h(x),\ x\in V$, é dada por*

$$\dot{x} = Lx + g^2(x) + g^3(x) + \ldots,$$

onde para cada $k \geq 2,\ g^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S} \times \Gamma)$.

Portanto, para encontrarmos a forma normal de um campo de vetores $\Gamma-$equivariante, basta calcularmos os geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma \times \mathbf{S})$.

2.4 Formas normais reversíveis equivariantes

De modo análogo ao que fizemos na seção anterior, nesta seção apresentamos um método algébrico (Teorema 2.28) para a obtenção de uma forma normal para (2.1) impondo agora que o campo de vetores seja $\Gamma-$reversível-equivariante, para um grupo de Lie compacto Γ. Como no caso equivariante, neste contexto o processo de encontrar formas normais pode ser feito pelo método do operador adjunto, resolvendo primeiro uma equação diferencial parcial, e depois impondo as simetrias e antissimetrias na forma normal. O método desenvolvido aqui fornece uma alternativa a este processo, levando novamente em consideração a teoria de invariantes para Γ e $\mathbf{S}$. A ideia é reconhecer o subespaço complementar para $Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$ no espaço $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$ dos $\Gamma-$reversíveis-equivariantes de grau k como $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$, onde $\rtimes$ denota o produto semidireto de $\mathbf{S}$ e Γ.

No decorrer desta seção, Γ é um grupo de Lie compacto e $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é um epimorfismo, com $\Gamma_+ = \ker \sigma$. Consideramos o sistema (2.1), com $h \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$ e $h(0) = 0$. Observamos que como h é $\Gamma-$reversível-equivariante, $L = dh(0)$ também é. De fato, se $h(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma h(x)$, então

$$dh(\gamma x)\gamma = \sigma(\gamma)\gamma dh(x),\ \forall \gamma \in \Gamma,\ x \in V.$$

Logo, $dh(0)\gamma x = \sigma(\gamma)\gamma dh(0)x$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$ como desejado.

Começamos com alguns resultados preliminares:

Lema 2.22. *Para cada* $k \geq 2$, *o operador* Ad^k_L, *definido em (2.3), permuta as parcelas da decomposição em soma direta*

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma_+) = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma) \oplus \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma).$$

Demonstração: Seja $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$. Assim, $dg(\gamma x)\gamma = \gamma dg(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$.

Como $L = dh(0)$ é $\Gamma-$reversível-equivariante, temos

$$\begin{aligned} Ad_L^k g(\gamma x) &= dg(\gamma x)L(\gamma x) - Lg(\gamma x) \\ &= \gamma dg(x)\gamma^{-1}\sigma(\gamma)\gamma Lx - L\gamma g(x) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma\left(dg(x)Lx - Lg(x)\right) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma Ad_L^k g(x), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Logo, $Ad_L^k g \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V^k(\Gamma)$.

Agora, se $p \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V^k(\Gamma),\ dp(\gamma x)\gamma = \sigma(\gamma)\gamma dp(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Como L é $\Gamma-$reversível-equivariante,

$$Lp(\gamma x) = \sigma(\gamma)L\gamma p(x) = \sigma(\gamma)^2\gamma Lp(x) = \gamma Lp(x),$$

uma vez que $\sigma^2(\gamma) = 1$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Desta forma,

$$\begin{aligned} Ad_L^k p(\gamma x) &= dp(\gamma x)L(\gamma x) - Lp(\gamma x) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma dp(x)\gamma^{-1}\sigma(\gamma)\gamma Lx - \gamma Lp(x) \\ &= \gamma\left(dp(x)Lx - Lp(x)\right) \\ &= \gamma Ad_L^k p(x), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Logo, $Ad_L^k p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k(\Gamma)$, concluindo a prova. ■

Lembramos que $\Gamma_- = \Gamma\backslash\Gamma_+$ denota o conjunto de antissimetrias de Γ. Além disso, $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$, para algum $\delta \in \Gamma_-$ fixado (porém arbitrário).

Lema 2.23. *Sejam $\overrightarrow{R}$ e $\overrightarrow{S}$ os operadores de Reynolds definidos em (1.10) e (1.11), respectivamente, e seja Ad_L^k o operador definido em (2.3). Para todo $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k(\Gamma_+)$, com $k \geq 2$, temos*

$$\overrightarrow{S}\left(Ad_L^k(p)\right) = Ad_L^k\left(\overrightarrow{R}\,(p)\right).$$

Demonstração: Seja $\star$ a aplicação definida em (2.17). Para todo $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k$, $\gamma \in \Gamma$ e $x \in V$, temos $d(\gamma \star p)(x) = \gamma^{-1}dp(\gamma x)\gamma$. Como L é $\Gamma-$reversível-equivariante,

$$\begin{aligned} Ad_L^k(\gamma \star p)(x) &= d(\gamma \star p)(x)Lx - L(\gamma \star p)(x) \\ &= \gamma^{-1}dp(\gamma x)\gamma Lx - L\gamma^{-1}p(\gamma x) \\ &= \gamma^{-1}dp(\gamma x)\gamma Lx - \sigma(\gamma^{-1})\gamma^{-1}Lp(\gamma x) \\ &= \sigma(\gamma)^2\gamma^{-1}dp(\gamma x)\gamma Lx - \sigma(\gamma)\gamma^{-1}Lp(\gamma x) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma^{-1}\left(dp(\gamma x)\sigma(\gamma)\gamma Lx - Lp(\gamma x)\right) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma^{-1}\left(dp(\gamma x)L(\gamma x) - Lp(\gamma x)\right) \\ &= \sigma(\gamma)\gamma \star Ad_L^k p(x), \end{aligned}$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$. Assim, para $\delta \in \Gamma_-$ fixado e $p \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}_V}(\Gamma_+)$ temos

$$\begin{aligned} \vec{S}\left(Ad_L^k p\right)(x) &= \frac{1}{2}\left(Ad_L^k p(x) - \delta^{-1}Ad_L^k p(\delta x)\right) = \frac{1}{2}\left(Ad_L^k p - \delta \star Ad_L^k p\right)(x) \\ &= \frac{1}{2}\left(Ad_L^k p + \sigma(\delta)\delta \star Ad_L^k p\right)(x) = \frac{1}{2}\left(Ad_L^k p + Ad_L^k(\delta \star p)\right)(x) \\ &= Ad_L^k\left(\frac{1}{2}(p(x) + \delta^{-1}p(\delta x))\right) = Ad_L^k\left(\vec{R}(p)\right)(x), \end{aligned}$$

para todo $x \in V$. ■

Precisamos agora garantir que temos uma ação bem definida de $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ em V. Consideramos o produto semidireto $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ dos grupos $\mathbf{S}$ e Γ induzido pelo homomorfismo $\mu : \Gamma \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{S})$ de (1.18) definido por

$$\mu(\gamma)(e^{sL^t}) = e^{\sigma(\gamma)sL^t}.$$

Para cada $\gamma \in \Gamma$, a aplicação $\mu(\gamma) : \mathbf{S} \longrightarrow \mathbf{S}$ é claramente um automorfismo. De fato, se $\gamma \in \Gamma_+$ então $\mu(\gamma) \equiv \mathrm{Id}$ e se $\gamma \in \Gamma_-$ então $\mu(\gamma)(e^{sL^t}) = (e^{sL^t})^{-1}, \forall s \in \mathbb{R}$. Além disso, μ é um homomorfismo de grupos, pois dados $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ e $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} \mu(\gamma_1\gamma_2)(e^{sL^t}) &= e^{\sigma(\gamma_1\gamma_2)sL^t} = e^{\sigma(\gamma_1)\sigma(\gamma_2)sL^t} \\ &= \mu(\gamma_1)(e^{\sigma(\gamma_2)sL^t}) \\ &= \mu(\gamma_1)(\mu(\gamma_2)(e^{sL^t})) \\ &= \mu(\gamma_1) \circ \mu(\gamma_2)(e^{sL^t}). \end{aligned}$$

Pela Proposição (1.38), μ define uma ação de $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ em V dada por

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{S} \rtimes \Gamma & \times & V & \longrightarrow & V \\ ((e^{sL^t}, \gamma) & , & x) & \mapsto & e^{sL^t}(\gamma x) \end{array}.$$

De fato, como L é $\Gamma-$reversível-equivariante e $\gamma^t = \gamma^{-1}$, $L^t\gamma = \sigma(\gamma)\gamma L^t$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Assim,

$$\mu(\gamma)(e^{sL^t}) = e^{\sigma(\gamma)sL^t} = e^{\gamma sL^t\gamma^{-1}} = \gamma e^{sL^t}\gamma^{-1},$$

para todo $\gamma \in \Gamma$. Portanto, $\mu(\gamma)$ é uma conjugação, como desejado. Neste caso, a ação de $\mathbf{S} \rtimes \Gamma$ em V fica como

$$(e^{sL^t}, \gamma)x = e^{sL^t}(\gamma x) = \gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}x,$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$.

Definição 2.24. *Consideramos a aplicação $\star$ definida em (2.17) e fixamos $\delta \in \Gamma_-$. Definimos a aplicação $\pi : \overrightarrow{\mathcal{P}}_V \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}_V$ como*

$$\pi(p) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \ d\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \ d\tau\right), \tag{2.24}$$

onde $\int_{\Gamma_+}$ é a integral de Haar normalizada em Γ_+.

Observamos que a aplicação π é uma extensão do operador $\overrightarrow{S}$. De fato, mostramos que $\pi|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)} = \overrightarrow{S}$. Seja $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma_+)$. Se $\tau \in \Gamma_+$ temos $\delta\tau = \widetilde{\tau}\ \delta$, para algum $\widetilde{\tau} \in \Gamma_+$, pois Γ_+ é normal em Γ. Neste caso, para todo $x \in V$,

$$\tau \star p(x) = \tau^{-1}p(\tau x) = \tau^{-1}\tau p(x) = p(x) \qquad \text{e}$$

$$(\delta\tau) \star p(x) = (\delta\tau)^{-1}p(\delta\tau x) = (\delta\tau)^{-1}p(\widetilde{\tau}\ \delta x) = (\delta\tau)^{-1}\ \widetilde{\tau}\ p(\delta x) = \delta^{-1}p(\delta x) = \delta \star p(x).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \ \mathrm{d}\tau\right) = \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} \delta \star p \ \mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}(p - \delta \star p)\int_{\Gamma_+} \mathrm{d}\tau = \overrightarrow{S}(p),\end{aligned}$$

visto que $\int_{\Gamma_+}$ é uma integral normalizada. Além disso, π e $\overrightarrow{S}$ tem a mesma imagem, como mostra o seguinte resultado:

Lema 2.25. *A aplicação $\pi : \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$ é uma projeção linear.*

Demonstração: Seja $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Pela linearidade da integral de Haar e da aplicação $\star$ segue que π é linear. Além disso, se p tem grau k então $\pi(p)$ também tem grau k.

Vamos mostrar que $\pi(p) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$, ou seja, $\pi(p)(\gamma x) = \sigma(\gamma)\gamma\pi(p)(x)$, para todo $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$, $\gamma \in \Gamma,\ x \in V$.

Primeiro, lembramos da demonstração do Lema 2.19 que $\tau \star (\gamma \star p) = (\gamma\tau) \star p$, para todo $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$, $\gamma, \tau \in \Gamma$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= \sigma(\gamma)\gamma \star \left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \ \mathrm{d}\tau\right)\right) \\
&= \sigma(\gamma)\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star \tau \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} \gamma \star (\delta\tau) \star p \ \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \sigma(\gamma)\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\gamma) \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\gamma) \star p \ \mathrm{d}\tau\right).
\end{aligned}$$

Se $\gamma \in \Gamma_+$, então pela invariância da integral de Haar temos

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\gamma) \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\gamma) \star p \ \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \ \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \pi(p).
\end{aligned}$$

Se $\gamma \in \Gamma_- = \delta\Gamma_+$, então $\gamma = \delta\lambda$, para algum $\lambda \in \Gamma_+$. Além disso, para cada $\tau \in \Gamma_+,\ \tau\delta = \delta\ \widetilde{\tau}$, para algum $\widetilde{\tau} \in \Gamma_+$. Agora, usando novamente a invariância da integral de Haar segue que

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p) &= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\delta\lambda) \star p \ \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\delta\lambda) \star p \ \mathrm{d}\tau\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-\int_{\Gamma_+} (\delta\ \widetilde{\tau}\ \lambda) \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau} + \int_{\Gamma_+} (\delta^2\ \widetilde{\tau}\ \lambda) \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\widetilde{\tau}\ \lambda) \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau} - \int_{\Gamma_+} (\delta\ \widetilde{\tau}\ \lambda) \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \widetilde{\tau} \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau} - \int_{\Gamma_+} (\delta\ \widetilde{\tau}) \star p \ \mathrm{d}\ \widetilde{\tau}\right) \\
&= \pi(p),
\end{aligned}$$

onde na terceira igualdade usamos que $\delta^2 \in \Gamma_+$. Desta forma, $\pi(p) = \sigma(\gamma)\gamma \star \pi(p)(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$. Logo,

$$\pi(p)(x) = \sigma(\gamma)(\gamma^{-1}\pi(p)(\gamma x)),$$

de onde $\sigma(\gamma)\gamma\pi(p)(x) = \pi(p)(\gamma x)$, para todo $\gamma \in \Gamma,\ x \in V,\ p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V$, como queríamos. Mostramos assim que $\pi(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V) \subseteq \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$.

Agora tomamos $p \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$. Então para $\tau \in \Gamma_+$ valem

$$\tau \star p(x) = \tau^{-1} p(\tau x) = \sigma(\tau)\tau^{-1}\tau p(x) = p(x) \qquad \text{e}$$

$$(\delta\tau) \star p(x) = (\delta\tau)^{-1} p(\delta\tau x) = \sigma(\delta\tau)(\delta\tau)^{-1}(\delta\tau)p(x) = -p(x),$$

para todo $x \in V$. Assim,

$$\begin{aligned} \pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \, \mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} p \, \mathrm{d}\tau + \int_{\Gamma_+} p \, \mathrm{d}\tau\right) \\ &= p\int_{\Gamma_+} \mathrm{d}\tau = p. \end{aligned}$$

Logo, $p \in \pi\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V\right)$, ou seja, $\pi\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V\right) = \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$. Além disso, $\pi|_{\overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)} = \mathrm{Id}$. Portanto, π é uma projeção. ■

Lema 2.26. *A projeção π definida em (2.24) satisfaz*

$$\pi(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})) = \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma).$$

Demonstração: Seja $g \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$. Então, $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \cap \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$, pela Proposição 1.39 (iii). Pelo Lema 2.25, temos $g = \pi(g) \in \pi\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})\right)$. Logo, $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) \subseteq \pi\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})\right)$.

Por outro lado, seja $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})$. Queremos mostrar que $\pi(p) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$, ou seja, $\pi(p)(e^{sL^t}(\gamma x)) = \sigma(\gamma)e^{sL^t}\gamma\pi(p)(x)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, $x \in V$. Para isto, mostramos que para todo $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S})$, $\gamma \in \Gamma$ e $s \in \mathbb{R}$ vale

$$\pi(p) = \sigma(\gamma)e^{sL^t}\gamma \star \pi(p) = \sigma(\gamma)\left(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}\right) \star \pi(p), \tag{2.25}$$

onde $\star$ é a aplicação definida em (2.17). Como $\gamma e^{sL^t} = e^{\sigma(\gamma)sL^t}\gamma$, para todo $\gamma \in \Gamma$, temos que

$$\gamma e^{sL^t} = e^{sL^t}\gamma,$$

para $\gamma \in \Gamma_+$ e

$$\gamma e^{sL^t} = e^{-sL^t}\gamma,$$

para $\gamma \in \Gamma_-$. Assim, se $p \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V^k(\mathbf{S})$, $\tau \in \Gamma_+$ e $s \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}(\tau e^{sL^t}) \star p(x) &= (\tau e^{sL^t})^{-1} p(\tau e^{sL^t} x) = (e^{sL^t}\tau)^{-1} p(e^{sL^t}\tau x) \\ &= \tau^{-1} e^{-sL^t} e^{sL^t} p(\tau x) = \tau^{-1} p(\tau x) \\ &= \tau \star p(x).\end{aligned}$$

Analogamente, temos $(\delta\tau e^{sL^t}) \star p(x) = (\delta\tau) \star p(x)$, para todo $\tau \in \Gamma_+$. Ainda de (2.19), temos que

$$(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}) \star \tau \star f = (\tau\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}) \star f,$$

para todo $f \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V$, $\tau, \gamma \in \Gamma$. Deste modo, dado $\gamma \in \Gamma$, temos

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma)\left(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}\right) \star \pi(p) &= \sigma(\gamma)\left(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}\right) \star \left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \, \mathrm{d}\tau\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\sigma(\gamma)\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau\right).\end{aligned}$$

Se $\gamma \in \Gamma_+$, então

$$\begin{aligned}\sigma(\gamma)\left(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}\right) \star \pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau\gamma e^{sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau\gamma e^{sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} (\tau e^{sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau e^{sL^t}) \star p \, \mathrm{d}\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \tau \star p \, \mathrm{d}\tau - \int_{\Gamma_+} (\delta\tau) \star p \, \mathrm{d}\tau\right) = \pi(p),\end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue da invariância de $\displaystyle\int_{\Gamma_+}$. Caso contrário, $\gamma \in \Gamma_- = \delta\Gamma_+$. Logo, existe $\lambda \in \Gamma_+$ tal que $\gamma = \delta\lambda$. Além disso, para cada $\tau \in \Gamma_+$ existe $\alpha \in \Gamma_+$ tal que $\tau\delta = \delta\alpha$. Assim,

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)\left(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t}\right)\star\pi(p) &= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}\tau\gamma e^{-sL^t}\star p\ \mathrm{d}\tau-\int_{\Gamma_+}\left(\delta\tau\gamma e^{-sL^t}\right)\star p\ \mathrm{d}\tau\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}(\tau\delta\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\tau-\int_{\Gamma_+}(\delta\tau\delta\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\tau\right)\\
&= -\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}(\delta\alpha\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\alpha-\int_{\Gamma_+}(\delta^2\alpha\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\alpha\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}(\delta^2\alpha\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\alpha-\int_{\Gamma_+}(\delta\alpha\lambda e^{-sL^t})\star p\ \mathrm{d}\alpha\right).
\end{aligned}$$

Como $\delta^2\alpha\lambda,\ \alpha\lambda\in\Gamma_+$, temos

$$\begin{aligned}
\sigma(\gamma)(\gamma e^{\sigma(\gamma)sL^t})\pi(p) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}(\delta^2\alpha\lambda)\star p\ \mathrm{d}\alpha-\int_{\Gamma_+}(\delta\alpha\lambda)\star p\ \mathrm{d}\alpha\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+}\alpha\star p\ \mathrm{d}\alpha-\int_{\Gamma_+}(\delta\alpha)\star p\ \mathrm{d}\alpha\right)=\pi(p),
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade usamos a invariância à direita e à esquerda de $\int_{\Gamma_+}$. Logo, a igualdade (2.25) é satisfeita, ou seja, $\pi(p)\in\overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma)$. Portanto,

$$\pi(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}))=\ \overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma).$$

■

Lema 2.27. *A projeção π definida em (2.24) satisfaz*

$$\pi(Ad_L^k(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}_V}))=Ad_L^k(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}_V}(\Gamma)).$$

Demonstração: Segue diretamente da linearidade de $Ad_L^k,\ k\geq 2$, que

$$\int_\Gamma Ad_L^k(\gamma\star p)\ \mathrm{d}\gamma=Ad_L^k\int_\Gamma\gamma\star p\ \mathrm{d}\gamma.$$

Consideramos $p\in\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}_V}$ e lembramos da demonstração do Lema 2.23 que $\sigma(\gamma)\gamma\star Ad_L^k p(x)=Ad_L^k(\gamma\star p)(x)$, ou seja,

$$\gamma\star Ad_L^k p=\sigma(\gamma)Ad_L^k(\gamma\star p),$$

para todo $\gamma \in \Gamma,\ p \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V$. Assim,

$$\begin{aligned}
\pi\left(Ad_L^k p\right) &= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star Ad_L^k p \ \mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_+} (\delta\gamma) \star Ad_L^k p \ \mathrm{d}\gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \sigma(\gamma) Ad_L^k(\gamma \star p) \ \mathrm{d}\gamma - \int_{\Gamma_+} \sigma(\delta\gamma) Ad_L^k(\delta\gamma \star p) \ \mathrm{d}\gamma\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} Ad_L^k(\gamma \star p) \ \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_+} Ad_L^k(\delta\gamma \star p) \ \mathrm{d}\gamma\right) \\
&= Ad_L^k\left(\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_+} \gamma \star p \ \mathrm{d}\gamma + \int_{\Gamma_+} (\delta\gamma) \star p \ \mathrm{d}\gamma\right)\right) \\
&= Ad_L^k\left(\int_{\Gamma} \gamma \star p \ \mathrm{d}\gamma\right),
\end{aligned}$$

onde a última igualdade segue do Teorema 1.11. Do Lema 2.19, $\displaystyle\int_\Gamma \gamma \star p \ \mathrm{d}\gamma \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, ou seja, $\pi(Ad_L^k(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V)) \subset Ad_L^k(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma))$.

Ainda do Lema 2.19, se $q \in \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$, então $q = \displaystyle\int_\Gamma \gamma \star q \ \mathrm{d}\gamma$. Logo,

$$Ad_L^k q = Ad_L^k\left(\int_\Gamma \gamma \star q \ \mathrm{d}\gamma\right) = \pi\left(Ad_L^k q\right),$$

donde $Ad_L^k\left(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma)\right) \subseteq \pi\left(\ Ad_L^k\left(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V\right)\right)$. ■

Com isto temos a versão reversível equivariante do Teorema 2.17:

Teorema 2.28. *Sejam* $\mathbf{S}$ *como em (2.14) e* Γ *um grupo de Lie compacto agindo em* V. *Para cada* $k \geq 2$, *temos*

$$\overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) = \overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) \oplus Ad_L^k(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma)). \tag{2.26}$$

Demonstração: Aplicando a projeção π em ambos os lados de

$$\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V = \overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}) \oplus Ad_L^k\left(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V\right)$$

e usando os Lemas 2.25, 2.26 e 2.27, temos

$$\overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\Gamma) = \overset{\rightarrow k}{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma) + Ad_L^k\left(\overset{\rightarrow k}{\mathcal{P}}_V(\Gamma)\right).$$

Como $\overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma) = \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \cap \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\mathbf{S}) \cap Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V) = \{0\}$, temos que a soma acima é direta. ■

Como consequência direta do teorema anterior, obtemos o principal resultado deste trabalho, que exibe uma maneira de encontrar formas normais reversíveis equivariantes, usando a teoria de invariantes para $\mathbf{S}\rtimes\Gamma$. O resultado é como segue:

Teorema 2.29. *Seja Γ um grupo de Lie compacto agindo em V e consideramos $h \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma)$, com $h(0) = 0$ e $L = dh(0)$. Seja $\mathbf{S}$ definido como em (2.14). Então a forma normal de $\dot{x} = h(x),\ x \in V$ é dada por*

$$\dot{x} = Lx + g^2(x) + g^3(x) + \ldots,$$

onde para cada $k \geq 2,\ g^k \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma)$.

Demonstração: Para cada k fixado, $k \geq 2$, consideramos a mudança de coordenadas próxima à identidade $x = \xi(y)$, com $\xi(y)$ dado em (2.7). Queremos que após tais mudanças de coordenadas, o novo sistema preserve as simetrias e as antissimetrias do sistema original, ou seja, se h é $\Gamma-$reversível-equivariante, então q em (2.8) também é. Para isto, ξ^k em (2.7) deve ser $\Gamma-$equivariante, ou seja, $\xi^k \in \overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)$. Neste caso, $Ad^k_L\xi^k$ como em (2.3) é $\Gamma-$reversível-equivariante. Deste modo, $Ad^k_L|_{\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma)} \subset \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\Gamma)$ e consideramos Ad^k_L restrito às aplicações $\Gamma-$equivariantes de grau k.

Como na prova do Teorema 2.7, quando $h \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma)$, podemos eliminar qualquer termo em

$$Lx + h^2(x) + h^3(x) + \ldots + h^r(x) + \ldots$$

que esteja em $Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$, com $k = 2, \ldots, r$, ou seja, g^k em (2.11) pertence ao subespaço complementar de $Ad^k_L(\overrightarrow{\mathcal{P}}^k_V(\Gamma))$. Por (2.26), $g^k \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}^k_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma)$. ■

Portanto, para encontrarmos uma forma normal para o sistema (2.1) sob a ação de um grupo de simetrias e antissimetrias Γ, basta encontrarmos geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\Gamma)$. Para isto, usamos os métodos algébricos apresentados na Subseção 1.4.1 (Algoritmo 1.36) para o cálculo de geradores reversíveis equivariantes. Como já mencionamos na Introdução, quando o grupo $\mathbf{S}$ não é compacto, o Algoritmo 1.36 ainda pode ser aplicado, desde que o anel de invariantes $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$ e o módulo de equivariantes $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$ sejam finitamente gerados.

O próximo capítulo explora alguns exemplos usando o Teorema 2.29, onde a linearização L do campo de vetores tem autovalores puramente imaginários.

Capítulo 3

Formas normais $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2-$reversíveis-equivariantes

Neste capítulo, aplicamos o método algébrico desenvolvido na Seção 2.4 a fim de obter formas normais de campos de vetores $\Gamma-$reversíveis-equivariantes. O nosso interesse é em campos de vetores cuja linearização na origem tenha uma parte nilpotente e uma parte diagonal com n pares distintos de autovalores puramente imaginários $\pm\mathbf{i}\omega_j$, $1 \leq j \leq n$. Esta classe de campos aparece com frequência na literatura, em particular na teoria de sistemas dinâmicos.

Em [24], os autores usam o método do operador adjunto para encontrar formas normais para o estudo de ocorrências de famílias de órbitas periódicas de duas classes de sistemas reversíveis, sendo uma ressonante e outra não. Para o caso ressonante, a forma normal é truncada em um baixo grau, pois os cálculos ficam cada vez mais complicados conforme este grau aumenta. Aqui, através do método exposto na Seção 2.4, fornecemos de maneira direta a forma normal que aparece em [24] para qualquer grau que se deseje truncar a série de potências do campo de vetores. Lembramos que estamos confundindo L com sua matriz.

Nosso objetivo, então, é deduzir formas normais para sistemas do tipo

$$\dot{x} = h(x) \tag{3.1}$$

com $h : (\mathbb{R}^{2n+2}, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n+2},\ h \in C^\infty$, $h(0) = 0$, cuja linearização $L = dh(0)$ na origem tem a forma matricial

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & \\ 0 & 0 & & & & & & \\ & & 0 & \omega_1 & & & & \\ & & -\omega_1 & 0 & & & & \\ & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & 0 & \omega_n \\ & & & & & & -\omega_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2}$$

para certos valores reais $\omega_1, \ldots, \omega_n$ maiores que zero tais que $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ para $i \neq j$ em $\{1, \ldots, n\}$. Assumimos que h em (3.1) seja $\Gamma-$reversível-equivariante, onde Γ é um grupo de Lie compacto gerado por duas antissimetrias que são involuções lineares e que tornam Γ um grupo abeliano. Por este motivo, na Seção 3.1 investigamos quais são os possíveis pares de involuções que anticomutam com L como em (3.2).

Na Seção 3.2, desenvolvemos um algoritmo para calcular um conjunto de geradores para o módulo dos reversíveis equivariantes sob a ação de $\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, onde $\mathbf{S}$ é definido em (2.14). Finalmente, na Seção 3.3 aplicamos o método desenvolvido na Seção 2.4, objetivando encontrar formas normais do sistema (3.1) para diferentes possibilidades de pares de involuções estabelecidas na Seção 3.1.

3.1 Classificação de involuções

Nesta seção, classificamos os pares de involuções que anticomutam com a matriz L em (3.2). Nossa abordagem é breve e para maiores detalhes nos referimos a [25].

Definição 3.1. *Uma involução é um germe de difeomorfismo* $\varphi : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ *que satisfaz* $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$. *Dois pares de involuções* (φ_1, φ_2) *e* $(\overline{\varphi_1}, \overline{\varphi_2})$ *em* $\mathbb{R}^n$ *são equivalentes se existe um germe de difeomorfismo* $H : (\mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $\overline{\varphi_i} = H \circ \varphi_i \circ H^{-1}$, *para* $i = 1, 2$.

Queremos encontrar as possíveis involuções φ de $\mathbb{R}^{2n+2}$ tais que

$$\varphi L = -L\varphi, \tag{3.3}$$

com L definida em (3.2). Cálculos diretos nos levam à forma matricial de φ como

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \varphi_n \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

onde

$$\varphi_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & -a_0 \end{pmatrix} \text{ e } \varphi_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ b_i & -a_i \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

com $a_0^2 = 1$ e $a_i^2 + b_i^2 = 1$ para $1 \leq i \leq n$.

Agora, consideramos ϕ e ψ involuções lineares distintas que comutam e que satisfaçam (3.3). Denotamos por $\mathbb{Z}_2^\phi$ e $\mathbb{Z}_2^\psi$ os grupos gerados por ϕ e ψ, respectivamente. Por [24, Teorema 6.2] segue que, a menos de equivalência, existem 2^n pares de involuções (ϕ, ψ) nas condições acima, a saber:

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & -1 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \psi = \begin{pmatrix} a_0 & & & & \\ & -a_0 & & 0 & \\ & & \ddots & & \\ & 0 & & a_n & \\ & & & & -a_n \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

com $a_i = \pm 1$ para todo $0 \leq i \leq n$. Podemos ver que ϕ e ψ geram o grupo $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$.

Quando $a_i = 1$ para todo i, temos $\phi = \psi$. Neste caso, as formas normais determinadas na Seção 3.3 correspondem às formas normais $\mathbb{Z}_2^\phi-$reversíveis-equivariantes.

3.2 Algoritmo

Na presente seção, desenvolvemos um algoritmo simbólico para calcular um conjunto de geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$ dos reversíveis equivariantes, quando $\Gamma = \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$, onde ϕ e ψ são involuções lineares em V que comutam e $\mathbf{S}$ é como em (2.14). Lembramos que V é um espaço vetorial real de dimensão finita.

Pelo Algoritmo 1.36, é possível determinar geradores para o módulo $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \Gamma)$, uma vez conhecida uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V((\mathbf{S} \rtimes \Gamma)_+)$ e fixando uma antissimetria $\delta \in (\mathbf{S} \rtimes \Gamma)_-$. O que mostramos aqui é que este processo pode ser simplificado ainda mais quando o grupo Γ é gerado por um par de involuções que comutam.

Consideramos a ação de $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$ dada em (1.19). Suponhamos que ϕ e ψ são an-

tissimetrias, ou seja, existem epimorfismos $\sigma_1 : \mathbb{Z}_2^{\phi} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ e $\sigma_2 : \mathbb{Z}_2^{\psi} \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ tais que $\sigma_1(\phi) = \sigma_2(\psi) = -1$. Consideramos o epimorfismo

$$\sigma : \mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \tag{3.7}$$

como em (1.21). Neste caso, o grupo de simetrias de Γ é $\Gamma_+ = \mathbb{Z}_2^{\phi\psi}$. Nestas condições, temos:

Lema 3.2. *O operador linear* $T : \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$, *definido como*

$$T(G)(x) = \frac{1}{2}(G(x) - \psi G(\psi x)), \tag{3.8}$$

é uma projeção. Além disso, T *é um homomorfismo de* $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})-$*módulos.*

Demonstração: Seja $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi})$. Então $G(\phi x) = -\phi G(x)$. Assim, para todo $x \in V$,

$$\begin{aligned} T(G)(\phi x) &= \frac{1}{2}(G(\phi x) - \psi G(\psi\phi x)) \\ &= \frac{1}{2}(-\phi G(x) + \phi\psi G(\psi x)) \\ &= -\phi(\frac{1}{2}(G(x) - \psi G(\psi x))) \\ &= -\phi T(G)(x). \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} T(G)(\psi x) &= \frac{1}{2}(G(\psi x) - \psi G(\psi^2 x)) \\ &= \frac{1}{2}(G(\psi x) - \psi G(x)) \\ &= -\psi(\frac{1}{2}(G(x) - \psi G(\psi x))) \\ &= -\psi T(G)(x). \end{aligned}$$

Logo, $T(G) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi}) \cap \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\psi}) = \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$, pela Observação 1.40. Agora, seja $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$. Em particular, $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\psi})$ e temos

$$G(x) = G(\psi^2 x) = \frac{1}{2}\left(G(\psi^2 x) + G(\psi^2 x)\right) = \frac{1}{2}\left(G(x) - \psi G(\psi x)\right) = T(G)(x),$$

para todo $x \in V$. Logo, $G \in \operatorname{Im} T$. Portanto, $\operatorname{Im} T = \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ e $T|_{\operatorname{Im} T} = \mathrm{Id}$. Assim, $T : \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ é uma projeção. Por fim, sejam $f \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi})$ e $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi})$. Assim,

$$\begin{aligned} T(fG)(x) &= \frac{1}{2}\left(fG(x) - \psi fG(\psi x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f(x)G(x) - \psi f(\psi x)G(\psi x)\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(f(x)G(x) - \psi f(x)G(\psi x)\right)$$
$$= \frac{1}{2}f(x)\left(G(x) - \psi G(\psi x)\right) = fT(G)(x),$$

para todo $x \in V$. A prova de que $T(G+H) = T(G) + T(H)$, para todo $G, H \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ segue diretamente de (3.8), uma vez que a ação de ψ em V é linear. ■

Consideramos agora o homomorfismo $\widetilde{\sigma}$: $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ como em (1.20). Neste caso, obtemos um novo grupo Γ_+, denotado aqui por $\widetilde{\Gamma}_+$, dado por $\widetilde{\Gamma}_+ = \ker \widetilde{\sigma} = \mathbb{Z}_2^\phi$. Toda a teoria desenvolvida na Subseção 1.4.1 se aplica também para o homomorfismo $\widetilde{\sigma}$ e para $\widetilde{\Gamma}_+ = \mathbb{Z}_2^\phi$. Consideramos então o operador

$$\widetilde{S}\colon\ \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2{}^\phi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2{}^\phi) \tag{3.9}$$

definido em (1.11), com $\delta \in \Gamma \backslash \widetilde{\Gamma}_+$, ou seja, $\delta = \psi$ ou $\delta = \phi\psi$. Pela Proposição 1.28 (ii), $\ker \widetilde{S} = \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$, $\text{Im } \widetilde{S} = \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ e vale a decomposição

$$\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi) = \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) \oplus \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$$

como uma soma direta de $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)-$módulos. Considerando $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$, o Teorema 1.30 nos diz que

$$\left\{\widetilde{S}\,(u_1), \ldots, \widetilde{S}\,(u_s)\right\}$$

gera o módulo $\mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ e o Corolário 1.32 garante que

$$\left\{\widetilde{S}\,(u_0) \equiv 1, \widetilde{S}\,(u_1), \ldots, \widetilde{S}\,(u_s)\right\}$$

gera o módulo $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

Lema 3.3. *Sejam $\{u_1, \ldots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ e $\{L_0, \ldots, L_r\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Tomamos $\widetilde{S}\,(u_0) \equiv 1$, então*

$$\left\{\widetilde{S}\,(u_i)L_j,\ i = 0, \ldots, s \ \text{e}\ j = 0, \ldots, r\right\}$$

é um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

Demonstração: Seja $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Assim existem $p_j \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ tais que $G = \sum_{j=0}^{r} p_j L_j$. Como $\left\{\widetilde{S}\,(u_0), \ldots, \widetilde{S}\,(u_s)\right\}$ gera $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$, para cada j existem

$p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ tais que $p_j = \sum_{i=0}^{s} p_{ij}\ \widetilde{S}\ (u_i)$. Logo,

$$G = \sum_{j=0}^{r} p_j L_j = \sum_{j=0}^{r}\sum_{i=0}^{s} p_{ij}\ \widetilde{S}\ (u_i) L_j,$$

onde $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ e $\widetilde{S}\ (u_i)L_j \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. ■

Teorema 3.4. *Nas condições dos Lemas 3.2 e 3.3, o conjunto*

$$\left\{\overline{L}_{ij} = T(\widetilde{S}\ (u_i)L_j),\ i = 0, \ldots, s\ \text{ e }\ j = 0, \ldots, r\right\}$$

gera o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ *sobre o anel* $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

Demonstração: Seja $\widetilde{G} \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Pelo Lema 3.2, Im $T = \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Logo, existe $G \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ tal que $\widetilde{G} = T(G)$. Pelo Lema 3.3,

$$G = \sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij}\ \widetilde{S}\ (u_i) L_j,$$

para $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ adequados. Logo,

$$\widetilde{G} = T(G) = T\left(\sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij}\ \widetilde{S}\ (u_i)L_j\right) = \sum_{i,j=0}^{s,r} p_{ij} T\left(\widetilde{S}\ (u_i)L_j\right),$$

com $p_{ij} \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ e $T\left(\widetilde{S}\ (u_i)L_j\right) \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. ■

Com isto, podemos descrever o seguinte algoritmo simbólico:

Algoritmo 3.5. Geradores reversíveis equivariantes sob $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$:

1. Consideramos uma base de Hilbert $\{u_1, \ldots, u_s\}$ para o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$;
2. Fazemos $\widetilde{S}\ (u_0) \equiv 1$ e calculamos $\widetilde{S}\ (u_i),\ i \in \{1, \ldots, s\}$, onde $\widetilde{S}$ é como em (3.9);
3. Consideramos $\{L_0, \ldots, L_r\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$;
4. Consideramos a projeção T definida em (3.8) e calculamos $\overline{L}_{ij} = T(\widetilde{S}\ (u_i)L_j),\ i = 0, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, r$.

Resultado: O conjunto $\{\overline{L}_{ij},\ i = 0, \ldots, s \text{ e } j = 0, \ldots, r\}$ gera o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

Como o grupo $\mathbf{S}$ é um grupo apenas de simetrias, os resultados apresentados nos Lemas 3.2, 3.3 e no Teorema 3.4 podem ser facilmente adaptados para encontrarmos um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Para tanto, consideramos agora o operador

$$\overline{S} : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes {\mathbb{Z}_2}^\phi \times {\mathbb{Z}_2}^\psi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes {\mathbb{Z}_2}^\phi \times {\mathbb{Z}_2}^\psi) \tag{3.10}$$

definido como em (1.11), com $\delta = \psi$ ou $\delta = \phi\psi$. Consideramos também a projeção

$$\overline{T} : \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$$

definida como em (3.8).

Algoritmo 3.6. Geradores reversíveis equivariantes sob $\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$:

1. Consideramos uma base de Hilbert $\{u_1, \ldots, u_s\}$ para o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$;
2. Fazemos $\overline{S}(u_0) \equiv 1$ e calculamos $\overline{S}(u_i),\ i \in \{1, \ldots, s\}$, onde $\overline{S}$ é como em (3.10);
3. Consideramos $\{L_0, \ldots, L_r\}$ um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$;
4. Consideramos a projeção $\overline{T}$ e calculamos $\overline{L}_{ij} = \overline{T}(\overline{S}(u_i)L_j),\ i = 0, \ldots, s,\ j = 0, \ldots, r$.

Resultado: O conjunto $\{\overline{L}_{ij},\ i = 0, \ldots, s \text{ e } j = 0, \ldots, r\}$ gera o módulo $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

3.3 Exemplos

Como já mencionamos, nesta seção vamos encontrar formas normais para sistemas $\Gamma-$reversíveis-equivariantes como em (3.1) e L como em (3.2), onde $\Gamma = \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi$ é gerado pelas involuções ϕ e ψ como em (3.6). Lembramos que ϕ e ψ são antissimetrias e o homomorfismo $\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ fixado é dado em (1.21). Por conveniência usamos aqui coordenadas complexas $(x, z) = (x_1, x_2, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$. Consideramos as ações de $\mathbb{Z}_2^\phi$ e $\mathbb{Z}_2^\psi$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$ como segue:

$$\phi(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_n) = (x_1, -x_2, \overline{z}_1, \ldots, \overline{z}_n) \tag{3.11}$$

e

$$\psi(x_1, x_2, z_1, \ldots, z_n) = (a_0 x_1, -a_0 x_2, a_1 \overline{z}_1, \ldots, a_n \overline{z}_n), \tag{3.12}$$

onde $a_i = \pm 1,\ 0 \leq i \leq n$.

3.3.1 O caso não ressonante

Neste caso $\omega_1, \ldots, \omega_n$ são algebricamente independentes. Mais especificamente, se L é da forma (3.2), dizemos que L é ressonante se existem inteiros não nulos $k_1, \ldots, k_n$ tais que

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0.$$

Caso contrário, L é não ressonante e dizemos que $\omega_1, \ldots, \omega_n$ são algebricamente independentes.

Pelo Teorema 2.15, $\mathbf{S} = \mathfrak{R} \times T^n$, onde $\mathfrak{R} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{pmatrix} : s \in \mathbb{R} \right\}$. A ação considerada em $\mathfrak{R} \times T^n$ é a diagonal dada a partir das seguintes ações de $\mathfrak{R}$ em $\mathbb{R}^2$ e T^n em $\mathbb{C}^n$:

$$s(x_1, x_2) = (x_1, sx_1 + x_2) \qquad \text{e} \qquad (\theta_1, \ldots, \theta_n)(z_1, \ldots, z_n) = (e^{\mathbf{i}\theta_1} z_1, \ldots, e^{\mathbf{i}\theta_n} z_n), \tag{3.13}$$

para $s \in \mathbb{R}$ e $(\theta_1, \ldots, \theta_n) \in T^n$. Por [18, XVI Example 5.6 (b)], $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathfrak{R})$ é gerado por $\{(x_1, x_2), (0, 1)\}$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathfrak{R}) = \langle x_1 \rangle$. Desta forma, o Lema 1.41 e o Exemplo 1.42 nos garantem que

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{R} \times T^n) = \langle v_1, v_2, \ldots, v_{n+1} \rangle,$$

onde $v_1(x, z) = x_1,\ v_2(x, z) = |z_1|^2, \ldots,\ v_{n+1}(x, z) = |z_n|^2$. Além disso, os geradores de $\vec{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{R} \times T^n)$ sobre o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n}(\mathfrak{R} \times T^n)$ são

$$H_0(x, z) = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0),\ H_1(x, z) = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ H_2(x, z) = (0, 0, z_1, \ldots, 0),$$

$$H_3(x, z) = (0, 0, \mathbf{i}z_1, \ldots, 0), \quad \ldots, \quad H_{2n}(x, z) = (0, \ldots, 0, z_n) \qquad \text{e}$$

$$H_{2n+1}(x, z) = (0, \ldots, 0, \mathbf{i}z_n).$$

Pelo Teorema 2.29, queremos encontrar geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Para isto, usamos o Algoritmo 3.6.

1. Precisamos de uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$. Notamos que $v_i \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$

para todo $i = 1, \ldots, n+1$. Consideramos $R, S : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$ como em (1.10) e (1.11), respectivamente, com $\delta = \phi$. Logo, usando o Teorema 1.33 temos

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi}) = \langle u_1, \ldots, u_{n+1} \rangle,$$

onde $u_i \equiv v_i,\ 1 \leq i \leq n+1$.

2. Consideramos $\overline{S}$ como em (3.10). Para $i \geq 2,\ u_i$ é invariante por ψ. Portanto, $\overline{S}(u_i) \equiv 0,\ i \geq 2$. Mas $\overline{S}(u_1) \equiv \left(\dfrac{1-a_0}{2}\right) u_1$.

3. Queremos um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$, onde $(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})_+ = \mathbf{S} \times \{1\}$, uma vez que $\delta = \phi$ é antissimetria. Para isto, usamos o Algoritmo 1.36. Neste caso,

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}) \cap \mathcal{P}_V(\{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}) = \langle v_1, \ldots, v_{n+1} \rangle.$$

Como $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) = \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$, concluímos que $\{H_0, \ldots, H_{2n+1}\}$ gera $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$. Pelo passo 1, sabemos que $S(v_i) \equiv 0,\ i = 1, \ldots, n+1$ e por definição $S(v_0) \equiv 1$. Logo, precisamos calcular apenas a imagem de $\{H_0, \ldots, H_{2n+1}\}$ por $\overrightarrow{S}$, onde $\overrightarrow{S}$: $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$ é como em (1.11) com $\delta = \phi$. Para j par, H_j é equivariante por ϕ e para j ímpar, H_j é reversível equivariante por ϕ. Logo,

$$\{L_0 \equiv H_1,\ L_1 \equiv H_3,\ \ldots,\ L_n \equiv H_{2n+1}\}$$

gera $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$.

4. Pelo passo 2, como $\overline{S}(u_i) \equiv 0,\ i \geq 2$, precisamos encontrar apenas $\overline{L}_{0j} = \overline{T}(L_j)$ e $\overline{L}_{1j} = \overline{T}(\overline{S}(u_1)L_j),\ j = 0, \ldots, n$. Para $j \geq 1,\ L_j$ é reversível equivariante por ψ. Logo, $\overline{L}_{0j} \equiv L_j$ quando $j \geq 1$. Temos ainda que

$$\overline{L}_{00} \equiv \frac{(1+a_0)}{2} L_0, \quad \overline{L}_{10} \equiv \frac{(1-a_0)}{2} u_1 L_0$$

e $\overline{L}_{1j} \equiv 0$ para $j \geq 1$.

Assim, quando $a_0 = 1$, o conjunto

$$\{L_0, \ldots, L_n\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. No entanto, se $a_0 = -1$ temos que

$$\{u_1 L_0, L_1, \ldots, L_n\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$.

Para calcularmos a forma normal desejada, resta encontrarmos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Para isto, tomamos a base de Hilbert $\{u_1, \ldots, u_{n+1}\}$ para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$, dada no passo 1, e aplicamos o Teorema 1.33 usando os operadores $\breve{R}, \breve{S} : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$ como em (1.10) e (1.11), respectivamente, com $\delta = \psi$. Temos

$$\breve{R}(u_1) \equiv \left(\frac{1 + a_0}{2}\right) u_1 \quad \text{e} \quad \breve{S}(u_1) \equiv \left(\frac{1 - a_0}{2}\right) u_1.$$

Além disso, $\breve{R}(u_i) \equiv u_i$ e $\breve{S}(u_i) \equiv 0$ para $i \geq 2$. Deste modo, para $a_0 = 1$ temos

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1, \ldots, u_{n+1} \rangle$$

e para $a_0 = -1$

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1^2, u_2, \ldots, u_{n+1} \rangle.$$

Se $a_0 = 1$, pelo Teorema 2.29, temos a forma normal $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi-$reversível-equivariante:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ 0 & 0 & & & & \\ & & -\mathbf{i}\omega_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -\mathbf{i}\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f_0(X) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ f_1(X) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{i}z_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + f_n(X) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{i}z_n \end{pmatrix},$$

onde $X = (u_1, \ldots, u_{n+1})$ e $f_i : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$. Portanto, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= f_0(x_1, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i} z_1 f_1(x_1, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i} z_2 f_2(x_1, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \vdots & \\ \dot{z}_n &= -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i} z_n f_n(x_1, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2), \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$.

Se $a_0 = -1$, novamente pelo Teorema 2.29, temos a forma normal $\mathbb{Z}_2^{\phi} \times \mathbb{Z}_2^{\psi}-$reversível-equivariante:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & & & \\ & & -\mathbf{i}\omega_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\mathbf{i}\omega_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} + f_0(Z) \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$+ f_1(Z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathbf{i} z_1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + f_n(Z) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathbf{i} z_n \end{pmatrix},$$

onde $Z = (u_1^2, u_2, \ldots, u_{n+1})$ e $f_i : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$. Assim, obtemos

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 f_0(x_1^2, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i} z_1 f_1(x_1^2, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i} z_2 f_2(x_1^2, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2) \\ \vdots & \\ \dot{z}_n &= -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i} z_n f_n(x_1^2, |z_1|^2, \ldots, |z_n|^2), \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+1}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq n$.

Observação 3.7. *Notamos que as formas normais obtidas neste exemplo dependem ape-*

nas de a_0. Isto ocorre pois cada u_i, $2 \leq i \leq n+1$, é invariante na coordenada z pela ação de ψ. Quando $a_0 = 1$, obtemos, em particular, a forma normal $\mathbb{Z}_2^{\phi}-$reversível-equivariante ($\phi = \psi$). Esta também foi obtida em [24], onde os autores usam o método do operador adjunto para obter uma pré forma normal e, depois, impõem a reversibilidade de ϕ. Aqui, usamos o método alternativo apresentado no Teorema 2.29, onde impomos a reversibilidade de ϕ desde o início dos cálculos.

3.3.2 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$

Nesta subseção, a matriz L em (3.2) é ressonante, com $n = 2$ e ω_1 e ω_2 satisfazendo $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$, para certos $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ não nulos. Sob estas condições, o sistema (3.1) é chamado $(k_1 : k_2)-$ressonante. Uma observação interessante é que o método clássico se torna cada vez mais complicado à medida que os valores k_1 e k_2 crescem. Podemos ver isto em [24] e [27], onde os autores lidam com alguns valores particulares de k_1 e k_2. Com o método usado aqui, encontramos formas normais para quaisquer valores de k_1 e k_2.

Pelo Teorema 2.15, $\mathbf{S} = \mathfrak{R} \times S^1$. Aqui, a ação de $\mathfrak{R} \times S^1$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^2$ é a diagonal, mas difere do exemplo da subseção anterior pois S^1 age em $\mathbb{C}^2$ da seguinte forma:

$$\theta(z_1, z_2) = (e^{\mathbf{i}k_1\theta}z_1, e^{\mathbf{i}k_2\theta}z_2).$$

Por [18, XIX Theorem 4.2] sabemos que

$$\mathcal{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1) = \langle |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\rangle$$

e

$$(z_1, 0), (\mathbf{i}z_1, 0), (\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0), (\mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0), (0, z_2), (0, \mathbf{i}z_2), (0, z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}) \text{ e } (0, \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1})$$

geram $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. Lembramos que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}^2}(\mathfrak{R})$ é gerado por $\{(x_1, x_2), (0, 1)\}$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(\mathfrak{R}) = \langle x_1\rangle$. Assim, pelo Lema 1.41,

$$\mathcal{P}_V(\mathfrak{R} \times S^1) = \langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\rangle,$$

onde $v_1(x, z) = x_1$, $v_2(x, z) = |z_1|^2$, $v_3(x, z) = |z_2|^2$, $v_4(x, z) = \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})$, $v_5(x, z) = \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})$. Além disso,

$$H_0(x, z) = (x_1, x_2, 0, 0),\ H_1(x, z) = (0, 1, 0, 0),\ H_2(x, z) = (0, 0, z_1, 0),$$

$$H_3(x, z) = (0, 0, \mathbf{i}z_1, 0),\ H_4(x, z) = (0, 0, \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0),\ H_5(x, z) = (0, 0, \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0),$$

$$H_6(x,z) = (0,0,0,z_2),\ H_7(x,z) = (0,0,0,\mathbf{i}z_2),\ H_8(x,z) = (0,0,0,z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1})$$

$$\text{e} \qquad H_9(x,z) = (0,0,0,\mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1})$$

geram $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathfrak{R}\times S^1)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathfrak{R}\times S^1)$.

Pelo Teorema 2.29, precisamos encontrar um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$. Vamos usar novamente o Algoritmo 3.6.

1. Queremos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$. Assim, da subseção anterior sabemos que $v_1, v_2, v_3 \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Agora,

$$\begin{aligned} v_4(\phi(x,z)) &= \mathrm{Re}(\overline{z}_1^{k_2}z_2^{k_1}) = \mathrm{Re}(\overline{\overline{z}_1^{k_2}z_2^{k_1}}) \\ &= \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \\ &= v_4(x,z) \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \begin{aligned} v_5(\phi(x,z)) &= \mathrm{Im}(\overline{z}_1^{k_2}z_2^{k_1}) = -\mathrm{Im}(\overline{\overline{z}_1^{k_2}z_2^{k_1}}) \\ &= \sigma_1(\phi)\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \\ &= \sigma_1(\phi)v_5(x,z), \end{aligned}$$

   onde $\sigma_1 : \mathbb{Z}_2^\phi \longrightarrow \mathbb{Z}_2$ é o epimorfismo definido no início da Seção 3.2. Logo, $v_4 \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$ e $v_5 \in \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Consideramos $R, S : \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\})$ como em (1.10) e (1.11), respectivamente, com $\delta = \phi$. Assim, $R(v_i) \equiv v_i,\ R(v_5) \equiv 0,\ S(v_i) \equiv 0,\ S(v_5) \equiv v_5$, para $1 \le i \le 4$. Usando o Teorema 1.33, $\{u_1, \ldots, u_5\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$, onde $u_1 \equiv v_1, \ldots, u_4 \equiv v_4, u_5 \equiv v_5^2$. Como $u_5 \equiv u_2^{k_2}u_3^{k_1} - u_4^2$, uma outra base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$ é

$$\{u_1, \ldots, u_4\}.$$

2. Consideramos $\overline{S}$ como em (3.10). Como $u_2, u_3 \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\psi)$ segue que $\overline{S}(u_2) \equiv \overline{S}(u_3) \equiv 0$. Além disso, $\overline{S}(u_1) \equiv \dfrac{(1-a_0)}{2}u_1$ e $\overline{S}(u_4) \equiv \dfrac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4$.

3. Queremos um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$, onde $(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)_+ = \mathbf{S}\times\{1\}$. Neste caso, $\delta = \phi$ é a antissimetria fixada e usamos o Algoritmo 1.36. Temos que

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}) = \langle v_1, \ldots, v_5\rangle \qquad \text{e}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\})\{H_0, \ldots, H_9\}.$$

   Pelo passo 1, sabemos que $S(v_i) \equiv 0,\ i = 1, \ldots, 4,\ S(v_5) \equiv v_5$ e, por definição, $S(v_0) \equiv 1$. Logo, precisamos calcular apenas a imagem de

$$\{H_0, \ldots, H_9, v_5H_0, \ldots, v_5H_9\}$$

por $\vec{S}$, onde $\vec{S}$: $\vec{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}\times\{1\})$ é como em (1.11) com $\delta=\phi$. Para j par, H_j é equivariante por ϕ e para j ímpar, H_j é reversível equivariante por ϕ. Como $v_5 \in \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$, segue que para j par, v_5H_j é reversível equivariante por ϕ e para j ímpar, v_5H_j é equivariante por ϕ. Logo,

$$\{L_0 \equiv H_1,\ L_1 \equiv v_5H_0,\ L_2 \equiv H_3,\ L_3 \equiv H_5,\ L_4 \equiv v_5H_2,$$
$$L_5 \equiv v_5H_4,\ L_6 \equiv H_7,\ L_7 \equiv H_9,\ L_8 \equiv v_5H_6,\ L_9 \equiv v_5H_8\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$.

4. Pelo passo 2, precisamos encontrar apenas $\overline{L}_{0j}$, $\overline{L}_{1j}$ e $\overline{L}_{4j}$ para $j=0,\ldots,9$, onde $\overline{L}_{ij}=\overline{T}(\overline{S}(u_i)L_j)$. Temos:

$$\overline{L}_{00} \equiv \frac{(1+a_0)}{2}L_0, \qquad \overline{L}_{0l} \equiv \frac{(1+a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}L_l, \quad \overline{L}_{0k} \equiv L_k,$$

$$\overline{L}_{10} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}u_1L_0, \quad \overline{L}_{1l} \equiv \frac{(1+a_0a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}\frac{(1-a_0)}{2}u_1L_l, \quad \overline{L}_{1k} \equiv 0,$$

$$\overline{L}_{40} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}\frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_0, \quad \overline{L}_{4l} \equiv \frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_l \quad \text{e} \quad \overline{L}_{4k} \equiv 0,$$

para $l=1,3,4,7,8$ e $k=2,5,6,9$.

Agora temos quatro casos a considerar. Em cada caso, para encontrarmos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$, usamos o Teorema 1.33, com $\delta=\psi$ e

$$\breve{R},\breve{S} : \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$$

como em (1.10) e (1.11), respectivamente.

Caso 1: Quando $a_0=1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1}=1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_0,\ldots,L_9\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)=\langle u_1,u_2,u_3,u_4\rangle$.

Caso 2: Quando $a_0=1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1}=-1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_0,\ u_4L_1,\ L_2,\ u_4L_3,\ u_4L_4,\ L_5,\ L_6,\ u_4L_7,\ u_4L_8,\ L_9\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})=\langle u_1,u_2,u_3,u_4^2\rangle$.

Caso 3: Quando $a_0=-1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1}=1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})$ é

$$\{u_1L_0,\ L_1,\ldots,L_9\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})=\langle u_1^2,u_2,u_3,u_4\rangle$.

Caso 4: Quando $a_0=-1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1}=-1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})$ é

$$\begin{array}{c}\{\ u_1L_0,\ u_4L_0,\ u_1L_1,\ u_4L_1,\ L_2,\ u_1L_3,\ u_4L_3,\ u_1L_4,\\ u_4L_4,\ L_5,\ L_6,\ u_1L_7,\ u_4L_7,\ u_1L_8,\ u_4L_8,\ L_9\ \},\end{array}$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})=\langle u_1^2,u_2,u_3,u_4^2,u_1u_4\rangle$.

Portanto, pelo Teorema 2.29, temos as seguintes formas normais $\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi}-$reversíveis-equivariantes:

Caso 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1 &=& x_2+x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X)\\
\dot{x}_2 &=& f_1\,(X)+x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X)\\
\dot{z}_1 &=& -\mathbf{i}\omega_1z_1+\mathbf{i}z_1f_2\,(X)+\mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}f_3\,(X)+z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X)\\
&& +\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X)\\
\dot{z}_2 &=& -\mathbf{i}\omega_2z_2+\mathbf{i}z_2f_6\,(X)+\mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}f_7\,(X)+z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X)\\
&& +z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X)\,,
\end{array}\right.$$

para $f_i:(\mathbb{R}^4,0)\longrightarrow\mathbb{R},\ 0\leq i\leq 9$ e $X=\big(x_1,|z_1|^2,|z_2|^2,\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\big)$.

Caso 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{x}_2 &= f_1\,(X) + x_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_3\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X) \\ &\quad + z_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_7\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) \\ &\quad + z_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X)\,, \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^4, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 9$ e $X = \big(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\big)$.

Caso 3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{x}_2 &= x_1 f_1\,(X) + x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1} f_3\,(X) + z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X) \\ &\quad + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} f_7\,(X) + z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) \\ &\quad + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9(X), \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^4, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 9$ e $X = \big(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\big)$.

Caso 4 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0(X) + x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_1\,(X) \\ \dot{x}_2 &= x_1 f_2\,(X) + x_1 x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) + \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_3\,(X) \\ &\quad + x_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_1\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_4\,(X) + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X) + \mathbf{i}x_1\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1} f_6\,(X) \\ &\quad + x_1 z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_7\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) + \\ &\quad z_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_{10}\,(X) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\,(X) + \mathbf{i}x_1 z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} f_{12}\,(X) \\ &\quad + x_1 z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{13}\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{14}\,(X) \\ &\quad + z_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{15}\,(X)\,, \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^5, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 15$ e $X = \big(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\big)$.

3.3.3 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2 : 0)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^3$

Aqui, a matriz L em (3.2) é ressonante com $n = 3$, ω_1 e ω_2 satisfazendo $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ e ω_3 algebricamente independente em relação a ω_1 e ω_2. Neste caso, dizemos que o sistema (3.1) é $(k_1 : k_2 : 0)-$ressonante.

Pelo Teorema 2.15, $\mathbf{S} = \mathfrak{R} \times T^2$. A ação de $\mathfrak{R} \times T^2$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^3$ é a diagonal, onde T^2 age em $\mathbb{C}^3$ da seguinte forma

$$(\theta_1, \theta_2)(z_1, z_2, z_3) = (e^{\mathbf{i}k_1\theta_1}z_1, e^{\mathbf{i}k_2\theta_1}z_2, e^{\mathbf{i}\theta_2}z_3).$$

Pelo Lema 1.41, pelo Exemplo 1.42 e por [18, XIX Theorem 4.2], uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$ é formada por

$$v_1(x,z) = x_1,\ v_2(x,z) = |z_1|^2,\ v_3(x,z) = |z_2|^2,\ v_4(x,z) = \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}),$$

$$v_5(x,z) = \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \text{ e } v_6(x,z) = |z_3|^2.$$

Além disso,

$$H_0(x,z) = (x_1, x_2, 0, 0, 0),\ H_1(x,z) = (0, 1, 0, 0, 0),\ H_2(x,z) = (0, 0, z_1, 0, 0),$$

$$H_3(x,z) = (0, 0, \mathbf{i}z_1, 0, 0),\ H_4(x,z) = (0, 0, \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0, 0),\ H_5(x,z) = (0, 0, \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}, 0, 0),$$

$$H_6(x,z) = (0, 0, 0, z_2, 0),\ H_7(x,z) = (0, 0, 0, \mathbf{i}z_2, 0),\ H_8(x,z) = (0, 0, 0, z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}, 0),$$

$$H_9(x,z) = (0, 0, 0, \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}, 0),\ H_{10}(x,z) = (0, 0, 0, 0, z_3) \quad \text{e} \quad H_{11}(x,z) = (0, 0, 0, 0, \mathbf{i}z_3)$$

geram $\vec{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$.

Pelo Teorema 2.29, precisamos encontrar um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$. Pelos passos do Algoritmo 3.6, temos:

1. Queremos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$. Do exemplo anterior sabemos que $v_i \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi),\ i = 1, \ldots, 4, 6$ e $v_5 \in \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Logo, $R(v_i) \equiv v_i,\ R(v_5) \equiv 0,\ S(v_i) \equiv 0,\ S(v_5) \equiv v_5$, para $i = 1, \ldots, 4, 6$, onde $R, S : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$ é como em (1.10) e (1.11), respectivamente, com $\delta = \phi$. Usando o Teorema 1.33, $\{v_1, \ldots, v_4, v_5^2, v_6\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$. Como $v_5^2 \equiv v_2^{k_2}v_3^{k_1} - v_4^2$, uma outra base de Hilbert para o anel é

$$\{u_1 \equiv v_1, \ldots, u_4 \equiv v_4, u_5 \equiv v_6\}.$$

2. Por definição $\overline{S}(u_0) \equiv 1$. Agora como $u_2, u_3, u_5 \in \mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^{\psi})$ segue que $\overline{S}(u_2) \equiv \overline{S}(u_3) \equiv \overline{S}(u_5) \equiv 0$. Além disso, $\overline{S}(u_1) \equiv \dfrac{(1-a_0)}{2}u_1$ e $\overline{S}(u_4) \equiv \dfrac{(1-a_1^{k_1}a_2^{k_1})}{2}u_4$.

3. Queremos um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$, onde $(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})_+ = \mathbf{S} \times \{1\}$. Como nos exemplos anteriores, $\delta = \phi$ é a antissimetria fixada e usamos o Algoritmo 1.36. Além disso,

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}) = \langle v_1, \ldots, v_6 \rangle \qquad \text{e}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \times \{1\})\{H_0, \ldots, H_{11}\}.$$

Pelo passo 1, sabemos que $S(v_i) \equiv 0,\ i = 1, \ldots, 4, 6,\ S(v_5) \equiv v_5$ e, por definição, $S(v_0) \equiv 1$. Logo, precisamos calcular apenas a imagem de $\{H_0, \ldots, H_{11}, v_5H_0, \ldots, v_5H_{11}\}$ por $\overrightarrow{S}$, onde

$$\overrightarrow{S}\colon \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) \longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$$

é como em (1.11) com $\delta = \phi$. Para j par, H_j é equivariante por ϕ e para j ímpar, H_j é reversível equivariante por ϕ. Como $v_5 \in \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^{\phi})$, segue que para j par v_5H_j é reversível equivariante por ϕ e para j ímpar, v_5H_j é equivariante por ϕ. Logo,

$$\{L_0 \equiv H_1,\ L_1 \equiv v_5H_0,\ L_2 \equiv H_3,\ L_3 \equiv H_5,\ L_4 \equiv v_5H_2,\ L_5 \equiv v_5H_4,\ L_6 \equiv H_7,$$
$$L_7 \equiv H_9,\ L_8 \equiv v_5H_6,\ L_9 \equiv v_5H_8,\ L_{10} \equiv H_{11},\ L_{11} \equiv v_5H_{10}\}$$

gera $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^{\phi})$.

4. Pelo passo 2, como $\overline{S}(u_i) \equiv 0,\ i = 2, 3, 5$, precisamos encontrar $\overline{L}_{0j},\ \overline{L}_{1j}$ e $\overline{L}_{4j}$ para $j = 0, \ldots, 11$. Temos

$$\overline{L}_{00} \equiv \frac{(1+a_0)}{2}L_0, \quad \overline{L}_{0l} \equiv \frac{(1+a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}L_l, \quad \overline{L}_{0k} \equiv L_k,$$

$$\overline{L}_{10} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}u_1L_0, \quad \overline{L}_{1l} \equiv \frac{(1+a_0a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}\frac{(1-a_0)}{2}u_1L_l, \quad \overline{L}_{1k} \equiv 0,$$

$$\overline{L}_{40} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}\frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_0, \quad \overline{L}_{4l} \equiv \frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_l \quad \text{e} \quad \overline{L}_{4k} \equiv 0,$$

para $l = 1, 3, 4, 7, 8, 11$ e $k = 2, 5, 6, 9, 10$.

Novamente, temos quatro casos a considerar. Como fizemos no exemplo da subseção anterior, em cada caso encontramos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$, usando o Teorema 1.33, com $\delta = \psi$ e $\breve{R}, \breve{S} : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$ como em (1.10) e (1.11), respectivamente.

Caso 1: Quando $a_0 = 1$ e $a_1^{k_2} a_2^{k_1} = 1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_0, \ldots, L_{11}\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$.

Caso 2: Quando $a_0 = 1$ e $a_1^{k_2} a_2^{k_1} = -1$. Aqui, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_0,\ u_4L_1,\ L_2,\ u_4L_3,\ u_4L_4,\ L_5,\ L_6,\ u_4L_7,\ u_4L_8,\ L_9,\ L_{10},\ u_4L_{11}\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4^2, u_5 \rangle$.

Caso 3: Quando $a_0 = -1$ e $a_1^{k_2} a_2^{k_1} = 1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{u_1L_0,\ L_1, \ldots,\ L_{11}\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1^2, u_2, u_3, u_4, u_5 \rangle$.

Caso 4: Quando $a_0 = -1$ e $a_1^{k_2} a_2^{k_1} = -1$. Agora, um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\begin{aligned}\{\ & u_1L_0,\ u_4L_0,\ u_1L_1,\ u_4L_1,\ L_2,\ u_1L_3,\ u_4L_3,\ u_1L_4, u_4L_4,\\ & L_5,\ L_6,\ u_1L_7,\ u_4L_7,\ u_1L_8,\ u_4L_8,\ L_9,\ L_{10},\ u_1L_{11},\ u_4L_{11}\ \},\end{aligned}$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1^2, u_2, u_3, u_4^2, u_1u_4, u_5 \rangle$.

Portanto, temos as seguintes formas normais $\mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi-$reversíveis-equivariantes:

Caso 1 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{x}_2 &= f_1\,(X) + x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}f_3\,(X) + z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X) \\ & \quad +\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}f_7\,(X) + z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) \\ & \quad +z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X) \\ \dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\,(X) + z_3\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\,(X)\,, \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^5, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 11$ e $X = \big(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2\big)$.

Caso 2 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{x}_2 &= f_1\,(X) + x_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_3\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X) \\ & \quad +z_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_7\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) \\ & \quad +z_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X) \\ \dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\,(X) + z_3\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\,(X)\,, \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^5, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 11$ e $X = \big(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2\big)$.

Caso 3 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{x}_2 &= x_1 f_1\,(X) + x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}f_3\,(X) + z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X) \\ & \quad +\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}f_7\,(X) + z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X) \\ & \quad +z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9(X) \\ \dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\,(X) + z_3\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\,(X)\,, \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^5, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 11$ e $X = \big(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2\big)$.

Caso 4 :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0(X) + x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_1(X) \\ \dot{x}_2 &= x_1 f_2(X) + x_1x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0(X) + \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_3(X) \\ &\quad + x_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_1(X) \\ \dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_4(X) + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5(X) + \mathbf{i}x_1\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}f_6(X) \\ &\quad + x_1z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_7(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8(X) + \\ &\quad z_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9(X) \\ \dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_{10}(X) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}(X) + \mathbf{i}x_1 z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}f_{12}(X) \\ &\quad + x_1z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{13}(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{14}(X) \\ &\quad + z_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{15}(X) \\ \dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{16}(X) + x_1z_3\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{17}(X) + z_3\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{18}(X), \end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^6, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 18$ e

$$X = \left(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2\right).$$

Podemos observar que o valor de a_3 em (3.12) não influencia nos geradores de $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^{\phi}\times\mathbb{Z}_2^{\psi})$ para a obtenção da forma normal. Isto ocorre pois a_3 está na parte de ψ que age na parte algebricamente independente de L. Logo, este exemplo pode ser estendido para sistemas em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$, com $n > 3$, como fazemos a seguir.

3.3.4 Ressonância do tipo $(k_1 : k_2 : 0)$ em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}^n$

Aqui, tomamos L em (3.2) com $n > 3$, ω_1 e ω_2 satisfazendo $k_1\omega_1 + k_2\omega_2 = 0$ e $\omega_3, \ldots, \omega_n$ algebricamente independentes em relação a ω_1 e ω_2. Neste caso, o sistema (3.1) também é dito ser $(k_1 : k_2 : 0)-$ressonante. Pelo Teorema 2.15, $\mathbf{S} = \mathfrak{R} \times T^{n-1}$. A ação em $\mathfrak{R} \times T^{n-1}$ é a diagonal, onde T^{n-1} age em $\mathbb{C}^n$ da seguinte forma:

$$(\theta_2, \ldots, \theta_n)(z_1, z_2, z_3, \ldots, z_n) = (e^{\mathbf{i}k_1\theta_2}z_1, e^{\mathbf{i}k_2\theta_2}z_2, e^{\mathbf{i}\theta_3}z_3, \ldots, e^{\mathbf{i}\theta_n}z_n).$$

De forma análoga ao que fizemos no exemplo anterior, obtemos uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$ formada por

$$v_1(x,z) = x_1,\ v_2(x,z) = |z_1|^2,\ v_3(x,z) = |z_2|^2,\ v_4(x,z) = \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}),$$

$$v_5(x,z) = \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}),\ v_6(x,z) = |z_3|^2,\ \ldots,\ v_{n+3}(x,z) = |z_n|^2.$$

Além disso,

$$H_0(x,z) = (x_1, x_2, 0, \ldots, 0),\ H_1(x,z) = (0,1,0,\ldots,0),\ H_2(x,z) = (0,0,z_1,\ldots,0),$$

$$H_3(x,z) = (0,0,\mathbf{i}z_1,\ldots,0),\quad H_4(x,z) = (0,0,\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1},\ldots,0),$$

$$H_5(x,z) = (0,0,\mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1},\ldots,0),\quad H_6(x,z) = (0,0,0,z_2,\ldots,0),$$

$$H_7(x,z) = (0,0,0,\mathbf{i}z_2,\ldots,0),\quad H_8(x,z) = (0,0,0,z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1},\ldots,0),$$

$$H_9(x,z) = (0,0,0,\mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1},\ldots,0),\quad H_{10}(x,z) = (0,0,0,0,z_3,\ldots,0),$$

$$H_{11}(x,z) = (0,0,0,0,\mathbf{i}z_3,\ldots,0),\quad \ldots,\quad H_{2n+4}(x,z) = (0,\ldots,0,z_n)$$

$$\text{e}\qquad H_{2n+5}(x,z) = (0,\ldots,0,\mathbf{i}z_n)$$

geram $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S})$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S})$.

Queremos encontrar um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$. Como usual, seguimos os passos do Algoritmo 3.6.

1. Procuramos por uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$. Temos que $v_i\in\mathcal{P}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$, para $i\in\{1,\ldots,n+3\}\backslash\{5\}$ e $v_5\in\mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$. Logo, $R(v_i)\equiv v_i, R(v_5)\equiv 0,\ S(v_i)\equiv 0,\ S(v_5)\equiv v_5$, para $i\in\{1,\ldots,n+3\}\backslash\{5\}$, onde R e S são como no exemplo anterior. Pelo Teorema 1.33, $\{v_1,\ldots,v_4,v_5^2,v_6,\ldots,v_{n+3}\}$ é uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$. Mas $v_5^2\equiv v_2^{k_2}v_3^{k_1}-v_4^2$. Assim tomamos a base de Hilbert

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi) = \langle u_1\equiv v_1,\ldots,u_4\equiv v_4, u_5\equiv v_6,\ldots,u_{n+2}\equiv v_{n+3}\rangle.$$

2. Por definição, $\overline{S}(u_0)\equiv 1$. Pelo exemplo anterior, $\overline{S}(u_i)\equiv 0$, exceto quando $i=1,4$. Além disso, $\overline{S}(u_1)\equiv\dfrac{(1-a_0)}{2}u_1$ e $\overline{S}(u_4)\equiv\dfrac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4$.

3. Queremos um conjunto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)$. Neste caso, $(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi)_+ = \mathbf{S}\times\{1\}$ e aplicamos o Algoritmo 1.36 para $\delta=\phi$. Temos

$$\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}) = \langle v_1,\ldots,v_{n+3}\rangle\qquad\text{e}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S}\times\{1\}) = \mathcal{P}_V(\mathbf{S}\times\{1\})\{H_0,\ldots,H_{2n+5}\}.$$

Pelo passo 1, $S(v_i) \equiv 0$, $i \neq 5$, $S(v_5) \equiv v_5$ e, por definição, $S(v_0) \equiv 1$. Logo, precisamos calcular a imagem de

$$\{H_0, \ldots, H_{11}, v_5H_0, \ldots, v_5H_{11}\}$$

por $\vec{S}$, onde $\vec{S}$: $\vec{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\}) \longrightarrow \vec{\mathcal{P}}_V(\mathbf{S} \times \{1\})$ é como em (1.11). Para j par, H_j é equivariante por ϕ e para j ímpar, H_j é reversível equivariante por ϕ. Como $v_5 \in \mathcal{Q}_V(\mathbb{Z}_2^\phi)$, segue que para j par v_5H_j é reversível equivariante por ϕ e para j ímpar v_5H_j é equivariante por ϕ. Logo,

$$\{L_0 \equiv H_1,\ L_1 \equiv v_5H_0,\ L_2 \equiv H_3,\ L_3 \equiv H_5,\ L_4 \equiv v_5H_2,\ L_5 \equiv v_5H_4,\ L_6 \equiv H_7,$$
$$L_7 \equiv H_9,\ L_8 \equiv v_5H_6,\ L_9 \equiv v_5H_8,\ L_{10} \equiv H_{11},\ L_{11} \equiv v_5H_{10}, \ldots,\ L_{2n+4} \equiv H_{2n+5},$$
$$L_{2n+5} \equiv v_5H_{2n+4}\}$$

gera $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$.

4. Com base no que obtivemos no passo 2, precisamos encontrar apenas $\overline{L}_{0j}$, $\overline{L}_{1j}$ e $\overline{L}_{4j}$ para $j = 0, \ldots, 2n+5$. Temos

$$\overline{L}_{00} \equiv \frac{(1+a_0)}{2}L_0, \quad \overline{L}_{0l} \equiv \frac{(1+a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}L_l, \quad \overline{L}_{0k} \equiv L_k,$$

$$\overline{L}_{10} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}u_1L_0, \quad \overline{L}_{1l} \equiv \frac{(1+a_0a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}\frac{(1-a_0)}{2}u_1L_l, \quad \overline{L}_{1k} \equiv 0,$$

$$\overline{L}_{40} \equiv \frac{(1-a_0)}{2}\frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_0, \quad \overline{L}_{4l} \equiv \frac{(1-a_1^{k_2}a_2^{k_1})}{2}u_4L_l \quad \text{e} \quad \overline{L}_{4k} \equiv 0,$$

para $l = 1, 3, 4, 7, 8, 11, 13, 15, \ldots, 2n+5$ e $k = 2, 5, 6, 9, 10, 12, 14, \ldots, 2n+4$.

Temos, portanto, quatro casos a considerar. Em cada caso, apresentamos também uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$, que é determinada usando o Teorema 1.33. Novamente $\delta = \psi$ e os operadores $\breve{R}, \breve{S} : \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi) \longrightarrow \mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi)$ são como em (1.10) e (1.11), respectivamente.

Caso 1: Quando $a_0 = 1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1} = 1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_0, \ldots,\ L_{2n+5}\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S} \rtimes \mathbb{Z}_2^\phi \times \mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1, \ldots, u_{n+2} \rangle$.

Caso 2: Quando $a_0 = 1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1} = -1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{L_k,\ u_4L_l\},$$

onde $k = 0, 2, 5, 6, 9, 10, 12, 14, \ldots, 2n+4$, e $l = 1, 3, 4, 7, 8, 11, 13, 15, \ldots, 2n+5$ e pelo Teorema 1.33, $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1, u_2, u_3, u_4^2, u_5, \ldots, u_{n+2}\rangle$.

Caso 3: Quando $a_0 = -1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1} = 1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{u_1L_0,\ L_1, \ldots,\ L_{2n+5}\},$$

onde $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1^2, u_2, \ldots, u_{n+2}\rangle$.

Caso 4: Quando $a_0 = -1$ e $a_1^{k_2}a_2^{k_1} = -1$. Neste caso, um conjunto de geradores para $\vec{\mathcal{Q}}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi)$ é

$$\{\ u_1L_l,\ u_4L_l, L_k\ \},$$

onde $k = 2, 5, 6, 9, 10, 12, 14, \ldots, 2n+4$, e $l = 0, 1, 3, 4, 7, 8, 11, 13, 15, \ldots, 2n+5$. Pelo Teorema 1.33, $\mathcal{P}_V(\mathbf{S}\rtimes\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi) = \langle u_1^2, u_2, u_3, u_4^2, u_1u_4, u_5, \ldots, u_{n+2}\rangle$.

Portanto, pelo Teorema 2.29, temos as seguintes formas normais $\mathbb{Z}_2^\phi\times\mathbb{Z}_2^\psi-$reversíveis-equivariantes:

Caso 1 :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1 &=& x_2 + x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X)\\
\dot{x}_2 &=& f_1\,(X) + x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\,(X)\\
\dot{z}_1 &=& -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\,(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}f_3\,(X) + z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\,(X)\\
&& +\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\,(X)\\
\dot{z}_2 &=& -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\,(X) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}f_7\,(X) + z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\,(X)\\
&& +z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\,(X)\\
\dot{z}_3 &=& -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\,(X) + z_3\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\,(X)\\
\vdots &&\\
\dot{z}_n &=& -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i}z_n f_{2n+4}\,(X) + z_n\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{2n+5}\,(X)\,,
\end{array}\right.$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+2}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 2n+5$ e

$$X = \left(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2, \ldots, |z_n|^2\right).$$

Caso 2 :

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\left(X\right) \\
\dot{x}_2 &= f_1\left(X\right) + x_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\left(X\right) \\
\dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\left(X\right) + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_3\left(X\right) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\left(X\right) \\
&\quad + z_1\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5\left(X\right) \\
\dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\left(X\right) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_7\left(X\right) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\left(X\right) \\
&\quad + z_2\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9\left(X\right) \\
\dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\left(X\right) + z_3\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\left(X\right) \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i}z_n f_{2n+4}\left(X\right) + z_n\mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{2n+5}\left(X\right),
\end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+2}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 2n+5$ e

$$X = \left(x_1, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2, \ldots, |z_n|^2\right).$$

Caso 3 :

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\left(X\right) \\
\dot{x}_2 &= x_1 f_1\left(X\right) + x_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_0\left(X\right) \\
\dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i}z_1 f_2\left(X\right) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1} f_3\left(X\right) + z_1\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_4\left(X\right) \\
&\quad + \overline{z}_1^{k_2-1}z_2^{k_1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_5(X) \\
\dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i}z_2 f_6\left(X\right) + \mathbf{i}z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} f_7\left(X\right) + z_2\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_8\left(X\right) \\
&\quad + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1}\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_9(X) \\
\dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i}z_3 f_{10}\left(X\right) + z_3\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{11}\left(X\right) \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i}z_n f_{2n+4}\left(X\right) + z_n\mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1})f_{2n+5}\left(X\right),
\end{cases}$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+2}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 2n+5$ e

$$X = \left(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2, \ldots, |z_n|^2\right).$$

Caso 4 :

$$
\begin{cases}
\dot{x}_1 &= x_2 + x_1^2 \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_0(X) + x_1 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_1(X) \\
\dot{x}_2 &= x_1 f_2(X) + x_1 x_2 \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_0(X) + \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_3(X) \\
&\quad + x_2 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_1(X) \\
\dot{z}_1 &= -\mathbf{i}\omega_1 z_1 + \mathbf{i} z_1 f_4(X) + \overline{z}_1^{k_2-1} z_2^{k_1} \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_5(X) + \mathbf{i} x_1 \overline{z}_1^{k_2-1} z_2^{k_1} f_6(X) \\
&\quad + x_1 z_1 \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_7(X) + \mathbf{i}\overline{z}_1^{k_2-1} z_2^{k_1} \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_8(X) + \\
&\quad z_1 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_9(X) \\
\dot{z}_2 &= -\mathbf{i}\omega_2 z_2 + \mathbf{i} z_2 f_{10}(X) + z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{11}(X) + \mathbf{i} x_1 z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} f_{12}(X) \\
&\quad + x_1 z_2 \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{13}(X) + \mathbf{i} z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1-1} \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{14}(X) \\
&\quad + z_2 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{15}(X) \\
\dot{z}_3 &= -\mathbf{i}\omega_3 z_3 + \mathbf{i} z_3 f_{16}(X) + x_1 z_3 \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{17}(X) \\
&\quad + z_3 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{18}(X) \\
&\vdots \\
\dot{z}_n &= -\mathbf{i}\omega_n z_n + \mathbf{i} z_n f_{3n+7}(X) + x_1 z_n \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{3n+8}(X) \\
&\quad + z_n \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) \mathrm{Im}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}) f_{3n+9}(X),
\end{cases}
$$

para $f_i : (\mathbb{R}^{n+3}, 0) \longrightarrow \mathbb{R},\ 0 \leq i \leq 3n+9$ e

$$
X = \left(x_1^2, |z_1|^2, |z_2|^2, \mathrm{Re}^2(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), x_1 \mathrm{Re}(z_1^{k_2}\overline{z}_2^{k_1}), |z_3|^2, \ldots, |z_n|^2\right).
$$

É possível considerar o sistema (3.1) com a parte linear L tendo apenas autovalores puramente imaginários, isto é, L não tem a parte nilpotente. Neste caso, para os exemplos feitos aqui basta desconsiderarmos as variáveis x_1 e x_2 e os geradores que dependem delas. Além disso, na Seção 3.1 usamos a hipótese de que $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$, para $i \neq j$ em $\{1, \ldots, n\}$, para encontrarmos os pares de involução que anticomutam com L. No entanto, quando a igualdade vale, tais pares ainda anticomutam com L. Observamos que esta condição, a saber, $\omega_i = \pm\omega_j,\ i \neq j$, corresponde ao caso $(1:1)-$ressonante e que as formas normais obtidas aqui também são válidas para este caso.

Referências

[1] Adams, J. F., *Lectures on Lie Groups.* University of Chicago Press (1983).

[2] Antoneli, F., Baptistelli, P. H., Dias, A. P. S. e Manoel, M., Invariant theory and reversible equivariant vector fields. *Journal of Pure and Applied Algebra* **213** (2009), 649-663.

[3] Baptistelli, P. H. e Manoel, M., Invariants and relatives invariants under compact Lie groups. *Journal of Pure and Applied Algebra* **217** (2013), 2213-2220.

[4] Baptistelli, P. H. e Manoel, M., The classification of reversible-equivariant steady-state bifurcations on self-dual spaces. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **145** (2008), 379-401.

[5] Baptistelli, P. H. e Manoel, M., The $\sigma-$isotypic decomposition and the $\sigma-$index of reversible equivariant systems. *Topology and its applications* **159** (2011), 389-396.

[6] Baptistelli, P. H., Manoel, M. e Zeli, I. O., *Normal form of reversible equivariant vector fields.* Notas do ICMC **372** (2012).

[7] Belitskii, G. R., $\mathcal{C}^\infty$-normal forms of local vector fields. *Acta Applicandae Mathematicae* **70** (2002), 23-41.

[8] Belitskii, G. R., Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings. *Russ. Math. Surv.* **33** (1978), 107-77.

[9] Belitskii, G. R., Normal forms in relation to the filtering action of a group. *Trudy Moskov Mat. Obsc.* **40** (1979), 3-46.

[10] Birkhoff, G. D., Dynamical Systems. *A.M.S. Coll. Publication IX,* New York (1927).

[11] Bourbaki, N., *Groupes et Algebras de Lie,* Ch. I, *Act. Sc. et Ind.* **1285**, Ch. IV, V, VI. Hermann, Paris (1968).

[12] Bröcker, T., Tom Dieck, T., *Representation of compact Lie groups.* Graduate Texts in Mathematics **98**, Springer - Verlag, New York, (1995).

[13] Buono, P.-L., Lamb. J. S. W. e Roberts, R. M., Bifurcation and branching of equilibrio in reversible equivariant vector fields. *Nonlinearity* **21** (2008), 625-660.

[14] Buzzi, C. A. e Lamb, J. S. W., Reversible equivariant Hopf bifurcation. *Arch. Ration. Mech. Anal.* **175** (2005), 39-84.

[15] Buzzi, C. A., Roberto, L. A. e Teixeira, M. A., Branching of periodic orbits in reversible Hamiltonian systems. In: Miriam Manoel; Maria Carmen Romero Fuster. *Real and Complex Singularities*. Cambridge: Cambridge University Press **380** (2010), 46-70.

[16] Chow, S-N, Li, C. e Wang, D., *Normal forms and bifurcation of planar vector fields.* Cambridge University Press (1994), 49-70.

[17] Elphick, C., Tirapegui, E., Brachet, M. E., Coullet, P. e Iooss, G., A simple global characterization for normal forms of singular vector fields. *Physica D.* **29** (1987), 95-127.

[18] Golubitsky, M., Stewart, I. e Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.* Vol 1. Applied Mathematical Sciences (1985).

[19] Golubitsky, M., Stewart, I. e Schaeffer, D. G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory.* Vol 2. Applied Mathematical Sciences (1987).

[20] Hoffmann, K. e Kunze, R., *Álgebra Linear*. EDUSP (1970).

[21] Lamb, J. S. W. e Melbourne, I. Normal form theory for relative equilibrio and relative periodic solutions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **359 (9)** (2007), 4537-4556.

[22] Lamb, J. S. W. e Roberts, R. M., Reversible equivariant linear systems. *J. Diff. Eq.* **159** (1999), 239-279.

[23] Lima, E. L., *Variedades Diferenciáveis*. Publicações matemáticas. IMPA (2007).

[24] Lima, M. F. S. e Teixeira, M. A., Families of periodic orbits inresonant reversible systems. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society*, New Series **40 (4)** (2009), 511-527.

[25] Mancini, S., Manoel, M. e Teixeira, M. A., Divergent diagrams of folds and simultaneous conjugacy of involutions. *Discrete and Continuous Dynamical Systems.* USA **12 (4)** (2005), 657-674.

[26] Martins, R. M. e Teixeira, M. A., Reversible equivariant systems and matricial equations, *Anais Acad. Bras. Ciências.* **83 (2)**, 375-390.

[27] Mereu, A. C. e Teixeira, M. A., Reversibility and branching of periodic orbits. *Discrete and Continuous Dynamical Systems* **33** (2013), 1177-1199.

[28] Nachbin, L., *The Haar Integral*. Huntington, New York (1976).

[29] Poincaré, H., Thesis (1879); também Oeuvres I, Gauthier - Villars, Paris (1928), 59-129.

[30] San Martin, L. A. B., *Grupos de Lie* (2013)(http://www.ime.unicamp.br/∼smartin).

[31] *Singular - versão 3-0-4* (2008)(http://www.singular.uni-kl.de/).

[32] Zeli, I. O., *Teoria de forma normal para campos vetoriais reversíveis equivariantes*. Tese de Doutorado, Universidade de São Paulo (2013).

Índice de notações

V, W : Espaços vetoriais finitamente gerados;

$Gl(V)$: Grupo das transformações lineares invertíveis $V \longmapsto V$;

Γ : Grupo de Lie compacto;

Γ_+ : Subgrupo de Γ de índice 2, formado pelas simetrias de Γ;

$\Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$: Subconjunto formado pelas antissimetrias de Γ;

δ : Antissimetria fixada de Γ_-;

$\sigma : \Gamma \longrightarrow \mathbb{Z}_2$: Epimorfismo;

(ρ, V) : V sob a representação ρ de Γ;

ρ_σ : Representação dual de ρ;

$\int_\Gamma$: Integral de Haar normalizada em Γ;

$\mathcal{P}_V$: Anel das funções polinomiais $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\mathcal{P}_V(\Gamma)$: Anel das funções polinomiais $\Gamma-$invariantes $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\mathcal{P}_V^k$: Espaço vetorial das funções polinomiais homogêneas $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau k;

$\mathcal{P}_V^k(\Gamma)$: Espaço vetorial das funções polinomiais homogêneas $\Gamma-$invariantes $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau k;

$\vec{\mathcal{P}}_{V,W}$: Módulo sobre $\mathcal{P}_V$ das aplicações polinomiais $g : V \longrightarrow W$;

$\vec{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $\Gamma-$equivariantes $g : V \longrightarrow W$;

$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{k}_{V,W}$: Espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas $g : V \longrightarrow W$ de grau k;

$\overrightarrow{\mathcal{P}}^{k}_{V,W}(\Gamma)$: Espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas $\Gamma-$equivariantes $g : V \longrightarrow W$ de grau k;

$\mathcal{Q}_V(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das funções polinomiais $\Gamma-$anti-invariantes $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\mathcal{Q}^k_V(\Gamma)$: Espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas $\Gamma-$anti-invariantes $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ de grau k;

$\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ das aplicações polinomiais $\Gamma-$reversíveis-equivariantes $g : V \longrightarrow V$;

$\overrightarrow{\mathcal{Q}}^{k}_V(\Gamma)$: Espaço vetorial das aplicações polinomiais homogêneas $\Gamma-$reversíveis-equivariantes $g : V \longrightarrow V$ de grau k;

$\mathcal{E}_V$: Anel dos germes de funções $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\mathcal{E}_V(\Gamma)$: Anel dos germes de funções $\Gamma-$invariantes $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}$: Módulo sobre $\mathcal{E}_V$ dos germes de aplicações $g : (V, 0) \longrightarrow W$;

$\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ dos germes de aplicações $\Gamma-$equivariantes $g : (V, 0) \longrightarrow W$;

$\mathcal{F}_V(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ dos germes de funções $\Gamma-$anti-invariantes $f : (V, 0) \longrightarrow \mathbb{R}$;

$\overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma)$: Módulo sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ dos germes de aplicações $\Gamma-$reversíveis-equivariantes $h : (V, 0) \longrightarrow V$;

Ad_L : Operador homológico definido em $\overrightarrow{\mathcal{P}}_V$;

Ad^k_L : Restrição de Ad_L a $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{k}_V$.

Índice Remissivo

Ação, 8
    diagonal, 29, 30
    dual, 16
Antissimetria, 15
Aplicação
    equivariante, 13
    reversível equivariante, 15

Base de Hilbert, 10

Campos conjugados, 39

Formas normais, 42
    equivariantes, 51, 56
    reversíveis equivariantes, 56, 65
    Teoria de, 33
Função
    anti-invariante, 15
    invariante, 10

Germes, 4
Grupo
    S, 46
    de Lie, 5
    de Lie linear, 6
    de simetrias, 14

Integral de Haar, 8

Método
    de Elphick *et al.*, 46
    de representação matricial, 42
    do operador adjunto, 34, 42, 43

Operador
    de Reynolds, 17
    homológico, 43

Representação, 8
    diagonal, 30
    dual, 16
Reversibilidade, 15

Simetria, 15

Teorema
    de Hilbert-Weyl, 11
    Elphick *et al.*, 50