UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

EWERTON DA SILVA LEMES

O Semigrupo de uma Hipersuperfície Quase Ordinária

Maringá-PR
2011

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

O Semigrupo de uma Hipersuperfície Quase Ordinária

Ewerton da Silva Lemes

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Geometria Algébrica.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes.

Maringá-PR, 16 de janeiro de 2011

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelo sustento, ânimo, paz, alegria e segurança em todos os momentos.

Agredeço aos meus pais Maria Odete e Onésimo pelo amor incondicional, pela ajuda e orientação e também a todos os de minha família.

Agradeço aos meus irmãos em Cristo da Igreja Evangélica Batista em Moradias Cabo Frio pelas orações, que com certeza Deus ouviu e atendeu conforme sua vontade, pelo ensino da Palavra de Deus e pelo amor.

Agradeço também aos meus amigos do mestrado, por todos os momentos em que estudamos juntos e também pelas muitas risadas, os quais não citarei nomes para não cometer a injustiça de esquecer alguém pois são todos de igual modo importantes.

Agradeço ao Prof. Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes que me orientou neste trabalho pois pude aprender muito com ele, com todo seu conhecimento e entusiasmo.

Agradeço também aos demais professores com quem fiz as disciplinas do mestrado, pois foram de fundamental importância no crescimento do meu conhecimento sobre a Matemática.

Não é possível citar todas as pessoas que contribuíram comigo neste trabalho e no período em que fiz o Mestrado em Matemática, mas com certeza estão todos em minha mente e em meu coração, os quais sempre serão lembrados com muito carinho.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos o semigrupo de uma hipersuperfície quase ordinária.

Dada $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ um polinômio quase ordinário, isto é, $\Delta_Y(f) = X_1^{\delta_1} \cdots X_d^{\delta_d} u$ onde u é uma unidade e $\xi, \xi' \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ raízes de f, temos que $\xi - \xi' = X_1^{\lambda_1} \cdots X_d^{\lambda_d} \varepsilon$ com ε uma unidade de $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$, $k \leq deg_Y(f)$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d$. Chamamos $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d$ de expoentes caracteríticos de ξ.

O principal resultado destas notas permite obter um semigrupo de $\mathbb{N}^d$ a partir dos expoentes característicos de ξ.

Abstract

In this work we study the semigroup of a quasi-ordinary hypersuface.

Given $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ a quasi-ordinary polynomial that is $\Delta_Y(f) = X_1^{\delta_1} \cdots X_d^{\delta_d} u$ for a unit u and $\xi, \xi' \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ roots os f, we have that $\xi - \xi' = X_1^{\lambda_1} \cdots X_d^{\lambda_d} \varepsilon$ whit a unit $\varepsilon \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$, $k \leq deg_Y(f)$ and $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \in (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d$. The $(\lambda_1, \ldots, \lambda_d) \in (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d$ we called characteristic exponents of ξ.

The main result of this notes allow us to obtain a semigroup of $\mathbb{N}^d$ from the characteristc exponents of ξ.

Sumário

Introdução

Um modo de caracterizar o tipo topológico de um germe de uma curva algébrica plana irredutível definido por uma equação $f = 0$ com $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ é, como mostraram Brauner, Burau e Zariski por meio de certos expoentes, chamados expoentes característicos, de uma raiz ξ de $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$, que pelo Teorema de Newton-Puiseux, tem-se $\xi(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ com $n = deg_Y(f)$. O par $(T^n, \xi(T))$ é chamado uma parametrização de f.

Zariski mostrou posteriormente que o semigrupo $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}$ obtido ao considerarmos os índices de interseção de $I(f,h) \in \mathbb{N}$ com $h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash \langle f \rangle$ reserva informações equivalentes aos expoentes característicos, ou seja, $\Gamma(f)$ e os expoentes característicos se determinam mutuamente.

Uma vez que $I(f,h) = mult(h(T^n, \xi(T))) := v_f(h)$, ou seja, o índice de interseção é igual à valoração associada a f, temos que,

$$\Gamma(f) = \{v_f(h); h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash \langle f \rangle\}.$$

Os fatos acima, que também são válidos para o anel $\mathbb{C}[[X]]$, bem como todos os resultados relacionados a curvas planas irredutíveis que utilizamos podem ser encontrados em [He].

Germes de curvas planas são casos particulares de germes de hipersuperfícies quase ordinárias. Um germe de uma hipersuperfície quase ordinária pode ser definido por uma equação $f = 0$, com $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_d\}[Y]$ mônico tal que seu discriminante $\Delta_Y(f)$ é da forma $X_1^{\delta_1} \cdots X_d^{\delta_d} u$ com $u \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_d\}$ unidade e $\delta_i \in \mathbb{N}^*$.

O Teorema de Jung-Abhyankar (veja [A]) garante que as raízes de um polinômio quase ordinário $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_d\}[Y]$, chamadas ramos quase ordinários, pertencem a $\mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}\}$ para algum natural $k \leq n = deg_Y(f)$ não nulo. Dadas duas raízes de f, ξ e ξ', temos que $\xi - \xi'$ divide $\Delta_Y(f)$. Deste modo $\xi - \xi' = X_1^{\lambda_1} \cdots X_d^{\lambda_d} \varepsilon$ com

$\varepsilon \in \mathbb{C}\{X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots X_d^{\frac{1}{k}}\}$ unidade e $(\lambda_1, \ldots \lambda_d) \in \mathbb{Q}_+^d$. Os monômios $X_1^{\lambda_1} \cdots X_d^{\lambda_d}$ são chamados de monômios característicos e os expoentes $(\lambda_1, \ldots \lambda_d)$ são chamados expoentes característicos generalizados.

Lipman e Gau (veja [L] e [Ga]) mostram que dois germes de hipersuperfícies quase ordinárias são topologicamente equivalentes se, e somente se, possuem os mesmos expoentes característicos generalizados.

Uma questão natural que surge é: podemos, como no caso plano, associar a um germe de hipersuperfície quase ordinária um semigrupo que determina e é determinado pelos expoentes característicos generalizados, ou seja, um semigrupo que determine a topologia de um germe de hipersuperfície quase ordinária?

O objetivo deste trabalho é responder afirmativamente à questão anterior. Mais especificamente, estudamos como associar a um germe de hipersuperfície quase ordinária, determinado por $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$, um semigrupo $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}^d$ cujo sistema mínimo de geradores é obtido por meio dos expoentes característicos usando uma relação similar da que temos no caso plano. Notemos que abordaremos que o caso formal ao invés do caso convergente.

As principais referências para este trabalho foram [Go1] e [Go2]. Uma vez que o índice de interseção, tal qual é definido para curvas planas, não faz sentido no caso quase ordinário, González Pérez observa que para uma raiz $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ de um polinômio quase ordinário $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ os vértices do poliedro de Newton de $h(\xi)$ com $h \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]] \backslash \langle f \rangle$ generalizam o conceito de valoração no caso plano. Podemos mostrar que o conjunto dos vértices do poliedro de Newton corresponde a um semigrupo $\Gamma_{\mathcal{N}}(f) \subset (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d$.

Tal semigrupo possui um conjunto mínimo de geradores que pode ser obtido considerando o vértice do poliedro de Newton da resultante em Y de f e dos polinômios minimais de truncamentos convenientes de ξ, os quais são chamados semirraízes de f. Como o truncamento conveniente de ξ para obter uma semirraiz está relacionado com os expoentes característicos de f, a conexão entre $\Gamma(f)$ e os expoentes característicos fica estabelecida.

Este trabalho está assim organizado:

No capítulo 1 reunimos os resultados gerais para séries de potências em várias variáveis que utilizamos no decorrer do texto, o principal resultado do capítulo é o Teorema de

Preparação de Weierstrass.

O capítulo 2 contém conceitos e resultados referentes a hipersuperfícies quase ordinárias. Em particular apresentaremos os conceitos de monômios e expoentes característicos, bem como o de ramo quase ordinário normalizado cuja existência é garantida pelo Lema de Inversão para o qual dedicamos a última seção do capítulo.

Finalmente, no capítulo 3, introduzimos o semigrupo $\Gamma(f)$ de uma hipersuperfície quase ordinária irredutível, para tanto se faz necessário apresentar o conceito de poliedro de Newton e o de semirraízes os quais permitem obter geradores para o semigrupo $\Gamma(f)$ bem como relacioná-los com os expoentes característicos. O capítulo termina com exemplos para os quais exibimos o semigrupo estudado.

Uma lista com as principais referências bibliográficas utilizadas encerra este trabalho.

Capítulo 1

Teorema de Preparação de Weierstrass

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre séries de potências que utilizaremos ao longo do trabalho. Os dois principais são: o Teorema da Divisão de Weierstrass e o Teorema de Preparação de Weierstrass. Tais resultados permitirão considerar uma hipersuperfície quase ordinária definida por um polinômio de Weierstrass.

1.1 Anel das Séries de Potências

Nesta seção apresentaremos propriedades gerais de séries de potências formais. No que segue K denota um corpo e $X_1, \ldots, X_r$ são indeterminadas sobre K.

Definição 1.1. *Seja $f \in K[X_1, \ldots, X_r]$. O* grau *de f é definido como a maior soma das potências de $X_1, \ldots, X_r$ que ocorrem nos termos de f. Dizemos que f é um* polinômio homogêneo *se é uma soma de termos que possuem o mesmo grau.*

Denotamos por $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i = P_0 + P_1 + P_2 + \cdots$$

onde cada P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$, com coeficientes em K.

Definição 1.2. *Os elementos de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ são chamados de* séries de potências formais *nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$ com coeficientes em K.*

Consideremos $f = P_0 + P_1 + \cdots, h = Q_0 + Q_1 + \cdots \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ com P_i e Q_i

polinômios homogêneos de grau i. Por definição temos,

$$f = h \text{ se, e somente se, } P_i = Q_i \text{ para todo } i \in \mathbb{N}.$$

Em $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ definimos as seguintes operações,

$$f + h = \sum_{i=0}^{\infty} (P_i + Q_i) \text{ e } fh = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{i} P_j Q_{i-j}.$$

Com essas operações, $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um anel comutativo com unidade chamado *anel das séries de potências formais* nas indeterminadas $X_1, \ldots, X_r$ com coeficientes em K.

Podemos escrever os elementos de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ de uma forma mais explícita, a saber,

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{i_1 + \cdots + i_r = i} a_{i_1, \ldots, i_r} X_1^{i_1} \cdots X_r^{i_r}.$$

O próximo resultado descreve os elementos inversíveis de $K[[X_1, \ldots, X_r]]$.

Proposição 1.3. *O elemento* $f = \sum_{i=0}^{\infty} P_i \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ *com* P_i *polinômio homogêneo de grau* i *é inversível se, e somente se,* $P_0 \neq 0$.

Demonstração. Seja $h = Q_0 + Q_1 + \cdots$ com Q_i polinômio homogêneo de grau i e considere a equação $1 = fh = P_0 Q_0 + (P_1 Q_0 + P_0 Q_1) + \cdots$. Essa equação é equivalente ao sistema,

$$\begin{aligned} P_0 Q_0 &= 1 \\ P_1 Q_0 &+ P_0 Q_1 = 0 \\ &\vdots \\ P_n Q_0 &+ P_{n-1} Q_1 + \cdots + P_0 Q_n = 0 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{1.1}$$

Segue que f é inversível se, e somente se, o sistema (1.1) possui solução em Q_i.

Se f é inversível, então existe Q_0 tal que $P_0 Q_0 = 1$ e consequentemente $P_0 \neq 0$.

Por outro lado, suponhamos que $P_0 \neq 0$. Então o sistema (1.1) possui uma solução dada pelas seguintes relações recursivas,

$$\begin{aligned} Q_0 &= P_0^{-1} \\ Q_1 &= -P_0^{-1}P_1Q_0 \\ &\vdots \\ Q_n &= -P_0^{-1}(P_nQ_0 + \cdots + P_1Q_{n-1}). \end{aligned}$$

□

Dois elementos $f, h \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ são chamados *associados* se existe uma unidade $u \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ tal que $f = uh$.

Definição 1.4. *Seja $f \in K[[X_1, \ldots, X_r]] \backslash \{0\}$. Suponha que $f = P_n + P_{n+1} + \cdots$, onde cada P_j é um polinômio homogêneo de grau j e $P_n \neq 0$. O polinômio homogêneo P_n é chamado* forma inicial *de f. O inteiro n é chamado de* multiplicidade *de f e é denotado por $mult(f)$. Se $f = 0$, então convencionamos que $mult(f) = \infty$.*

A demonstração da próxima proposição pode ser obtida diretamente das operações com séries de potências e por isso a omitimos.

Proposição 1.5. *Sejam $f, h \in K[[X_1, \ldots, X_r]] \backslash \{0\}$. Temos,*

1. *$mult(fh) = mult(f) + mult(h)$,*

2. *$mult(f \pm h) \geq min\{mult(f), mult(h)\}$ com igualdade sempre que $mult(f) \neq mult(h)$.*

Podemos constatar que o anel $K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é um domínio de fatoração única, para uma prova desse fato indicamos [He].

Definição 1.6. *Dizemos que $f \in K[[X_1, \ldots, X_r]]$ é* regular *de* ordem *m, com respeito à indeterminada X_j, se $f(0, \ldots, X_j, \ldots, 0)$ é divisível por X_j^m onde m é o maior inteiro não negativo com essa propriedade. Denotaremos a ordem de f em X_j por $ord_{X_j}(f(0, \ldots, X_j, \ldots, 0))$. Se f é regular de ordem $m = mult(f)$ com respeito à indeterminada X_j, então diremos simplesmente que f é regular com respeito à X_j.*

Notemos que $f(0, \ldots, X_j, \ldots, 0)$ é uma série de potências em uma variável, então da definição anterior temos que $ord_{X_j}(f(0, \ldots, X_j, \ldots, 0)) = mult(f(0, \ldots, X_j, \ldots, 0))$.

Definição 1.7. *Um* polinômio de Weierstrass *em Y é uma série de potências em $K[[X_1, \ldots, X_r, Y]]$ da forma,*

$$P(X_1, \ldots, X_r, Y) = Y^n + a_1(X_1, \ldots, X_r)Y^{n-1} + \cdots + a_n(X_1, \ldots, X_r) \in K[[X_1, \ldots, X_r]][Y]$$

onde $n \geq 1$ e $mult(a_i(X_1, \ldots, X_r)) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

1.2 Teorema de Preparação de Weierstrass

Nesta seção, apresentaremos dois resultados que permitirão considerar uma hipersuperfície quase ordinária como sendo um polinômio de Weierstrass.

Teorema 1.8. *(Teorema da Divisão de Weierstrass)*
Sejam $F(X_1, \ldots, X_n), H(X_1, \ldots, X_n) \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$. Suponhamos que $mult(F(0, \ldots, 0, X_n)) = d > 0$, então existem únicos A e B tais que $H = AF + B$ com $A \in K[[X_1, \ldots, X_n]], B \in K[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$ e $deg_{X_n} B < d$.

Demonstração. A demonstração será feita por indução sobre n.

O caso $n = 1$ segue do algoritmo da divisão para séries de potências em uma variável.

Suponhamos o resultado válido para $n-1$ indeterminadas e vamos mostrar o resultado para n variáveis. Para $n > 1$ escrevamos,

$$\begin{aligned}
H &= H_0(X_2, \ldots, X_n) + H_1(X_2, \ldots, X_n)X_1 + H_2(X_2, \ldots, X_n)X_1^2 + \cdots \\
A &= A_0(X_2, \ldots, X_n) + A_1(X_2, \ldots, X_n)X_1 + A_2(X_2, \ldots, X_n)X_1^2 + \cdots \\
F &= F_0(X_2, \ldots, X_n) + F_1(X_2, \ldots, X_n)X_1 + F_2(X_2, \ldots, X_n)X_1^2 + \cdots \\
B &= B_0(X_2, \ldots, X_n) + B_1(X_2, \ldots, X_n)X_1 + B_2(X_2, \ldots, X_n)X_1^2 + \cdots
\end{aligned}$$

Deste modo, a equação $H = AF + B$ é equivalente a,

$$\begin{aligned}
H_0 &= A_0F_0 + B_0 \\
H_1 &= A_0F_1 + A_1F_0 + B_1 \\
&\vdots \\
H_i &= A_0F_i + \cdots + A_{i-1}F_1 + A_iF_0 + B_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Como $F(0,\dots,0,X_n) \neq 0$, segue que $F_0(0,\dots,0,X_n) \neq 0$ e $mult(F(0,\dots,0,X_n)) = d$ implica que $mult(F_0(0,\dots,0,X_n)) = d$. Sendo cada $B_i(X_2,\dots,X_n) \in K[[X_2,\dots,X_{n-1}]][X_n]$ com $deg_{X_n} B_i < d$ para todo $i = 1, 2\dots$, vem que $deg_{X_n} B < d$.

Por indução, os A_i e B_i são encontrados sucessivamente e são únicos por construção. Portanto, temos o resultado para A e B. $\square$

Dado $F(X_1,\dots,X_n) \in K[[X_1,\dots,X_n]]$ não regular podemos, por meio de uma transformação linear, torná-la regular na última indeterminada.

Lema 1.9. *Seja K um corpo infinito. Dada uma família finita $\mathcal{F}$ de polinômios homogêneos não nulos em $K[Y_1,...,Y_r]$, existe uma transformação linear inversível $T : K[X_1,\dots,X_r] \to K[Y_1,\dots,Y_r]$ tal que para todo $F \in \mathcal{F}$, de grau n, existe $c_F \in K\backslash\{0\}$ tal que*

$$F(T(X_1,\dots,X_r)) = c_F X_r^n + (\text{ termos de menor grau em } X_r).$$

Demonstração. Como $\mathcal{F}$ é finito e K é infinito, existe $(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \in K^r$, com $\alpha_r \neq 0$, tal que $F(\alpha_1,\dots,\alpha_r) \neq 0$ para todo $F \in \mathcal{F}$.

Usando a transformação linear T definida por

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha_r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_r \end{pmatrix}$$

que é inversível pois $\alpha_r \neq 0$, temos que

$$\begin{aligned} Y_1^{m_1} \cdots Y_r^{m_r} &= (X_1 + \alpha_1 X_r)^{m_1} \cdots (X_{r-1} + \alpha_{r-1} X_r)^{m_{r-1}} (\alpha_r X_r) \\ &= \alpha^{m_1} \cdots \alpha_r^{m_r} X_r^{m_1 + \cdots + m_r} + (\text{ termos de grau menor em } X_r) \end{aligned}$$

Portanto, para todo $F \in \mathcal{F}$, temos que

$$F(T(X_1,\dots,X_r)) = F(\alpha_1,\dots,\alpha_r) X_r^n + \text{ (termos de grau menor em } X_r)$$

e o resultado segue tomando $c_F = F(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$. $\square$

Corolário 1.10. *Seja K um corpo infinito. Dada uma família finita $\mathcal{F}$ de elementos não nulos em $K[[X_1,\dots,X_r]]$ existe um automorfismo linear T de $K[[X_1,\dots,X_r]]$ tal que o elemento de $F \circ T$ é regular com respeito a X_r para todo $F \in \mathcal{F}$.*

Demonstração. Sejam $F_1, ..., F_k$ os elementos de $\mathcal{F}$ dados por

$$\begin{aligned} F_1 &= P_{1n_1} + P_{1n_1+1} + \cdots \\ F_2 &= P_{2n_2} + P_{2n_2+1} + \cdots \\ &\vdots \\ F_k &= P_{kn_k} + P_{kn_k+1} + \cdots \end{aligned}$$

onde P_{ij} é polinômio homogêneo de grau j que ocorre em F_i.

Aplicando o lema anterior aos polinômios homogêneos $P_{1n_1}, P_{2n_2}, \ldots, P_{kn_k}$, temos que existe um automorfismo linear $T : K[X_1, \ldots, X_r] \to K[X_1, \ldots, X_r]$ tal que

$$\begin{aligned} F_1 \circ T &= c_{F_1} X_r^{n_1} + (\text{ termos de menor grau em } X_r) + P_{1n_1+1} \circ T + \cdots \\ &\vdots \\ F_k \circ T &= c_{F_k} X_r^{n_k} + (\text{ termos de menor grau em } X_r) + P_{kn_k+1} \circ T + \cdots . \end{aligned}$$

Sendo assim, os elementos $F_i \circ T$ são regulares em X_r para $1 \leq i \leq k$. □

Teorema 1.11. *(Teorema de Preparação de Weierstrass)*
Seja $F(X_1, \ldots, X_n) \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$ com $mult(F) = d$ e regular com respeito à X_n, ou seja, $mult(F(0, \ldots, 0, X_n)) = d = mult(F) > 0$. Existe um único $A \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$ inversível tal que,

$$AF = X_n^d + A_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{d-1} + \cdots + A_d(X_1, \ldots, X_{n-1}) \tag{1.2}$$

com $A_i(X_1, \ldots, X_{n-1}) \in K[[X_1, \ldots, X_{n-1}]]$ e $mult(A_i(X_1, \ldots, X_{n-1})) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, d$.

Demonstração. Tomemos $H = X_n^d$. Como $mult(F(0, \ldots, 0, X_n)) = d > 0$. Segue do Teorema 1.8, que existem $A \in K[[X_1, \ldots, X_n]]$ e $B \in K[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][X_n]$ com $deg_{X_n} B < d$ tais que $H = AF + B$. Podemos escrever essa última igualdade na forma $AF = X_n^d - B = X_n^d + A_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{d-1} + \cdots + A_d(X_1, \ldots, X_{n-1})$.

Como $mult(F) = mult(F(0, \ldots, 0, X_n)) = d > 0$, segue que $mult(AF) \geq d$. Sendo $AF(0, \ldots, 0, X_n) = X_n^d + A_1(0, \ldots, 0)X_n^{d-1} + \cdots + A_d(0, \ldots, 0)$ devemos ter que $A_i(0, \ldots, 0) = 0$ para $i = 1, \ldots, d.$, ou seja, $AF(0, \ldots, 0, X_n) = X_n^d$. Notemos que $F(0, \ldots, 0, X_n) = X_n^d C$ onde $C \in K[[X_n]]$ é inversível, logo $AF(0, \ldots, 0, X_n) = C^{-1}F(0, \ldots, 0, X_n)$ o que implica em $A = C^{-1}$, ou seja, A é inversível.

Uma vez que $d = mult(F) = mult(AF) = X_n^d + A_1(X_1, \ldots, X_{n-1})X_n^{d-1} + \cdots + A_d(X_1, \ldots, X_n)$ segue que $mult(A_i(X_1, \ldots, X_{n-1})) \geq i$.

Assim concluímos a demonstração do teorema. $\square$

Capítulo 2

Hipersuperfícies Quase Ordinárias

2.1 Variedades Analíticas

Nesta seção vamos considerar o conjunto $\mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}$ constituído *das séries convergentes nas indeterminadas* $X_1,\ldots,X_n$ que é um subanel $\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_n]]$.

Definição 2.1. *Seja U um subconjunto aberto de $\mathbb{C}^n$. Um subconjunto $S \subset U$ é chamado uma* variedade analítica *em U, se para todo $x \in U$ existem uma vizinhança aberta U' de x em U e $f_1,\ldots,f_r : U' \to \mathbb{C}$ funções analíticas tais que*

$$S \cap U' = \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = \cdots = f_r(p) = 0\}.$$

Se $r = 1$, isto é, $S \cap U' = \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = 0\}$, dizemos que S é uma hipersuperfície analítica*.*

Temos que $I(S) = \{h \in \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}; h(p) = 0 \text{ para todo } p \in S\}$ é um ideal de $\mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}$. Assim definimos:

Definição 2.2. *A* álgebra analítica *de S é o anel quociente $\mathbb{A} = \frac{\mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}}{I(S)}$.*

Definição 2.3. *Duas variedades analíticas $S_1 \subset U_1$ e $S_2 \subset U_2$ com $0 \in U_1 \cap U_2$ são* equivalentes *se existe um aberto $U' \subset U_1 \cap U_2$, com $0 \in U'$ aberto, tal que $S_1 \cap U' = S_2 \cap U'$. Cada classe de equivalência com respeito à relação acima é chamada de* germe de variedade analítica *em $0 \in \mathbb{C}^n$ e denotamos por $(S,0)$. Dizemos que $(S,0)$ é* irredutível *se dados germes de variedades analíticas $(S_1,0)$ e $(S_2,0)$ tais que $(S,0) = (S_1,0) \cup (S_2,0)$, então $(S,0) = (S_1,0)$ ou $(S,0) = (S_2,0)$.*

Se $(S,0)$ é um germe de hipersuperfície analítica irredutível, então $(S,0)$ é definida por $f \in \mathbb{C}\{X_1,\ldots,X_n\}$ irredutível. De fato, temos que $(S,0) = (S_1,0) \cup (S_2,0)$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \{p \in \mathbb{C}^n; f(p) = 0\} &= \{p \in \mathbb{C}^n; f_1(p) = 0\} \cup \{p \in \mathbb{C}^n; f_2(p) = 0\} \\ &= \{p \in \mathbb{C}^n; (f_1 f_2)(p) = 0\}. \end{aligned}$$

Um assunto de interesse é o estudo de germes de hipersuperfícies analíticas irredutíveis em $\mathbb{C}^{d+1}$, isto é, definidas por $f \in \mathbb{C}\{X_1, \ldots, X_d, Y\}$ irredutível.

Neste trabalho, consideraremos uma situação mais geral: hipersuperfícies algebróides.

Definição 2.4. *Uma hipersuperfície algebróide é uma classe de equivalência de elementos de* $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]]$ *módulo a relação de associados.*

Doravante vamos nos referir a uma hipersuperfície algebróide simplesmente por hipersuperfície.

Dado $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]]$ podemos por meio de um automorfismo (linear), considerar f regular em Y e pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe uma unidade $u \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]]$ tal que,

$$uf = Y^n + A_1 Y^{n-1} + \cdots + A_{n-1} Y + A_n \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y] \tag{2.1}$$

com $A_i \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ e $mult(A_i(X_1, \ldots, X_d)) \geq i$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Deste modo, a hipersuperfície definida por f é a mesma definida por uf. No que segue, sempre assumiremos que uma hipersuperfície seja definida por um polinômio de Weierstrass como em (2.1).

2.2 Hipersuperfície Quase Ordinária

Consideremos dois polinômios, $p = y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots + a_{n-1} y + a_n$ e $q = y^m + b_1 y^{m-1} + \cdots + b_{m-1} y + b_m$ em $A[y]$ com A um anel comutativo com unidade.

O *resultante* em y dos polinômios p e q é definido por $R_y(p, q) = det(R)$ onde R é a matriz $(n + m) \times (n + m)$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_n & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & a_1 & . & . & . & . & a_{n-1} & a_n \\ 1 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 & . & . & . & . & b_{m-1} & b_m & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & 1 & b_1 & . & b_{m-1} & b_m \end{pmatrix}.$$

Podemos calcular o resultante de p e q da seguinte maneira,

$$R_y(p,q) = \prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}(r_i - s_j) \tag{2.2}$$

onde r_i são as raízes de p e s_j são as raízes de q.

Notemos que o resultate é zero se, e somente se, p e q tenham ao menos uma raiz comum.

Podemos ainda reescrever o resultante como,

$$R_y(p,q) = \prod_{i=1}^{n} q(r_i) \text{ ou } R_y(p,q) = (-1)^{nm}\prod_{j=1}^{m} p(s_j). \tag{2.3}$$

O *discriminante* de um polinômio $p = y^n + a_1y^{n-1} + \cdots + a_{n-1}y + a_n \in A[y]$ é definido como

$$\Delta_y p = det\begin{pmatrix} 1 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_0 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & . & . & a_{n-1} & a_0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & 1 & a_1 & . & . & . & . & a_{n-1} & a_0 \\ n & (n-1)a_1 & . & . & . & a_{n-1} & 0 & 0 & . & 0 & 0 \\ 0 & n & (n-1)a_1 & . & . & 2a_{n-2} & a_{n-1} & 0 & . & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & 0 & n & (n-1)a_1 & . & 2a_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\Delta_y p \in A$. Além disso, podemos escrever

$$\Delta_y p = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} R_y(p, p_y) = \prod_{i \neq j}(\xi_i - \xi_j) \tag{2.4}$$

onde ξ_i, ξ_j são raízes de p e p_y é a derivada de p em relação à y.

Para justificativas das propriedades de resultante e discriminante apresentadas acima indicamos [He].

Definição 2.5. *Dizemos que uma hipersuperfície dada por*

$$f = Y^n + A_1Y^{n-1} + \cdots + A_{n-1}Y + A_n \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$$

é quase ordinária *se,*

$$\Delta_Y f = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \cdots X_d^{\delta_d} u$$

com u unidade em $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ e $\delta_i \in \mathbb{N}$ para $i = 1, \ldots, d$.

Um polinômio f com a propriedade acima é chamado de polinômio quase ordinário.

Exemplo 2.6. *Consideremos*

$$\begin{aligned} f(X_1, X_2, Y) &= Y^4 - 8X_2Y^3 + (24X_2^2 - 2X_2^3 - 2X_1X_2^4)Y^2 + (-32X_2^3 + 8X_2^4 + 8X_1X_2^5)Y \\ &+ 16X_2^4 - 8X_2^5 + X_2^6 + 2X_1X_2^7 - 8X_1X_2^6 + X_1^2X_2^8 - 4X_1X_2^7 \end{aligned}$$

pertencente a $\mathbb{C}[[X_1, X_2]][Y]$. O polinômio f é quase ordinário pois

$$\Delta_Y f = 4096X_1^2X_2^{20}(X_1^2X_2^2 - 2X_1X_2 + 1).$$

Observação 2.7. *Qualquer curva algebróide plana é quase ordinária. Dada uma curva definida por $f \in \mathbb{C}[[X_1, Y]]$, por meio de uma mudança de coordenadas e aplicando o Teorema de Preparação de Weierstrass, podemos assumir f como em (2.1) com $d = 1$. Visto que cada $A_i \in \mathbb{C}[[X_1]]$ com $i = 1, \ldots, n$ não é unidade e que $\Delta_Y f$ é uma soma de produtos dos A_i, segue que $\Delta_Y f$ é uma série não inversível em $\mathbb{C}[[X_1]]$, ou seja, pode ser escrita na forma $\Delta_Y f = X_1^a u(X_1)$ com $a \in \mathbb{N}^*$ e $u(X_1)$ unidade em $\mathbb{C}[[X_1]]$.*

2.3 Monômios e Expoentes Característicos

Deste ponto em diante consideraremos $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ um polinômio de Weierstrass quase ordinário irredutível.

No caso plano, o teorema de Newton-Puiseux garante que, dado $f \in \mathbb{C}[[X_1]][Y]$, suas raízes pertencem a $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}]]$ com $n = deg_Y(f)$.

No caso de uma hipersuperfície quase ordinária irredutível $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ o teorema de Jung-Abhyankar (veja [A]) garante que se ξ é raiz de f, isto é, $f(X_1, \ldots, X_d, \xi) = 0$, então $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ para algum $k \in \mathbb{N}^*$. Em contraste com o caso plano, k não é necessariamente $deg_Y(f)$ como ilustrado no exemplo a seguir. No entanto, se f é irredutível, podemos tomar $k = n$ e faremos isso sempre que for conveniente.

Uma raiz de um polinômio quase ordinário é chamada de *ramo quase ordinário.*

Exemplo 2.8. *A existência de raízes em $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{k}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{k}}]]$ para uma hipersuperfície não é garantia de que esta seja uma hipersuperfície quase ordinária. De fato, a hipersuperfície definida por*

$$f(X_1, X_2, Y) = (Y^2 - X_1 - X_2)^2 - 4X_1X_2 = Y^4 - 2(X_1 + X_2)Y^2 + (X_1 - X_2)$$

tem raízes $\xi = \pm X_1^{\frac{1}{2}} \pm X_2^{\frac{1}{2}}$ mas não é quase ordinária pois,

$$\Delta_Y f = -256(X_2 - X_1)(X_2 + (2X_1 + 1)X_2 + X_1^2 - X_1)^2.$$

Exemplo 2.9. *Seja $f \in \mathbb{C}[[X_1, X_2]][Y]$ como no exemplo 2.6. Uma raiz de f é dada por $\xi = 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2$, temos então, $deg_Y(f) = 4$ e $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}]]$.*

Observemos que, se $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ é um polinômio quase ordinário e $deg_Y f = n$, então de (2.4) temos que

$$\Delta_Y f = \prod_{i \neq j} (\xi_i - \xi_j) = X_1^{\delta_1} X_2^{\delta_2} \cdots X_d^{\delta_d} u \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$$

com $u \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ uma unidade. Como $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]] \subset \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$ e estes anéis são domínios fatoriais, segue que,

$$\xi_i - \xi_j = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_d^{\frac{\lambda_d(i,j)}{n}} u_{ij}$$

onde u_{ij} é unidade em $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$ e $\lambda_l(i,j) \in \mathbb{N}$ para $l = 1, \ldots, d$.

Definição 2.10. *Os monômios $M_{ij} = X_1^{\frac{\lambda_1(i,j)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(i,j)}{n}} \cdots X_d^{\frac{\lambda_d(i,j)}{n}}$ para todos i, j são chamados de* monômios característicos *de f e as d-uplas $\left(\frac{\lambda_1(i,j)}{n}, \ldots, \frac{\lambda_d(i,j)}{n}\right)$ para todos i, j distintos são chamados de* expoentes característicos (generalizados) *de f.*

Exemplo 2.11. *Vamos calcular os monômios característicos e os expoentes característicos generalizados da hipersuperfície quase ordinária f do Exemplo 2.6. As raízes de f são*

$$\xi_0 = 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2, \quad \xi_1 = 2X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2,$$
$$\xi_2 = 2X_2 - X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2, \quad \xi_3 = 2X_2 - X_2^{\frac{3}{2}} - X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2.$$

Assim, temos os monômios característicos

$$\begin{aligned}
M_{01} &= \xi_0 - \xi_1 = 2X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2 \\
M_{02} &= \xi_0 - \xi_2 = 2X_2^{\frac{3}{2}} \\
M_{03} &= \xi_0 - \xi_3 = 2X_2^{\frac{3}{2}}(1 + X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}) \\
M_{12} &= \xi_1 - \xi_2 = 2X_2^{\frac{3}{2}}(1 - X_1^{\frac{1}{2}}X_2^{\frac{1}{2}}) \\
M_{13} &= \xi_1 - \xi_3 = 2X_2^{\frac{3}{2}} \\
M_{23} &= \xi_2 - \xi_3 = 2X_1^{\frac{1}{2}}X_2^2
\end{aligned}$$

e os expoentes característicos generalizados são $(0, \frac{3}{2})$ *e* $(\frac{1}{2}, 2)$.

Sejam ξ um ramo quase ordinário e

$$L \subset L(\xi) \subset L_n$$

os respectivos corpos de frações de

$$\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]] \subset \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][\xi] \subset \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]].$$

O corpo L_n é uma extensão finita galoisiana de L e a ação do grupo de Galois G dessa extensão é dada pela ação das d-uplas $(\eta_1, \ldots, \eta_d)$ das raízes n-ésimas da unidade dada por $X_i^{\frac{1}{n}} \mapsto \eta_i X_i^{\frac{1}{n}}$ (veja [A]).

Diferentemente do caso de hipersuperfícies, no caso plano, sabemos qual é o grupo de Galois da extensão dos respectivos corpos de frações de $\mathbb{C}[[X_1]]$ e $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}]]$, a saber, o grupo cíclico U_n das raízes n-ésimas da unidade. Seja $\alpha = \sum_{i \geq m} b_i X_1^{\frac{i}{n}}$, $m \in \mathbb{N}$ uma raiz de uma curva plana irredutível definida por um polinômio de Weierstrass f de grau n. Dado $\sigma_j \in U_n$ temos $\alpha_j = \sigma_j(\alpha) = \sum_{i \geq m} b_i \left(\sigma_j X_1^{\frac{1}{n}}\right)^i$. Notemos que α_j é raiz de f para $j = 1, \ldots, n$.

Ainda no caso plano, definimos duas sequências (ε_j) e (β_j) de números naturais associados a f ou a $\sum_{i\geq m} b_i X_1^{\frac{i}{n}}$ como segue,

$$\begin{aligned} \varepsilon_0, \beta_0 &= n \\ \beta_j &= min\{i; i \not\equiv 0 \mod \varepsilon_{j-1} \text{ e } b_i \neq 0\} \text{ se } \varepsilon_{j-1} \neq 1 \\ \varepsilon_j &= mdc(\varepsilon_{j-1}, \beta_j) = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_j). \end{aligned} \tag{2.5}$$

As duas sequências, definidas acima, não dependem da escolha de α e são finitas. Podemos observar que a sequência (ε_j) é estritamente decrescente, enquanto a sequência (β_j) é estritamente crescente. A sequência (β_j) está bem definida e os β_j são os expoentes característicos de α. Para maiores informações sobre o caso plano sugerimos [He]. A priori, os expoentes característicos no caso de várias variáveis não parecem ser uma generalização do caso plano. Porém, temos no caso plano que, se $f \in \mathbb{C}[[X_1]][Y]$ é um polinômio de Weierstrass irredutível de grau n e α_k com $k = 1, \ldots, n$ são as raízes de f, então $mult(\alpha_i - \alpha_j) = \frac{\beta_k}{n}$ onde β_k é um expoente característico. Isso justifica o nome de expoentes característicos generalizados no caso de várias variáveis.

Voltemos ao caso de uma hipersuperfície quase ordinária.

Sejam $\xi = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in L_n$ os conjugados de ξ. Para calcular os monômios ou os expoentes característicos, basta fixar uma raiz ξ e avaliar a diferença com as outras raízes. De fato, consideremos $Z = \{\xi_i; 0 \leq i \leq n-1\}$ raízes distintas de f. Se $G = Gal(L_n : L)$ é o grupo de Galois de L_n sobre L então, fixando a raiz ξ e variando os elementos de G, temos que $Z = \{\varphi(\xi); \varphi \in G\}$. Assim, vem que $\xi_i = \varphi_i(\xi)$ e $\xi_j = \varphi_j(\xi)$ para $\varphi_i, \varphi_j \in G$ e disso segue que,

$$\begin{aligned} \xi_i - \xi_j &= \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) = \varphi_j \varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \varphi_j(\xi) \\ &= \varphi_j(\varphi_j^{-1} \varphi_i(\xi) - \xi) = \varphi_j(\xi_k - \xi), \end{aligned}$$

para algum $\varphi_k \in G$ e $\varphi_k(\xi) = \xi_k$.

Por definição $\xi_i - \xi_j = M_{ij} u_{ij}$ e $\xi_k - \xi = M_{k0} u_{k0}$. Denotando $M_{k0} = M_k$ e levando em conta como agem os elementos $\varphi_j = (\eta_{1j}, \ldots, \eta_{dj})$ de G nos elementos de L_n temos que,

$$\begin{aligned}
\varphi_j(M_k) &= \varphi_j(X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} X_2^{\frac{\lambda_2(k,0)}{n}} \cdots X_d^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}}) \\
&= \eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{dj}^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}} X_d^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}} \\
&= (\eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{dj}^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}}) X_1^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots X_d^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}} \\
&= \alpha M_k
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \eta_{1j}^{\frac{\lambda_1(k,0)}{n}} \cdots \eta_{dj}^{\frac{\lambda_d(k,0)}{n}} \neq 0$. Isto nos diz que os monômios característicos e, consequentemente os expoentes característicos, não se alteram pela ação de um elemento de G e sendo assim, concluímos que $M_k = M_{ij}$, isto é,

$$\{M_{ij}; 0 \leq i, j \leq n-1\} = \{M_k; 1 \leq k \leq g\}$$

para algum $g \leq n$.

Proposição 2.12. *O conjunto $\{M_k\}_{1 \leq k \leq g}$ dos monômios característicos de um ramo quase ordinário ξ é totalmente ordenado pela relação de divibilidade $\preceq$, isto é, $M_i \preceq M_j$ se M_i divide M_j em $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$.*

Demonstração. Notemos que

$$M_i u_{i0} - M_j u_{j0} = (\xi_i - \xi_0) - (\xi_j - \xi_0) = \xi_i - \xi_j = M_{ij} u_{ij},$$

ou ainda,

$$X_1^{\alpha_1} \cdots X_d^{\alpha_d} u_{i0} - X_1^{\gamma_1} \cdots X_d^{\gamma_d} u_{j0} = X_1^{\delta_1} \ldots X_d^{\delta_d} u_{ij}.$$

Se tivermos $\alpha_i \leq \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq d$, então M_i divide M_j. Se tivermos $\alpha_i \geq \gamma_i$ para todo $1 \leq i \leq d$, então M_j divide M_i. Agora, se tivermos $\alpha_i < \gamma_i$ e $\alpha_j > \gamma_j$ para algum par de índices i, j com $1 \leq i, j \leq d$ não seria possível escrever a igualdade acima com u_{ij} unidade. Portanto M_i divide M_j ou M_j divide M_i. □

Notemos que o resultado anterior, quando restrito ao caso $d = 1$, ou seja, ao caso plano, nos indica que $\frac{\beta_1}{n} < \cdots < \frac{\beta_g}{n}$, isto é, $\beta_1 < \cdots < \beta_g$ como já sabíamos.

A partir deste ponto, vamos denotar os expoentes característicos de uma hipersuperfície quase ordinária por $\lambda_i = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{di})$ para $i = 1, \ldots, g$. Observemos que $\lambda_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}$ para todo $i = 1, \ldots, g$.

Exemplo 2.13. *Considere*

$$f(X_1,X_2,X_3,Y) = Y^4 - 2(X_1^3X_2^2 + X_1^4X_2^3X_3^2)Y^2 + X_1^8X_2^6X_3^4 - 2X_1^7X_2^5X_3^2 + X_1^6X_2^4.$$

O polinômio f admite quatro raízes em $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{4}}, X_2^{\frac{1}{4}}, X_3^{\frac{1}{4}}]]$.

Temos $f_Y(X_1,X_2,X_3,Y) = 4Y^3 - 4(X_1^3X_2^2 + X_1^4X_2^3X_3^2)Y$.

Reescrevendo $f(X_1,X_2,X_3,Y) = Y^4 + a_1Y^3 + a_2Y^3 + a_3Y + a_4$, temos

$$a_2 = -2(X_1^3X_2^2 + X_1^4X_2^3X_3^2),\ a_4 = X_1^8X_2^6X_3^4 - 2X_1^7X_2^5X_3^2 + X_1^6X_2^4 \text{ e } a_1 = a_3 = 0.$$

Desse modo $f_Y = 4Y^3 + 2a_2Y$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}\Delta_Y f &= det\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & 0 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_2 & 0 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_2 & 0 & a_4 \\ 4 & 0 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2a_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 2a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 2a_2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= 4096X_1^{20}X_2^{14}X_3^4(1 - 2X_1X_2X_3^2 + X_1^2X_2^2X_3^4).\end{aligned}$$

Portanto f é quase ordinária. Vamos agora calcular as raízes de f. Fazendo $Y^2 = W$, obtemos $f = W^2 + a_2W + a_4$. Donde obtemos,

$$W = \frac{-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4a_4}}{2} = X_1^3X_2^3X_2^3 \pm 2X_1^{\frac{7}{2}}X_2^{\frac{5}{2}}X_3.$$

Com isso temos então,

$$Y^2 = X_1^3X_2^2 + X_1^4X_2^3X_3^2 \pm 2X_1^{\frac{7}{2}}X_2^{\frac{5}{2}}X_3 = (X_1^{\frac{3}{2}}X_2 \pm X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3)^2.$$

O que implica em $Y = \pm(X_1^{\frac{3}{2}}X_2 \pm X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3)$, ou seja, as raízes de f são,

$$\begin{array}{ll} \xi_0 = X_1^{\frac{3}{2}}X_2 + X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3 & \xi_1 = X_1^{\frac{3}{2}}X_2 - X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3 \\ \xi_2 = -X_1^{\frac{3}{2}}X_2 - X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3 & \xi_3 = -X_1^{\frac{3}{2}}X_2 + X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3. \end{array}$$

O grupo de Galois G da extensão $L \subset L_n$ está contido em $U_4 \times U_4 \times U_4$ que possui ordem $4^3 = 64$. Notemos que, sendo $\xi_0 = X_1^{\frac{3}{2}}X_2 + X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3 \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{4}}, X_2^{\frac{1}{4}}, X_3^{\frac{1}{4}}]]$ uma raiz de f, um elemento $(a,b,c) \in U_4 \times U_4 \times U_4$ age em ξ_0 da forma,

$$a^3bX_1^{\frac{3}{2}}X_2 + a^2b^3cX_1X_2^{\frac{3}{2}}X_3 = a^2X_1^{\frac{3}{2}}X_2 + b^2X_1X_2^{\frac{3}{2}}X_3.$$

Assim, se $G = G_0 \cup G_1 \cup G_2 \cup G_3$ onde

$$G_0 = \{(\pm 1, \pm 1, \alpha); \alpha \in U_4\} \quad G_1 = \{(\pm 1, \pm i, \alpha); \alpha \in U_4\}$$
$$G_2 = \{(\pm i, \pm i, \alpha); \alpha \in U_4\} \quad G_3 = \{(\pm i, \pm 1, \alpha); \alpha \in U_4\},$$

então a ação dos elementos do grupo G sobre ξ_0 é dada por $\omega\xi_0 = \xi_i$ com $\omega \in G_i$.

Calculando os monômios característicos temos,

$$\begin{aligned}
\xi_0 - \xi_1 &= 2X_1^2 X_2^{\frac{3}{2}} X_3 \\
\xi_0 - \xi_2 &= 2X_1^{\frac{3}{2}} X_2 (1 + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^{\frac{1}{2}} X_3) \\
\xi_0 - \xi_3 &= 2X_1^{\frac{3}{2}} X_2.
\end{aligned}$$

Obtemos os monômios característicos $M_1 = X_1^{\frac{3}{2}} X_2$ e $M_2 = X_1^2 X_2^{\frac{3}{2}} X_3$ com $M_1 \preceq M_2$ e os expoentes característicos são $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 1, 0)$ e $\lambda_2 = (2, \frac{3}{2}, 1)$.

Observação 2.14. *Notemos que $\varphi \in Gal(L_n : L)$ implica em $\varphi(\xi) \in \{\xi = \xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$. Assim, se $\xi_i = \varphi(\xi) \neq \xi = \xi_0$ temos*

$$0 \neq \varphi(\xi) - \xi = \xi_i - \xi = M_i u_i.$$

Isso mostra que M_i é um monômio presente em ξ e em $\varphi(\xi)$, pois se não estivesse nos dois, a igualdade acima não seria possível e seria um absurdo estar em apenas um deles em virtude do automorfismo $\varphi \in Gal(L_n : L)$. Em paricular, temos que $\varphi(M_i) = \alpha M_i \neq M_i$ ($\alpha \in \mathbb{C}$ não nulo).

Lema 2.15. *Se $\{M_k\}_{1 \leq k \leq g}$ é o conjunto dos monômios característicos distintos de um ramo quase ordinário ξ, então*

$$L(\xi) = L(M_1, M_2, \ldots, M_g).$$

Demonstração. Seja φ um L-automorfismo de L_n. Vamos mostrar que se φ é um $L(M_1, \ldots, M_g)$-automorfismo de L_n, então φ é um $L(\xi)$-automorfismo de L_n, ou seja, $Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_g)) \subset Gal(L_n : L(\xi))$, ou equivalentemente $L(\xi) \subset L(M_1, \ldots, M_g)$. De fato, se $\varphi \notin Gal(L_n : L(\xi))$ temos que $\xi_i = \varphi(\xi) \neq \xi \quad (i \neq 1)$. Assim, $\varphi(\xi) - \xi = M_i u_i \neq 0$ com $u_i(0) \neq 0$. Deste modo, pela Observação 2.14, temos que $\varphi(M_i) \neq M_i$. Com isso $\varphi \notin Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_g))$. Pela contrapositiva, se $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_g))$, então $\varphi \in Gal(L_n : L(\xi))$ e $L(\xi) \subset L(M_1, \ldots, M_g)$.

Reciprocamente, como $\xi_k = \varphi(\xi)$ para algum φ L-automorfismo de L_n, se $\varphi \in Gal(L_n : L(\xi))$, então $\varphi(\xi) = \xi$, deste modo $\varphi(M_i) = M_i$ para todo $i = 1, \ldots, g$. Assim, $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_g))$, ou seja, $L(M_1, \ldots, M_g) \subset L(\xi)$. $\square$

Observação 2.16. *Sejam $M_1, \ldots, M_g$ os monômios característicos distintos de ξ. Temos que $M_i | M_j$ para $i < j$, isto é, $M_j = (X_1^{\gamma_1} \cdots X_d^{\gamma_d}) M_i$ com $\gamma_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}$. Note que se $\varphi_i \in Gal(L_n : L)$ tal que $\varphi_i(\xi) - \xi = M_i u_i$ com $u_i(0) \neq 0$, então $\varphi_i(M_k) = M_k$ para $k < i$.*

Temos que $L(M_1, \ldots, M_{i-1}) \subset L(M_1, ..., M_i)$ e são diferentes para todo $i = 2, \ldots, g$. De fato, se $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_i))$, então $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_{i-1}))$, isto é, $L(M_1, \ldots, M_{i-1}) \subset L(M_1, \ldots, M_i)$. Além disso, $M_i \notin L(M_1, \ldots, M_{i-1})$, pois se $\varphi_i \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_{i-1}))$ tal que $\varphi_i(\xi) - \xi = M_i u_i$ segue que, $\varphi(M_i) \neq M_i$, isto é, $\varphi_i \notin Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_i))$. Isso implica que $L(M_1, \ldots, M_i) \not\subset L(M_1, \ldots, M_{i-1})$, ou seja, $M_i \notin L(M_1, \ldots, M_{i-1})$.

Para simplificar a notação vamos denotar $X = (X_1, \ldots, X_d)$ tornando $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]] = \mathbb{C}[[X]]$ e $X^\lambda = X_1^{\lambda_1} \cdots X_d^{\lambda_d}$ para qualquer $\lambda \in \mathbb{Q}^d$. Denotaremos também $X^a = X_1^a \cdots X_d^a$ para qualquer $a \in \mathbb{Q}$. Em $\mathbb{Q}^d$ consideraremos as seguintes ordens: Dados $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d), (\beta_1, \ldots, \beta_d) \in \mathbb{Q}^d$, dizemos que

$$\alpha < \beta \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_i \leq \beta_i \text{ para todo } i = 1, \ldots, d \text{ e } \alpha_j < \beta_j \text{ para algum } j \in \{1, \ldots, d\}.$$

$$\alpha \geq_{lex} \beta \quad \Leftrightarrow \quad \text{existe } j \in \{1, \ldots, d\} \text{ tal que } \alpha_j > \beta_j \text{ e } \alpha_i = \beta_i \text{ para todo } i < j.$$

Lema 2.17. *Seja $\xi = \sum c_\lambda X^\lambda \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ não unidade. Então ξ é um ramo quase ordinário se, e somente se, existem elementos $\lambda_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}^d$, para $i = 1, \ldots, g$, tais que:*

(i) $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_g$ e $c_{\lambda_i} \neq 0$ para $1 \leq i \leq g$.

(ii) Se $c_\lambda \neq 0$, então λ pertence ao subgrupo de $\mathbb{Q}^d$ dado por $\mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$.

(iii) λ_j não pertence ao subgrupo de $\mathbb{Q}^d$ dado por $\mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i < \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_i$ para $j = 1, \ldots, g$.

Demonstração. Sejam $\xi = \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ os conjugados de ξ, ou seja, $\varphi_i(\xi) = \xi_i$ com $\varphi_i \in Gal(L_n : L)$. Desse modo, temos os monômios característicos $M_i = X^{\lambda_i} = X_1^{\lambda_{i1}} \cdots X_d^{\lambda_{id}}$ que são obtidos por meio das diferenças $\varphi_i(\xi) - \xi = \xi_i - \xi = M_i u_i$ com $u_i(0) \neq 0$, $u_i \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Usando a Proposição 2.12

temos que o conjunto $\{M_l\}_{1\leq l\leq g}$ dos monômios característicos distintos é totalmente ordenado por divisibilidade e renomeando-os podemos assumir que $M_1 \prec \cdots \prec M_g$. Assim, temos que $\lambda_1 < \cdots < \lambda_g$. Temos $c_{\lambda_i} \neq 0$, pois se fosse $c_{\lambda_i} = 0$ em ξ , teríamos $c_{\lambda_i} = 0$ em ξ_j para todo $j = 1, \ldots, n$, logo M_i não seria monômio característico. Como cada $M_i \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$, segue que $\lambda_i \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}^d$. Temos assim o item (i).

Suponhamos $c_\lambda \neq 0$. Se $\varphi_i(c_\lambda X^\lambda) \neq c_\lambda X^\lambda$, segue que X^λ é um monômio presente em $\xi_i - \xi = \varphi_i(\xi) - \xi = M_i u_i$ e deste modo $M_i | X^\lambda$. Isso nos mostra que $X^\lambda \in L(M_i) \subset L(M_1, \ldots, M_i)$. Sendo X^λ um monômio, deve ter a forma $X^\lambda = (M_1)^{a_1} \cdots (M_i)^{a_i} M$ com M um monômio em L e $a_1, \ldots, a_i \in \mathbb{N}$. Temos então que $\lambda \in \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$.

Se $\varphi(c_\lambda X^\lambda) = c_\lambda X^\lambda$, então como todos os monômios de ξ pertencem a $L(M_1, \ldots, M_g)$ temos que existe um índice i tal que $c_\lambda X^\lambda \in L(M_1, \ldots, M_i) \backslash L(M_1, \ldots, M_{i-1})$. Sendo assim, $X^\lambda = (M_1)^{b_1} \cdots (M_i)^{b_i} M'$ com M' um monômio em L e $b_1, \ldots, b_i \in \mathbb{N}$, o que implica $\lambda \in \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i \leq \lambda} \mathbb{Z}\lambda_i$. Assim, temos o item (ii).

Pela Observação 2.16 temos que $M_j \notin L(M_1, \ldots, M_{j-1})$, isto é, M_j não pode ser da forma $M_j = (M_1)^{d_1} \cdots (M_i)^{d_i} M''$ com $d_1, \ldots, d_i \in \mathbb{N}$ e M'' um monômio em L, ou seja, $\lambda_j \notin \mathbb{Z}^d + \sum_{\lambda_i < \lambda_j} \mathbb{Z}\lambda_j$ para $j = 1, \ldots, g$. Assim, segue o item (iii).

Vamos assumir agora os três itens do lema e mostrar que ξ é um ramo quase ordinário. Denotemos $X^{\lambda_i} = M_i$ para $i = 1, \ldots, g$. Consideremos as seguintes extensões,

$$L \subset L(M_1) \subset L(M_1, M_2) \subset \cdots \subset L(M_1, \ldots, M_g) \subset L_n.$$

Essas inclusões são estritas pelo item (iii). Assim, temos as seguintes cadeias de grupos,

$$Gal(L_n : L_n) \subset Gal(L_n : L(M_1, ..., M_g)) \subset \cdots \subset Gal(L_n : L(M_1)) \subset Gal(L_n : L).$$

Para que ξ seja um ramo quase ordinário, primeiramente vamos mostrar que $\xi_i - \xi = M_i u_i$ onde $\xi_i = \varphi_i(\xi)$ é um conjugado de ξ, M_i um monômio e u_i uma unidade em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ com $i = 1, \ldots, n$ $(\xi_1 = \xi)$ e $\varphi_i \in Gal(L_n : L)$. Sejam $\{M_1, \ldots, M_g\}$ os monômios distintos obtidos como anteriormente.

Pelo item (ii), se $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_g))$ então $\varphi(\xi) - \xi = 0$. Assim, basta analizarmos os casos em que $\varphi \in Gal(L_n : L) \backslash Gal(L_n : L(M_1))$ e $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_l)) \backslash Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_{l+1}))$ com $l = 1, \ldots, g-1$.

Se $\varphi \in Gal(L_n : L) \backslash Gal(L_n : L(M_1))$, então segue que na diferença $\varphi(\xi) - \xi$ não há nenhum monômio em L. Pelo item (ii) e o fato de $M_1 | M_j$ com $j = 1, \ldots, g$ vem que $\varphi(\xi) - \xi = M_1 u_1$ onde $u_1(0) \neq 0$ pois $\varphi(M_1) \neq M_1$.

Se $\varphi \in Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_l)) \backslash Gal(L_n : L(M_1, \ldots, M_{l+1}))$ com $l = 1, \ldots, g-1$, então na diferença $\varphi(\xi) - \xi$ não ocorrem os monômios $M_1, \ldots, M_l$. Novamente pelo item (ii) e o fato de $M_{l+1} | M_j$ para $j = l+1, \ldots, g$ segue que $\varphi(\xi) - \xi = M_{l+1} u_{l+1}$ com $u_{l+1}(0) \neq 0$ pois $\varphi(M_{l+1}) \neq M_{l+1}$.

Para concluir que ξ é um ramo quase ordinário, vamos analizar o que ocorre com as diferenças $\xi_i - \xi_j$ com $i, j = 1, \ldots, n$. Para isso, observemos que $\xi_i - \xi_j = (\xi - \xi_j) - (\xi - \xi_i)$, ou seja, cada diferença $\xi_i - \xi_j$ é da forma $M_\alpha u_\alpha$ para algum $\alpha = 1, \ldots, g$.

Deste modo, se $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ é o polinômio minimal de ξ, então $\Delta_Y f = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\xi_i - \xi_j) = X_1^{a_1} \cdots X_d^{a_d} u$ onde $n = deg_Y(f)$, $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{N}$ e $u(0) \neq 0$ com $u \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$, ou seja, f é um polinômio quase ordinário e consequentemente ξ é um ramo quase ordinário. □

Observação 2.18. *O Lema 2.17 permite obter os monômios e os expoentes característicos sem a necessidade de explicitar todas as raízes de um polinômio* $f(X_1, \ldots, X_d, Y) \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ *quase ordinário.*

Vamos analizar o resultado anterior no caso de curvas planas.

De (2.5), dado um ramo (quase ordinário) plano $\xi = \sum b_i X_1^{\frac{i}{n}}$, temos que $\varepsilon_j | i$ para todo $\beta_{j-1} \leq b_i < \beta_j$ e disso segue que $i \in \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{Z}\beta_k$ e $\beta_j \notin \sum_{k=0}^{j-1} \mathbb{Z}\beta_k$. Reciprocamente, dada qualquer sequência crescente de naturais relativamente primos $\beta_0, \ldots, \beta_g$, tais que os inteiros definidos por $\varepsilon_j = mdc(\beta_0, \ldots, \beta_j)$ são estritamente decrescente, então existe um ramo plano que admite $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_g$ como expoentes característicos.

Observação 2.19. *O Lema 2.17 nos dá um modo de escrever os termos de um ramo quase ordinário ξ, a saber,*

$$\xi = p_0 + p_1 + \cdots + p_g$$

onde $p_0 \in \mathbb{C}[[X]]$ e para todo X^λ que ocorre em p_i com coeficiente não nulo, temos $\lambda_i \leq \lambda$ e $\lambda_{i+1} \nleq \lambda$.

Observação 2.20. *Qualquer truncamento $\zeta_k = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$ do ramo quase ordinário*

$\xi = p_0 + p_1 + \cdots + p_g$ com $k = 0, \ldots, g-1$ também é um ramo quase ordinário pelo Lema 2.17.

Exemplo 2.21. *Consideremos $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}]]$ dado por $\xi = X_2 + X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^{\frac{1}{2}} X_2^2$.*

Temos os seguintes expoentes $(0,1), (0, \frac{3}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 2)$. Como $(0,1) \in \mathbb{Z}^2$, $(0, \frac{3}{2}) \notin \mathbb{Z}^2$ e $(\frac{1}{2}, 2) \notin \mathbb{Z}^2 + (0, \frac{3}{2})\mathbb{Z}$, pelo Lema 2.17, temos $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2}) < \lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$. Assim, ξ é raiz de uma hipersuperfície $f(X_1, X_2, Y)$ quase ordinária. Fazendo alguns cálculos obtemos que ξ é raiz do polinômio quase ordinário irredutível

$$f(X_1, X_2, Y) = ((Y - X_2)^2 - X_2^3 - X_1 X_2^4)^2 - 4X_1 X_2^7$$

onde $\Delta_Y f = 4096 X_1^2 X_2^{20} (X_1^2 X_2^2 - 2X_1 X_2 + 1)$.

Definição 2.22. *Dizemos que o ramo quase ordinário ξ tem* variáveis bem ordenadas *se as g-uplas $\lambda^i = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{gi})$ das i-ésimas coordenadas dos expoentes característicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ são ordenados por $\geq_{lex}$, ou seja,*

$$\lambda^i = (\lambda_{1i}, \ldots, \lambda_{gi}) \geq_{lex} (\lambda_{1j}, \ldots, \lambda_{gj}) = \lambda^j \text{ para } 1 \leq i < j \leq d.$$

As i-ésimas coordenadas dos expoentes característicos $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ podem ser visualizadas como segue,

$$\begin{array}{ccccccc}
\lambda_1 & = & (\lambda_{11}, & \lambda_{12}, & \ldots, & \lambda_{1d}) \\
\lambda_2 & = & (\lambda_{21}, & \lambda_{22}, & \ldots, & \lambda_{2d}) \\
\vdots & & & & & \\
\lambda_g & = & (\lambda_{g1}, & \lambda_{g2}, & \ldots, & \lambda_{gd}) \\
 & & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\
 & & \lambda^1 & \lambda^2 & & \lambda^d
\end{array}$$

Dado um ramo quase ordinário ξ, podemos renomear as variáveis $X_1, \ldots, X_d$ de modo a obter um ramo com variáveis bem ordenadas.

Exemplo 2.23. *Pelo Exemplo 2.11, os expoentes característico de f dada no Exemplo 2.6 são $\lambda_1 = (0, \frac{3}{2})$ e $\lambda_2 = (\frac{1}{2}, 2)$. Temos então, $\lambda^2 = (\frac{3}{2}, 2) \geq_{lex} (0, \frac{1}{2}) = \lambda^1$, ou seja, as variáveis não estão bem ordenadas. Fazendo a mudança de variáveis $X_1 \mapsto X_2$, $X_2 \mapsto X_2$ obtemos,*

$$\begin{aligned}
f(X_1, X_2, Y) \;=\; & Y^4 - 8X_1 Y^3 + (24X_1^2 - 2X_1^3 - 2X_1^4 X_2)Y^2 + (-32X_1^3 + 8X_1^4 + 8X_1^5 X_2)Y \\
+ \; & 16X_1^4 - 8X_1^5 + X_1^6 + 2X_1^7 X_2 - 8X_1^6 X_2 + X_1^8 X_2^2 - 4X_1^7 X_2
\end{aligned}$$

com variáveis bem ordenadas e $\xi = 2X_1 + X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$. *Os expoentes característicos agora são* $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 0)$ *e* $\lambda_2 = (2, \frac{1}{2})$.

Sejam $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$ um ramo quase ordinário e $\lambda_1, \ldots, \lambda_g$ seus expoentes característicos. Vamos definir indutivamente os grupos abelianos $Q = Q_0 := \mathbb{Z}^d$, $Q_i := Q_{i-1} + \mathbb{Z}\lambda_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, g$ e $n_i = \sharp(Q_i/Q_{i-1})$. Vamos mostrar que n_i é finito.

Temos que,

$$\frac{Q_i}{Q_{i-1}} = \{q + Q_{i-1} : q \in Q_i\} = \{z\lambda_i + Q_{i-1} : z \in \mathbb{Z}\}.$$

Lembremos que $z_1\lambda_i + Q_{i-1} = z_2\lambda_i + Q_{i-1}$ se, e somente se, $\lambda_i(z_1 - z_2) \in Q_{i-1} = \mathbb{Z}^d + \lambda_1\mathbb{Z} + \cdots + \lambda_{i-1}\mathbb{Z}$. Mas $\lambda_i \in (1/k)\mathbb{Z}_+^d$ para algum inteiro positivo k e, sendo assim, se $(z_1 - z_2) = lk$ com $l \in \mathbb{Z}$ então $\lambda_i(z_1 - z_2) \in \mathbb{Z}^d \subset Q_{i-1}$. Como o conjunto das classes de inteiros, módulo k, é finito, segue que, existem no máximo k classes distintas em Q_i/Q_{i-1}. Portanto, n_i é finito.

No que segue denotaremos $e_{j-1} = n_j \cdots n_g$ para $j = 1, \ldots, g$ e $n_0 = 1$.

Observação 2.24. *Os inteiros* e_j *e* n_j *são os graus das extensões de corpos,*

$$\begin{aligned} e_j &:= [L(\xi) : L(M_1, \ldots, M_j)] && \textit{para } j=1,\ldots,g \\ n_j &:= [L(M_1, \ldots, M_j) : L(M_1, \ldots, M_{j-1})] && \textit{para } j=2,\ldots,g \end{aligned}$$

e $n_1 = [L(M_1) : L]$.

De fato, considere a extensão $[L(M_1, \ldots, M_j) : L(M_1, \ldots, M_{j-1})]$. *O grau desta extensão é o grau do polinômio minimal de* M_j *sobre* $L(M_1, \ldots, M_{j-1})$. *Por definição,* $n_j = \sharp(Q_j/Q_{j-1})$ *é o menor inteiro tal que* $n_j\lambda_j \in Q_{j-1}$. *Deste modo, o polinômio* $Y^{n_j} - M_j^{n_j}$ *é o polinômio minimal de* M_j *sobre* $L(M_1, \ldots, M_{j-1})$ *e assim,* $[L(M_1, \ldots, M_j) : L(M_1, \ldots, M_{j-1})] = n_j$ *para* $j = 1, \ldots, g$. *Além disso,*

$$\begin{aligned} e_j = n_{j+1} \cdots n_g &= [L(M_1, \ldots, M_{j+1}) : L(M_1, \ldots, M_j)] \cdots [L(\xi) : L(M_1, \ldots, M_{g-1})] \\ &= [L(\xi) : L(M_1, \ldots, M_j)] \end{aligned}$$

lembrando que $L(\xi) = L(M_1, \ldots, M_g)$.

Definamos os vetores $\gamma_1, \ldots, \gamma_g \in \mathbb{Q}^d_+$ por,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda_1; \\ \gamma_i &= n_{i-1}\gamma_{i-1} + \lambda_i - \lambda_{i-1} \text{ para todo } i = 2, \ldots, g; \qquad (2.6) \\ \gamma_{g+1} &:= \infty. \end{aligned}$$

Notemos que λ_i com $i = 1, \ldots, g$ possui n como denominador comum. Desse modo, podemos definir também,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= n\lambda_1 = n\gamma_1; \\ \bar{\gamma}_i &= n_{i-1}\bar{\gamma}_{i-1} + n\lambda_j - n\lambda_{j-1} \text{ para } i = 1, \ldots, g; \qquad (2.7) \\ \bar{\gamma}_{g+1} &= \infty. \end{aligned}$$

Observe que $\bar{\gamma}_1, \ldots, \bar{\gamma}_g \in \mathbb{N}$.

De (2.7) podemos escrever,

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{k+1} &= n(n_k \cdots n_2(n_1 - 1)\lambda_1 + n_k \cdots n_3(n_2 - 1)\lambda_2 + \cdots + (n_k - 1)\lambda_k + \lambda_{k+1}) \qquad (2.8) \\ &= n_1 \cdots n_{k+1}((e_0 - e_1)\lambda_1 + (e_1 - e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{k-1} - e_k)\lambda_k + e_k\lambda_{k+1}). \end{aligned}$$

Podemos observar, por (2.6), que γ_{k+1} pode ser escrito da seguinte forma,

$$\gamma_{k+1} = n_k \cdots n_2(n_1 - 1)\lambda_1 + n_k \cdots n_3(n_2 - 1)\lambda_2 + \cdots + (n_k - 1)\lambda_k + \lambda_{k+1} \qquad (2.9)$$

para $k = 1, \ldots, g$. Também dessa relação, concluímos que $\gamma_{k+1} \in Q_{k+1}$.

Lema 2.25. *Todo elemento h de Q_j pode ser escrito de uma forma única como $\gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{j-1}\gamma_j$, onde $\gamma \in Q_0$ e $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$ para todo $k = 0, \ldots, g-1$ e todo $j = 0, \ldots, g$.*

Demonstração. Por definição $n_i = \sharp(Q_i/Q_{i-1})$, desse modo como $\gamma_k \in Q_k$ temos que $n_k\gamma_k \in Q_{k-1}$ para todo $k = 1, \ldots, g$.

Mostraremos por indução sobre j que os elementos de Q_j podem ser escritos como descrito no enunciado. Inicialmente lembremos que temos as seguintes inclusões

$$\mathbb{Z}^d = Q_0 \subset Q_1 \subset \cdots \subset Q_{g-1} \subset Q_g.$$

Para $k = 0$, isto é, para $h \in Q_0$ o resultado é imediato. Vamos supor o resultado válido para k e consideremos $h \in Q_{k+1} = Q_k + \mathbb{Z}\lambda_{k+1}$. Assim, h é da forma $h = m_k + \alpha\lambda_{k+1}$ com $m_k \in Q_k$ e $\alpha \in \mathbb{Z}$. Por (2.6), podemos escrever

$$h = m_k + \alpha(\gamma_{k+1} - n_k\gamma_k + \lambda_k) = m_k + \alpha\gamma_{k+1} - \alpha n_k\gamma_k + \alpha\lambda_k.$$

Observemos que $\alpha\lambda_k \in Q_k$ e $\alpha n_k\gamma_k \in Q_{k-1} \subset Q_k$. Dessa forma, h pode ser escrito na forma $h = m'_k + \alpha\gamma_{k+1}$ com $m'_k \in Q_k$. Usando o algoritmo da divisão, podemos escrever $\alpha = qn_{k+1} + i_k$ com $q \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$. Desse modo, h tem a forma

$$h = m'_k + (qn_{k+1} + i_k)\gamma_{k+1} = m'_k + qn_{k+1}\gamma_{k+1} + i_k\gamma_{k+1}.$$

Notemos que $qn_{k+1}\gamma_{k+1} \in Q_k$. Segue assim, que $h = m''_k + i_k\gamma_{k+1}$ com $m''_k \in Q_k$ e $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$. Por hipótese de indução podemos escrever $m''_k = \gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{k-1}\gamma_k$, segue que,

$$h = \gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{k-1}\gamma_k + i_k\gamma_{k+1}$$

onde $\gamma \in Q_0$ e $0 \leq i_j \leq n_{j+1} - 1$ para todo $j = 0, \ldots k$.

Resta mostrarmos a unicidade. Observemos inicialmente que,

$$n_i = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_i \in Q_{i-1}\} = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\gamma_i \in Q_{i-1}\} \tag{2.10}$$

para $i = 1, \ldots, g$.

De fato, por (2.9), temos que,

$$n_i\gamma_i = n_i \cdots n_2(n_1 - 1)\lambda_1 + n_i \cdots n_3(n_2 - 1)\lambda_2 + \cdots + n_i(n_{i-1} - 1)\lambda_{i-1} + n_i\lambda_i.$$

Como $\lambda_1, \ldots, \lambda_{i-1} \in Q_i$ e n_k é o menor natural não nulo tal que $n_i\lambda_i \in Q_{i-1}$, segue que $n_i = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\gamma_i \in Q_{i-1}\}$.

Suponhamos que $\gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{j-1}\gamma_j = \beta + l_0\gamma_1 + \cdots + l_{j-1}\gamma_j$. Se $(i_0, \ldots, i_{j-1}) = (l_0, \ldots, l_{j-1})$ devemos ter $\gamma = \beta$. Assim, vamos supor que $\gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{j-1}\gamma_j = \beta + l_0\gamma_1 + \cdots + l_{j-1}\gamma_j$ mas $(i_0, \ldots, i_{j-1}) \neq (l_0, \ldots, l_{j-1})$. Definamos $p = max\{\ k; i_k \neq l_k\}$. Então $p \leq j - 1$ e

$$(i_p - l_p)\gamma_{p+1} = (\gamma - \beta) + \sum_{k=0}^{p-1}(l_k - i_k)\gamma_{k+1} \in Q_p.$$

Mas, $0 < |i_p - l_p| \leq n_{p+1} - 1$, o que contradiz o fato de $n_{p+1} = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\gamma_{p+1} \in Q_p\}$. $\square$

2.4 Lema de Inversão

Nesta seção motraremos que, apesar de não ser tão evidente, qualquer hipersuperfície quase ordinária admite como raiz um ramo quase ordinário normalizado, no sentido abaixo:

Definição 2.26. *Um ramo quase ordinário $\xi = \sum c_\lambda X^\lambda$ é normalizado se:*

(i) $c_\lambda \neq 0$ então $\lambda \geq \lambda_1$, isto é, $\xi = c_{\lambda_1} X^{\lambda_1} H$ com $H \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$ e $H(0) \neq 0$.

(ii) ξ tem variáveis bem ordenadas.

(iii) Se $\lambda_1 = (\lambda_{11}, 0, \ldots, 0)$, então $\lambda_{11} > 1$.

A condições (i) e (ii) são facilmente conseguidas por meio de mudança de coordenadas. De fato, vimos como proceder para obter (ii). Agora se existe $\sum b_\lambda X^\lambda$ em ξ com $b_\lambda \neq 0$ e $\lambda < \lambda_1$ então, considerando a mudança de coordenadas $X_i \mapsto X_i$ e $Y \mapsto Y + \sum c_\lambda X^\lambda$, temos um ramo satisfazendo o item (i) da definição acima.

Exemplo 2.27. *No Exemplo 2.23, o ramo $\xi = 2X_1 + X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$ não é normalizado pois não satisfaz a condição (i) da Definição 2.26. Efetuando a mudança de variáveis $X_1 \mapsto X_1$, $X_2 \mapsto X_2$, $Y \mapsto Y + 2X_1$, obtemos*

$$f(X_1, X_2, Y) = Y^4 + (-2X_1^4 X_2 - 2X_1^3)Y^2 - 2X_1^7 X_2 + X_1^6 + X_1^8 X_2^2$$

e $\xi = X_1^{\frac{3}{2}} + X_1^2 X_2^{\frac{1}{2}}$.

A condição (iii), apesar de não ser evidente, não é restritiva como indica o lema a seguir.

Lema 2.28. *(Lema de Inversão) Se uma hipersuperfície quase ordinária em $\mathbb{C}^{d+1}$ possui uma raiz $\xi = X_1^{\frac{k}{r_1}} H(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})$ com $H(0) \neq 0$, então também possui uma raiz da forma $\tau = Y^{\frac{r_1}{k}} H'(Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})$ com $H'(0) \neq 0$.*

Demonstração. Seja $f \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]][Y]$ o polinômio minimal de ξ. Os conjugados de ξ sobre $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ são da forma $\xi_i = X_1^{\frac{k}{r_1}} H_i(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})$ com $H_i(0) \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ onde $n = deg_Y f$. Assim,

$$f(X_1,\ldots,X_d,Y)=\prod_{i=1}^{n}\left(Y-X_1^{\frac{k}{r_1}}H_i(X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}})\right)$$

e $f(X_1,0,\ldots,0)=X_1^{\frac{kn}{r_1}}\varepsilon_1$, onde $\frac{kn}{r_1}$ é um inteiro positivo e $\varepsilon_1\in\mathbb{C}[[X_1]]$ é uma unidade. Pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe um polinômio de Weierstrass irredutível $h\in\mathbb{C}[[X_2,\ldots,X_d,Y]][X_1]$ de grau $\frac{kn}{r_1}$ e uma unidade $\varepsilon_2\in\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_d,Y]]$, tal que $\varepsilon_2 f=h$.

O ramo quase ordinário ξ é da forma $\xi=X_1^{\frac{k}{r_1}}F^k(X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}})$ para uma série $F\in\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_d]]$ tal que $F^k=H$. A série $W-X_1F\in\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_d,W]]$ possui ordem um em X_1, pois temos $F^k(0)=H(0)\neq 0$ que implica em $F(0)\neq 0$ visto que $\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_d]]$ é um domínio de integridade. Portanto, pelo Teorema de Preparação de Weierstrass, existe uma unidade $\varepsilon_3\in\mathbb{C}[[X_1,\ldots,X_d,W]]$ tal que,

$$\varepsilon_3(W-X_1F)=X_1+P(X_2,\ldots,X_d,W).$$

Notemos que, fazendo $W=0$ na igualdade acima temos

$$-X_1\varepsilon_3F=X_1+P(X_2,\ldots,X_d,0),$$

isto é, o segundo membro desta última igualdade deve ser múltiplo de X_1, que só é possível se tivermos $P(X_2,\ldots,X_d,0)=0$. Logo, todos os termos de P são múltiplos de W. Sendo assim, podemos escrever,

$$\varepsilon_3(W-X_1F)=X_1-WG$$

com $G\in\mathbb{C}[[X_2,\ldots,X_d,W]]$ uma unidade tal que $\varepsilon_3(0,X_2,\ldots,X_d,W)=-G$.

Substituamos X_i por $X_i^{\frac{1}{r_i}}$, para $i=1,\ldots,d$, W por $Y^{\frac{1}{k}}$ e denotemos por O o anel $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}},Y^{\frac{1}{k}}]]$.

As séries $Y^{\frac{1}{k}}-X_1^{\frac{1}{r_1}}F(X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}})$ e $X_1^{\frac{1}{r_1}}-Y^{\frac{1}{k}}G(Y^{\frac{1}{k}},X_2^{\frac{1}{r_2}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}})$ definem o mesmo ideal I em O. Desse modo, temos os isomorfismos de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}}]]\simeq O/I\to O/I\simeq\mathbb{C}[[Y^{\frac{1}{k}},X_2^{\frac{1}{r_2}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}}]] \tag{2.11}$$

Para o primeiro isomorfismo, defina o seguinte homomorfismo,

$$\begin{aligned}\varphi\ :\ & O\to\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}}]]\\ & X_i^{\frac{1}{r_i}}\mapsto X_i^{\frac{1}{r_i}}\\ & Y^{\frac{1}{k}}\mapsto X_1^{\frac{1}{r_1}}F(X_1^{\frac{1}{r_1}},\ldots,X_d^{\frac{1}{r_d}})\end{aligned} \tag{2.12}$$

Notemos que φ é sobrejetor. Mostraremos que $Ker(\varphi) = \langle Y^{\frac{1}{k}} - X_1^{\frac{1}{r_1}} F(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})\rangle$. Claramente temos $\langle Y^{\frac{1}{k}} - X_1^{\frac{1}{r_1}} F(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})\rangle \subset Ker(\varphi)$. Observemos que $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]] \simeq \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}, Y^{\frac{1}{k}}]]$ por meio do isomorfismo dado por $X_i \mapsto X_i^{\frac{1}{r_i}}$ e $Y \mapsto Y^{\frac{1}{k}}$.

Consideremos $h, Y - X_1F(X_1, \ldots, X_d) \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]]$. Pelo Teorema da Divisão de Weierstrass temos que existem únicos $q \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d, Y]]$ e $r \in \mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ tais que $h = q(Y - X_1F(X_1, \ldots, X_d)) + r$. Assim, podemos escrever todo $h(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}, Y^{\frac{1}{k}}) \in O$ da forma,

$$h(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}, Y^{\frac{1}{k}}) = q(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}, Y^{\frac{1}{k}})[Y^{\frac{1}{k}} - X_1^{\frac{1}{r_1}} F(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})] + r(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}).$$

Se $h(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}, Y^{\frac{1}{k}}) \in Ker(\varphi)$, então temos que $r = 0$. Logo $Ker(\varphi) \subset \langle Y^{\frac{1}{k}} - X_1^{\frac{1}{r_1}} F(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})\rangle$ e desse modo, $Ker(\varphi) = \langle Y^{\frac{1}{k}} - X_1^{\frac{1}{r_1}} F(X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})\rangle$. Portanto, $O/I \simeq \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{r_1}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}]]$.

Para mostrar o segundo isomorfismo, basta considerar o homomorfismo,

$$\begin{aligned} \varphi' \ : \ & O \to \mathbb{C}[[Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}]] \\ & X_i^{\frac{1}{r_i}} \mapsto X_i^{\frac{1}{r_i}} \quad i \neq 1 \\ & Y^{\frac{1}{k}} \mapsto Y^{\frac{1}{k}} \\ & X_1^{\frac{1}{r_1}} \mapsto Y^{\frac{1}{k}} G(Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}) \end{aligned} \tag{2.13}$$

e proceder analogamente como no isomorfismo anterior.

A imagem inversa da classe de Y sob o isomorfismo (2.11) é igual a ξ e a imagem da classe de X_1 é igual a $\tau := Y^{\frac{r_1}{k}} G^{r_1}(Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}})$. Assim, a imagem pelo isomorfismo (2.11) de $h(X_1, \ldots, X_d, \xi)$ é igual a $h(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y)$, portanto a série τ é uma raiz de h e consequentemente de f.

Para concluir basta mostrarmos que $\Delta_{X_1}(h) = Y^a X_2^{a_1} \cdots X_d^{a_d} \varepsilon$ com ε uma unidade em $\mathbb{C}[[X_2, \ldots, X_d, Y]]$.

A inclusão $\mathbb{C}[[Y, X_2, \ldots, X_d]] \subset \mathbb{C}[[Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}]]$ induz uma extensão de Galois finita dos seus respectivos corpos de frações. Como o polinômio h é irredutível sobre $\mathbb{C}[[Y, X_2, \ldots, X_d]]$ e tem raiz $\tau \in \mathbb{C}[[Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}]]$, ele se fatora em $\mathbb{C}[[Y^{\frac{1}{k}}, X_2^{\frac{1}{r_2}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{r_d}}]]$. Portanto, todas as outras raízes são obtidas pela ação das raízes da unidade sobre as variáveis. O discriminante do polinômio h com respeito à X_1 é igual a $\Delta_{X_1}(h) = \prod \dfrac{\partial h}{\partial X_1}(\tau_s)$ onde τ_s percorre as raízes de h. Assim, é suficiente mostrarmos que $\dfrac{\partial h}{\partial X_1}(\tau)$ é da forma $Y^{\frac{a_1}{k}} X_2^{\frac{a_2}{r_2}} \cdots X_d^{\frac{a_d}{r_d}} \varepsilon_4$ para uma unidade $\varepsilon_4 \in O/I$ e inteiros não negativos $a_1, \ldots, a_d$.

Quando diferenciamos $h(\tau, X_2, ..., X_d, Y) = 0$, com respeito a indeterminada $Y^{\frac{1}{k}}$ obtemos,

$$\frac{\partial h}{\partial X_1}(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y)\frac{\partial \tau}{\partial Y^{\frac{1}{k}}} + kY^{\frac{k-1}{k}}\frac{\partial h}{\partial Y}(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y) = 0 \tag{2.14}$$

onde $\dfrac{\partial \tau}{\partial Y^{\frac{1}{k}}}$ é da forma $Y^{\frac{r_1-1}{k}}\varepsilon_5$, para uma unidade $\varepsilon_5 \in O/I$.

Como $\dfrac{\partial h}{\partial Y} = f\dfrac{\partial \varepsilon_2}{\partial Y} + \varepsilon_2\dfrac{\partial f}{\partial Y}$ e o polinômio f é quase ordinário, a imagem inversa de $\dfrac{\partial h}{\partial Y}(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y)$ pelo isomorfismo (2.11) é da forma,

$$\left(f\frac{\partial \varepsilon_2}{\partial Y} + \varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial Y}\right)(X_1, \ldots, X_d, \xi) = \left(\varepsilon_2\frac{\partial f}{\partial Y}\right)(X_1, \ldots, X_d, \xi) = X_1^{\frac{b_1}{r_1}} \cdots X_d^{\frac{b_d}{r_d}}\varepsilon_6$$

para uma unidade $\varepsilon_6 \in O/I$. Portanto, $h_Y(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y)$ é da forma $Y^{\frac{b_1}{k}} X_2^{\frac{b_2}{r_2}} \cdots X_d^{\frac{b_d}{r_d}}\varepsilon_7$, para uma unidade $\varepsilon_7 \in O/I$ e inteiros não negativos $b_1, \ldots, b_d$. Pela igualdade (2.14), temos

$$\frac{\partial h}{\partial X_1}(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y) = Y^{\frac{k-r_1}{k}}\frac{\partial h}{\partial Y}(\tau, X_2, \ldots, X_d, Y)\varepsilon_8$$

para uma unidade $\varepsilon_8 \in O/I$. $\square$

Capítulo 3

Semigrupo de uma Hipersuperfície Quase Ordinária

Neste capítulo apresentaremos o semigrupo associado a uma hipersuperfície quase ordinária. Do mesmo modo que para curvas planas, tal semigrupo é um invariante topológico completo no caso de germes analíticos (veja [L] e [Ga]).

No caso plano, para obtermos o semigrupo associado a uma curva plana, usamos a valoração associada a f, ou seja, $v_f(h) = mult_T(h(T^n, \phi(T)))$ com $h \in \mathbb{C}[[X_1]]\backslash(f)$ e $(T^n, \phi(T))$ uma parametrização de f, ou equivalentemente, calculamos $n{\cdot}mult_{X_1}(h(X_1, \xi))$ com $\xi \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}]]$ uma raiz de f. Isto é o mesmo que calcular o expoente dominante de $h(T^n, \phi(T))$. Já no caso de hipersuperfícies, nem sempre um ramo quase ordinário possui expoente dominante e, por esse fato, usaremos o Poliedro de Newton.

3.1 Poliedro de Newton

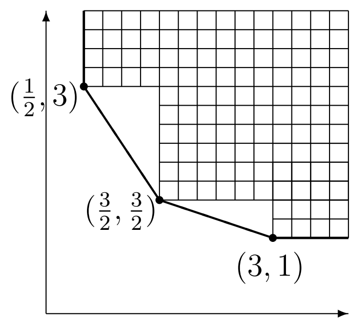
Definição 3.1. *Seja $\eta = \sum c_\alpha X^\alpha \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$. Se η pode ser escrito na forma $\eta = X^m u(X)$ com $m \in \mathbb{Q}_+^d$ e $u \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$, $u(0) \neq 0$, dizemos que η possui* expoente dominante *m e denotamos este expoente por $v_X(\eta) = m$.*

Definição 3.2. *Seja $\eta = \sum c_\alpha X^\alpha \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{n}}, \ldots, X_d^{\frac{1}{n}}]]$. Definimos o* poliedro de Newton *$\mathcal{N}_X(\eta)$ de η como sendo $\overline{Supp(\eta) + \mathbb{R}_+^d}$, ou seja, o fecho convexo em $\mathbb{R}^d$ do conjunto $Supp(\eta) + \mathbb{R}_+^d$ onde $Supp(\eta) = \{\alpha \in \mathbb{Q}^d; c_\alpha \neq 0\}$ é o suporte de η. Os vértices de $\overline{Supp(\eta) + \mathbb{R}_+^d}$ são chamados de* vértices do poliedro de Newton *.*

Exemplo 3.3. *O poliedro de Newton de*

$$\eta = X_1^{\frac{1}{2}} X_2^3 + X_1^{\frac{3}{2}} X_2^{\frac{3}{2}} + X_1^3 X_2^1 \in \mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}]]$$

é



com $Supp(\eta) = \{(\frac{3}{2}, 3), (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}), (3, 1)\}$.

Se η possui expoente dominante, então $\mathcal{N}_X(\eta) = v_X(\eta) + \mathbb{R}_+^d$, o que sugere que poliedro de Newton é uma generalização de expoente dominante.

3.2 Semirraízes

Como antes, vamos denotar o conjunto de todas as raízes de f por $Z(f)$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_{g+1}$ os vetores dados em (2.6).

Definição 3.4. *Sejam $\xi \in Z(f)$ e $k \in \{0, \ldots, g\}$. Um polinômio mônico $f_k \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ é chamado uma k-semirraiz de f se $deg_Y(f_k) = n_0 n_1 \cdots n_k$ e f_k possui um expoente dominante $v_X(f_k(\xi)) = \gamma_{k+1}$ onde $f_k(\xi) = f_k(X, \xi)$. Uma $(g+1)$-upla $(f_0, \ldots, f_g)$ tal que, para todo $k \in \{0, \ldots, g\}$, f_k é uma k-semirraiz de f, é chamado um* sistema completo de semirraízes *para f. Observemos que podemos tomar f como sendo a g-ésima semirraiz de f.*

Notemos que as semirraízes de f não dependem da escolha de ξ.

Sempre existe um sistema completo de semirraízes para f. Os polinômios minimais de truncamentos adequados de ξ formam um sistema completo de semirraízes para f. Introduziremos agora algumas definições e resultados para provarmos essa afirmação.

Definição 3.5. *Sejam $f, h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ de graus positivos. Dizemos que f e h são* comparáveis *se o discriminante de fh com respeito a variável Y é da forma*

$$\Delta_Y(fh) = X^\lambda \varepsilon \text{ com } \lambda \in \mathbb{N}^d \text{ e } \varepsilon \text{ unidade em } \mathbb{C}[[X]].$$

Se f e h são comparáveis, o produto fh é uma hipersuperfície quase ordinária e, então, dadas $\xi \in Z(f)$ e $\tau \in Z(h)$ quaisquer, a diferença entre ξ e τ é da forma $X^\delta \varepsilon$ com $\varepsilon \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ unidade e $\delta \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}^d$. Pela Proposição 2.12 o conjunto

$$\{\delta; \xi - \tau = X^\delta \varepsilon, \delta \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}^d, \varepsilon \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]] \text{ unidade}\}$$

é totalmente ordenado. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 3.6. *Sejam f e h polinômios comparáveis pertencentes a $\mathbb{C}[[X]][Y]$. Dizemos que f e h tem* ordem de coincidência $\alpha \in (\frac{1}{n})\mathbb{N}$ *se α é o maior expoente, com respeito a ordem $<$, do conjunto $\{\delta; \xi - \tau = X^\delta u(X^{\frac{1}{n}}),$ com u unidade$, f(\xi) = h(\tau) = 0\}$.*

Observação 3.7. *Sejam f, h dois polinômios em $\mathbb{C}[[X]][Y]$ com $deg(f) = n$ e $deg(h) = m$. De (2.3) temos,*

$$\mathcal{N}_X(R_Y(f,h)) = \mathcal{N}_X\left(\prod_{i=1}^{n} h(\xi_i)\right) = deg(f)\mathcal{N}_X(h(\xi_i))$$

e

$$\mathcal{N}_X(R_Y(f,h)) = \mathcal{N}_X\left(\prod_{j=1}^{m} f(\tau_j)\right) = deg(q)\mathcal{N}_X(f(\tau_j))$$

onde ξ_i, com $i = 1, \ldots, n$, são as raízes de f e τ_j, com $j = 1, \ldots, m$, são as raízes de h.

Proposição 3.8. *Sejam $f, h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ dois polinômios quase ordinários irredutíveis com ordem de coincidência α tais que $deg(f) = n$, λ_j, com $j = 1, \ldots, g$, são os expoentes característicos de $\xi \in Z(f)$ e $i = max\{j; \lambda_j < \alpha\}$. Então $R_Y(f,h) = X^\beta u(X)$ com $u(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ unidade e $\beta = deg(h)((e_0 - e_1)\lambda_1 + (e_1 - e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{i-1} - e_i)\lambda_i + e_i\alpha)$.*

Demonstração. Por hipótese, f tem ordem de coincidência α com h. Sendo assim, considerando $\tau \in Z(h)$, podemos tomar $\xi \in Z(f)$, tal que $\xi - \tau = X^\alpha u_1(X^{\frac{1}{n}})$ com $u_1(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ unidade. Notemos que, se existem expoentes característicos de τ que sejam menores que α, eles são iguais a λ_k com $1 \leq k \leq i$. As raízes de f que verificam a propriedade $\xi - \tau = X^\alpha u_1(X^{\frac{1}{n}})$ são obtidas de ξ pela ação do grupo de Galois da extensão $L(X^{\lambda_1}, \ldots, X^{\lambda_i}) \subset L(\xi)$. Assim,

$$\sharp\{\text{raízes de } f \text{ tais que } \xi - \tau = X^\alpha(unid.)\} = [L(\xi) : L(X^{\lambda_1}, \ldots, X^{\lambda_i})] = e_i \qquad (3.1)$$

Pela diferença $\xi - \tau = X^\alpha u_1(X^{\frac{1}{n}})$, vem que os expoentes característicos de ξ que são menores que α, de alguma forma aparecem em τ podendo não serem expoentes característicos de τ. Com isso,

$$\sharp\{\text{raízes de } f \text{ tais que } \xi - \tau = X^{\lambda_k}(unid.)\} = e_{k-1} - e_k \text{ para } k = 1, \ldots, i. \qquad (3.2)$$

Consideremos ξ_l as raízes de f para $l = 1, \ldots, n$. Escrevendo $f(X,Y) = \prod_{l=1}^{n}(Y - \xi_i)$, temos que $f(X,\tau) = \prod_{l=1}^{n}(\tau - \xi_i)$. Agora, por (3.1) e (3.2) segue que $f(X,\tau) = X^{\beta'}u_2(X^{\frac{1}{n}})$ com $u_2(X^{\frac{1}{n}})$ unidade em $\mathbb{C}[[X]]$ e

$$\beta' = (e_0 - e_1)\lambda_1 + (e_1 - e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{i-1} - e_i)\lambda_i + e_i\alpha.$$

Assim, pela Observação 3.7 segue que $R_Y(f,h) = X^{\beta}u_3(X)$, $u_3(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ unidade, com

$$\beta = deg(h)((e_0 - e_1)\lambda_1 + (e_1 - e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{i-1} - e_i)\lambda_i + e_i\alpha).$$

Portanto, temos o resultado. $\square$

Proposição 3.9. *Sejam $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ uma hipersuperfície quase ordinária irredutível de grau n com raízes ξ_k, $k = 1, \ldots, n$, expoentes característicos λ_j para $j = 1, \ldots, g$ e $q \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ um polinômio quase ordinário irredutível de grau $n_0 n_1 \ldots n_j$ para $0 \leq j \leq g-1$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) O polinômio q tem ordem de coincidência λ_{j+1} com f.

(2) $R_Y(f,q) = X^{\bar{\gamma}_{j+1}}\varepsilon_j$ para uma unidade $\varepsilon_j \in \mathbb{C}[[X]]$.

(3) $q(\xi_k) = X^{\gamma_{j+1}}\epsilon_j$ para uma unidade $\epsilon_j \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ e $k = 1, \ldots, g$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos o resultado para $j = 0$. Assim, q tem grau $n_0 = 1$ e é da forma $q(Y) = Y - X^{\delta}u_1(X)$ com $u_1(X)$ unidade em $\mathbb{C}[[X]]$ e $\delta \in \mathbb{N}^d$ já que q é quase ordinário. Vamos assumir (1), ou seja, que q tem ordem de coincidência λ_1 com f. Seja ξ_k uma raiz de f tal que $\xi_k - X^{\delta}u_1(X) = X^{\lambda_1}u_2(X^{\frac{1}{n}})$ onde $u_2(X^{\frac{1}{n}})$ é uma unidade em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Como os elementos do grupo de Galois da extensão $L \subset L(\xi)$ fixam os elementos de $\mathbb{C}[[X]]$, segue que $\xi_k - X^{\delta}u_1(X) = X^{\lambda_1}u'_k(X^{\frac{1}{n}})$ para todo $k = 1, \ldots, g$ e $u'_k(X^{\frac{1}{n}})$ unidade em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Temos então,

$$R_Y(f,q) = \prod_{k=1}^{n} q(\xi_k) = \prod_{k=1}^{n}(\xi_k - X^{\delta}u_1(X)) = X^{n\lambda_1}u''(X) = X^{\bar{\gamma}_1}u''(X)$$

onde $u''(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ unidade. Segue assim, o item (2).

Vamos assumir o item (2). Pela igualdade anterior, temos que $\mathcal{N}_X(R_Y(f,q)) = n\mathcal{N}_X(q(\xi_k))$ para um k qualquer. Por hipótese, o vértice de $\mathcal{N}_X(R_Y(f,q))$ é $\bar{\gamma}_1$ e, sendo assim, o vértice de $\mathcal{N}_X(q(\xi_k))$ é $\lambda_1 = \gamma_1$. Logo, $q(\xi_k) = X^{\gamma_1}\epsilon_1$ para uma unidade $\epsilon_1 \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ e todo $k = 1, \ldots, n$. Portanto, temos o item (3).

Supondo (3), isto é, $q(\xi_k) = \xi_k - X^{\delta}u_1(X) = X^{\gamma_1}\epsilon_1$ para todo $k = 1, \ldots, n$, temos pela definição de ordem de coincidência, o item (1).

Suponhamos agora que q é um polinômio quase ordinário irredutível de grau maior ou igual a 1 comparável com f e tendo ordem de coincidência α.

Vamos mostrar que (2) é equivalente a (3). Se $R_Y(f,q) = X^{\bar{\gamma}_{j+1}}\varepsilon_j$ com ε_j unidade em $\mathbb{C}[[X]]$, temos que $\mathcal{N}_X(R_Y(f,q))$ tem vértice $\bar{\gamma}_{j+1}$. Da Observação 3.7, vem que $\mathcal{N}_X(R_Y(f,q)) = n\mathcal{N}_X(q(\xi_k))$ e assim, $\mathcal{N}_X(q(\xi_k))$ tem como vértice $(\frac{1}{n})\bar{\gamma}_{j+1} = \gamma_{j+1}$. Logo, $q(\xi_k) = X^{\gamma_{j+1}}\epsilon_j$ com $\epsilon_j \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ e $k = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, se $q(\xi_k) = X^{\gamma_{j+1}}\epsilon_j$, da Observação 3.7, segue que $\mathcal{N}_X(R_Y(f,q))$ tem como vértice $n\gamma_{j+1} = \bar{\gamma}_{j+1}$ e portanto $R_Y(f,q) = X^{\bar{\gamma}_{j+1}}\varepsilon_j$, com $\varepsilon_j \in \mathbb{C}[[X]]$ unidade. Assim, (2) é equivalente a (3).

Mostraremos agora que (1) é equivalente a (2).

Inicialmente consideremos o caso em que existe $i = max\{j; \lambda_j < \alpha\}$. Consideremos τ uma raiz qualquer do polinômio q. Tomemos uma raiz ξ_k de f tal que $\xi_k - \tau = X^{\alpha}u_3(X^{\frac{1}{n}})$ com $u_3(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ unidade. Pela Proposição 3.8 $R_Y(f,q) = X^{\beta}u_3(X)$ com $u_3(X) \in \mathbb{C}[[X]]$ unidade e

$$\beta = n_0 n_1 \ldots n_j((e_0 - e_1)\lambda_1 + (e_1 - e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{i-1} - e_i)\lambda_i + e_i\alpha). \tag{3.3}$$

Assumindo (1), ou seja, se $\alpha = \lambda_{j+1}$, então temos que $i = j$ e $\gamma = \bar{\gamma}_{j+1}$ por (2.8).

Reciprocamente, assumir (2) é o mesmo que dizer que $\beta = \bar{\gamma}_{j+1}$. Se mostarmos que $i = j$ vamos ter $\alpha = \lambda_{j+1}$. Suponha $1 \leq i < j$. De (2.8) e (3.3) vem que,

$$e_i\lambda_{j+1} < e_j\lambda_{j+1} < (e_i - e_{i+1})\lambda_{i+1} + \cdots + (e_{j+1} - e_j)\lambda_j + e_j = e_i\alpha,$$

ou seja, $\lambda_{j+1} < \alpha$. Isso implica que λ_j é menor que α e é também um expoente característico de τ, uma contradição. Se $j < i$, obtemos de (2.8) e (3.3) que $\beta > \bar{\gamma}_{j+1}$.

Se tivermos ainda α menor ou igual a qualquer expoente característico de τ, em particular temos $\alpha \leq \lambda_1$, onde λ_1 é o primeiro expoente caracterítico de ξ. Desse modo, por (3.3) temos $\beta = deg(q) \cdot e_0 \cdot \alpha$. Assim,

$$deg(q) \cdot e_0 \cdot \alpha = \beta = \bar{\gamma}_{j+1} = deg(q)((e_0 - e_1)\lambda_1 + \cdots + (e_{j-1} - e_j)\lambda_j) + e_j\lambda_{j+1}$$

o que implica em

$$e_0\lambda_1 \geq e_0\alpha = e_0\lambda_1 + e_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \cdots + e_{j-1}(\lambda_j - \lambda_{j-1}) + e_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j),$$

ou seja,

$$0 \geq e_1(\lambda_2 - \lambda_1) + \cdots + e_{j-1}(\lambda_j - \lambda_{j-1}) + e_j(\lambda_{j+1} - \lambda_j)$$

que é um absurdo.

Portanto, $\beta = \bar{\gamma}_{j+1}$ implica que $i = j$ e $\alpha = \lambda_{j+1}$. Concluímos assim a demonstração. $\square$

Observação 3.10. *O expoente δ do discriminante de f, $\Delta_Y f = X^\delta \varepsilon$ com ε unidade em $\mathbb{C}[[X_1, \ldots, X_d]]$ é dado por $\delta = \sum_{k=1}^{g}(e_{k-1} - e_k)\lambda_k$. Esse fato segue usando (3.2) para as raízes de f e a relação dada em (2.4).*

Com esses resultados, podemos mostrar que os polinômios minimais de truncamentos adequados de ξ raiz de f formam um sistema completo de semirraízes para f. De fato, vamos considerar $\zeta_k = p_0 + p_1 + \cdots + p_k$ os truncamentos de $\xi = p_0 + p_1 + \cdots + p_g$ para $k = 0, \ldots, g-1$. Para $k = 0$, basta tomar $f_0 = Y - p_0$, pois $deg_Y(f_0) = n_0 = 1$ e $f_0(\xi) = X^{\gamma_1}u(X^{\frac{1}{n}})$ com $u(X^{\frac{1}{n}})$ unidade em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Consideremos agora $0 < k \leq g-1$. Desse modo, chamando f_k o polinômio minimal de ζ_k sobre L, temos pela Observação 2.24 que f_k é irredutível quase ordinário e $deg_Y(f_k) = n_0 n_1 \cdots n_k$. Vamos mostrar que f tem ordem de coincidência λ_{k+1} com f_k. Consideremos o conjunto

$$A = \{\alpha; \xi_i - \zeta_k^{(j)} = X^\alpha u(X^{\frac{1}{n}}), u \text{ unidade em } \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]\}$$

onde ξ_i são as raízes de f para $i = 1, \ldots, n$ e $\zeta_k^{(j)}$ são as raízes de f_k para $j = 1, \ldots, n_0 n_1 \cdots n_k$. Sendo assim, o maior elemento, com respeito a ordem $<$, do conjunto A é λ_{k+1} e, pela Proposião 3.9, segue que $f_k(\xi) = X^{\gamma_{k+1}}\epsilon_k$ com ϵ_k unidade em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Portanto, os polinômios minimais dos truncamentos ζ_k com $k = 0, \ldots, g-1$ formam um sistema completo de semirraízes para f.

Antes de enunciarmos o próximo resultado, faremos uma observação.

Observação 3.11. *Sejam K um corpo e $f, h \in K[Y]$ com $deg(f) \geq deg(h)$. Efetuando a divisão de f por h e dos sucessivos quocientes até obtermos um quociente de grau menor* *que o grau de h, obtemos*

$$\begin{aligned} f &= q_1h + r_0, \quad deg(r_0) < deg(h) \\ q_1 &= q_2h + r_1, \quad deg(r_1) < deg(h) \\ &\vdots \\ q_{p-1} &= r_ph + r_{p-1}, \quad deg(r_{p-1}), deg(r_p) < deg(h). \end{aligned}$$

Desse modo, podemos escrever f na forma,

$$f = r_ph^p + r_{p-1}h^{p-1} + r_{p-2}h^{p-2} + \cdots + r_1h + r_0 = \sum_{i=0}^{p} r_ih^i.$$

Notemos que cada r_i tem grau menor que o grau de h.

Os termos dessa soma possuem graus dois a dois distintos. De fato, sejam $\alpha, \beta \in \{0, \ldots, p\}$ com $\alpha \neq \beta$ e $r_\alpha \neq 0 \neq r_\beta$. Sem perda de generalidade suponhamos que $\alpha > \beta$ e $deg(r_\alpha h^\alpha) = deg(r_\beta h^\beta)$. Desse modo, obtemos $deg(r_\alpha) + \alpha deg(h) = deg(r_\beta) + \beta deg(h)$, ou ainda, $deg(r_\alpha) + (\alpha - \beta)deg(h) = deg(r_\beta)$, o que é um absurdo, pois essa última igualdade implica em $deg(r_\beta) \geq deg(h)$, visto que $\alpha - \beta > 0$. Portanto, os graus dos termos da expansão de f em relação a h são todos distintos.

Lema 3.12. *Sejam $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ uma hipersuperfície quase ordinária com $n = deg_Y(f)$ e $f_0, \ldots, f_g \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ com $deg(f_i) = n_0n_1 \cdots n_i$ para todo $i \in \{0, \ldots, g\}$. Qualquer $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ pode ser escrito de modo único como uma soma finita $h = \sum c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ com $c_{i_0 \ldots i_g} \in \mathbb{C}[[X]]$, onde as $(g+1)$-uplas $(i_0, \ldots, i_g) \in \mathbb{N}^{g+1}$ verificam $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$, para todo $k \in \{0, \ldots, g-1\}$ e $i_g \leq \left[\frac{deg_Y(h)}{n}\right]$.*

Demonstração. Façamos a divisão euclidiana de h por f_g e os sucessivos quocientes por f_g até obtermos um quociente de grau em Y menor que $deg_Y(f_g)$.

Assim, podemos escrever,

$$h = r_pf_g^p + r_{(p-1)}f_g^{p-1} + r_{(p-2)}f_g^{p-2} + \cdots + r_1f_g + r_0 = \sum_{i=0}^{p} r_{i_g}f_g^{i_g}$$

onde $deg(r_{i_g}) < deg(f_g) = n$. Pela Observação 3.11 segue que $deg_Y(h) \geq i_gn$, ou seja, $i_g \leq \left[\frac{deg_Y(h)}{n}\right]$.

Repetindo o processo para cada r_{i_g}, ou seja, dividindo r_{i_g} por f_{g-1} e seus sucessivos quocientes até que tenhamos um quociente de grau menor que $deg_Y(r_{i_g})$, podemos escrever,

$$r_{i_g} = r_l^{(i_g)} f_{g-1}^l + r_{l-1}^{(i_g)} f_{g-1}^{l-1} + r_{l-2}^{(i_g)} f_{g-1}^{l-2} + \cdots + r_1^{(i_g)} f_{g-1} + r_0^{(i_g)}.$$

Já vimos que $deg_Y(r_{i_g}) < n$, então devemos ter $h = \sum c_{i_{g-1}i_g} f_{g-1}^{i_{g-1}} f_g^{i_g}$ com $0 \leq i_{g-1} \leq n_g - 1$ e $deg_Y(c_{i_{g-1}i_g}) < deg(f_{g-1}) = n_0 n_1 \cdots n_{g-1}$.

Prosseguindo deste modo, dividindo em cada passo $c_{i_k \ldots i_g}$ por f_{k-1} obtemos $h = \sum c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ com $c_{i_0 \ldots i_g} \in \mathbb{C}[[X]]$ e $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$ para $k \in \{0, \ldots, g-1\}$.

A unicidade da representação vem da observação de que os graus em Y dos termos $c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ são dois a dois distintos. De fato, suponha que existam $(i_0, \ldots, i_g) \neq (j_0, \ldots, j_g)$ e $deg_Y(c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}) = deg_Y(c_{j_0 \ldots j_g} f_0^{j_0} \cdots f_g^{j_g})$. Então existe $s \in \{0, \ldots, g\}$ tal que $i_k = j_k$ para todo $k > s$ e $i_s \neq j_s$. Vamos supor, sem perda de generalidade que $i_s > j_s$. Assim,

$$i_0 n_0 + i_1 n_0 n_1 + \cdots + i_g n_0 \cdots n_g = j_0 n_0 + j_1 n_0 n_1 + \cdots + j_g n_0 \cdots n_g$$

o que implica em

$$(i_s - j_s) n_0 \cdots n_s = \sum_{k=0}^{s-1} (j_k - i_k) n_0 \cdots n_k.$$

Como $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$ e $0 \leq j_k \leq n_{k+1} - 1$, segue que $j_k - i_k \leq n_{k+1} - 1$ e assim,

$$\begin{aligned}
(i_s - j_s) n_0 \cdots n_s &\leq \sum_{k=0}^{s-1} (n_{k+1} - 1) n_0 \cdots n_k \\
&= (n_0 n_1 - n_0) + (n_0 n_1 n_2 - n_0 n_1) + \cdots + (n_0 ... n_s - n_0 \cdots n_{s-1}) \\
&= n_0 n_1 \cdots n_s - 1.
\end{aligned}$$

Temos então $(i_s - j_s) n_0 \cdots n_s < n_0 \cdots n_s$ o que implica em $0 < i_s - j_s < 1$, o que é um absurdo.

Para concluir a prova da unicidade suponha que existam duas expansões de h como desejado, a saber,

$$\sum c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g} = h = \sum d_{j_0 \ldots j_g} f_0^{j_0} \cdots f_g^{j_g},$$

ou seja,

$$\sum c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g} - \sum d_{j_0 \ldots j_g} f_0^{j_0} \cdots f_g^{j_g} = 0.$$

Renomeando os termos podemos reescrever a igualdade acima como $\sum e_{k_0 \ldots k_g} f_0^{k_0} \cdots f_g^{k_g} = 0$. Para as $(g+1)$-uplas que satisfazem $(i_0, \ldots, i_g) = (j_0, \ldots, j_g)$

vamos ter $c_{i_0\dots i_g} = d_{j_0\dots j_g}$. Se tivermos $(g+1)$-uplas $(i_0,\dots,i_g) \neq (j_0,\dots,j_g)$, do fato de cada termo ter grau distinto um do outro, vem que, para tais $(g+1)$-uplas temos $c_{i_0\dots i_g} = d_{j_0\dots j_g} = 0$. Logo, a expansão é única. Concluímos assim a demonstração. □

Definição 3.13. *Seja $(f_0,\dots,f_g)$ um sistema completo de semirraízes para f. A expansão anterior $h = \sum c_{i_0\dots i_g} f_0^{i_0}\cdots f_g^{i_g}$ é chamada* expansão $(f_0,\dots,f_g)$-ádica *de h. O conjunto finito $\{(i_0,\dots,i_g); c_{i_0\dots i_g} \neq 0\}$ é chamado o* suporte $(f_0,\dots,f_g)$-ádico *de h e denotado por $Supp_{(f_0,\dots,f_g)}(h)$.*

Lema 3.14. *Seja $(f_0,\dots,f_g)$ um sistema completo de semirraízes para f. Se $h = \sum c_{i_0\dots i_g} f_0^{i_0}\cdots f_g^{i_g}$ é a expansão $(f_0,\dots,f_g)$-ádica de $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]$, então para todo $\xi \in Z(f)$, os conjuntos dos vértices do poliedro de Newton $\mathcal{N}_X(c_{i_0\dots i_g}(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_g(\xi))^{i_g})$ são dois a dois disjuntos quando $(i_0,\dots,i_g)$ varia no suporte $(f_0,\dots,f_g)$-ádico de h.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $f_g(\xi) = 0$ e, consequentemente, podemos considerar $i_g = 0$.

Sabemos que $v_X(f_k(\xi)) = \gamma_{k+1}$, que é equivalente a afirmar que $f_k(\xi) = X^{\gamma_{k+1}} u_k(X^{\frac{1}{n}})$ onde $u_k(0,\dots,0) \neq 0$. Assim, temos que $(f_k(\xi))^{i_k} = X^{i_k\gamma_{k+1}}(u_k(X^{\frac{1}{n}}))^{i_k}$ com $(u_k(0,\dots,0))^{i_k} \neq 0$. Desse modo,

$$(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}} = X^{i_0\gamma_1+\cdots+i_{g-1}\gamma_g} u(X^{\frac{1}{n}})$$

com $u(X^{\frac{1}{n}}) \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ unidade.

Notemos que $c_{i_0\dots i_g} = \sum_\gamma d_\gamma X^\gamma \in \mathbb{C}[[X]]$. Então,

$$\begin{aligned} c_{i_0\dots i_g}(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}} &= \left(\sum_\gamma d_\gamma X^\gamma\right) X^{i_0\gamma_1+\cdots+i_{g-1}\gamma_g} u(X^{\frac{1}{n}}) \\ &= \sum_\gamma d_\gamma X^{\gamma+i_0\gamma_1+\cdots+i_{g-1}\gamma_g} u(X^{\frac{1}{n}}). \end{aligned}$$

Isso mostra que os vértices de $\mathcal{N}_X(c_{i_0\dots i_g}(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$ são da forma $\gamma + i_0\gamma_1+\cdots+i_{g-1}\gamma_g$ onde $\gamma \in \mathbb{N}^d$ e $0 \leq i_j \leq n_{j+1}-1$ com $j = 0,\dots,g-1$. Assim, para cada $c_{i_0\dots i_g}(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}}$ com $(i_0,\dots,i_{g-1},0)$ variando no suporte $(f_0,\dots,f_g)$-ádico de h, vamos ter os conjuntos dos vértices de $\mathcal{N}_X(c_{i_0\dots i_g}(f_0(\xi))^{i_0}\cdots(f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$ dois a dois distintos por consequência do Lema 2.25. Portanto, temos o resultado desejado. □

Finalizamos essa seção com um resultado que auxiliará na descrição do semigrupo associado a uma hipersuperfície quase ordinária.

Lema 3.15. *Sejam $h_1, ..., h_p \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ tais que o conjunto dos vértices dos poliedros de Newton $\mathcal{N}_X(h_1), \ldots, \mathcal{N}_X(h_p)$ são dois a dois disjuntos, então $\mathcal{N}_X(h_1 + \cdots + h_p)$ é o fecho convexo da união $\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)$. Em particular, cada vértice de $\mathcal{N}_X(h_1 + \cdots + h_p)$ é um vértice de um dos poliedros $\mathcal{N}_X(h_1), \ldots, \mathcal{N}_X\ (h_p)$.*

Demonstração. Se $h := h_1 + \cdots + h_p$, então é imediato que $\mathcal{N}_X(h) \subset \overline{\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)}$, visto que cada monômio de h é também um monômio de algum dos h_i com $i = 1, \ldots, p$.

Por outro lado, cada vértice de $\overline{\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)}$ é um vértice de algum $\mathcal{N}_X(h_i)$ com $i = 1, \ldots, p$. A hipótese de que os conjuntos dos vértices dos poliedros de Newton $\mathcal{N}_X(h_1), \ldots, \mathcal{N}_X(h_p)$ são dois a dois disjuntos, implica que cada vértice de $\overline{\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)}$ é necessariamente um vértice de $\mathcal{N}_X(h)$, o que prova $\overline{\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)} \subset \mathcal{N}_X(h)$. Portanto $\mathcal{N}_X(h) = \overline{\mathcal{N}_X(h_1) \cup \cdots \cup \mathcal{N}_X(h_p)}$. Dessa igualdade, segue que cada vértice de $\mathcal{N}_X(h_1 + \cdots + h_p)$ é um vértice de um dos poliedros $\mathcal{N}_X(h_1), \ldots, \mathcal{N}_X(h_p)$. □

3.3 Semigrupos

Nesta seção vamos introduzir o semigrupo associado a uma hipersuperfície quase ordinária definida por $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$. Para isso, consideremos $\xi \in Z(f)$, ou seja, ξ um ramo quase ordinário e usaremos os vértices do poliedro de Newton $\mathcal{N}_X(h(\xi))$ com h variando em $\mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)$.

Definamos o seguinte conjunto,

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \{\gamma \in \mathbb{Q}_+^d; \gamma \text{ é um vértice de } \mathcal{N}_X(h(\xi)), h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)\}.$$

A proposição a seguir garante que $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ é um semigrupo aditivo de $\mathbb{Q}_+^d$.

Proposição 3.16. *Seja $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ um polinômio quase ordinário com $deg_Y(f) = n$ e $\xi \in Z(f)$. Temos a seguinte igualdade de conjuntos:*

$$\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g,$$

onde γ_i, para $i = 1, \ldots, g$, são como em (2.6).

Demonstração. Mostraremos primeiramente que $\Gamma_{\mathcal{N}}(f) \subset \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g$. Seja $\delta \in \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$, ou seja δ é um vértice de $\mathcal{N}_X(h(\xi))$ para algum $h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)$. Considerando $\{f_0, \ldots, f_g\}$ um sistema completo de semirraízes para f podemos escrever a expansão $(f_0, \ldots, f_g)$-ádica de h como $h = \sum c_{i_0 \ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ e, sendo assim, $h(\xi) = \sum c_{i_0 \ldots i_g} (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_g(\xi))^{i_g} = \sum c_{i_0 \ldots i_g} (f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}}$ pois $f_g(\xi) = 0$. Pelo Lema 3.14 segue que os conjuntos dos vértices de $\mathcal{N}_X(c_{i_0 \ldots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$ são dois a dois disjuntos quando $(i_0, \ldots, i_g)$ varia no suporte $(f_0, \ldots, f_g)$-ádico de h. Agora, pelo Lema 3.15, temos que δ é um dos vértices de algum $\mathcal{N}_X(c_{i_0 \ldots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$, ou seja, $\delta = \gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{g-1}\gamma_g$ com $\gamma \in \mathbb{N}^d$ e $0 \leq i_k \leq n_{k+1} - 1$ com $k = 0, \ldots, g-1$. Logo, temos a inclusão desejada.

Por outro lado, seja $\delta = \gamma + \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_g\gamma_g$ pertencente a $\mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g$. Tomando $h(X, Y) = X^\gamma (f_0(Y))^{\alpha_1} \cdots (f_{g-1}(Y))^{\alpha_g}$ em $\mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)$ temos,

$$\begin{aligned} h(\xi) = h(X, \xi) &= X^\gamma (f_0(\xi))^{\alpha_1} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{\alpha_g} \\ &= X^{\gamma + \alpha_1\gamma_1 + \cdots + \alpha_g\gamma_g} u(X^{\frac{1}{n}}) \end{aligned}$$

com $u(X^{\frac{1}{n}})$ unidade. Assim, $\mathcal{N}_X(h(\xi)) = \delta + \mathbb{R}_+^d$, isto é, o vértice do poliedro de Newton de $h(\xi)$ é δ, ou seja, $\delta \in \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$. Portanto, temos a igualdade $\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g$. $\square$

Vamos considerar somente as séries que possuem expoente dominante e definamos o seguinte conjunto:

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \{v_X(h(\xi)); h \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f), h \text{ possui expoente dominante}\}.$$

Contrariamente a $\Gamma_{\mathcal{N}}(f)$ é fácil constatar que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ é um semigrupo de $\mathbb{Q}_+^d$. Obviamente $0 \in \Gamma_{\mathcal{D}}$ uma vez que $v_X(1) = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{Q}_+^d$. Além disto, sejam $h_1, h_2 \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)$ tais que $h_1(\xi)$ e $h_2(\xi)$ tenham expoentes dominantes $v_X(h_1(\xi)) = m_1$ e $v_X(h_2(\xi)) = m_2$, então temos que $h = h_1 h_2 \in \mathbb{C}[[X]][Y] \backslash (f)$, pois $\frac{\mathbb{C}[[X]][Y]}{(f)}$ é um domínio já que f é irredutível e

$$h(\xi) = h_1(\xi) h_2(\xi) = \left(X^{m_1} u_1(X^{\frac{1}{2}})\right) \left(X^{m_2} u_2(X^{\frac{1}{n}})\right) = X^{m_1 + m_2} u(X^{\frac{1}{n}})$$

onde $m_1, m_2 \in \mathbb{Q}_+^d$ e u_1, u_2, u unidades em $\mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$. Disso, segue que $h(\xi)$ possui expoente dominante $v_X(h(\xi)) = v_X(h_1(\xi) h_2(\xi)) = m_1 + m_2 = v_X(h_1(\xi)) + v_X(h_2(\xi))$ e que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ é fechado para a adição. A associatividade de $\Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ segue do fato de que $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) \subset \mathbb{Q}_+^d$.

Proposição 3.17. *Com as mesmas notações da Proposição 3.16 temos a seguinte igualdade de semigrupos:*

$$\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g.$$

Demonstração. Seja $\delta \in \Gamma_{\mathcal{D}}(f)$. Assim, $\delta = v_X(h(\xi))$ para algum $h \in \mathbb{C}[[X]][Y]\backslash(f)$ tal que $h(\xi)$ tem expoente dominante. Desse modo δ é vértice de $\mathcal{N}_X(h(\xi))$. Considerando um sistema completo de semirraízes $(f_0, \ldots, f_g)$ para f e tomando a expansão $(f_0, \ldots, f_g)$-ádica de h podemos escrever $h = \sum c_{i_0,\ldots i_g} f_0^{i_0} \cdots f_g^{i_g}$ e assim $h(\xi) = \sum c_{i_0,\ldots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}}$. Como, pelo Lema 3.14, o conjunto dos vértices de $\mathcal{N}_X(c_{i_0,\ldots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$ são dois a dois disjuntos com $(i_0, \ldots, i_g)$ variando no suporte $(f_0, \ldots, f_g)$-ádico de h, segue que δ é vértice de algum dos poliedros de Newton $\mathcal{N}_X(c_{i_0,\ldots i_g}(f_0(\xi))^{i_0} \cdots (f_{g-1}(\xi))^{i_{g-1}})$ e portanto, $\delta = \gamma + i_0\gamma_1 + \cdots + i_{g-1}\gamma_g$ com $\gamma \in \mathbb{N}^d$. Logo, temos $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) \subset \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g$.

A prova de que $\mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g \subset \Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ é a mesma feita na Proposição 3.16 para provar que $\mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g \subset \Gamma_{\mathcal{N}}(f)$. Portanto, temos a igualdade $\Gamma_{\mathcal{D}}(f) = \mathbb{N}^d + \mathbb{N}\gamma_1 + \cdots + \mathbb{N}\gamma_g$. □

Definição 3.18. *O semigrupo $\Gamma_{\mathcal{N}}(f) = \Gamma_{\mathcal{D}}(f)$ é chamado simplesmente de* semigrupo de f *e será denotado por $\Gamma(f)$.*

Observação 3.19. *No caso de uma curva plana definida por $f \in \mathbb{C}[[X_1]][Y]$ temos que $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}$ enquanto que para uma hipersuperfície quase ordinária $f \in \mathbb{C}[[X]][Y]$ temos $\Gamma(f) \subset \mathbb{Q}_+^d$. Porém, observando que os expoentes característicos de um ramo quase ordinário possuem um denominador comum $k \leq n$ e consequentemente o mesmo vale para $\gamma_1, \ldots, \gamma_g$, temos que $\Gamma(f) \subset (\frac{1}{k})\mathbb{N}^d \subset (\frac{1}{n})\mathbb{N}^d$.*

Em virtude da observação anterior, podemos definir o semigrupo $\Gamma(f)$ de outra maneira. Como os elementos de $\Gamma(f)$ tem o mesmo denominador, podemos considerar $\Gamma(f)$, que a princípio está contido em $(\frac{1}{n})\mathbb{N}^d$, como sendo um semigrupo de $\mathbb{N}^d$ definindo

$$\Gamma(f) = n\mathbb{N}^d + \mathbb{N}\bar{\gamma}_1 + \cdots + \mathbb{N}\bar{\gamma}_g \subset \mathbb{N}^d \tag{3.4}$$

onde $\bar{\gamma}_i = n\gamma_i$.

De (2.6) e (3.4), podemos ainda escrever os geradores do semigrupo $\Gamma(f)$ como:

$$\begin{aligned}
\nu_i &= (0,\ldots,0,n,0,\ldots,0) \text{ para } i=1,\ldots,d \ (n \text{ na } i\text{-ésima coordenada}) \\
\nu_{d+1} &= \bar{\gamma}_1 \qquad (3.5) \\
\nu_{d+j+1} &= n_j\nu_{d+j} + n\lambda_{j+1} - n\lambda_j \text{ para } j=1,\ldots,g-1.
\end{aligned}$$

Assim, o semigrupo $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}^d$ é gerado por $\{\nu_1,\ldots,\nu_{d+g}\}$, ou seja, $\Gamma(f) = \langle \nu_1,\ldots,\nu_{d+g}\rangle$.

Para $j=0,\ldots,g-1$ podemos escrever,

$$\begin{aligned}
\nu_{d+j+1} &= n((n_1-1)n_2\cdots n_j\lambda_1 + (n_2-1)n_3\cdots n_j\lambda_2 + \cdots + (n_j-1)\lambda_j + \lambda_{j+1}) \qquad (3.6) \\
&= n_0n_1\cdots n_j((e_0-e_1)\lambda_1 + (e_1-e_2)\lambda_2 + \cdots + (e_{j-1}-e_j)\lambda_j + e_j\lambda_{j+1}).
\end{aligned}$$

Denotaremos por $\Gamma_j(f)$ o subsemigrupo $\langle \nu_1,\ldots,\nu_{d+j}\rangle$ de $\Gamma(f)$ para $j=0,\ldots,g$.

Várias propriedades do semigrupo de curvas planas (veja [He]) também são válidas para o semigrupo de hipersuperfícies quase ordinárias em $\mathbb{C}^{d+1}$ como constatamos no resultado abaixo.

Proposição 3.20. *Com as notações anteriores temos:*

1. *O subgrupo de $\mathbb{Z}^d$ gerado por $\nu_1,\ldots,\nu_{d+j}$ é igual a nQ_j para $0 \le j \le g$.*
2. *A ordem da classe de ν_{d+j} no grupo $\frac{nQ_j}{nQ_{j-1}}$ é igual a n_j para $j=1,\ldots,g$.*
3. *Temos que $\nu_{d+j} > n_{j-1}\nu_{d+j-1}$ para $j=2,\ldots,g$.*
4. *Se o vetor $u_j \in nQ_j$ possui coordenadas não negativas, então $u_j + n_j\nu_{d+j} \in \Gamma_j(f)$ para $j=1,\ldots,g$.*
5. *O vetor $n_j\nu_{d+j}$ pertence ao semigrupo Γ_{j-1} para $j=2,\ldots,g$.*

Demonstração. 1. De (3.6) fica claro que $\langle \nu_1,\ldots,\nu_{d+j}\rangle \subset nQ_j$ para todo $j=0,\ldots,g$. Para mostrar a inclusão contrária, usaremos indução sobre j. Para $j=0$ é claro que $n\mathbb{Z}^d = nQ_0 \subset \langle \nu_1,\ldots,\nu_d\rangle$. Suponha a inclusão válida para todo $k<j$. Para qualquer $v \in nQ_j$, temos $v = v' + an\lambda_j$ com $a \in \mathbb{Z}$ e $v' \in nQ_{j-1} \subset \langle \nu_1,\ldots,\nu_{d+j-1}\rangle$. Desse modo, de (3.5) temos

$$\begin{aligned}
v &= v' + a(\nu_{d+j} - n_{j-1}\nu_{d+j-1} + n\lambda_{j-1}) \\
&= (v' - an_{j-1}\nu_{d+j-1} + an\lambda_{j-1}) + a\nu_{d+j}.
\end{aligned}$$

Como $n\lambda_{j-1} \in nQ_{j-1} = \langle \nu_1, \ldots \nu_{d+j-1} \rangle$, temos $v' - an_{j-1}\nu_{d+j-1} + an\lambda_{j-1} \in \langle \nu_1, \ldots, \nu_{d+j-1} \rangle$ e segue que $v \in \langle \nu_1, \ldots, \nu_{d+j} \rangle$.

2. De (2.10) e (3.6) temos que

$$\begin{aligned} n_j = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_j \in Q_{j-1}\} &= min\{k \in \mathbb{N}^*; k\gamma_j \in Q_{j-1}\} \\ &= min\{k \in \mathbb{N}^*; k\nu_{d+j} \in nQ_{j-1}\}. \end{aligned}$$

Disso segue o item 2.

3. De (3.5) e da igualdade (3.6) temos que

$$\begin{aligned} n_j\nu_{d+j} - n_{j-1}\nu_{d+j-1} &= n_{j-1}(n_j - 1)\nu_{d+j-1} + n_j(n\lambda_j - n\lambda_{j-1}) \\ &> (n_j - 1)(n_{j-1}\nu_{d+j-1} + n\lambda_j - n\lambda_{j-1}) \qquad (3.7) \\ &= (n_j - 1)\nu_{d+j}, \end{aligned}$$

ou seja, $\nu_{d+j} > n_{j-1}\nu_{d+j-1}$ para $j = 2, \ldots, g$.

4. Mostraremos a afirmação 4 por indução sobre j. Para $j = 1$ temos que se $u_1 \in nQ_1$ possui coordenadas não negativas, então $u_1 = na + bn\lambda_1$ com $a \in \mathbb{N}^d$ e $b \in \mathbb{N}$. Assim, como $\nu_{d+1} = \bar{\gamma}_1 = n\gamma_1 = n\lambda_1$ temos que $u_1 + n_1\nu_{d+1} = na + (b + n_1)\nu_{d+1} \in \Gamma_1(f)$.

Suponhamos o resultado verdadeiro para todo $1 \leq k < j$. Pelo Lema 2.25 e de (3.5) podemos escrever $u_j = u'_j + a_j\nu_{d+j}$ com $u'_j \in nQ_{j-1}$ com coordenadas não negativas e $0 \leq a_j < n_j$ de modo único. Pelo item 2 e por (3.7), temos que o vetor $u_{j-1} := u'_j + n_j\nu_{d+j} - n_{j-1}\nu_{d+j-1} \in nQ_{j-1}$ e não possui coordenadas negativas. Pela hipótese de indução, o vetor $u_{j-1} + n_{j-1}\nu_{d+j-1} = u'_j + n_j\nu_{d+j}$ pertence ao subgrupo $\Gamma_{j-1}(f)$, portanto o vetor $u_j + n_j\nu_{d+j} = u'_j + a_j\nu_{d+j} + n_j\nu_{d+j}$ petence ao semigrupo $\Gamma_j(f)$.

5. Provaremos por indução sobre j. Para $j = 2$ temos por (3.5) que $n_2\nu_{d+2} = n_2n_1\nu_{d+1} + n_2n\lambda_2 - n_2n\lambda_1$. Como $\nu_{d+1} = n\lambda_1$ e $n_2\lambda_2 \in Q_1$ temos que $n_2\nu_{d+2} = n(n_2\lambda_2 + n_2(n_1 - 1)\lambda_1) \in nQ_1 = \Gamma_1(f)$. Vamos supor o resultado válido para todo $2 \leq k < j$. Temos, por (3.5), que $n_j\nu_{d+j} = n_jn_{j-1}\nu_{d+j-1} + n_jn(\lambda_j - \lambda_{j-1})$. Como $n_j = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\lambda_j \in Q_{j-1}\}$, $n_jn(\lambda_j - \lambda_{j-1})$ pertence ao semigrupo nQ_{j-1} e, sendo $\lambda_{j-1} < \lambda_j$, não possui coordenadas negativas. Assim, temos que $n_j\nu_{d+j} - n_jn_{j-1}\nu_{d+j-1} = n_jn(\lambda_j - \lambda_{j-1}) \in nQ_{j-1}$ e não possui coordenadas negativas. Usando o item 4, temos que $n_j\nu_{d+j} - n_jn_{j-1}\nu_{d+j-1} + n_{j-1}\nu_{d+j-1} \in \Gamma_{j-1}(f)$, ou seja, $n_j\nu_{d+j} + (1 - n_j)n_{j-1}\nu_{d+j-1} \in \Gamma_{j-1}(f)$. Como, por hipótese de indução, $n_{j-1}\nu_{d+j-1} \in \Gamma_{j-2}(f)$, segue que

$$n_j\nu_{d+j} = a + n_{j-1}\nu_{d+j-1}(n_j - 1) \in \Gamma_{j-1}(f)$$

onde $a \in \Gamma_{j-1}(f)$.

Assim, concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 3.21. *Se $\xi \in Z(f) \subset \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{n}}]]$ é um ramo quase ordinário normalizado, então o conjunto $\{\nu_1, \ldots, \nu_{d+g}\}$ dado em (3.5) é o único conjunto mínimo de geradores do semigrupo $\Gamma(f)$.*

Demonstração. Inicialmente vamos mostrar que $\{\nu_1, \ldots, \nu_{d+g}\}$ é um conjunto mínimo de geradores de $\Gamma(f)$. Como ξ é normalizado segue que $\nu_1, \ldots, \nu_d$ devem pertencer ao conjunto de geradores e não podem ser retirados de modo a preservar $\Gamma(f)$.

Além disso, temos que $\nu_{d+j} \notin n\mathbb{N}^d$ para todo $j = 1, \ldots, g$. Se $\nu_{d+k} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{g} a_i \nu_{d+i}$ com $a_i \in \mathbb{N}$ então, pelo item 3 da proposição anterior devemos ter $a_i = 0$ para todo $i > k$. Desse modo, $\nu_{d+k} = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \nu_{d+i} \in nQ_{k-1}$ pelo item 1 da proposição anterior. Mas isto contradiz o item 2 da mesma proposição. Desse modo, segue que $\{\nu_1, \ldots, \nu_{d+g}\}$ é um conjunto mínimo de geradores para $\Gamma(f)$.

Agora sejam $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ e $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ conjuntos mínimos de geradores de um mesmo semigrupo $\Gamma \subset n\mathbb{N}^d$. Temos para $k \in \{1, \ldots, r\}$ e para todo $i \in \{1, \ldots, s\}$ que

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{s} b_i \beta_i \qquad \text{e} \qquad \beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \alpha_j.$$

$b_i, a_{ij} \in \mathbb{N}$

Das igualdades acima podemos escrever,

$$\begin{aligned} \alpha_k = \sum_{i=1}^{s} b_i \sum_{j=1}^{r} a_{ij} \alpha_j &= \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=1}^{r} b_i a_{ij} \alpha_j \\ &= \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} (b_i a_{ij}) \alpha_j. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Como $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ é um conjunto mínimo de geradores, a igualdade (3.8) implica em $b_i a_{ij} = 0$ para $i = 1, \ldots, s$ e $j = 1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, r$, $b_l = a_{lk} = 1$ para algum $l \in \{1, \ldots, s\}$ e $b_i a_{ik} = 0$ para $i = 1, \ldots, l-1, l+1, \ldots, s$.

Fixando i e variando j em $\{1, \ldots, r\}$ vamos ter $b_i = 0$ pois não podemos ter $a_{ij} = 0$ para todo $j = 1, \ldots, r$. Desse modo $b_i = 0$ para todo $i \neq l$ e $b_l = 1$. Assim, temos $\alpha_k = \beta_l$ e assim, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} \subset \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$.

Repetindo o argumento para os elementos de $\{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ concluímos que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\} = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$, provando assim a unicidade. $\square$

Observação 3.22. *Pela Observação 3.19 podemos ainda escrever o semigrupo* $\Gamma(f) \subset \mathbb{N}^d$ *de outra maneira, a saber*

$$\bar{\Gamma}(f) = k\mathbb{N} + \mathbb{N}w_1 + \cdots + \mathbb{N}w_g \tag{3.9}$$

onde $k = min\{q \in \mathbb{N}^*; \xi \in \mathbb{C}[[X^{\frac{1}{q}}]]$ *e* $f(\xi) = 0\}$ *e* $w_i = k\gamma_i$ *para* $i = 1, \ldots, g$.

Desse modo vamos ter os geradores

$$\begin{aligned} \bar{\nu}_i &= (0, \ldots, 0, k, 0, \ldots, 0) \text{ para } i = 1, \ldots, d \text{ (}k\text{ na }i\text{-ésima coordenada)} \\ \bar{\nu}_{d+1} &= w_1 \\ \bar{\nu}_{d+j+1} &= n_j\nu_{d+j} + k\lambda_{j+1} - k\lambda_j \text{ para } j = 1, \ldots, g-1. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Exemplo 3.23. *Consideremos* $f \in \mathbb{C}[[X_1, X_2]][Y]$ *dada como no Exemplo 2.27. Vamos calcular o semigrupo* $\Gamma(f)$. *Temos* $Q_0 = \mathbb{Z}^2$ *e* $Q_1 = \mathbb{Z}^2 + \mathbb{Z}(\frac{3}{2}, 0)$. *Para obtermos* γ_1, γ_2 *precisamos calcular* n_1. *Temos,*

$$n_1 = \sharp\left(\frac{Q_1}{Q_0}\right) = min\{k \in \mathbb{N}^*; k\left(\frac{3}{2}, 0\right) \in \mathbb{Z}^2\} = 2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda_1 = \left(\frac{3}{2}, 0\right) \\ \gamma_2 &= n_1\gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \\ &= 2\left(\frac{3}{2}, 0\right) + \left(2, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Logo, $\Gamma(f) = \mathbb{N}^2 + \mathbb{N}(\frac{3}{2}, 0) + \mathbb{N}(\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$.

Como vimos anteriormente, podemos considerar $\Gamma(f)$ *como sendo um semigrupo de* $\mathbb{N}^2$. *Temos* $n = 4 = deg(f)$, *porém as raízes de* f *estão em* $\mathbb{C}[[X_1^{\frac{1}{2}}, X_2^{\frac{1}{2}}]]$. *Sendo assim, para obter* $\Gamma(f)$ *como semigrupo de* $\mathbb{N}^2$ *podemos tomar* $k = 2$ *em (3.10). Assim,*

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_1 &= 2\lambda_1 = (3, 0) \\ \bar{\gamma}_2 &= n_1\bar{\gamma}_1 + n\lambda_2 - n\lambda_1 \\ &= 2(3, 0) + 2\left(2, \frac{1}{2}\right) - 2\left(\frac{3}{2}, 0\right) = (7, 1). \end{aligned}$$

Obtemos então,

$$\bar{\Gamma}(f) = 2\mathbb{N}^2 + \mathbb{N}(3,0) + \mathbb{N}(7,1)$$

com os geradores $\bar{\nu}_1 = (2,0), \bar{\nu}_2 = (0,2), \bar{\nu}_3 = (3,0)$ *e* $\bar{\nu}_4 = (7,1)$.

Notemos que todo par na forma $(9+a,b)$ *com* $a,b \in \mathbb{N}$ *pertence a* $\bar{\Gamma}(f)$. *Para verificarmos essa afirmação, analizemos quatro casos:*

1. a,b *pares. Assim,* $a = 2k$ *e* $b = 2l$ *com* $k,l \in \mathbb{N}$ *e*

$$\begin{aligned}(9+a,b) &= (9+2k,2l) = (6+2k+3,2l) = (2(k+3)+3,2l)\\ &= (k+3)(2,0) + l(0,2) + (3,0) \in \Gamma(f).\end{aligned}$$

2. a *par e* b *ímpar. Segue que* $a = 2k$ *e* $b = 2l+1$ *com* $k,l \in \mathbb{N}$ *e*

$$\begin{aligned}(9+a,b) &= (9+2k,2l+1) = (7+2+2k,2l+1) = (2(k+1)+7,2l+1)\\ &= (k+1)(2,0) + l(0,2) + (7,1) \in \Gamma(f).\end{aligned}$$

3. a *ímpar e* b *par. Temos,* $a = 2k+1$ *e* $b = 2l$ *com* $k,l \in \mathbb{N}$ *e*

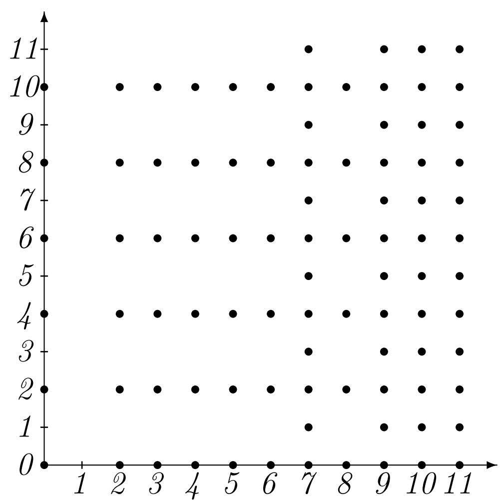
$$\begin{aligned}(9+a,b) &= (9+2k+1,2l) = (10+2k,2l) = (2(k+5),2l)\\ &= (k+5)(2,0) + l(0,2) \in \Gamma(f).\end{aligned}$$

4. a,b *ímpares. Escrevendo,* $a = 2k+1$ *e* $b = 2l+1$ *com* $k,l \in \mathbb{N}$ *temos que*

$$\begin{aligned}(9+a,b) &= (9+2k+1,2l+1) = (7+3+2k,2l+1)\\ &= k(2,0) + l(0,2) + (3,0) + (7,1) \in \Gamma(f).\end{aligned}$$

Portanto, de 1,2,3 e 4, segue que todo par na forma $(9+a,b) \in \bar{\Gamma}(f)$ *para quaisquer* $a,b \in \mathbb{N}$.

Podemos representar graficamente o semigrupo $\bar{\Gamma}(f) \subset \mathbb{N}^2$ *como segue:*



Exemplo 3.24. *Como vimos no Exemplo 2.13, a hipersuperfície dada por meio de*

$$f(X_1, X_2, X_3, Y) = Y^4 - 2(X_1^3X_2^2 + X_1^4X_2^3X_3^2)Y^2 + X_1^8X_2^6X_3^4 - 2X_1^7X_2^5X_3^2 + X_1^6X_2^4$$

é quase ordinária. Uma das raízes de f é $\xi = X_1^{\frac{3}{2}}X_2 + X_1^2X_2^{\frac{3}{2}}X_3$ e os expoentes característicos são $\lambda_1 = (\frac{3}{2}, 1, 0)$ e $\lambda_2 = (2, \frac{3}{2}, 1)$.

Como o polinômio mínimo de $X_1^{\frac{3}{2}}X_2$ é $f_0(X, Y) = Y^2 - X_1^3X_2^2$ temos que $n_1 = 2$ e por (2.6) temos que

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \lambda_1 = \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) \\ \gamma_2 &= n_1\gamma_1 + \lambda_2 - \lambda_1 \\ &= 2\left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) + \left(2, \frac{3}{2}, 1\right) - \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) = \left(\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1\right). \end{aligned}$$

Deste modo, obtemos o semigrupo $\Gamma(f) = \mathbb{N}^3 + (\frac{3}{2}, 1, 0)\mathbb{N} + (\frac{7}{2}, \frac{5}{2}, 1)\mathbb{N}$.

Podemos identificar $\Gamma(f)$ com o semigrupo de $\mathbb{N}^3$ dado por

$$\bar{\Gamma}(f) = (2, 0, 0)\mathbb{N} + (0, 2, 0)\mathbb{N} + (0, 0, 2)\mathbb{N} + (3, 2, 0)\mathbb{N} + (7, 5, 2)\mathbb{N}.$$

Observe que se $(a, b, c) \in \bar{\Gamma}(f)$, então c deve ser par. Deste modo, diferentemente do que ocorre no exemplo anterior, neste exemplo, não existe $\gamma \in \bar{\Gamma}(f)$ tal que $\gamma + \mathbb{N}^3 \subset \bar{\Gamma}(f)$.

Referências Bibliográficas

[A] Abhyankar, S. S., *On the ramification of algebraic functions.* Amer. J. Math., 77., (1995), 575-592.

[Ga] Gau, Y.-N., *Embededd Topological classification of a quasi-ordinary singularities.* Memoirs of the American Mathematical Society. Vol 74, number 388 (1998).

[Go1] González Pérez, P. D., *Quasi-ordinary Singularities via toric geometry.* Tese de doutorado. Universidade de La Laguna (2000).

[Go2] González Pérez, P. D., *The Semigroup of a Quasi-ordinary Hypersurface.* Journal of the Inst. of Math. Jussieu (2003) 2(3), 383-399.

[He] Hefez, A., *Irreducible Plane Curve Singularities, Real and Complex Singularities.* Lectures Notes in Pure and Appl. Math. 232 dekker, 1-120. New York, (2003).

[HKT] Hirschfeld, J. W. P., Korchmaros, G. and Torres, F., *Algebraic Curves over a finite field.* Princeton Series in Applied Mathematics (2008).

[L] Lipman, J., *Topological Invariants of a Quasi-ordinary Singularities.* Memoirs of the American Mathematical Society. Vol 74, number 388 (1998).

[P] Popescu-Pampu, P., *On the Analytical Invariance of the Semigroups of a Quasi-ordinary Hypersurface Singularity.* Duke Mathematic Journal, Vol 124, nº 1 (2004).

Índice Remissivo