EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DA ONDA COM DISSIPAÇÃO NÃO LINEAR NA FRONTEIRA E TERMO DE FONTE

Evandro Monteiro

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Maringá - Pr

2006

EXISTÊNCIA E COMPORTAMENTO ASSINTÓTICO DAS SOLUÇÕES DE UMA EQUAÇÃO DA ONDA COM DISSIPAÇÃO NÃO LINEAR NA FRONTEIRA E TERMO DE FONTE

Evandro Monteiro

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-Pr, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Valéira Nveves Domingos Cavalcanti - UEM..
(Orientador)

Prof. xxxxxxxxxxxxxxxxx - UEM ....

Prof. xxxxxxxxxxxxxxxxxxxx - xxxxx ....

Maringá

Fevereiro, 2006

Aos meus pais.....

Agradecimentos

Agradeço a..

Resumo

Neste trabalho provaremos a existência de solução e fornecemos taxas de decaimento para a energia associada ao problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^{\rho} u \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u_t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ x \in \Omega; \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ e β é uma função não linear que não possui necessariamente um crescimento polimonial próximo à origem.

Abstract

In this work we prove the existence of solution and we give decay rates for the energy associated to the problem

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{in} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u_t) = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u^0(x), \ u_t(x,0) = u^1(x), \ x \in \Omega; \end{cases}$$

where Ω is a bounded domain of $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ and β is a nonlinear function which has necessarily not a polynomial growth near the origin.

Sumário

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência de solução bem como das taxas de decaimento da energia associada à equação da onda com um termo de fonte e sujeita à uma dissipação não linear na fronteira

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^{\rho} u \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u_t) = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u^0(x), \ u_t(x, 0) = u^1(x), \ x \in \Omega; \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado e estrelado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira regular $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ verificando às seguintes condições: $med(\Gamma_0) > 0$; Γ_0 e Γ_1 são fechadas e disjuntas, e ν representa o vetor normal unitário exterior à Γ.

A equação da onda linear sujeita à uma dissipação não linear na fronteira tem sido amplamente estudada. Quando $\beta(s) = s^p$, $s \in [0, 1]$, para algum $p > 1$, Zuazua [41] obteve taxas de decaimento exponencial se $p = 1$ e polinomial se $p > 1$. Quando nenhuma hipótese de crescimento na origem é imposta sobre a função β, Lasiecka e Tataru [19] estudaram a equação da onda não linear sujeita à uma dissipação não linear atuando na parte Γ_1 da fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. O método por eles introduzido é utilizado na seção 3.3 para obtenção de taxas de decaimento mais gerais, posto que nenhuma condição geométrica é imposta na parte Γ_0.

Na seqüência, Martinez [23] exibiu taxas de decaimento explícitas para a energia mesmo que a função β não possua um comportamento polinomial na origem. O método apresentado por Martinez [23] nos fornece um grande número de taxas de decaimento explícitas, considerando o grande espectro de escolhas que temos para a função g, que define o comportamento de β na origem. Embora em alguns casos este método nos forneça taxas ótimas, uma aplicação direta do mesmo nos mostra que, em outros casos, as taxas obtidas não são as melhores possíveis; podemos considerar, por exemplo, o caso $\beta(s) = s^p$, $p > 1$.

Neste trabalho, apresentamos uma abordagem didática do artigo dos autores Cavalcanti, Domingos Cavalcanti e Martinez [9], que generaliza os resultados de [23] no que se refere à obtenção de taxas explícitas de decaimento da energia, mesmo que β não possua crescimento polinomial na origem, associada à equação da onda com uma não linearidade atuando no domínio.

A organização deste trabalho é o seguinte: No Capítulo 1 apresentaremos algumas notações e resultados básicos, necessário ao desenvolvimento do estudo feito. No Capítulo 2 provaremos a existência e unicidade de solução para o problema proposto e no Capítulo 3 exibimos as taxas de decaimento de energia.

Capítulo 1

Resultados preliminares

No presente capítulo serão fixadas as notações e enunciados as definições e resultados fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Distribuições e espaços funcionais

1.1.1 Noção de derivada fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuirem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ como o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω

e que possuem suporte compacto, onde o suporte de φ é, por definição, o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω. Denotamos $supp(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0|\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

(i) $supp(\varphi_\nu) \subset K, \forall \nu \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência , é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2$^{\text{o}}$) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Uma distribuição sobre Ω é uma forma linear e contínua definida em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ e denominamos espaço das distribuições sobre Ω. Munimos $\mathcal{D}'(\Omega)$ da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, qualquer que seja $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3$^{\text{o}}$) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de (1936), uma noção global de derivada a qual denominou derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v se anulam sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a definição de derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora tal conceito de derivada tenha sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ele apresenta uma grave restrição posto que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. a derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha\varphi\rangle; \forall\varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verificamos que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \le p < +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções u definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

Representaremos por $L^\infty(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções u definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$, mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω, ou seja, o supremo essencial de $|u|$ é finito onde supremo essencial de $|u|$ é o ínfimo do conjunto $\{\lambda > 0;\ |u(x)| \le \lambda,\ \text{para quase todo } x \in \Omega\}$.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Teorema 1.1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [26].

Proposição 1.1.2 (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [4].

Proposição 1.1.3 (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [26].

Proposição 1.1.4 (Desigualdade de Hölder) - *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [4].

Segue como corolário da proposição anterior o seguinte resultado:

Corolário 1.1.5 (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ *e* $\frac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.1.6 (Desigualdade de interpolação) - *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [28].

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se Ω é limitado e $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ então $L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ denota que a identidade é uma injeção contínua.

(v) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.7 (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

A aplicação $\varphi \mapsto u$ *é um operador linear isométrico e sobrejetivo que permite identificar o dual de* $L^p(\Omega)$ *com* $L^q(\Omega)$.

Demonstração: Ver [4].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.1.8 *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx,\ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [4].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω, munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tivermos

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0, \quad \text{quando } \nu \to +\infty.$$

Proposição 1.1.9 (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω. *Onde* T_u *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi\rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [27].

Desta proposição tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.1.10 *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$*,* $1 \leq p < +\infty$*, tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$*, então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [27].

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$, então u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ definimos um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $\alpha \in \mathbb{N}$ onde $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$, devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$. Motivado por este fato definimos o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação 1.1.11 *Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma*

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços nos quais trabalharemos caracterizaremos os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim\limits_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$ para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente decrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \displaystyle\sum_{j=1}^n x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} r_\Omega : & L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\Omega) \\ & u & \mapsto & r_\Omega u = u|_\Omega \end{array}$$

que associa u à sua restrição $r_\Omega u$ à Ω. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{ v|_\Omega;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H_0^s(\Omega)\right)' \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

Teorema 1.1.12 (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}), \text{ se } m > \frac{n}{2} + k,$$

onde $C^k(\overline{\Omega})$ é o espaço de Banach das restrições a $\overline{\Omega}$ das funções pertencentes a $C^k(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [25].

Proposição 1.1.13 *Sejam Ω um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe C^m, com fronteira limitada; m um inteiro tal que $m \geq 1$ e $1 \leq p < \infty$. Temos as segintes imersões contínuas:*

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, onde $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall q \in [p, +\infty[$,

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ então $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [7].

Teorema 1.1.14 (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja Ω um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, Ω de classe C^1 e $1 \leq p \leq \infty$. Então:*

se $p < n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, p^*]$, onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$;

se $p = n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall q \in [1, +\infty[$;

se $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [7].

Observação 1.1.15 $\overset{c}{\hookrightarrow}$ *indica imersão compacta.*

1.1.4 Espaços funcionais à valores vetoriais

Seja X um espaço de Hilbert. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi :]0,T[\mapsto X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $]0,T[$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) $\exists K$ compacto de $]0,T[$ tal que $supp(\varphi_\nu)$ e $supp(\varphi)$ estào contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in]0,T[$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}^{'}(0,T;X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}^{'}(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}^{'}(0,T;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}^{'}(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das distribuições vetoriais de $]0,T[$ com valores em X.

Observamos que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;X)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach das (classes) de funções vetoriais $u :]0,T[\to X$ fortemente mensuráveis em $]0,T[$, $]0,T[$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(u,v) = \displaystyle\int_0^T (u(t),v(t))_X dt$. Denotaremos por $H_0^1(0,T;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T;X) = \left\{ v \in L^2(0,T;X); v' \in L^2(0,T;X), v(0) = v(T) = 0 \right\}$$

munido do produto interno

$$((v,w)) = \int_0^T (v(t),w(t))_X dt + \int_0^T (v'(t),w'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T;X)$ com o seu dual $(L^2(0,T;X))^{'}$, via teorema de Riesz, obtemos então

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^1(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(0,T;X)$$

onde

$$H^{-1}(0,T;X) = \left(H_0^1(0,T;X)\right)'.$$

Proposição 1.1.16 *Seja $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle, \xi)_X, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall \xi \in X.$$

Baseado na proposição anterior, identificamos f com u'. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

Teorema 1.1.17 (Teorema da Média) - *Se $u : [0,T] \to X$ é integrável em $[0,T]$, então para quase todo $t \in (0,T)$*

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} u(\tau) d\tau = u(t).$$

Demonstração: Ver [13].

1.1.5 Funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas)

Seja Y um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;Y)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x \rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall x \in Y'$, onde Y' é o dual de Y. Denotamos tal espaço por $C_s(0,T;Y)$ ou $C_w(0,T;Y)$.

Denotaremos $C_s^1(0,T;Y) = \{u \in C_s(0,T;Y); u' \in C_s(0,T;Y)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma, usaremos a seguinte notação: $C_s^2(0,T;Y) = \{u \in C_s(0,T;Y); u' \in C_s^1(0,T;Y)\}$.

Observação 1.1.18 *Se $u \in L^\infty(0,T;Y)$ e $u \in C([0,T];Y)$ então $u \in C_s(0,T;Y)$.*

Lema 1.1.19 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração: Ver [22].

1.2 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do R^n com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representamos o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se $\gamma_0 u$ a restrição de u à Γ.

Proposição 1.2.1 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [28].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.2.1 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade à uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.2.2 *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$e o núcleo de γ_0 é o espaço $H^1_0(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [28].

Consideremos, agora, Ω um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.2.3 *Existe uma única aplicação linear e contínua* γ *do espaço* $H^m(\Omega)$ *sobre o espaço* $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *com núcleo* $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, *verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.

Demonstração: Ver [28].

Além desses resultados, considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos produtos internos $(u,v)_0 = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $(u,v)_1 = (u,v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.2.4 *A aplicação linear* $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) &\to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação γ *acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.*

Demonstração: Ver [8].

Proposição 1.2.5 *A aplicação linear* $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [8].

As demonstrações dos resultados enunciados no restante desta seção podem ser encontrados em [31].

1.2.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$.

Pelo visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.1}$$

que é linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e admite uma inversa à direita linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & L^2(0,T;H^m(\Omega)) & \to & L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.2}$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.1) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.1) e (1.2) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.2) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita τ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega)),;\gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.3}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.4}$$

que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.2).

Proposição 1.2.6 *Seja* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *com* $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então* $\gamma u' = (\gamma u)'$.

1.2.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))},$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{rcl} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & M^{\perp} \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0,\psi_f^0\} \end{array} \tag{1.5}$$

onde $\{\phi_f^0,\psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| + \|\{\phi_f^0,\psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f,\psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f,v)+(\psi_f,v')$ $= \langle f,v\rangle \; \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f,\psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f$. A aplicação definida em (1.5) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ defini-se $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \tag{1.6}$$

$w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{rrcl} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma} f \end{array} \tag{1.7}$$

$\widetilde{\gamma} f$ definido por (1.6), que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.2.7 *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma} u.$$

Proposição 1.2.8 *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\widetilde{\gamma} u' = (\gamma u)'.$$

Teorema 1.2.9 *A aplicação traço (1.7) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\widetilde{\tau} : H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

Observação 1.2.10 *Além desses resultados se considerarmos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\;\; \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ ou $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ em vez* *de $H^m(\Omega)$ em conjunto com as propoições 1.2.4 e 1.2.5 obteremos a existência das aplicações*

$$\gamma : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

e

$$\gamma_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

1.3 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no capítulo 2. O teorema nos fornece a existência de solução para um problema de Cauchy em um intervalo $[0,t_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [10].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por (t,x), $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre Ω se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em t para cada x fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em x para quase todo t fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

Teorema 1.3.1 (Teorema de Carathéodory) - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre Ω. Então existe uma solução $x(t)$ de (1.8) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta,\ \beta > 0$.*

Corolário 1.3.2 *Sejam* $\Omega = [0, T[\times B$ *com* $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ *onde* $b > 0$ *e* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *nas condições de Carathéodory sobre* Ω. *Suponhamos que* $x(t)$ *é uma solução de (1.8) tal que* $|x_0| \leq b$ *e que em qualquer intervalo* I, *onde* $x(t)$ *está definida, se tenha* $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, M *independente de* I *e* $M < b$. *Então* $x(t)$ *possui um prolongamento à todo* $[0, T]$.

1.4 Resultados auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Proposição 1.4.1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) - *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

Definição 1.4.2 *Seja* E *um espaço de Banach. A topologia fraca* $\sigma(E, E')$ *sobre* E *é a topologia menos fina sobre* E *que torna contínuas todas as aplicações* $f \in E'$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de E a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.4.3 *Seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* E, *então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ *em* E *se, e somente se,* $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ *em* E, *então* $x_n \rightharpoonup x$*em* E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$*em* E, *então* $\|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$*em* E *e* $f_n \to f$ *em* E', *então* $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [4].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.4.4 *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.4.5 *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência em E', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.4.6 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E, então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \textit{ fracamente em } E.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.4.7 *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E', então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \textit{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.4.8 (Desigualdade de Jensen)- *Seja B um hipercubo do $\mathbb{R}^n$, então para toda função côncava F e toda função integrável $g \in L^1(B)$, teremos*

$$F\left(\frac{1}{med(B)}\int_B g(x)dx\right) \geq \frac{1}{med(B)}\int_B F(g(x))dx.$$

Demonstração: Ver [35].

Lema 1.4.9 (Lema de Gronwall) - *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja c uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

então

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [25].

Lema 1.4.10 *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe C^∞. Sejam s_1, s_2 e s_3 números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta\|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [22].

Proposição 1.4.11 (Teorema de Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), \ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1)\right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Proposição 1.4.12 (Lema de Lions) - *Seja* (u_ν) *uma sucessão de funções pertencentes à* $L^q(Q)$ *com* $1 < q < \infty$*. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$;

então $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Proposição 1.4.13 (Fórmula de Gauss) - *Seja* Ω *um aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$*. Se* $u, v \in H^1(\Omega)$*, então para* $1 \leq i \leq n$ *temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *e* ν *denota o vetor normal unitário exterior à* Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$*, temos a fórmula de Green:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [8].

Proposição 1.4.14 (Fórmula de Green generalizada) - *Para todo* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$*e* $v \in H^1(\Omega)$*, tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

onde $\Gamma = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [8].

Proposição 1.4.15 (Regularidade para problemas elípticos) - *Seja* Ω *um aberto de classe* C^2 *com fronteira* Γ *limitada. Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$*, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [4].

Lema 1.4.16 *Sejam H e V espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C([0,T];V)$.*

Demonstração: Ver [34].

Considere Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ onde $med(\Gamma_0) > 0$; Γ_0 e Γ_1 são fechados disjuntos e ν representa o vetor normal unitário exterior à Γ.

Sejam

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ em } \Gamma_0\right\} \text{ e } H = \left\{v \in V; \Delta v \in L^2(\Omega)\right\}. \tag{1.9}$$

Então, V munido da norma induzida por $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Com efeito, sejam $u \in \overline{V}^{H^1(\Omega)}$ e $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_n \to u$ na norma de $H^1(\Omega)$. Como $u_n \in V$ então $\gamma_0 u_n = 0$ em Γ_0. Da continuidade da aplicação traço temos que

$$(\gamma_0 u_n)(x) \to \gamma_0 u(x) \text{ q.s. em } \Gamma,$$

assim

$$(\gamma_0 u_n)(x) \to \gamma_0 u(x) \text{ q.s. em } \Gamma_0.$$

Mas, $(\gamma_0 u_n)(x) = 0,\ \forall x \in \Gamma_0$ e $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$(\gamma_0 u)(x) = 0 \text{ q.s. em } \Gamma_0 \tag{1.10}$$

donde obtemos que $u \in V$.

Portanto V é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$ e sendo $H^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert segue que V munido da norma induzida de $H^1(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Consideremos V e H munidos das seguintes normas, respectivamente,

$$\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

e

$$\|u\|_H = \|u\|_V + \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}.$$

Provaremos a seguir que em V as normas

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \text{ e } \|u\|_V$$

são equivalentes.

Com efeito, que $\|u\|_V \leq \|u\|_{H^1(\Omega)}$ é imediato. Resta-nos mostrar que existe uma constante $c > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c\|u\|_V, \ \forall u \in V. \tag{1.11}$$

Se $u = 0$ nada temos a provar. Agora, se $u \neq 0$ de (1.11) temos que

$$\frac{1}{c} \leq \left\| \frac{u}{\|u\|_{L^2(\Omega)}} \right\|_V ; \ \forall u \in V.$$

Portanto, basta mostrarmos que

$$\exists c > 0 \text{ tal que para todo } u \in V \text{ com } \|u\|_{L^2(\Omega)} = 1, \text{ tenhamos } \|u\|_V \geq \frac{1}{c}. \tag{1.12}$$

Suponhamos o contrário, ou seja, que para cada $n \in \mathbb{N}$ exista $u_n \in V$ com $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1$ e no entanto

$$\|u_n\|_V < \frac{1}{n}. \tag{1.13}$$

Tomando o limite na desigualdade acima quando $n \to +\infty$ resulta que

$$\lim_{n \to +\infty} \|u_n\|_V = 0. \tag{1.14}$$

Agora, de (1.13) e do fato que $\|u_n\|_{L^2(\Omega)} = 1;\ \forall n \in \mathbb{N}$, temos:

$$\|u_n\|^2_{H^1(\Omega)} = \|u_n\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u_n\|^2_V \leq 1 + \frac{1}{n} \leq 2 \tag{1.15}$$

o que implica que a seqüência (u_n) é limitada no espaço topológico $\big(V; \|.\|_{H^1(\Omega)}\big)$. Sendo V um espaço de Hilbert com a topologia induzida de $H^1(\Omega)$, existirão (u_ν) subseqüência de (u_n) e $u \in V$ tais que

$$u_\nu \rightharpoonup u \text{ fraco em } V. \tag{1.16}$$

Sendo a aplicação $v \in V \mapsto \|v\|_V$ uma norma, ela é convexa e semi-contínua inferiormente. Logo, de (1.14) e (1.16) obtemos:

$$\|u\|_V \leq \lim \|u_\nu\|_V = 0.$$

Assim, $\|u\|_V = 0$ e portanto $u = 0$.

Por outro lado, em virtude da imersão de $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ ser compacta, de (1.15), após extração de uma eventual subseqüência, obtemos

$$u_\nu \rightarrow u \text{ em } L^2(\Omega)$$

o que implica que

$$\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

e como $\|u_\nu\|_{L^2(\Omega)} = 1$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$, vem que $\|u\|_{L^2(\Omega)} = 1$ o que é absurdo!

Conseqüentemente, fica provado (1.12) e, por conseguinte, que as normas $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ e $\|u\|_V$ são equivalentes.

Desta equivalência segue que o espaço $(V; \|.\|_V)$ é um espaço de Hilbert.

Por outro lado, observemos que H é um espaço de Hilbert.

Com efeito, como a norma em V e em $L^2(\Omega)$ são provenientes de produto interno, então a norma em H é proveniente de produto interno.

Seja $(v_n) \subset H$ uma seqüência de Cauchy em H. Como

$$\|v_n - v_m\|_H = \|v_n - v_m\|_V + \|\Delta v_n - \Delta v_m\|_{L^2(\Omega)}$$

segue que (v_n) é uma seqüência de Cauchy em V e (Δv_n) é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\Omega)$. Como V e $L^2(\Omega)$ são completos, existem $v \in V$ e $u \in L^2(\Omega)$ tais que

$$v_n \to v \text{ em } V$$

e

$$\Delta v_n \to u \text{ em } L^2(\Omega).$$

Resulta que $\Delta v = u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e, portanto, em $L^2(\Omega)$. Logo, $v \in H$, mostrando que H é um espaço de Hilbert.

Suponhamos que

$$0 < \rho < \frac{2}{n-2} \text{ se } n \geq 3 \text{ e } \rho > 0 \text{ se } n = 1, 2. \tag{1.17}$$

De acordo com (1.17), temos das imersões de Sobolev e da limitação de Ω que

$$V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega). \tag{1.18}$$

Seja B_1 a menor constante relativa à imersão de Sobolev que satisfaz a inequação

$$\|v\|_{L^{\rho+2}(\Omega)} \leq B_1 \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}; \; \forall v \in V. \tag{1.19}$$

Da inequação acima obtemos

$$\frac{\frac{1}{\rho+2}\|v\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}}{\|\nabla v\|^{\rho+2}_{L^2(\Omega)}} \leq \frac{B_1^{\rho+2}}{\rho+2}, \; \forall v \in V, \; v \neq 0.$$

Conseqüentemente,

$$k_0 := \sup_{v \in V, \, v \neq 0} \left(\frac{\frac{1}{\rho+2}\|v\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}}{\|\nabla v\|^{\rho+2}_{L^2(\Omega)}} \right) \leq \frac{B_1^{\rho+2}}{\rho+2}. \tag{1.20}$$

Notemos que $k_0 > 0$ e

$$\frac{1}{\rho+2}\|v\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)} \leq k_0 \|\nabla v\|^{\rho+2}_{L^2(\Omega)}, \; \forall v \in V. \tag{1.21}$$

Consideremos o funcional

$$J(u) = \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \frac{1}{\rho+2}\|u\|^{\rho+2}_{L^{\rho+2}(\Omega)}, \ \forall u \in V, \tag{1.22}$$

que está bem definido em vista da imersão dada em (1.18).

Pondo

$$f(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda^2 - k_0\lambda^{\rho+2}, \ \lambda > 0 \tag{1.23}$$

então

$$\lambda_1 = \left(\frac{1}{k_0(\rho+2)}\right)^{\frac{1}{\rho}} \tag{1.24}$$

é o ponto de máximo absoluto de f.

Definiremos

$$d := f(\lambda_1) > 0. \tag{1.25}$$

1.5 Teoria Espectral

Consideremos V e H dois espaços de Hilbert tais que $V \overset{c}{\hookrightarrow} H$ e V é denso em H. Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva em $V \times V$, isto é, $\exists \alpha > 0;\ |a(v,v)| \geq \alpha\|v\|^2_V,\ \forall v \in V$.

Consideremos

$$D(A) = \{u \in V;\ \text{a forma linear } v \mapsto a(u,v) \text{ é contínua}\},$$

onde V está munido com a topologia induzida de H.

Pelo Teorema de Riesz, para cada $u \in D(A)$ existe um único $Au \in H$ tal que $a(u,v) = (Au,v)_H,\ \forall v \in V$. Notemos que desta forma definimos um operador A com domínio

$$D(A) = \{u \in V;\ \exists f \in H \text{ tal que } a(u,v) = (f,v)_H,\ \forall v \in V\} \text{ e } Au = f.$$

Temos que $D(A)$ é um subespaço linear de H e $A : D(A) \subset V \to H$ é um operador de H. O operador A acima é denominado o operador determinado pela terna $\{V, H, a(u,v)\}$.

Pelo Teorema Espectral ([30], pg. 127) existe $\{w_\nu\} \subset D(A)$ tal que o conjunto das combinações lineares finitas dos w_ν é denso em V, o que implica que $D(A)$ é denso em V.

Consideremos

$$V = \{u \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$$

$$H = L^2(\Omega)$$

$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx.$$

Como $\|u\|_V = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ é uma norma em V vem que $a(u,v)$ é coerciva e, portanto, para $u \in D(A)$,

$$\begin{aligned}(Au,v)_H &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \\ &= (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)};\ \forall v \in V.\end{aligned}$$

Se $v \in C_0^\infty(\Omega)$ obtemos

$$(Au,v) = \langle -\Delta u, v\rangle;\ \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Assim, $\underbrace{Au}_{\in L^2(\Omega)} = -\Delta u$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$, o que implica, $Au = -\Delta u,\ \forall u \in D(A)$, isto é, $A = -\Delta$, onde $D(-\Delta) = \left\{u \in V \cap H^2(\Omega);\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\right\}$.

Com efeito, lembremos que

$$D(-\Delta) = \left\{u \in V;\ -\Delta u \in L^2(\Omega) \text{ e verifica } a(u,v) = (-\Delta u, v),\ v \in V\right\}.$$

Mostremos, inicialmente, que $\left\{u \in V \cap H^2(\Omega); \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\right\} \subset D(-\Delta)$.

Seja $u \in \left\{u \in V \cap H^2(\Omega);\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\right\}$ e $v \in V$. Então, $u \in V$, $-\Delta u \in L^2(\Omega)$ e

$$\begin{aligned}a(u,v) &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} v d\Gamma - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial u}{\partial \nu} \underbrace{v}_{=0} d\Gamma \\ &= \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma = \int_\Omega -\Delta u v dx = (-\Delta u, v),\end{aligned}$$

o que prova o desejado.

Mostremos, agora, a inclusão $D(-\Delta) \subset \left\{u \in V \cap H^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\right\}$.

Seja $u \in V$ tal que $a(u,v) = (-\Delta u, v);\ \forall v \in V$. Então, pela fórmula de Green generalizada temos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = \int_\Omega -\Delta u v dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

o que implica

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle = 0,\ \forall v \in V.$$

Sendo Ω limitado de classe C^2 temos que $u \in H^2(\Omega)$. Portanto, $\gamma_1 u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$. Assim,

$$\langle \gamma_1 u, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_\Gamma \gamma_1 u \underbrace{\gamma_0 v}_{=0\ em\ \Gamma_0} = 0.$$

Logo, $\int_{\Gamma_1} \gamma_1 u \gamma_0 v = 0,\ \forall v \in V$, ou melhor, $\gamma_1 u = 0$ em $L^2(\Gamma_1)$, ou ainda, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ q.s. em Γ_1, o que conclui a prova.

Como $V = \{u \in H^1(\Omega);\ \gamma_0 u = 0 \text{ sobre } \Gamma_0\}$ é denso em $H = L^2(\Omega)$ e o domínio do operador $-\Delta$, definido pela terna $\{V, H; (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)}\}$, é o conjunto $\{u \in V \cap H^2(\Omega);$ $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\big\}$, resulta do Teorema Espectral que o conjunto $\{u \in V \cap H^2(\Omega);$ $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Gamma_1\big\}$ é denso em V.

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução

Nos resultados a seguir, omitiremos eventualmente, as variáveis das funções de modo a não sobrecarregarmos a notação.

Seja Ω um domínio limitado e estrelado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, com fronteira suave $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ tal que $med(\Gamma_0) > 0$, Γ_0 e Γ_1 são fechados e disjuntos; e seja ν o vetor normal unitário exterior à Γ. Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^\rho u \text{ em } \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \text{ em } \Gamma_0 \times (0, +\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u_t) = 0 \text{ em } \Gamma_1 \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u^0(x)\ ,\ u_t(x,0) = u^1(x)\ ,\ x \in \Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

A energia associada ao problema (2.1) vem dada pela seguinte expressão

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx - \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx. \tag{2.2}$$

No que segue utilizamos as seguintes notações:

$$(u,v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad (u,v)_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} u(x)v(x)d\Gamma,$$

$$\|u\|_p^p = \int_\Omega |u(x)|^p dx, \quad \|u\|_{\Gamma_1,p}^p = \int_{\Gamma_1} |u(x)|^p d\Gamma.$$

Logo, considerando o funcional J definido em (1.22), temos

$$E(t) \ = \ \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 + J(u(t)) \geq J(u(t))$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - k_0\|\nabla u(t)\|_2^{\rho+2} = f(\|\nabla u(t)\|_2),
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

onde k_0 e $f(\lambda)$ são definidas em (1.20) e (1.23), respectivamente.

Agora, se considerarmos

$$
\|\nabla u(t)\|_2 < \lambda_1, \tag{2.4}
$$

onde λ_1 é definido em (1.24), então de (2.3) obtemos

$$
\begin{aligned}
E(t) &\geq J(u(t)) \geq \|\nabla u(t)\|_2^2\left[\frac{1}{2} - k_0\|\nabla u(t)\|_2^{\rho}\right] \\
&> \|\nabla u(t)\|_2^2\left[\frac{1}{2} - \lambda_1^{\rho}k_0\right] = \|\nabla u(t)\|_2^2\left[\frac{1}{2} - \frac{k_0}{k_0(\rho+2)}\right] \\
&= \|\nabla u(t)\|_2^2\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho+2}\right].
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Assim, se (2.4) é satisfeito obtemos de (2.5) que

$$
J(t) \geq 0 \ (J(t) = 0 \text{ se, e somente se, } u = 0) \text{ e } \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2(\rho+2)}{\rho}E(t). \tag{2.6}
$$

Consideremos V e H definidos em (1.9), isto é, $V = \{v \in H^1(\Omega);\ v = 0 \text{ em } \Gamma_0\}$ e $H = \{v \in V; \Delta v \in L^2(\Omega)\}$. Suponhamos que

$$
0 < \rho < \frac{2}{n-2} \text{ se } n \geq 3\ ,\ \rho > 0 \text{ se } n = 1, 2 \tag{$H.1$}
$$

e consideremos as seguintes hipóteses:

$(A.1)$ - *Hipóteses sobre* β: Considere $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não decrescente de classe C^1 tal que $\beta(0) = 0$ e suponha que exista uma função g estritamente crescente, ímpar e de classe C^1 em $[-1, 1]$ tal que

$$
|g(s)| \leq |\beta(s)| \leq |g^{-1}(s)| \text{ se } |s| \leq 1, \tag{$H.2$}
$$

$$
C_1|s| \leq |\beta(s)| \leq C_2|s| \text{ se } |s| > 1, \tag{$H.3$}
$$

onde g^{-1} denota a inversa da função g e C_1 e C_2 são constantes positivas.

Consideremos, ainda, que exista $C_3 > 0$ tal que

$$|\beta'(s)| \leq C_3(|s|^\rho + 1) \quad \text{se } |s| > 1. \tag{$H.4$}$$

$(A.2)$ - *Hipóteses sobre as condições iniciais*: Assuma que

$$\{u^0, u^1\} \in \left(V \cap H^2(\Omega)\right) \times V \tag{$H.5$}$$

verificando a condição de compatibilidade

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \beta(u^1) = 0 \text{ em } \Gamma_1. \tag{$H.6$}$$

Além disso, suponha que

$$E(0) < d \quad \text{e} \quad \|\nabla u^0\|_2 < \lambda_1, \tag{$H.7$}$$

onde λ_1 e d estão definidos em (1.24) e (1.25), respectivamente.

Para efeito de ilustração daremos alguns exemplos de função g que serão utilizados em $(H.2)$ e que interferem diretamente nas taxas de decaimento que serão obtidas no capítulo 3.

Exemplo 2.0.1 *Consideremos $g(y) = Cy^p$, para algum $p > 1$ e C uma constante positiva. Se β satisfaz*

$$g(y) = Cy^p \leq \beta(y) \leq g^{-1}(y) = C'y^{\frac{1}{p}}, \quad \textit{para } 0 \leq y \leq 1,$$

então

$$E(t) \leq C(1+t)^{-\frac{2}{p}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.7}$$

Com efeito, notemos que g satisfaz as hipóteses dadas em $(A.1)$. Além disso, como $g'(0) = 0$ e $\dfrac{g(y)}{y}$ é crescente em $[0,1]$ então aplicando os resultados do Capítulo 3 obtemos que

$$\begin{aligned} E(t) &\leq C\left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2 = C\left[\left(\frac{1}{t}\right)^{\frac{1}{p}}\right]^2 \\ &= Ct^{-\frac{2}{p}}, \quad \forall t \geq 1. \end{aligned}$$

Como $t \geq \dfrac{1}{2}(t+1)$ *para todo* $t \geq 1$ *temos que existe* $C_1 > 0$ *tal que*

$$E(t) \leq C_1(1+t)^{-\frac{2}{p}}, \quad \forall t \geq 1,$$

da continuidade de g^{-1} *provamos (2.7).*

Exemplo 2.0.2 *Consideremos* $g(y) = e^{-\frac{1}{y^p}}$, *para algum* $p > 0$. *Se* β *satisfaz*

$$g(y) = e^{-\frac{1}{y^p}} \leq \beta(y) \leq g^{-1}(y) = \left(\frac{-1}{\ln y}\right), \quad \text{para } 0 \leq y \leq 1,$$

então aplicando os resultados do Capítulo 3 obtemos

$$E(t) \leq \frac{C}{(\ln t)^{\frac{2}{p}}}, \quad \forall t \geq 2.$$

Nas seções que seguem, demonstraremos a existência e unicidade de solução para o problema (2.1) utilizando o método de Galerkin para a prova da existência. Os principais resultados vêm enunciados nos teoremas abaixo, onde os espaços V e H estão definidos em (1.9)

Teorema 2.0.3 *Sob as hipóteses* $(A.1)$, $(A.2)$ *e* $(H.1)$ *o problema (2.1) possui uma única solução u na classe*

$$\begin{aligned} & u \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \ ; \ u_t \in L^\infty_{loc}(0,\infty;V) \\ & u_{tt} \in L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)) \ , \ \|\nabla u(t)\|_2 < \lambda_1 \end{aligned} \tag{2.8}$$

para todo $t \geq 0$.

Proposição 2.0.4 *Sob as hipóteses* $(A.1)$, $(A.2)$ *e* $(H.1)$ *o problema (2.1) admite uma única solução u na classe*

$$u \in C^0_s(0,T;H) \cap C^1_s(0,T;V) \cap C^2_s(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T > 0.$$

Teorema 2.0.5 *Suponha que as hipóteses* $(A.1)$ *e* $(H.1)$ *sejam verificadas. Além disso, suponha que* $\{u^0, u^1\}$ *pertença a* $V \times L^2(\Omega)$ *e verifiquem*

$$\|\nabla u^0\|_2 < \lambda_1 \quad e \quad E(0) < d.$$

Então, o problema (2.1) possui uma única solução u na classe

$$u \in C^0([0,\infty);V) \cap C^1\left([0,\infty);L^2(\Omega)\right)$$

tal que $\|\nabla u(t)\|_2 < \lambda_1$ *para todo* $t \geq 0$.

No que segue usaremos u' para designar a derivada da função u em relação à variável t, ou seja, $u' = \dfrac{du}{dt} = u_t$.

2.1 Solução Regular

2.1.1 Existência de solução regular

Seja $\{w_\mu^*\}$ uma base de V. Desta base contruíremos uma base especial $\{w_\mu\}$, relativa ao problema (2.1), da seguinte forma:

Se u^0 e u^1 são linearmente independentes definimos $w_1 = u^0$, $w_2 = u^1$ e para w_i, $i \geq 3$, tomamos w_i vetores de $\{w_\mu^*\}$ de forma que sejam *l.i.* com u^0 e u^1. Se os vetores u^0 e u^1 são *l.d.* definimos $w_1 = u^0$ e os demais w_i, $i \geq 2$ são tomados como vetores de $\{w_\mu^*\}$ que sejam *l.i.* com u^0.

Seja,

$$V_m = [w_1, \ldots, w_m] \tag{2.9}$$

e consideremos o seguinte problema aproximado

$$\begin{cases} u_m(t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \gamma_{jm}(t) w_j \in V_m \\ (u_m''(t), w) + (\nabla u_m(t), \nabla w) + (\beta(u_m'(t)), w)_{\Gamma_1} = (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w), \\ \hfill \forall w \in V_m \\ u_m(0) = u^0 \quad , \quad u_m'(0) = u^1; \end{cases} \tag{2.10}$$

que por Carathéodory possui solução local em um intervalo $[0, t_m)$, onde u_m e u_m' são absolutamente contínuas e u_m'' existe quase sempre. A primeira estimativa à priori permitirá estender a solução à todo intervalo $[0, +\infty)$.

Primeira estimativa à priori:

Considerando $w = u'_m(t)$ em (2.10) temos

$$E'_m(t) = -\int_{\Gamma_1} \beta(u'_m(t))u'_m(t)d\Gamma \leq 0. \tag{2.11}$$

Com efeito, notemos inicialmente que são válidas as seguintes igualdades no sentido das distribuições:

$$\int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 \tag{2.12}$$

$$\int_\Omega \nabla u_m(t)\nabla u'_m(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 \tag{2.13}$$

$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx = \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \tag{2.14}$$

De fato, seja $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}
\left\langle \int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)dx, \theta \right\rangle &= \int_0^{t_m}\int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)\theta(t)dxdt \\
&= \int_\Omega\int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(u'_m(t))^2]\theta(t)dtdx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \left\{ (u'_m(x,t))^2\,\theta(t)\Big|_{t=0}^{t=t_m} - \int_0^{t_m} (u'_m(x,t))^2\,\theta'(t)dt \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_\Omega (u'_m(x,t))^2\,\theta'(t)dxdt = -\frac{1}{2}\left\langle \|u'_m(t)\|_2^2, \theta' \right\rangle \\
&= \left\langle \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2, \theta \right\rangle,
\end{aligned}$$

o que mostra a igualdade (2.12).

Utilizando o mesmo raciocínio feito para provar (2.12) decorre que

$$\int_\Omega \nabla u_m(t)\nabla u'_m(t)dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2,$$

provando (2.13).

Finalmente, seja $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Logo, pelo Teorema de Fubini,

$$\left\langle \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx, \theta \right\rangle = \int_0^{t_m}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx\theta(t)dt$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_\Omega \int_0^{t_m} \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(x,t)|^{\rho+2}\theta(t)dtdx \\
&= \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \left\{ (u_m'(t))^{\rho+2}\theta(t)\Big|_{t=0}^{t=t_m} \right.\\
&- \left. \int_0^{t_m} |u_m(x,t)|^{\rho+2}\theta'(t)dt \right\} dx \\
&= -\frac{1}{\rho+2}\int_0^{t_m}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\theta'(t)dxdt \\
&= \left\langle \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}, \theta \right\rangle,
\end{aligned}
$$

o que prova (2.14).

No entanto, de (2.2) segue que

$$E_m'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \tag{2.15}$$

Do problema aproximado (2.10), (2.12)-(2.15) segue que

$$E_m'(t) = -\int_{\Gamma_1} \beta(u_m'(t))u_m'(t)d\Gamma \leq 0,$$

o que implica que $E_m(t)$ é não crescente.

O próximo Lema dará uma importante regra para estender a solução à todo intervalo $(0, +\infty)$.

Lema 2.1.1 *Suponha que* $(H.5)$ *e* $(H.7)$ *sejam verificadas. Então,*

$$\|\nabla u_m(t)\|_2 < \lambda_1, \ \forall t \in [0, t_m). \tag{2.16}$$

Demonstração: Observemos, inicialmente, que decorre de (2.3) que

$$E_m(t) \geq \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 - k_0\|\nabla u_m(t)\|_2^{\rho+2} = f(\|\nabla u_m(t)\|_2), \tag{2.17}$$

onde f é definida em (1.23).

Notemos que f é crescente para $0 < \lambda < \lambda_1$ e decrescente para $\lambda > \lambda_1$. Com efeito, temos que

$$f'(\lambda) = \lambda - (\rho+2)k_0\lambda^{\rho+1} = \lambda\left(1 - k_0(\rho+2)\lambda^\rho\right), \ \forall \lambda > 0$$

e $f'(\lambda_1) = 0$.

Assim, se $0 < \lambda < \lambda_1$ temos

$$f'(\lambda) = \lambda\,(1 - k_0(\rho+2)\lambda^{\rho}) > \lambda\,(1 - k_0(\rho+2)\lambda_1^{\rho}) = 0.$$

Portanto, $f'(\lambda) > 0$, ou seja, f é crescente para $0 < \lambda < \lambda_1$.

Agora, se $\lambda > \lambda_1$ temos

$$f'(\lambda) = \lambda\,(1 - k_0(\rho+2)\lambda^{\rho}) < \lambda\,(1 - k_0(\rho+2)\lambda_1^{\rho}) = 0.$$

Portanto, $f'(\lambda) < 0$, ou seja, f é decrescente para $\lambda > \lambda_1$.

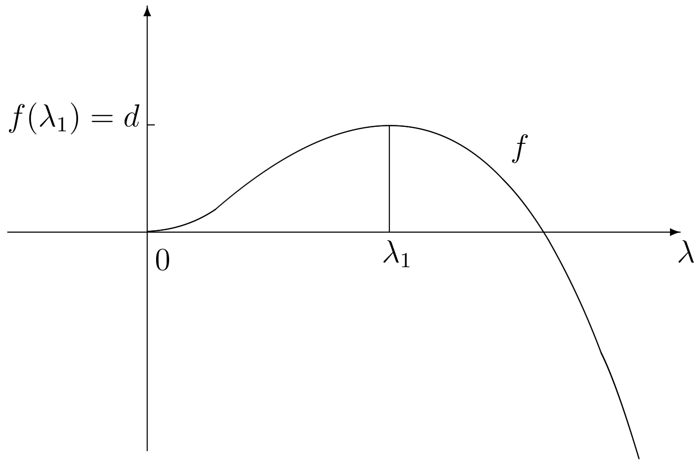

Figura 2.1: Gráfico da função f.

Além disso, como $f(\lambda_1) = d$ temos que $f(\lambda) \to -\infty$ quando $\lambda \to +\infty$.

De fato, para cada $M < 0$, tomando

$$\lambda_M = \text{máx}\left\{1 + \lambda_1, \left[\left(\frac{1}{2} - M\right)\frac{1}{k_0}\right]^{\frac{1}{\rho}}\right\}$$

temos que

$$f(\lambda) < M,\ \lambda > \lambda_M,$$

pois sendo $\lambda > \lambda_M$ decorre que $\lambda > \lambda_M > \lambda_1$ e, então, pelo fato de f ser decrescente

$$\begin{aligned} f(\lambda) &< f(\lambda_M) \\ &= (\lambda_M)^2 \left(\frac{1}{2} - k_0 \lambda_M^\rho \right) \\ &< (\lambda_M)^2 \left(\frac{1}{2} - k_0 \left(\frac{1}{2} - M \right) \frac{1}{k_0} \right) \\ &= (\lambda_M)^2 M < M; \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é proveniente do fato que $M < 0$ e $\lambda_M > 1$.

Então, sendo $E_0 := E_m(0) < d$, existem $\lambda_2' < \lambda_1 < \lambda_2$ tais que $f(\lambda_2) = f(\lambda_2') = E_0$.

Com efeito, sendo $f(\|\nabla u^0\|_2) \leq E_0 < d = f(\lambda_1)$, como f é contínua, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe λ_2' com $\|\nabla u^0\|_2 \leq \lambda_2' < \lambda_1$ tal que $f(\lambda_2') = E_0$. Também, como $f(\lambda) \to -\infty$ quando $\lambda \to +\infty$, f é decrescente para $\lambda > \lambda_1$ e $f(\lambda_1) = d$ então, novamente pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $\lambda_2 > \lambda_1$ tal que $f(\lambda_2) = E_0$.

Por outro lado, de (2.11) decorre que $E_m(t)$ é não crescente para todo $t \in [0, t_m)$, ou seja,

$$E_m(t) \leq E_0, \quad \forall t \in [0, t_m). \tag{2.18}$$

Vamos mostrar que $\|\nabla u_m(t)\|_2 \leq \lambda_2'$ para todo $t \in [0, t_m)$, o que finaliza a prova do lema. Suponhamos, por absurdo, que $\|\nabla u_m(t_0)\|_2 > \lambda_2'$ para algum $0 < t_0 < t_m$. Da continuidade da norma $\|\nabla u(.)\|_2$ em V podemos supor que $\|\nabla u_m(t_0)\|_2 < \lambda_1$, pois caso contrário, se $\|\nabla u_m(t_0)\| \geq \lambda_1$, do fato que $\lambda_2' < \lambda_1$ segue que existe $\overline{t_0} \in (0, t_0)$ tal que $\lambda_2' < \|\nabla_m u(\overline{t_0})\| < \lambda_1$. Então, por (2.17) e do fato que f é crescente no intervalo $]0, \lambda_1[$,

$$E_m(t_0) \geq f(\|\nabla_m u(t_0)\|_2) > f(\lambda_2') = E_0$$

o que contradiz (2.18). Logo, $\|\nabla_m u(t)\|_2 \leq \lambda_2'$ para todo $t \in [0, t_m)$, o que prova o Lema.

$\blacksquare$

Considerando o resultado estabelecido acima, de (1.19), segue que

$$\|u_m(t)\|_{\rho+2} \leq B_1 \|\nabla u_m(t)\|_2 < B_1 \lambda_1$$

e, sendo Ω limitado, existe $c_1 > 0$ tal que

$$\|u_m(t)\|_2 \leq c_1 \|u_m(t)\|_{\rho+2} < B_1 \lambda_1 c_1 = C. \tag{2.19}$$

Portanto, como C independe de t e de m segue do corolário do Teorema de Caratheódory que para todo $m \in \mathbb{N}$, $u_m(t)$ pode prolongada a todo $[0, T]$. Além disso, $\|\nabla_m u(t)\|_2 \leq \lambda_2'$, $\forall t \in [0, T]$ e $\forall m \in \mathbb{N}$. Com efeito, segue do mesmo raciocínio feito anteriormente que se existisse $t_0 \in [0, T]$ tal que $\lambda_2' < \|\nabla u(t_0)\|_2 < \lambda_1$, então teríamos $E(t_0) > E(0)$, o que seria um absurdo!. Portanto,

$$\|u_m(t)\|_2 < C, \ \forall t \in [0, T]. \tag{2.20}$$

Retornemos ao problema aproximado considerando $w = u_m'(t)$. Então

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) + (\beta(u_m'(t)), u_m'(t))_{\Gamma_1} = (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} &\int_\Omega u_m''(t) u_m'(t) dx + \int_\Omega \nabla u_m(t) \nabla u_m'(t) dx \\ &+ \int_{\Gamma_1} \beta(u_m'(t)) u_m'(t) d\Gamma = \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) u_m'(t) dx. \end{aligned}$$

Logo, de (2.11), (2.12) e (2.14) obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Integrando (2.21) no intervalo $[0, t)$, com $t \in (0, T)$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u_m'(s)\|_2^2 ds &+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|\nabla u_m(s)\|_2^2 ds \\ &\leq \frac{1}{\rho+2}\int_0^t \frac{d}{ds}\|u_m(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2 - \|u_m'(0)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 - \|\nabla u_m(0)\|_2^2 \\ \leq \frac{2}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} - \frac{2}{\rho+2}\|u_m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{2}{\rho+2}\|u^0\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ \leq \|u^1\|_2^2 + \|\nabla u^0\|_2^2 + \frac{2}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}.\end{aligned} \tag{2.23}$$

De $(H.7)$, (1.19) e (2.23) resulta que

$$\begin{aligned}\|u_m'(t)\|_2^2 &\leq \|u_m'(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{2}{\rho+2}\|u^0\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &\leq \|u^1\|_2^2 + \lambda_1^2 + \frac{2}{\rho+2}B_1^{\rho+2}\|\nabla u_m(t)\|_2^{\rho+2}.\end{aligned}$$

Aplicando o Lema 2.1.1 obtemos

$$\|u_m'(t)\|_2^2 \leq \lambda_1^2 + \frac{2}{\rho+2}(B_1\lambda_1)^{\rho+2} + \|u^1\|_2^2, \quad \forall t \geq 0 \quad \text{e} \quad \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Segunda estimativa à priori:

Inicialmente, estimaremos $\|u_m''(0)\|_2$ utilizando a condição de compatibilidade dada em $(H.6)$ e a base especial $\{w_\mu\}$.

Considerando $t = 0$ e $w = u_m''(0)$ no problema aproximado (2.10) temos

$$\begin{aligned}\|u_m''(0)\|_2^2 &= -(\nabla u_m(0), \nabla u_m''(0)) - (\beta(u_m'(0)), u_m''(0))_{\Gamma_1} \\ &+ (|u_m(0)|^\rho u_m(0), u_m''(0)).\end{aligned} \tag{2.25}$$

De $(H.5)$ decorre que $u^0 \in H^2(\Omega)$ e como $u_m''(0) \in V$ vem pela fórmula de Green que

$$(\nabla u_m(0), \nabla u_m''(0)) = -\left(\Delta u^0, u_m''(0)\right) + \left(\frac{\partial u^0}{\partial \nu}, u_m''(0)\right)_{\Gamma_1}. \tag{2.26}$$

Substituindo (2.26) em (2.25) obtemos

$$\begin{aligned}\|u_m''(0)\|_2^2 &= (\Delta u_m(0), u_m''(0)) - \left(\frac{\partial u^0}{\partial \nu} + \beta(u^1), u_m''(0)\right)_{\Gamma_1} \\ &+ (|u_m(0)|^\rho u_m(0), u_m''(0)).\end{aligned}$$

De $(H.6)$ e da equação acima chegamos à

$$\|u''_m(0)\|_2^2 = \left(\Delta u^0, u''_m(0)\right) + \left(|u^0|^\rho u^0, u''_m(0)\right), \tag{2.27}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\|u''_m(0)\|_2^2 &\leq \int_\Omega \Delta u^0 u''_m(0)dx + \int_\Omega |u^0|^{\rho+1}|u''_m(0)|dx \\
&\leq \|\Delta u^0\|_2\|u''_m(0)\|_2 + \|u^0\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}\|u''_m(0)\|_2 \\
&= \left(\|\Delta u^0\|_2 + \|u^0\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}\right)\|u''_m(0)\|_2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u''_m(0)\|_2 \leq \|\Delta u^0\|_2 + \|u^0\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}. \tag{2.28}$$

Derivando o problema aproximado dado em (2.10) com respeito a t e considerando $w = u''_m(t)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u''_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u'_m(t)\|_2^2\right\} &+ \int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma \\
&\leq (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u'_m(t)||u''_m(t)|dx. \qquad (2.29)
\end{aligned}$$

Observemos que a integral $\int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma < +\infty$, pois sejam $A_1 = \{x \in \Gamma_1;\ |u'_m(x,s)| > 1\}$ e $A_2 = \{x \in \Gamma_1;\ |u'_m(x,s)| \leq 1\}$ então

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma &\leq \int_{A_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma + \int_{A_2} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma \\
&\leq C_3\int_{A_1} (u''_m(t))^2 d\Gamma + C_3\int_{A_1} |u'_m(t)|^\rho (u''_m(t))^2 d\Gamma \\
&+ M\int_{A_2} (u''_m(t))^2 d\Gamma,
\end{aligned}$$

onde $M = \text{máx}\{|\beta'(s)|, |s| \leq 1\}$.

Logo, pela Desigualdade de Hölder com $\frac{1}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} = 1$ vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma &\leq (C_3 + M)\int_{\Gamma_1} |u''_m(t)|^2 d\Gamma + C_3\int_{A_1} |u'_m(t)|^{\frac{2}{n-2}}|u''_m(t)|^2 d\Gamma \\
&\leq C_4\int_{\Gamma_1} |u''_m(t)|^2 d\Gamma \\
&+ C_3\left(\int_{\Gamma_1} |u'_m(t)|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\Gamma\right)^{\frac{1}{n-1}} \left(\int_{\Gamma_1} |u''_m(t)|^{\frac{2(n-1)}{n-2}} d\Gamma\right)^{\frac{n-2}{n-1}}.
\end{aligned}$$

No entanto, pelas imersões de Sobolev temos que $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma)$, $n > 2$ e $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^p(\Gamma)$, $1 \leq p < +\infty$, $n = 2$. Como $u'_m(t), u''_m(t) \in V$; $\forall m \in \mathbb{N}$ e $\forall t \in [0,T]$, decorre que $\gamma_0 u'_m(t), \gamma_0 u''_m(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e então:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t))(u''_m(t))^2 d\Gamma &\leq C_4 \|u_m(t)\|^2_{\Gamma_1,2} + C_5 \|u'_m(t)\|^{\frac{n-2}{2}}_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma_1)} \|u''_m(t)\|^2_{L^{\frac{2(n-1)}{n-2}}(\Gamma_1)} \\ &< +\infty \end{aligned}$$

Verifiquemos a expressão dada em (2.29).

Seja $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, então

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}(u''_m(t), w), \theta \right\rangle &= -\langle (u''_m(t), w), \theta' \rangle = (-\langle u''_m(t), \theta' \rangle, w) \\ &= (\langle u'''_m(t), \theta \rangle, w) = \langle (u'''_m(t), w), \theta \rangle, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dt}(u''_m(t), w) = (u'''_m(t), w) \quad \text{em } \mathcal{D}'(0,T).$$

Como $(u''_m(t), w) \in L^2(0,T)$ temos que $\dfrac{d}{dt}(u''_m(t), w) \in H^{-1}(0,T)$ e, conseqüentemente, $(u'''_m(t), w) \in H^{-1}(0,T)$.Logo,

$$\frac{d}{dt}(u''_m(t), w) = (u'''_m(t), w) \quad \text{em } H^{-1}(0,T). \tag{2.30}$$

Analogamente, provamos que

$$\frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w) = (\nabla u'_m(t), \nabla w). \tag{2.31}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta(u'_m(t)), w\right)_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} \beta'(u'_m(t)) u''_m(t) w \, d\Gamma. \tag{2.32}$$

Resta-nos calcular $\dfrac{d}{dt}\left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w\right)$.

Considere $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $F'(\lambda) = (\rho+1)|\lambda|^\rho$.

De fato, notemos inicialmente que para todo $\lambda \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \rho|\lambda|^{\rho-1} \frac{d}{d\lambda}\left(|\lambda|\right)\lambda + |\lambda|^\rho = \rho|\lambda|^{\rho-1} \frac{d}{d\lambda}\left(\sqrt{\lambda^2}\right)\lambda \\ &= \rho|\lambda|^{\rho-1} \frac{1}{2} \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda^2}} \lambda + |\lambda|^\rho = \rho \frac{|\lambda|^{\rho-1}\lambda^2}{|\lambda|} + |\lambda|^\rho \\ &= (\rho+1)|\lambda|^\rho. \end{aligned}$$

Para $\lambda = 0$, notemos que sendo

$$F(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\rho \lambda, & \lambda \geq 0 \\ (-\lambda)^\rho \lambda, & \lambda < 0. \end{cases}$$

então

$$F'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \begin{cases} \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{h^\rho h}{h} = 0 \\ \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{(-h)^\rho h}{h} = 0 \end{cases},$$

ou seja, $F'(0) = 0$. O que conclui a prova de que $F'(\lambda) = (\rho + 1)|\lambda|^\rho$.

Assim,

$$((F \circ u_m)(t))' = F'(u_m(t))u_m'(t) = (\rho + 1)|u_m(t)|^\rho u_m'(t). \tag{2.33}$$

Logo, se $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, temos pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt} \left(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w \right), \theta \right\rangle &= -\left\langle (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w), \theta' \right\rangle \\
&= -\int_0^T \int_\Omega F(u_m(t)) w \theta'(t) dx dt \\
&= -\int_\Omega \int_0^T F(u_m(t)) w \theta'(t) dt dx \\
&= -\int_\Omega \Big\{ F(u_m(t)) w \theta(t)|_0^T \\
&- \int_0^T (F \circ u_m)'(t) w \theta(t) dt \Big\} dx \\
&= \int_\Omega \int_0^T (\rho + 1)|u_m(t)|^\rho u_m'(t) w \theta(t) dt dx \\
&= \int_0^T \int_\Omega (\rho + 1)|u_m(t)|^\rho u_m'(t) w dx \theta(t) dt \\
&= \left\langle (\rho + 1) \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) w dx, \theta \right\rangle.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w) = (\rho + 1) \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) w dx. \tag{2.34}$$

Assim, derivando o problema aproximado (2.10) em relação à t, de (2.30)-(2.32) e (2.34) obtemos

$$(u_m'''(t), w) \quad + \quad (\nabla u_m'(t), \nabla w) + \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(t)) u_m''(t) w d\Gamma$$

$$= \quad (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m'(t) w dx. \tag{2.35}$$

Considerando $w = u_m''(t)$ em (2.35) temos

$$\begin{aligned}(u_m'''(t), u_m''(t)) \quad &+ \quad (\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) + \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(t))(u_m''(t))^2 d\Gamma \\ &\leq \quad (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m'(t)||u_m''(t)| dx. \end{aligned} \tag{2.36}$$

Utilizando o mesmo argumento utilizado na prova de (2.12) obtemos

$$(u_m'''(t), u_m''(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m''(t)\|_2^2 \tag{2.37}$$

e

$$(\nabla u_m'(t), \nabla u_m''(t)) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m'(t)\|_2^2. \tag{2.38}$$

Substituindo (2.37) e (2.38) em (2.36) resulta (2.29).

O próximo passo é analisar o termo do lado direito da desiguladade dada em (2.29).

Estimativa para $I_1 := (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho |u_m'(t)||u_m''(t)| dx.$

Notemos que $u_m(t), u_m'(t), u_m''(t) \in V$, e como $V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ temos

$$|u_m(t)|^\rho \in L^{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}(\Omega),\ |u_m'(t)| \in L^{2(\rho+1)}(\Omega) \text{ e } |u_m''(t)| \in L^2(\Omega). \tag{2.39}$$

Como $\dfrac{\rho}{2(\rho+1)} + \dfrac{1}{2(\rho+1)} + \dfrac{1}{2} = 1$ pela desigualdade de Hölder generalizada obtemos

$$|I_1| \leq (\rho+1)\|u_m(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho \|u_m'(t)\|_{2(\rho+1)} \|u_m''(t)\|_2. \tag{2.40}$$

De (1.18) temos que existe $B_1 > 0$ tal que

$$\|u\|_{2\rho+2} \leq B_1 \|\nabla u\|_2,\ \forall u \in V, \tag{2.41}$$

e, portanto, existe $k_1 = B_1^2(\rho+1)$ tal que

$$|I_1| \leq k_1 \|\nabla u_m(t)\|_2^\rho \|\nabla u_m'(t)\|_2 \|u_m''(t)\|_2. \tag{2.42}$$

Pelo lema 2.1.1 temos que $\|\nabla u_m(t)\|_2^\rho < \lambda_1^\rho$ e como

$$\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \|u_m''(t)\|_2^2 \geq 2\|\nabla u_m'(t)\|_2 \|u_m''(t)\|_2,$$

então existe uma constante $k_2 > 0$ independente de $t \in [0,T]$ e m tal que

$$|I_1| \leq k_2 \left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \|u_m''(t)\|_2^2 \right). \tag{2.43}$$

De (2.29) e (2.43) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left\{ \frac{1}{2}\|u_m''(t)\|_2^2 \right. &+ \left. \frac{1}{2}\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 \right\} + \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(t))(u_m''(t))^2 d\Gamma \\ &\leq k_2 \left(\|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + \|u_m''(t)\|_2^2 \right). \end{aligned}$$

Integrando a última equação sobre $(0,t)$, $t \in [0,T)$ e de (2.28) resulta que

$$\begin{aligned} \|u_m''(t)\|_2^2 &+ \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(s))(u_m''(s))^2 d\Gamma ds \\ &\leq \|u_m''(0)\|_2^2 + \|\nabla u_m'(0)\|_2^2 + 2k_2 \int_0^t \left(\|\nabla u_m'(s)\|_2^2 + \|u_m''(s)\|_2^2 \right) ds \\ &\leq \left(\|\Delta u^0\|_2 + \|u^0\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \right)^2 + \|\nabla u^1\|_2^2 \\ &+ 2k_2 \int_0^t \left(\|\nabla u_m'(s)\|_2^2 + \|u_m''(s)\|_2^2 \right) ds. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Sendo β não decrescente então $\beta'(s) \geq 0$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Assim

$$\int_0^s \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(\xi))(u_m''(\xi))^2 d\Gamma d\xi \geq 0 \tag{2.45}$$

e, portanto, de (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} \|u_m''(t)\|_2^2 &+ \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(s))(u_m''(s))^2 d\Gamma ds \\ &\leq \left(\|\Delta u^0\|_2 + \|u^0\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \right)^2 + \|\nabla u^1\|_2^2 \\ &+ 2k_2 \int_0^t \left[\|u_m''(s)\|_2^2 + \|\nabla u_m'(s)\|_2^2 \right. \\ &+ \left. 2\int_0^s \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(\xi))(u_m''(\xi))^2 d\Gamma d\xi \right] ds. \end{aligned} \tag{2.46}$$

Aplicando o Lema de Gronwall em (2.46) segue que

$$\|u_m''(t)\|_2^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_2^2 + 2\int_0^t \int_{\Gamma_1} \beta'(u_m'(s))(u_m''(s))^2 d\Gamma ds \leq L, \tag{2.47}$$

onde L é uma constante positiva independente de m e $t \in [0,T]$.

De (2.47) temos que $u'_m \in L^\infty(0,T;V)$, como a aplicação traço $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ é contínua segue que $\gamma_0 u'_m(t) \in L^2(\Gamma_1)$. Assim,

$$\|u'_m(t)\|_{L^2(\Gamma_1)} = \|u'_m(t)\|_{L^2(\Gamma)} \leq b_1 \|u'_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \leq b_2 \|\nabla u'_m(t)\|_2,$$

onde b_1 e b_2 são constantes positivas independentes de m e t. Portanto,

$$\int_0^t \|u'_m(s)\|^2_{\Gamma_1,2} ds \leq L_1, \tag{2.48}$$

com $L_1 > 0$ independente de m e t.

Por outro lado, das hipóteses $(H.2)$, $(H.3)$ e tomando $A_1 = \{x \in \Gamma_1;\ |u'_m(x,s)| > 1\}$, $A_2 = \{x \in \Gamma_1;\ |u'_m(x,s)| < 1\}$ segue que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |\beta(u'_m(x,s))|^2 d\Gamma &= \int_{A_1} |\beta(u'_m(x,s))|^2 d\Gamma + \int_{A_2} |\beta(u'_m(x,s))|^2 d\Gamma \\ &\leq C_2^2 \int_{A_1} |u'_m(x,s)|^2 d\Gamma + \int_{A_2} |g^{-1}(u'_m(x,s))|^2 d\Gamma, \end{aligned}$$

onde C_2 é a constante definida em $(H.3)$.

Como g^{-1} é contínua e A_2 é compacto então existe $M_{A_2} > 0$ tal que $|g^{-1}(u'_m(x,s))| \leq M_{A_2}$. Substituindo na expressão acima resulta que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} |\beta(u'_m(x,s))|^2 d\Gamma &\leq C_2^2 \int_{\Gamma_1} |u'_m(x,s)|^2 d\Gamma + M_{A_2}^2 .med(A_2) \\ &\leq C_3 \|\nabla u'_m(s)\|_2^2 + M_{A_2}^2 .med(A_2) \\ &\leq C_3 L + M_{A_2}^2 .med(A_2), \end{aligned}$$

onde $C_3 > 0$ e L é dado em (2.47). Disto segue que existe $L_2 > 0$ tal que

$$\int_0^t \|\beta(u'_m(s))\|^2_{\Gamma_1,2} ds \leq L_2, \tag{2.49}$$

qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$.

Das 1ª e 2ª estimativas à priori, de (2.16), (2.48) e (2.49) podemos extrair uma subseqüência de (u_m) que de agora em diante também denotaremos por (u_m) e uma função $u : \Omega \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco* em} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty;V); \tag{2.50}$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{fraco* em} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty;V); \tag{2.51}$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{fraco* em} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)); \tag{2.52}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fraco em} \quad L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)); \tag{2.53}$$

$$\beta(u'_m) \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em} \quad L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.54}$$

Notemos que $V \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ e V é reflexivo.

Com efeito, desde que $V \subset H^1(\Omega)$ e $H^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$ resulta a primeira afirmação acima. Além disso, V é reflexivo posto que V é um espaço de Hilbert.

Como $L^2(\Omega)$ também é reflexivo então, definindo para cada $T>0$,

$$W = \left\{u;\ u \in L^2(0,T;V),\ u' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\right\}$$

com a norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2(0,T;V)} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

resulta de (2.50) e (2.51) que

$$(u_m) \text{ é limitada em } W. \tag{2.55}$$

Logo, pelo teorema de Aubin-Lions obtemos uma subseqüência de (u_m) tal que

$$u_m \to u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.56}$$

e, conseqüentemente,

$$u_m \to u \quad \text{quase sempre em } \Omega\times]0,T[,\ \forall T>0. \tag{2.57}$$

Portanto, da continuidade da função $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda$, decorre que

$$|u_m|^\rho u_m \to |u|^\rho u \quad \text{quase sempre em } \Omega \times [0,T],\ \forall T>0. \tag{2.58}$$

Pelo Lema de Lions, temos:

$$|u_m|^\rho u_m \rightharpoonup |u|^\rho u \quad \text{fracamente em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega)). \tag{2.59}$$

As convergências (2.50)-(2.54) e (2.59) permitem-nos passar o limite no problema aproximado (2.10), donde resulta para $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), w_j)\theta(t)dt &+ \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\chi, w_j)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), w_j)\,\theta(t)dt, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{2.60}$$

Da totalidade do conjunto $\{w_j,\ j \in \mathbb{N}\}$ em V segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), v)\theta(t)dt &+ \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (\chi, v)_{\Gamma_1}\theta(t)dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), v)\,\theta(t)dt;\ \forall v \in V \text{ e } \theta \in \mathcal{D}(0,T). \end{aligned} \tag{2.61}$$

Considerando $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (2.61) obtemos:

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega u''(x,t)v(x)\theta(t)dxdt &- \int_0^T \langle \Delta u(t) v\rangle_{H^{-1}(\Omega), H_0^1(\Omega)}\theta(t)dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^\rho u(x,t)v(x)\theta(t)dxdt, \end{aligned} \tag{2.62}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Assim, pela totalidade do conjunto $\{v\theta;\ v \in \mathcal{D}(\Omega),\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ segue que

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)). \tag{2.63}$$

Como $u'', |u|^\rho u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$, temos que $\Delta u \in L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega))$. Logo,

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad L^\infty_{loc}(0,\infty; L^2(\Omega)). \tag{2.64}$$

De (2.64) obtemos, para todo $T > 0$ e $h \in \{v.\theta;\ v \in V, \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$, que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), h(t))dt &+ \int_0^T (-\Delta u(t), h(t))dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), h(t))dt. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Aplicando a fórmula de Green generalizada[1] em (2.65), segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),h(t))dt &+ \int_0^T (\nabla u(t),\nabla h(t))dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, h(t)\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),h(t))dt,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t),h(t))dt &+ \int_0^T (\nabla u(t),\nabla h(t))dt - \int_0^T \left\langle \frac{\partial u}{\partial \nu}, h(t)\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),h(t))dt. \qquad (2.66)\end{aligned}$$

Por outro lado, para cada $t \in (0,T)$, $\chi(t) \in L^2(\Gamma_1)$ e $h(t) \in V \subset H^1(\Omega)$, ou seja, $\chi(t) \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ e $\gamma_0 h(t) \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. Logo, substituindo $h(x,t) = v(x)\theta(t)$ em (2.66) resulta de (2.61) que [2]

$$\int_0^T \left\langle \frac{\partial u(t)}{\partial \nu}, S(t)\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} dt = \int_0^T \langle \chi(t), S(t)\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} dt,$$

para todo $S \in \mathcal{D}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$.

Isto é,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \chi = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \qquad (2.67)$$

Como $\chi \in L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1))$, temos que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1))$ e

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + \chi = 0 \quad \text{em} \quad L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \qquad (2.68)$$

No que segue, nosso objetivo é mostrar que $\chi = \beta(u')$. Com efeito, considerando $w = u_m$ no problema aproximado (2.10) e integrando a expressão sobre $(0,T)$, resulta que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m(t),u_m(t))dt &+ \int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_2^2 dt + \int_0^T (\beta(u'_m(t)),u_m(t))_{\Gamma_1} dt \\ &= \int_0^T (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m(t))\, dt. \qquad (2.69)\end{aligned}$$

[1]pois $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ e $h \in H^1(\Omega)$.

[2]pois $\gamma_0 h \in \mathcal{D}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ e $\{(\gamma_0 v)\theta;\ v \in V, \theta \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$.

De (2.56) temos que (u_m) possui uma subseqüência tal que

$$u_m \to u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.70}$$

Analogamente, de (2.51), (2.52) e aplicando o teorema de Aubin-Lions concluímos que

$$u'_m \to u' \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.71}$$

Pelo lema (2.1.1), temos que

$$\begin{aligned} \|u_m(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} &\leq \|u_m(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_1\|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\leq C_2\|\nabla u_m(t)\|_2 \leq C_2\lambda_1, \end{aligned} \tag{2.72}$$

e, como $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Gamma_1)$, de (2.47) obtemos

$$\|u'_m(t)\|_{\Gamma_1,2} \leq C_3\|u'_m(t)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C_4\|\nabla u'_m(t)\|_2 \leq C_4 L, \tag{2.73}$$

onde L é a constante dada em (2.47).

De (2.72) e (2.73) obtemos a existência de uma subseqüência tal que

$$u_m \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } L^2_{loc}(0,\infty;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)); \tag{2.74}$$

$$u'_m \rightharpoonup u' \quad \text{fracamente em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.75}$$

Definindo

$$\overline{W} = \left\{u;\ u \in L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1));\ u' \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))\right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{\overline{W}} = \|u\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))} + \|u'\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))},$$

segue de (2.74) e (2.75) que

$$(u_m) \quad \text{é limitada em } W. \tag{2.76}$$

Assim, graças ao teorema de Aubin-Lions temos que

$$u_m \rightarrow u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.77}$$

Agora, das convergências em (2.52), (2.54), (2.59), (2.70) e (2.77) podemos passar o limite em (2.69) e, pela Proposição 1.4.3, obtemos:

$$\begin{aligned} \lim_{m\rightarrow+\infty}\int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_2^2 dt &= -\int_0^T (u''(t),u(t))dt - \int_0^T (\chi(t),u(t))_{\Gamma_1} dt \\ &+ \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),u(t))dt. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Por outro lado, como $u \in L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Omega))$ então de (2.64) obtemos

$$\int_0^T (u''(t),u(t))dt - \int_0^T (\Delta u(t),u(t))dt = \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),u(t))dt. \tag{2.79}$$

Aplicando a fórmula de Green generalizada em (2.79) e observando que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, decorre que

$$\begin{aligned} \int_0^T (u''(t),u(t))dt &+ \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt - \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(t),u(t)\right)_{\Gamma_1} \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),u(t))dt \end{aligned}$$

e, de (2.68), segue que

$$\begin{aligned} \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt &= -\int_0^T (u''(t),u(t))dt - \int_0^T (\chi(t),u(t))_{\Gamma_1} \\ &+ \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t),u(t))dt. \end{aligned} \tag{2.80}$$

Portanto, de (2.78) e (2.80) concluímos

$$\lim_{m\rightarrow+\infty}\int_0^T \|\nabla u_m(t)\|_2^2 dt \rightarrow \int_0^T \|\nabla u(t)\|_2^2 dt. \tag{2.81}$$

Logo, pelo Lema 2.1.1 e de (2.81) chegamos à

$$\nabla u_m \rightarrow \nabla u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.82}$$

Considerando $w = u'_m$ no problema aproximado (2.10) e integrando sobre $(0, T)$ segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m(t), u'_m(t))dt &+ \int_0^T (\nabla u_m(t), \nabla u'_m(t))dt + \int_0^T (\beta(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} dt \\ &= \int_0^t (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u'_m(t))dt. \end{aligned} \tag{2.83}$$

Das convergências (2.51), (2.52), (2.53), (2.71), (2.82) e pela Proposição 1.4.3 segue que

$$\begin{aligned}\lim_{m\to+\infty} \int_0^T (\beta(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} dt &= -\int_0^T (u''(t), u'(t))dt - \int_0^T (\nabla u(t), \nabla u'(t))dt \\ &+ \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), u'(t))dt. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Por outro lado, de (2.64) e do fato de $u' \in L^2_{loc}(0, \infty; L^2(\Omega))$ temos que

$$\int_0^T (u''(t), u'(t))dt - \int_0^T (\Delta u(t), u'(t))dt = \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), u'(t))dt \tag{2.85}$$

e, aplicando a fórmula de Green generalizada, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''(t), u'(t))dt &+ \int_0^T (\nabla u(t), \nabla u'(t))dt - \int_0^T \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(t), u'(t)\right)_{\Gamma_1} dt \\ &= \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), u'(t))dt. \end{aligned} \tag{2.86}$$

Substituindo (2.68) em (2.86) obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^T (\chi(t), u'(t))_{\Gamma_1} dt &= -\int_0^T (u''(t), u'(t))dt - \int_0^T (\nabla u(t), \nabla u'(t))dt \\ &+ \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), u'(t))dt. \end{aligned} \tag{2.87}$$

De (2.84) e (2.87) segue que

$$\lim_{m\to+\infty} \int_0^T (\beta(u'_m(t)), u'_m(t))dt = \int_0^T (\chi(t), u'(t))dt. \tag{2.88}$$

Como β é uma função monótona não decrescente temos

$$\int_0^T (\beta(u'_m(t)) - \beta(\psi), u'_m(t) - \psi)_{\Gamma_1} dt \geq 0, \quad \forall \psi \in L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)) \tag{2.89}$$

e, portanto,

$$\int_0^T (\beta(u'_m(t)),\psi)_{\Gamma_1} dt + \int_0^T (\beta(\psi), u'_m(t)-\psi)_{\Gamma_1} dt \leq \int_0^T (\beta(u'_m(t)), u'_m(t))_{\Gamma_1} dt. \quad (2.90)$$

Aplicando as convergências (2.53), (2.54) e (2.88) chegamos à

$$\int_0^T (\chi(t) - \beta(\psi), u'(t) - \psi)_{\Gamma_1} dt \geq 0 \quad (2.91)$$

e isto implica que

$$\chi = \beta(u') \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (2.92)$$

Com efeito, mostremos, inicialmente, que

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(u' - \lambda v) v d\Gamma dt \to \int_0^T \int_{\Gamma_1} \beta(u') v d\Gamma dt, \quad \text{quando } \lambda \to 0,$$
$$\forall v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \quad (2.93)$$

De fato, como

$$u'(x,t) - \lambda v(x,t) \to u'(x,t) \quad \text{quando } \lambda \to 0, q.s. \text{ em } \Omega \times]0,T[,\ T > 0$$

e β é contínua, então

$$\beta(u'(x,t) - \lambda v(x,t)) \to \beta(u'(x,t)) \quad q.s. \text{ em } \Omega\times]0,T[, \text{ quando } \lambda \to 0. \quad (2.94)$$

Agora, das hipóteses $(H.2)$ e $(H.3)$ segue que

$$|\beta(u'(x,t) - \lambda v(x,t))| \leq \begin{cases} |g^{-1}(u'(x,t) - \lambda v(x,t))|; & |u'(x,t) - \lambda v(x,t)| \leq 1 \\ C_2|u'(x,t) - \lambda v(x,t)|; & |u'(x,t) - \lambda v(x,t)| > 1 \end{cases}. \quad (2.95)$$

Mas, como g^{-1} é uma função crescente então se $|u'(x,t) - \lambda v(x,t)| \leq 1$ temos que $|g^{-1}(u'(x,t) - \lambda v(x,t))| \leq g^{-1}(1)$. Logo, de (2.95)

$$|\beta(u'(x,t) - \lambda v(x,t))| \leq \begin{cases} |g^{-1}(1)|; & |u'(x,t) - \lambda v(x,t)| \leq 1 \\ C_2|u'(x,t) - \lambda v(x,t)|; & |u'(x,t) - \lambda v(x,t)| > 1 \end{cases},$$

ou seja,

$$|\beta(u'(x,t) - \lambda v(x,t))| \leq \underbrace{g^{-1}(1) + C_2|u'(x,t)| + C_2|v(x,t)|}_{\in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) = L^2(\Gamma_1\times]0,T[)}, \quad \lambda < 1, \quad (2.96)$$

posto que $g^{-1}(1) > 0$.

De (2.94), (2.96) e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue (2.93).

Consideremos, $\psi = u' - \lambda v$, onde $v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Segue de (2.91) que

$$\lambda \int_0^T (\chi - \beta(u' - \lambda v), v)_{\Gamma_1}\, dt \geq 0.$$

Assim,

(i) $\displaystyle\int_0^T (\chi - \beta(u' - \lambda v), v)_{\Gamma_1} dt \geq 0$ se $\lambda > 0$. Tomando o limite quando $\lambda \to 0^+$ vem de (2.93) que

$$\int_0^T (\chi - \beta(u'), v)_{\Gamma_1}\, dt \geq 0, \quad \forall v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.97}$$

(ii) $\displaystyle\int_0^T (\chi - \beta(u' - \lambda v), v)_{\Gamma_1} dt \leq 0$ se $\lambda < 0$. Tomando o limite quando $\lambda \to 0^-$ decorre de (2.93) que

$$\int_0^T (\chi - \beta(u'), v)_{\Gamma_1}\, dt \leq 0, \quad \forall v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.98}$$

De (2.97) e (2.98) resulta

$$\int_0^T (\chi - \beta(u'), v)_{\Gamma_1}\, dt = 0, \quad \forall v \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)).$$

Tomando $v = \chi - \beta(u')$ segue (2.92).

2.1.2 Unicidade de solução regular

Sejam u_1 e u_2 duas soluções do problema (2.1). Então, $z = u_1 - u_2$ verifica

$$(z''(t), w) - (\Delta z(t), w) = (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w), \quad \forall w \in V. \tag{2.99}$$

Aplicando a fórmula de Green, (2.68) e lembrando que $\chi = \beta(u')$, resulta que

$$\begin{aligned}(z''(t), w) &+ (\nabla z(t), \nabla w) + (\beta(u_1') - \beta(u_2'), w)_{\Gamma_1} \\ &= (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w)\,, \quad \forall w \in V.\end{aligned} \tag{2.100}$$

Também, temos que

$$||u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2| \leq k(\rho)\left(|u_1|^\rho + |u_2|^\rho\right)|z(t)|. \tag{2.101}$$

Com efeito, como vimos anteriormente a função $F(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, é tal que $F'(\lambda) = (\rho+1)|\lambda|^\rho$. Logo, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ existe, em virtude do Teorema do Valor Médio, $\xi \in]\alpha, \beta[$ tal que

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq |F'(\xi)||\beta - \alpha|,$$

ou ainda,

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq (\rho+1)|\xi|^\rho |\beta - \alpha|. \tag{2.102}$$

Seja $\theta \in (0,1)$ tal que satisfaça

$$\xi = (1-\theta)\alpha + \theta\beta = \alpha + \theta(\beta - \alpha). \tag{2.103}$$

Tomando $\alpha = u_1(x,t)$ e $\beta = u_2(x,t)$, resulta de (2.102) e (2.103) que

$$\begin{aligned}
||u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2| &\leq (\rho+1)\,|u_1 + (u_2 - u_1)\theta|^\rho\,|u_1 - u_2| \\
&\leq (\rho+1)\left\{|u_1| + |u_2| + |u_1|\right\}^\rho |z| \\
&\leq (\rho+1)\left\{2|u_1| + 2|u_2|\right\}^\rho |z| \\
&= (\rho+1)2^\rho \left\{|u_1| + |u_2|\right\}^\rho |z| \\
&\leq k(\rho)\left(|u_1|^\rho + |u_2|^\rho\right)|z|,
\end{aligned}$$

o que prova (2.101).

Substituindo $w = z'(t)$ em (2.100), observando que β é uma função não decrescente e considerando a desiguladade dada em (2.101) resulta

$$\begin{aligned}
(z''(t), z'(t)) + (\nabla z(t), \nabla z'(t)) &\leq \left|\int_\Omega (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2) z'(t)\,dx\right| \\
&\leq k(\rho)\int_\Omega \left(|u_1|^\rho + |u_2|^\rho\right)|z(t)||z'(t)|\,dx,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|_2^2\right\}\leq k(\rho)\int_\Omega\left(|u_1|^\rho+|u_2|^\rho\right)|z(t)||z'(t)|dx. \tag{2.104}$$

Como $u_1(t),u_2(t),z(t),z'(t)\in V$ e $V\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)\hookrightarrow L^2(\Omega)$ segue que $|u_1(t)|^\rho$, $|u_2(t)|^\rho\in L^{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}(\Omega)$, $|z(t)|\in L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ e $z'(t)\in L^2(\Omega)$. Da relação $\dfrac{\rho}{2(\rho+1)}+\dfrac{1}{2(\rho+1)}+\dfrac{1}{2}=1$ e aplicando a desigualdade de Hölder generalizada na desigualdade (2.104), temos que existe $k_1(\rho)>0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|_2^2\right\}\leq k_1(\rho)\left(\|u_1(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho+\|u_2(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho\right)\|z(t)\|_{2(\rho+1)}\|z'(t)\|_2. \tag{2.105}$$

Integrando a inequação dada em (2.105) em $(0,t)$, $t\in(0,T)$, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z(t)\|_2^2&\leq\frac{1}{2}\|z'(0)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z(0)\|_2^2\\+\ k_1(\rho)\int_0^t&\left(\|u_1(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho+\|u_2(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho\right)\|z(s)\|_{2(\rho+1)}\|z'(s)\|_2ds.\end{aligned} \tag{2.106}$$

Da imersão $V\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ segue que existe $C>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|u_1(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho\leq C\|\nabla u_1(s)\|_2^\rho\quad,\quad&\|u_2(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho\leq C\|\nabla u_2(s)\|_2^\rho\\ \text{e}\quad&\|z(s)\|_{2(\rho+1)}\leq C\|\nabla z(s)\|_2\end{aligned} \tag{2.107}$$

e aplicando o Lema 2.1.1 resulta que

$$\|u_1(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho+\|u_2(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho\leq 2C\lambda_1^\rho. \tag{2.108}$$

Assim, substituindo (2.107) e (2.108) em (2.106), segue que existe uma constante $k_2(\rho)>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|z'(t)\|_2^2+\|\nabla z(t)\|_2^2&\leq\|z'(0)\|_2^2+\|\nabla z(0)\|_2^2\\&+\ k_2(\rho)\int_0^t\|\nabla z(s)\|_2\|z'(s)\|_2ds.\end{aligned} \tag{2.109}$$

Portanto, de (2.109) existe uma constante $k_3(\rho)>0$ tal que

$$\|z'(t)\|_2^2+\|\nabla z(t)\|_2^2\leq\|z'(0)\|_2^2+\|\nabla z(0)\|_2^2+k_3(\rho)\int_0^t\left(\|\nabla z(s)\|_2^2+\|z'(s)\|_2^2\right)ds. \tag{2.110}$$

Como u_1 e u_2 são soluções do problema (2.1) então $u_1(0) = u_2(0) = u_0$ e $u_1'(0) = u_2'(0) = u_1$, tem-se que

$$\nabla z(0) = 0 \quad \text{e} \quad z'(0) = 0. \tag{2.111}$$

Logo, aplicando (2.110), (2.111) e do Lema de Gronwall resulta que

$$\|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2 \leq 0.$$

Donde segue que

$$\|\nabla z(t)\|_2 = 0,$$

o que mostra a unicidade de solução e finaliza a demonstração do Teorema 2.0.3.

2.1.3 Prova da Proposição 2.0.4

Para demonstrar a proposição 2.0.4, notemos inicialmente que de (2.8) para todo $T > 0$, temos

$$u \in L^2(0,T;V) \quad \text{e} \quad u' \in L^2(0,T;V),$$

ou seja,

$$u \in H^1(0,T;V). \tag{2.112}$$

Pelo Teorema de imersão de Sobolev decorre que

$$u \in C^0\left([0,T];V\right), \tag{2.113}$$

Além disso, de (2.8) temos que $u \in L^\infty(0,T;V)$ e de (2.64) segue que $\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Lembrando que $H = \{u \in V;\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$, obtemos que

$$u \in L^\infty(0,T;H). \tag{2.114}$$

Assim, de (2.113) e (2.114) obtemos

$$u \in L^\infty(0,T;H) \cap C^0([0,T];V),$$

o que implica pelo Lema 1.1.19 que

$$u \in C_s(0,T;H). \tag{2.115}$$

De maneira análoga, de (2.8) decorre que

$$u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega)) \cap L^\infty(0,T;V), \tag{2.116}$$

e, novamente, pelo Lema 1.1.19 segue que

$$u' \in C_s(0,T;V). \tag{2.117}$$

Por outro lado, a aplicação $-\Delta : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ é contínua, assim por (2.113) ,

$$-\Delta u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.118}$$

Mostremos, agora, que $|u|^\rho u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Com efeito, temos de (2.59) que $|u|^\rho u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, para cada $t \in (0,T)$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{d}{dt}(|u|^\rho u) = (\rho+1)|u|^\rho u' : & H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & (\rho+1)\int_\Omega |u|^\rho u' v dx \end{array}$$

é linear e contínua.

Além disso, pela desigualdade de Hölder generalizada

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \frac{d}{dt}(|u|^\rho u), v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} \right| &\leq (\rho+1)\|u\|_{2(\rho+1)}^\rho \|u'\|_2 \|v\|_{2(\rho+1)} \\ &\leq C(\rho+1)\|u\|_V^\rho \|u'\|_2 \|v\|_{H_0^1(\Omega)}, \end{aligned}$$

onde C é uma constante proveniente das imersões

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow V \hookrightarrow H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega).$$

Portanto,

$$\left\| \frac{d}{dt}(|u|^\rho u) \right\|_{H^{-1}(\Omega)} \leq C(\rho+1)\|u\|_V^\rho \|u'\|_2. \tag{2.119}$$

Logo, de (2.113), (2.116) e (2.119) segue que

$$\frac{d}{dt}(|u|^\rho u) \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \subset L^2(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Do exposto acima e pelo teorema de imersão de Sobolev obtemos que

$$|u|^\rho u \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)), \tag{2.120}$$

De (2.63),(2.118) e (2.120) vem que

$$u'' \in C^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.121}$$

Logo, de (2.52), (2.121) e do Lema 1.1.19 concluímos que

$$u'' \in C_s^0(0,T; L^2(\Omega)),$$

o que conclui a prova da proposição.

2.2 Solução Fraca

2.2.1 Existência de solução fraca

No intuito de obter soluções fracas usaremos argumentos de densidade. Assuma que

$$\left\{u^0, u^1\right\} \in V \times L^2(\Omega)$$

verifiquem

$$\|\nabla u^0\|_2 < \lambda_1 \quad \text{e} \quad E(0) < d. \tag{2.122}$$

Então,

$$\|\nabla u^0\|_2 = \lambda_1 - \delta_1 \quad \text{e} \quad E(0) = d - \delta_2 \tag{2.123}$$

para $\delta_i,\ i = 1, 2$ números positivos.

Como $D(-\Delta) = \left\{ v \in V \cap H^2(\Omega);\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \text{ em } \Gamma_1 \right\}$ é denso em V, conforme seção 1.5, e $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ segue que existe

$$\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\} \subset D(-\Delta) \times H_0^1(\Omega) \tag{2.124}$$

tal que

$$u_\mu^0 \to u^0 \text{ em } V \quad \text{e} \quad u_\mu^1 \to u^1 \text{ em } L^2(\Omega); \quad \text{quando } \mu \to \infty. \tag{2.125}$$

De (2.123) e (2.124) $\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\}$ satisfaz a condição de compatibilidade $(H.6)$ e, além disso,

$$\|\nabla u_\mu^0\|_2 < \lambda_1 \ ,\ E_\mu(0) < d; \quad \text{para } \mu \geq \mu_0. \tag{2.126}$$

Para cada $\mu \geq \mu_0$ seja u_μ a solução regular do problema (2.1) com a condição inicial $\left\{u_\mu^0, u_\mu^1\right\}$, isto é, para todo $T > 0$

$$u_\mu \in C_s^0(0,T;H) \cap C_s^1(0,T;V) \cap C_s^2(0,T;L^2(\Omega))$$

e verifica

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\mu'' - \Delta u_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \quad q.s. \text{ em } \Omega \times (0,+\infty), \\ u_\mu = 0 \quad \text{em } \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u_\mu}{\partial \nu} + \beta(u_\mu') = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \times (0,+\infty), \\ u_\mu(0) = u_\mu^0 \quad ; \quad u_\mu'(0) = u_\mu^1. \end{array} \right. \tag{2.127}$$

Por outro lado, como u_μ'' e $|u_\mu|^\rho u_\mu$ pertencem a $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ então a primeira igualdade em (2.127) verifica

$$u_\mu'' - \Delta u_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Como $u_\mu' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, compondo a equação acima com u_μ' segue que

$$(u_\mu'', u_\mu') - (\Delta u_\mu, u_\mu') = (|u_\mu|^\rho u_\mu, u_\mu'). \tag{2.128}$$

Aplicando a fórmula de Green generalizada obtemos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu'(t)\|_2^2 \ &+\ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 - \left\langle \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu}(t), u_\mu'(t) \right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &=\ \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \end{aligned}$$

Da terceira equação de (2.127) resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_\mu(t)\|_2^2 \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 + \left\langle \beta(u'_\mu(t)), u'_\mu(t)\right\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \quad \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\end{aligned}$$

e, como $\beta(u'_\mu(t)) \in L^2(\Gamma_1)$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_\mu(t)\|_2^2 \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 + \big(\beta(u'_\mu(t)), u'_\mu(t)\big)_{\Gamma_1} \\ &= \quad \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}.\end{aligned} \tag{2.129}$$

Considerando os mesmos argumentos que foram utilizados para provar (2.24), obtemos a existência de uma constante $C_3 > 0$ tal que

$$\|u'_\mu(t)\|_2^2 + \|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 \leq C_3. \tag{2.130}$$

De maneira análoga à prova de (2.48), concluímos, para $\mu \geq \mu_0$, que existe uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\int_0^t \|u'_\mu(t)\|_{\Gamma_1,2}^2 ds \leq C_4 \quad ; \quad \int_0^t \|\beta(u'_\mu)\|_{\Gamma_1,2}^2 ds \leq C_4. \tag{2.131}$$

Definindo

$$z_{\mu,\sigma} = u_\mu - u_\sigma \ ; \quad \mu,\sigma \in \mathbb{N},\ \mu,\sigma \geq \mu_0$$

temos que $z'_{\mu,\sigma} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e, como em (2.128), obtemos

$$(z''_{\mu,\sigma}, z'_{\mu,\sigma}) - (\Delta z_{\mu,\sigma}, z'_{\mu,\sigma}) = \left(|u_\mu|^\rho u_\mu - |u_\sigma|^\rho u_\sigma, z'_{\mu,\sigma}\right). \tag{2.132}$$

De (2.132) resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 + \big(\beta(u'_\mu(t)) - \beta(u'_\sigma(t)), z'_{\mu,\sigma}(t)\big)_{\Gamma_1} \\ &\leq \quad \int_\Omega \left||u_\mu|^\rho u_\mu - |u_\sigma|^\rho u_\sigma\right| \left|z'_{\mu,\sigma}(t)\right| dx.\end{aligned} \tag{2.133}$$

Como β é monótona, segue de (2.101) que existe $k_3(\rho) > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\right\} \leq k_3(\rho)\int_\Omega \left(|u_\mu(t)|^\rho + |u_\sigma(t)|^\rho\right)|z_{\mu,\sigma}(t)||z'_{\mu,\sigma}(t)|dx, \tag{2.134}$$

e, da desiguladade de Hölder generalizada resulta que

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\right\}$$
$$\leq k_3(\rho)\left(\||u_\mu(t)|^\rho+|u_\sigma(t)|^\rho\|_{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}\right)\|z_{\mu,\sigma}(t)\|_{2(\rho+1)}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2.$$

Da imersão $V\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ temos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\right\}$$
$$\leq k_3(\rho)\left(\|u_\mu(t)\|^\rho_{2(\rho+1)}+\|u_\sigma(t)\|^\rho_{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}\right)\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2. \tag{2.135}$$

Integrando (2.135) sobre $(0,t)$ obtemos

$$\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2+\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\leq\|z'_{\mu,\sigma}(0)\|_2^2+\|\nabla z_{\mu,\sigma}(0)\|_2^2$$
$$+2k_3(\rho)\int_0^t\left(\|u_\mu(s)\|^\rho_{2(\rho+1)}+\|u_\sigma(s)\|^\rho_{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}\right)\|\nabla z_{\mu,\sigma}(s)\|_2\|z'_{\mu,\sigma}(s)\|_2ds. \tag{2.136}$$

De maneira análoga a que foi feito em (2.108) concluímos de (2.136) que existe $k_4>0$ tal que

$$\begin{aligned}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2+\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 &\leq \|z'_{\mu,\sigma}(0)\|_2^2+\|\nabla z_{\mu,\sigma}(0)\|_2^2\\ &+ k_4\int_0^t\left(\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2+\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\right)dt.\end{aligned} \tag{2.137}$$

Aplicando o Lema de Gronwall em (2.137) resulta que para todo $t\in[0,T]$ temos

$$\begin{aligned}\|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|_2^2 &+ \|\nabla u_\mu(t)-\nabla u_\sigma(t)\|_2^2\\ &\leq C(\rho,T)\left(\|u^1_\mu-u^1_\sigma\|_2^2+\|\nabla u^0_\mu-\nabla u^0_\sigma\|_2^2\right),\end{aligned} \tag{2.138}$$

onde $C(\rho,T)$ é uma constante positiva independente de $\mu,\sigma\in\mathbb{N}$.

Logo,

$$\begin{aligned}\sup_{t\in[0,T]}\|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|_2^2 &+ \sup_{t\in[0,T]}\|\nabla u_\mu(t)-\nabla u_\sigma(t)\|_2^2\\ &\leq C(\rho,T)\left(\|u^1_\mu-u^1_\sigma\|_2^2+\|\nabla u^0_\mu-\nabla u^0_\sigma\|_2^2\right).\end{aligned} \tag{2.139}$$

De (2.125) e (2.139) temos que (u_μ) é uma seqüência de Cauchy em $C^0([0,T];V)$ e (u'_μ) é uma seqüência de Cauchy em $C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Da completude de $C^0([0,T];V)$ e $C^0([0,T];L^2(\Omega))$ segue que

$$u_\mu \to u \quad \text{fortemente em } C^0([0,T];V) \tag{2.140}$$

e

$$u'_\mu \to u' \quad \text{fortemente em } C^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.141}$$

De (2.131) temos

$$u'_\mu \rightharpoonup u' \quad \text{fracamente em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)) \tag{2.142}$$

e

$$\beta(u'_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{fracamente em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.143}$$

Também, por (2.140), temos que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \to |u|^\rho u \quad q.s. \text{ em } \Omega\times[0,T] \tag{2.144}$$

e existe $C>0$ tal que

$$\||u_\mu|^\rho u_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \le C. \tag{2.145}$$

Assim, de (2.144), (2.145) e pelo Lema de Lions segue que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u \quad \text{fracamente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.146}$$

Das convergências anteriores resulta que o problema (2.1) possui uma solução fraca. Mais precisamente, obtemos

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em } C^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.147}$$

Com efeito, temos da 1ª equação de (2.127) que

$$u''_\mu - \Delta u_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \quad \forall T>0. \tag{2.148}$$

Sejam $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então, de (2.148) decorre que

$$(u''_\mu, \theta\xi) - (\Delta u_\mu, \theta\xi) = (|u_\mu|^\rho u_\mu, \theta\xi). \tag{2.149}$$

Agora, pelo Teorema de Fubini, segue que

$$(u''_\mu, \theta\xi) = (\langle u''_\mu, \theta\rangle_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}, \xi) = (-\langle u'_\mu, \theta'\rangle_{\mathcal{D}'\mathcal{D}}, \xi) = -(u'_\mu, \theta'\xi), \tag{2.150}$$

e, pela fórmula de Green generalizada, obtemos

$$(\Delta u_\mu, \theta\xi) = -(\nabla u_\mu, \theta\nabla\xi). \tag{2.151}$$

Substituindo (2.150) e (2.151) em (2.149) resulta

$$-(u'_\mu, \theta'\xi) + (\nabla u_\mu, \theta\nabla\xi) = (|u_\mu|^\rho u_m u, \theta\xi). \tag{2.152}$$

Tomando limite $\mu \to \infty$ em (2.152) de (2.140), (2.141) e (2.146) segue que

$$-(u', \theta'\xi) + (\nabla u, \theta\nabla\xi) = (|u|^\rho u, \theta\xi). \tag{2.153}$$

Aplicando a Proposição 1.1.16 resulta que $u'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$-(u', \theta'\xi)_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} = \langle u'', \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}.$$

Substituido a expressão acima em (2.153) e graças a igualdade

$$\begin{aligned}
(\nabla u, \theta\nabla\xi) &= \langle \nabla u, \theta\nabla\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\right\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} \\
&= -\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \theta\xi\right)_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} \\
&= -\langle \Delta u, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}.
\end{aligned}$$

obtemos

$$\langle u'' - \Delta u, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} = \langle |u|^\rho u, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}.$$

Da totalidade do conjunto $\{\theta\xi;\ \theta \in \mathcal{D}(0,T),\ \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ obtemos

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)). \tag{2.154}$$

Agora, sendo $u \in C^0([0,T];V)$, concluímos como anteriormente que $\Delta u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$ e $|u|^\rho u \in C^0([0,T];H^{-1}(\Omega))$.

Do exposto acima e de (2.154) conluímos a prova de (2.147).

Da igualdade (2.147) e fazendo o uso da integral de Bochner em $H^{-1}(\Omega)$ obtemos

$$u'(t) - u'(0) = \int_0^t \Delta u(s)ds + \int_0^t |u(s)|^\rho u(s)ds. \tag{2.155}$$

Definindo $z(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)ds$ segue que

$$z \in C^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.156}$$

Com efeito, como $u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ então $z(t) = \displaystyle\int_0^t u(s)ds \in L^2(\Omega)$ e, considerando $t_n \to t$ em $[0,T]$,temos pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\|z(t_n) - z(t)\|_2^2 &= \int_\Omega \left|\int_t^{t_n} u(s)ds\right|^2 dx \\
&\leq \int_\Omega \left[\left|\int_t^{t_n} |u(s)|^2 ds\right|^{\frac{1}{2}} \left|\int_t^{t_n} 1ds\right|^{\frac{1}{2}}\right]^2 dx \\
&= \int_\Omega \left(\int_t^{t_n} |u(s)|^2 ds\right) |t_n - t| dx \\
&\leq \|u\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} |t_n - t| \to 0, \text{ quando } n \to \infty
\end{aligned}$$

o que prova (2.156).

De maneira análoga prova-se que $z \in C^0([0,T];H^1(\Omega))$.

Assim, de (2.155) podemos escrever

$$u'(t) - u'(0) = \Delta z(t) + \int_0^t |u(s)|^\rho u(s)ds \quad \text{em } H^{-1}(\Omega).$$

De (2.141) temos que $u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e de (2.140) temos que $|u|^\rho u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Portanto, de maneira análoga ao que foi feito para obtermos

(2.156), decorre que $\displaystyle\int_0^t |u(s)|^\rho u(s) \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$. Conseqüentemente, $\Delta z \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Do exposto acima e do fato que $u \in C^0([0,T];H^1(\Omega))$ obtemos

$$z \in C^0([0,T];\mathcal{H}^1(\Omega)), \tag{2.157}$$

onde $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega);\ \Delta v \in L^2(\Omega)\}$.

Portanto $z \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))$ e pela Proposição 1.1.16 resulta que $z' = u \in H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))$. Donde segue pela subseção 1.2.2

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)).$$

Agora, definindo $z_\mu(t) = \displaystyle\int_0^t u_\mu(s)ds$ temos que

$$\Delta z_\mu \to \Delta z \quad \text{em} \quad C^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.158}$$

De fato, de (2.148) e fazendo o uso da integral de Bochner temos

$$u'_\mu(t) - u'_\mu(0) = \int_0^t \Delta u_\mu(s)ds + \int_0^t |u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s)ds,$$

ou ainda,

$$u'_\mu(t) - u'_\mu(0) = \Delta z_\mu(t) + \int_0^t |u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s)ds.$$

Notemos que de (2.140) temos que, para todo $t \in [0,T]$,

$$\begin{aligned} \big| \|u_\mu(t)\|_{2(\rho+1)} - \|u(t)\|_{2(\rho+1)} \big| &\leq \|u_\mu(t) - u(t)\|_{2(\rho+1)} \\ &\leq C\|u_\mu(t) - u(t)\|_V \\ &\leq C\|u_\mu - u\|_{C^0([0,T];V)} \to 0,\ \mu \to +\infty. \end{aligned}$$

Logo, para todo $t \in [0,T]$ e uniformemente em t,

$$\|u_\mu(t)\|_{2(\rho+1)} \to \|u(t)\|_{2(\rho+1)},\ \mu \to +\infty.$$

Da convergência acima segue que

$$\begin{aligned}\left|\||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t)\|_2^2 - \||u(t)|^\rho u(t)\|_2^2\right| &= \left|\int_\Omega |u_\mu(t)|^{2(\rho+1)}dx - \int_\Omega |u(t)|^{2(\rho+1)}dx\right| \\ &= \left|\|u_\mu(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} - \|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}\right| \to 0,\ \mu \to +\infty,\end{aligned}$$

e, portanto, para todo $t \in [0,T]$,

$$\||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t)\|_2^2 \to \||u(t)|^\rho u(t)\|_2^2,\ \mu \to +\infty. \tag{2.159}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t) - |u(t)|^\rho u(t)\right|^2 dx \\ &\qquad = \left(|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t) - |u(t)|^\rho u(t), |u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t) - |u(t)|^\rho u(t)\right) \\ &\qquad = \||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t)\|_2^2 + \||u(t)|^\rho u(t)\|_2^2 - 2\left(|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), |u(t)|^\rho u(t)\right).\end{aligned}$$

De (2.146), de (2.159) e da igualdade acima obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \left||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t) - |u(t)|^\rho u(t)\right|^2 dx \\ &\quad \longrightarrow \||u(t)|^\rho u(t)\|_2^2 + \||u(t)|^\rho u(t)\|_2^2 - 2\left(|u(t)|^\rho u(t), |u(t)|^\rho u(t)\right) = 0,\end{aligned} \tag{2.160}$$

para todo $t \in [0,T]$.

Portanto,

$$\begin{aligned}&\left\|\int_0^t \left[|u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s)\right] ds\right\|_2 \\ &\qquad \le \int_0^T \||u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s)\|_2 ds \\ &\qquad = \int_0^T \left[\int_\Omega \left||u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s)\right|^2 dx\right]^{\frac{1}{2}} ds \\ &\qquad \le \left(\int_0^T ds\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega \left||u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s)\right|^2 dxds\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

De (2.160), da limitação da seqüência $\{u_\mu\}$ em $C^0([0,T];V)$ e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\int_0^T \int_\Omega \left||u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s)\right|^2 dxds \to 0,\ \mu \to +\infty. \tag{2.161}$$

De (2.140) e (2.161) concluímos que

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,T]} \|\Delta z_\mu(t) - \Delta z(t)\|_2 &= \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu'(t) - u_\mu'(0) - \int_0^t |u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s)ds \\
&- u'(t) + u'(0) + \int_0^t |u(s)|^\rho u(s)ds\|_2 \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu'(t) - u'(t)\|_2 + \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu'(0) - u'(0)\|_2 \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \| \int_0^t (|u_\mu(s)|^\rho u_\mu(s) - |u(s)|^\rho u(s))ds\|_2 \to 0, \mu \to +\infty,
\end{aligned}$$

o que prova (2.158).

Além disso, por (2.140) obtemos também que

$$z_\mu \to z \quad \text{em } C^0([0,T]; H^1(\Omega)). \tag{2.162}$$

Das convergências (2.158) e (2.162) obtemos

$$\begin{aligned}
\|z_\mu - z\|_{C^0([0,T];\mathcal{H}^1(\Omega))} &= \sup_{t\in[0,T]} \|z_\mu(t) - z(t)\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} \\
&\leq \sup_{t\in[0,T]} \|z_\mu(t) - z(t)\|_{H^1(\Omega)} \\
&+ \sup_{t\in[0,T]} \|\Delta z_\mu(t) - \Delta z(t)\|_2 \to 0; \quad \mu \to +\infty,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$z_\mu \to z \quad \text{em} \quad C^0([0,T]; \mathcal{H}^1(\Omega)), \tag{2.163}$$

Conseqüentemente,

$$z_\mu' \to z' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T; \mathcal{H}^1(\Omega)). \tag{2.164}$$

Com efeito, sejam $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\xi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned}
\langle z_\mu', \theta\xi\rangle_{H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),H_0^1(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} &= \langle z_\mu', \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} \\
&= \langle -z_\mu, \theta'\xi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} \\
&= -(z_\mu, \theta'\xi)_{L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} \\
&\underbrace{\longrightarrow}_{\mu\to\infty} -(z, \theta'\xi)_{L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} \\
&= \langle z', \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))} \\
&= \langle z', \theta\xi\rangle_{H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)),H_0^1(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Da totalidade do conjunto $\{\theta\xi;\ \theta \in \mathcal{D}(0,T),\ \xi \in \mathcal{H}^1(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))$ e da densidade desse último em $H_0^1(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega))$ resulta (2.164).

De (2.164) obtemos

$$u_\mu \rightarrow u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \tag{2.165}$$

e, portanto,

$$\beta(u'_\mu) = -\frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} \rightarrow -\frac{\partial u}{\partial \nu} \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)). \tag{2.166}$$

De (2.143) e (2.166) segue que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\chi \quad \text{em} \quad L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \tag{2.167}$$

De (2.141) temos que $u' \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e, portanto, pela Proposição 1.1.16 $u'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$.

Por (2.140) temos que $|u|^\rho u \in C^0([0,T];L^2(\Omega))$ e, conseqüentemente, $|u|^\rho u \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$. Logo, a igualdade (2.154) se dá em $H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$, isto é,

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.168}$$

Da igualdade (2.168) e de (2.167) obtemos

$$\begin{aligned} &\langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= (\nabla u, \nabla v)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} - \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}, \ \forall v \in H_0^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.169}$$

Com efeito, seja u_μ a solução do problema (2.127). Utilizando a fórmula de Green generalizada, com $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, $v \in V$, temos

$$-\int_0^T \int_\Omega \Delta u_\mu v\theta dxdt = \int_0^T \int_\Omega (\nabla u_\mu, \nabla v)\theta dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u_\mu}{\partial \nu} v\theta d\Gamma dt.$$

Tomando o limite $\mu \rightarrow +\infty$ na expressão acima, de (2.140), (2.143) e (2.166), segue que

$$\lim_{\mu\rightarrow\infty} -\int_0^T \int_\Omega \Delta u_\mu v\theta dxdt = \int_0^T \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\theta dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\theta d\Gamma dt. \tag{2.170}$$

Por outro lado, como u_μ é solução de (2.127) temos:

$$u''_\mu - \Delta u_\mu = |u_\mu|^\rho u_\mu \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)),$$

ou seja,

$$\int_0^T \int_\Omega u''_\mu v\theta dxdt - \int_0^T \int_\Omega \Delta u_\mu(v\theta)dxdt = \int_0^T \int_\Omega |u_\mu|^\rho u_\mu v\theta dxdt. \tag{2.171}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\infty} \int_0^T \int_\Omega u''_\mu v\theta dxdt &= \lim_{\mu\to\infty} - \int_0^T \int_\Omega u'_\mu v\theta' dxdt = - \int_0^T \int_\Omega u' v\theta' dxdt \\ &= \langle -u', v\theta' \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \langle u'', v\theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;L^2(\Omega))}\end{aligned}$$

e de (2.146)

$$\int_0^T \int_\Omega |u_\mu|^\rho u_\mu(v\theta)dxdt \to \int_0^T \int_\Omega |u|^\rho u(v\theta)dxdt.$$

Tomando limite $\mu \to \infty$ em (2.171) e das igualdades acima resulta:

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to\infty} - \int_0^T \int_\Omega \Delta u_\mu v\theta dxdt &= \int_0^T \int_\Omega |u|^\rho u(v\theta)dxdt - \langle u'', v\theta \rangle_{\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)),\mathcal{D}(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \langle |u|^\rho u - u'', v\theta \rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))} \\ &= \langle -\Delta u, v\theta \rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))}.\end{aligned} \tag{2.172}$$

De (2.170) e (2.172) segue que

$$\langle -\Delta u, v\theta \rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))} = \int_0^T \int_\Omega (\nabla u, \nabla v)\theta dxdt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\theta d\Gamma dt \tag{2.173}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in V$.

Como $\{v\theta;\ v \in V,\ \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;V)$ que é denso em $H_0^1(0,T;V)$ temos que (2.173) é válido para todo $v \in H_0^1(0,T;V)$ o que prova (2.169).

Por outro lado, da desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}(\nabla u, \nabla v)_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|\nabla v\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \|v\|_{L^2(0,T;V)}\end{aligned} \tag{2.174}$$

e

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \leq \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}.$$

Da continuidade da aplicação traço $\gamma_0 : L^2(0,T;V) \to L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1))$ segue que

$$\|v\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \leq C\|v\|_{L^2(0,T;V)} \tag{2.175}$$

e, portanto,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \nu}, v\right)_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \leq C \left\|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} \|v\|_{L^2(0,T;V)}. \tag{2.176}$$

De (2.169), (2.174) e (2.176) segue que

$$\left|\langle -\Delta u, v\rangle_{H^{-1}(0,T;L^2(\Omega)),H_0^1(0,T;L^2(\Omega))}\right| \leq C(u)\|v\|_{L^2(0,T;V)};\ \forall v \in H_0^1(0,T;V).$$

A desigualdade acima implica em $-\Delta u$ admitir uma extensão contínua a todo $L^2(0,T;V)$. Logo,

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad L^2_{loc}(0,\infty;V'). \tag{2.177}$$

Nosso objetivo agora é mostrar que $\chi = \beta(u')$. Assim, multiplicando a 1ª equação de (2.127) por u'_μ e integrando sobre Ω resulta

$$(u''_\mu, u'_\mu) + (-\Delta u_\mu, u'_\mu) = (|u_\mu|^\rho u_\mu, u'_\mu).$$

Aplicando a fórmula de Green e utilizando o fato que $\dfrac{\partial u_\mu}{\partial \nu} = -\beta(u'_\mu)$ na igualdade acima, obtemos

$$(u''_\mu, u'_\mu) + (\nabla u_\mu, \nabla u'_\mu) + (\beta(u'_\mu), u'_\mu)_{\Gamma_1} = (|u_\mu|^\rho u_\mu, u'_\mu),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_\mu(t)\|_2^2 \quad &+ \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 + (\beta(u'_\mu(t)), u'_\mu(t))_{\Gamma_1} \\ &= \quad \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}.\end{aligned} \tag{2.178}$$

Integrando (2.178) sobre $(0,t)$ chegamos à

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u_\mu'(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \int_0^t (\beta(u_\mu'(s)), u_\mu'(s))_{\Gamma_1} ds \\ &= \frac{1}{2}\|u_\mu^1\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_\mu^0\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u_\mu^0\|_{\rho+2}^{\rho+2}.\end{aligned}$$

Das convergências (2.125), (2.140) e (2.141) resulta

$$\begin{aligned}\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^t (\beta(u_\mu'(s)), u_\mu'(s))_{\Gamma_1} ds &= -\frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|u^1\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u^0\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \qquad (2.179)\end{aligned}$$

Por outro lado, como $u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ é uma solução fraca para o problema

$$\left\{\begin{array}{l} u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em } L^2_{loc}(0,\infty;V'), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \chi = 0 \quad \text{em} \quad L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u^0 \quad ; \quad u'(0) = u^1 \quad \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \qquad (2.180)$$

Então u verifica a seguinte identidade de energia:[3]

$$\begin{aligned}\int_0^t (\chi(s), u'(s))_{\Gamma_1} ds &= -\frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|u^1\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u^0\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \qquad (2.181)\end{aligned}$$

De (2.179) e (2.181) obtemos

$$\lim_{\mu\to+\infty}\int_0^t (\beta(u_\mu'(s)), u_\mu'(s))_{\Gamma_1} ds = \int_0^t (\chi(s), u'(s))_{\Gamma_1} ds.$$

Desta última convergência, de (2.142) e (2.143) temos, para toda $\psi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, que

$$\int_0^T (\chi(s) - \beta(\psi), u'(s) - \psi)_{\Gamma_1} dt \geq 0, \qquad (2.182)$$

[3]A prova da identidade de energia será dada no apêndice deste capítulo.

o que implica que

$$\chi = \beta(u'). \tag{2.183}$$

Observação 2.2.1 *As demonstrações de (2.182) e (2.183) são análogas àquelas feitas para provar (2.91) e (2.92), respectivamente.*

Do exposto anteriormente segue que u satisfaz:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em } L^2_{loc}(0,\infty;V'), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + \beta(u') = 0 \quad \text{em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)), \\ u(0) = u^0 \in V \quad ; \quad u'(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{array} \right. \tag{2.184}$$

com $\|\nabla u(t)\|_2 < \lambda_1$ para todo $t \geq 0$, pois $\|\nabla u_\mu(t)\|_2 < \lambda_1$; para todo $t \geq 0$ e todo $\mu \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Unicidade de solução fraca

Sejam u_1 e u_2 soluções de (2.184). Então $w = u_1 - u_2 \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ e verifica

$$\left| \begin{array}{l} w'' - \Delta w = \theta \quad \text{em } L^2_{loc}(0,T;V'), \\ w = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial w}{\partial \nu} + \chi = 0 \quad \text{em } L^2_{loc}(0,\infty;L^2(\Gamma_1)), \\ w(0) = 0 \quad ; \quad w'(0) = 0, \end{array} \right. \tag{2.185}$$

onde, $\chi = \beta(u_1') - \beta(u_2')$ e $\theta = |u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2$.

Como w satisfaz as hipóteses da identidade de energia dada em (2.181) resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t (\chi(s), w'(s))_{\Gamma_1} ds &= -\frac{1}{2}\|w'(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 \\ &+ \int_0^t (\theta(s), w'(s)) ds. \end{aligned} \tag{2.186}$$

Da monotonia de β, de (2.101) e aplicando a desigualdade de Hölder generalizada segue que

$$\frac{1}{2}\|w'(t)\|_2^2 \quad + \quad \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 = \int_0^t (|u_1(s)|^\rho u_1(s) - |u_2(s)|^\rho u_2(s), u_1'(s) - u_2'(s))\, ds$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_0^t (\beta(u_1'(s)) - \beta(u_2'(s)), u_1'(s) - u_2'(s))\, ds \\
&\leq C_1(\rho) \int_0^t \int_\Omega (|u_1(s)|^\rho + |u_2(s)|)\, |w(s)||w'(s)| dxds \\
&\leq C_1(\rho) \int_0^t \left(\|u_1(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho + \|u_2(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho \right) \|w(s)\|_{2(\rho+1)} \|w'(s)\|_2 ds.
\end{aligned}
$$

Como $\|\nabla u_i\|_2 < \lambda_1,\ i = 1, 2$ e $V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, concluímos que existe $C_2(\rho) > 0$ tal que

$$
\frac{1}{2}\|w'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla w(t)\|_2^2 \leq C_2(\rho) \int_0^t \left(\|w'(s)\|_2^2 + \|\nabla w(s)\|_2^2 \right) ds. \tag{2.187}
$$

Aplicando o Lema de Gronwall obtemos que

$$
\|w'(t)\|_2 = \|\nabla w(t)\|_2 = 0,
$$

o que mostra a unicidade de solução fraca.

2.3 Apêndice

Nesta seção faremos a prova da existência de solução para o problema aproximado (2.10) via teorema de Carathéodory e da identidade de enrgia dada em (2.181).

2.3.1 Existência de solução para o problema aproximado (2.10)

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por

$$
V_m = [w_1, \ldots, w_m]
$$

o espaço gerado pelos m primeiros vetores da base especial $\{w_\mu\}$ de V definida na seção 2.1.1.

Definamos

$$
u_m(t) \in V_m \quad \text{se, e somente se,} \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^m \gamma_{jm}(t) w_j.
$$

Obtemos, assim, o seguinte problema aproximado

$$(u''_m(t), w) + (\nabla u_m(t), \nabla w) + (\beta(u'_m(t)), w)_{\Gamma_1} - (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w) = 0$$

$$u_m(0) = u^0 \quad ; \quad u'_m(0) = u^1.$$

Agora, vamos obter um problema equivalente ao problema aproximado para que esteja nas condições do Teorema de Carathéodory.

Consideremos no problema aproximado $w = w_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então,

$$(u''_m(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) + (\beta(u'_m(t)), w_j)_{\Gamma_1} - (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = 0; \; j = 1, \ldots, m.$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \ldots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \ldots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \ldots & (w_m, w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma''_{1m}(t) \\ \gamma''_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma''_{mm}(t) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{bmatrix}$$
$$+ \begin{bmatrix} \int_{\Gamma_1} \beta(u'_m(t)) w_1 d\Gamma - \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_1 dx \\ \int_{\Gamma_1} \beta(u'_m(t)) w_2 d\Gamma - \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_2 dx \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \beta(u'_m(t)) w_m d\Gamma - \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_m dx \end{bmatrix} = 0.$$

Denotando

$$C := \begin{bmatrix} (w_1, w_1) & (w_2, w_1) & \ldots & (w_m, w_1) \\ (w_1, w_2) & (w_2, w_2) & \ldots & (w_m, w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1, w_m) & (w_2, w_m) & \ldots & (w_m, w_m) \end{bmatrix},$$

$$A := \begin{bmatrix} (\nabla w_1, \nabla w_1) & (\nabla w_2, \nabla w_1) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_1) \\ (\nabla w_1, \nabla w_2) & (\nabla w_2, \nabla w_2) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1, \nabla w_m) & (\nabla w_2, \nabla w_m) & \ldots & (\nabla w_m, \nabla w_m) \end{bmatrix},$$

$$B := \quad \left[\begin{array}{cccc} w_1 & w_2 & \dots & w_m \end{array} \right],$$

$$z(t) = \left[\begin{array}{c} \gamma_{1m}(t) \\ \gamma_{2m}(t) \\ \vdots \\ \gamma_{mm}(t) \end{array} \right],$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais oridnárias:

$$\left\{ \begin{array}{l} Cz''(t) + Az(t) + G(z'(t)) - H(z(t)) = 0 \\ z(0)z^0 \quad , \quad z'(0) = z^1, \end{array} \right. \tag{2.188}$$

onde

$$G(z'(t)) = \left[\begin{array}{c} \int_{\Gamma_1} \beta(Bz'(t))w_1 d\Gamma \\ \int_{\Gamma_1} \beta(Bz'(t))w_2 d\Gamma \\ \vdots \\ \int_{\Gamma_1} \beta(Bz'(t))w_m d\Gamma \end{array} \right], \; H(z(t)) = \left[\begin{array}{c} \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_1 dx \\ \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_2 dx \\ \vdots \\ \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_m dx \end{array} \right],$$

$$z^0 = \left[\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right] \quad \text{e} \quad z^1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right].$$

Inicialmente, vamos mostrar que a matriz $m \times m$ C é inversível.

Com efeito, sendo C uma matriz real e simétrica então C é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável, isto é, existe uma matriz M inversível tal que

$$D = M^{-1}CM$$

é uma matriz diagonal.

Logo, para mostrar que C é inversível basta mostrar que D o é, ou equivalentemente, que zero não é autovalor de D.

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de D. Então existe um vetor

$$v = \left(\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{array} \right)$$

não nulo do $\mathbb{R}^n$ tal que $Dv = 0$. Sendo M^{-1} uma matriz inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor CMv é igual a zero. Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

temos:

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_1) \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1 \right) \\ \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1 \right) \\ \vdots \\ \left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1 \right) \end{pmatrix}.$$

Logo, $\left(\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1 \right) = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$; donde resulta que o vetor $\alpha = \sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j$ é ortogonal à todo vetor de V_m. Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, o que implica que $\alpha = 0$.

Portanto, $\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j = 0$.

Mas, sendo $\{w_j\}$ uma base então temos que $\varphi_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$; ou seja, $\varphi = 0$. Desde que M é inversível e, portanto, a transformação linear definida por M é injetora resulta que $v = 0$ o que contradiz o fato de v ser autovetor de D e concluímos então que a matriz C é inversível.

Assim, de (2.188) podemos escrever

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}G(z'(t)) - C^{-1}H(z(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \quad , \quad z'(0) = z^1. \end{cases} \tag{2.189}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t) \quad , Y_2(t) = z'(t)$$

e

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
Y'(t) &= \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) - C^{-1}G(Y_2(t)) + C^{-1}H(Y_1(t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}G(Y_2(t)) + C^{-1}H(Y_2(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Donde temos o seguinte problema de valor inicial

$$
\left\{ \begin{array}{l} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}G(Y_2(t)) + C^{-1}H(Y_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} Y(t) \\ Y(0) = Y^0 \end{array} \right. . \quad (2.190)
$$

Provaremos a seguir que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema de Carathéodory. Consideremos a aplicação

$$
\begin{aligned}
&h : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}, \quad \text{definida por} \\
&h(t,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}G(y_2) + C^{-1}H(y_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -c^{-1}A & 0 \end{bmatrix} y, \qquad (2.191)
\end{aligned}
$$

onde $y = Y = (\xi_1, \ldots, \xi_m, \xi_{m+1}, \ldots, \xi_{2m})$, $y_1 = (\xi_1, \ldots, \xi_m)$ e $y_2 = (\xi_{m+1}, \ldots, \xi_{2m})$.

Inicialmente, vamos verificar que a aplicação h está nas condições de Carathéodory.

Com efeito,

(i) Sejam $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função h é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que esta não depende de t.

(ii) Para cada $t \in [0,T]$, h é contínua como função de y.

De fato, notemos primeiramente qua a aplicação

$$
\begin{array}{rccc} N: & \mathbb{R}^{2m} & \to & \mathbb{R}^{2m} \\ & y & \mapsto & \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & 0 \end{bmatrix} \end{array} \qquad (2.192)
$$

é linear e, conseqüentemente, contínua.

Por outro lado, seja $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que

$$
u_\nu \to y \quad \text{em } \mathbb{R}^{2m},
$$

daí,

$$
u_{1\nu} \to y_1 \quad \text{em } \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad u_{2\nu} \to y_2 \quad \text{em } \mathbb{R}^m.
$$

Da continuidade das aplicações β e $f(s) = |s|^\rho s$ e do fato que, para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$B(x)y_{2\nu} \to B(x)y_2 \quad \text{e} \quad B(x)y_{1\nu} \to B(x)y_1 \text{ em } \mathbb{R}$$

segue que, para quase todo $x \in \Omega$,

$$\beta(B(x)y_{2\nu})w_j(x) \to \beta(B(x)y_2)w_j(x) \quad \text{em } \mathbb{R},\ \forall j = 1, \ldots, m \tag{2.193}$$

e

$$\beta(B(x)y_{1\nu})w_j(x) \to \beta(B(x)y_1)w_j(x) \quad \text{em } \mathbb{R},\ \forall j = 1, \ldots, m. \tag{2.194}$$

Como $y_\nu \to y$ então $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada e, conseqüentemente, cada componente de $(y_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é limitada. Isto é, $|\xi_{\nu_i}| \leq M_i$, $1 \leq i \leq 2m$, onde $y_\nu = (\xi_{\nu_1} \ldots, \xi_{\nu_{2m}})$. Seja

$$M = \max_{1\leq i\leq 2m}\{M_i\}.$$

Logo, da hipótese $(A.1)$ resulta:

Se $|B(x)y_{2\nu}| \leq 1$

$$|\beta(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| \leq |g^{-1}(B(x)y_{2\nu})||w_j(x)| \leq N|w_j(x)|$$

onde $N = \sup_{|s|\leq 1} |g^{-1}(s)|$;

Se $|B(x)y_{2\nu}| > 1$

$$|\beta(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| \leq C_2|B(x)y_{2\nu}||w_j(x)| \leq M\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)||w_j(x)|$$

e, portanto,

$$|\beta(B(x)y_{2\nu})w_j(x)| \leq N|w_j(x)| + M\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)||w_j(x)|, \tag{2.195}$$

com $N|w_j(x)| + M\sum_{i=1}^{m}|w_i(x)||w_j(x)| \in L^1(\Gamma_1)$.

Combinando (2.193), (2.195) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$\int_{\Gamma_1}\beta(B(x)y_{2\nu})w_j(x)d\Gamma \to \int_{\Gamma_1}\beta(B(x)y_2)w_j(x)d\Gamma, \quad \forall j = 1, \ldots, m,$$

isto é,

$$G(y_{2\nu}) \to G(y_2) \quad \text{em } \mathbb{R}^m.$$

Conseqüentemente

$$C^{-1}G(y_{2\nu}) \to C^{-1}G(y_2) \quad \text{em } \mathbb{R}^m. \tag{2.196}$$

Por outro lado, para cada $j = 1, \ldots, m$

$$\begin{aligned} ||B(x)y_{1\nu}|^\rho B(x)y_{1\nu} w_j(x)| &= |B(x)y_{1\nu}|^{\rho+1} |w_j(x)| \\ &\leq \left(\sum_{i+1}^m M|w_i(x)| \right)^{\rho+1} |w_j(x)| \\ &\leq M^{\rho+1} m^{\rho+1} \sum_{i=1}^m |w_i(x)|^{\rho+1} |w_j(x)|. \end{aligned} \tag{2.197}$$

Como $|w_i|^{\rho+1} \in L^2(\Omega)$, $\forall i = 1, \ldots, m$ e $w_j \in L^2(\Omega)$ resulta que

$$M^{\rho+1} m^{\rho+1} \sum_{i=1}^m |w_i|^{\rho+1} |w_j| \in L^1(\Omega).$$

De (2.194), (2.197) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$\int_\Omega |B(x)y_{1\nu}|^\rho B(x)y_{1\nu} w_j(x)dx \to \int_\Omega |B(x)y_1|^\rho B(x)y_1 w_j(x)dx, \ \forall j = 1, \ldots, m,$$

isto é,

$$H(y_{1\nu}) \to H(y_1) \quad \text{em } \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$C^{-1}H(y_{1\nu}) \to C^{-1}H(y_1) \quad \text{em } \mathbb{R}^m. \tag{2.198}$$

De (2.192), (2.196) e (2.198) resulta que a aplicação h é contínua como função de y para $t \in [0, T]$.

(iii) Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto, então

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1}G(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}H(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}}. \tag{2.199}$$

Pelo que provamos em (2.192), (2.196) e (2.198) temos que G, H e N são contínuas em $\mathbb{R}^m$, logo são contínuas em qualquer K compacto de R^{2m} e, portanto, existirá um $M_k > 0$ tal que

$$\|C^{-1}G(y_2)\|_{\mathbb{R}^m} + \|C^{-1}H(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M_k \tag{2.200}$$

para todo $(t, y) \in K$, onde $y = (y_1, y_2)$.

Então, segue de (2.199) e (2.200) que existe uma constate positiva M_k satisfazendo

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k.$$

Assim, dos ítens (i), (ii) e (iii) temos que as condições de Carathéodory estão satisfeitas e, como conseqüência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, y) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $t_m > 0$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas e, conseqüentemente, $z''(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

2.3.2 Identidade da energia

Nosso intuito é provar a seguinte identidade de energia dada em (2.181):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_S^t (\chi(s), u_t(s))_{\Gamma_1} ds \\ &= \frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \frac{1}{2}\|u_t(S)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(S)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u(S)\|_{\rho+2}^{\rho+2}, \end{aligned}$$

para $0 \leq S < t \leq T$, onde u é uma solução fraca do problema (2.180).

Seja θ_0 a função característica do intervalo $[S, t]$. Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno definamos

$$\theta_\delta(\tau) = \begin{cases} 1 \quad \text{se } \tau \in [S+\delta, t-\delta] \\ 0 \quad \text{se } \tau \in \mathbb{R}\backslash]S, t[\\ \frac{1}{\delta}\tau - \frac{S}{\delta} \quad \text{se } \tau \in [S, S+\delta] \\ -\frac{1}{\delta}\tau + \frac{t}{\delta} \quad \text{se } \tau \in [t-\delta, t] \end{cases}, \tag{2.201}$$

cujo gráfico é dado pela figua abaixo:

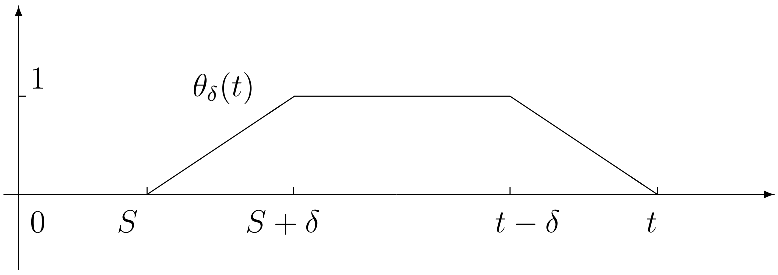

Figura 2.2: Função θ_δ.

Consideremos η_ϵ uma sucessão regularizante par, isto é, $\eta_\epsilon \in C^\infty(\mathbb{R})$, $supp(\eta_\epsilon) \subset (-\epsilon, \epsilon)$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\epsilon = 1$, η_ϵ par e $\eta_\epsilon \geq 0$; para todo $\epsilon > 0$.

Para não sobrecarregarmos a notação denotaremos $\theta_\delta = \theta$ e $\eta_\epsilon = \eta$.

Denotaremos por $\widetilde{\psi}$ a extensão de ψ como sendo zero fora do intervalo $[0, T]$. Assim, $v := \eta * (\theta\widetilde{u}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; V)$ e $\eta * (\theta\widetilde{u_t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$[4]. Daí, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dt} \left(\|\eta * (\theta\widetilde{u_t})\|_2^2 + \|\nabla v\|_2^2 \right) ds \\ &= 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left[(\eta * (\theta\widetilde{u_t}), (\eta * (\theta\widetilde{u_t}))_t) + (\nabla v, \nabla v_t) \right]. \end{aligned} \tag{2.202}$$

Como

$$v_t = \eta * (\theta'\widetilde{u}) + \eta * (\theta\widetilde{u_t}) \quad \text{em } C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$$

e

$$\left(\eta * (\theta\widetilde{u_t})\right)_t = \eta * (\theta'\widetilde{u_t}) + \eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) \quad \text{em } C_0^\infty(\mathbb{R}; V'),$$

temos que

$$\eta * (\theta\widetilde{u_t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; V) \quad \text{e} \quad \eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega));$$

[4]Como $u \in L^2(0, T; V)$ e $u_t \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ temos que $\theta u, \theta u_t \in L^2(0, T; V)$ com $supp(\theta u)$ e $supp(\theta u_t)$ contidos no intervalo $[S, t]$ e $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

pois $\eta * (\theta\widetilde{u_t}) = v_t - \eta * (\theta'\widetilde{u}) = \eta' * (\theta\widetilde{u}) - \eta * (\theta'\widetilde{u}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; V)$ e $\eta * (\theta\widetilde{u_{tt}}) = \eta' * (\theta\widetilde{u_t}) - \eta * (\theta'\widetilde{u_t}) \in C_0^\infty(\mathbb{R}; L^2(\Omega))$.

Então, por (2.202) segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta\widetilde{\nabla u}), \eta * (\theta'\widetilde{\nabla u})\Big)\, ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta\widetilde{\nabla u}), \nabla(\eta * (\theta\widetilde{u_t}))\Big)\, ds}_{=N_1} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta\widetilde{u_t}), \eta * (\theta'\widetilde{u_t}))\, ds + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta\widetilde{u_t}), (\eta * (\theta\widetilde{u_{tt}})))\, ds}_{=N_2}. \end{aligned} \tag{2.203}$$

Definamos

$$\langle A\psi, w\rangle_{V',V} = \int_\Omega \nabla\psi\nabla w dx;\ \psi, w \in V. \tag{2.204}$$

Por (2.180) resulta que

$$u_{tt} + Au + \overline{\chi} = |u|^\rho u \quad \text{em } L^2(0, T; V'), \tag{2.205}$$

onde $\langle\overline{\chi}, w\rangle_{V',V} = \int_{\Gamma_1} \chi w d\Gamma;\ w \in V$.

Assim, de (2.204) e (2.205) segue que

$$\begin{aligned} \langle\widetilde{u_{tt}}, \varphi\rangle_{V',V} &= \langle -A\widetilde{u}, \varphi\rangle_{V',V} - (\widetilde{\chi}, \varphi)_{\Gamma_1} + (|\widetilde{u}|^\rho\widetilde{u}, \varphi) \\ &= -(\widetilde{\nabla u}, \nabla\varphi) + (|\widetilde{u}|^\rho\widetilde{u}, \varphi) - \int_{\Gamma_1} \widetilde{\chi}\varphi d\Gamma, \end{aligned} \tag{2.206}$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}; V)$.

Pondo $\varphi = \eta * \eta * (\theta\widetilde{u_t})$ em (2.206) e observando que η é uma função par que depende unicamente da variável temporal t, podemos calcular $N_1 + N_2$

$$\begin{aligned} N_1 + N_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_\Omega \theta\widetilde{\nabla u}\nabla(\underbrace{\eta * \eta * (\theta\widetilde{u_t})}_{=\varphi}) + \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\langle\widetilde{u_{tt}}, \varphi\rangle_{V',V} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta\left[(|\widetilde{u}|^\rho\widetilde{u}, \varphi) - (\widetilde{\chi}, \varphi)_{\Gamma_1}\right] ds. \end{aligned} \tag{2.207}$$

De (2.203), (2.207) e lembrando que $\theta = \theta_\delta$ obtemos a primeira identidade

$$0 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta_\delta\widetilde{\nabla u}), \eta * (\theta_\delta'\widetilde{\nabla u})\Big)\, ds}_{=I_1} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_\delta\widetilde{u_t}), \eta * (\theta_\delta'\widetilde{u_t}))\, ds}_{=I_2}$$

$$+ \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\delta(|\widetilde{u}|^\rho \widetilde{u}, \varphi) ds}_{=I_3} - \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\delta(\widetilde{\chi}, \varphi)_{\Gamma_1} ds}_{=I_4}. \tag{2.208}$$

O nosso próximo passo é estimar cada termo de (2.208) separadamente quando $\delta \to 0$ e η permanece fixo.

Estimativa de $I_4 := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} (\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi}))\, (\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}))\, d\Gamma dt.$

Desde que $\theta_\delta \to \theta_0$ quase sempre em $\mathbb{R}$ e $|\theta_\delta(t)|^2 \leq \theta_0(t)$ então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos que $\theta_\delta \to \theta_0$ em $L^2(\mathbb{R})$. Logo,

$$\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2} \to \|\eta * (\theta_0 \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}, \quad q.s. \text{ em } \mathbb{R}. \tag{2.209}$$

Com efeito, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo temos

$$\begin{aligned} (\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2} &- \|\eta * (\theta_0 \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2})^2 \leq \|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi}) - \eta * (\theta_0 \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}^2 \\ &= \int_{\Gamma_1} \left| \int_{\mathbb{R}} \eta(t-\xi) |\widetilde{\chi}| |\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi)| d\xi \right|^2 d\Gamma \\ &\leq C \int_{\Gamma_1} \left[\left(\int_0^T |\chi|^2 d\xi \right) \left(\int_0^T (\theta_\delta(\xi) - \theta_0(\xi))^2 d\xi \right) \right] d\Gamma, \end{aligned}$$

e a última expressão acima converge para zero quando $\delta \to 0$, o que mostra (2.209).

De maneira análoga segue que

$$\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})\|_{\Gamma_1,2} \to \|\eta * (\theta_0 \widetilde{u_t})\|_{\Gamma_1,2}, \quad q.s. \text{ em } \mathbb{R}. \tag{2.210}$$

Além disso, temos que

$$\|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}^2 \leq N \quad \text{e} \quad \|\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})\|_{\Gamma_1,2}^2 \leq M, \quad q.s. \text{ em } \mathbb{R}, \tag{2.211}$$

onde M, N são constantes positivas indenpendentes de δ.

Com efeito,

$$\begin{aligned} \|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}^2 &= \int_{\Gamma_1} |\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})|^2 d\Gamma \\ &\leq \int_{\Gamma_1} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\theta_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left| \int_0^T \chi(z) dz \right|^2 d\Gamma \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\eta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\theta_\delta\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^T dz\right)\left(\int_0^T|\chi(z)|^2dz\right)d\Gamma \\
&= T\|\eta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\theta_\delta\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\int_{\Gamma_1}\int_0^T|\chi(z)|^2dzd\Gamma \\
&\leq T\|\eta\|^2_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\theta_\delta\|^2_{L^1(\mathbb{R})}\|\chi\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} < N
\end{aligned}
$$

Analogamente, provamos a segunda afirmação de (2.211).

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$
\|\eta*(\theta_\delta\widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}\to\|\eta*(\theta_0\widetilde{\chi})\|_{\Gamma_1,2}\quad\text{fortemente em } L^2(\mathbb{R}) \tag{2.212}
$$

e

$$
\|\eta*(\theta_\delta\widetilde{u_t})\|_{\Gamma_1,2}\to\|\eta*(\theta_0\widetilde{u_t})\|_{\Gamma_1,2}\quad\text{fortemente em } L^2(\mathbb{R}). \tag{2.213}
$$

Além disso, temos que

$$
\eta*(\theta_\delta\widetilde{\chi})\to\eta*(\theta_\delta\widetilde{\chi})\quad q.s.\text{ em } \Gamma_1\times\mathbb{R}. \tag{2.214}
$$

De fato, seja $(x,t)\in\Gamma_1\times\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}}\eta(t-\xi)[\theta_\delta(\xi)-\theta_0(\xi)]\widetilde{\chi}(x,\xi)d\xi \\
&\qquad = \int_0^T\eta(t-\xi)[\theta_\delta(\xi)-\theta_0(\xi)]\widetilde{\chi}(x,\xi)d\xi \\
&\qquad \leq \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}\|\theta_\delta-\theta_0\|_{L^2(0,T)}\|\chi(x)\|_{L^2(0,T)}\to 0,\ \delta\to 0.
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}}\|\eta*(\theta_\delta\widetilde{\chi})\|^2_{\Gamma_1,2}dt &= \int_{\mathbb{R}}\left[\int_{\Gamma_1}\left|\int_{\mathbb{R}}\eta(t-\xi)\theta_\delta(\xi)\widetilde{\chi}(x,\xi)d\xi\right|^2d\Gamma\right]dt \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\Gamma_1}\left[\int_0^T|\eta(t-\xi)||\theta_\delta(\xi)||\chi(x,\xi)|d\xi\right]^2d\Gamma dt.
\end{aligned}
$$

Como *supp* $\eta\subset]-\epsilon,\epsilon[\subset]-1,1[$, para $\epsilon>0$ suficientemente pequeno temos que $\eta(\tau)\neq 0$ se, e somente se, $\tau\in]-1,1[$ e, então $\eta(t-\xi)\neq 0$ se, e somente se, $t\in]-1+T,1+T[$.

Logo, a expressão acima se torna

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \|\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi})\|^2_{\Gamma_1,2} dt \\
&\qquad \leq \int_{-1+T}^{1+T} \int_{\Gamma_1} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\theta_\delta\|_{\mathbb{R}} \left(\int_0^T d\xi \right) \left(\int_0^T |\chi(x,\xi)|^2 d\xi \right) d\Gamma dt \\
&\qquad = \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\theta_\delta\|_{L^1(\mathbb{R})} T \int_{-1+T}^{1+T} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\chi(x,\xi)|^2 d\Gamma d\xi \right) dt \\
&\qquad \leq \underbrace{\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}}_{\leq 1} 2T \|\chi\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}. \qquad (2.215)
\end{aligned}
$$

De (2.212), (2.213) e do Lema de Lions decorre que

$$
\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi}) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 \widetilde{\chi}) \quad \text{fracamente em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \qquad (2.216)
$$

De maneira análoga obtemos que

$$
\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}) \rightharpoonup \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}) \quad \text{fracamente em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \qquad (2.217)
$$

Combinando (2.212) com (2.216) e (2.213) com (2.217) obtemos

$$
\eta * (\theta_\delta \widetilde{\chi}) \to \eta * (\theta_0 \widetilde{\chi}) \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)) \qquad (2.218)
$$

e

$$
\eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t}) \to \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}) \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)). \qquad (2.219)
$$

Disso segue que

$$
I_4 \to \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_0 \widetilde{\chi}), \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}))_{\Gamma_1} ds, \quad \text{quando } \delta \to 0. \qquad (2.220)
$$

Estimativa de $I_3 := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} \theta_\delta |\widetilde{u}|^\rho \widetilde{u} (\eta * \eta * (\theta_\delta \widetilde{u_t})) d\Gamma dt.$

Utilizando argumentos análogos àqueles feitos na Estimativa de I_4, concluímos que

$$
I_3 \to \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_0 |\widetilde{u}|^\rho \widetilde{u}), \eta * (\theta_0 \widetilde{u_t}))_{\Gamma_1} ds, \quad \text{quando } \delta \to 0. \qquad (2.221)
$$

Estimativa de $I_1 := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} (\eta * (\theta_\delta \widetilde{\nabla u}))(\eta * (\theta'_\delta) \widetilde{\nabla u}) d\Gamma dt.$

Vamos decompor o termo I_1 como segue

$$I_1 = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})\Big)\, ds}_{=I_5} + \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\eta * [(\theta_\delta - \theta_0)\widetilde{\nabla u}], \eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})\Big)\, ds}_{=I_6}. \tag{2.222}$$

Desde que $\theta_\delta \to \theta_0$ em $L^1(\mathbb{R})$ e como $u \in L^\infty(0,T;V)$ temos que $\eta * [(\theta_\delta - \theta_0)\widetilde{\nabla u}] \to 0$ fortemente em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Também,

$$\begin{aligned}
\|\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T \left(\int_\Omega |\eta * (\theta_\delta' \widetilde{\nabla u})|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leq \int_0^T \left(\int_\Omega \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^2 \|\theta_\delta'\|_{L^1(\mathbb{R})}^2 \left| \int_0^T \nabla u(x,z) dz \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau \\
&\leq T \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\theta_\delta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \left(\int_\Omega \left(\int_0^T dz \right) \left(\int_0^T |\nabla u(x,z)|^2 dz \right) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= T^{\frac{3}{2}} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\theta_\delta'\|_{L^1(\mathbb{R})} \|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&\leq C T^{\frac{3}{2}} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \underbrace{\|\theta_\delta'\|_{L^1(\mathbb{R})}}_{=2} \|\nabla u\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}.
\end{aligned}$$

Do observado anteriormente segue que

$$I_6 \to 0 \quad \text{quando} \quad \delta \to 0. \tag{2.223}$$

Agora, pela definição de θ_δ temos

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \theta_\delta' \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)\, ds \\
&= \frac{1}{\delta} \int_S^{S+\delta} \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)\, ds - \frac{1}{\delta} \int_{t-\delta}^{t} \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \widetilde{\nabla u}\Big)\, ds.
\end{aligned}$$

Como $u \in C^0([0,T];V)$ então a função $s \mapsto \Big(\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}(s)), \widetilde{\nabla u}(s)\Big)$ é contínua, e portanto integrável. Logo, pelo Teorema da Média obtemos que

$$I_5 \to \Big((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(S), \nabla u(S)\Big) - \Big((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big), \tag{2.224}$$

quando $\delta \to 0$.

Portanto,

$$I_1 \to \Big((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(S), \nabla u(S)\Big) - \Big((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big), \tag{2.225}$$

quando $\delta \to 0$.

Estimativa de $I_2 := \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} (\eta * (\theta_\delta \widetilde{u}_t), \eta * (\theta'_\delta \widetilde{u}_t))\, ds$.

Procedendo de maneira análoga ao que foi feito em I_1 concluímos que

$$I_2 \to ((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(S), u_t(S)) - ((\eta * \eta * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(t), u_t(t)), \tag{2.226}$$

quando $\delta \to 0$.

Das convergências (2.220), (2.221), (2.225) e (2.226), lembrando que $\eta = \eta_\epsilon$ e tomando $\rho_\epsilon = \eta_\epsilon * \eta_\epsilon$ obtemos a segunda identidade:

$$\begin{aligned}\Big[\Big(\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}), \nabla u\Big) \quad &+ \quad (\rho_\epsilon(\theta_0 \widetilde{u}_t), u_t)\Big]_S^t = \int_S^t \theta_0 \left(|u|^\rho u, \rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t)\right) ds \\ &- \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} ((\theta_0 \widetilde{\chi}))\, (\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))_{\Gamma_1}\, d\Gamma ds.\end{aligned} \tag{2.227}$$

Tomaremos $\epsilon \to 0$ na expressão acima. Observemos que $\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t) \to \theta_0 u_t$ fortemente em $L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$ e $\theta_0 \chi \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$. Disso segue que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} (\eta_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\chi}))\, (\eta_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))\, d\Gamma ds \to \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\Gamma_1} \theta_0^2 \widetilde{\chi} \widetilde{u}_t d\Gamma dt = \int_S^t \int_{\Gamma_1} \chi u_t d\Gamma dt, \tag{2.228}$$

quando $\epsilon \to 0$. Também, $\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t) \to \theta_0 u_t$ fortemente em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Assim,

$$\int_S^t (|u|^\rho u, \rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))\, ds \to \int_S^t (|u|^\rho u, u_t)\, ds, \quad \text{quando } \epsilon \to 0. \tag{2.229}$$

Resta-nos estimar os dois primeiros termos de (2.227).

Notemos que $supp(\rho_\epsilon) \subset (-2\epsilon, 2\epsilon)$, $\rho_\epsilon \geq 0$ e

$$\int_0^{+\infty} \rho_\epsilon ds = \int_{-\infty}^0 \rho_\epsilon ds = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_\epsilon ds = \frac{1}{2}. \tag{2.230}$$

Queremos mostrar que

$$((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)) + ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u}_t))(t), u_t(t)) \to \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right), \quad \epsilon \to 0.$$

De fato, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de (2.230) e como θ_0 é a função característica do intervalo $[S,t]$ segue que $\theta_0(t-\tau) = 0$ para $\tau < 0$ e $\tau > t-S$. Assim, para $0 < \epsilon < \dfrac{t-S}{2}$ e $\theta_0(t-\tau) = 1$ para $0 \leq \tau \leq t-S$,

$$\begin{aligned}
\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big) &+ ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(t), u(t)) - \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau)\theta_0(t-\tau)(\widetilde{\nabla u}(t-\tau), \nabla u(t))d\tau \\
&+ \int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(\tau)\theta_0(t-\tau)(\widetilde{u_t}(t-\tau), u_t(t))d\tau \\
&- \int_0^{+\infty} \rho_\epsilon(\tau)(\nabla u(t), \nabla u(t))d\tau \\
&- \int_0^{+\infty} \rho_\epsilon(\tau)(u_t(t), u_t(t))d\tau \\
&= \int_0^{t-S} \rho_\epsilon(\tau)\underbrace{\theta_0(t-\tau)}_{=1}(\nabla u(t-\tau), \nabla u(t))d\tau \\
&+ \int_0^{t-S} \rho_\epsilon(\tau)\underbrace{\theta_0(t-\tau)}_{=1}(u_t(t-\tau), u_t(t))d\tau \\
&- \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)(\nabla u(t), \nabla u(t))d\tau - \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)(u_t(t), u_t(t))d\tau \\
&= \int_0^{2\epsilon} \rho_\epsilon(\tau)\left[(\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t), \nabla u(t))\right. \\
&+ \left.(u_t(t-\tau) - u_t(t), u_t(t))\right] d\tau \qquad (2.231)
\end{aligned}$$

Como $u \in C^0([0,T]; V)$ e $u_t \in C^0([0,T]; L^2(\Omega))$ então $\sup\limits_{\tau \in supp(\rho_\epsilon)} \{\nabla u(t-\tau) - \nabla u(t)\} \to 0$ e $\sup\limits_{\tau \in supp(\rho_\epsilon)} \{u_t(t-\tau) - u_t(t)\} \to 0$ quando $\epsilon \to 0$ pois neste caso $\tau \to 0$. Assim, as expressões do lado direito da igualdade acima converge para zero quando $\epsilon \to 0$. Portanto,

$$\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(t), \nabla u(t)\Big) + ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(t), \theta_0 u(t)) \to \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right), \qquad (2.232)$$

quando $\epsilon \to 0$.

Procedendo da mesma forma feita acima, com a modificação que a integral na expressão (2.231) será calculada no intervalo $(-\infty, 0]$, resulta

$$\Big((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{\nabla u}))(S), \nabla u(S)\Big) + ((\rho_\epsilon * (\theta_0 \widetilde{u_t}))(S), \theta_0 u(S)) \to \frac{1}{2}\left(\|\nabla u(S)\|_2^2 + \|u_t(S)\|_2^2\right), \tag{2.233}$$

quando $\epsilon \to 0$.

Passando o limite $\epsilon \to 0$ em (2.227), de (2.228)-(2.233) resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\|\nabla\ u(t)\|_2^2 + \|u_t(t)\|_2^2\right)\Big|_S^t + \int_S^t \int_{\Gamma_1} \chi u_t d\Gamma ds &= \int_S^t (|u|^\rho u, u_t)\, ds \\
&= \int_S^t \frac{1}{\rho+2} \frac{d}{ds} \|u(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} ds \\
&= \frac{1}{\rho+2} \|u(s)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \Big|_S^t,
\end{aligned}$$

o que mostra a identidade de energia (2.181).

Capítulo 3

Taxas de Decaimento

No início deste capítulo, apresentaremos resultados que serão de grande utilidade para estimar as taxas de decaimento da energia associada o ao problema (2.1). O primeiro resultado pode ser encontrado em [36] e os demais em [23].

Teorema 3.0.1 *Suponha que $u \in L^2(\Omega \times (0,T))$ é uma solução fraca de*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u + v(x,t)u = 0$$

em $\Omega \times (0,T)$, onde $T > diam(\Omega)$ e $v \in L^\infty(0,T;L^{n-1}(\Omega))$. Se $u = 0$ em algum conjunto $S \times (0,T)$, $S \subset \mathbb{R}^n$ então $u = 0$ em $\Omega \times (0,T)$.

Demonstração: Ver [36]

No que segue, g é a função dada em $(H.2)$ e $E(t)$ é a energia associada ao problema (2.1).

Lema 3.0.2 (Martinez [23], p.428) - *Seja $E : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função não crescente e $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ uma função de classe C^1 estritamente crescente tal que*

$$\varphi(0) = 0 \text{ e } \varphi(t) \to +\infty \text{ quando } t \to +\infty. \tag{3.1}$$

Suponha que exista $\sigma > 0$, $\sigma' \geq 0$ e $c > 0$ tal que

$$\int_S^{+\infty} E(t)^{1+\sigma}\varphi'(t)dt \leq cE(S)^{1+\sigma} + \frac{c}{(1+\varphi(S))^{\sigma'}}E(0)^\sigma E(S),\ 0 \leq S < +\infty. \tag{3.2}$$

Então, existe $C > 0$ tal que

$$E(t) \leq E(0) \frac{C}{(1+\varphi(t))^{\frac{1+\sigma'}{\sigma}}}, \ \forall t > 0. \tag{3.3}$$

Lema 3.0.3 (Martinez [23], p.435) *Existe uma função $\varphi : [1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$ de classe C^2 crescente tal que φ é côncava, $\varphi(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$, $\varphi'(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$ e*

$$\int_1^{+\infty} \varphi'(t) \left(g^{-1}\left(\varphi'(t)\right)\right)^2 dt < +\infty. \tag{3.4}$$

Demonstração: Assumamos, por um momento, que tal função exista. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que $\varphi(1) = 1$, pois caso contrário basta definirmos $\overline{\varphi}(t) = \varphi(t) + (1 - \varphi(1))$. Deste fato, considerando a mudança de variável $s = \varphi(t)$, temos:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \varphi'(t) \left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt &= \int_1^{+\infty} \left(g^{-1}(\varphi'(\varphi^{-1}(s)))\right)^2 ds \\ &= \int_1^{+\infty} \left(g^{-1}\left(\frac{1}{(\varphi^{-1})'(s)}\right)\right)^2 ds. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Para provarmos a existência de uma função que satisfaça as hipóteses acima, definamos a seguinte função auxiliar ψ

$$\psi(t) = 1 + \int_1^t \frac{1}{g\left(\frac{1}{s}\right)} ds, \quad t \geq 1. \tag{3.6}$$

Então,

$$\psi'(t) = \frac{1}{g\left(\frac{1}{t}\right)} \tag{3.7}$$

e, de acordo com as hipóteses feitas sobre g, temos que ψ é uma função crescente de classe C^2 que satisfaz

$$\psi'(t) \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty\,, \quad \psi(t) \to +\infty \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{3.8}$$

Com efeito, sendo $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 então, para $t \geq 1$, ψ' também o é. Logo, ψ é de classe $C^2([1, +\infty))$. Como g é crescente e $g(0) = 0$ segue que

$g\left(\dfrac{1}{t}\right) > 0$, para todo $t \geq 1$. Assim, $\psi' > 0$, $\forall t \geq 1$, donde segue que ψ é crescente. Além disso,

$$\begin{aligned}\psi(t) &= 1 + \int_1^t \frac{1}{g\left(\frac{1}{s}\right)} ds \geq 1 + \int_1^t \frac{1}{g(1)} ds \\ &= 1 + (t-1)\frac{1}{g(1)}.\end{aligned}$$

Da desigualdade acima segue que $\psi(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

Também, como $\psi'(t) = \dfrac{1}{g(\frac{1}{t})}$ e g é crescente decorre que ψ' é crescente. Além disso, do fato de g ser contínua e $g(0) = 0$ obtemos que $\psi'(t) \to +\infty$ quando $t \to +\infty$.

Temos ainda que $\psi'' \geq 0$, pois

$$\psi''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{g\left(\frac{1}{t}\right)}\right) = \frac{g'\left(\frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}}{\left[g\left(\frac{1}{t}\right)\right]^2} \geq 0,$$

o que implica que ψ' é não decrescente e que ψ é convexa. Assim, de (3.7) obtemos

$$\int_1^{+\infty} \left(g^{-1}\left(\frac{1}{\psi'(s)}\right)\right)^2 ds = \int_1^{+\infty} \frac{1}{s^2} ds < +\infty. \tag{3.9}$$

A seguir, vamos provar que ψ^{-1} é côncava. De fato, como

$$\psi(\psi^{-1}(s)) = s$$

temos

$$\begin{aligned}\left(\psi^{-1}\right)''(s) &= -\frac{\psi''(\psi^{-1}(s))\left((\psi^{-1})'(s)\right)^2}{\psi'(\psi^{-1}(s))} \\ &= -\frac{\psi''(\psi^{-1}(s))}{\left(\psi'\left(\psi^{-1}(s)\right)\right)^3} \leq 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Assim, tomando $\varphi(t) = \psi^{-1}(t)$ para todo $t \geq 1$, de (3.5), (3.8)-(3.10) concluímos que φ verifica todas as hipóteses do Lema 3.0.3, o que finaliza a demonstração.

$\blacksquare$

Para estabelecermos nossos próximos resultados consideremos as seguintes funções

$$\begin{array}{rccc} H: & [-1,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\ & y & \mapsto & \frac{g(y)}{y} \end{array}$$

e

$$
\begin{array}{rccc}
G: & [-1,1] & \to & \mathbb{R}_+ \\
 & y & \mapsto & yg(y)
\end{array},
$$

onde g é definida em $(A.1)$.

Teorema 3.0.4 *Suponhamos que $(A.1)$, $(A.2)$ e $(H.1)$ se verifiquem. Então, a energia associada ao problema (2.1) satisfaz a seguinte estimativa*

$$E(t) \leq C\left(G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2, \quad \forall t \geq 1,$$

onde a constante $C > 0$ depende somente da energia inicial $E(0)$.

Além disso, se $H(0) = 0$ e se H é não decrescente em $[0, \eta]$ para algum $\eta > 0$, então tal energia satisfaz

$$E(t) \leq C\left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2, \quad \forall t \geq 1,$$

onde a constante $C > 0$ depende somente da energia inicial $E(0)$.

Teorema 3.0.5 *Suponhamos que $(A.1)$ e $(H.1)$ se verifiquem e que $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$ são tais que $\|\nabla u^0\|_2 < \lambda_1$ e $E(0) < d$, onde λ_1 e d são dadas em (1.24) e (1.25), respectivamente. Então, a energia associada ao problema (2.1) satisfaz as mesmas estimativas do Teorema anterior.*

No que segue, x^0 será um ponto fixado no $\mathbb{R}^n$ onde

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma;\ m(x) \cdot \nu(x) \leq 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma;\ m(x) \cdot \nu(x) > 0\},$$

com $m(x) = x - x^0$. Definamos, também

$$R := \max_{x \in \overline{\Omega}} \|x - x^0\|.$$

3.1 Prova do teorema 3.0.4

Consideremos, inicialmente, o seguinte resultado:

Lema 3.1.1 *Para quaisquer que sejam* $0 \leq S < T < \infty$, *temos*

$$E(S) - E(T) = \int_S^T \int_{\Gamma_1} \beta(u')u' d\Gamma dt \geq 0,$$

onde u *é uma solução regular do problema (2.1). Como conseqüência, segue que* $E(t)$ *é uma função não crescente.*

Demonstração:

Considerando $0 \leq S < T < \infty$, (2.64), (2.68), (2.92) e aplicando a fórmula de Green generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T \int_\Omega u' \left(u'' - \Delta u - |u|^\rho u\right) dx dt = \int_S^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'(t)\|_2^2 dt \\
&+ \int_S^T \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_S^T \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma dt - \int_S^T \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} dt \\
&= \int_S^T E'(t) dt + \int_S^T \int_{\Gamma_1} \beta u' u' d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Como $\beta(s)s \leq 0$ segue que

$$E(T) - E(S) = -\int_S^T \int_{\Gamma_1} \beta(u')u' d\Gamma dt \leq 0,$$

o que prova o lema.

■

3.1.1 Método dos Multiplicadores

Utilizaremos nesta parte do trabalho o método dos multiplicadores em busca de uma desigualdade de energia que verifique as hipóteses do Lema 3.0.2. Para isto, multiplicamos a equação (2.64) por $E\varphi' Mu$, onde $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função crescente, de classe C^2 e côncava; e Mu é definida por

$$Mu := 2(m \cdot \nabla u) + (n-1)u. \tag{3.11}$$

Então, aplicando a fórmula de Green generalizada resulta que

$$\begin{aligned}
0 &= \int_S^T E\varphi' \int_\Omega (u'' - \Delta u - |u|^\rho u)\, Mudxdt \\
&= \int_S^T E\varphi' \int_\Omega (u'' - \Delta u - |u|^\rho u)\,(2m\cdot\nabla u + (n-1)u)\, dxdt \\
&= \underbrace{\int_S^T E\varphi' \int_\Omega 2u''(m\cdot\nabla u)dxdt}_{=N_1} + \underbrace{\int_S^T E\varphi' \int_\Omega 2\nabla u \nabla(m\cdot\nabla u)dxdt}_{=N_2} \\
&- \int_S^T E\varphi' \int_\Gamma 2\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt - \int_S^T E\varphi' \int_\Omega 2|u|^\rho u(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&+ \underbrace{(n-1)\int_S^T E\varphi' \int_\Omega u'' udxdt}_{=N_3} + (n-1)\int_S^T E\varphi' \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\
&- (n-1)\int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial\nu} ud\Gamma dt - (n-1)\int_S^T E\varphi' \int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Integrando por partes temos que

$$\begin{aligned}
N_1 &= \left[E\varphi' \int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_S^T - \int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&- \underbrace{\int_S^T E\varphi' \int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u')dxdt}_{=N_4}. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Denotando $m(x) = (m_1(x), \dots, m_n(x))$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)$ e aplicando o lema de Gauss temos, para cada $i = 1, \dots, n$ que

$$-\int_\Omega 2u' m_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}dx = -\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}[u']^2 m_i dx = \int_\Omega |u'|^2 \frac{\partial m_i}{\partial x_i}dx - \int_{\Gamma_1} |u'|^2 m_i\nu_i d\Gamma,$$

ou seja,

$$-\int_\Omega 2u' m_i \frac{\partial u'}{\partial x_i}dx = \int_\Omega |u'|^2 dx - \int_{\Gamma_1} m_i\nu_i |u'|^2 d\Gamma.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u')dx &= \sum_{i=1}^n \left(\int_\Omega |u'|^2 dx - \int_{\Gamma_1}(m_i\nu_i)|u'|^2\right) d\Gamma \\
&= n\int_\Omega |u'|^2 dx - \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2 d\Gamma. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Substituindo (3.14) em (3.13) resulta

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \left[E\varphi' \int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_S^T - \int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&+ n\int_S^T E\varphi' \int_\Omega |u'|^2 dxdt - \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2 d\Gamma dt. \qquad (3.15)
\end{aligned}
$$

Também,

$$
\begin{aligned}
N_2 &= \int_S^T E\varphi' \sum_{i=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&= \int_S^T E\varphi' \sum_{i=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{j=1}^n m_j\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)dxdt \\
&= \int_S^T E\varphi' \sum_{i=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right)dxdt \qquad (3.16) \\
&= \int_S^T E\varphi' \int_\Omega 2|\nabla u|^2 dxdt + \int_S^T E\varphi' \underbrace{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}dx}_{=N_5}\,dt.
\end{aligned}
$$

Cálculo de N_5.

Pelo lema de Gauss temos que

$$
\begin{aligned}
N_5 &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_i}dx \\
&= \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2\right]m_j dx \\
&= -\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \left[\int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 \frac{\partial m_j}{\partial x_j}dx + \int_\Gamma \nu_j m_j\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 d\Gamma\right] \\
&= n\left(-\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right) + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
N_5 = \sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_\Omega 2\frac{\partial u}{\partial x_i}m_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}dx = -n\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma. \qquad (3.17)
$$

Substituindo (3.17) em (3.16) resulta que

$$
N_2 = (2-n)\int_S^T E\varphi' \int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \int_S^T E\varphi' \int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma dt. \qquad (3.18)
$$

Integrando por partes N_3 obtemos:

$$
\begin{aligned}
N_3 &= (n-1)\left[E\varphi'\int_\Omega u'udx\right]_S^T - (n-1)\int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega u'udxdt \\
&- (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u'|^2dxdt. \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

Substituindo (3.15), (3.18) e (3.19) em (3.12) e considerando a definição de Mu dada em (3.11) obtemos:

$$
\begin{aligned}
0 &= \left[E\varphi'\int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_S^T - \int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega 2u'(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&+ n\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u'|^2dxdt - \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2d\Gamma dt \\
&+ (2-n)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt + \int_S^T E\varphi'\int_\Gamma (m\cdot\nu)|\nabla u|^2d\Gamma dt \\
&- \int_S^T E\varphi'\int_\Gamma 2\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt - \int_S^T E\varphi'\int_\Omega 2|u|^\rho u(m\cdot\nabla u)dxdt \\
&+ (n-1)\left[E\varphi'\int_\Omega u'udx\right]_S^T - (n-1)\int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega u'udxdt \\
&- (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u'|^2dxdt - (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}ud\Gamma dt \\
&- (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt + (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt \\
&= \left[E\varphi'\int_\Omega u'Mudx\right]_S^T - \int_S^T (E'\varphi' + E\varphi'')\int_\Omega u'Mudxdt \\
&- \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\left(|u'|^2 - |\nabla u|^2\right)d\Gamma dt + \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2d\Gamma dt \\
&+ \underbrace{(n-(n-1))}_{=1}\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u'|^2dxdt + \underbrace{(2-n+n-1)}_{=1}\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt \\
&- \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}Mud\Gamma dt - \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_0}2\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt \\
&- 2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^\rho u(m\cdot\nabla u)dxdt - (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

De (3.20), observando que $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} = -\beta(u')$ em Γ_1 e $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\partial\nu}\nu$ em Γ_0 e tendo em mente a definição de energia dada em (2.2) segue que

$$
\begin{aligned}
2\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt &= 2\int_S^T E\varphi'\left(\frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2-\frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}\right)dt\\
&= \int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u'(t)|^2dxdt+\int_S^T E\varphi'\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt\\
&- \frac{2}{\rho+2}\int_S^T E\varphi'\int_\Omega|u(t)|^{\rho+2}dxdt\\
&= -\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1} Mu\beta(u')d\Gamma dt+\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_0}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2d\Gamma dt\\
&+ \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\left(|u'|^2-|\nabla u|^2\right)d\Gamma dt\\
&+ \int_S^T (E'\varphi'+E\varphi'')\int_\Omega u'Mudxdt-\left[E\varphi'\int_\Omega u'Mudx\right]_S^T\\
&+ 2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^\rho u(m\cdot\nabla u)dxdt\\
&+ \left[(n-1)-\frac{2}{\rho+2}\right]\int_S^T E\varphi'\int_\Omega|u(t)|^{\rho+2}dxdt. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

O nosso próximo passo é estimar os dois últimos termos da igualdade em (3.21).

Estimativa de $I_1 := \left[n-1-\dfrac{2}{\rho+2}\right]\displaystyle\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx.$

Aplicando a desigualdade de interpolação

$$
\|y\|_p \le \|u\|_2^\alpha\|y\|_q^{1-\alpha};\quad \frac{1}{p}=\frac{\alpha}{2}+\frac{1-\alpha}{q},\quad \alpha\in[0,1] \qquad (3.22)
$$

para os espaços L^p, com $p=\rho+2$ e $\alpha=\dfrac{1}{\rho+2}$, obtemos para todo $t\ge 0$

$$
\|u(t)\|_{\rho+2}\le \|u(t)\|_2^{\frac{1}{\rho+2}}\|u(t)\|_q^{\frac{\rho+1}{\rho+2}},\quad \text{onde } q=2(\rho+1). \qquad (3.23)
$$

Então, colocando $\gamma = n-1-\dfrac{2}{\rho+2}$ e considerando λ a constante de imersão de $V\hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$, da desigualdade de Young chegamos à:

$$
\begin{aligned}
\gamma\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\le n\|u(t)\|_2\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}\\
&\le n\lambda^{\rho+1}\|u(t)\|_2\|\nabla u(t)\|_2^{\rho+1}\\
&= \left(\sqrt{\frac{C}{\varepsilon}}n\lambda^{\rho+1}\|u(t)\|_2\right)\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{C}}\|\nabla u(t)\|_2^{\rho+1}\right)\\
&\le C\frac{n^2\lambda^{2(\rho+1)}}{2\varepsilon}\|u(t)\|_2^2+\frac{\varepsilon}{2C}\|\nabla u(t)\|_2^{2(\rho+1)}, \qquad (3.24)
\end{aligned}
$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $C = [2(\rho+2)\rho^{-1}E(0)]^{\rho}\,\dfrac{(\rho+2)}{\rho}$.

Considerando a desigualdade (2.6), que é válida para $t \in (0, +\infty)$, temos que

$$\|\nabla u(t)\|_2^2 \leq \frac{2(\rho+2)}{\rho}E(t). \tag{3.25}$$

Substituindo (3.25) em (3.24) e observando que $E(t) \leq E(0)$, obtemos

$$\begin{aligned} \gamma\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \frac{C\lambda^{2(\rho+1)}n^2}{2\varepsilon}\|u(t)\|_2^2 + \frac{\varepsilon}{2C}\left(\frac{2(\rho+2)}{\rho}E(t)\right)^{\rho+1} \\ &= C_\varepsilon\|u(t)\|_2^2 + \varepsilon E(t), \end{aligned} \tag{3.26}$$

onde $C_\varepsilon = \dfrac{C\lambda^{2(\rho+1)}n^2}{2\varepsilon}$.

De (3.26) decorre que

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_S^T E\varphi'\gamma\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}dt \leq \varepsilon\int_S^T (E(t))^2\varphi'(t)dt \\ &+ C_\varepsilon\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u(t)|^2dxdt, \quad \forall\varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Estimativa para $I_2 := 2\displaystyle\int_S^T E\varphi'\int_\Omega (m\cdot\nabla u)|u|^\rho u dxdt$.

Temos:

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq 2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |(m\cdot\nabla u)||u|^{\rho+1}dxdt \\ &\leq 2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |m||\nabla u||u|^{\rho+1}dxdt \\ &\leq 2R\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |\nabla u||u|^{\rho+1}dxdt \\ &\leq 2R\int_S^T E(t)\varphi'(t)\|\nabla u(t)\|_2\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}dt. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Vamos analisar o termo $\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}$. Para isto, consideremos $0 < \rho < \dfrac{2}{n-2}$ (se $n \geq 3$), $0 < s < \dfrac{2n}{n-2} - 2(\rho+1)$ e a desigualdade de interpolação (3.22) com $p = 2(\rho+1)$ e $q = 2(\rho+1)+s$. Assim, para todo $t \geq 0$ temos:

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)} \leq \|u(t)\|_2^{1-\alpha}\|u(t)\|_{2(\rho+1)+s}^{\alpha} \tag{3.29}$$

onde $0 < \alpha < 1$ é tal que $\dfrac{1}{2(\rho+1)} = \dfrac{1-\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{2(\rho+1)+s}$, ou seja, α é dado por $\alpha = 1 + \dfrac{s}{(\rho+1)[2-2(\rho+1)-s]}$.

De (3.29) segue que

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \leq \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)} \|u(t)\|_{2(\rho+1)+s}^{\alpha(\rho+1)}. \tag{3.30}$$

Considerando a escolha de s resulta que $2(\rho+1)+s < \dfrac{2n}{n-2}$, o que implica que $V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)+s}(\Omega)$. Se μ é a constante relativa à esta imersão, obtemos

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \leq \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)} \mu^{\alpha(\rho+1)} \|\nabla u(t)\|_2^{\alpha(\rho+1)}. \tag{3.31}$$

De (3.28) e (3.31) concluímos que

$$|I_2| \leq 2R\mu^{\alpha(\rho+1)} \int_S^T E(t)\varphi'(t) \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)} \|\nabla u(t)\|_2^{\alpha(\rho+1)+1} dt. \tag{3.32}$$

Por outro lado, da desigualdade de Young temos, para todo $\varepsilon > 0$, que

$$ab = \frac{a}{\varepsilon^{\frac{1}{p'}}} b \varepsilon^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{p} \frac{a^p}{\varepsilon^{\frac{p}{p'}}} + \frac{1}{p'} b^{p'} \varepsilon, \tag{3.33}$$

onde $p, p' > 1$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Aplicando a desigualdade (3.33) com $a = 2R\mu^{\alpha(\rho+1)} \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)}$, $b = \|\nabla u(t)\|_2^{\alpha(\rho+1)+1}$, $p = \dfrac{2}{(1-\alpha)(\rho+1)}$ e $p' = \dfrac{2}{2-(1-\alpha)(\rho+1)}$, onde α é dado em (3.29), resulta que

$$\begin{aligned} 2R\mu^{\alpha(\rho+1)} \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)} \|\nabla u(t)\|_2^{\alpha(\rho+1)+1} \quad &\leq \quad \frac{\left[2R\mu^{\alpha(\rho+1)}\right]^{2(1-\alpha)^{-1}(\rho+1)^{-1}}}{p\varepsilon^{\frac{2-(1-\alpha)(\rho+1)}{(1-\alpha)(\rho+1)}}} \|u(t)\|_2^2 \\ &+ \quad \frac{\varepsilon}{p'} \|\nabla u(t)\|_2^{\frac{2[\alpha(\rho+1)+1]}{2-(1-\alpha)(\rho+1)}}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

De (3.25) e (3.34) segue que

$$2R\mu^{\alpha(\rho+1)} \|u(t)\|_2^{(1-\alpha)(\rho+1)} \|\nabla u(t)\|_2^{\alpha(\rho+1)+1} \leq C_1(\varepsilon) \|u(t)\|_2^2 + k\varepsilon E(t), \tag{3.35}$$

onde

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\left[2R\mu^{\alpha(\rho+1)}\right]^{2(1-\alpha)^{-1}(\rho+1)^{-1}}}{p\varepsilon^{\frac{2-(1-\alpha)(\rho+1)}{(1-\alpha)(\rho+1)}}}$$

e

$$k=\frac{1}{p'}\left(\frac{2(\rho+2)}{\rho}E(0)\right)^{\frac{\rho}{2-(1-\alpha)(\rho+1)}}.$$

Substituindo (3.35) em (3.32) resulta que

$$I_2\leq \varepsilon k\int_S^T(E(t))^2\varphi'(t)dt+C_1(\varepsilon)\int_S^T E(t)\varphi'(t)\int_\Omega |u|^2dxdt. \tag{3.36}$$

Substituindo (3.27) e (3.36) em (3.21) e observando que $m\cdot\nu\leq 0$ em Γ_0, obtemos

$$\begin{aligned}2\int_S^T(E(t))^2\varphi'(t)dt &\leq -\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}Mu\beta(u')d\Gamma dt\\ &+\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\left(|u'|^2-|\nabla u|^2\right)d\Gamma dt\\ &+\int_S^T(E'\varphi'+E\varphi'')\int_\Omega u'Mudxdt\\ &-\left[E\varphi'\int_\Omega u'Mudx\right]_S^T+\varepsilon\int_S^T(E(t))^2\varphi'(t)dt\\ &+C_\varepsilon\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u(t)|^2dxdt+k\varepsilon\int_S^T(E(t))^2\varphi'(t)dt\\ &+C_1(\varepsilon)\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^2dxdt. \end{aligned}\tag{3.37}$$

Assim, tomando ε suficientemente pequeno em (3.37), segue que existem $\delta_1,\delta_2>0$ que verificam

$$\begin{aligned}\delta_1\int_S^T(E(t))^2\varphi'(t)dt &\leq -\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}Mu\beta(u')d\Gamma dt\\ &+\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)\left(|u'|^2-|\nabla u|^2\right)d\Gamma dt\\ &+\int_S^T(E'\varphi'+E\varphi'')\int_\Omega u'Mudxdt-\left[E\varphi'\int_\Omega u'Mudx\right]_S^T\\ &+\delta_2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u(t)|^2dxdt. \end{aligned}\tag{3.38}$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt}E(t)=-\int_{\Gamma_1}\beta(u')u'd\Gamma.$$

Multiplicando por $E(t)$, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[E^2(t)\right] = -E(t)\int_{\Gamma_1}\beta(u')u'd\Gamma.$$

Portanto, integrando sobre $[S,T]$ resulta que

$$E^2(T) = E^2(S) - 2\int_S^T E(t)\int_{\Gamma_1}\beta(u')u'd\Gamma dt. \tag{3.39}$$

De (3.39) e observando o Lema 3.1.1 temos que

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt &\geq \int_S^T E^2(T)\varphi'(t)dt = E^2(T)[\varphi(T)-\varphi(S)] \\
&= [\varphi(T)-\varphi(S)]E^2(S) \\
&- 2[\varphi(T)-\varphi(S)]\int_S^T E(t)\int_{\Gamma_1}\beta(u')u'd\Gamma dt. \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Substituindo $Mu = 2(m\cdot\nabla u)+(n-1)u$ na expressão (3.38) segue que

$$\begin{aligned}
\delta_1\int_S^T E^2\varphi' dt &\leq -2\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nabla u)\beta(u')d\Gamma dt \\
&- (n-1)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}u\beta(u')d\Gamma dt \\
&+ \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2 d\Gamma dt - \int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma dt \\
&+ \int_S^T (E'\varphi'+E\varphi'')\int_\Omega Mu.u'dxdt \\
&- \left[2E\varphi'\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_S^T - \left[E\varphi'(n-1)\int_\Omega u'udx\right]_S^T \\
&+ \delta_2\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^2 dxdt. \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

Estimativa de $I_3 := -2\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nabla u)\beta(u')d\Gamma dt.$

Temos, para todo $\eta>0$, que

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq 2\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}\sqrt{\eta}|\nabla u|\frac{R}{\sqrt{\eta}}|\beta(u')|d\Gamma dt \\
&\leq 2\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}\left(\frac{\eta}{2}|\nabla u|^2+\frac{R^2}{2\eta}|\beta(u')|^2\right)d\Gamma dt \\
&= \eta\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\nabla u|^2 d\Gamma dt + \frac{R^2}{\eta}\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2 d\Gamma dt. \qquad (3.42)
\end{aligned}$$

Por outro lado, da desigualdade (2.6), para todo $t \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\left| -2E(t)\varphi'(t)\int_\Omega u'(t)(m\cdot\nabla u(t))dx \right| &\leq 2E(t)LR\int_\Omega |u'(t)||\nabla u(t)|dx \\
&\leq 2E(t)LR\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'(t)|^2+|\nabla u(t)|^2\right)dx \\
&= 2E(t)LR\int_\Omega \frac{1}{2}\left(|u'|^2+|\nabla u|^2\right)dx \\
&\leq 2LRE(t)\left(1+\frac{\rho+2}{\rho}\right)E(t) = CE^2(t),
\end{aligned}$$

onde $C = \dfrac{4(\rho+1)}{\rho}LR$ e L é uma constante positiva que verifica $|\varphi'(t)| \leq L$, para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

Conseqüentemente, do fato da energia $E(t)$ ser não crescente

$$\begin{aligned}
-\left[2E\varphi'\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_S^T &\leq CE^2(T)+CE^2(S) \\
&\leq 2CE^2(S). \qquad (3.43)
\end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$\begin{aligned}
\left| -E\varphi'(n-1)\int_\Omega u'udx \right| &\leq (n-1)E(t)L\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'|^2+|u|^2\right)dx \\
&\leq (n-1)E(t)L\frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u'|^2+C_2^2|\nabla u|^2\right)dx \\
&\leq (n-1)E(t)L\int_\Omega \left(\frac{1}{2}|u'|^2+\frac{1}{2}C_2^2|\nabla u|^2\right)dx \\
&\leq (n-1)E(t)LC_3E(t) \\
&= C_4E^2(t),
\end{aligned}$$

onde C_2 é a constante de imersão de V em $L^2(\Omega)$, $C_3 = 2\max\left\{1, \dfrac{(\rho+2)}{\rho}C_2^2\right\}$ e $C_4 = (n-1)LC_3$.

Logo,

$$-\left[E\varphi'(n-1)\int_\Omega u'udx\right]_S^T \leq C_5E^2(S). \qquad (3.44)$$

Além disso,

$$\left|\int_\Omega Muu'dx\right| \leq \int_\Omega |(2(m\cdot\nabla u)+(n-1)u)\,u'|\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&\leq 2\int_\Omega |(m\cdot\nabla u)||u'|dx+(n-1)\int_\Omega |u||u'|dx\\
&\leq 2R\|\nabla u\|_2\|u'\|_2+(n-1)\|u\|_2\|u'\|_2\\
&\leq R\left(\|\nabla u\|_2^2+\|u'\|_2^2\right)+\frac{(n-1)}{2}\left(\|u\|_2^2+\|u'\|_2^2\right)\\
&\leq C_6E(t). \qquad (3.45)
\end{aligned}
$$

Logo, de (3.45), obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_S^T (E'\varphi'+E\varphi'')\int_\Omega Muu'dxdt &\leq C_6\int_S^T |E'\varphi'+E\varphi''|E(t)dt\\
&\leq LC_6\int_S^T(-E'E)dt+C_6E^2(S)\int_S^T(-\varphi''(t))dt\\
&= \frac{LC_6}{2}\int_S^T\left(-\frac{d}{dt}E^2(t)\right)dt\\
&+ C_6E^2(S)[\varphi'(S)-\varphi'(T)]\\
&= \frac{LC_6}{2}\{E^2(S)-E^2(T)\}\\
&+ C_6E^2(S)\{\varphi'(S)-\varphi'(T)\}\\
&\leq \frac{LC_6}{2}E^2(S)+C_6E^2(S)\varphi'(S). \qquad (3.46)
\end{aligned}
$$

Finalmente, para $\vartheta>0$ temos

$$
\begin{aligned}
-(n-1)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1} u\beta(u')d\Gamma dt &\leq \vartheta\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|u|^2d\Gamma dt\\
&+ \frac{(n-1)^2}{4\vartheta}\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2d\Gamma dt. \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

Da continuidade da aplicação traço $\gamma_0: V\to L^2(\Gamma_1)$ existe uma constante $\zeta>0$ tal que $\|v\|_{\Gamma_1}\leq\zeta\|\nabla v\|_2$, para todo $v\in V$. Então, de (3.47) resulta que

$$
\begin{aligned}
-(n-1)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1} u\beta(u')d\Gamma dt &\leq \vartheta\zeta^2\int_S^T E\varphi'\|\nabla u\|_2^2dt\\
&+ \frac{(n-1)^2}{4\vartheta}\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2d\Gamma dt\\
&\leq \vartheta\zeta^2C_7\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt\\
&+ \frac{(n-1)^2}{4\vartheta}\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2d\Gamma dt. \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

Como Γ_1 é compacto e m, ν são suficientemente regulares, existe $\delta > 0$ tal que $m(x) \cdot \nu(x) \geq \delta > 0$, para todo $x \in \Gamma_1$. Assim, substituindo (3.42)-(3.44), (3.46) e (3.48) em (3.41) resulta que

$$\begin{aligned}
\delta_1 \int_S^T E^2 \varphi' dt &\leq \frac{\eta}{\delta} \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt + \frac{R^2}{\eta} \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&+ C_7 \vartheta \zeta^2 \int_S^T E^2(t) \varphi'(t) dt + \frac{(n-1)^2}{4\vartheta} \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&+ \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |u'|^2 d\Gamma dt - \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} (m \cdot \nu) |\nabla u|^2 d\Gamma dt \\
&+ \left(\frac{LC_6}{2} + C_1 + C_5 \right) E^2(S) + C_6 E^2(S) \varphi'(S) \\
&+ \delta_2 \int_S^T E\varphi' \int_\Omega |u|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

para todo $\eta, \vartheta > 0$.

Tomando η, ϑ suficientemente pequenos de forma que $\delta_1 - C_7 \vartheta \zeta^2 > 0$ e $1 - \dfrac{\eta}{\delta} > 0$ obtemos

$$\begin{aligned}
\int_S^T E^2(t) \varphi'(t) dt &\leq \overline{C}_1 \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&+ \overline{C}_2 \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt + \overline{C}_3 E^2(S) \\
&+ \overline{C}_4 E^2(S) \varphi'(S) + \overline{C}_5 \int_S^T E\varphi' \int_\Omega |u|^2 dx dt, \qquad (3.49)
\end{aligned}$$

onde $\overline{C}_i, \quad i = 1, \ldots, 5$ são constantes positivas.

De (3.40) e (3.49) resulta que

$$\begin{aligned}
[\varphi(T) - \varphi(S)] E^2(S) &\leq \overline{C}_1 \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&+ \overline{C}_2 \int_S^T E\varphi' \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt + \overline{C}_3 E^2(S) \\
&+ \overline{C}_4 \varphi'(S) E^2(S) + \overline{C}_5 \int_S^T E\varphi' \int_\Omega |u|^2 dx dt \\
&+ 2[\varphi(T) - \varphi(S)] \frac{1}{\varphi'(T)} \varphi'(T) \int_S^T E(t) \int_{\Gamma_1} |\beta(u')||u'| d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Agora, desde que φ é côncava e de classe C^2 temos que φ' é uma função não crescente. Disso segue que

$$
\begin{aligned}
[\varphi(T)-\varphi(S)-\overline{C}_4\varphi'(S)-\overline{C}_3]E^2(S) &\leq \left(\overline{C}_1+\frac{\varphi(T)}{\varphi'(T)}\right)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&+ \left(\overline{C}_2+\frac{\varphi(T)}{\varphi'(T)}\right)\int_S^T E\varphi'\int_{\Gamma_1}|u'|^2 d\Gamma dt \\
&+ \overline{C}_5\int_S^T E\varphi'\int_\Omega |u|^2 dxdt.
\end{aligned}
$$

Como $\varphi(t)\to+\infty$ quando $t\to+\infty$, temos para um $T>0$ suficientemente grande que $\varphi(T)-\varphi(S)-\overline{C}_4\varphi'(S)-\overline{C}_3>0$ e

$$
\begin{aligned}
E(S) &\leq C(S,T,\varphi,\varphi')\left\{\int_S^T\varphi'(t)\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2 d\Gamma dt\right. \\
&+ \left.\int_S^T\varphi'(t)\int_{\Gamma_1}|u'|^2 d\Gamma dt+\int_S^T\varphi'(t)\int_\Omega|u|^2dxdt\right\}. \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

O nosso próximo passo é estimar o último termo de (3.50). Neste sentido provaremos o seguinte lema, onde T_0 é uma constante positiva suficientemente grande.

Lema 3.1.2 *Sob as hipóteses* $(A.1)$, $(A.2)$ *e* $(H.1)$ *temos que para todo* $T>T_0$, *existe* $C(T_0,E(0))$ *tal que se* (u,u') *é a solução de (2.1) com condições iniciais* $\{u^0,u^1\}$ *regulares, temos que*

$$
\begin{aligned}
\int_S^T\varphi'\int_\Omega|u|^2dxdt &\leq C(T_0,E(0))\left\{\int_S^T\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u')|^2d\Gamma dt\right. \\
&+ \left.\int_S^T\varphi'\int_{\Gamma_1}|u'|^2d\Gamma dt\right\} \qquad (3.51)
\end{aligned}
$$

para $0\leq S<T<+\infty$.

Demonstração: Vamos fazer a prova por contradição. Suponhamos que (3.51) não seja verificado e que $\{u_k(0)u_k'(0)\}$ seja uma seqüência de condições iniciais cujas soluções correspondentes $\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ de (2.1), com $E_k(0)$ uniformemente limitada em k, verifique

$$
\lim_{k\to+\infty}\frac{\int_S^T\varphi'\int_\Omega|u_k|^2dxdt}{\int_S^T\varphi'\int_{\Gamma_1}|\beta(u_k')|^2d\Gamma dt+\int_S^T\varphi'\int_{\Gamma_1}|u_k'|^2d\Gamma dt}=+\infty. \qquad (3.52)
$$

Como $E_k(0)$ é uniformemente limitada em k e E_k é uma função não decrescente então existe $M > 0$ tal que $E_k(t) \leq M$, para todo $k \in \mathbb{N}$ e para todo $t \geq 0$.

Por (2.5) e (2.2) temos

$$E_k(t) \geq \|\nabla u_k(t)\|_2^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\rho+2}\right] \tag{3.53}$$

e

$$E_k(t) \geq \frac{1}{2}\|u_k'(t)\|_2^2, \tag{3.54}$$

e, portanto, de (3.53) e (3.54) segue que

$$\|\nabla u_k(t)\|_2^2, \text{ e } \|u_k'(t)\|_2^2 \quad \text{são limitadas } \forall t \geq 0, \ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.55}$$

De (3.55) resulta que $\{u_k\}$ possui uma subseqüência tal que

$$u_k \rightharpoonup u \quad \text{fracamente em } H^1(Q), \tag{3.56}$$

$$u_k \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;V), \tag{3.57}$$

$$u_k' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.58}$$

Aplicando argumentos de compacidade resulta que $\{u_k\}$ possui uma subseqüência tal que

$$u_k \to u \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.59}$$

Assumamos que $u \neq 0$. De acordo com (3.59) temos que $\{u_k\}$ possui uma subseqüência tal que

$$|u_k|^\rho u_k \to |u|^\rho u \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega\times]0,T[.$$

Desta convergência e como a seqüência $\{|u_k|^\rho u_k\}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ concluímos, pelo lema de Lions, que

$$|u_k|^\rho u_k \rightharpoonup |u|^\rho u \quad \text{fracamente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.60}$$

Também, temos que o termo $\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dxdt$ é limitado.[1] Conseqüentemente, de (3.52) resulta que

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} (\beta(u_k'))^2 d\Gamma dt + \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u_k'|^2 d\Gamma dt \to 0, \quad \text{quando } k \to +\infty. \tag{3.61}$$

Em particular, temos que

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} (\beta(u_k'))^2 d\Gamma dt \to 0, \quad \text{quando } k \to +\infty. \tag{3.62}$$

Desde que φ é de classe C^2 e côncava, segue que $\varphi'(t) \geq \varphi'(T)$, $t \in [0, T]$, $T > 0$. Logo,

$$0 \leq \varphi'(T) \int_S^T \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt \leq \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt. \tag{3.63}$$

De (3.62) e (3.63) resulta que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_S^T \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt = 0. \tag{3.64}$$

Como S é qualquer tomado no intervalo $[0, T]$, obtemos, em particular,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt = 0$$

e, portanto,

$$\beta(u_k') \to 0 \quad \text{fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \tag{3.65}$$

De maneira análoga, obtemos de (3.61) que

$$u_k' \to 0 \quad \text{fortemente em } L^2(0, T; L^2(\Gamma_1)). \tag{3.66}$$

Como u_k é solução do problema (2.1) temos que

$$\begin{cases} u_k'' - \Delta u_k = |u_k|^\rho u_k \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, T), \\ \dfrac{\partial u_k}{\partial \nu} + \beta(u_k') = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0, T), \\ u_k = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0, T). \end{cases} \tag{3.67}$$

[1]Pois $E_k(t) \leq M; \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall t \geq 0$ e $\|u_k(t)\|_2^2 \leq C_3 E_k(t)$, onde C_3 é uma constante independente de k e t.

Tomando o limite quando $k \to +\infty$ em (3.67) e das convergências anteriores obtemos:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad u_t = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T). \end{cases} \tag{3.68}$$

Derivando a primeira expressão de (3.68) em relação a variável t e tomando $v = u_t$ resulta

$$\begin{cases} v_{tt} - \Delta v = (\rho+1)|u|^\rho v \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad v = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T), \\ v = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T). \end{cases}$$

Observemos que $(\rho+1)|u|^\rho \in L^\infty(0,T;L^n(\Omega))$, uma vez que $u \in L^\infty(0,T;V)$ e $V \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$. Então, usando o Teorema 3.0.1 concluímos que $v \equiv 0$, isto é, $u_t \equiv 0$, para $T > 0$ suficientemente grande.

Retornando a (3.68) obtemos a seguinte equação elíptica para u:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^\rho u \quad \text{em } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{em } \Gamma_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1. \end{cases}$$

Multiplicando por u a equação acima, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Omega |u|^{\rho+2} dx = 0, \tag{3.69}$$

ou seja,

$$J(u) = \frac{\rho}{2(\rho+2)} \|u\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \tag{3.70}$$

Mas, de acordo com (2.5), se $u \neq 0$ temos que $J(u(t)) > \dfrac{\rho}{2(\rho+2)} \|\nabla u\|_2^2$ e de (3.69) segue que $\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} = \|\nabla u\|_2^2$, o que contradiz (3.70).

Agora, vamos assumir que $u \equiv 0$. Definindo

$$c_k = \left[\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dx dt \right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.71}$$

e

$$\overline{u_k} = \frac{1}{c_k} u_k, \tag{3.72}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_\Omega |\overline{u_k}|^2 dx dt &= \int_S^T \varphi' \int_\Omega \frac{|u_k|^2}{c_k^2} \\
&= \frac{1}{c_k^2} \int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dx dt = 1.
\end{aligned} \tag{3.73}$$

Logo, definindo

$$\overline{E_k}(t) := \frac{1}{2}\left\{ \int_\Omega |\overline{u_k}'(t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \overline{u_k}(t)|^2 dx \right\},$$

segue que

$$\overline{E_k}(t) = \frac{1}{2c_k^2}\left\{ \int_\Omega |u_k'(t)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u_k(t)|^2 dx \right\}. \tag{3.74}$$

De (2.5) resulta que

$$\|\nabla u_k(t)\|_2^2 \frac{\rho}{2(\rho+2)} \leq J(u_k(t)) = \frac{1}{2}\|\nabla u_k(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u_k(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|\nabla u_k(t)\|_2^2 \leq \frac{\rho+2}{\rho}\left[\frac{1}{2}\|\nabla u_k(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u_k(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \right]. \tag{3.75}$$

Assim, de (3.74) e (3.75) obtemos

$$\overline{E_k}(t) \leq \frac{1}{c_k^2} C(\rho) E_k(t), \quad \text{onde } C(\rho) = \frac{\rho+2}{\rho} > 1. \tag{3.76}$$

Também,

$$\begin{aligned}
\overline{E_k}(t) &= \frac{1}{2}\left\{ \int_\Omega |\overline{u_k}'|^2 dx + \int_\Omega |\nabla \overline{u_k}(t)|^2 dx \right\} \\
&\geq \frac{1}{c_k^2} E_k(t).
\end{aligned} \tag{3.77}$$

De (3.59) e como $u \equiv 0$ temos que

$$\begin{aligned}
c_k^2 &= \int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dx dt \leq \varphi'(S) \int_S^T \int_\Omega |u_k|^2 dx dt \\
&\leq \varphi'(S) \int_0^T \int_\Omega |u_k|^2 dx dt \to 0; \text{ quando } k \to +\infty,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$c_k \to 0 \quad \text{quando } k \to +\infty.$$

Por outro lado, aplicando (3.50) à solução u_k e dividindo ambos membros da desigualdade resultante por $\displaystyle\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dxdt$, temos, para todo $t \in [S,T]$, $0 \leq S < T < +\infty$, que

$$\frac{E_k(t)}{\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dxdt} \leq C(S,T,\varphi,\varphi') \left\{ \frac{\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u_k'|^2 d\Gamma dt}{\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dxdt} + 1 \right\}. \quad (3.78)$$

De (3.52) segue que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt + \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u_k'|^2 d\Gamma dt}{\int_S^T \varphi' \int_\Omega |u_k|^2 dxdt} = 0 \quad (3.79)$$

e, conseqüentemente, existe $M > 0$ tal que

$$\frac{E_k(t)}{c_k^2} \leq C(S,T,\varphi,\varphi')(M+1)$$

para todo $t \in [S,T]$ e $k \in \mathbb{N}$.

De (3.76) segue que

$$\overline{E_k}(t) \leq C(\rho)C(S,T,\varphi,\varphi')(M+1),$$

para todo $t \in [S,T]$, $0 \leq S < T < +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$; o que equivale a dizer que

$$\|\nabla \overline{u_k}(t)\|_2^2 + \|\overline{u_k}'(t)\|_2^2 \leq 2C(\rho)C(S,T,\varphi,\varphi')(M+1), \quad (3.80)$$

para todo $t \in [S,T]$, $0 \leq S < T < +\infty$ e $k \in \mathbb{N}$.

Então, em particular, para uma subseqüência de $\{\overline{u_k}\}$ obtemos

$$\overline{u_k} \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u} \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;V), \quad (3.81)$$

$$\overline{u_k}' \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{u}' \quad \text{fraco estrela em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \quad (3.82)$$

$$\overline{u_k} \to \overline{u} \quad \text{fortemente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \quad (3.83)$$

Também, $\overline{u_k}$ satisfaz

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{u_k}'' - \Delta\overline{u_k} = |u_k|^\rho \overline{u_k} \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \overline{u_k} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \overline{u_k}}{\partial \nu} + \dfrac{1}{c_k}\beta(u_k') = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T). \end{array}\right. \tag{3.84}$$

De (3.79) resulta que

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt}{c_k^2} = 0. \tag{3.85}$$

Desde que

$$0 \leq \varphi'(T) \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\beta(u_k')}{c_k}\right|^2 d\Gamma dt \leq \frac{1}{c_k^2} \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u_k')|^2 d\Gamma dt,$$

concluímos de (3.85) que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_S^T \int_{\Gamma_1} \left|\frac{\beta(u_k')}{c_k}\right|^2 d\Gamma dt = 0.$$

Em particular, para $S = 0$, obtemos:

$$\frac{\beta(u_k')}{c_k} \to 0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Gamma_1)), \text{ quando } k \to +\infty. \tag{3.86}$$

Como

$$\int_0^T \int_\Omega ||u_k|^\rho \overline{u_k}|^2 dxdt = c_k^{2\rho} \|\overline{u_k}\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}$$

e de (3.80) temos que $\{\overline{u_k}\}$ é limitada em $L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;L^{2(\rho+1)}(\Omega))$, do fato que $c_k \to 0$ quando $k \to +\infty$, resulta que

$$|u_k|^\rho \overline{u_k} \to 0 \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)), \text{ quando } k \to +\infty. \tag{3.87}$$

Tomando o limite quando $k \to +\infty$ em (3.84), de (3.86) e (3.87) segue que

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{u}'' - \Delta\overline{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \overline{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T). \end{array}\right. \tag{3.88}$$

Assim, derivando o problema (3.88) com respeito a variável t e tomando $v = \overline{u}'$ obtemos

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ v = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T). \end{cases}$$

Aplicando o Teorema 3.0.1, como feito anteriormente, segue que $v = \overline{u}' = 0$. Retornando à (3.88) temos

$$\begin{cases} \Delta \overline{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T), \\ \overline{u} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_0 \times (0,T), \\ \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma_1 \times (0,T). \end{cases} \tag{3.89}$$

Multiplicando a primeira equação de (3.89) por $\overline{u}$ resulta pela fórmula de Green que

$$\begin{aligned} 0 &= -\int_\Omega \Delta \overline{u}\, \overline{u} dx \\ &= \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^2 dx - \int_\Gamma \underbrace{\frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}}_{=0 \text{ em } \Gamma_1} \cdot \underbrace{\overline{u}}_{=0 \text{ em } \Gamma_0} d\Gamma = \|\overline{u}\|_V^2, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{u} = 0$ quase sempre. Desse fato, de (3.73) e (3.83) obtemos uma contradição. O que termina a prova do lema 3.1.2.

■

3.1.2 Estimativa para $\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt,\ 1 \leq S < T < +\infty$.

No que segue, estaremos considerando $1 \leq S < T < +\infty$ e φ como definida na demonstração do lema 3.0.3, mais precisamente, $\varphi(t) = \psi^{-1}(t)$ onde $\psi(t) = 1 + \displaystyle\int_1^t \frac{1}{g\left(\frac{1}{s}\right)} ds$, $t \geq 1$.

Substituindo (3.51) na desigualdade (3.49) obtemos, para todo $T > 0$ suficientemente grande, que

$$\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt \;\; \leq \;\; \overline{C}_1'\,(E(0))\, E(S) \int_S^T \varphi'(t) \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \overline{C}_2'(E(0))E(S)\int_S^T \varphi'(t)\int_{\Gamma_1}|u'|^2 d\Gamma dt \\
&+ \quad \overline{C}_3 E^2(S) + \overline{C}_4\varphi'(S)E^2(S).
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

Estimativa para $J_1 := \displaystyle\int_S^T \varphi'(t)\int_{\Gamma_1}|u'|^2 d\Gamma dt$, $1 \leq S < T < +\infty$.

Para cada $t \geq 1$ definamos a seguinte partição de Γ_1:

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{1,1} &= \{x \in \Gamma_1;\ |u'| \leq h(t)\}, \\
\Gamma_{1,2} &= \{x \in \Gamma_1;\ h(t) < |u'| \leq h(1)\}, \\
\Gamma_{1,3} &= \{x \in \Gamma_1;\ |u'| > h(1)\},
\end{aligned}
$$

onde cada $\Gamma_{1,j}$ depende de t e $h(t) = g^{-1}(\varphi'(t))$, $t \geq 1$, é uma função positiva não crescente e que satisfaz $h(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$.

Estimativa de $J_1(t)$ sobre $\Gamma_{1,3}$: Temos que $h(1) = 0$ se, e somente se, $g^{-1}(\varphi'(1)) = 0$ se, e somente se, $\varphi'(1) = g(0) = 0$. Mas, se $\varphi'(1) = 0$ segue que $0 \leq \varphi'(t) \leq \varphi'(1) = 0$ para todo $t \geq 1$ e, portanto, $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \geq 1$, o que contradiz o fato de φ ser estritamente crescente. Então, $h(1) > 0$.

Se $|u'| > 1$ temos por $(H.3)$ que $|\beta(u')| \geq C_1|u'|$.

Se $|u'| \leq 1$ então $h(1) < 1$. Observe que a função $y \mapsto \dfrac{\beta(y)}{y}$ é positiva e contínua em $I = [-1, -h(1)] \cup [h(1), 1]$ o que implica que existe uma constante positiva d_1 tal que $\dfrac{\beta(y)}{y} \geq d_1$ em I, ou seja, para $y = u'$ obtemos $|\beta(u')| \geq d_1|u'|$.

Assim, para $C_0 = \min\{C_1, d_1\}$ temos $|u'| \leq \dfrac{1}{C_0}|\beta(u')|$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,3}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \frac{1}{C_0}\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,3}} |u'||\beta(u')| d\Gamma dt \\
&\leq \frac{1}{C_0}\varphi'(S)\int_S^T \int_{\Gamma_1} u'\beta(u') d\Gamma dt \\
&= \frac{\varphi'(S)}{C_0}\int_S^T (-E'(t))dt \\
&\leq \frac{\varphi'(S)}{C_0}E(S).
\end{aligned}
\tag{3.91}
$$

Estimativa para $J_1(t)$ sobre $\Gamma_{1,2}$: Se $x \in \Gamma_{1,2}$, como g é crescente, temos que $\varphi'(t) = g(h(t)) \leq g(|u'|) = |g(u')|$.

Se $|u'| \leq 1$, por $(H.2)$, segue que $|g(u')| \leq |\beta(u')| \leq |g^{-1}(u')|$. Logo,

$$|u'|^2|g(u')| \leq |u'|^2|\beta(u')| \leq |u'||u'||\beta(u')| \leq u'\beta(u').$$

Se $|u'| > 1$ então $h(1) > 1$ e $|u'| \in [1, h(1)]$. Daí, $-h(1) \leq u' \leq h(1)$. Como g é uma função crescente e ímpar segue que $|g(u')| \leq g(h(1))$. Então, de $(H.3)$, resulta que

$$\frac{1}{g(h(1))} \leq \frac{1}{|g(u')|} \leq \frac{|\beta(u')|}{C_1|u'||g(u')|} = \frac{|u'||\beta(u')|}{C_1|u'|^2|g(u')|},$$

ou seja,

$$|u'|^2|g(u')| \leq \frac{g(h(1))}{C_1}u'\beta(u').$$

Tomando $d_0 = \max\left\{1, \dfrac{g(h(1))}{C_1}\right\}$ concluímos que $|u'|^2|g(u')| \leq d_0 u'\beta(u')$. Conseqüentemente, como $\varphi' = g(h(t)) \leq |g(u')|$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,2}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \int_{\Gamma_{1,2}} |g(u')||u'|^2 d\Gamma dt \\ &\leq d_0 \int_S^T \int_{\Gamma_{1,2}} u'\beta(u') d\Gamma dt \\ &= d_0 \int_S^T (-E'(t))dt \leq d_0 E(S). \end{aligned} \tag{3.92}$$

Estimativa para $J_1(t)$ sobre $\Gamma_{1,1}$:

$$\begin{aligned} \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,1}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,1}} (h(t))^2 \, d\Gamma dt \\ &\leq med(\Gamma) \int_S^T \varphi' \left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \end{aligned} \tag{3.93}$$

Assim, de (3.91)-(3.93) obtemos que existem constantes positivas L_1, L_2 que verificam

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt \leq L_1 E(S) + L_2 \int_S^T \varphi'(t) \left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \tag{3.94}$$

Estimativa para $J_2 := \displaystyle\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt$, $1 \leq S < T < +\infty$.

Para cada $t \geq 1$ definamos a seguinte partição de Γ_1:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,4} &= \{x \in \Gamma_1;\ |u'| \leq \varphi'(t)\}\,,\\
\Gamma_{1,5} &= \{x \in \Gamma_1;\ \varphi'(t) < |u'| \leq \varphi'(1)\}\,,\\
\Gamma_{1,6} &= \{x \in \Gamma_1;\ |u'| > \varphi'(1)\}\,.
\end{aligned}$$

Utilizando um cálculo análogo ao feito na prova de (3.91) concluímos que existem $C_3 > 0$, $C_4 > 0$ tais que

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,6}} (\beta(u'))^2 d\Gamma dt &\leq C_3 \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,6}} u'\beta(u') d\Gamma dt\\
&\leq C_4 \int_S^T (-E'(t))dt \leq C_4 E(S). \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

Da monotonia de β segue que existe $C_5 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,5}} (\beta(u'))^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \int_{\Gamma_{1,5}} |u'||\beta(u')|^2 d\Gamma dt\\
&\leq C_5 \int_S^T \int_{\Gamma_{1,5}} u'\beta(u') d\Gamma dt \leq C_5 E(S). \qquad (3.96)
\end{aligned}$$

Finalmente, de $(H.2)$ e do fato de g^{-1} ser crescente, garantimos a existência de $C_6 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,4}} (\beta(u'))^2 d\Gamma dt &\leq C_6 \int_S^T \varphi' \int_{\{x\in\Gamma_{1,4};|u'(x,t)|>1\}} |u'|^2 d\Gamma dt\\
&+ \int_S^T \varphi' \int_{\{x\in\Gamma_{1,4};|u'(x,t)|\leq 1\}} \left(g^{-1}(|u'|)\right)^2 d\Gamma dt\\
&\leq C_6 \int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_{1,4}} |u'|^2 d\Gamma dt\\
&+ med(\Gamma) \int_S^T \varphi'(t) \left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \qquad (3.97)
\end{aligned}$$

De (3.94)-(3.97) resulta que

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \leq L_1^* E(S) + L_2^* \int_S^T \varphi'(t) \left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt, \qquad (3.98)$$

onde L_1^*, L_2^* são constantes positivas.

De (3.90), (3.94) e (3.98) segue que

$$\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt \leq \overline{C}_1'(E(0))E(S)\left(L_1^* E(S) + L_2^* \int_S^T \varphi'(t)\left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt\right)$$

$$
\begin{aligned}
&+ \quad \overline{C}'_2(E(0))E(S)\left(L_1E(S)+L_2\int_S^T \varphi'(t)\left(g^{-1}\left(\varphi'(t)\right)\right)^2 dt\right)\\
&+ \quad \overline{C}_3E^2(S)+\overline{C}_4\varphi'(S)E^2(S),
\end{aligned}
$$

ou seja, existe $C>0$ tal que para $1\leq S<T<+\infty$ temos

$$
\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt \leq CE^2(S)+C(E(0))E(S)\int_S^T \varphi'(t)\left(g^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \tag{3.99}
$$

3.1.3 Prova da primeira estimativa de energia

No que segue φ é a função definida no Lema 3.0.3 e tomando limite quando $T\to+\infty$ em (3.99) segue que

$$
\begin{aligned}
\int_S^{+\infty} E^2(t)\varphi'(t)dt &\leq CE^2(S)+C(E(0))E(S)\int_S^{+\infty}\varphi'(t)(g^{-1}(\varphi'(t)))^2dt\\
&= CE^2(S)+C(E(0))E(S)\int_{\varphi(S)}^{+\infty}\left(g^{-1}(\varphi'(\varphi^{-1}(\tau)))\right)^2 d\tau\\
&= CE^2(S)+C(E(0))E(S)\int_{\varphi(S)}^{+\infty}\left(g^{-1}\left(\frac{1}{(\varphi^{-1})'(\tau)}\right)\right)^2 d\tau\\
&= CE^2(S)+C(E(0))E(S)\int_{\varphi(S)}^{+\infty}\frac{1}{\tau^2}d\tau\\
&= CE^2(S)+C(E(0))\frac{E(S)}{\varphi(S)}. \qquad (3.100)
\end{aligned}
$$

Definindo $F:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ dada por $F(\bar{t})=E(\bar{t}+1)$ e $\overline{\varphi}(\bar{t})=\varphi(\bar{t}+1)-\varphi(1)$ então para todo $S_1\geq 0$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{S_1}^{+\infty} F^2(\bar{t})\overline{\varphi}'(\bar{t})d\bar{t} &= \int_{S_1}^{+\infty} F^2(\bar{t})\varphi'(\bar{t}+1)d\bar{t}\\
&= \int_{S_1}^{+\infty} E^2(\bar{t}+1)\varphi'(\bar{t}+1)d\bar{t}.
\end{aligned}
$$

Fazendo a mudança de variável $t=\bar{t}+1$ na expressão acima e tomando $S=S_1+1$ resulta que

$$
\int_{S_1}^{+\infty} F^2(\bar{t})\overline{\varphi}'(\bar{t})d\bar{t}=\int_S^{+\infty}E^2(t)\varphi'(t)dt
$$

o que por (3.100) é menor ou igual a

$$
CE^2(S)+\frac{C(E(0))E(S)}{\varphi(S)}=CE^2(S)+\frac{C(E(0))}{E(1)}\frac{F(0)}{\varphi(S)}E(S)
$$

Assim, pondo $C^* = \dfrac{C(E(0))}{E(1)}$ segue que

$$\begin{aligned}\int_{S_1}^{+\infty} F^2(\bar{t})\overline{\varphi}'(\bar{t})d\bar{t} &\leq CE^2(S) + \frac{C^*F(0)E(S)}{1+[\varphi(S)-\varphi(1)]} \\ &= CF^2(S_1) + \frac{C^*F(0)}{1+\overline{\varphi}(S_1)}F(S_1),\ \forall S_1 \geq 0. \qquad (3.101)\end{aligned}$$

Observemos que $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é uma função não crescente e $\overline{\varphi}$ é uma função crescente, de classe C^1, $\overline{\varphi}(0) = 0$, $\overline{\varphi}(\bar{t}) \to +\infty$ quando $\bar{t} \to +\infty$ e satisfaz (3.101), então pelo Lema 3.0.2 segue que existe $C' > 0$ tal que

$$F(\bar{t}) \leq F(0)\frac{C'}{\left(1+\overline{\varphi}(\bar{t})\right)^2}, \quad \forall \bar{t} > 0. \qquad (3.102)$$

Fazendo $t = \bar{t} + 1$ e lembrando que $\varphi(1) = 1$ obtemos por (3.102) que

$$E(t) \leq E(1)\frac{C'}{\left(1+[\varphi(\bar{t}+1)-\varphi(1)]\right)^2} \leq E(0)\frac{C'}{(\varphi(t))^2}, \quad \forall t \geq 1. \qquad (3.103)$$

Seja τ_0 tal que $g\left(\dfrac{1}{\tau_0}\right) \leq 1$. Então, existe $t_0 \geq 1$ tal que $\tau_0 = \varphi(t_0)$. Pela monotonia de g temos que

$$\forall \tau \geq \tau_0, \quad \psi(\tau) \leq 1 + (\tau - 1)\frac{1}{g(\frac{1}{\tau})} \leq \tau\frac{1}{g(\frac{1}{\tau})} = \frac{1}{G(\frac{1}{\tau})},$$

onde ψ é definida na demonstração do lema 3.0.3 e $G(y) = yg(y)$.

Assim, como $\tau = \varphi(t) = \psi^{-1}(t)$, da desigualdade anterior resulta que

$$t \leq \frac{1}{G(\frac{1}{\tau})},$$

ou ainda, do fato que a função G^{-1} é crescente,

$$\frac{1}{\varphi(t)} = \frac{1}{\tau} \leq G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Logo, de (3.103)

$$E(t) \leq C\left(G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2, \quad \forall t \geq t_0,$$

e da continuidade de G^{-1} resulta que

$$E(t) \leq \overline{C}\left(G^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2, \quad \forall t \geq 1.$$

3.1.4 Prova da segunda estimativa de energia

Suponha que $H(0) = 0$ e que H é crescente em $[0, \eta]$ para algum $\eta > 0$. Sejam φ uma função de classe C^2, crescente, côncava, tal que $\varphi'(t) \to 0$ quando $t \to +\infty$; e $T_1 > 0$ tal que

$$\forall t \geq T_1; \quad H\left(\frac{1}{t}\right) \leq \eta. \tag{3.104}$$

Seja $T_2 \geq \max\left\{T_1, \frac{1}{\eta}\right\}$ tal que

$$\forall t \geq T_2; \quad \varphi'(t) \leq \eta \quad \text{e} \quad \varphi'(t) \leq H(\eta). \tag{3.105}$$

Então, definamos

$$\widetilde{h}(t) = H^{-1}\left(\varphi'(t)\right). \tag{3.106}$$

Desde que H é crescente em $[0, \eta]$ segue que $\widetilde{h}$ é uma função não crescente que satisfaz

$$\widetilde{h}(t) \leq \eta, \quad \forall t \geq T_2 \tag{3.107}$$

e

$$\widetilde{h}(t) \to 0 \quad \text{quando} \quad t \to +\infty. \tag{3.108}$$

No que segue estaremos considerando $T_2 \leq S < T < +\infty$.

Nosso objetivo agora é, através da desigualdade (3.90), obter uma melhor estimativa para $\displaystyle\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt$.

Estimativa de $J_1 := \displaystyle\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt$.

Para cada $t \geq T_2$ definamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{1,1} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ |u'| \leq \widetilde{h}(t)\right\}, \\
\widetilde{\Gamma}_{1,2} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ \widetilde{h}(t) < |u'| \leq \widetilde{h}(T_2)\right\}, \\
\widetilde{\Gamma}_{1,3} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ |u'| > \widetilde{h}(T_2)\right\}.
\end{aligned}$$

Estimativa de J_1 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,3}$: Temos que $\widetilde{h}(T_2) = 0$ se, e somente se, $H^{-1}(\varphi'(T_2)) = 0$, ou ainda, se, e somente se, $\varphi'(T_2) = H(0) = 0$. Mas, se $\varphi'(T_2) = 0$ então $\varphi'(t) = 0$ para todo $t \geq T_2$ o que contradiz o fato de φ ser crescente.

Se $|u'| > 1$ então obtemos de $(H.3)$ que $|\beta(u')| \geq C_1|u'|$.

Se $|u'| \leq 1$ então $\widetilde{h}(T_2) < 1$ e da continuidade da função H em $[-1, -\widetilde{h}(T_2)] \cup [\widetilde{h}(T_2), 1]$ implica que existe $\widetilde{d_0} > 0$ tal que $|\beta(u')| \geq \widetilde{d_0}|u'|$.

Assim, tomando $\widetilde{C_0} = \min\{C_1, \widetilde{d_0}\}$ obtemos que

$$|\beta(u')| \geq \widetilde{C_0}|u'|.$$

Disso segue que

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,3}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \frac{1}{\widetilde{C_0}} \int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,3}} u'\beta(u') d\Gamma dt \\
&\leq \frac{\varphi'(S)}{\widetilde{C_0}} \int_S^T (-E'(t))dt \\
&\leq \frac{\varphi'(S)}{\widetilde{C_0}} E(S).
\end{aligned} \tag{3.109}$$

Estimativa de J_1 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,2}$: Se $x \in \widetilde{\Gamma}_{1,2}$, considerando que H é crescente em $[0, \eta]$ obtemos

$$\varphi'(t) = H(\widetilde{h}(t)) \leq H(|u'|) = H(u'). \tag{3.110}$$

Se $|u'| \leq 1$ então de $(H.2)$ segue que

$$|H(u')| = \left| \frac{g(u')}{u'} \right| \leq \frac{|\beta(u')|}{|u'|}.$$

Assim,

$$|u'|^2 |H(u')| \leq |u'|^2 \left(\frac{|\beta(u')|}{|u'|} \right) = u'\beta(u').$$

Se $|u'| > 1$ então $\widetilde{h}(T_2) > 1$. Conseqüentemente, $|u'| \in [1, \widetilde{h}(T_2)]$ o que resulta que

$$H(|u'|) \leq H(\widetilde{h}(T_2)).$$

Segue de $(H.3)$ que

$$\frac{1}{H(\widetilde{h}(T_2))} \leq \frac{1}{H(|u'|)} \leq \frac{|\beta(u')|}{C_1|u'|H(|u'|)} = \frac{u'\beta(u')}{C_1|u'|^2 H(u')},$$

ou seja,

$$|u'|^2 H(|u'|) \leq \frac{H(\widetilde{h}(T_2))}{C_1} u'\beta(u').$$

Tomando $\widetilde{d}_1 = \max\left\{1, \dfrac{H(\widetilde{h}(T_2))}{C_1}\right\}$ concluímos que

$$|u'|^2 H(|u'|) \leq \widetilde{d}_1 u'\beta(u').$$

Consequentemente, de (3.110) resulta

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,2}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,2}} H(|u'|)|u'|^2 d\Gamma dt \\
&\leq \widetilde{d}_1 \int_S^T \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,2}} u'\beta(u') d\Gamma dt \\
&\leq \widetilde{d}_1 \int_S^T \int_{\Gamma_1} u'\beta(u') d\Gamma dt \\
&= \widetilde{d}_1 \int_S^T (-E'(t)) dt \leq \widetilde{d}_1 E(S). \qquad (3.111)
\end{aligned}$$

Estimativa de J_1 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,1}$:

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,1}} |u'|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,1}} \left(\widetilde{h}(t)\right)^2 d\Gamma dt \\
&\leq med(\Gamma) \int_S^T \varphi' \left(H^{-1}(\varphi(t))\right)^2 dt. \qquad (3.112)
\end{aligned}$$

Assim, de (3.109), (3.111) e (3.112) segue que existem constantes positivas $\widetilde{L}_1$ e $\widetilde{L}_2$ tais que

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt \leq \widetilde{L}_1 E(S) + \widetilde{L}_2 \int_S^T \varphi'(t) \left(H^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \qquad (3.113)$$

Estimativa de $J_2 := \displaystyle\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt$.

Para cada $t \geq T_2$ definamos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{1,4} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ |\beta(u')| \leq \widetilde{h}(t)\right\}, \\
\widetilde{\Gamma}_{1,5} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ \widetilde{h}(t) < |\beta(u')| \leq \widetilde{h}(T_2)\right\}, \\
\widetilde{\Gamma}_{1,6} &= \left\{x \in \Gamma_1;\ |\beta(u')| > \widetilde{h}(T_2)\right\}.
\end{aligned}$$

Estimativa de J_2 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,6}$:

Se $|u'| > 1$ então $|\beta(u')| \leq C_2|u'|$.

Se $|u'| \leq 1$; como $|\beta(u')| > \widetilde{h}(T_2) > 0$, $\beta(0) = 0$ e β é contínua segue que existe $0 < C < 1$ tal que $|u'| \geq C$. Assim, da continuidade da aplicação $y \mapsto \dfrac{\beta(y)}{y}$ em $[-1, -C] \cup [C, 1]$ resulta que existe d_2 tal que $|\beta(y)| \leq d_2|y|$. Logo, tomando $C_3 = \max\{C_2, d_2\}$ obtemos

$$|\beta(u')| \leq C_3|u'|.$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,6}} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \eta C_3 \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,6}} |u'||\beta(u')| d\Gamma dt \\
&\leq \eta C_3 \int_S^T \int_{\Gamma_1} u'\beta(u') d\Gamma dt \\
&= \eta C_3 \int_S^T (-E'(t)) dt \leq \eta C_3 E(S). \qquad (3.114)
\end{aligned}$$

Estimativa de J_2 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,5}$: Desde que H é crescente em $[0, \eta]$ temos para $|u'| \leq 1$ que:

$$\begin{aligned}
\varphi'(t) &= H(\widetilde{h}(t)) \leq H(|\beta(u')|) = \frac{g\left(|\beta(u')|\right)}{|\beta(u')|} \\
&\leq \frac{g\left(|g^{-1}(u')|\right)}{|\beta(u')|} = \frac{g\left(g^{-1}(|u'|)\right)}{|\beta(u')|} = \frac{|u'|}{|\beta(u')|},
\end{aligned}$$

e para $|u'| > 1$, de $(H.3)$, segue que $|\beta(u')| \leq C_2|u'|$. Daí,

$$\begin{aligned}
\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,5}} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt &\leq \int_S^T \eta \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,5}} C_2|u'||\beta(u')| d\Gamma dt \\
&+ \int_S^T \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,5}} \frac{|u'|}{|\beta(u')|} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \\
&\leq C_4 \int_S^T \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,5}} |u'||\beta(u')| d\Gamma dt \\
&\leq C_4 \int_S^T (-E'(t)) dt \leq C_4 E(S). \qquad (3.115)
\end{aligned}$$

Estimativa de J_2 sobre $\widetilde{\Gamma}_{1,4}$:

$$\int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,4}} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \leq \int_S^T \varphi' \int_{\widetilde{\Gamma}_{1,4}} \left(\widetilde{h}(t)\right)^2 d\Gamma dt$$

$$\leq \ med(\Gamma) \int_S^T \varphi' \left(H^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt, \qquad (3.116)$$

onde C_4 é uma constante positiva.

Assim, de (3.114)-(3.116) segue que existe $C_6 > 0$ tal que

$$\int_S^T \varphi' \int_{\Gamma_1} |\beta(u')|^2 d\Gamma dt \leq C_6 E(S) + C_6 \int_S^T \varphi' \left(H^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt. \qquad (3.117)$$

Substituindo (3.113) e (3.117) em (3.90) segue que existe $C_7 > 0$ tal que

$$\int_S^T E^2(t)\varphi'(t)dt \leq C_7 E^2(S) + C_7 E(S) \int_S^T \varphi' \left(H^{-1}(\varphi'(t))\right)^2 dt, \quad \forall T_2 \leq S < T < +\infty. \qquad (3.118)$$

Definamos

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(t) = T_2 + \int_{T_2}^t \frac{1}{H\left(\frac{1}{\tau}\right)} d\tau.$$

Então, $\forall t \geq T_2$ temos que $\widetilde{\varphi}(t) \geq T_2 \geq \dfrac{1}{\eta}$. Também,

$$\forall t \geq T_2, \quad \widetilde{\varphi}'(t) = H\left(\frac{1}{\widetilde{\varphi}(t)}\right) \leq H(\eta)$$

e

$$\forall t \geq T_2, \quad \widetilde{\varphi}'(t) \leq \widetilde{\varphi}'(T_2) = H\left(\frac{1}{\widetilde{\varphi}(T_2)}\right) = H\left(\frac{1}{T_2}\right) \leq H\left(\frac{1}{T_1}\right) \leq \eta.$$

Assim, $\widetilde{\varphi}$ está nas hipóteses da demonstração do Lema 3.0.3 com H substituindo a função g. Argumentando de maneira análoga à obtenção da desigualdade (3.103), resulta:

$$E(t) \leq E(0)\frac{C}{(\widetilde{\varphi})^2}. \qquad (3.119)$$

Tomando $T_3 \geq T_2$ tal que $H\left(\dfrac{1}{T_3}\right) \leq 1$ segue que

$$\widetilde{\varphi}^{-1}(\tau) \leq T_2 + \frac{\tau - T_2}{H\left(\frac{1}{\tau}\right)} \leq \frac{\tau}{H\left(\dfrac{1}{\tau}\right)} = \frac{1}{g\left(\frac{1}{\tau}\right)}, \quad \forall \tau \geq T_3.$$

Como $\widetilde{\varphi}(t) = \tau$ resulta da expressão acima que

$$t \leq \frac{1}{g\left(\frac{1}{\tau}\right)},$$

ou seja,

$$\frac{1}{t} \geq g\left(\frac{1}{\tau}\right).$$

Pelo crescimento da função g obtemos que

$$\frac{1}{\widetilde{\varphi}(t)} \leq g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right). \tag{3.120}$$

De (3.119) e (3.120) segue que

$$E(t) \leq E(0)C\left(g^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)\right)^2,$$

o que prova a segunda estimativa do teorema 3.0.4.

■

3.2 Prova do Teorema 3.0.5

Nosso objetivo nesta seção provar o Teorema 3.0.5. Para isso usaremos argumentos de densidade e o Teorema 3.0.4.

Seja u uma solução fraca do problema (2.1) com condições iniciais $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$. Da unicidade de solução fraca, por (2.140) e (2.141) segue que existe uma seqüência (u_μ) de soluções regulares de (2.1) tal que

$$u_\mu \to u \quad \text{fortemente em} \quad C^0\left([0,T];V\right)$$

e

$$u'_\mu \to u' \quad \text{fortemente em} \quad C^0\left([0,T];L^2(\Omega)\right),$$

para todo $T > 0$.

Assim, para todo $t > 0$ obtemos:

$$\begin{aligned}
&\nabla u_\mu(t) \to \nabla u(t) \quad \text{em } L^2(\Omega),\\
&u_\mu(t) \to u(t) \quad \text{em } L^{\rho+2}(\Omega),\\
&u'_\mu(t) \to u'(t) \quad \text{em } L^2(\Omega).
\end{aligned}$$

Disso segue que, para todo $t > 0$,

$$E_\mu(t) = \frac{1}{2}\|u'_m u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}$$

converge para

$$E(t) = \frac{1}{2}\|u'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2},$$

quando $\mu \to +\infty$. Logo, como $E_\mu(0) \leq d$, para todo μ, segue do Teorema 3.0.4 as mesmas estimativas enunciadas no Teorema 3.0.5.

3.3 Estimativas mais gerais

Observemos que nas estimativas anteriores para a energia associada ao problema (2.1), consideramos Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ de classe C^2, $med(\Gamma_0) > 0$ e Γ_0, Γ_1 partes fechadas e disjuntas de Γ. Além disso, tínhamos que

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) \leq 0\} \quad \text{e} \quad \Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\},$$

onde $m(x) = x - x_0$, x_0 um vetor fixo do $\mathbb{R}^n$.

No que segue, iremos considerar Ω como descrito acima, exceto satisfazendo a condição $\Gamma_1 = \{x \in \Gamma; m(x)\cdot\nu(x) > 0\}$, ou seja, estaremos considerando domínios mais gerais do que os anteriores. No que segue, seguiremos o raciocínio introduzido por Lasiecka e Tataru em [19].

Seja $h(s)$ uma função à valores reais, côncava, crescente e definida em $(0, +\infty)$ satisfazendo $h(0) = 0$ e $h(s\beta(s)) \geq s^2 + \beta^2(s)$; $|s| \leq N$, para algum $N > 0$.

Definamos $\widetilde{h}(x) = h\left(\dfrac{x}{med(\Sigma_1)}\right)$, $x \geq 0$, onde $\Sigma_1 = \Gamma_1 \times (0, +\infty)$ e T é uma constante positiva.

Como $\widetilde{h}$ é uma função monótona crescente, para cada $C \geq 0$, temos que $C + \widetilde{h}$ é inversível. Seja

$$p(x) = (CI + \widetilde{h})^{-1}(\widetilde{k}x), \tag{3.121}$$

onde $\widetilde{k}$ é uma constante positiva. Então, p é uma função positiva, contínua, crescente e $p(0) = 0$. Assim, definamos

$$q(x) = x - (I + p)^{-1}(x),\ x > 0. \tag{3.122}$$

Observemos que a função q definida acima é positiva e não decrescente.

Utilizando as notações acima temos o seguinte resultado:

Teorema 3.3.1 *Suponhamos que as hipóteses* $(A.1)$, $(A.2)$ *e* $(H.1)$ *se verifiquem. Então a energia* $E(t)$ *associada ao problema (2.1) possui a seguinte taxa de decaimento*

$$E(t) \leq S\left(\frac{t}{T_0} - 1\right), \tag{3.123}$$

para todo $t \geq T_0 > 0$*, onde* T_0 *é uma constante positiva suficientemente grande e* $S(t)$ *é a solução da seguinte equação diferencial*

$$S'(t) + q(S(t)) = 0 \tag{3.124}$$

com q *definida em (3.122).*

No decorrer da prova do Teorema 3.3.1 necessitaremos do seguinte resultado:

Lema 3.3.2 *Seja* $\epsilon > 0$ *arbitrariamente pequeno. Seja* w *uma solução de*

$$w_{tt} = \Delta w \quad \text{em } \Omega \times (0, +\infty),$$

ou, mais geralmente, de uma equação hiperbólica de segunda ordem com coeficientes regulares dependendo da variável espacial. Então

$$\int_{\epsilon}^{T-\epsilon} \int_{\Gamma_1} (\nabla_\sigma w)^2 \, d\Gamma dt \leq C_{T,\epsilon} \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left(\left| \frac{\partial w}{\partial \nu} \right|^2 + |w_t|^2 \right) d\Sigma + \|w\|^2_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}+\epsilon}(\Omega))} \right], \tag{3.125}$$

onde ϵ *no lado esquerdo de (3.125) não precisa ser o mesmo do lado direito de (3.125),* $\nabla_\sigma \cdot$ *denota o gradiente tangencial e* $\dfrac{\partial \cdot}{\partial \nu}$ *denota a derivada normal.*

Demonstração: Ver [20]

3.3.1 Prova do Teorema 3.3.1

Lema 3.3.3 *Suponhamos que $m(x) = x - x_0$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ satisfaz $m \cdot \nu \leq 0$ em Γ_0 e seja u uma solução regular do problema (2.1) definida no teorema 3.0.4. Então, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)T+\alpha}^{kT-\alpha} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt \quad &\leq \quad C\left[\|u'\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))}\right.\\
&+ \quad \left.\|\nabla u\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))}\right]\\
&+ \quad C_{T,\alpha,\delta}\left[\int_{\Sigma_{k,1}} \left(|u'|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2\right) d\Sigma_k\right.\\
&+ \quad \left.\int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k\right]\\
&+ \quad C\int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k\\
&+ \quad C_{T,\alpha,\delta}\|u\|_{L^2((k-1)T,kT;H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega))}, \qquad (3.126)
\end{aligned}$$

onde $Q_k = \Omega \times ((k-1)T, kT)$, $\Sigma_k = \Gamma \times ((k-1)T, kT)$, $\Sigma_{k,1} = \Gamma_1 \times ((k-1)T, kT)$ e as constantes $C, C_{\alpha,\delta}$ são independentes de T. Além disso, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\alpha, \delta > 0$ são arbitrariamente pequenos, porém fixados.

Demonstração: Fixemos $k \in \mathbb{N}^*$. Usaremos o método dos multiplicadores. Com efeito, multiplicando a equação

$$u'' - \Delta u = |u|^\rho u$$

por $2(m \cdot \nabla u)$ e integrando em $Q_k = \Omega \times ((k-1)T, kT)$ obtemos

$$\begin{aligned}
2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega u''(m \cdot \nabla u) dxdt \quad - \quad & 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \Delta u(m \cdot \nabla u) dxdt\\
= \quad & 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^\rho u(m \cdot \nabla u) dxdt. \qquad (3.127)
\end{aligned}$$

Esitmativa de $J_1 := \displaystyle\int_{(k-1)T}^{kT} u''(m \cdot \nabla u) dxdt.$

Integrando por partes e aplicando o lema de Gauss resulta que

$$J_1 = 2\left[\int_\Omega u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_{(k-1)T}^{kT} + n\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega (u')^2 dxdt - \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)(u')^2 d\Gamma dt. \tag{3.128}$$

Estimativa de $J_2 := -2\displaystyle\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \Delta u(m\cdot\nabla u)dxdt.$

Pela fórmula de Green generalizada, como $u \in H^2(\Omega)$ e $\dfrac{\partial u}{\partial\nu} \in L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))$, segue que

$$J_2 = \int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \nabla u\nabla(m\cdot\nabla u)dxdt - 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt.$$

De maneira análoga ao feito na prova de (3.18) resulta

$$\begin{aligned} J_2 &= (2-n)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt + \int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega (m\cdot\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma dt \\ &- 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Multiplicando a equação $u'' - \Delta u = |u|^\rho u$ por $(n-1)u$ e integrando sobre $Q_k = \Omega\times((k-1)T, kT)$ resulta

$$\begin{aligned} (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega u'' u dxdt &- (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \Delta u u dxdt \\ &= (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^{\rho+2} dxdt. \end{aligned} \tag{3.130}$$

Analogamente, temos

$$\begin{aligned} (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega u'' u dxdt &= (n-1)\left[\int_\Omega u' u dx\right]_{(k-1)T}^{kT} \\ &- (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u'|^2 dxdt \end{aligned} \tag{3.131}$$

e

$$\begin{aligned} -(n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \Delta u u dxdt &= (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt \\ &- (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial\nu} u d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{3.132}$$

Substituindo (3.128) e (3.129) em (3.127); (3.131) e (3.132) em (3.130) e somando as expressões obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Omega}\left[|u'|^2+|\nabla u|^2\right]dxdt &+ 2\left[\int_{\Omega}u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_{(k-1)T}^{kT}\\
&+ (n-1)\left[\int_{\Omega}u'udx\right]_{(k-1)T}^{kT}\\
&- \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2d\Gamma dt\\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2d\Gamma dt\\
&- 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial\nu}(m\cdot\nabla u)d\Gamma dt\\
&- (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}ud\Gamma dt\\
&= (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Omega}|u|^{\rho+2}dxdt\\
&+ 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Omega}|u|^{\rho}u(m\cdot\nabla u)dxdt. \qquad (3.133)
\end{aligned}$$

Do fato que

$$\nabla u=\nabla_{\sigma}u+\frac{\partial u}{\partial\nu}\nu \text{ e, conseqüentemente, } |\nabla u|^2=\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+|\nabla_{\sigma}u|^2,$$

onde $\nabla_{\sigma}u$ é o gradiente tangencial de u; resulta de (3.133) que

$$\begin{aligned}
\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Omega}\left[|u'|^2+|\nabla u|^2\right]dxdt &+ 2\left[\int_{\Omega}u'(m\cdot\nabla u)dx\right]_{(k-1)T}^{kT}\\
&+ (n-1)\left[\int_{\Omega}u'udx\right]_{(k-1)T}^{kT}\\
&- \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}(m\cdot\nu)|u'|^2d\Gamma dt\\
&- \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma}(m\cdot\nu)\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2d\Gamma dt\\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma}(m\cdot\nabla u)|\nabla_{\sigma}u|^2d\Gamma dt\\
&- (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}\frac{\partial u}{\partial\nu}ud\Gamma dt
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (n-1)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt \\
&+ 2\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^\rho u(m\cdot\nabla u)dxdt. \quad (3.134)
\end{aligned}
$$

Utilizando que $m\cdot\nu \leq 0$ em Γ_0 e $\nabla_\sigma u = 0$ em Γ_0, da igualdade acima obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \left[|u'|^2+|\nabla u|^2\right]dxdt &\leq C_1\|u'\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} \\
&+ C_2\|\nabla u\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} \\
&+ C_3\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}|u'|^2d\Gamma dt \\
&+ C_4\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \\
&+ C_5\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}|\nabla_\sigma u|^2 d\Gamma dt \\
&+ C_6(\epsilon)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \\
&+ \epsilon\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt + C_7\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt \\
&+ C_8(\epsilon)\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^{2(\rho+1)}dxdt \\
&+ \epsilon\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |\nabla u|^2dxdt,
\end{aligned}
$$

onde ϵ é uma constante positiva arbitrária.

Da desigualdade acima e considerando ϵ suficientemente pequeno, obtemos:

$$
\begin{aligned}
\int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega \left[|u'|^2+|\nabla u|^2\right]dxdt &\leq C\Big\{\|u'\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} \\
&+ \|\nabla u\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} \\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}|u'|^2d\Gamma dt \\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma dt \\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}|\nabla_\sigma u|^2 d\Gamma dt \\
&+ \int_{(k-1)T}^{kT}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dxdt
\end{aligned}
$$

$$+ \int_{(k-1)T}^{kT} \int_\Omega |u|^{2(\rho+1)} dxdt \Big\}, \qquad (3.135)$$

onde C é uma constante positiva.

Por outro lado, pelo Lema 3.3.2, para $\alpha > 0$ e $0 < \delta < \frac{1}{2}$ suficientemente pequenos, temos, procedendo iterativamente, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_{(k-1)T+\alpha}^{kT-\alpha} \int_{\Gamma_{k,1}} |\nabla_\sigma u|^2 d\Gamma dt \leq C_{T,\alpha,\delta} \left\{ \int_{\Sigma_{k,1}} \left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k \right.$$
$$\left. + C_T \|u\|_{L^2((k-1)T,kT;H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega))} + \int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k \right\} \qquad (3.136)$$

Considerando em (3.135) o intervalo $((k-1)T+\alpha, kT-\alpha)$ no lugar de $[((k-1)T, kT)]$ e aplicando a última desigualdade resulta (3.126), o que prova o Lema.

Agora, observemos que por (2.2) e (2.5) temos

$$\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 \leq CE(t) \leq CE(0),\ t \geq 0, \qquad (3.137)$$

onde C depende apenas de ρ. Tomando o supremo essencial em (3.137) sobre $[((k-1)T, kT)]$, resulta

$$\|u'\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} \leq CE((k-1)T). \qquad (3.138)$$

Por outro lado, da relação

$$E'(t) = -\int_{\Gamma_1} \beta(u')u' d\Gamma \leq 0,\ t \geq 0,$$

segue que

$$E(t) + \int_s^t \int_{\Gamma_1} \beta(u')u' d\Gamma ds = E(s). \qquad (3.139)$$

Substituindo (3.139) em (3.138) com $s = (k-1)T$ e $t = kT$, obtemos

$$\begin{aligned} \|u'\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} + \|\nabla u\|^2_{L^\infty((k-1)T,kT;L^2(\Omega))} &\leq C \left[E(kT) + \int_{(k-1)T}^{kT} \int_{\Gamma_1} \beta(u')u' d\Gamma dt \right] \\ &\leq C \Big[E(kT) \\ &+ \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k \Big]. \quad (3.140) \end{aligned}$$

De (3.136), (3.140) e observando que $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = -\beta(u')$ em Γ_1 concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T+\alpha}^{kT-\alpha} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt \;&\leq\; C_{T,\alpha,\delta}\left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k\right.\\ &+\; \left.\int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k + \int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k\right]\\ &+\; C_{T,\alpha,\delta}\|u\|_{L^2((k-1)T,kT;H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega))}. \qquad (3.141)\end{aligned}$$

Usando novamente (3.137) e (3.139) com $s = (k-1)T$ e $t = kT$ e considerando $\alpha > 0$ anteriormente escolhido, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T}^{(k-1)T+\alpha} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt \;&+\; \int_{kT-\alpha}^{kT} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt\\ &\leq\; CE((k-1)T)\left[((k-1)T+\alpha) - ((k-1)T)\right.\\ &+\; \left.(kT - (kT-\alpha))\right] = 2\alpha C E((k-1)T)\\ &\leq\; 2\alpha C\left[E(kT)\right.\\ &+\; \left.\int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k\right]. \qquad (3.142)\end{aligned}$$

De (3.141) e (3.142) resulta que

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T}^{kT} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt \;&\leq\; C_{T,\alpha,\delta}\left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k\right.\\ &+\; \left.\int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k + \int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k\right]\\ &+\; C_{T,\alpha,\delta}\|u\|_{L^2((k-1)T,kT;H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega))}. \qquad (3.143)\end{aligned}$$

Observemos que pelo teorema 1.4.10 temos

$$\begin{aligned}C_{T,\alpha,\delta}\|u\|^2_{L^2((k-1)T,kT;H^{\frac{1}{2}+\delta}(\Omega))} \;&\leq\; \frac{2\epsilon^2}{C_1}\|u\|_{L^2((k-1)T,kT;H^1(\Omega))}\\ &+\; C_2(\epsilon)\|u\|_{L^2((k-1)T,kT;L^2(\Omega))}\\ &\leq\; 2\epsilon^2 \int_{(k-1)T}^{kT} \|\nabla u(t)\|_2^2 dt\\ &+\; C(\epsilon)\int_{(k-1)T}^{kT} \|u(t)\|_2^2 dt \qquad (3.144)\end{aligned}$$

onde $C_1 > 0$ é tal que $\|\nabla u\|_V \leq C_1\|u\|_{H^1(\Omega)}$.

Substituindo (3.144) em (3.143) com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, resulta

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T}^{kT} \left[\|u'(t)\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2\right] dt &\leq C_{T,\alpha,\delta} \left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k\right. \\ &+ \left.\int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k + \int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k\right] \\ &+ C_{T,\alpha,\delta} \int_{Q_k} |u|^2 dQ_k.\end{aligned}$$

Da desigualdade acima concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T}^{kT} [\|u'(t)\|_2^2 &+ \|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{2}{\rho+2}\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}] dt \\ &\leq C_{T,\alpha,\delta} \left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k + \int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k\right. \\ &+ \int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k + C_{T,\alpha,\delta} \int_{Q_k} |u|^2 dQ_k,\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.3.4 *Sob as hipóteses do Lema 3.3.3 temos, para todo $k \in \mathbb{N}^*$,*

$$\begin{aligned}\int_{(k-1)T}^{kT} E(t) dt &\leq C_{T,\alpha,\delta} \left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2\right) d\Sigma_k + \int_{Q_k} |u|^2 dQ_k\right. \\ &+ \left.\int_{Q_k} |u|^{\rho+2} dQ_k + \int_{Q_k} |u|^{2(\rho+1)} dQ_k\right]. \qquad (3.145)\end{aligned}$$

O nosso próximo passo é estimar os dois últimos termos do lado direito de (3.145).

Estimativa para $I_1 := \displaystyle\int_{(k-1)T}^{kT} \int_\Omega |u|^{\rho+2} dx dt$.

De (3.23) segue que

$$\|u(t)\|_{\rho+2} \leq \|u(t)\|_2^{\frac{1}{\rho+2}} \|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{\frac{\rho+1}{\rho+2}}. \qquad (3.146)$$

Então, considerando λ a constante de imersão de V em $L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ temos, pela desigualdade de Young, que

$$\|u(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq \frac{C\lambda^{2(\rho+1)}}{2\epsilon}\|u(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon}{2C}\|\nabla u(t)\|_2^{2(\rho+1)},$$

para todo $\epsilon > 0$ e $C = \dfrac{\rho+2}{\rho}\left[\dfrac{2(\rho+2)}{\rho}E(0)\right]^{\rho}$. De (2.6) e integrando sobre $((k-1)T, kT)$, resulta:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\epsilon}{2C}\int_{(k-1)T}^{kT}\|\nabla u(t)\|_2^{2(\rho+1)}dt + C(\epsilon, E(0))\int_{(k-1)T}^{kT}\|u(t)\|_2^2 dt \\ &\leq \epsilon\int_{(k-1)T}^{kT}E(t)dt + C(\epsilon, E(0))\int_{(k-1)T}^{kT}\|u(t)\|_2^2 dt, \end{aligned} \tag{3.147}$$

para todo $\epsilon > 0$.

Estimativa para $I_2 := 2\displaystyle\int_{(k-1)T}^{kT}\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)}dt$.

Por (3.31) temos

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} \leq \|u(t)\|_2^{2(1-\alpha)(\rho+1)}\mu^{2\alpha(\rho+1)}\|\nabla u(t)\|_2^{2\alpha(\rho+1)} \tag{3.148}$$

onde μ é a constante da imersão $V \hookrightarrow L^{2(\rho+1)+s}(\Omega)$, s é tal que $2(\rho+1)+s < \dfrac{2n}{n-2}$ e α é dada em (3.29).

Da desigualdade (3.33), para todo $\epsilon > 0$, tomando $a = \mu^{2\alpha(\rho+1)}\|u(t)\|_2^{2(1-\alpha)(\rho+1)}$, $b = \|\nabla u(t)\|_2^{2\alpha(\rho+1)}$, $p = \dfrac{1}{(1-\alpha)(\rho+1)}$ e $p' = \dfrac{1}{1-(1-\alpha)(\rho+1)}$, segue de (3.148) que

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} \leq \frac{\mu^{2\alpha(1-\alpha)^{-1}}}{p\epsilon^{\frac{1-(1-\alpha)(\rho+1)}{(1-\alpha)(\rho+1)}}}\|u(t)\|_2^2 + \frac{\epsilon}{p'}\|\nabla u(t)\|_2^{[2\alpha(\rho+1)][1-(1-\alpha)(\rho+1)]^{-1}}. \tag{3.149}$$

Como $\dfrac{2\alpha(\rho+1)}{1-(1-\alpha)(\rho+1)} = 2 + \dfrac{2\rho}{1-(1-\alpha)(\rho+1)}$, de (3.149) resulta

$$\|u(t)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} \leq C(\epsilon)\|u(t)\|_2^2 + \overline{k}\epsilon E(t), \tag{3.150}$$

onde

$$C(\epsilon) = \frac{\mu^{2\alpha(1-\alpha)^{-1}}}{p\epsilon^{\frac{1-(1-\alpha)(\rho+1)}{(1-\alpha)(\rho+1)}}}$$

e

$$\overline{k} = \frac{1}{p'}\frac{2(\rho+2)}{\rho}\left[\frac{2(\rho+2)}{\rho}E(0)\right]^{\frac{2\rho}{1-(1-\alpha)(\rho+1)}}.$$

Integrando (3.150) sobre $((k-1)T, kT)$ obtemos

$$I_2 \leq 2\overline{k}\epsilon\int_{(k-1)T}^{kT}E(t)dt + C(\epsilon)\int_{(k-1)T}^{kT}\|u(t)\|_2^2 dt,\ \forall\epsilon > 0. \tag{3.151}$$

Substituindo (3.147) e (3.151) em (3.145) e considerando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno concluímos que

$$\int_{(k-1)T}^{kT} E(t)dt \leq C(E(0)) \left[E(kT) + \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Gamma dt + C_T \int_{Q_k} |u|^2 dQ_k \right]. \tag{3.152}$$

Lema 3.3.5 *Sob as hipóteses* $(A.1)$, $(A.2)$ *e* $(H.1)$ *existe* $C(E(0))$ *tal que se* $\{u, u'\}$ *é a solução do problema (2.1) então, para* T_0 *suficientemente grande e* $T > T_0$, *temos*

$$\int_{(k-1)T}^{kT} \int_{\Omega} |u|^2 dxdt \leq C(E(0)) \left\{ \int_{(k-1)T}^{kT} \int_{\Gamma_1} (\beta(u'))^2 d\Gamma dt + \int_{(k-1)T}^{kT} \int_{\Gamma_1} |u'|^2 d\Gamma dt \right\}. \tag{3.153}$$

Demonstração: Procedendo de maneira análoga à prova do Lema 3.1.2, concluímos o desejado.

■

Combinando (3.152) e o Lema 3.3.5 obtemos o seguinte resultado:

Lema 3.3.6 *Seja* $T > 0$ *suficientemente grande. Então,*

$$E(kT) \leq C(T, E(0)) \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k.$$

Demonstração: De (3.152) e (3.153) segue que

$$TE(kT) \leq C(E(0)) \left[E(kT) + C_T \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k \right].$$

Então

$$[T - C(E(0))]E(kT) \leq C(T, E(0)) \int_{\Sigma_{k,1}} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k$$

e para $T > 0$ suficientemente grande o resultado segue.

■

Lema 3.3.7 *Com $p(s)$ definida em (3.121) e $T > 0$ suficientemente grande, temos:*

$$p(E(kT)) + E(kT) \leq E((k-1)T).$$

Demonstração: Denotaremos

$$\Sigma_A := \left\{ u \in L^2(\Sigma_{k,1}); |u| \geq N \text{ quase sempre} \right\}$$

e

$$\Sigma_B := \Sigma_{k,1} - \Sigma_A$$

onde $N > 0$ é definido no início desta seção.

Da hipótese $(H.3)$, isto é,

$$C_1|s| \leq |\beta(s)| \leq C_2|s|, \quad |s| > 1,$$

temos:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_A} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k &\leq \int_{\Sigma_A} \left(C_2|\beta(u')||u'| + C_1^{-1}|\beta(u')||u'| \right) \\ &= (C_2 + C_1^{-1}) \int_{\Sigma_A} u'\beta(u') d\Sigma_k. \end{aligned} \tag{3.154}$$

Por outro lado, da definição de h dada no início desta seção e como $\beta(s)s > 0$, se $s \neq 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_B} \left(|\beta(u')|^2 + |u'|^2 \right) d\Sigma_k &\leq \int_{\Sigma_B} h\left(|\beta(u')||u'| \right) d\Sigma_k \\ &= \int_{\Sigma_B} h(u'\beta(u')) d\Sigma_k. \end{aligned} \tag{3.155}$$

Pela desigualdade de Jensen resulta

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_B} h\left(u'\beta(u') \right) d\Sigma_B &\leq med(\Sigma_{k,1}) h \left(\frac{1}{med(\Sigma_{k,1})} \int_{\Sigma_{k,1}} u'\beta(u') d\Sigma_k \right) \\ &= med(\Sigma_{k,1}) \widetilde{h} \left(\int_{\Sigma_{k,1}} u'\beta(u') d\Sigma_k \right). \end{aligned} \tag{3.156}$$

Combinando as desigualdades (3.154)-(3.156) com o Lema 3.3.6 segue que

$$\begin{aligned} E(kT) &\leq C_T(E(0))\left(\int_{\Sigma_{k,1}}\left(|u'|^2+|\beta(u')|^2\right)d\Sigma_k\right) \\ &\leq C_T(E(0))\left((C_2+C_1^{-1})\int_{\Sigma_{k,1}}u'\beta(u')d\Sigma_k\right. \\ &+ \left. med(\Sigma_{k,1})\widetilde{h}\left(\int_{\Sigma_{k,1}}u'\beta(u')d\Sigma_k\right)\right). \end{aligned} \tag{3.157}$$

Tomando $\widetilde{k}=\dfrac{1}{C_T(E(0))}med(\Sigma_{k,1})$ e $C=\dfrac{C_2+C_1^{-1}}{med\Sigma_{k,1}}$, e aplicando p em ambos lados de (3.157) resulta

$$\begin{aligned} p(E(kT)) &\leq p\left(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{k}}}\left(CI+\widetilde{h}\right)\left(\int_{\Sigma_{k,1}}u'\beta(u')d\Sigma_k\right)\right) \\ &= \underbrace{\left(CI+\widetilde{h}\right)^{-1}\left(\widetilde{k}\left(\frac{1}{\widetilde{\widetilde{k}}}(CI+\widetilde{h})\right)\right)}_{=Id}\left(\int_{\Sigma_{k,1}}u'\beta(u')d\Sigma_k\right) \\ &= \int_{\Sigma_{k,1}}u'\beta(u')d\Sigma_k=\int_{(k-1)T}^{kT}\int_{\Gamma_1}u'\beta(u')d\Gamma dt \\ &= \int_{(k-1)T}^{kT}-E'(t)dt=E((k-1)T)-E(kT), \end{aligned}$$

o que prova o Lema.

∎

Para concluir a prova do Teorema 3.3.1, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 3.3.8 *Seja p uma função crescente, positiva, tal que $p(0)=0$. Desde que p é crescente podemos definir uma função crescente q, $q(x)=x-(I+p)^{-1}(x)$. Considere uma seqüência s_n de números positivos que satisfaz*

$$s_{m+1}+p(s_{m+1})\leq s_m. \tag{3.158}$$

Então $s_m\leq S(m)$ onde $S(t)$ é uma solução da equação diferencial

$$\frac{d}{dt}S(t)+q(S(t))=0,\ S(0)=s_0. \tag{3.159}$$

Além disso, se $p(x)>0$ para $x>0$ então $\lim_{t\to+\infty}S(t)=0$.

Demonstração: Faremos a prova por indução sobre m. Com efeito, para $m = 0$ segue de (3.158) que

$$(I + p)s_1 \leq s_0. \tag{3.160}$$

Desde que $(I + p)^{-1}$ é crescente temos que $s_1 - s_0 \leq -q(s_0)$, ou seja,

$$s_1 \leq s_0 - q(s_0). \tag{3.161}$$

Por outro lado, como q é uma função crescente, a solução $S(t)$ de (3.159) é tal que

$$S(t) \leq S(\tau), \ \forall t \geq \tau \geq 0. \tag{3.162}$$

Integrando (3.159) de 0 à 1 obtemos:

$$S(1) - S(0) + \int_0^1 q(S(\tau))d\tau = 0.$$

Como q é crescente, de (3.162) e da hipótese $S(0) = s_0$, resulta

$$\begin{aligned} S(1) &\geq S(0) - q(S(0)) = (I - q)S(0) \\ &= (I + p)^{-1}S(0) = (I + p)^{-1}s_0 \\ &= s_0 - q(s_0) \geq s_1. \end{aligned}$$

Portanto $S(1) \geq s_1$.

Suponha, por indução matemática, que $S(m) \geq s_m$. Assim, para $m + 1$ e de (3.158) temos

$$(I + p)s_{m+1} \leq s_m. \tag{3.163}$$

Como $(I + p)^{-1}$ é crescente, resulta:

$$s_{m+1} \leq s_m - q(s_m). \tag{3.164}$$

Agora, integrando (3.159) de m à $m + 1$ obtemos que

$$S(m + 1) - S(m) + \int_m^{m+1} q(S(\tau))d\tau = 0.$$

Desde que q é crescente, de (3.162) e da hipótese indutiva obtemos:

$$\begin{aligned} S(m+1) &\geq S(m) - q(S(m)) = (I-q)S(m) \\ &= (I+p)^{-1}S(m) \geq (I+p)^{-1}s_m \\ &= s_m - q(s_m). \end{aligned} \tag{3.165}$$

De (3.164) e (3.165) resulta

$$S(m+1) \geq s_{m+1},$$

o que prova a indução.

Para finalizarmos a prova do lema resta-nos provar que se $p(x) > 0$ para $x > 0$ então $\lim\limits_{t\to+\infty} S(t) = 0$.

Com efeito, por (3.159), para cada $\overline{T} > 0$, temos

$$S(\overline{T}) - S(0) + \int_0^{\overline{T}} q(S(\tau))d\tau = 0$$

e por (3.162) resulta

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \int_0^{\overline{T}} q(S(\tau))d\tau,$$

ou seja,

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}q(S(\overline{T})). \tag{3.166}$$

Por (3.162) temos que $S(t)$ é uma função monótona não crescente e limitada inferiormente pelo 0, pois $S(m) \geq s_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$ e s_m são números positivos. Seja $C = \inf\{S(t);\ t \geq 0\}$. Observe que $C = \lim\limits_{t\to+\infty} S(t)$. Agora mostraremos que $C = 0$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $C > 0$. Logo, de (3.166) obtemos que

$$S(\overline{T}) \leq S(0) - \overline{T}q(C), \forall \overline{T} > 0. \tag{3.167}$$

Como $p(x) > 0$ para $x > 0$ obtemos que $q(C) > 0$, pois caso contrário, se $\exists x_0 > 0$ tal que $q(x_0) \leq 0$ segue que $x_0 - (I+p)^{-1}(x_0) \leq 0$, se, e somente se,

$x_0 \leq (I+p)^{-1}(x_0)$, se, e somente se, $(I+p)(x_0) \leq x_0$, ou ainda, se, e somente se, $p(x_0) \leq 0$, o que é absurdo!

Portanto, tomando $\overline{T} \in \mathbb{N}$ tal que $S(0) < \overline{T}q(C)$ resulta de (3.167) que $S(\overline{T}) < 0$ o que é absurdo.

Logo, $\lim\limits_{t \to +\infty} S(t) = 0$.

■

Aplicando o Lema 3.3.7 obtemos

$$E(kT) + p(E(kT)) \leq E((k-1)T),\ \forall k = 1, 2, \ldots. \tag{3.168}$$

Pondo

$$s_{k-1} = E((k-1)T)\ ,\ s_0 = E(0)$$

e aplicando o Lema 3.3.8 segue que

$$E((k-1)T) \leq S(k-1),\ k = 1, 2, \ldots.$$

Tomando $t = (k-1)T + \tau$, $0 \leq \tau < T$ resulta

$$E(t) \leq E((k-1)T) \leq S(k-1) = S\left(\frac{t-\tau}{T}\right) \leq S\left(\frac{t}{T} - 1\right),\ \text{para } t > T$$

o que finaliza a prova do Teorema 3.3.1.

■

Bibliografia

[1] AASSILA, M. **Global existence of solutions to a wave equation with damping and source terms**, Differential Integral Equations, v.14 n.11 , p. 1301-1314, 2001.

[2] ADAMS, R. A. **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[3] BACHMAN, G.; NARICI, L. **Functional Analysis** . Academic Pres, New York, 1966.

[4] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle - théorie et applications**. Masson, Paris, 1983.

[5] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N. **Introdução às Equações Diferenciais Parciais**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2001.

[6] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N. **Introdução às Equações Diferenciais Parciais**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2001.

[7] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N. **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[8] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N. **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[9] CAVALCANTI, M.M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.; MARTINEZ, P. **Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term**. J. Differential Equation. v.203, p.119-158, 2004.

[10] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[11] EBIHARA, Y.; NAKAO, M.; NAMBU, T. **On the existence of global classical solution on initial boundary value problem for** $u'' - \Delta u - u^3 = f$. Pacific J. Math., v.60, p.63-70, 1975.

[12] GEORGIEV, V.; TODOROVA, G. **Existence of a solution of the wave equation with nonlinear damping and source terms**. Journal of Differential Equation , v.109, p.63-70, 1975.

[13] GOMES, A. M. **Semigrupos não lineares e equações diferenciais nos espaços de Banach**. Textos de Métodos Matemáticos 24, Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1992.

[14] IKEHATA, R. **Some remarks on the wave equation with nonlinear damping and source terms**. Nonlinear Anal. TMA, v.27, p.1165-1175, 1996.

[15] IKEHATA, R.; MATSUYAMA, T. **On global solutions and energy decay for the wave equations of Kirchhoff type with nonlinear damping terms**. J. Math. Anal. Appl., v.204, p.729-753, 1996.

[16] ISHII, H. **Asymptotic stability and blowing up of solutions of some nonlinear equations**. J. Differential Equations, v.26, p.291-319, 1977.

[17] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. John Wiley and Sons, New Dehli, 1989.

[18] KOLMOGOROV, A.N.; FOMIN, S.V. **Elementos de la teoria de funciones y del analisis funcional**. Editora MIR, Moscou, 1978.

[19] LASIECKA, I.; TATARU, D. **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Differential Integral Equations, v.6, n.3, p.507-533, 1993.

[20] LASIECKA, I.; TRIGGIANI, r. **Uniform Stabilization of the Wave Equation with Dirichlet or Neumann Feedback Control Without Geometrical Conditions**. Applied Mathematics and Optimization, v.25, p.189-224, 1992.

[21] LIONS, J. L. **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Paris, 1969.

[22] LIONS, J. L.; MAGENES, E. **Problèmes aux Limites non Homogènes, Applications**. Dunod, Paris, Vol 1, 1968.

[23] MATINEZ, P. **A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems**, ESAIN: Control, Optimization Calc. Var., v.4, p.419-444, 1999.

[24] MEDEIROS, L. A. **Espaços de Sobolev**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[25] MEDEIROS, L. A. **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos de Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[26] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A. **A Integral de Lebesgue**. Textos de Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[27] MEDEIROS, L. A.; RIVERA, P.H. **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos de Métodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[28] MEDEIROS, L. A.; MILLA MIRANDA, M. **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[29] MILLA MIRANDA, M. **Análise Espectral em Espaços de Hilbert**. Textos de Métodos Matemáticos 28, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[30] MILLA MIRANDA, M.; SAN GIL JUTUCA, L. P. **Existence and boundary stability of solutions for the Kirchhoff equation,** Commun. Partial Differential Equation, v.24, n.9-10, p.1759-1800, 1999.

[31] MILLA MIRANDA, M. **Trace for the dual of Sobolev Spaces,** Bol. Soc. Paranaense de Matemática, v.11, n.2, p.131-157, 1992.

[32] NAKAO, M.; ONO, K. **Existence of global solutions to the Cauchy problem for semilinear dissipative wave equations** . Math, Z. v.214, p.325-342, 1993.

[33] NATALI, F.M.A. **Existência e comportamento assintótico de soluções globais para um sistema de evolução com dissipação localizada**. Dissertação (mestrado), DMA/UEM, 2004.

[34] RAVIART, P.A.; THOMAS, J.M. **Introduction à l'Ánalyse Numérique des Équations aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[35] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Rio de Janeiro, Petrópolis, LNCC. 1999.

[36] RUIZ, A. **Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential**. J. Math. Pures Appl., v.71, p.455-467, 1992.

[37] SATTIGER, D.H. **On global solutions of nonlinear hyperbolic equations**. Arch. Rational Mech. Anal, v.30, p.148-172.

[38] TSUTSUMI, M. **Existence e non existence of global solutions for nonlinear parabolic equations**, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., v.8, p.211-229, 1972/73.

[39] VITILLARO, E. **A potential well method for the wave equation with nonlinear source and boundary damping terms**. Glasgow Math. J., v.44, p.375-395, 2002.

[40] YOSIDA, K. **Funcional Anlysis**. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

[41] ZUAZUA, E. **Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear feedback**. SIAM J. Control Optim., v.28, p.466-478, 1990.