UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

FABRÍCIO CRISTÓFANI

Estabilidade Orbital de Ondas Solitárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear

Maringá
2014

FABRÍCIO CRISTÓFANI

Estabilidade Orbital de Ondas Solitárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali

Maringá

2014

Estabilidade Orbital de Ondas Solitárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear

FABRÍCIO CRISTÓFANI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientador)

Prof. Dr. Ademir Pastor Ferreira
Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP-SP

Prof. Dr. Marcos Roberto Teixeira Primo
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Dedico este trabalho à minha família.

Aos meus amigos e professores.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois ele me deu força e coragem para seguir em frente e não desistir.

Agradeço aos meus pais, que sempre me apoiaram e incentivaram a trilhar esse caminho. À toda minha família: avós, tios, tias, primas e primos, muito obrigado por me ajudarem nessa conquista.

A todos meus amigos, que constituem a minha segunda família. Obrigado por me ajudarem em momentos difícieis de minha vida e por me proporcionarem ótimos encontros ao lado de vocês.

Agradeço a todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática que contribuíram para minha formação. Em especial, agradeço ao professor Fábio Matheus Amorin Natali pela paciência e confiança depositada em meu trabalho.

À capes, pelo apoio financeiro.

Enfim, agradeço a todas as pessoas que acreditaram em mim e que, de alguma maneira, fazem parte dessa conquista e da minha vida.

Se enxerguei mais longe, foi porque me apoiei nos ombros de gigantes.
—— Isaac Newton.

Resumo

Neste trabalho, provamos resultados de existência, unicidade, dependência contínua e persistência com relação ao dado inicial para a equação de Schrödinger não-linear definida em toda a reta, à saber,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + |u|^{\alpha} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\alpha \in [1,4)$. A seguir, provamos a estabilidade orbital de soluções especiais do tipo $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$, $\omega > 0$, onde $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e par satisfazendo $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. A prova deste fato terá duas frentes: a primeira usaremos o método clássico segundo Weinstein [22] e na segunda abordagem será utilizada a teoria abstrata de Grillakis, Shatah e Strauss em [15].

Palavras-chave: Equação de Schrödinger não-linear, resultados de boa colocação e estabilidade orbital.

Abstract

In this work, we prove results of existence, uniqueness, continuous dependence and persistence with respect to the initial data for the nonlinear Schrödinger equation posed on the real line, namely,

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + |u|^\alpha u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{0.2}$$

where $\alpha \in [1,4)$. Moreover, we establish the orbital stability of special solutions as $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$, $\omega > 0$, where $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a positive and even function satisfying $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ as $|x| \to \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$. This proof will be two fold: the first one will be considered the classical method by [22] and in the second approach we shall use the abstract theory due to Grillakis, Shatah and Strauss in [15].

Keywords: Nonlinear Schrödinger equation, well-posedness results and orbital stability.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

O estudo da estabilidade orbital de ondas viajantes/estacionárias para modelos de evolução não-lineares está se desenvolvendo de maneira satisfatória. Nos dias atuais, diversos pesquisadores dentro da matemática e áreas afins estão buscando avanços significativos neste contexto. No ponto de vista matemático, tais resultados são frequentemente estudados em relação às simetrias naturais que o modelo possui. Uma referência que podemos citar com intuito de apresentar os avanços nesta linha de pesquisa é o livro [2] e suas respectivas referências que tangem este assunto.

Consideremos uma equação de evolução que possui a seguinte forma abstrata

$$u_t = JE'(u) \tag{1.1}$$

onde $u : \mathcal{O} \times \mathbb{R} \to \mathbb{K}^n$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, é uma função com valores em $\mathbb{K}^n$, $n \geq 1$, sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, J é um operador definido em um espaço de Hilbert X e E é o funcional energia associado a equação com E' representando a derivada de Fréchet do mesmo. Para efeito de simplificação, vamos assumir que J é um operador anti-simétrico e que o equação (1.1) possua ao menos duas quantidades conservadas E e F. Neste contexto, assumiremos que as leis de conservação são funcionais de classe C^2 e definidos em espaços de Hilbert adequados (mencionaremos melhor estes fatos nos próximos capítulos). Assumiremos também que exista uma ação T (podem haver mais ações, conforme será visto no Capítulo 3) de um grupo de Lie G de modo que o nosso sistema evolutivo seja invariante em X sob T. Defina

$$\widetilde{u}(x,t) := T(g)\varphi(x), \tag{1.2}$$

onde $\varphi \in X$ e $g \in G$. Se K é um subgrupo de G, dizemos que a órbita gerada por φ, à saber, $\mathcal{O}_\varphi := \{T(g)\varphi,\ g \in K\}$ é $K-$estável em X, se dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que se $||u_0 - \varphi||_X < \delta$ e $u(t)$ é a solução do nosso sistema evolutivo com estado inicial $u(0) = u_0$, o qual existe globalmente, então

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{g\in K} ||u(t) - T(g)\varphi||_X < \varepsilon.$$

Caso contrário, a órbita é dita instável. Podemos ainda fornecer uma definição mais intuitiva dizendo que, dada uma solução de um sistema evolutivo (o qual descreve um sistema dinâmico), a estabilidade no sentido orbital é caracterizado pela proximidade de todas as soluções desse sistema que estão próximas a órbita gerada por uma família pré-determinada de soluções, desde que o estado inicial do sistema esteja também próximo da solução geradora da órbita.

A função $\widetilde{u}$ definida em (1.2) é um exemplo típico de onda estacionária desde que esta ação faça com que a função φ "permaneça" em uma posição constante ou ainda, se quisermos uma definição um pouco mais empírica, uma onda estacionária aparece em um determinado modelo quando esta onda possui um padrão de vibração estacionário. São exemplos de ondas estacionárias: a oscilação de uma corda com as extremidades fixas (por exemplo o movimento ondulatório de uma corda de violão ao se desprezar eventuais forças de atrito), ondas de raio laser e pulsos eletromagnéticos.

Dentro deste prisma, esta dissertação visa apresentar um estudo introdutório para a estabilidade orbital de ondas estacionárias para um modelo de evolução bem conhecido na literatura corrente: a equação de Schrödinger não-linear descrita pela seguinte equação

$$iu_t + u_{xx} + |u|^\alpha u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

onde $u = u(x,t) \in \mathbb{C}$ é uma função à valores complexos e $\alpha \in [1,4)$.

Se olharmos a equação descrita em (1.3) como um exemplo específico da equação (1.1) tem-se $n = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $X = H^1_e(\mathbb{R})$ (espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$ constituído por funções pares), $\mathcal{O} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $u = (Re(u), Im(u))$, onde $u = Re(u) + iIm(u)$,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.4}$$

e

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|u_x|^2 + \frac{4}{\alpha + 2} |u|^{\alpha+2} \right] dx. \tag{1.5}$$

Podemos ainda apresentar a outra quantidade conservada neste caso que é dada por

$$F(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx. \tag{1.6}$$

Ademais, a ação do grupo T será definida sobre a reta $\mathbb{R}$ e $T(\omega t) = e^{i\omega t}$, $t \in \mathbb{R}$, é uma rotação cujo termo $\omega > 0$ é chamado de frequência da onda φ.

Desta forma, consideremos a onda estacionária da forma $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x)$ para a equação (1.3). Se substituirmos este tipo de solução especial nesta equação e assumirmos que $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suficientemente regular e satisfazendo a condição de onda solitária, à saber, $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, $n \in \mathbb{N}$, temos a seguinte equação diferencial não-linear

$$-\phi_\omega + \omega\phi_\omega - \phi_\omega^{\alpha+1} = 0, \tag{1.7}$$

onde ϕ_ω representa a dependência da função suave ϕ em relação ao parâmetro ω. Com isto, se usarmos a condição $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ quando $|x| \to +\infty$, podemos deduzir uma solução explícita para a equação (1.3), usando o método da quadratura (ver Capítulo 2), dada por

$$\phi_\omega(x) = \left(\omega \frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\alpha\sqrt{\omega}x}{2}\right)\right)^{\frac{2}{\alpha}}, \qquad \omega > 0. \tag{1.8}$$

A equação de Schrödinger foi deduzida em 1926 pelo físico austríaco Erwin Schrödinger. Um modelo para esta equação é dado por

$$iu_t + \Delta u + V(x,t)u = 0, \qquad (x,t) \in \mathcal{O} \times \mathbb{R}, \tag{1.9}$$

onde $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$ e $V(x,t)$ é um potencial real. Fisicamente, esta equação é usada em mecânica ondulatória para a função de onda de uma partícula. Tal equação se assenta num modelo atômico inteiramente baseado em ondas estacionárias e constitui a base da física e química modernas. No caso unidimensional ($n = 1$ na equação (1.9)), a equação de Schrödinger permite calcular a função de onda associada $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ à uma partícula que se move dentro de um campo de forças descrito pelo potencial $V(x,t)$ (eventualmente esta função real pode depender da posição e/ou do tempo). Podemos ver que no caso específico da equação (1.3), este potencial é dado pela função não-linear $V(x,t) = |u(x,t)|^\alpha$.

Descreveremos agora os principais pontos abordados nesta dissertação. O Capítulo 1 tem como seu objetivo apresentar fatos básicos sobre diversos ramos dentro da análise. A maioria de seus subcapítulos possuem elementos básicos que foram vistos nos anos da graduação e nos dois anos do mestrado. Os dois primeiros tópicos abordados concentram-se em resultados de análise básica, teoria de integração e análise funcional. Como referências para estes subcapítulos, podemos citar [5], [7], [11], [18] e [20]. O subcaptítulo seguinte apresenta alguns pontos sobre teoria das distribuições e espaços de Sobolev e estes podem ser encontrados em [6].

Os Subcapítulos 1.4 e 1.5 mostram fatos sobre análise funcional avançada para um estudante de mestrado posto que é apresentado alguns resultados sobre teoria espectral para operadores lineares ilimitados. Como destaque temos o teorema da invariância do espectro essencial e o respectivo cálculo deste espectro para o operador linear de segunda ordem

$$\mathcal{L}_1 = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - V(\phi_\omega), \tag{1.10}$$

onde $V(\phi_\omega)$ é uma função real suave em relação à onda ϕ_ω. As referências usadas como base para este estudo são [2] e [17].

Alguns elementos da teoria se Sturm-Liouville são o objeto de estudo do próximo subcapítulo. O principal foco desta teoria tange ao estudo de problemas de autovalores do tipo

$$\mathcal{J}\psi = -\frac{d^2}{dx^2}\psi + W(x)\psi = \lambda\psi, \qquad x, \lambda \in \mathbb{R} \tag{1.11}$$

onde $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função suave e limitada. A ideia principal é relacionar o número de zeros das eventuais autofunções de $\mathcal{J}$ com a posição do respectivo autovalor associado assim como determinar, quando possível, a dimensão do autoespaço associado (ver [2]).

A teoria de semigrupos lineares foi estudada no Subcapítulo 1.7. Este assunto foi debatido no curso regular de Equações Diferenciais Parciais Lineares em 2013. Usamos duas referências básicas [14] e [10]. Como destaque, temos o Teorema de Stone que nos fornece condições necessárias e suficientes para garantir a existência de um gerador infinitesimal de um grupo unitário de operadores lineares limitados e definidos em um espaço de Hilbert.

No Capítulo 2, concentramos nossos esforços ao problema de boa colocação (local e global) para a equação (1.3). É conveniente mencionar que em nossa definição de estabilidade descrita acima, mencionamos a questão da solvabilidade da equação. Então, faremos o uso de algumas técnicas contidas na literatura atual que nos dão condições para determinar uma única função u alocada em um espaço de Hilbert adequado e que soluciona a equação integral associada à (1.3), dada por

$$u(t) = e^{i\Delta t}u_0 + i\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}(|u|^\alpha u)(t')dt', \tag{1.12}$$

onde u_0 determina o estado inicial da função u no tempo $t = 0$ (problema de Cauchy em relação à equação (1.3) com dado inicial u_0), $e^{i\Delta t}$ onde $\Delta = \partial_x^2$, é a representação do grupo unitário que surge ao resolver o problema linear de Cauchy

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} = 0, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1.13}$$

Com intuito de resolvermos a equação integral (1.12) associada à equação (1.3), no espaço de Sobolev $H^1(\mathbb{R})$, determinamos a existência, unicidade, dependência contínua com relação aos dados iniciais e persistência da solução com respeito ao dado inicial, vamos combinar o Teorema de Ponto Fixo de Banach e as estimativas de Strichartz em relação ao grupo $e^{it\Delta}$. Estes métodos nos fornecem a boa colocação para um determinado tempo de existência $T > 0$ que é estabelecido para exibir a contração requerida no teorema de ponto fixo. Soluções globais são determinadas usando-se o fato que $\alpha \in [1, 4)$ combinadas com estimativas de energia. Para tais finalidades, usamos de maneira intensa a teoria estabelecida em [19] que são baseadas em diversos artigos sobre problemas de boa colocação para diversos modelos evolutivos. Logo após este fato, determinamos a solução ϕ_ω em (1.8) que resolve explicitamente a equação não-linear (1.7) usando o método da quadratura.

O Capítulo 3 apresenta o primeiro método de estabilidade orbital de ondas solitárias para a equação de Schrödinger (1.3). Veremos que este método é bem construtivo no sentido que é preciso que apliquemos efetivamente o método para o problema em questão. Em outras palavras, se quisermos mudar o modelo evolutivo para a obtenção da estabilidade, devemos determinar todos os passos para este fim. Seguindo as ideias centrais do que foi estabelecido em [22], a primeira ideia é estabelecer, além de resultados de boa colocação acima mencionados, propriedades específicas para o espectro dos seguintes operadores lineares

$$\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha \tag{1.14}$$

e

$$\mathcal{L}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - \phi_\omega^\alpha. \tag{1.15}$$

A estabilidade provada neste capítulo necessita determinar que o operador em $\mathcal{L}$ em (1.14) possua um único autovalor negativo e simples e zero é um autovalor simples cuja autofunção associada é ϕ_ω'. Além disso, o restante do espectro é um subconjunto de $\mathbb{R}_+$ constituído por elementos que estão longe de zero. O operador $\mathcal{L}^+$ possui características similares. Todavia, deve se mostrar que zero é o primeiro autovalor o qual está associado à autofunção ϕ_ω. Neste caso, também tem-se que o restante do espectro é um subconjunto de $\mathbb{R}_+$ constituído por elementos que estão longe de zero. Por fim, notando-se que a função ϕ_ω é suave com relação ao parâmetro $\omega > 0$ (ver (1.8)), a estabilidade está por fim mostrada desde que tenhamos a seguinte condição de positividade

$$\frac{d}{d\omega}\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^2(x)dx > 0, \tag{1.16}$$

e veremos que isto ocorre desde que $\alpha \in [1,4)$. É importante mencionar que o sentido de estabilidade que apresentamos neste capítulo dar-se-á em relação à duas simetrias (além da rotação, já mencionada, podemos considerar a simetria de translação). Os detalhes serão apresentados no referido capítulo.

Finalmente, o último capítulo desta dissertação paira sobre a teoria abstrata de estabilidade segundo a abordagem imposta em [15]. Esta teoria consiste em analisar o comportamento da estabilidade para equações do tipo (1.1) tendo em mãos um conjunto de hipóteses bem abrangentes como a anti-simetria do operador J, a invariância da equação por simetrias específicas, a solvabilidade da equação e a suavidade de determinados funcionais (como os funcionais E e F em (1.5) e (1.6), respectivamente), bem como da onda ϕ_ω, em relação ao parâmetro ω. Além disso, faz-se necessário estabelecer propriedades espectrais similares para os operadores $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^+$ além da positividade estabelecida em (1.16), conforme mencionamos no parágrado anterior. A principal diferença entre as abordagens contidas nestes dois últimos capítulos tange ao sentido de estabilidade tratada. Com efeito, no primeiro destes capítulos a estabilidade pode ser determinada em todo espaço de Hilbert $H^1(\mathbb{R})$ e podemos colocar duas simetrias na equação (1.3) (rotação e translação) mesmo considerando a solução especial desta equação com apenas a simetria de rotação, isto é, $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$, $\omega > 0$, $x, t \in \mathbb{R}$. Além disso, a órbita gerada pela onda ϕ_ω, assim como o sentido de estabilidade, possuirão estas simetrias. Por outro lado, a teoria em [15] determina exatamente que se consideramos a solução especial apenas com o termo de rotação então a órbita gerada e o sentido de estabilidade deverão conter apenas esta simetria. Desta forma, faz-se necessário restringir o espaço de Hilbert X ao espaço das funções em $H^1(\mathbb{R})$ que são pares posto que não há uma invariância deste espaço pela simetria de translação.

Esperamos que esta dissertação possa servir de objeto de consulta para outros membros da comunidade matemática e de áreas afins.

Capítulo 2

Preliminares

Definição 2.1. *Sejam f e g funções definidas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{C}$ e seja $x_0 \in I$. Escrevemos*

$$f = O(g) \quad \textit{quando} \quad x \to x_0$$

se existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

para todo x suficientemente próximo de x_0.

Proposição 2.1. *Para a notação de O grande valem as seguintes propriedades:*

(i) *Se $f_1 = O(g)$ e $f_2 = O(g)$, então $f_1 + f_2 = O(g)$;*

(ii) *Se $f = O(g)$, então $\lambda f = O(g)$ para todo $\lambda \in \mathbb{C}$;*

(iii) *Se $f_1 = O(g_1)$ e $f_2 = O(g_2)$, então $f_1 f_2 = O(g_1 g_2)$;*

(iv) *Se $f = O(|x|^{m_1})$ e $m_1 \geq m_2$, então $f = O(|x|^{m_2})$.*

Demonstração: Ver [11]. □

Definição 2.2. *Sejam f e g funções definidas no intervalo $I \subset \mathbb{R}$ tomando valores em $\mathbb{C}$ e seja $x_0 \in I$. Escrevemos*

$$f = o(g) \quad \textit{quando} \quad x \to x_0$$

se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

Observação 2.1. *Se $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$, então $f(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_0$.*

Definição 2.3. *Seja $X = (X, d)$ um espaço métrico. Uma função $T : X \to X$ é dita ser contração sobre X se existe um número real positivo $k < 1$ tal que para todo $x, y \in X$*

$$d(Tx, Ty) \leq kd(x, y).$$

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Banach)**.** *Sejam $X = (X, d)$ um espaço métrico, onde $X \neq \emptyset$, e $T : X \to X$ uma contração sobre X. Suponhamos que X é completo. Então T tem precisamente um ponto fixo.*

Demonstração: Ver [18]. □

Teorema 2.2 (Teorema do Operador Inverso de Banach)**.** *Sejam X e Y espaços de Banach e $T : X \to Y$ uma aplicação linear, contínua e sobrejetiva. Então, T é uma aplicação aberta.*

Demonstração: Ver [7]. □

2.1 Espaços L^p

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \ para\ p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 2.3 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)**.** *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções integráveis num aberto* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$*, convergente quase sempre para uma função* u*. Se existir uma função* $u_0 \in L^1(\Omega)$ *tal que* $|u_\nu| \leq u_0$ *quase sempre,* $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ *então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Proposição 2.2. *Se* $u \in L^1(\Omega)$ *então as integrais indefinidas de* u *são funções absolutamente contínuas.*

Demonstração: Ver [20]. □

Proposição 2.3 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam* $1 < p\,, q < \infty$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$*. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [5]. □

Proposição 2.4 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* f, g *em* $L^p(\Omega)$*, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [20]. □

Proposição 2.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [5]. $\square$

Observação : Em $L^2(\Omega)$ a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Schwarz.

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 2.1 (Desigualdade de Hölder generalizada)**.** *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ *e* $\dfrac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 2.6 (Desigualdade de Interpolação)**.** *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}^{\theta} \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [20]. $\square$

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se (f_n) é uma sequência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$, então existe uma subsequência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Teorema 2.4 (Teorema da Representação de Riesz)**.** *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com*

$\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$*, tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [5]. □

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 2.7. *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$*, então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [5]. □

2.2 A Transformada de Fourier

Nesta seção, iremos estudar os principais resultados para o operador Transformada de Fourier, os quais terão uma grande importância para a compreensão e desenvolvimento dos próximos capítulos.

Definição 2.4. *A Transformada de Fourier de uma função* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$*, denotada por* $\hat{f}$*, é definida por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $(x \cdot \xi) = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n$ *é o produto interno usual de* $\mathbb{R}^n$*.*

Observação 2.2. *Como* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *é imediato ver que* $\hat{f}$ *está bem definida para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$*. De fato, temos que*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-2\pi i(x\cdot\xi)}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1},$$

o que prova a afirmação.

Teorema 2.5. *A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define uma transfomação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com $\|f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}$;*
2. *A função $\widehat{f}(\xi)$ é contínua;*
3. *$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ (Lema de Riemann-Lebesgue);*
4. *Se $\tau_h f = f(x-h)$ denota a translação por $h \in \mathbb{R}^n$, então $\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i(h\cdot\xi)}\widehat{f}(\xi)$ e $(\widehat{e^{2\pi i(x\cdot h)}f})(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.*
5. *Se $\delta_a f(x) = f(ax)$ denota a dilatação por $a > 0$, então $\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$;*
6. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, e $f * g$ o produto de convolução de f e g. Então $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$;*
7. *Dados $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos que $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy$.*

Demonstração: Ver [19]. □

Uma das características mais importantes da Transformada de Fourier é o seu relacionamento com o operador diferenciação. Isto é descrito nos seguintes resultados.

Proposição 2.8. *Suponha $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, onde x_k denota a k-ésima coordenada de x. Então, $\widehat{f}$ é diferenciável com respeito a ξ_k e*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_k f(x)})(\xi).$$

Demonstração: Basta usar o Teorema da Convergência Dominada 2.3. □

Definição 2.5. *A função $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ é diferenciável em $L^p(\mathbb{R}^n)$ com respeito a k-ésima variável se existir $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^p dx \to 0 \quad quando \quad h \to 0.$$

Se a função g existir (é única) é chamada a derivada parcial de f com respeito a k-ésima variável na norma L^p.

Teorema 2.6. *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g sua derivada parcial com respeito a k-ésima variável na norma L^1. Então $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$.*

Demonstração: Ver [19]. □

A partir dos resultados anteriores podemos obter as fómulas

$$\begin{aligned} P(D)\widehat{f}(\xi) &= (P(\widehat{-2\pi i x)}f(x))(\xi), \\ (\widehat{P(D)f})(\xi) &= P(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi), \end{aligned}$$

onde P é um polonômio em n variáveis e $P(D)$ denota o operador diferencial associado a P. Isto nos permite reduzir equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas.

Exemplo 2.1. *A Transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ é $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$. Ver Exemplo 1.3 de [19], ou [7].*

Exemplo 2.2. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [0,1] \\ 0, & se \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Claramente $f \in L^1(\mathbb{R})$, portanto podemos calcular sua Transformada de Fourier Se $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_0^1 e^{-2\pi i x\xi}dx \\ &= -\frac{1}{2\pi i\xi}(e^{-2\pi i\xi} - 1) = \frac{e^{-\pi i\xi}}{\pi\xi}\left(\frac{e^{\pi i\xi} - e^{-\pi i\xi}}{2i}\right) \\ &= \frac{e^{-\pi i\xi}}{\pi\xi}\sin(\pi\xi). \end{aligned}$$

Se $\xi = 0$, temos que $\widehat{f}(0) = 1$. Observemos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \right| d\xi.$$

Como $\frac{\sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$, segue que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

O exemplo anterior nos mostra que o fato de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ não implica que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Este fato nos motiva a estudar a Transformada de Fourier em subespaços de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que sejam invariantes sob a Transformada e Fourier.

2.2.1 A Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

Definição 2.6. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ está no espaço de Schwartz, denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_\infty < \infty.$$

Observemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ e que $\|.\|_{(\alpha,\beta)}$ é uma seminorma para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 2.3. *$f(x) = e^{-\|x\|^2}$ é um exemplo clássico de função que pertence ao espaço de Schwartz.*

Exemplo 2.4. *O espaço das funções testes $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.*
De fato, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que supp(ϕ) $\subset K$. Consideremos $\rho > 0$ tal que $K \subset B_\rho(0)$. Assim, dados $\epsilon > 0$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, temos para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > \rho$ que

$$|x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)| = 0 < \epsilon.$$

Logo, $\phi \in \mathcal{S}$.

Para uma definição mais detalhada deste espaço, consulte [7].

Definição 2.7. *Seja $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Dizemos que $\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$ se para qualquer*

$(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ *tem-se que*

$$\|\varphi_j\|_{(\alpha,\beta)} \to 0 \quad quando \quad j \to \infty.$$

Proposição 2.9. *Para* $1 \leq p \leq \infty$, *temos que* $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 2.3. *Em particular, para* $1 \leq p < \infty$, *resulta que* $\mathcal{S}$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *em virtude da densidade de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *e do fato que* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.10. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.11. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então* $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.12. *Seja* $f \in \mathcal{S}$.*Então,*

(i) $\widehat{D_x^\alpha} f(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$;

(ii) $\xi^\alpha D_\xi^\alpha(\widehat{f}(\xi)) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}} (D_x^\beta \widehat{(x^\alpha f(x))})(\xi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$;

(iii) $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.13. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e a aplicação* $f \in \mathcal{S} \mapsto \widehat{f} \in \mathcal{S}$ *é linear contínua.*

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 2.14 (Fórmula de inversão de Fourier)**.** *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x \cdot \xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária e consideremos $\lambda > 0$. Definamos

$$g(x) = \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Então $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e em virtude do Teorema 2.5, temos que

$$\widehat{g}(\xi) = \lambda^n \widehat{\varphi}(\lambda\xi).$$

Aplicando o Teorema 2.5 em f e g, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\lambda^n \widehat{\varphi(\lambda x)} dx.$$

Fazendo uma mudança de variável do lado direito da igualdade acima, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Mas,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(\xi)\varphi(0) \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda\to\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right)\widehat{\varphi}(x) = f(0)\widehat{\varphi}(x).$$

Agora, como $\widehat{\varphi}, \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e f e g são limitadas, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada 2.3 e obter

$$\varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi = f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x) dx.$$

Considerando $\varphi(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, cuja Transformada de Fourier é $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$, resulta que

$$f(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2} dx = 1,$$

obtemos que

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) d\xi.$$

Usando o Teorema 2.5, obtemos

$$f(x) = \tau_{-x} f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\tau_{-x} f(0)})(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i (x \cdot \xi)} d\xi,$$

o que prova o desejado. $\square$

Proposição 2.15. *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Consideremos a aplicação

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) e^{2\pi i (x \cdot \xi)} d\xi, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{2.1}$$

Notemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x),$$

onde $\mathcal{F}(f)$ é a Transformada de Fourier $\widehat{f}$ de f. Como $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, o mesmo vale para $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & \check{f} \end{array}$$

onde $\check{f}$ está definida como em (2.1) são contínuas e pela Proposição 2.14, temos que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}}. \tag{2.2}$$

Resulta das igualdades acima que $\mathcal{F}$ é uma bijeção. De fato, $\mathcal{F}$ é sobrejetiva, pois dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = \varphi$ e injetiva, já que $\mathcal{F}(\varphi) = 0$ implica que $\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = 0$. Logo, $\mathcal{F}$ é um isomorfismo topológico. $\square$

Proposição 2.16 (Relação Forte de Parseval)**.** *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\bar{\widehat{g}}(\xi)d\xi.$$

Demonstração: Ver [7]. $\square$

Corolário 2.1. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Demonstração: Basta aplicar a proposição precedente com $f = g$. $\square$

Este corolário nos leva a primeira extensão da Transformada de Fourier a uma classe mais ampla de funções.

Teorema 2.7 (Plancherel)**.** *Existe uma bijeção isométrica*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sendo $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear contínua e sendo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos estender $\mathcal{F}$, por continuidade, a uma única aplicação linear contínua

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em verdade, $\mathcal{P}$ é definido por: dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então existe $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos então

$$\mathcal{P}(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f}_k.$$

Pelo Corolário 2.1, temos que

$$\|\mathcal{P}f\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{f_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2,$$

o que prova que $\mathcal{P}$ é uma isometria, e portanto injetiva. Mostraremos agora que $\mathcal{P}$ é sobrejetiva. Com efeito, seja $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $(\varphi_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_k \to h \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Mas, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\psi}_k = \varphi_k$. Como (φ_k) é uma sequência de Cauchy, segue que $(\widehat{\psi_k})$ também é de Cauchy. Usando o Corolário 2.1, resulta que

$$\|\widehat{\psi}_k - \widehat{\psi}_l\|_2 = \|\psi_k - \psi_l\|_2,$$

isto é, (ψ_k) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi_k \to g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Donde,

$$\mathcal{P}\psi_k = \widehat{\psi}_k \to \mathcal{P}g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n),$$

ou seja

$$\varphi_k \to \mathcal{P}g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Pela unicidade do limite, obtemos que $\mathcal{P}g = h$, o que prova a sobrejetividade da aplicação e encerra o teorema. □

Teorema 2.8. *A Transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ pode ser definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

onde $\mathcal{F}(f)$ é a Transformada de Fourier $\widehat{f}$ de f.

Demonstração: Ver [19]. □

Uma vez definida a Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos estender sua definição na classe de funções

$$L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) = \{f;\ f = f_1 + f_2;\ f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

De fato, se $f = f_1 + f_2$ com, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$. Esta definição independe da decomposição de f escolhida, pois caso $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, com $f_i, g_i \in L^i(\mathbb{R}^n)$, com $i = 1, 2$, temos que $h = f_1 + g_1 = g_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\widehat{h} = \widehat{f_1} - \widehat{g_1} = \widehat{g_2} - \widehat{f_2}$, o que implica que $\widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{g_1} + \widehat{g_2}$. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq 2$, podemos definir a Transformada de Fourier nestes espaços.

Teorema 2.9 (Desigualdade de Hausdorff-Young)**.** *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Então $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

Demonstração: Ver [19]. □

2.2.2 A Transformada de Fourier no espaço das Distribuições Temperadas

Seja $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, uma aplicação linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ está em $\mathcal{S}'$ se, e somente se, para toda $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \to 0$ quando $j \to \infty$ a sequência numérica $T(\varphi_j) \to 0$ quando $j \to \infty$. Um elemento de $\mathcal{S}'$ é chamado de distribuição temperada.

Observação 2.4. *Pela Proposição 2.10, temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Resulta daí que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é identificado com um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 2.5. *As funções de crescimento polinomial.*

Diremos que uma função f tem crescimento polinomial L^p (ou simplesmente crescimento polinomial se $p = \infty$), se $\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum inteiro $k \geq 0$ e algum p com

$1 \leq p \leq \infty$.

Definimos o funcional linear

$$L_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Como L_f é linear, para verificar a continuidade, é suficiente considerar o caso $\varphi \to 0$. Usando a desigualdade de Hölder, decorre que

$$\begin{aligned} |L_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k} \right| |(1+|x|^2)^k \varphi(x)| dx \\ &\leq \left\| \frac{f}{(1+|x|^2)^k} \right\|_p \|(1+|x|^2)^k \varphi\|_{p'} \to 0, \end{aligned}$$

quando $\varphi \to 0$.

Definição 2.8. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos a Transformada de Fourier $\widehat{T}$ de T por*

$$\langle \widehat{T}, f \rangle = \langle T, \widehat{f} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, podemos definir a Transformada de Fourier inversa por:

Definição 2.9. *Dado $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a Transformada de Fourier inversa $\check{T}$ de T por*

$$\langle \check{T}, f \rangle = \langle T, \check{f} \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

onde $\check{f}$ é a Transformada de Fourier inversa de f.

Proposição 2.17. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e consideremos $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então,*

(i) $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|} \widehat{(x^\alpha T)}$.

(ii) $\widehat{(D^\alpha T)} = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{T}$.

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 2.5. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\begin{aligned}\widehat{T}_f(\varphi) &= T_f(\widehat{\varphi}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx \\ &= T_{\widehat{f}}(\varphi),\end{aligned}$$

donde concluímos que a Definição 2.8 é consistente com a teoria de Transformada de Fourier desenvolvida anteriormente.

2.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Para maiores informações consulte [7]. Isto motiva o conceito de um novo espaço.

Definição 2.10. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dizemos que v é a derivada fraca de u e escrevemos $D^\alpha u = v$ quando*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Definição 2.11. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é considerado no sentido fraco.

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^{\alpha} u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach. (Ver [7])

Observação 2.6. *Quando $p = 2$, o espaço $W^{k,2}(\Omega)$ será denotado por $H^k(\Omega)$, que munido do produto interno*

$$(u, v)_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) \overline{D^{\alpha} v(x)} dx$$

e com a norma induzida

$$\|u\|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Sabemos que $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^{\infty}(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$ para $k \geq 1$ (ver [7]). Motivado por esta razão, define-se o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^{\infty}(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)} = W_0^{k,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^k(\Omega)$.

Definição 2.12. *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-k,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{k,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^k(\Omega)$ denota-se por $H^{-k}(\Omega)$.*

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, caracterizaremos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}, \tag{2.3}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{2.4}$$

a qual provém do produto interno

$$(f,g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1+||\xi||^2)^s \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi, \tag{2.5}$$

onde $\widehat{f}$ é a Transformada de Fourier de f.

Se s é um inteiro positivo, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido em (2.3) coincide com o espaço $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, dado na Observação 2.6. Com efeito, sejam c_1, c_2 constantes reais positivas tais que

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leq s} x^{2\alpha} \leq (1+\|x\|^2)^s \leq c_2 \sum_{|\alpha|\leq s} x^{2\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.6}$$

Identificando $L^2(\mathbb{R}^n)$ com seu dual temos a cadeia $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, resulta que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
\|f\|^2_{H^s} &= \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^s |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&\leq c_2 \sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&= c_2 \sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \widehat{f}|^2 dx \\
&= c \sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f(x)}| dx
\end{aligned}$$

que por Plancherel é igual a

$$c \sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f(x)| dx < \infty.$$

Assim, $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, suponhamos que $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo fato de

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^s |\widehat{f}(x)|^2 dx \leq \infty,$$

vem que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Resta provar que $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall \alpha \in \mathbb{N}$,

$|\alpha| \leq s$. De fato, usando a Proposição 2.17, obtemos que

$$\sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f(x)}|^2 dx = (2\pi)^{2|\alpha|} \sum_{|\alpha|\leq s} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 dx$$

que por (1.7) é menor ou igual a

$$\frac{(2\pi)^{2|\alpha|}}{c_1} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s |\widehat{f}(x)|^2 dx \leq \infty.$$

Portanto, $\widehat{D^\alpha} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e por Plancherel $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente $H^s(\mathbb{R}^n) \subseteq W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 2.18. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $0 \leq s < s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset H^s(\mathbb{R}^n)$.*
2. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno definido em (1.6).*
3. *Para todo $s \in \mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*
4. *Se $s_1 \leq s \leq s_2$, com $s = \theta s_1 + (1-\theta)s_2$, $0 \leq \theta \leq 1$, então*

$$\|f\|_{H^s} \leq \|f\|_{H^{s_1}}^{\theta} \|f\|_{H^{s_2}}^{1-\theta}.$$

Demonstração: Ver [19]. □

Teorema 2.10 (Imersão de Sobolev)**.** *Seja $s > \frac{n}{2} + k$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é continuamente imerso em $C_\infty^k(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções com k derivadas contínuas que se anulam no infinito. Em outras palavras, se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s > \frac{n}{2} + k$ então (após uma possível modificação de f em um conjunto de medida nula) $f \in C_\infty^k$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{C_\infty^k} \leq c_s \|f\|_{H^s}.$$

Demonstração: Se $k = 1$ primeiramente mostraremos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{H^s}. \tag{2.7}$$

Se $s > \frac{n}{2}$, a integral $\int_{\mathbb{R}^n}(1+\xi^2)^{-\frac{s}{2}} d\xi$ é finita. Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)| d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_s \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, usando os Teorema 2.8 e Teorema 2.9, obtemos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \text{ess} |\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)| = \leq \|\widehat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{H^s}.$$

Se $k \geq 1$, temos que se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > \frac{n}{2} + k$, então para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ segue $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)| d\xi &= (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\alpha |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{n}{4}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

e

$$\|\partial_x^\alpha f\|_\infty \leq \|\widehat{\partial_x^\alpha f}\|_1 \leq \|(2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}\| \leq c_s \|f\|_{H^s}.$$

Isto encerra a prova. $\square$

Teorema 2.11. *Se* $k > n\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)$ *com* $p > 2$*, então* $H^k(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$

Demonstração: Ver [6]. □

Teorema 2.12 (Desigualdade de Gagliardo-Nirenberg)**.** *Sejam* $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ *e* j, m *dois números inteiros tais que* $0 \leq j < m$*. Se*

$$\frac{1}{p} = j + a\left(\frac{1}{r} - m\right) + \frac{(1-a)}{q}$$

para algum $a \in [j/m, 1]$ *(*$a < 1$ *se* $r > 1$ *e* $m - j - \frac{1}{r} = 0$*), então*

$$\sum_{|\alpha| \leq j} \|D^\alpha u\|_{L^p} \leq C \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^r} \right) \|u\|_{L^q}^{1-a} \tag{2.8}$$

para cada $u \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$*.*

Demonstração: Ver [8]. □

2.4 Operadores Fechados

Seja H um espaço de Hilbert separável com produto interno $(\cdot, \cdot)$ e norma $\|\cdot\| = \sqrt{(\cdot, \cdot)}$. Uma transformação linear ou operador (linear) A é uma função $A : H \to H$ com a propriedade

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A(u) + \beta A(v) \quad \forall u, v \in H \text{ e } \forall \alpha, \beta \text{ escalares.}$$

Uma definição um pouco mais geral de uma transformação linear pode ser feita do seguinte modo: A é definido em um espaço vetorial $D(A) \subset H$, onde $D(A)$ é chamado de domínio de A. Frequentemente iremos considerar $D(A) = H$, mas nem sempre é possível definir um operador em todo H. O conjunto

$$Im(A) = \{Au; u \in D(A)\}$$

é chamado de conjunto imagem do operador A. O conjunto

$$N(A) = \{u \in D(A); Au = 0\}$$

é chamado de núcleo do operador A. Os conjuntos Im e N são sempre espaços vetoriais de H.

Um operador A é dito ser limitado sobre um domínio $D(A)$ se existe uma constante $M \geq 0$ tal que

$$\|Au\| \leq M\|u\| \quad \forall u \in D(A).$$

O número

$$\|A\| = \inf \{M; \|Au\| \leq M\|u\| \quad \forall u \in D(A)\}$$

é chamado de norma de A. Observe que, desta forma para provarmos que A é ilimitado em $D(A)$, basta exibirmos uma sequência $\{u_n\} \subset D(A)$, com $\|u_n\| \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$, tal que

$$\frac{\|Au_n\|}{\|u_n\|} \to \infty.$$

Dizemos que uma transformação linear A é contínua no ponto $u \in D(A)$ se, para toda sequência $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $u_n \to u$, temos que $Au_n \to Au$. Um operador A é contínuo em seu domínio se ele é contínuo em todo ponto de $D(A)$.

Teorema 2.13. **(i)** *Se A é contínuo na origem, então A é contínuo em $D(A)$;*

(ii) *A é contínuo em $D(A)$ se, e somente se, A é limitado.*

Demonstração: Ver [5]. □

Essa teoria apresenta uma maneira natural de estender um operador A.

Definição 2.13. *Um operador linear B é dito ser uma extensão do operador A se $D(A) \subset D(B)$ e $Bu = Au$, $\forall u \in D(A)$.*

Definição 2.14 (Operador fechado)**.** *Seja A um operador linear no subespaço vetorial $D(A)$.*

Dizemos que A é fechado se para qualquer sequência $\{u_n\} \subset D(A)$ satisfazendo

$$u_n \to u,\ Au_n \to f \ \textit{implica que}\ u \in D(A) \ \textit{e}\ Au = f.$$

Definição 2.15. *Um operador linear A é dito ser fechável, se existir pelo menos uma extensão fechada de A.*

Vejamos agora algumas propriedades básicas de operadores fechados.

Teorema 2.14 (Teorema do Gráfico Fechado)**.** *Um operador fechado sobre um domínio fechado é limitado.*

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.15. *Seja A um operador fechado. Então seu núcleo é um conjunto fechado. Se A^{-1} existe, então o operador $A^{-1} : Im(A) \to D(A)$ é fechado.*

Demonstração: Ver [7]. □

Teorema 2.16. *Seja A um operador fechado, e considere que A^{-1} existe. Então, $Im(A)$ é fechado se, e somente se, A^{-1} é limitado.*

Demonstração: Suponhamos que $Im(A)$ é fechado. Pelo Teorema 2.15, $A^{-1} : Im(A) \to D(A)$ é fechado. Logo, pelo Teorema 2.14 segue que A^{-1} é limitado. Suponhamos agora que $A^{-1} : Im(A) \to D(A)$ é limitado. Então existe $\eta > 0$ tal que

$$\|u\| \leq \eta \|Au\|, \quad \forall u \in D(A).$$

Seja $g \in \overline{Im(A)}$. Então existe $\{u_n\} \subset D(A)$ tal que $Au_n \to g$. Como

$$\|u_n - u_m\| \leq \eta \|Au_n - Au_m\|$$

resulta que $\{u_n\}$ é um sequência de Cauchy. Assim $u_n \to u$. Desta forma, como A é fechado, obtemos que $u \in D(A)$ e $Au = g$. Portanto $g \in Im(A)$, donde segue que $Im(A)$ é fechado. □

2.5 Teoria Espectral e Operadores Auto-Adjuntos

Definição 2.16. *Seja $A : D(A) \to H$ um operador fechado com domínio $D(A) \subset H$. Os conjuntos*

$$\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}; A - \lambda I \text{ possui inverso limitado e } Im(A - \lambda I) = H\}$$

e

$$\sigma = \mathbb{C} - \rho(A)$$

são chamados, respectivamente, de conjunto resolvente de A e espectro de A. Se $\lambda \in \rho(A)$, $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é chamado de resolvente de A em λ.

O espectro $\sigma(A)$ pode ser particionado em três conjuntos distintos:

(i) Espectro Pontual: $\sigma_p(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(A - \lambda I)u = 0$ possui soluções não triviais, em outras palavras, λ é um autovalor de A e qualquer outra solução não trivial correspondente u é um autovetor de A correspondente a λ; a multiplicidade (geomética) de λ é a dimensão do núcleo $N(A - \lambda I)$;

(ii) Espectro Contínuo: $\sigma_c(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R_\lambda(A)$ existe e $\overline{Im(A - \lambda I)} = H$ mas $R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}$ é ilimitado;

(iii) Espectro Residual: $\sigma_r(A)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R_\lambda(A)$ existe (e pode ser limitado ou não) mas $\overline{Im(A - \lambda I)} \neq H$.

Logo, temos a seguinte união disjunta

$$\mathbb{C} = \rho(A) \cup \sigma(A) = \rho(A) \cup \sigma_P(A) \cup \sigma_c(A) \cup \sigma_r(A).$$

Veremos agora algumas propriedades básicas dos conjuntos $\rho(A)$, $\sigma(A)$ e do resolvente $R_\lambda(A)$. O resolvente $R_\lambda(A)$ é um operador no qual depende do parâmetro complexo λ. Isto sugere a uma definição geral de uma função operador.

Uma função operador é uma função

$$S \; : \; \Lambda \to B(H,H)$$
$$\lambda \mapsto S_\lambda$$

onde Λ é qualquer subconjunto do plano complexo $\mathbb{C}$ e $B(H,H)$ é o conjunto de todos os operadores limitados de H em H.

Definição 2.17. *Seja Λ um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$. Uma função operador S definida sobre Λ é dita ser localmente holomorfa sobre Λ se, para todo $x \in H$ e $f \in H'$ (espaço dual de H), a função definida por*

$$h(\lambda) = f(S_\lambda x)$$

é holomorfa (ou analítica) para todo $\lambda_0 \in \Lambda$ no sentido usual da análise complexa. A função S é dita ser holomorfa ou analítica sobre Λ se S é localmente holomorfa sobre Λ e Λ é um domínio (um subconjunto aberto e conexo de $\mathbb{C}$).

Teorema 2.17. *Seja A um operador fechado. Então, segue que:*

(i) *Para $\lambda, \mu \in \rho(A)$, $R_\lambda(A)$ e $R_\mu(A)$ comutam, i.é, $R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A)$ e vale a fórmula resolvente*

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu)R_\mu(A)R_\lambda(A);$$

(ii) *O conjunto $\rho(A)$ é um subconjunto aberto de $\mathbb{C}$;*

(iii) *A função operador*

$$\lambda \in \rho(A) \to R_\lambda(A) \in B(H,H)$$

é uma função analítica sobre cada componente (subconjunto maximal conexo) de $\rho(A)$;

(iv) *O conjunto $\sigma(A)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{C}$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Quando trabalhamos com operador limitado, ou seja, $A \in B(H,H)$, temos algumas propriedades explícitas do espectro. Vejamos alguns desses resultados clássicos.

Teorema 2.18. *Seja $A : H \to H$ um operador linear limitado. Então, temos o seguinte:*

(i) *O espectro $\sigma(A)$ é um conjunto compacto do plano complexo tal que $\sigma(A) \neq \emptyset$ e $\sigma(A)$ está contido no disco $|\lambda| \leq \|A\|$;*

(ii) *O resolvente $\rho(A)$ é um conjunto não vazio.*

Demonstração: Ver [7]. □

Veremos agora, a noção de operador adjunto. Primeiramente, seja A um operador limitado definido em todo o espaço de Hilbert H. Sendo v um elemento fixo de H. Consideremos o operador linear $u \to (Au, v)$. Então, pelo Teorema da Representação de Riesz existe um único $g \in H$ tal que

$$(Au, v) = (u, g)\,, \quad \forall u \in H.$$

O elemento g depende de v, escrevemos então $g = A^*v$. A^* é um operador linear definido em todo H e é limitado.

Definição 2.18. *Seja $A : H \to H$ um operador limitado. Então o operador adjunto $A^* : H \to H$ é definido por*

$$(Au, v) = (u, A^*v)\,, \quad \forall u, v \in H.$$

Definição 2.19. *Seja $A : H \to H$ um operador limitado. A é dito ser auto-adjunto ou hermitiano se $A = A^*$, e é dito ser unitário se A é bijetivo e $A^* = A^{-1}$.*

A seguir, temos algumas propriedades básicas de operadores adjuntos e unitários. Seja $T, U \in B(H, H)$, então

(1) $(TU)^* = U^*T^*$, $(T^*)^* = T$;

(2) Se T possui inverso limitado, então T^* possui inverso limitado e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$;

(3) Se U é unitário, então U é isométrico, e $\|Ux\| = \|x\|$, $\forall x \in H$;

(4) $\|T^*\| = \|T\|$.

Teorema 2.19. *Seja $T \in B(H,H)$. Então:*

(i) $\sigma(T^*) = \left\{\lambda; \bar{\lambda} \in \sigma(T)\right\}$ *e* $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = [R_\lambda(T)]^*$*;*

(ii) *Se $\lambda \in \sigma_r(T)$, então $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Se $\lambda \in \sigma_p(T)$, então $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*) \cup \sigma_r(T^*)$;*

(iii) *Se T é auto-adjunto, então T não possui espectro residual;*

(iv) *Se T é auto-adjunto, então $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$;*

(v) *Se T é auto-adjunto, então autovetores correspondentes a autovalores distintos de T são ortogonais.*

Demonstração: Demonstraremos os resultados (ii), (iii) e (iv). A demonstração dos demais resultados podem ser encontradas em [17] e [18]. Primeiramente vejamos a demonstração do resultado (iv). Sejam $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Então, usando o fato de que $T = T^*$, segue que

$$\|[T - (\lambda - i\mu)]x\|^2 = \|(T - \lambda)x\|^2 + \mu^2\|x\|^2.$$

Assim, $\|[T - (\lambda - i\mu)]x\|^2 \geq \mu^2\|x\|^2$, e portando, se $\mu \neq 0$, resulta que $T - (\lambda + i\mu)$ é injetor e possui inverso limitado sobre a imagem (basta usar o Teorema do Operador Inverso de Banach para obter este último resultado). Pelo Teorema (2.16), segue que $Im(T - (\lambda + i\mu))$ é fechado. Se $Im(T - (\lambda + i\mu)) = H$, nada temos a demonstrar. Se $Im(T - (\lambda + i\mu)) \neq H$, então existe $f \in H - \{0\}$ tal que $([T - (\lambda - i\mu)]x, f) = 0,\ \forall x \in D(T)$, pois podemos escrever H da seguinte forma: $H = Im(T - (\lambda + i\mu)) \oplus [Im(T - (\lambda + i\mu))]^\perp$. Daí,

$$(Tx, f) = (x, (\lambda - i\mu)f) \text{ onde } x \in D(T).$$

Pela definição de operador adjunto e propriedade de auto-adjunto de T resulta que $Tf = (\lambda - i\mu)f$. Logo, $\lambda - i\mu$ é autovalor de T. Como todo autovalor de um operador auto-adjunto é real, segue que $\mu = 0$. Desta forma, temos uma contradição. Portanto, se $\mu \neq 0$, então $\lambda + i\mu \in \rho(T)$. Isto prova (iv).

Provemos agora o item (ii). Seja $\lambda \in \sigma_r(T)$. Então, $R_\lambda(T) : Im(T - \lambda) \to D(T - \lambda)$ está bem definido e $\overline{Im(T - \lambda)} \neq H$. Seja $f \neq 0$ tal que $f \in [Im(T - \lambda)]^\perp$. Então, para cada $x \in H$, $((T-\lambda)x, f) = 0$. Desta forma, $(x, (T^* - \bar{\lambda})f) = 0$, para cada $x \in H$. Logo, $(T^* - \bar{\lambda})f = 0$, e portanto $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Seja $\lambda \in \sigma_p(T)$, então existe $x \neq 0$ tal que $x \in N(T-\lambda)$. Assim, $((T-\lambda)x, f) = 0$, para cada $f \in H$, e portanto, $(T^* - \bar{\lambda})f \in [N(T-\lambda)]^{\perp}$, para cada $f \in H$. Se $[N(T-\lambda)]^{\perp} = 0$, então $\bar{\lambda} \in \sigma_p(T^*)$. Se $[N(T-\lambda)]^{\perp} \neq 0$, então $\bar{\lambda} \in \sigma_r(T^*)$.

Finalmente, provemos o item (iii). Se um número real λ fosse um espectro residual de T, então $\bar{\lambda} = \lambda$ seria espectro pontual de $T^* = T$, donde é impossível já que $\sigma_p(T) \cap \sigma_r(T) = \emptyset$. Isto prova (iii) e finaliza a demonstração do teorema. □

Os resultados (iii) e (iv) do Teorema 2.19 serão também satisfeitos para qualquer operador auto-adjunto definido em um domínio denso em H. Generalizemos a definição de auto-adjunto.

Definição 2.20. *Seja $A : D(A) \to H$ um operador linear densamente definido. Então o operador adjunto $A^* : D(A^*) \to H$ de A é definido da seguinte maneira:*

$$D(A^*) = \{y \in H;\ \textit{existe } z \in H \textit{ satisfazendo } (Ax, y) = (x, z)\ \forall x \in D(A)\}$$

e para cada $y \in D(A^*)$ defina $A^*y = z$. Note que para z ser unicamente determinado, precisamos da condição de que $D(A)$ é denso em H.

Teorema 2.20. *Seja $A : D(A) \to H$ um operador linear densamente definido. Então, temos*

(i) *A^* é um operador fechado;*

(ii) *Se A é fechado, então $D(A^*)$ é denso em H. Além disso, $A^{**} = A$;*

(iii) *Se $\overline{D(A^*)} = H$. Então, A é fechável e $A \subseteq A^{**}$. Além disso, $A^{**} = \bar{A}$;*

(iv) *Existem operadores lineares na qual não possuem extensão fechada.*

Demonstração: Ver [2]. □

Definição 2.21. *Seja $A : D(A) \to H$ um operador linear densamente definido. Então, A é chamado de operador auto-adjunto se $A = A^*$, i.é, se, e somente se, $D(A) = D(A^*)$ e*

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A).$$

Teorema 2.21 (Espectro de Operadores Auto-Ajunto). *Seja $A : D(A) \to H$ um operador auto-adjunto ($D(A)$ denso em H). Então, segue que*

(i) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$;

(ii) *A não possui espectro residual. Logo, $\sigma(A) = \sigma_p(A) \cup \sigma_c(A)$.*

Demonstração: Basta utilizar os itens (iii) e (iv) do Teorema 2.19. □

O teorema a seguir é uma ferramenta muito útil para encontrar o espectro de um operador auto-adjunto.

Teorema 2.22. *Seja $A : D(A) \to H$ um operador auto-adjunto ($D(A)$ denso em H). Então um número real λ pertence à $\sigma(A)$ se, e somente se, existe uma sequência $\{u_n\} \subset (A)$ tal que*

$$\|u_n\| = 1 \text{ e } \|(A - \lambda I)u_n\| \to 0 \text{ quando } n \to \infty. \tag{2.9}$$

Demonstração: Ver [2]. □

Corolário 2.2. *Se $A : D(A) \to H$ é um operador auto-adjunto e*

$$\|u\| \leq \|Au\|, \ u \in D(A),$$

então A é injetivo e $Im(A)$ é fechado.

Demonstração: Ver [2]. □

2.6 Espectro de Operadores Lineares Associado à Ondas Solitárias

Estudaremos agora uma teoria espectral mais detalhada associada a operadores diferenciáveis que aparece no estudo de estabilidade de soluções onda solitária.

Definição 2.22. *Uma série de Neumann é uma série da forma*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A^n,$$

onde A é um operador linear contínuo e A^0 é o operador identidade.

Observe que se $\|A\| < 1$, então $(I - A)^{-1}$ existe e a série de Neumann converge para $(I - A)^{-1}$. De fato, primeiramente veja que

$$A^n \to 0, \text{ quando } n \to \infty,$$

onde 0 é o operador nulo, pois $\|A^n\| \leq \|A\|^n \to 0$. Desta forma,

$$(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^n) = I - A^{n+1} \to I,$$

o que prova o desejado.

Definição 2.23. *Um operador A com domínio denso em H é simétrico sobre seu domínio se*

$$(Au, v) = (u, Av) \quad \forall u, v \in D(A).$$

Observação 2.7. *Todo operador auto-adjunto é simétrico e todo operador simétrico limitado é auto-adjunto.*

Teorema 2.23. *Se T é simétrico e $Im(\lambda_0 - T) = H$ para algum λ_0 real, $\lambda_0 \in \rho(T)$, então T é auto-adjunto.*

Demonstração: Ver [14]. □

Definição 2.24. *Sejam T e A operadores com o mesmo domínio H. Dizemos que A é relativamente limitado com respeito a T (ou simplesmente T-limitado) se*

$$D(T) \subset D(A) \text{ e } \|Au\| \leq a\|u\| + b\|Tu\|, \; u \in D(T), \tag{2.10}$$

onde $a, b \geq 0$. *O número* $b_0 = \inf\{b; b$ *satisfaz* (2.10)$\}$ *é chamado de relativo limitado de* A *com respeito a* T *ou simplesmente de* T*-limite.*

Segue imediatamente de (2.10) que o operador limitado $A : H \to H$ é T-limitado para qualquer T com $D(T) \subset H$ e com T-limite igual à zero.

Teorema 2.24. *Sejam* T *e* A *operadores definidos sobre* H*, e seja* A T*-limitado com* T*-limite menor que* 1*. Então* $S = T + A$ *é fechado se, e somente se,* T *é fechado. Em particular,* $T + A$ *é fechado se* A *é limitado e* T *é fechado.*

Demonstração: Ver [2]. □

Observe que a desigualdade (2.10) é equivalente a condição

$$\|Au\|^2 \leq a_1^2\|u\|^2 + b_1\|Tu\|^2, \qquad u \in D(T), \tag{2.11}$$

onde $a_1, b_1 \geq 0$. Assim, o T-limite de A pode ser definido como $b_0 = \inf\{b_1; b_1$ satisfaz (2.11)$\}$.

Antes de vermos o teorema de estabilidade para operadores auto-adjunto, estabeleceremos um critério básico para tais operadores.

Teorema 2.25. *Seja* T *um operador simétrico sobre* H *com domínio denso* $D(T)$*. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) T *é auto-adjunto;*

(ii) T *é fechado e* $N(T^* \pm iI) = \{0\}$*;*

(iii) $Im(T \pm iI) = H$*.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.26 (Estabilidade de Operadores Auto-Adjunto)**.** *Seja* T *um operador auto-adjunto. Se* A *é simétrico e* T*-limitado com* T*-limite menor que* 1*, então* $T + A$ *é também auto-adjunto. Em particular,* $T + A$ *é auto-adjunto se* A *é limitado e simétrico com* $D(T) \subset D(A)$*.*

Demonstração: Temos que $D(T+A) = D(T)$ e $T+A$ é simétrico. Suponhamos sem perda de generalidade que (2.11) ocorre com constantes a_1, b_1, tal que $a_1 > 0$, $0 < b_1 < 1$. Como T é auto-adjunto, segue de (2.11) que

$$\|Au\|^2 \leq a_1^2\|u\|^2 + b_1\|Tu\|^2 = \|(b_1T \mp ia_1I)u\|^2, \qquad u \in D(T).$$

Seja $c_1 = \frac{a_1}{b_1}$ e $(T \mp ic_1I)u = v$. Da desigualdade anterior, segue que $(T \mp ic_1I) = \frac{1}{b_1}(b_1T \mp ia_1I)$ é injetivo, e portanto, invertível. Daí, considerando $R_{\mp ic_1} = R_{\mp ic_1}(T) = (T \mp ic_1I)^{-1}$, obtemos também da desigualdade anterior que

$$\|Au\| \leq b_1\|(T \mp ic_1I)u\| \qquad u \in D(T),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|AR_{\mp ic_1}(T)\| &\leq \|(T \mp ic_1I)R_{\mp ic_1}(T)\| \\ &= b_1\|v\| \qquad \forall v \in H. \end{aligned}$$

Assim, obtemos que os operadores $B_\pm = -AR_{\pm ic_1} \in B(H,H)$ e satisfazem $\|B_\pm\| \leq b_1 < 1$. Então, pela série de Neumann, temos que $(I - B_\pm)^{-1}$ existe e $(I - B_\pm)^{-1} \in B(H,H)$. Como

$$\begin{aligned} T + A \mp ic_1I &= T - B_\pm(T \mp ic_1I) \mp ic_1I \\ &= IT - B_\pm(T \mp ic_1I) \mp ic_1I \\ &= (I - B_\pm)(T \mp ic_1I) \end{aligned}$$

e $T \mp ic_1I$ possui imagem H, pois $\mp ic_1 \in \rho(T)$. Então, $Im(T + A \mp ic_1I) = H$, e portanto, pelo Teorema 2.25, $T + A$ é auto-adjunto. □

Vamos agora, obter informações sobre o operador linear $\mathcal{L} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ definido por

$$\mathcal{L}u \equiv \left(-\frac{d}{dx^2} + \omega\right)u - f'(\phi)u \tag{2.12}$$

onde $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 tal que I é um intervalo que contém o zero,

$f(0) = f'(0) = 0$ e ϕ é uma função em $C^\infty(\mathbb{R})$ positiva e par tal que $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ se $|x| \to 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Note que $D(\mathcal{L}) = D\left(-\frac{d}{dx^2} + \omega\right) = H^2(\mathbb{R})$.

Definição 2.25 (Espectro Essencial)**.** *Seja $A : D(A) \to H$ um operador linear.*

(1) *Dizemos que $\lambda \in \sigma(A)$ é não-essencial se, e somente se, as seguintes afirmações são satisfeitas: λ é um autovalor isolado de $\sigma(A)$ e o espaço $N(A - \lambda I)$ é de dimensão finita. Chamamos o conjunto de todos esses λ de espectro discreto e denotamos por $\sigma_{disc}(A)$;*

(2) *O complemento em $\sigma(A)$ dos pontos não-essenciais é chamado de espectro essencial de A. Denotamos este conjunto por $\sigma_{ess}(A)$. Logo, $\sigma(A) = \sigma_{disc}(A) \cup \sigma_{ess}(A)$.*

Teorema 2.27 (Critério de Weyl)**.** *Seja A um operador auto-adjunto com domínio $D(A)$. Para $\lambda \in \mathbb{R}$, as seguintes condições são equivalentes*

(i) *$\lambda \in \sigma_{ess}(A)$;*

(ii) *Existe uma sequência $\{\psi_n\} \subset D(A)$ ortogonal em H com $\|\psi_n\| = 1$, $\forall n$ tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \|(A - \lambda I)\psi_n\| = 0.$$

Demonstração: Ver [2]. □

Agora, vejamos que o espectro essencial é preservado quando perturbamos o operador de interesse por uma classe especial de operadores.

Teorema 2.28 (Ivariância do Espectro Essencial)**.** *Sejam A e B operadores auto-adjuntos sobre H tal que $D(A) = D(B)$ e $A - B$ é um operador compacto de $D(A)$ em H. Aqui $D(A)$ é considerado com a norma do gráfico gerado por A, $\|u\|_A^2 = \|Au\|^2 + \|u\|^2$ (lembremos que $D(A)$ com a norma do gráfico $\|\cdot\|_A$ é um espaço de Banach desde que A é fechado). Então, $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.29. *O operador $\mathcal{L}$ definido em (2.12)*

$$\mathcal{L} \equiv \left(-\frac{d}{dx^2} + \omega\right) u - f'(\phi) u$$

possui espectro essencial $\sigma_{ess}(\mathcal{L}) = [\omega, \infty)$.

Demonstração: Ver [2]. □

Vejamos agora dois resultados. O primeiro é um resultado forte sobre a propriedade de um operador semi-Fredholm estar estável em pequenas pertubações. O segundo é uma caracterização do espectro essencial de um operador.

Definição 2.26 (Operadores Fredholm e Semi-Fredholm)**.** *Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear fechado.*

(1) *Dizemos que A é Fredholm se $Im(A)$ é fechado e ambos os números $dim(Im(A)^{\perp})$ e $dim(N(A))$ são finitos;*

(2) *Dizemos que A é semi-Fredholm se $Im(A)$ é fechado e no mínimo um destes números $dim(Im(A)^{\perp})$ e $dim(N(A))$ é finito.*

Teorema 2.30 (Estabilidade de Operadores Semi-Fredholm)**.** *Seja A um operador fechado semi-Fredholm em H. Consideremos B, um operador A-limitado de H em H. Então, $A+\eta B$ é semi-Fredholm, e $dim(N(A+\eta B))$ e $dim(Im(A+\eta B)^{\perp})$ são constantes para η suficientemente pequeno tal que $|\eta| > 0$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.31. *Seja A um operador auto-adjunto em H. Então, $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ se, e somente se, ou $Im(A - \lambda I)$ não é fechado ou $Im(A - \lambda I)$ é fechado mas $dim(N(A - \lambda I)) = dim(Im(A - \lambda I)^{\perp}) = \infty$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.32. *O operador $\mathcal{L}$ definido em (2.12) é um operador fechado, ilimitado e auto-adjunto sobre $L^2(\mathbb{R})$ na qual o espectro consiste de uma parte essencial $[\omega, \infty)$ mais um número finito de autovalores discretos (com autoespaço de dimensão finita) no intervalo $(-\infty, \omega)$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.33. *Seja A um operador auto-adjunto em H. Se $\lambda \in \sigma(A)$ e λ é um ponto isolado, então λ é um autovalor de A.*

Demonstração: Ver [2]. □

2.7 Teoria de Sturm-Liouville

Nesta seção estabeleceremos alguns resultados básicos da teoria de Sturm-Liouville associado a equações diferenciais da forma

$$\mathcal{J}\varphi \equiv -\varphi'' + V(\xi)\varphi = 0 \tag{2.13}$$

onde o potencial $V(\xi)$ é de valor real e contínuo. Estes resultados nos darão informações mais precisas sobre o espectro do operador linear

$$\mathcal{L}\psi \equiv -\psi'' + [\omega - f'(\phi)]\psi \tag{2.14}$$

no qual está associado a soluções onda solitária ϕ da equação (3.1).

Inicialmente, vejamos o clássico Teorema de Oscilação de Sturm

Teorema 2.34. *Sejam φ_1 e φ_2 duas soluções não triviais das equações diferenciais*

$$-\varphi_1'' + V_1(\xi)\varphi_1 = 0, \quad -\varphi_2'' + V_2(\xi)\varphi_2 = 0 \tag{2.15}$$

(i) *Se $V_1(\xi) \geq V_2(\xi)$ para $\xi \in [a, b]$ e $\varphi_1(a) = \varphi_1(b) = 0$, então existe $\iota \in [a, b]$ tal que $\varphi_2(\iota) = 0$. Em outras palavras, entre dois zeros contíguos de φ_1 existe um zero de φ_2;*

(ii) *Se $V_1(\xi) > V_2(\xi)$ para $\xi \in W \subset [a,b]$, onde W possui medida de Lebesgue positiva, então o ponto ι tal que $\varphi_2(\iota) = 0$ pode ser encontrado em (a,b) entre os dois zeros de φ_1.*

Demonstração: Suponhamos que φ_1 não possua zeros em (a,b) e que $\varphi_1 > 0$. Então, $\varphi_1'(a) > 0$ e $\varphi_1'(b) < 0$ (se, por exemplo, $\varphi_1'(a) = 0$, então pelo teorema de existência e unicidade de soluções de equações diferenciais ordinárias segue que $\varphi_1 \equiv 0$). Suponhamos também que φ_2 não possua zeros em $[a,b]$ e $\varphi(\xi) > 0$ para $\xi \in [a,b]$. Logo, de (2.15) resulta que

$$0 = \int_a^b (\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2)d\xi = \int_a^b (V_1 - V_2)\varphi_1\varphi_2 d\xi.$$

Desta forma, utilizando as hipóteses e afirmações feitas, resulta que

$$\begin{aligned} 0 &\geq \int_a^b (\varphi_1\varphi_2'' - \varphi_1''\varphi_2)d\xi = \int_a^b \frac{d}{dx}(\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)d\xi \\ &= (\varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2)\mid_a^b = \varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b) > 0, \end{aligned}$$

o que é uma contradição. Isto prova a primeira parte do Teorema.

Suponhamos agora que $\varphi_1(a) = \varphi_1(b) = 0$, $\varphi_1(\xi) > 0$, $\varphi_2(\xi) > 0$ para $\xi \in (a,b)$, e $V_1 > V_2$ em W. Então, de um processo análogo ao feito anteriormente, resulta que $0 > \varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b)$. Mas, como $\varphi_1(a) > 0$, $\varphi_2(a) \geq 0$, $\varphi_1'(b) < 0$ e $\varphi_2(b) \geq 0$, segue que $\varphi_1'(a)\varphi_2(a) - \varphi_1'(b)\varphi_2(b) \geq 0$, o que é uma contradição. Isto conclui o teorema. □

Corolário 2.3. *Se $V(\xi) \geq 0$ para $\xi \in [a,b]$ em (2.13), então qualquer solução não trivial tem no máximo um zero em $[a,b]$.*

Demonstração: Basta usar o teorema anterior e comparar $-\varphi_1'' + V_1(\xi)\varphi_1 = 0$ com $-\varphi_2'' = 0$, na qual possui solução $\varphi_2 \equiv 1$ sem zeros. □

Consideremos agora o potencial V em (2.13) satisfazendo a condição

$$\lim_{|\xi|\to\infty} V(\xi) = \omega > 0. \tag{2.16}$$

Teorema 2.35. *Se φ é uma solução não trivial de (2.13), onde V satisfaz (2.16), então o conjunto de zeros de φ é finito (provavelmente vazio).*

Demonstração: Primeiramente, note que pelo teorema da existência e unicidade de soluções de equações diferencias ordinárias, temos que todos os zeros de φ são isolados. Desta forma, escolhendo R tal que $V(\xi) \geq 0$ para todo $|\xi| \geq R$, segue do Corolário 2.3 que φ possui no máximo um zero em cada intervalo $(-\infty, -R)$ e (R, ∞), o que demonstra o desejado. □

Corolário 2.4. *Seja $\lambda < \omega$ um autovalor de $\mathcal{J}$ com autofunção φ. Então o conjunto de zeros de φ é finito (possivelmente vazio).*

Demonstração: Consideremos $V_1(\xi) = V(\xi) - \lambda$. Então,

$$\varphi'' + V_1(\xi)\varphi = 0.$$

Mas $V_1(\xi) \to \omega - \lambda > 0$. Logo, pelo Teorema 2.35 segue o desejado. □

Teorema 2.36. *Sejam $\varphi_1, \varphi_2 \in L^2(\mathbb{R})$ autofunções de $\mathcal{J}$ com autovalores $\lambda_1, \lambda_2 < \omega$ e com números de zeros n_1 e n_2, respectivamente. Se $\lambda_2 > \lambda_1$, então $n_1 > n_2$.*

Demonstração: Ver [2]. □

Teorema 2.37. *Considere o operador $\mathcal{L}$ definido em (2.14), e seja λ_0 o primeiro autovalor associado a $\mathcal{L}$. Então λ_0 é um autovalor simples tal que qualquer autofunção correspondente ψ satisfaz $\psi(\xi) > 0$ q.s. ou $\psi(\xi) < 0$ q.s.*

Demonstração: Ver [2]. □

Estabeleceremos agora uma exata descrição do espectro de $\mathcal{L}$ definido em (2.14). Esta informação é crucial na teoria de estabilidade de soluções onda solitária para equações de evolução. Consideremos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave com $f(0) = f'(0) = 0$.

Teorema 2.38. *Suponhamos que $\phi \in L^2(\mathbb{R})$ satisfaz a equação diferencial*

$$-\phi'' + \omega\phi - f(\phi) = 0, \tag{2.17}$$

com $\omega > 0$ e ϕ' tendo um único zero. Então o operador diferencial

$$\mathcal{L}\psi = -\psi'' + [\omega - f'(\phi)]\psi$$

definido em $L^2(\mathbb{R})$ tem exatamente um autovalor simples negativo λ_0; o autovalor 0 é simples com autofunção associada ϕ'; e existe $\delta > 0$ tal que para todo $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}) - \{\lambda_0, 0\}$ temos $\lambda > \delta$.

Demonstração: Utilizando a igualdade (2.17), segue que $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e $\mathcal{L}\phi' = 0$. Além disso, da teoria de equações diferenciais ordinárias obtemos que zero é um autovalor simples de $\mathcal{L}$, pois o Wronskiano de duas soluções em $L^2(\mathbb{R})$ da equação $\mathcal{L}\psi = 0$ é zero. Como $\mathcal{L}\phi' = 0$, resulta que do Teorema 2.32 e do Teorema 2.37 que o menor autovalor de $\mathcal{L}$, λ_0, satifaz $\lambda_0 < 0 < \omega$, é simples, e possui uma autofunção positiva associada. Vejamos agora que não existe autovalores de $\mathcal{L}$ no intervalo $(\lambda_0, 0)$. Com efeito, suponhamos que exista $\lambda \in (\lambda_0, 0)$ tal que $\mathcal{L}\psi_1 = \lambda\psi_1$ com $\psi_1 \in D(\mathcal{L}) - \{0\}$. Então, como $[\omega - f'(\phi(\xi))] \to \omega$ quando $|\xi| \to \infty$, segue do Teorema 2.36 que ψ_1 deve ter no mínimo um zero. Aplicando novamente o Teorema 2.36, mas desta vez para os autovalores λ e 0, devemos ter que ϕ' tem no mínimo dois zeros, o que é uma contradição. Finalmente, a existência de um número positivo δ segue do Teorema 2.32. □

Teorema 2.39. *Seja $\phi > 0$ a solução obtida na seção 3.1, ou seja, ϕ satisfaz*

$$-\phi'' + \omega\phi - \phi^{\alpha+1} = 0, \tag{2.18}$$

onde $\omega > 0$. Então, o operador diferencial definido por

$$\mathcal{L}^+\psi \equiv -\psi'' + [\omega - \phi^\alpha]\psi$$

não possui autovalor negativo, possui autovalor zero simples associado a função ϕ e $\sigma_{ess}(\mathcal{L}^+) = [\omega, \infty)$.

Demonstração: Pela igualdade (2.18), segue que $\mathcal{L}^+$ possui autovalor zero associado a função ϕ. Suponhamos por absurdo que o primeiro autovalor de $\mathcal{L}^+$ seja negativo, então considerando $V(\xi) = \omega - \phi^\alpha$ e aplicando o Teorema 2.36, obtemos que a autofunção associada a tal autovalor possui número de zeros n tal que $n > 0$, uma vez que $\phi > 0$. Por outro lado, o Teorema 2.37 nos diz que a autofunção associada não possui zeros, o que é um absurdo. Logo, o menor autovalor de $\mathcal{L}^+$ é zero. Além disso, pelo Teorema 2.37, segue que ele é simples. Considerando $f(u) = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ e aplicando o Teorema 2.29, obtemos o desejado. □

2.8 Teoria de Semigrupos

Consideremos, nesta seção, X um espaço de Hilbert munido do produto interno $(\cdot,\cdot)$ e da norma $\|\cdot\|$.

Definição 2.27. *Seja $\mathcal{L}(X)$ a álgebra dos operadores lineares limitados de X. Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

(i) *$S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

(ii) *$S(t+s) = S(t)S(s)$, para todo $s, t \in \mathbb{R}^+$.*

Dizemos que o semigrupo S é de classe C_0 se

(iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \ \forall x \in X.$

Proposição 2.19. *Se S é um semigrupo de classe C_0, então $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é uma função limitada em todo intervalo limitado $[0, T]$.*

Demonstração: Ver [14]. □

Corolário 2.5. *Todo semigrupo de classe C_0 é fortemente contínuo em $\mathbb{R}^+$, i.e., se $t \in \mathbb{R}^+$, então*

$$\lim_{s\to t} S(s)x = S(t)x \quad \forall x \in X.$$

Demonstração: Ver [14]. □

Proposição 2.20. *Seja S um semigrupo de classe C_0. Então*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\log\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}=\inf_{t>0}\frac{\log\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}}{t}=\gamma_0$$

e para cada $\gamma>\gamma_0$, existe uma constante $M\geq 1$ tal que

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}<Me^{\gamma t},\quad \forall t\geq 0.$$

Demonstração: Ver [14]. □

Definição 2.28. *S é dito ser um semigrupo de contrações de classe C_0 quando $\gamma_0<0$ e*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)}\leq 1,\quad \forall t\geq 0.$$

Definição 2.29. *O gerador infinitesimal de S é o operador linear A definido por*

$$D(A)=\left\{x\in X;\lim_{h\to 0}\frac{S(h)x-x}{h}\text{ existe em } X\right\},$$

$$Ax=\lim_{h\to 0}\frac{S(h)x-x}{h},\quad \forall x\in D(A).$$

Proposição 2.21. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S.*

(i) *Se $x\in D(A)$, então $S(t)x\in D(A)\,\forall t\geq 0$ e*

$$\frac{d}{dt}S(t)x=AS(t)x=S(t)Ax;\tag{2.19}$$

(ii) *Se $x\in D(A)$, então*

$$S(t)x-S(s)x=\int_s^t AS(\tau)xd\tau=\int_s^t S(\tau)Axd\tau;\tag{2.20}$$

(iii) *Se $x\in X$, então $\int_0^t S(\tau)xd\tau\in D(A)$ e*

$$S(t)x-x=A\int_0^t S(\tau)xd\tau.\tag{2.21}$$

Demonstração: Seja $t > 0$. Temos para todo $h > 0$ que

$$\frac{S(t+h) - S(t)}{h} x = A_h S(t)x = S(t)A_h x.$$

Se $x \in D(A)$, então o membro da direita da igualdade anterior tem um limite quando $h \to 0$. Note que o mesmo acontece para os outros dois membros. Logo, $S(t)x \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt} S(t)x = AS(t)x = S(t)Ax. \tag{2.22}$$

Por outro lado, para $0 < h < t$ temos que

$$\frac{S(t-h) - S(t)}{-h} = S(t-h)A_h x = S(t-h)(A_h x - Ax) + S(t-h)Ax.$$

Pela Proposição 2.19, segue que $\|S(t-h)\|_{\mathcal{L}(X)}$ é limitado para $0 < h < t$ e, como $x \in D(A)$, segue que o primeiro termo do membro da direita da igualdade anterior tende a zero quando $h \to 0$. Além disto, pela continuidade forte de S (Corolário 2.5), resulta que $S(t-h)Ax \to S(t)Ax$. Desta forma,

$$\frac{d^-}{dt} S(t)x = S(t)Ax. \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23) obtemos (i). Integrando (2.19) de s a t obtemos (2.20), o que demonstra (ii). Para demonstrarmos (iii) basta observarmos que, $\forall x \in X$,

$$\begin{aligned} A_h \int_0^t S(\tau)x d\tau &= \frac{1}{h}\int_0^t (S(h) - I)S(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^t S(\tau)x d\tau \\ &= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)x d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)x d\tau \end{aligned} \tag{2.24}$$

e que, quando $h \to 0$, o membro da direita desta igualdade tende a $S(t)x - x$, pela continuidade forte de S. $\square$

Proposição 2.22. **(i)** *O gerador infinitesimal de um semigrupo de classe C_0 é um operador linear fechado e seu domínio é denso em X.*

(ii) *Um operador linear A, fechado e com domínio denso em X, é o gerador infinitesimal de, no máximo, um semigrupo de classe C_0.*

Demonstração: Ver [14]. □

Teorema 2.40. *Seja S um semigrupo de classe C_0 com gerador infinitesimal A. Então, definindo $S^* : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X^*)$ por $S^*(t) = S(t)^*$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$, S^* é um semigrupo de classe C_0 e A^* seu gerador infinitesimal.*

Demonstração: Ver [14]. □

Corolário 2.6. *Um semigrupo S, de classe C_0, é auto-adjunto ($S(t)^* = S(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^+$) se, e somente se, A é um operador auto-adjunto ($A^* = A$).*

Demonstração: Ver [14]. □

Definição 2.30. **(i)** *Dizemos que o operador linear $A : X \to X$ é dissipativo se, para alguma dualidade, j,*

$$Re\,\langle Ax, j(x)\rangle \leq 0, \qquad \forall x \in D(A);$$

(ii) *Dizemos que A é m-dissipativo se for dissipativo e $Im(\lambda - A) = X$ para algum $\lambda > 0$;*

(iii) *Dizemos que A é acretivo (m-acretivo) se $-A$ for dissipativo (m-dissipativo).*

Proposição 2.23. *Se A é dissipativo, então*

$$\|(\lambda - A)x\| \geq \lambda\|x\| \quad \forall \lambda > 0 \text{ e } \forall x \in D(A). \tag{2.25}$$

Demonstração: Se $\lambda > 0$ e A é dissipativo, então de

$$\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle = \lambda\|x\|^2 - \langle Ax, j(x)\rangle$$

resulta que

$$\begin{aligned} \lambda\|x\|^2 &\leq Re\,\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle \leq |\,\langle(\lambda - A)x, j(x)\rangle\,| \\ &\leq \|(\lambda - A)x\|\|j(x)\| = \|(\lambda - A)x\|\|x\|, \quad \forall\lambda > 0 \text{ e } \forall x \in D(A), \end{aligned} \tag{2.26}$$

donde obtemos (2.25). □

Proposição 2.24. *Se A é m-dissipativo e $Im(\lambda_0 - A) = X$, $\lambda_0 > 0$, então*

(i) $\lambda_0 \in \rho(A)$ *e A é fechado;*

(ii) $(0, \infty) \subset \rho(A)$*;*

(iii) $Im(\lambda - A) = X,\ \forall\lambda > 0.$

Demonstração: Ver [14]. □

Definição 2.31. *Dizemos que uma aplicação $S : \mathbb{R} \to \mathcal{L}(X)$ é um grupo de operadores linerares limitados de X se*

(i) $S(0) = I$*, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;*

(ii) $S(t + s) = S(t)S(s),\ \forall t, s \in \mathbb{R}$*;*

Dizemos que S é um grupo de classe C_0 se

(iii) $\lim_{t\to 0} \|(S(t) - I)x\| = 0,\ \forall x \in X.$

Definição 2.32. *O gerador infinitesimal de S é definido por*

$$D(A) = \left\{x \in X; \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h} \text{ existe}\right\},$$

$$Ax = \lim_{h\to 0} \frac{S(h)x - x}{h}, \quad \forall x \in D(A).$$

Proposição 2.25. *A é gerador infinitesimal de um grupo de operadores lineares limitados de classe C_0 se, e somente se, $+A$ e $-A$ são geradores infinitesimais de semigrupos de classe C_0.*

Demonstração: Ver [14]. $\square$

Proposição 2.26. *Seja S um semigrupo de classe C_0. Se, para algum $t_0 > 0$, $S(t_0)^{-1}$ existe e $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t)^{-1}$ existe e $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração: Como $S(t_0)^{-1}$ existe e $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então $S(t_0)$ é injetiva e sobrejetiva. Do fato de $S(t_0)$ ser injetiva, resulta que $S(nt_0) = S(t_0)^n$ também é injetiva. Seja $t \geq 0$, n tal que $nt_0 > t$ e $S(t)x = 0$. Então, $S(nt_0)x = S(nt_0 - t)S(t)x = 0$, e portanto, $x = 0$. Logo, $S(t)$ é injetiva para todo $t \geq 0$. Sendo $S(t_0)$ sobrejetiva, i.e., $Im(S(t_0)) = X$, segue que $Im(S(nt_0)) = Im(S(t_0)^n) = X$. Se $t \geq 0$ e n é tal que $nt_0 > t$, de $S(nt_0) = S(t)S(nt_0 - t)$ decorre que $X = Im(S(nt_0)) \subset Im(S(t))$. Logo, $S(t)$ é sobrejetiva para todo $t \geq 0$. Portanto, pelo Teorema do Operador Inverso de Banach, resulta que $S(t)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \geq 0$. $\square$

Proposição 2.27. *Seja S um semigrupo de classe C_0 e A o gerador infinitesimal de S. Se, para algum $t_0 > 0$, $S(t_0)^{-1}$ existe e $S(t_0)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, então A é o gerador infinitesimal de um grupo de classe C_0.*

Demonstração: Ver [14]. $\square$

Definição 2.33. *Um grupo S de operadores lineares limitados de um espaço de Hilbert é dito grupo unitário se $S(t)^* = S(t)^{-1}$, $\forall t \geq 0$.*

Note que $\|S(t)x\| = \|x\|$ para todo grupo unitário S, pois

$$\|S(t)x\|^2 = (S(t)x, S(t)x) = (S(t)^*S(t)x, x) = (S(t)^{-1}S(t)x, x) = (x, x) = \|x\|^2.$$

Teorema 2.41 (Teorema de Stone)**.** *Um operador linear A é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, $A^* = -A$.*

Demonstração: Seja A gerador infinitesimal de um grupo unitário S de classe C_0. Pela Proposição 2.25, A é gerador infinitesimal do semigrupo S_+ e $-A$ gerador infinitesimal do semigrupo S_-. Pelo Teorema 2.40, A^* é o gerador infinitesimal do semigrupo S_+^*. Então, de $S_+^*(h) = S_+(h)^* = S(h)^* = S(h)^{-1} = S(-h) = S_-(h)$, vem que

$$\frac{S_+^*(h) - I}{h} = \frac{S_-(h) - I}{h}$$

donde $D(A^*) = D(A)$ e $A^*x = -Ax$, $\forall x \in D(A)$. Logo, $A^* = A$. Para a recíproca, ver [14]. $\square$

Observação 2.8. *Note que $A^* = -A$ se, e somente se, iA é auto-adjunto pois se $A^* = -A$, então $(iA)^* = \bar{i}A^* = -i(-A) = iA$, i.e., iA é auto-adjunto e se iA é auto-adjunto, então $iA = (iA)^* = \bar{i}A^* = i(-A^*)$, i.e., $A^* = -A$. Logo, pelo Teorema de Stone, A gera um grupo unitário de classe C_0 se, e somente se, iA é auto-adjunto.*

Exemplo 2.6. *Seja A_1 o operador de $L^2(\mathbb{R})$ definido por*

$$\begin{cases} D(A_1) = H^2(\mathbb{R}) \\ A_1 u = i\Delta u, \quad \forall u \in D(A_1), \end{cases}$$

onde Δ é o laplaciano. Vamos mostrar que $-iA_1$ é auto-adjunto donde resultará que iA_1 é auto-adjunto e, portanto, que A_1 é o gerador infinitesimal de um grupo unitário de classe C_0, pela Observação 2.8. Com efeito, pela definição de A_1, $-iA_1$ é densamente definido e, $\forall u, v \in D(A_1)$,

$$(-iA_1 u, v) = (\Delta u, v) = (u, \Delta v) = (u, -iA_1 v),$$

ou seja, $-iA_1$ é simétrico. Além disto, $-iA_1$ é dissipativo pois

$$(-iA_1 u, u) = (\Delta u, u) = -(\nabla u, \nabla u) = -\|\nabla u\|,$$

onde $Du = \nabla u$. Desta forma, pela Proposição 2.23, segue que $\forall u \in D(A_1)$, $\|(1-(-iA_1))u\| \geq \|u\|$, donde $I - (-iA_1)$ é injetivo e, portanto, inversível e, se $(I - (-iA_1))u = v$, então $\|(1 - (-iA_1))^{-1}v\| = \|u\| \leq \|v\|$, ou seja, $(1 - (-iA_1))^{-1}$ é um operador limitado. Assim,

$1 \in \rho(-iA_1)$. *Além disto, a equação* $iA_1u + u = v$ *tem uma solução em* $H^2(\mathbb{R})$, $\forall v \in L^2(\mathbb{R})$ *(Ver Apêndice da Referência [14]) e, portanto,* $Im(1-(-iA_1)) = L^2(\mathbb{R})$. *Pelo Teorema 2.23, resulta que* $-iA_1$ *é auto-adjunto.*

Seja A um operador linear de X e consideremos, para cada $x \in X$ o problema de Cauchy abstrato,

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = Au(t), & t > 0 \\ u(0) = x. \end{cases} \tag{2.27}$$

Por solução de (2.27) entende-se como sendo toda função $u : \mathbb{R}^+ \to X$, contínua para $t \geq 0$, continuamente diferenciável para $t > 0$, tal que $u(t) \in D(A)$ para todo $t > 0$ e que satisfaz (2.27).

Teorema 2.42. *Se* A *é o gerador infinitesimal de um semigrupo de classe* C_0 *então, para cada* $x \in D(A)$, *(2.27) tem uma única solução, continuamente diferenciável em todo* $t \geq 0$.

Demonstração: A existência e a diferenciabilidade da solução resultam da Proposição 2.21. Seja A gerador do semigrupo de classe C_0, S, e $u(t)$ uma solução de (2.27). Se $0 \leq s \leq t < \infty$ temos, pelo item (i) da Proposição 2.21, que

$$\frac{d}{ds}(S(t-s)u(s)) = S(t-s)Au(s) - S(t-s)Au(s) = 0,$$

donde resulta que $S(t-s)u(s)$ é independente de s. Para $s = 0$, $S(t-s)u(s)$ toma o valor $S(t)x$ e para $s = t$, o valor $u(t)$. Portanto, $u(t) = S(t)x$, $\forall t \geq 0$. $\square$

Observação 2.9. *Pelo Teorema 2.42 e Exemplo 2.6, resulta que a equação de Schrödinger linear*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = i\Delta u(t) \\ u(0) = x \end{cases}$$

com $x \in H^2(\mathbb{R})$, *admite uma única solução, continuamente diferenciável em todo* $t \geq 0$.

Capítulo 3

Boa Colocação e Existência de Ondas Estacionárias para a Equação de Schrödinger Não-Linear

Neste capítulo, nosso primeiro objetivo é fazer um estudo sobre existência, unicidade, dependência contínua e persistência com relação ao dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ da equação de Schrödinger não-linear

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + |u|^{\alpha} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\alpha \geq 1$. O objetivo descrito acima referem-nos a problemas de boa colocação.

No que segue, usaremos as notações $\|\cdot\|_{L^2} = \|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{H^k} = \|\cdot\|_k$ em virtude de praticidade.

Primeiramente, note que do Teorema 2.42 e do Exemplo 2.6, temos a existência e unicidade da equação linear de Schrödinger

$$\begin{cases} iv_t + v_{xx} = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ v(x,0) = v_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases} \tag{3.2}$$

para $v_0 \in H^2(\mathbb{R})$, onde $A = i\Delta$ é o gerador infinitesimal associado.

Devido as propriedades de A, faremos um pequeno abuso e denotaremos por $e^{it\Delta} = S(t)$ o grupo unitário associado a tal equação. Observe que o fato de $e^{it\Delta} = S(t)$ ser grupo unitário decorre da Proposição 2.25.

Formalmente, se u é solução para (3.1) definida em $[0,T]$ e assume valores num espaço vetorial normado X, podemos usar o príncipio de Duhamel e concluir que u satisfaz

$$u(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt', \tag{3.3}$$

onde $e^{it\Delta} = S(t)$ é o grupo unitário associado a equação linear de Schrödinger (3.2).

Definição 3.1. **(1)** *Um problema é localmente bem posto se existe $0 < T < \infty$ tal que a boa colocação ocorre no intervalo de tempo finito $[0,T]$;*

(2) *Um problema é globalmente bem posto se a boa colocação ocorre no intervalo de tempo finito $[0,T]$, $\forall T > 0$.*

Observação 3.1. *Se $u \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R}))\bigcap C^1([-T,T] : L^2(\mathbb{R}))$, temos que se u resolve a equação (3.3), então u resolve a equação (3.1), isto é, vale a recíproca.*

De acordo com nossa definição de boa colocação, devemos ter a persistência com respeito ao dado, logo é esperado que $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ para que tenhamos $u \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R}))\bigcap C^1([-T,T] : L^2(\mathbb{R}))$.

Note que se $u \in H^1(\mathbb{R})$, então não é possível resolver a equação (3.1), pois não é possível colocar $u(t)$ em um espaço vetorial normado para quase todo $t \in [0,T]$, uma vez que não faz sentido $u_{xx}(t)$ (exceto no sentido das distribuições). Como então resolver a equação (3.1) para dados mais fracos ? Vamos dar sentido a tal situação resolvendo a equação (3.3). Diremos que a equação (3.1) está bem colocada (localmente ou globalmente) se u satisfaz a equação integral (3.3). Mais precisamente,

Definição 3.2. *Diremos que a equação (3.3) está localmente (globalmente) bem colocada em* *um espaço de Hilbert X, se para algum $T > 0$ ($\forall T > 0$) a função*

$$\begin{aligned} F \ &: \ X \to C([-T,T]:X) \\ &u_0 \mapsto F(u_0) = u \end{aligned}$$

onde $u = u(t)$ representa a solução de (3.3), é contínua. Portanto, as noções de existência, unicidade, persistência e dependência contínua estão incluídas.

Antes de demonstrarmos a boa coloção para o problema não-linear (3.1), precisamos de alguns resultados que relacionam o grupo associado ao problema linear (3.2), $S(t) = e^{it\Delta}$, à equação (3.3) através de desigualdades que serão extremamente importantes para resolver o problema não-linear.

Teorema 3.1 (Estimativas de Strichartz). *O grupo $\left\{e^{it\Delta}\right\}$, onde $e^{it\Delta} = S(t)$ é o grupo unitário associado a equação linear de Schrödinger, satisfaz:*

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|e^{it\Delta} f\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\|f\|_{L^2},$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\int_{\mathbb{R}} e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot,t')dt'\right\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot,t)\|_{L^{p'}}^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}}$$

e

$$\left\|\int_{\mathbb{R}} e^{it\Delta} g(\cdot,t)dt\right\|_{L^2} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} \|g(\cdot,t)\|_{L^{p'}}^{q'} dt\right)^{\frac{1}{q'}}$$

com

$$2 \leq p \leq \infty \qquad e \qquad \frac{2}{q} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \ \textit{(par admissível)} \tag{3.4}$$

onde $c = c(p)$ é uma constante que depende somente de p. Aqui, usamos a notação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Demonstração: Ver Capítulo 4 da Referência [19]. $\square$

Corolário 3.1. *Se* $(p_0, q_0), (p_1, q_1) \in \mathbb{R}^2$ *são pares admissíveis, então* $\forall\, T > 0$ *temos*

$$\left(\int_0^T \left\| \int_0^t e^{i(t-t')\Delta} g(\cdot, t')dt' \right\|_{L^{p_1}}^{q_1} dt\right)^{\frac{1}{q_1}} \leq c\left(\int_0^T \|g(\cdot,t)\|_{L^{p_0'}}^{q_0'} dt\right)^{\frac{1}{q_0'}}$$

Demonstração: Ver Capítulo 4 da Referência [19]. □

Observação 3.2. *Note que no teorema anterior as estimativas de Strichartz são deduzidas em toda a reta* $\mathbb{R}$. *E portanto, vale ressaltar que também é possível obter tais estimativas em intervalos finitos* $[-t, t]$, $t > 0$, *(Ver [8]), uma vez que usaremos tal resultado no próximo teorema.*

Teorema 3.2 (Teoria Local em H^1)**.** *Se* $1 \leq \alpha < \infty$, *então para todo* $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ *existem* $T = T(\|u_0\|_1, \alpha) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (3.3) no intervalo temporal* $[-T, T]$ *com*

$$u \in C([-T,T] : H^1(\mathbb{R})) \bigcap L^r([-T,T] : W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}))$$

onde $r = \frac{4(\alpha+2)}{\alpha}$. *Além disso, para todo* $T' < T$, *existe uma vizinhança* V *de* u_0 *em* $H^1(\mathbb{R})$ *tal que a função*

$$F : V \to C([-T',T'] : H^1(\mathbb{R})) \bigcap L^r([-T',T'] : W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}))$$

é lipschitziana.

Demonstração: Denote $U = C([-T,T] : H^1(\mathbb{R})) \cap L^r([-T,T] : W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}))$. Definamos

$$E(T,a) = \left\{ v \in U;\ \sup_{[-T,T]} \|v(t)\|_1 \leq a \quad \text{e} \quad \left(\int_{-T}^T (\|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r + \|\nabla v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r)dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq a \right\}$$

onde T e a são constantes positivas e $E(T,a)$ munido da norma

$$|||v|||_T \equiv \sup_{[-T,T]} \|v(t)\|_1 + \left(\int_{-T}^T (\|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r + \|\nabla v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r)dt\right)^{\frac{1}{r}}$$

é um espaço métrico completo.

Consideraremos, sem perda de generalidade, $t \geq 0$ e provaremos que existem $T > 0$ e $a > 0$ tal que o operador $\Phi : E(T,a) \to E(T,a)$ dado por

$$\Phi_{u_0}(u)(t) = \Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'$$

está bem definido e que Φ é uma contração. Observe que $(r, \alpha+2)$ é um par admissível, pois $\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha+2} = \frac{2}{r}$.

Estimemos $\sup_{[0,T]} \|v(t)\|_1$. Com efeito, primeiramente note que

$$\sup_{[0,T]} \|v(t)\|_1 \leq \sup_{[0,T]} \|v(t)\| + \sup_{[0,T]} \|\nabla v(t)\|.$$

Como $e^{it\Delta}$ é um operador limitado e isométrico em $L^2(\mathbb{R})$, então

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\| &= \|e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'\| \\
&\leq \|e^{it\Delta}u_0\| + \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'\| \\
&= \|u_0\| + \|\int_0^t e^{-it'\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'\|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t)\| &= \|e^{it\Delta}\nabla u_0 + i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}\nabla(|u|^\alpha u)(t')dt'\| \\
&\leq \|\nabla u_0\| + \|\int_0^t e^{-it'\Delta}\nabla(|u|^\alpha u)(t')dt'\|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Strichartz obtida no Teorema 3.1, segue que

$$\|\Phi(u)(t)\| \leq \|u_0\| + c\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha u)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \tag{3.5}$$

e

$$\|\nabla\Phi(u)(t)\| \leq \|\nabla u_0\| + c\left(\int_0^T \|\nabla(|u|^\alpha u)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \tag{3.6}$$

onde $c = c(\alpha)$. Observe que $(\alpha+2)' = \frac{(\alpha+2)}{(\alpha+1)}$, e portanto,

$$\||u|^\alpha u\|_{L^{(\alpha+2)'}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{(\alpha+1)(\alpha+2)'}dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+2)'}} = \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{(\alpha+2)}dx\right)^{\frac{(\alpha+1)}{(\alpha+2)}} = \|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+1}.$$

Logo, resulta da desigualdade (3.5) e do Teorema 2.11 que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\| &\leq \|u_0\| + c\left(\int_0^T \|(u)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{(\alpha+1)r'}dt\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq \|u_0\| + c\left(\int_0^T \|(u)(t)\|_{1}^{(\alpha+1)r'}dt\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq \|u_0\| + c\sup_{[0,T]}\|u(t)\|_1^{\alpha+1}\left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{r'}}\\
&\leq \|u_0\| + ca^{\alpha+1}T^{\frac{1}{r'}}. \qquad (3.7)
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo

$$\begin{aligned}
|\nabla(|u|^\alpha u)| &\leq \frac{(\alpha+2)}{2}|u|^\alpha|\nabla u| + \frac{(\alpha-2)}{2}|u|^\alpha|\nabla u|\\
&\leq \alpha|u|^\alpha|\nabla u|,
\end{aligned}$$

segue da desigualdade (3.6) que

$$\|\nabla\Phi(u)(t)\| \leq \|\nabla u_0\| + c\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha|\nabla u|)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'}dt\right)^{\frac{1}{r'}}. \qquad (3.8)$$

Utilizando a desigualdade de Hölder com $s = (\alpha+1)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\||u|^\alpha|\nabla u|\|_{L^{(\alpha+2)'}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha(\alpha+2)'}|\nabla u|^{(\alpha+2)'}dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+2)'}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{\alpha(\alpha+2)'\frac{(\alpha+1)}{\alpha}}dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+2)'}\frac{\alpha}{(\alpha+1)}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^{(\alpha+2)'(\alpha+1)}dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+2)'(\alpha+1)}}\\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |u|^{(\alpha+2)}dx\right)^{\frac{\alpha}{(\alpha+2)}}\left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^{(\alpha+2)}dx\right)^{\frac{1}{(\alpha+2)}}\\
&= \|u\|_{L^{\alpha+2}}^\alpha\|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}}.
\end{aligned}$$

Desta forma, pela desigualdade (3.8) e pelo Teorema 2.11, resulta que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t)\| &\leq \|\nabla u_0\| + c\left(\int_0^T \|u(t)\|^{\alpha r'}_{L^{(\alpha+2)}}\|\nabla u(t)\|^{r'}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \|\nabla u_0\| + c\left(\int_0^T \|u(t)\|^{\alpha r'}_{1}\|\nabla u(t)\|^{r'}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \|\nabla u_0\| + c\sup_{[0,T]}\|u(t)\|^{\alpha}_{1}\left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|^{r'}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= \|\nabla u_0\| + ca^{\alpha}\left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|^{r'}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'}}. \qquad (3.9)
\end{aligned}
$$

Utilizando a desigualdade de Hölder com $s = r-1$, temos que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|^{r'}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} &\leq \left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|^{r'(r-1)}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r'(r-1)}}\left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{r'(r-1)'}} \\
&\leq \left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|^{r}_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} T^{\frac{1}{l}} \\
&\leq aT^{\frac{1}{l}}
\end{aligned}
$$

onde $l = r'(r-1)' = \frac{r}{r-2}$. Portanto, da desigualdade anterior e da desigualdade (3.9), resulta que

$$
\|\nabla\Phi(u)(t)\| \leq \|\nabla u_0\| + ca^{\alpha+1}T^{\frac{1}{l}}. \qquad (3.10)
$$

Somando as desigualdades (3.7) e (3.10), obtemos que

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)\|_1 &\leq \|u_0\| + ca^{\alpha+1}T^{\frac{1}{r'}} + \|\nabla u_0\| + ca^{\alpha+1}T^{\frac{1}{l}} \\
&= \|u_0\|_1 + ca^{\alpha+1}(T^{\frac{1}{r'}} + T^{\frac{1}{l}}).
\end{aligned}
$$

Fixemos a tal que $\|u_0\|_1 = \frac{a}{2}$, e escolhemos $T_1 > 0$ tal que

$$
ca^{\alpha+1}(T_1^{\frac{1}{r'}} + T_1^{\frac{1}{l}}) < \frac{a}{2}.
$$

Logo,

$$
\sup_{[0,T_1]}\|\Phi(u)(t)\|_1 < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a. \qquad (3.11)
$$

Estimemos agora $\left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}} + \|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}})dt\right)^{\frac{1}{r}}$. Com efeito, primeiramente observe que

$$\begin{aligned}
& \left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}} + \|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}})dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
= & \left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt + \int_0^T \|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
\leq & \; c_1\left[\left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} + \left(\int_0^T \|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}})dt\right)^{\frac{1}{r}}\right]
\end{aligned} \tag{3.12}$$

onde $c_1 = c_1(r)$. Utilizando o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1, segue que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_0^T \|e^{it\Delta}u_0 + i\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq c_1\left(\int_0^T \|e^{it\Delta}u_0\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\quad + c_1\left(\int_0^T \|\int_0^t e^{i(t-t')\Delta}(|u|^\alpha u)(t')dt'\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq c_2\|u_0\| + c_2\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha u)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)'}}dt\right)^{\frac{1}{r'}}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

e

$$\left(\int_0^T(\|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2\|\nabla u_0\| + c_2\left(\int_0^T \|\nabla(|u|^\alpha u)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)'}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \tag{3.14}$$

onde $c_2 = c_2(\alpha, r)$. Fazendo os mesmos processos feitos anteriormente, obtemos das desigualdades (3.13) e (3.14) que

$$\left(\int_0^T(\|\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2\|u_0\| + c_2a^{\alpha+1}T^{\frac{1}{r'}}$$

e

$$\left(\int_0^T(\|\nabla\Phi(u)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2\|\nabla u_0\| + c_2a^{\alpha+1}T^{\frac{1}{l}}.$$

Somando as duas desigualdades acima e utilizando a desigualdade (3.12), obtemos que

$$\left(\int_0^T (\|\Phi(u)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r + \|\nabla\Phi(u)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r)dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2\|u_0\|_1 + c_2 a^{\alpha+1}(T^{\frac{1}{r'}} + T^{\frac{1}{l}}).$$

Fixemos $a = 2c_2\|u_0\|_1$ e escolhemos $T_2 > 0$ tal que

$$c_2 a^{\alpha+1}(T_2^{\frac{1}{r'}} + T_2^{\frac{1}{l}}) < \frac{a}{2}.$$

Logo,

$$\left(\int_0^{T_2} (\|\Phi(u)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r + \|\nabla\Phi(u)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r)dt\right)^{\frac{1}{r}} < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Escolha $T = \min\{T_1, T_2\}$ e $a > 0$ de tal forma que se $c_2 > 1$, então $a = 2c_2\|u_0\|_1$, se $c_2 < 1$, então $a = 2\|u_0\|_1$. Assim, $\Phi(E(T,a)) \subset E(T,a)$.

Provaremos agora que existe uma única solução u da equação (3.3). Para isso demonstraremos que $\Phi : E(T,a) \to E(T,a)$ é uma contração. Estimemos o $\sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_1$. Para tal estimativa vamos analisar $\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|$ e $\|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\|$. Com efeito, fazendo o mesmo processo anterior, obtemos que

$$\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\| \leq c\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \tag{3.15}$$

e

$$\|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\| \leq c\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha \nabla u - |v|^\alpha \nabla v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}}. \tag{3.16}$$

Observe que da desigualdade do valor médio, segue que

$$||u|^\alpha u - |v|^\alpha v| \leq c(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u - v|$$

e portanto, usando a mesma desigualdade de Hölder anterior com $s = \alpha + 1$, temos

$$\begin{aligned}
\||u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{(\alpha+2)'}} &\leq c\|(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u-v|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \\
&\leq c\||u|^\alpha |u-v|\|_{L^{(\alpha+2)'}} + c\||v|^\alpha |u-v|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \\
&\leq c\left[\|u\|^\alpha_{L^{(\alpha+2)}}\|u-v\|_{L^{(\alpha+2)}} + \|v\|^\alpha_{L^{(\alpha+2)}}\|u-v\|_{L^{(\alpha+2)}}\right]. \quad (3.17)
\end{aligned}$$

Logo, das desigualdades (3.17) e (3.15) e do Teorema 2.11, resulta que

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\| \\
\leq\ & c\left(\int_0^T (\|u(t)\|^\alpha_{L^{(\alpha+2)}}\|(u-v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)}} + \|v(t)\|^\alpha_{L^{(\alpha+2)}}\|(u-v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)}})^{r'}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
\leq\ & c_2\left(\int_0^T \|u(t)\|^{\alpha r'}_{L^{(\alpha+2)}}\|(u-v)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} + c_2\left(\int_0^T \|v(t)\|^{\alpha r'}_{L^{(\alpha+2)}}\|(u-v)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)}}dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
\leq\ & c_2\left(\int_0^T \|u(t)\|^{\alpha r'}_1\|(u-v)(t)\|^{r'}_1 dt\right)^{\frac{1}{r'}} + c_2\left(\int_0^T \|v(t)\|^{\alpha r'}_1\|(u-v)(t)\|^{r'}_1 dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
\leq\ & c_2\sup_{[0,T]}\|u(t)\|^\alpha_1 \sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_1\left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{r'}} + c_2\sup_{[0,T]}\|v(t)\|^\alpha_1 \sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_1\left(\int_0^T dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
\leq\ & c_2 a^\alpha T^{\frac{1}{r'}}\sup_{[0,T]}\|(u-v)(t)\|_1 \\
\leq\ & c_2 a^\alpha T^{\frac{1}{r'}}|||u-v|||_T. \quad (3.18)
\end{aligned}$$

Observe também que, utilizando a desigualdade do valor médio,

$$\begin{aligned}
||u|^\alpha\nabla u - |v|^\alpha\nabla v| &\leq ||u|^\alpha\nabla u - |v|^\alpha\nabla u| + ||v|^\alpha\nabla u - |v|^\alpha\nabla v| \\
&\leq ||u|^{\alpha-1}u - |v|^{\alpha-1}v||\nabla u| + |v|^\alpha|\nabla u - \nabla v| \\
&\leq c(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})|u-v||\nabla u| + |v|^\alpha|\nabla u - \nabla v|.
\end{aligned}$$

Desta forma, temos que

$$\begin{aligned}
\||u|^\alpha\nabla u - |v|^\alpha\nabla v\|_{L^{(\alpha+2)'}} &\leq c\|(|u|^{\alpha-1} + |v|^{\alpha-1})|u-v||\nabla u| + |v|^\alpha|\nabla u - \nabla v|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \\
&\leq c\||u|^{\alpha-1}|u-v||\nabla u|\|_{L^{(\alpha+2)'}} + c\||v|^{\alpha-1}|u-v||\nabla u|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \\
&\quad + c\||v|^\alpha|\nabla u - \nabla v|\|_{L^{(\alpha+2)'}}. \quad (3.19)
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder com $s = \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$, e com $s = 2$, temos

$$\begin{aligned}
\||u|^{\alpha-1}|u-v||\nabla u|\|_{L^{(\alpha+2)'}} &\leq \|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha-1} \left(\int_{\mathbb{R}} |u-v|^{(\alpha+2)} dx \right)^{\frac{1}{(\alpha+2)}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^{(\alpha+2)} dx \right)^{\frac{1}{(\alpha+2)}} \\
&= \|u\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha-1} \|u-v\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}}. \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\||v|^{\alpha-1}|u-v||\nabla u|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \leq \|v\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha-1} \|u-v\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u\|_{L^{\alpha+2}}. \qquad (3.21)$$

Também temos que fazendo o mesmo processo feito anteriormente

$$\||v|^{\alpha}|\nabla u - \nabla v|\|_{L^{(\alpha+2)'}} \leq \|v\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha} \|\nabla u - \nabla v\|_{L^{\alpha+2}}. \qquad (3.22)$$

Assim, das desigualdades (3.16), (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22), resulta que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\| &\leq c_2 \left(\int_0^T \left(\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha-1} \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\quad + c_2 \left(\int_0^T \left(\|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha-1} \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\quad + c_2 \left(\int_0^T \left(\|v(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha} \|(\nabla u - \nabla v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}}.
\end{aligned}$$

Logo, utilizando o Teorema 2.11, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\| &\leq c_2 \left(\int_0^T \left(\|u(t)\|_1^{\alpha-1} \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\quad + c_2 \left(\int_0^T \left(\|v(t)\|_1^{\alpha-1} \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\quad + c_2 \left(\int_0^T \left(\|v(t)\|_1^{\alpha} \|(\nabla u - \nabla v)(t)\|_{L^{\alpha+2}} \right)^{r'} dt \right)^{\frac{1}{r'}},
\end{aligned}$$

e consequentemente, utilizando a desigualdade de Hölder com $s = r-1$ e $s = r-2$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\| &\leq c_2 \sup_{[0,T]} \|u(t)\|_1^{\alpha-1} \left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^T \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^l dt\right)^{\frac{1}{l}} \\
&\quad + c_2 \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_1^{\alpha-1} \left(\int_0^T \|\nabla u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^T \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^l dt\right)^{\frac{1}{l}} \\
&\quad + c_2 \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_1^{\alpha} \left(\int_0^T \|(\nabla u - \nabla v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq c_2 a^\alpha \left(\int_0^T \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} T^{\frac{1}{h}} \\
&\quad + c_2 a^\alpha \left(\int_0^T \|(u-v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} T^{\frac{1}{h}} \\
&\quad + c_2 a^\alpha \left(\int_0^T \|(\nabla u - \nabla v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} T^{\frac{1}{l}} \\
&\leq c_2 a^\alpha \left(T^{\frac{1}{l}} + T^{\frac{1}{h}}\right) |||u-v|||_T \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

onde $l = \frac{r}{r-2}$ e $h = \frac{r}{r-3}$. Portanto, somando as desigualdades (3.18) e (3.23),

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T]} \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_1 &\leq c_2 a^\alpha T^{\frac{1}{r'}} |||u-v|||_T + c_2 a^\alpha \left(T^{\frac{1}{l}} + T^{\frac{1}{h}}\right) |||u-v|||_T \\
&\leq c_2 a^\alpha \left(T^{\frac{1}{l}} + T^{\frac{1}{r'}} + T^{\frac{1}{h}}\right) |||u-v|||_T. \qquad (3.24)
\end{aligned}$$

Estimemos agora $\left(\int_0^T (\|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r + \|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r)\, dt\right)^{\frac{1}{r}}$. Com efeito, utilizando o Teorema 3.1 e o Corolário 3.1, chegamos que

$$\left(\int_0^T \|\Phi(u)(t) - \Phi(v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2 \left(\int_0^T \|(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}}$$

e

$$\left(\int_0^T \|\nabla\Phi(u)(t) - \nabla\Phi(v)(t)\|_{L^{\alpha+2}}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq c_2 \left(\int_0^T \|(|u|^\alpha \nabla u - |v|^\alpha \nabla v)(t)\|_{L^{(\alpha+2)'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \left(\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}+\|\nabla\Phi(u)(t)-\nabla\Phi(v)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}\right)dt\right)^{\frac{1}{r}}\\
\leq\ & c_2\left[\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha u-|v|^\alpha v)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)'}}dt\right)^{\frac{1}{r'}}+\left(\int_0^T \|(|u|^\alpha \nabla u-|v|^\alpha \nabla v)(t)\|^{r'}_{L^{(\alpha+2)'}}dt\right)^{\frac{1}{r'}}\right].
\end{aligned}$$

Fazendo os mesmos processos para estimar $\sup_{[0,T]}\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|_1$, obtemos que

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^T \left(\|\Phi(u)(t)-\Phi(v)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}+\|\nabla\Phi(u)(t)-\nabla\Phi(v)(t)\|^r_{L^{\alpha+2}}\right)dt\right)^{\frac{1}{r}}\\
\leq\ & c_2 a^\alpha\left(T^{\frac{1}{l}}+T^{\frac{1}{r'}}+T^{\frac{1}{h}}\right)|||u-v|||_T. \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Somando as desigualdades (3.24) e (3.25), concluímos que

$$|||\Phi(u)-\Phi(v)|||_T\leq c_2 a^\alpha\left(T^{\frac{1}{l}}+T^{\frac{1}{r'}}+T^{\frac{1}{h}}\right)|||u-v|||_T.$$

Escolhendo, $a>0$ e $T>0$ também de tal forma tal que

$$c_2 a^\alpha\left(T^{\frac{1}{l}}+T^{\frac{1}{r'}}+T^{\frac{1}{h}}\right)<\frac{1}{2}$$

obtemos o desejado, ou seja, que Φ é contração. Assim pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach temos a existência e unicidade (em $E(T,a)$) da solução para a equação integral (3.3).

Provemos agora a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial, ou seja, provaremos que $\forall\, T'<T$, existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1(\mathbb{R})$ tal que a função

$$F: V\to C([-T',T']:H^1(\mathbb{R}))\bigcap L^r([-T',T']:W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}))$$

é lipschitziana. Com efeito, sejam u,v soluções da equação integral (3.3) com dados iniciais u_0,v_0, então, conforme já vimos

$$|||u-v|||_T\leq c_2\|u_0-v_0\|_1+c_2 a^\alpha\left(T^{\frac{1}{l}}+T^{\frac{1}{r'}}+T^{\frac{1}{h}}\right)|||u-v|||_T,$$

ou seja,

$$\left(1 - c_2 a^{\alpha}\left(T^{\frac{1}{l}} + T^{\frac{1}{r'}} + T^{\frac{1}{h}}\right)\right) |||u - v|||_T \leq c_2 \|u_0 - v_0\|_1$$

Seja $T' < T$. Da escolha de T segue que

$$\left(1 - c_2 a^{\alpha}\left(T'^{\frac{1}{l}} + T'^{\frac{1}{r'}} + T'^{\frac{1}{h}}\right)\right) > 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |||u - v|||_{T'} &\leq \frac{c_2}{\left(1 - c_2 a^{\alpha}\left(T'^{\frac{1}{l}} + T'^{\frac{1}{r'}} + T'^{\frac{1}{h}}\right)\right)} \|u_0 - v_0\|_1 \\ &= \tilde{K} \|u_0 - v_0\|_1, \end{aligned}$$

o que prova o desejado, ou seja, F é lipschitziana.

Vejamos agora a unicidade de solução em todo o espaço U. Sejam $u, v \in U$ duas soluções da equação

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + |u|^{\alpha} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{3.26}$$

com mesmo dado inicial $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$. Mostraremos que $u \equiv v$. Com efeito, definamos

$$\theta(t) = \|u(t) - v(t)\|_1, \qquad t \in [0,T].$$

Notemos que θ é contínua e $\theta(0) = \|u(0) - v(0)\|_1 = 0$. Suponhamos que exista $t \in [0,T]$ tal que $\theta(t) > 0$. Desta forma, definamos $t_0 = \inf\{t \in [0,T] : \theta(t) > 0\}$. Pela definição de ínfimo e pela continuidade de θ, temos que $\theta(t_0) = 0$, isto é, $u(t_0) = v(t_0)$. Além disso, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (t_0, t_0 + \delta) \subset [0,T]$, então $\theta(t) > 0$. Definamos $\tilde{u}(x,t) = u(x, t + t_0)$ e $\tilde{v}(x,t) = v(x, t + t_0)$. Assim, $\tilde{u}, \tilde{v} \in C((0,\delta); H^1(\mathbb{R})) \cap L^r([0,\delta]; W^{1,\alpha+2}(\mathbb{R}))$ são soluções de

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + |u|^{\alpha} u = 0 & (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \\ u(x,t_0) = u_{t_0}(x) & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.27}$$

Procedendo de forma análogo a demonstração do Teorema 3.2, obtemos que

$$|||\tilde{v}-\tilde{u}|||_\delta \leq K(\delta)|||\tilde{v}-\tilde{u}|||_\delta$$

onde $|||v|||_\delta = \sup\limits_{[0,\delta]} \|v(t)\|_1 + \left(\int_0^\delta \|v(t)\|^r_{L^{\alpha+2}} + \|\nabla v(t)\|^r_{L^{\alpha+2}} dt \right)^{\frac{1}{8}}$. Escolhendo δ suficientemente pequeno tal que $K(\delta) < \frac{1}{2}$, obtemos que $|||\tilde{v}-\tilde{u}|||_\delta = 0$. Assim, $\theta(t) = \|\tilde{v}(t-t_0) - \tilde{u}(t-t_0)\|_1 = \|v(t) - u(t)\|_1 = 0$ se $t \in (t_0, t_0+\delta)$. Absurdo! Portanto, finalizamos a demonstração do Teorema. $\square$

Teorema 3.3 (Teoria Local em H^2)**.** *Se $1 \leq \alpha < \infty$, então para todo $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ existem $T = T(\|u_0\|_2, \alpha) > 0$ e uma única solução u da equação integral (3.3) no intervalo temporal $[-T, T]$ com*

$$u \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R})) \bigcap L^q([-T,T] : W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

para todo par admissível (q,p), ou seja, (q,p) satisfaz a igualdade (3.4). Além disso, para todo $T' < T$, existe uma vizinhança V de u_0 em $H^2(\mathbb{R})$ tal que a função

$$F : V \to C([-T',T'] : H^2(\mathbb{R})) \bigcap L^q([-T',T'] : W^{2,p}(\mathbb{R}))$$

é lipschitziana.

Demonstração: Ver Capítulo 5 da Referência [19]. $\square$

Corolário 3.2. *Se u é solução da equação integral (3.3) obtida no Teorema 3.3, então para todo par admissível (q,p) temos que*

$$u_t \in L^q([-T,T] : L^p(\mathbb{R})).$$

Mais ainda, u é a única solução da equação (3.1) no intervalo de tempo $[-T,T]$

Demonstração: Ver Capítulo 5 da Referência [19]. $\square$

Estudaremos agora as seguintes leis de conservação

$$\|u(\cdot,t)\| = \|u_0\|, \quad \forall t \in [0,T] \tag{3.28}$$

e

$$E(u(\cdot,t)) = E(u_0), \quad \forall t \in [0,T], \tag{3.29}$$

onde $u(t)$ é a solução obtida no Teorema 3.2 e $E(u(\cdot,t)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t)|^2 - \frac{2}{\alpha+2}|u(t)|^{\alpha+2}dx$ é a energia do sistema.

Teorema 3.4. *Considere (q,p) um par admissível. Seja $u \in C([-T,T] : H^1(\mathbb{R})) \bigcap L^q([-T,T] : W^{1,p}(\mathbb{R}))$ solução da equação integral (3.3) obtida no Teorema 3.2. Se $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ e $\alpha \geq 1$, então $u \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R}))$ e u satisfaz a equação (3.1) no sentido quase sempre.*

Demonstração: Ver Capítulo 5 da Referência [19]. □

Provemos que a igualdade (3.28) vale para a solução u obtida no Teorema 3.3. Com efeito, do Teorema 3.4, segue que u satisfaz a equação (3.1) no sentido quase sempre. Multiplicando a equação (3.1) por $\bar{u}$ e integrando sobre $\mathbb{R}$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} iu_t\bar{u}dx = \int_{\mathbb{R}} -u_{xx}\bar{u}dx + \int_{\mathbb{R}} -|u|^\alpha u\bar{u}dx. \tag{3.30}$$

Temos também da equação (3.1) que

$$-i\bar{u}_t u = -\bar{u}_{xx}u - |u|^\alpha \bar{u}u,$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} -i\bar{u}_t udx = \int_{\mathbb{R}} -\bar{u}_{xx}udx + \int_{\mathbb{R}} -|u|^\alpha \bar{u}udx. \tag{3.31}$$

Fazendo a diferença das igualdades (3.30) e (3.31), integrando por partes e usando o fato de que se $u \in H^2(\mathbb{R})$ então $u, u_x \to 0$ se $|x| \to \infty$, resulta que

$$i\int_{\mathbb{R}} u_t\bar{u} + \bar{u}_t udx = 0,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} u_t \bar{u} + \bar{u}_t u dx = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 = 0,$$

donde obtemos o desejado.

Observe que a igualdade (3.28) também é válida para a solução u obtida no Teorema 3.2. De fato, suponhamos que $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$ e $\alpha \in [1,4)$. Seja $(u_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^2(\mathbb{R})$ uma sucessão de funções tal que $\|u_0^k - u_0\|_1 \to 0$ quando $k \to \infty$. Pelos Teoremas 3.3 e 3.4 temos que para todo $T > 0$ existe $u^k \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R}))$, $k = 1, 2, \ldots$ solução da equação integral (3.3) e do problema (3.1) com valor inicial u_0^k. Além disso

$$\|u^k(t)\| = \|u_0^k\| \qquad \forall t \in [-T,T]. \tag{3.32}$$

Usando dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.2 tem-se

$$\sup_{[-T',T']} \left\|u^k(t) - u(t)\right\| \leq \sup_{[-T',T']} \left\|u^k(t) - u(t)\right\|_1 \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

com $T' < T$. Logo, após passagem ao limite na igualdade (3.32), obtemos para $t \in [-T,T]$ que

$$\|u(\cdot,t)\| = \|u_0\|$$

e portanto, a igualdade (3.28) está provada para $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$.

Vamos agora provar a igualdade (3.29) é válida para a solução u obtida no Teorema 3.3 . Multiplicando a equação (3.1) por $\bar{u}_t$ e integrando sobre $\mathbb{R}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}} i u_t \bar{u}_t dx = \int_{\mathbb{R}} -u_{xx} \bar{u}_t dx + \int_{\mathbb{R}} -|u|^\alpha u \bar{u}_t dx. \tag{3.33}$$

Note que também temos

$$-i\bar{u}_t = -\bar{u}_{xx} - |u|^\alpha \bar{u},$$

e portanto,

$$\int_{\mathbb{R}} -i\bar{u}_t u_t dx = \int_{\mathbb{R}} -\bar{u}_{xx} u_t dx + \int_{\mathbb{R}} -|u|^\alpha \bar{u} u_t dx. \tag{3.34}$$

Somando as igualdades (3.33) e (3.34), obtemos que

$$0 = \int_{\mathbb{R}} u_{xx}\bar{u}_t + \bar{u}_{xx} u_t dx + \int_{\mathbb{R}} |u|^\alpha u\bar{u}_t + |u|^\alpha \bar{u} u_t dx.$$

Desta forma,

$$0 = -\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\alpha+2} (u\bar{u})^{\frac{\alpha+2}{2}}\, dx.$$

Definamos

$$E(u(t)) := \frac{1}{2}\left[\int_{\mathbb{R}} |\nabla u(t)|^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\alpha+2} (u\bar{u})^{\frac{\alpha+2}{2}}\, dx.\right] \tag{3.35}$$

Logo,

$$0 = \frac{d}{dt} E(u(t)),$$

donde obtemos o desejado.

Como $H^2(\mathbb{R})$ é denso em $H^1(\mathbb{R})$ resulta que a igualdade (3.29) é válida para u obtida no Teorema 3.2. Com efeito, sejam $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, $\alpha \in [1,4)$ e $(u_0^k)_{k\in\mathbb{N}} \subset H^2(\mathbb{R})$ uma sucessão de funções tal que $\|u_0^k - u_0\|_1 \to 0$ quando $k \to \infty$. Pelos Teoremas 3.3 e 3.4 temos que para todo $T > 0$ existe $u^k \in C([-T,T] : H^2(\mathbb{R}))$, $k = 1, 2, ...$ solução da equação integral (3.3) e do problema (3.1) com valor inicial u_0^k. Além disto, da dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial, segue que

$$\sup_{[-T',T']} \left\|u^k(t) - u(t)\right\|_1 \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty$$

com $T' < T$. Desta forma, usando o Teorema 2.11, obtemos que $(u^k(t))$ converge em $L^{\alpha+2}$ e $(\nabla u^k(t))$ converge em L^2 para cada $t \in [T,T]$. Logo, utilizando as informações obtidas e passando o limite na igualdade

$$E(u^k(t)) = \frac{1}{2}\left[\|\nabla u^k(t)\|^2 - \frac{2}{\alpha+2}\|u^k(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right] = E(u_0^k),$$

obtemos que

$$E(u(t)) = \frac{1}{2}\left[\|\nabla u(t)\|^2 - \frac{2}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right] = E(u_0), \quad t \in [-T, T]$$

onde u é solução da equação integral obtida no Teorema 3.2.

Nosso intuito agora é provar, utilizando as igualdades (3.28) e (3.29), que os resultados obtidos no Teorema 3.2 são globais.

Teorema 3.5 (Teoria Global em H^1)**.** *Seja $1 \leq \alpha < 4$. Então os resultados obtidos no Teorema 3.2 são globais, ou seja, a solução dada pelo Teorema 3.2 pode ser estendida a qualquer intervalo de tempo.*

Demonstração: Sabemos que $\|u(t)\|^2 < \infty$, $\forall t \in [0, T]$ em virtude da igualdade (3.28). Temos que da igualdade (3.29)

$$\frac{1}{2}\left[\|\nabla u(t)\|^2 - \frac{2}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}\right] = E(u_0), \quad \forall t \in [0, T]$$

ou seja,

$$\|\nabla u(t)\|^2 = 2E(u_0) + \frac{2}{\alpha+2}\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2}, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{3.36}$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, obtemos que para todo $t \in [0, T]$

$$\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}} \leq M\|\nabla u(t)\|^{\theta}\|u(t)\|^{1-\theta}$$

onde $\frac{1}{\alpha+2} = -\frac{\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}$, i.é, $\theta = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}$ e $M > 0$ é uma constante. Assim, utilizando a igualdade (3.28), resulta que

$$\|u(t)\|_{L^{\alpha+2}}^{\alpha+2} \leq M_1\|u_0\|^{\frac{\alpha+4}{2}}\|\nabla u(t)\|^{\frac{\alpha}{2}} \quad \forall t \in [0, T]$$

onde $M_1 = M^{\alpha+2}$, e portanto, segue da igualdade (3.36) que

$$\|\nabla u(t)\|^2 \leq 2E(u_0) + M_2\|u_0\|^{\frac{\alpha+4}{2}}\|\nabla u(t)\|^{\frac{\alpha}{2}} \quad \forall t \in [0, T]$$

onde $M_2 = \frac{2M_1}{\alpha+2}$. Defina $f(t) = \|\nabla u(t)\|^2$, então

$$f(t) \leq 2E(u_0) + M_2\|u_0\|^{\frac{\alpha+4}{2}} f(t)^{\frac{\alpha}{4}}. \tag{3.37}$$

Sendo $\frac{\alpha}{4} < 1$, existe $M_3 > 0$ tal que $f(t)^{\frac{\alpha}{4}} < M_3 \quad \forall t \in [0,T]$. Logo, podemos concluir que

$$f(t) \leq 2E(u_0) + M_2\|u_0\|^{\frac{\alpha+4}{2}} M_3,$$

ou seja,

$$\sup_{[0,T]} \|\nabla u(t)\|^2 < \infty.$$

Desta forma, $\sup_{[0,T]} \|u(t)\|_1^2 < \infty$, e portanto, aplicando-se novamente o Teorema 3.2 com dado inicial $u(T)$, pode-se estender u em um intervalo $[0,(T+\Delta T)]$.

Seja $\tilde{T}$ o supremo dos valores T tal que a solução u esteja estendida no intervalo $[0,\tilde{T})$. Provemos agora que $\tilde{T} = \infty$. Para demonstrarmos tal resultado, provaremos que se $\tilde{T} < \infty$, então $\lim_{t\to\tilde{T}} \|u(t)\|_1 = \infty$. Com efeito, suponhamos por absurdo que existe uma sequência $(t_n) \subset \mathbb{R}_+$ tal que $t_n \to \tilde{T}$ e $\|u(t_n)\|_1 < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para algum $M > 0$. Utilizando $u(t_n)$ como dado inicial, obtemos pelo Teorema 3.2 que existe $T_0 > 0$, dependendo somente de M, tal que conseguimos a existência e unicidade de solução no intervalo $[t_n, t_n + T_0)$ para cara $n \in \mathbb{N}$. Escolhendo t_n suficientemente próximo de $\tilde{T}$, conseguimos estender u em um intervalo $[0, t_n + T_0]$ tal que $\tilde{T} \in [0, t_n + T_0]$, o que é um absurdo já que $[0,\tilde{T})$ é o intervalo maximal. Logo, o desejado está demonstrado. De maneira análoga demonstra-se os mesmos resultados para o intervalo $(-\tilde{T}, 0]$, o que finaliza a demonstração do Teorema. □

Observação 3.3. **(1)** *Apesar de conseguirmos obter soluções locais para $1 \leq \alpha < \infty$, para obtermos soluções globais devemos ter que $1 \leq \alpha < 4$. Veremos no próximo capítulo que tal restrição não nos trará problema, pois as mesmas restrições se impõem para obtermos estabilidade orbital;*

(2) *Se $\alpha = 4$, então, da desigualdade (3.37), decorre que temos soluções globais em H^1 somente se $\|u_0\|$ for suficientemente pequena. Se $\alpha > 4$ as soluções globais em H^1 ocorrem se $\|u_0\|_1$ for suficientemente pequena (ver [19]).*

3.1 Existência de Solução Onda Estacionária do tipo Solitária para a Equação (3.1)

Estamos agora interessados em soluções especiais do tipo

$$u(x,t) = e^{i\omega t}\phi(x), \tag{3.38}$$

onde $\omega > 0$ é chamado de frequência da onda e $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função em $C^{\infty}(\mathbb{R})$ tal que $\phi > 0$ e $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ se $|x| \to \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Substituindo a igualdade (3.38) na igualdade (3.1), obtemos a equação diferencial

$$-\phi'' + \omega\phi - \phi^{\alpha+1} = 0. \tag{3.39}$$

Suponhamos que existe $\phi \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ satisfazendo a igualdade (3.39). Então multiplicando a igualdade (3.39) por $\phi^{'}$ e integrando sobre o intervalo $(-\infty, x]$ com $x \in \mathbb{R}$, obtemos

$$\int_{-\infty}^{x} \phi''(s)\phi'(s)ds - \omega\int_{-\infty}^{x} \phi(s)\phi'(s)ds + \int_{-\infty}^{x} \phi^{\alpha+1}(s)\phi'(s)ds = 0, \tag{3.40}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{ds}(\phi'(s))^2 ds - \frac{\omega}{2}\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{ds}(\phi(s))^2 ds + \frac{1}{\alpha+2}\int_{-\infty}^{x} \frac{d}{ds}(\phi(s))^{\alpha+2} ds = 0.$$

Usando o fato de que $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x) \to 0$ se $|x| \to 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, chegamos na igualdade

$$\frac{1}{2}(\phi'(x))^2 - \frac{\omega}{2}(\phi(x))^2 + \frac{1}{\alpha+2}(\phi(x))^{\alpha+2} = 0,$$

donde segue que

$$(\phi'(x))^2 = -\frac{2}{\alpha+2}(\phi(x))^{\alpha+2} + \omega(\phi(x))^2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.41}$$

Desta forma, como $\phi > 0$, resulta que

$$\frac{d\phi}{\pm\phi\sqrt{\omega - \frac{2}{\alpha+2}\phi^{\alpha}}} = dx. \tag{3.42}$$

Note que da igualdade (3.41) vem que

$$\phi^2\left(\omega - \frac{2}{\alpha+2}\phi^{\alpha}\right) \geq 0 \iff \omega - \frac{2}{\alpha+2}\phi^{\alpha} \geq 0 \iff \frac{\alpha+2}{2}\omega \geq \phi^{\alpha}.$$

Logo,

$$0 < \phi \leq \left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

ou seja, ϕ é limitada.

Integrando a igualdade (3.42) em ambos os lados, obtemos

$$\int \frac{d\phi}{\pm\phi\sqrt{\omega - \frac{2}{\alpha+2}\phi^{\alpha}}} = x + c; \quad c \text{ constante}. \tag{3.43}$$

Fazendo a mudança de variável $\phi = \left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(\operatorname{sech}(\theta))^{\frac{2}{\alpha}}$, temos que

$$\frac{d\phi}{d\theta} = -\left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\frac{2}{\alpha}(\operatorname{sech}(\theta))^{\frac{2}{\alpha}}\tanh(\theta) \tag{3.44}$$

e

$$\pm\,\phi\sqrt{\omega - \frac{2}{\alpha+2}\phi^{\alpha}} = \left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}(\operatorname{sech}(\theta))^{\frac{2}{\alpha}}\omega^{\frac{1}{2}}\tanh(\theta). \tag{3.45}$$

Daí, substituindo as igualdades (3.44) e (3.45) em (3.43), concluímos que

$$\pm\frac{2}{\alpha\sqrt{\omega}}\int d\theta = x + c \quad \Rightarrow \quad \pm\theta = \frac{\alpha}{2}\sqrt{\omega} + d, \quad d \text{ constante}.$$

Como $\operatorname{sech}(\theta) = \operatorname{sech}(\pm\theta)$, ou seja, sech é par, então

$$\phi_{\omega}(x) = \left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\alpha\sqrt{\omega}x}{2} + d\right)\right)^{\frac{2}{\alpha}}. \tag{3.46}$$

Capítulo 4

Método Clássico para a Estabilidade Orbital

Neste capítulo, usaremos o método de Lyapunov para estudar a estabilidade não-linear das soluções $u(x,t) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$ com ϕ_ω dada por (3.46). Usaremos as leis de conservação

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^2 - \frac{2}{\alpha+2}|u|^{\alpha+2}dx, \quad F(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx. \tag{4.1}$$

Além disso, como a equação de Schrödinger não-linear é invariante por translação e rotação, i.e., se $u(x,t)$ é solução da equação (3.1), então $e^{i\theta}u(x+y,t)$ também resolve a equação (3.1) para qualquer $(y,\theta) \in \mathbb{R}^2$, então a estabilidade aqui será estudada através destas simetrias. Mais precisamente, mostraremos que a órbita gerada por ϕ_ω

$$\mathcal{O}_{\phi_\omega} = \left\{e^{i\theta}\phi_\omega(\cdot + y, t); (y,\theta) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

é estável com respeito ao fluxo gerado pela equação de Schrödinger não-linear.

Definição 4.1. *Dizemos que a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável, se para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que se*

$$\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta,$$

então a solução $u(x,t)$ da equação de Schrödinger não-linear (3.1) com dado inicial u_0 satisfaz

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} \inf_{(y,\theta)\in\mathbb{R}^2} \left\|u(t) - e^{i\theta}\phi_\omega(\cdot + y)\right\|_1 < \varepsilon.$$

Consideremos os seguintes operadores lineares associados à equação (3.1)

$$\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ dado por } \mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha$$

e

$$\mathcal{L}^+ : H^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R}) \text{ dado por } \mathcal{L}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - \phi_\omega^\alpha.$$

Temos os seguintes resultados que serão úteis no estudo da estabilidade.

Teorema 4.1. *Seja ϕ_ω a solução onda estacionária do tipo solitária deduzida na seção 3.1. Então, o operador linear $\mathcal{L} = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha$ satisfaz:*

(a) $\inf\{(\mathcal{L}v, v) : v \in H^1(\mathbb{R}), \|v\| = 1, (v, \phi_\omega) = 0\} \equiv \gamma = 0$

(b) $\inf\{(\mathcal{L}v, v) : v \in H^1(\mathbb{R}), \|v\| = 1, (v, \phi_\omega) = 0, (v, \phi_\omega^\alpha \phi_\omega') = 0\} \equiv \xi > 0$

Demonstração: (a) Primeiramente, note que $(\mathcal{L}v, v)$ não faz sentido para $v \in H^1(\mathbb{R})$. Consideraremos, então, a segunda derivada vista no sentido distribucional uma vez que estamos interessados no comportamento da forma quadrática.

Como ϕ_ω é limitada, então, se $\|v\| = 1$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}v, v) &= (-v'' + \omega v - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha v, v) \\ &= \|v'\|^2 + \omega - (\alpha+1)(\phi_\omega^\alpha, v^2) \\ &\geq -(\phi_\omega^\alpha, v^2) \\ &\geq -\|\phi_\omega^\alpha\|_\infty; \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Logo, γ é finito. Do fato de $(\phi_\omega', \phi_\omega) = 0$ e $\mathcal{L}\phi_\omega' = 0$ segue que $\gamma \leq 0$. Vejamos agora que o ínfimo é atingido. Com efeito, considere $\{u_j\} \subset H^1(\mathbb{R})$ tal que $\|u_j\| = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $(u_j, \phi_\omega) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $(\mathcal{L}u_j, u_j) \to \gamma$ quando $j \to \infty$. Temos então, que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{L}u_j, u_j) \leq M$, $\forall j \in \mathbb{N}$. Daí

$$\|u_j'\|^2 + \omega - (\alpha+1)(\phi_\omega^\alpha, u_j^2) \leq M,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \|u_j'\|^2 &\leq -\omega + (\alpha+1)(\phi_\omega^\alpha, u_j^2) + M \\ &\leq M_1; \quad M_1 \text{ constante}, \ \forall j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\{u_j\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$. Logo, existe $u \in H^1(\mathbb{R})$ e uma subsequência de mesmo nome tal que $u_j \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R})$. Então, $u_j \rightharpoonup u$ em $L^2(\mathbb{R})$ e consequentemente $(u, \phi_\omega) = 0$. Note que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx \to \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u^2 dx \text{ quando } j \to \infty, \tag{4.2}$$

pois da imersão compacta $H^1(-R,R) \hookrightarrow L^2(-R,R)$, $\forall R > 0$ segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha (u_j^2 - u^2) dx = \int_{-R}^{R} \phi_\omega^\alpha (u_j^2 - u^2) dx + \int_{|x|>R} \phi_\omega^\alpha (u_j^2 - u^2) dx \to 0 \text{ quando } j \to \infty,$$

uma vez que $(u_j^2 - u^2)$ é uniformemente limitada e $|\phi_\omega^\alpha|$ é suficientemente pequeno para R grande. Também temos que $u \neq 0$. De fato, suponhamos por absurdo que $u = 0$, então de (4.2) segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx \to 0,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$(\alpha+1) \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx < \varepsilon, \ \forall j > j_0.$$

Como $(\mathcal{L}u_j, u_j) \to \gamma$, temos que para o mesmo $\varepsilon > 0$ existe $j_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} |u_j'|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}} u_j^2 dx - (\alpha+1) \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx - \gamma < \varepsilon, \ \forall j > j_1$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 < \omega < \int_{\mathbb{R}} |u_j'|^2 dx + \omega \int_{\mathbb{R}} u_j^2 dx &< \varepsilon + \gamma + (\alpha+1) \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx \\ &\leq \varepsilon + (\alpha+1) \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx, \ \forall j > j_1. \end{aligned}$$

Escolhendo j suficientemente grande tal que $j > \max\{j_o, j_1\}$, obtemos que

$$0 < \omega < 2\varepsilon.$$

Pela arbitrariedade de ε, resulta que $\omega = 0$, o que é um absurdo. Portanto $u \neq 0$. Vejamos agora que $\|u\| = 1$ e $(\mathcal{L}u, u) = \gamma$. Observe que do fato de $u_j \rightharpoonup u$ em $H^1(\mathbb{R})$ e de (4.2), vem que

$$\begin{aligned}
\gamma &\leq (\mathcal{L}u, u) = \|u'\|^2 + \omega\|u\|^2 - (\alpha+1)\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u^2 dx \\
&\leq \liminf \|u_j'\|^2 + \omega \liminf \|u_j\|^2 - (\alpha+1)\liminf \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha u_j^2 dx \\
&\leq \liminf (\mathcal{L}u_j, u_j) = \gamma. \qquad (4.3)
\end{aligned}$$

Logo, $(\mathcal{L}u, u) = \gamma$. Sabemos que $\|u\| \leq 1$ pois $\|u\| \leq \liminf \|u_j\|$. Suponhamos então que $\|u\| < 1$ e definamos $g = \frac{u}{\|u\|}$. Como $\|g\| = 1$ e $(g, \phi_\omega) = 0$, então

$$\begin{aligned}
\gamma\|u\|^2 &\leq \|u\|^2(\mathcal{L}g, g) = (\mathcal{L}u, u) \\
&\leq \liminf(\mathcal{L}u_j, u_j) = \gamma.
\end{aligned}$$

Temos dois casos a considerar:

(i) Se $\gamma < 0$, então $\|u\| \geq 1$, o que é uma contradição. Portanto, $\|u\| = 1$;

(ii) Se $\gamma = 0$, então $(\mathcal{L}g, g) = 0$, e portanto podemos considerar $\|u\| = 1$.

Portanto, o ínfimo é atingido em u.

Antes de proseguirmos, vejamos o seguinte Lema:

Lema 4.1 (Weinstein)**.** *Seja A um operador auto-adjunto definido sobre $L^2(\mathbb{R})$ tendo exatamente um autovalor negativo, λ_0, com autofunção correspondente $f_0 \geq 0$. Definamos*

$$-\infty < \tau \equiv \min_f (Af, f), \ \textit{onde}\ \|f\| = 1 \ \textit{e}\ (f, R) = 0.$$

Suponhamos que $(R, f_0) \neq 0$ *e* $R \in N^{\perp}(A)$. *Então,* $\tau \geq 0$ *se*

$$(A^{-1}R, R) \leq 0.$$

Demonstração: Ver [22]. □

Provemos agora que $\gamma \geq 0$. Para obter tal resultado, iremos aplicar o Lema de Weinstein 4.1 para o caso $A = \mathcal{L}$ e $R = \phi_\omega$. Pelos Teoremas 2.38 e 2.29, temos que $\mathcal{L}$ possui todas as propriedades espectrais requeridas pelo Lema E1, i.e., $\mathcal{L}$ é um operador auto-adjunto e tem exatamente um autovalor simples negativo. Precisamos agora, encontrar χ tal que $\mathcal{L}\chi = \phi_\omega$ e $(\chi, \phi_\omega) \leq 0$. Com efeito, conforme já vimos no capítulo anterior, $\omega \to \phi_\omega$ é de classe C^1 e, portanto, derivando a igualdade (3.39) com relação a ω obtemos que

$$\left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right]'' + (\alpha + 1)\phi_\omega^\alpha \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} - \omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} = \phi_\omega, \tag{4.4}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}\left(-\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right) = \phi_\omega.$$

Sabemos que $N(\mathcal{L}) = [\phi_\omega']$. Logo, podemos escrever $H^1(\mathbb{R}) = [\phi_\omega'] \oplus [\phi_\omega']^{\perp}$, donde segue que $\mathcal{L} : [\phi_\omega']^{\perp} \to [\phi_\omega']^{\perp}$ é invertível. Como $(\phi_\omega, \phi_\omega') = 0$, então podemos dizer que

$$\mathcal{L}^{-1}\phi_\omega = -\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}.$$

Resta-nos agora, verificar que

$$(\mathcal{L}^{-1}\phi_\omega, \phi_\omega) = \left(-\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}, \phi_\omega\right) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\phi_\omega dx = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \omega}\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^2 dx \leq 0.$$

Para isso, provemos que

$$\frac{\partial}{\partial \omega}\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^2 dx \geq 0.$$

Multiplicando a igualdade (4.4) por $-\phi_\omega$ e integrando em ambos os lados, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}} -\left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right]'' \phi_\omega + \omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\phi_\omega + \phi_\omega^2 - (\alpha+1)\phi_\omega^{\alpha+1}\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx = 0.$$

Usando integração por partes, chegamos na igualdade

$$\int_{\mathbb{R}} -\left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right] \phi_\omega'' + \omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\phi_\omega + \phi_\omega^2 - (\alpha+1)\phi_\omega^{\alpha+1}\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx = 0,$$

donde da igualdade (3.39), segue que

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right] [\phi_\omega^{\alpha+1} - \omega\phi_\omega] + \omega \frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\phi_\omega + \phi_\omega^2 - (\alpha+1)\phi_\omega^{\alpha+1}\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx = 0,$$

isto é,

$$\int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right] \phi_\omega^{\alpha+1} + \phi_\omega^2 - (\alpha+1)\phi_\omega^{\alpha+1}\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega} dx = 0$$

Portanto,

$$\alpha \int_{\mathbb{R}} \left[\frac{\partial \phi_\omega}{\partial \omega}\right] \phi_\omega^{\alpha+1} dx = \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^2 dx. \tag{4.5}$$

Por outro lado, da igualdade (3.41) temos que

$$(\phi_\omega')^2 = \omega\phi_\omega^2 - \frac{2}{\alpha+2}\phi_\omega^{\alpha+2}. \tag{4.6}$$

Daí, usando o fato de que

$$\int_{\mathbb{R}} [\phi_\omega']^2 + \omega\phi_\omega^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^{\alpha+1}\phi_\omega dx = \int_{\mathbb{R}} (-\phi_\omega'' + \omega\phi_\omega - \phi_\omega^{\alpha+1})\phi_\omega dx = 0,$$

resulta pela igualdade (4.6) que

$$\int_{\mathbb{R}} \omega\phi_\omega^2 - \frac{2}{\alpha+2}\phi_\omega^{\alpha+2} + \omega\phi_\omega^2 dx - \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^{\alpha+1}\phi_\omega dx = 0,$$

ou seja,

$$2\omega \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^2 dx = \frac{(\alpha+4)}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^{\alpha+2} dx.$$

Derivando a igualdade acima e utilizando a igualdade (4.5), obtemos que

$$2\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^2dx + 2\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^2dx = (\alpha+4)\frac{1}{\alpha}\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^2dx,$$

donde resulta que

$$\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^2dx = \left[\frac{(\alpha+4)}{2\alpha}-1\right]\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^2dx. \tag{4.7}$$

Logo, se $\left[\frac{(\alpha+4)}{2\alpha}-1\right] \geq 0$, ou seja, $1 \leq \alpha \leq 4$, fica provado o desejado.

(b) Pela parte (a) segue que $\xi \geq 0$. Suponhamos que $\xi = 0$. Pelos mesmos argumentos anteriores feitos na parte (a) temos que o ínfimo é atingido. Logo, existe $u \in H^1(\mathbb{R})$ tal que $\|u\| = 1$, $(u, \phi_\omega) = 0$, $(u, \phi_\omega^\alpha\phi_\omega') = 0$ e $(\mathcal{L}u, u) = 0$. Pela teoria dos Multiplicadores de Lagrange temos que existem λ, θ e μ tal que

$$\mathcal{L}u = \lambda u + \theta\phi_\omega + \mu\phi_\omega^\alpha\phi_\omega'.$$

Daí, segue que

$$(\lambda u + \theta\phi_\omega + \mu\phi_\omega^\alpha\phi_\omega', u) = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda\|u\|^2 = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \lambda = 0.$$

Também, como $\mathcal{L}$ é auto-adjunto obtemos que

$$(\mathcal{L}u, \phi_\omega') = (u, \mathcal{L}\phi_\omega') = 0.$$

Assim,

$$(\theta\phi_\omega + \mu\phi_\omega^\alpha\phi_\omega', \phi_\omega') = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mu(\phi_\omega^\alpha\phi_\omega', \phi_\omega') = 0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mu = 0.$$

Logo, $\mathcal{L}u = \theta\phi_\omega$. Agora, como $\mathcal{L}\chi = \phi_\omega$ onde $\chi = -\frac{\partial\phi_\omega}{\partial\omega}$, então $\mathcal{L}(u-\theta\chi) = 0$, o que implica que existe $\sigma \in \mathbb{R}$ tal que

$$u - \theta\chi = \sigma\phi_\omega'.$$

Usando o fato que $(\chi, \phi_\omega) \neq 0$ se $\alpha < 4$ resulta que $\theta = 0$, pois

$$(u - \theta\chi, \phi_\omega) = (\sigma\phi'_\omega, \phi_\omega) \iff -\theta(\chi, \phi_\omega) = \sigma(\phi'_\omega, \phi_\omega) = 0 \iff \theta = 0.$$

Portanto, $u = \sigma\phi'_\omega$ com $\sigma \neq 0$ e consequentemente

$$0 = (u, \phi_\omega^\alpha \phi'_\omega) = \sigma(\phi'_\omega, \phi_\omega^\alpha \phi'_\omega),$$

ou seja, $\phi'_\omega \perp \phi_\omega^\alpha \phi'_\omega$, o que é uma contradição já que $\int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha (\phi'_\omega)^2 dx > 0$. $\square$

Observação 4.1. *Para demonstrarmos a parte (a) do Teorema 4.1, tivemos que fazer a restrição $1 \leq \alpha \leq 4$. Para demonstrarmos a parte (b), restringimos ainda mais o α, i.e., a restrição $1 \leq \alpha < 4$ tornou-se necessária pois usamos o fato de que $(\chi, \phi_\omega) \neq 0$.*

Teorema 4.2. *Seja ϕ_ω a solução onda estacionária do tipo solitária obtida na seção 3.1. Então, o operador linear $\mathcal{L}^+ = -\frac{d^2}{dx^2} + \omega - \phi_\omega^\alpha$ definido sobre $H^2(\mathbb{R})$ é um operador não-negativo. Além disso, o autovalor zero é simples e existe $\beta > 0$ tal que*

$$\inf\left\{(\mathcal{L}^+ v, v) : v \in H^1(\mathbb{R}), \|v\| = 1, (v, \phi_\omega^\alpha \phi_\omega) = 0\right\} = \beta.$$

Demonstração: Pelo Teorema 2.39, segue que $\mathcal{L}^+$ é um operador não-negativo que possui autovalor simples igual a zero com autofunção ϕ_ω associada. Desta forma, $\beta \geq 0$, pois o operador $\mathcal{L}^+$ é não-negativo. Suponhamos que $\beta = 0$ e seja $\{u_j\}$ uma sequência de funções de $H^1(\mathbb{R})$ tal que $\|v_j\| = 1$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $(v_j, \phi_\omega^\alpha \phi_\omega) = 0$, $\forall j \in \mathbb{N}$ e $(\mathcal{L}^+ v_j, v_j) \to 0$ quando $j \to \infty$. Temos então que existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $(\mathcal{L}^+ v_j, v_j) \leq M$. Daí

$$\|v'_j\|^2 + \omega - (\phi_\omega^\alpha, v_j^2) \leq M, \quad \forall j \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$\|v'_j\|^2 \leq M_1; \quad M_1 \text{ constante}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Assim, temos que $\{v_j\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$. Logo, existe $v \in H^1(\mathbb{R})$ e uma subsequência de mesmo nome tal que $v_j \to v$ em $H^1(\mathbb{R})$. Desta forma, $v_j \rightharpoonup v$ em $L^2(\mathbb{R})$ e consequentemente

$(v, \phi_\omega^\alpha \phi_\omega) = 0$. Utilizando a mesma ideia do Teorema 4.1, podemos concluir que $\|v\| = 1$. Pela teoria dos Multiplicadores de Lagrange, segue que existe $(\lambda, \theta) \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$\mathcal{L}^+ v = \lambda v + \theta \phi_\omega^\alpha.$$

Como $(\mathcal{L}^+ v, v) = 0$, segue que

$$(\lambda v + \theta \phi_\omega^\alpha \phi_\omega, v) = \lambda + \theta(\phi_\omega^\alpha \phi_\omega, v) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda = 0.$$

Também

$$(\lambda v + \theta \phi_\omega^\alpha \phi_\omega, \phi_\omega) = (\mathcal{L}^+ v, \phi_\omega) = (v, \mathcal{L}^+ \phi_\omega) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta(\phi_\omega^{\alpha+1}, \phi_\omega) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \theta = 0.$$

Sendo o zero simples, resulta que $v = \eta \phi_\omega$ com $\eta \neq 0$. Entretanto, $v \perp \phi_\omega^{\alpha+1}$, o que é uma contradição. Portanto, $\beta > 0$ e o teorema está demonstrado. □

Teorema 4.3 (Estabilidade). *Sejam ϕ_ω a solução onda estacionária do tipo solitária deduzida na seção 3.1, $1 \leq \alpha < 4$ e $\omega > 0$. Então a órbita $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável em $H^1(\mathbb{R})$ com respeito ao fluxo da equação (3.1).*

Demonstração: Defina para $y \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi)$ e $t \in \mathbb{R}$,

$$\Omega_t(y, \theta) = \left\| u'(\cdot + y, t) e^{i\theta} - \phi_\omega' \right\|^2 + \omega \left\| u(\cdot + y, t) e^{i\theta} - \phi_\omega \right\|^2.$$

Desta forma, a distância da solução $u(t)$ até $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é medida por

$$[\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 \equiv \inf_{(y,\theta) \in \mathbb{R} \times [0, 2\pi)} \Omega_t(y, \theta).$$

Demonstraremos a estabilidade, sem perda de generalidade, no intervalo $[0, \infty)$. Primeiramente, vejamos o seguinte lema:

Lema 4.2. *Para qualquer intervalo temporal da forma $I = [0, T]$, $T > 0$, o $\inf \Omega_t(y, \theta)$ é atingido em $(y, \theta) = (y(t), \theta(t))$, $\forall t \in [0, T]$.*

Demonstração: Seja $v(x,t) = e^{i\omega t}\phi_\omega(x)$. Como $1 \leq \alpha < 4$, então v está globalmente definida em $H^1(\mathbb{R})$. Pela dependência contínua da equação (3.1), temos para $\varepsilon > 0$ e $T > 0$ dados que existe $\delta > 0$ tal que se $\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta$ e u é solução da equação (3.1) com $u(0) = u_0$, então

$$\|u(t) - e^{i\omega t}\phi_\omega\|_1 < \varepsilon \quad \text{para todo } t \in [0,T].$$

Logo, para $t \in [0,T]$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\Omega_t(y,\omega t) &= \left\|u'(\cdot + y,t)e^{i\omega t} - \phi_\omega'\right\|^2 + \omega\left\|u(\cdot + y,t)e^{i\omega t} - \phi_\omega\right\|^2 \\
&\leq \max\{1,\omega\}\left\|u(\cdot + y,t)e^{i\omega t} - \phi_\omega\right\|_1^2 \\
&\leq \max\{1,\omega\}\,\varepsilon^2 \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Vejamos agora que

$$\lim_{|y|\to\infty} \Omega_t(y,\theta) = \|u(t)\|_{1,\omega}^2 + \|\phi_\omega\|_{1,\omega}^2$$

onde $\|f\|_{1,\omega}^2 = \|f\|^2 + \omega\,\|f\|^2$. Com efeito, note que

$$\begin{aligned}
\lim_{|y|\to\infty} \Omega_t(y,\theta) &= \|u'(t)\|^2 + \|\phi_\omega'\|^2 - \lim_{|y|\to\infty} 2\int_{\mathbb{R}} Re(u'(x+y,t)\phi_\omega' e^{i\theta})dx + \omega\|u(t)\|^2 + \omega\|\phi_\omega\|^2 \\
&\quad - \lim_{|y|\to\infty} 2\int_{\mathbb{R}} Re(u(x+y,t)\phi_\omega e^{i\theta})dx,
\end{aligned}$$

mas

$$(u(x,t)\phi_\omega''(x-y)e^{i\theta}) \to 0 \quad \text{se} \quad |y| \to \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |(u(x,t)\phi_\omega''(x-y)e^{i\theta})|dx \leq \|u(t)\|\|\phi_\omega(\cdot + y)\|.$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada, temos que

$$\int_{\mathbb{R}} Re(u'(x+y,t)\phi_\omega' e^{i\theta})dx = \int_{\mathbb{R}} Re(u(x,t)\phi_\omega''(x-y)e^{i\theta})dx \to 0 \quad \text{se} \quad |y| \to \infty.$$

Analogamente prova-se que

$$\int_{\mathbb{R}} Re(u(x+y,t)\phi_\omega e^{i\theta})dx \to 0 \quad \text{se} \quad |y| \to \infty.$$

Portanto, $\lim_{|y|\to\infty} \Omega_t(y,\theta) = \|u(t)\|_{1,\omega}^2 + \|\phi_\omega\|_{1,\omega}^2$.

Como $\Omega_t(y,\theta)$ é contínua, resta-nos encontrarmos $(y_0,\theta_0) \in R$, onde R é um retângulo fechado, tal que

$$\Omega_t(y_0(t),\theta_0(t)) < \|\phi_\omega\|_{1,\omega}, \quad t \in [0,T]. \tag{4.9}$$

Escolhendo $\varepsilon > 0$ tal que

$$\max\{1,\omega\}\,\varepsilon^2 < \|\phi_\omega\|_{1,\omega},$$

segue de (4.8) a desigualdade (4.9), donde obtemos o desejado. Portanto, o lema está demonstrado. $\square$

Usando o lema anterior, temos que para $T > 0$, o $\inf \Omega_t(y,\theta)$ é atingido em $(y,\theta) = (y(t),\theta(t))$, $\forall t \in [0,T]$. Assim,

$$[\rho_\omega(u(t),\mathcal{O}_{\phi_\omega})]^2 = \Omega_t(y(t),\theta(t)), \quad \forall t \in [0,T]. \tag{4.10}$$

Consideremos agora, a pertubação da onda estacionária ϕ_ω

$$u(x+y,t)e^{i\theta} \equiv \phi_\omega(x) + z(x,t); \quad z = p + iq \tag{4.11}$$

para $t \in [0,T]$ e $y = y(t)$, $\theta = \theta(t)$ determinado pela igualdade (4.10). Pela propriedade de mínimo, obtemos da igualdade (4.11) que (p,q) satisfaz a seguinte relação de compatibilidade:

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^\alpha \phi_\omega' p(x,t)dx = 0 \\ \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega^{\alpha+1} q(x,t)dx = 0, \qquad \forall t \in [0,T]. \end{cases} \tag{4.12}$$

Com efeito, considerando $u(t) = u = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$ e $t \in [0,T]$, obtemos que

$$\Omega := \int_{\mathbb{R}} (a'e^{i\theta} + ib'e^{i\theta} - \phi'_\omega)(a'e^{-i\theta} - ib'e^{-i\theta} - \phi'_\omega)dx + \omega \int_{\mathbb{R}} (ae^{i\theta} + ibe^{i\theta} - \phi_\omega)(ae^{-i\theta} - ibe^{-i\theta} - \phi_\omega)dx. \tag{4.13}$$

Derivando a igualdade (4.13) em relação à θ, temos que

$$\begin{aligned}
\Omega_\theta &= \int_{\mathbb{R}} (ia'e^{i\theta} - b'e^{i\theta})(a'e^{-i\theta} - ib'e^{-i\theta} - \phi'_\omega)dx + \int_{\mathbb{R}} (a'e^{i\theta} + ib'e^{i\theta} - \phi'_\omega)(-ia'e^{-i\theta} - b'e^{-i\theta})dx \\
&\quad + \omega \int_{\mathbb{R}} (iae^{i\theta} - be^{i\theta})(ae^{-i\theta} - ibe^{-i\theta} - \phi_\omega)dx + \omega \int_{\mathbb{R}} (ae^{i\theta} + ibe^{i\theta} - \phi_\omega)(-iae^{-i\theta} - be^{-i\theta})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} -ia'\phi'_\omega e^{i\theta} + b'\phi'_\omega e^{i\theta} dx + \int_{\mathbb{R}} ia'\phi'_\omega e^{-i\theta} + b'\phi'_\omega e^{-i\theta} dx \\
&\quad + \omega \int_{\mathbb{R}} -ia\phi_\omega e^{i\theta} + b\phi_\omega e^{i\theta} dx + \omega \int_{\mathbb{R}} ia\phi_\omega e^{-i\theta} + b\phi_\omega e^{-i\theta} dx \\
&= 2\int_{\mathbb{R}} a'\phi'_\omega \mathrm{sen}(\theta)dx + 2\int_{\mathbb{R}} b'\phi'_\omega \cos(\theta)dx + 2\omega \int_{\mathbb{R}} a\phi_\omega \mathrm{sen}(\theta)dx + 2\omega \int_{\mathbb{R}} b\phi_\omega \cos(\theta)dx \\
&= -2\mathrm{sen}(\theta) \int_{\mathbb{R}} a\phi''_\omega dx - 2\cos(\theta) \int_{\mathbb{R}} b\phi''_\omega dx + 2\omega \mathrm{sen}(\theta) \int_{\mathbb{R}} a\phi_\omega dx + 2\omega \cos(\theta) \int_{\mathbb{R}} b\phi_\omega dx.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (3.39), segue que

$$\Omega_\theta = 2\mathrm{sen}(\theta) \int_{\mathbb{R}} a\phi_\omega^{\alpha+1} dx + 2\cos(\theta) \int_{\mathbb{R}} b\phi_\omega^{\alpha+1} dx. \tag{4.14}$$

Por outro lado, derivando a igualdade (4.13) em relação à y, temos que

$$\begin{aligned}
\Omega_y &= \int_{\mathbb{R}} (a''e^{i\theta} + ib''e^{i\theta})(a'e^{-i\theta} - ib'e^{-i\theta} - \phi'_\omega)dx + \int_{\mathbb{R}} (a'e^{i\theta} + ib'e^{i\theta} - \phi'_\omega)(a''e^{-i\theta} - ib''e^{-i\theta})dx \\
&\quad + \omega \int_{\mathbb{R}} (a'e^{i\theta} + ib'e^{i\theta})(ae^{-i\theta} - ibe^{-i\theta} - \phi_\omega)dx + \omega \int_{\mathbb{R}} (ae^{i\theta} + ibe^{i\theta} - \phi_\omega)(a'e^{-i\theta} - ib'e^{-i\theta})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} -ia''\phi'_\omega e^{i\theta} - ib''\phi'_\omega e^{i\theta} dx + \int_{\mathbb{R}} -a''\phi'_\omega e^{-i\theta} + i\phi'_\omega b'' e^{-i\theta} dx \\
&\quad + \omega \int_{\mathbb{R}} -a'\phi_\omega e^{i\theta} - ib'\phi_\omega e^{i\theta} dx + \omega \int_{\mathbb{R}} -a'\phi_\omega e^{-i\theta} + ib'\phi_\omega e^{-i\theta} dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}} a''\phi'_\omega \cos(\theta)dx + 2\int_{\mathbb{R}} b''\phi'_\omega \mathrm{sen}(\theta)dx + 2\omega \int_{\mathbb{R}} b'\phi_\omega \mathrm{sen}(\theta)dx - 2\omega \int_{\mathbb{R}} a'\phi_\omega \cos(\theta)dx \\
&= 2\cos(\theta) \int_{\mathbb{R}} a'\phi''_\omega dx - 2\mathrm{sen}(\theta) \int_{\mathbb{R}} b'\phi''_\omega dx + 2\omega \mathrm{sen}(\theta) \int_{\mathbb{R}} b'\phi_\omega dx - 2\omega \cos(\theta) \int_{\mathbb{R}} a'\phi_\omega dx.
\end{aligned}$$

Usando a igualdade (3.39), segue que

$$\begin{aligned}\Omega_y &= -2\cos(\theta)\int_{\mathbb{R}} a'\phi_\omega^{\alpha+1}dx + 2\mathrm{sen}(\theta)\int_{\mathbb{R}} b'\phi_\omega^{\alpha+1}dx \\ &= 2(\alpha+1)\cos(\theta)\int_{\mathbb{R}} a\phi_\omega^{\alpha}\phi_\omega' dx - 2(\alpha+1)\mathrm{sen}(\theta)\int_{\mathbb{R}} b\phi_\omega^{\alpha}\phi_\omega' dx. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Através da igualdade (4.11), podemos escrever

$$\begin{aligned} u &= e^{-i\theta}(\phi_\omega + p + iq) \\ &= (\cos(\theta) - i\mathrm{sen}(\theta))(\phi_\omega + p + iq) \\ &= \phi_\omega\cos(\theta) - i\phi_\omega\mathrm{sen}(\theta) + p\cos(\theta) - ip\mathrm{sen}(\theta) + iq\cos(\theta) + q\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} a &= \phi_\omega\cos(\theta) + p\cos(\theta) + q\mathrm{sen}(\theta); \\ b &= q\cos(\theta) - \phi_\omega\mathrm{sen}(\theta) - p\mathrm{sen}(\theta). \end{aligned} \tag{4.16}$$

Usando a propriedade de mínimo, temos que $\Omega_\theta = 0$ e $\Omega_y = 0$. Desta forma, pela igualdade (4.16), resulta que

$$\begin{aligned} &2\mathrm{sen}(\theta)\int_{\mathbb{R}}(\phi_\omega\cos(\theta) + p\cos(\theta) + q\mathrm{sen}(\theta))\phi_\omega^{\alpha+1}dx \\ &+2\cos(\theta)\int_{\mathbb{R}}(q\cos(\theta) - \phi_\omega\mathrm{sen}(\theta) - p\mathrm{sen}(\theta))\phi_\omega^{\alpha+1}dx = 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$2\mathrm{sen}^2(\theta)\int_{\mathbb{R}} q\phi_\omega^{\alpha+1}dx + 2\cos^2(\theta)\int_{\mathbb{R}} q\phi_\omega^{\alpha+1}dx = 0.$$

Consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}} q\phi_\omega^{\alpha+1}dx = 0.$$

Também

$$2(\alpha+1)\cos(\theta)\int_{\mathbb{R}}(\phi_\omega\cos(\theta)+p\cos(\theta)+q\text{sen}(\theta))\phi_\omega^\alpha\phi_\omega' dx$$
$$-2(\alpha+1)\text{sen}(\theta)\int_{\mathbb{R}}(q\cos(\theta)-\phi_\omega\text{sen}(\theta)-p\text{sen}(\theta))\phi_\omega^\alpha\phi_\omega' dx=0$$

ou seja,

$$2(\alpha+1)\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^{\alpha+1}\phi_\omega' dx+2(\alpha+1)\int_{\mathbb{R}}p\phi_\omega^\alpha\phi_\omega' dx=0.$$

Consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}}p\phi_\omega^\alpha\phi_\omega' dx=0,$$

uma vez que $\int_{\mathbb{R}}\phi_\omega^{\alpha+1}\phi_\omega' dx=0$ devido ao fato de que $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x)\to 0$ se $|x|\to\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Logo a relação de compatibilidade (4.12) está provada.

Denotemos $\zeta(u)=E(u)+\omega F(u)$, onde E e F são as identidades conservadas dadas pelas igualdades em (4.1) que são invariantes por translação e rotação. Temos que usando a representação (4.11)

$$\begin{aligned}\Delta\zeta &= \zeta(u_0)-\zeta(\phi_\omega)=\zeta(u(t))-\zeta(\phi_\omega)=\zeta(\phi_\omega+z(t))-\zeta(\phi_\omega)\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\phi_\omega'+z'|^2-\frac{2}{\alpha+2}|\phi_\omega+z|^{\alpha+2}+\omega|\phi_\omega+z|^2dx\\ &\quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}|\phi_\omega'|^2-\frac{2}{\alpha+2}|\phi_\omega|^{\alpha+2}+\omega|\phi_\omega|^2dx. \end{aligned}\tag{4.17}$$

Definamos $f(y)=|y|^{\alpha+2}$. Então, $f(\phi_\omega+z)=|\phi_\omega+z|^{\alpha+2}$. Usando a série de Taylor, podemos escrever

$$f(\phi_\omega+z)=f(\phi_\omega)+f'(\phi_\omega)z+\frac{f''(\phi_\omega)z^2}{2}+R(z).\tag{4.18}$$

Considerando $f=f(y,\overline{y})=(y\overline{y})^{\frac{\alpha+2}{2}}$, obtemos que

$$\begin{aligned}f'(y,\overline{y})(z,\overline{z}) &= \frac{\alpha+2}{2}|y|^\alpha\overline{y}z+\frac{\alpha+2}{2}|y|^\alpha y\overline{z}\\ &= \frac{\alpha+2}{2}|y|^\alpha(\overline{y}z+\overline{\overline{y}z})\\ &= (\alpha+2)|y|^\alpha Re(\overline{y}z)\end{aligned}\tag{4.19}$$

e

$$\begin{aligned}
f''(y,\overline{y})(z,\overline{z})^2 &= \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha zz + (\alpha+2)\left(\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha + |y|^\alpha\right) z\overline{z} + \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha \overline{z}^2 \\
&= \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha z^2 + (\alpha+2)\frac{\alpha+2}{2}|y|^\alpha z\overline{z} + \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha \overline{z}^2 \\
&= \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha \left(z^2 + \frac{2(\alpha+2)}{2} z\overline{z} + \overline{z}^2\right) \\
&= \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha \left(z^2 + 2z\overline{z} + \overline{z}^2 + \frac{4}{\alpha} z\overline{z}\right) \\
&= \frac{\alpha+2}{2}\frac{\alpha}{2}|y|^\alpha \left(4p^2 + \frac{4}{\alpha}|z|^2\right) \\
&= (\alpha+2)|y|^\alpha \left(\alpha p^2 + |z|^2\right). \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

Logo, segue das igualdades (4.19) e (4.20) que

$$\begin{aligned}
f'(\phi_\omega, \phi_\omega)(z,\overline{z}) &= (\alpha+2)|\phi_\omega|^\alpha \phi_\omega p \\
&= (\alpha+2)|\phi_\omega|^{\alpha+1} p \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

e

$$f''(\phi_\omega, \phi_\omega)(z,\overline{z}) = (\alpha+2)|\phi_\omega|^\alpha \left(\alpha p^2 + |z|^2\right). \qquad (4.22)$$

Substituindo as igualdades (4.21) e (4.22) na igualdade (4.18), obtemos que

$$f(\phi_\omega + z) = |\phi_\omega|^{\alpha+2} + (\alpha+2)|\phi_\omega|^{\alpha+1} p + \frac{(\alpha+2)}{2}|\phi_\omega|^\alpha \left(\alpha p^2 + |z|^2\right) + R(z). \qquad (4.23)$$

Usando a imersão $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R})$, $\forall r \geq 2$, a igualdade (4.23) em (4.17) e o fato de que ϕ_ω

satisfaz a igualdade (3.39), obtemos a seguinte variação para $\zeta(u) = E(u) + \omega F(u)$

$$\begin{aligned}
\Delta\zeta &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\phi_\omega' + z'|^2 - \frac{2}{\alpha+2}\left[|\phi_\omega|^{\alpha+2} + (\alpha+2)|\phi_\omega|^{\alpha+1}p + \frac{(\alpha+2)}{2}|\phi_\omega|^\alpha\left(\alpha p^2 + |z|^2\right) + R(z)\right] \\
&\quad +\omega|\phi_\omega + z|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\phi_\omega'|^2 - \frac{2}{\alpha+2}|\phi_\omega|^{\alpha+2} + \omega|\phi_\omega|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\phi_\omega' + p')^2 + (q')^2 - 2(\phi_\omega)^{\alpha+1}p - \alpha(\phi_\omega)^\alpha p^2 - (\phi_\omega)^\alpha |z|^2 - \frac{2}{\alpha+2}R(z) \\
&\quad +\omega[(\phi_\omega + p)^2 + q^2]dx - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (\phi_\omega')^2 + \omega|\phi_\omega|^2 dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} 2\phi_\omega' p' + (p')^2 + (q')^2 - 2(\phi_\omega)^{\alpha+1}p - \alpha(\phi_\omega)^\alpha p^2 - (\phi_\omega)^\alpha|z|^2 - \frac{2}{\alpha+2}R(z) \\
&\quad +2z\phi_\omega p + zp^2 + zq^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} \phi_\omega' p' - (\phi_\omega)^{\alpha+1}p + z\phi_\omega p dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (p')^2 + (q')^2 - \alpha(\phi_\omega)^\alpha p^2 - (\phi_\omega)^\alpha|z|^2 - \frac{2}{\alpha+2}R(z) + zp^2 + zq^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} -\phi_\omega'' p - (\phi_\omega)^{\alpha+1}p + z\phi_\omega p dx \\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -p''p - q''q + zp^2 + zq^2 - \alpha(\phi_\omega)^\alpha p^2 - (\phi_\omega)^\alpha(p^2+q^2) - \frac{2}{\alpha+2}R(z)dx \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -p''p + zp^2 - (\alpha+1)(\phi_\omega)^\alpha p^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -q''q + zq^2 - (\phi_\omega)^\alpha q^2 dx - \frac{2}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}} R(z)dx \\
&= \frac{1}{2}(\mathcal{L}p, p) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^+ q, q) - \frac{2}{\alpha+2}\int_{\mathbb{R}} R(z)dx \\
&\geq \frac{1}{2}(\mathcal{L}p, p) + \frac{1}{2}(\mathcal{L}^+ q, q) - o(\|z\|^2) \qquad (4.24)
\end{aligned}$$

onde $\mathcal{L} = \frac{-d^2}{dx^2} + \omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha$ e $\mathcal{L}^+ = \frac{-d^2}{dx^2} + \omega - \phi_\omega^\alpha$. Consideremos agora, a normalização $\|u(t)\|^2 = \|\phi_\omega\|^2$, $\forall t \in [0,T]$. Por (4.11), segue que $(p, \phi_\omega) = -\frac{1}{2}(\|p\|^2 + \|q\|^2) = -\frac{1}{2}\|z\|^2$. De fato, basta ver que

$$\|e^{i\theta}u\| = |e^{i\theta}|\|u\| = \|u\|$$

e que do fato de

$$\|u(t)\|^2 = \|\phi_\omega\|^2, \quad \forall t \in [0,T],$$

resulta que

$$(\phi_\omega + p + iq, \phi_\omega + p + iq) = (\phi_\omega, \phi_\omega),$$

isto é,

$$2Re(p,\phi_\omega)+2Re(\phi_\omega,iq)+2Re(p,iq)+\|p\|^2+\|q\|^2=0.$$

Consequentemente,

$$2(p,\phi_\omega)+\|p\|^2+\|q\|^2=0,$$

donde obtemos o desejado.

Sem perda de generalidade, suponhamos que $\|\phi_\omega\| = 1$. Definamos $p_{\shortparallel}$ e $p_\perp$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&p_{\shortparallel} = (p,\phi_\omega)\phi_\omega = -\frac{1}{2}(\|p\|^2+\|q\|^2)\phi_\omega = -\frac{1}{2}\|z\|^2\phi_\omega\\
&p_\perp = p - p_{\shortparallel}.
\end{aligned}$$

Assim, temos que $p_\perp \perp \phi_\omega$ e $p_\perp \perp \phi_\omega^\alpha\phi_\omega'$, pois

$$\begin{aligned}
(p_\perp,\phi_\omega) &= (p-p_{\shortparallel},\phi_\omega) = (p,\phi_\omega)-(p_{\shortparallel},\phi_\omega) = (p,\phi_\omega)-((p,\phi_\omega)\phi_\omega,\phi_\omega)\\
&= (p,\phi_\omega)-(p,\phi_\omega)=0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
(p_\perp,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega') &= (p-p_{\shortparallel},\phi_\omega^\alpha\phi_\omega') = (p,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')-(p_{\shortparallel},\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')\\
&= (p,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')-((p,\phi_\omega)\phi_\omega,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')\\
&= (p,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')-(p,\phi_\omega)(\phi_\omega^{\alpha+1},\phi_\omega')\\
&= 0,
\end{aligned}$$

devido a relação de compatibilidade $(p,\phi_\omega^\alpha\phi_\omega')=0$ e devido ao fato de que $\frac{d^n}{dx^n}\phi(x)\to 0$ se $|x|\to\infty$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(\phi_\omega^{\alpha+1},\phi_\omega')=0$. Desta forma, resulta do Teorema 4.1-(b) que

$$\left(\mathcal{L}\frac{p_\perp}{\|p_\perp\|},\frac{p_\perp}{\|p_\perp\|}\right)\geq\xi$$

Logo,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}p_\perp, p_\perp) &\geq \xi\|p_\perp\|^2\\
&\geq \xi\left(p+\frac{1}{2}\|w\|^2\phi_\omega, p+\frac{1}{2}\|z\|^2\phi_\omega\right)\\
&\geq \xi\left[(p,p)+\|z\|^2(p,\phi_\omega)+\frac{1}{4}\|z\|^4\right]\\
&\geq \xi\left(\|p\|^2-\frac{1}{2}\|z\|^4+\frac{1}{4}\|z\|^4\right)\\
&\geq \xi\|p\|^2-\xi\frac{1}{4}\|z\|^4\\
&\geq \xi\|p\|^2-D_1\|z\|_1^3-D_2\|z\|_1^4,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

com $D_i>0$, $i=1,2$. Observe que $(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega)<0$, pois usando a igualdade (3.39) temos que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega) &= -(\phi_\omega'',\phi_\omega)+(\omega\phi_\omega,\phi_\omega)-(\alpha+1)(\phi_\omega^{\alpha+1},\phi_\omega)\\
&= (\phi_\omega^{\alpha},\phi_\omega)-(\alpha+1)(\phi_\omega^{\alpha+1},\phi_\omega)\\
&= -\alpha(\phi_\omega^{\alpha+1},\phi_\omega)
\end{aligned}$$

Logo, da desigualdade (4.25) concluímos que

$$(\mathcal{L}p,p)\geq \xi_1\|p\|_1^2-D_1\|z\|_1^3-D_2\|z\|_1^4, \tag{4.26}$$

com $\xi_1>0$ e $D_i>0$, $i=1,2$. Com efeito, como

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}p,p) &= (\mathcal{L}p_\perp,p_\perp)+(\mathcal{L}p_{\shortparallel},p_{\shortparallel})+2(\mathcal{L}p_\perp,p_{\shortparallel})\\
&\geq \xi\|p\|^2-D_1\|z\|_1^3-D_2\|z\|_1^4+\frac{1}{4}\|z\|^4(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega)-\|z\|^2(\mathcal{L}p_\perp,\phi_\omega)\\
&\geq \xi\|p\|^2-D_1\|z\|_1^3-D_2\|z\|_1^4+\frac{1}{4}\|z\|_1^4(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega)-\|z\|^2(\mathcal{L}p_\perp,\phi_\omega)\\
&\geq \xi\|p\|^2-D_1\|z\|_1^3+\left(\frac{1}{4}(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega)-D_2\right)\|z\|_1^4-\|z\|_1^3\|\mathcal{L}\phi_\omega\|\\
&= \xi\|p\|^2-\left(D_1+\|\mathcal{L}\phi_\omega\|\right)\|z\|_1^3+\left(\frac{1}{4}(\mathcal{L}\phi_\omega,\phi_\omega)-D_2\right)\|z\|_1^4\\
&= \xi\|p\|^2-D_1\|z\|_1^3-D_2\|z\|_1^4,
\end{aligned}$$

com $D_i > 0$, $i = 1, 2$. Então, podemos dizer que para $a, b > 0$

$$\begin{aligned} a\|p'\|^2 + b\|p\|^2 &\leq a\|p'\|^2 + b(\mathcal{L}p, p) + D_1\|z\|_1^3 + D_2\|z\|_1^4 \\ &= a\|p'\|^2 + b\int_{\mathbb{R}} -p''p + [\omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha]p^2 dx + D_1\|z\|_1^3 + D_2\|z\|_1^4 \\ &= (a+b)(\mathcal{L}p, p) - a\int_{\mathbb{R}} [\omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha]p^2 dx + D_1\|z\|_1^3 + D_2\|z\|_1^4 \\ &\leq (a+b)(\mathcal{L}p, p) + a\|\omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha\|_\infty\|p^2\| + D_1\|z\|_1^3 + D_2\|z\|_1^4, \end{aligned}$$

donde segue que

$$a\|p'\| + [b - a\|\omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha\|_\infty]\|p\|^2 \leq (a+b)(\mathcal{L}p, p) + D_1\|z\|_1^3 + D_2\|z\|_1^4. \tag{4.27}$$

Escolhendo $a, b > 0$ tal que $[b - a\|\omega - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha\|_\infty] > 0$, resulta da desigualdade (4.27) que

$$(\mathcal{L}p, p) \geq \xi_1\|p\|_1^2 - D_1\|z\|_1^3 - D_2\|z\|_1^4$$

com $\xi_1 > 0$ constante, o que prova o desejado.

Agora, usando o fato de que para $t \in [0, T]$

$$\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega}) = \|z\|_{1,\omega},$$

obtemos da desigualdade (4.24), da desigualdade anterior e do Teorema 4.2 que

$$\Delta\zeta(t) \geq h(\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})), \tag{4.28}$$

onde $h(x) = a_1x^2(1 - o(x^2))$ com $a_1 > 0$. Note que $h(0) = 0$ e $h(x) > 0$ para x suficientemente pequeno. De fato, considere $g(x) = (1 - o(x^2))$, segue que $g(0) = 1 > 0$. Como g é contínua, existe um intervalo $J = [-i, i]$; $i > 0$ tal que $g(x) > 0$, $\forall x \in J$, consequentemente, $h(x) > 0$, $\forall x \in J - \{0\}$.

Finalmente, temos que dado $\varepsilon > 0$ pequeno tal que $h(\varepsilon) > 0$, do fato de ζ ser contínua em $S_\omega = \{v \in H^1(\mathbb{R});\ \|v\| = \|\phi_\omega\|\}$, resulta que se $u_0 \in S_\omega$, então existe $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ tal que se $\|u_0 - \phi_\omega\|_1 < \delta$, então

$$|\Delta\zeta(0)| = |\zeta(u_0) - \zeta(\phi_\omega)| < h(\varepsilon). \tag{4.29}$$

Daí, resulta da desigualdade (4.28), do fato de $t \to \rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})$ ser contínua e do fato de $\Delta\zeta(t)$ ser constante que

$$h(\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})) \leq \Delta\zeta(t) = \Delta\zeta(0) \leq |\Delta\zeta(0)| < h(\varepsilon), \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.30}$$

Sendo h crescente e invertível para $x \geq 0$ pequeno, obtemos que

$$\rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega}) < \varepsilon, \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.31}$$

Portanto, $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável em $H^1(\mathbb{R})$ relativo a pertubações pequenas na qual os dados iniciais se preservam na norma em $L^2(\mathbb{R})$. Provemos agora a estabilidade no intervalo $[0, \infty)$. Com efeito, definamos

$$\mathcal{A} = \{t; \text{ o mínimo de } \Omega_t(y, \theta) \text{ é atingido}\}.$$

Note que $\mathcal{A} \neq \emptyset$, pois pelo Lema 4.2, $[0, T] \subset \mathcal{A}$, para todo $T > 0$. Seja $\tilde{T}$ o maior valor de T tal que $[0, \tilde{T}] \subset \mathcal{A}$ e suponhamos por absurdo que $\tilde{T} < \infty$. Como, pelo Lema 4.2, temos

$$\inf_{(y,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi)} \Omega_t(y, \theta) = \rho_\omega(u(t), \mathcal{O}_{\phi_\omega})^2 < \varepsilon^2 \leq \max\{1, \omega\}\, \varepsilon^2 \leq \|\phi_\omega\|_{1,\omega},$$

e como $t \mapsto \inf_{(y,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi)} \Omega_t(y, \theta)$ é contínua, então existe $T'' > 0$ de modo que

$$\inf_{(y,\theta) \in \mathbb{R} \times [0,2\pi)} \Omega_t(y, \theta) < \|\phi_\omega\|_{1,\omega}, \quad \text{para todo}\, t \in [\tilde{T}, \tilde{T} + T''],$$

ou seja, $[\tilde{T}, \tilde{T} + T''] \subset \mathcal{A}$, o que é um absurdo.

Portanto, podemos concluir que $\mathcal{O}_{\phi_\omega}$ é estável em toda reta $\mathbb{R}$ com pertubações pequenas na qual os dados iniciais se preservam na norma em $L^2(\mathbb{R})$.

Antes de prosseguirmos, vejamos o seguinte Lema:

Lema 4.3. *Seja* $1 \leq \alpha < 4$. *Se* $c > 0$ *e* $0 < \beta < c$, *então existe* $\delta > 0$ *tal que se* $\|v - \phi_c\|_1 < \delta$, *então existe um único* e *com* $|e - c| < \beta$ *tal que* $F(v) = F(\phi_e)$.

Demonstração: Primeiramente, note que $c + \beta > c > c - \beta > 0$ pois $0 < \beta < c$. Definamos h tal que $h(s) = F(\phi_s) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \phi_s^2 dx$. Sabemos que h é contínua e também estritamente crescente, pois $h'(s) > 0$. Logo,

$$h(c + \beta) > h(c) > h(c - \beta),$$

donde segue que

$$h(c + \beta) - h(c) > 0 \quad \text{e} \quad h(c - \beta) - h(c) < 0.$$

Consequentemente, temos que existe $\nu > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$h(c + \beta) - h(c) > 2\nu \quad \text{e} \quad h(c - \beta) - h(c) < -2\nu.$$

Como F é uma função contínua em H^1, resulta que existe $\delta > 0$ tal que se $\|v - \phi_c\| < \delta$, então

$$-\nu < F(\phi_c) - F(v) < \nu.$$

Desta forma, obtemos que

$$\begin{aligned} F(\phi_{c+\beta}) - F(v) &= F(\phi_{c+\beta}) - F(\phi_c) + F(\phi_c) - F(v) \\ &= h(c + \beta) - h(c) + F(\phi_c) - F(v) \\ &> 2\nu - \nu = \nu. \end{aligned}$$

Analogamente, chegamos que

$$F(\phi_{c-\beta}) - F(v) < -\nu.$$

Portanto,

$$F(\phi_{c-\beta}) - F(v) < -\nu < 0 < \nu < F(\phi_{c+\beta}) - F(v),$$

ou seja,

$$h(c-\beta) < F(v) < h(c+\beta).$$

Sendo h contínua e estritamente crescente, concluímos que existe $e \in (c-\beta, c+\beta)$ tal que

$$F(\phi_e) = F(v),$$

o que prova o desejado. $\square$

Analisemos agora a estabilidade para o caso em que $\|u_0\| \neq \|\phi_c\|$, i.e, $F(u_0) \neq F(\phi_c)$. Com efeito, seja $c > 0$ fixo. Temos então uma função ϕ_c associada ao parâmetro c. E é um funcional contínuo. Logo, dado $\varepsilon > 0$, existe $0 < \delta_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ tal que se $\|u_0 - v\|_1 < \delta_1$, então $|E(u_0) - E(v)| < \varepsilon$. Considere $\zeta_e := E + eF$, onde e é dado pelo lema anterior. Assim, $F(u_0) = F(\phi_e)$, donde fazendo o mesmo processo feito anteriormente, temos

$$\zeta_e(u_0) - \zeta_e(\phi_e) > h_e(\|z_e\|_1)$$

onde h_e é uma função estritamente crescente no intervalo $[0, A]$ com A suficientemente pequeno e $z_e = \rho_e(u, \mathcal{O}_{\phi_e})$.

Sabemos que:

(i) Pela continuidade de $s \mapsto \phi_s$, segue que para $\delta_1 > 0$ existe $\delta_2 > 0$ tal que se $|e - c| < \delta_2$, então $\|\phi_c - \phi_e\|_1 < \delta_1$;

(ii) Pelo Lema 4.3, escolhendo ϕ_c suficientemente próximo de u_o, temos que existe $0 < \delta < \delta_1$ e um único e tal que $\|u_0 - \phi_c\|_1 < \delta$, $|e - c| < \delta_2$ e $F(u_0) = F(\phi_e)$.

Provemos que se $\|u_0 - \phi_c\|_1 < \delta$, então

$$\|z_c\|_{1,c} < \varepsilon.$$

Com efeito, sendo $\|u_0 - \phi_c\|_1 < \delta$, podemos considerar e tal que $|e - c| < \delta_2$ e $F(u_0) = F(\phi_e)$.

Em particular, $\|\phi_c - \phi_e\| < \delta_1 < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Assim, temos que

$$|E(u_0) - E(\phi_e)| < h_e\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Como $F(u_0) = F(\phi_e)$, resulta que

$$|E(u_0) - eF(u_0) - E(\phi_e) + eF(\phi_e)| < h_e\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Isto é,

$$|\zeta_e(u_0) - \zeta_e(\phi_e)| < h_e\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Mas,

$$h_e\left(\|z_e\|_{1,e}\right) < \zeta_e(u_0) - \zeta_e(\phi_e) < |\zeta_e(u_0) - \zeta_e(\phi_e)| < h_e\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Usando a o fato de h_e ser crescente e invertível, obtemos

$$\|z_e\|_1 < \varepsilon.$$

Finalmente,

$$\|z_c\|_{1,c} \leq \|u(\cdot+y,t)e^{i\theta} - \phi_c\|_1 = \|u(\cdot+y,t)e^{i\theta} - \phi_e + \phi_e - \phi_c\|_1 \leq \|z_e\|_1 + \|\phi_e - \phi_c\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

mostrando a desigualdade desejada. $\square$

Capítulo 5

Estabilidade Orbital segundo o Método de Grillakis, Shatah, e Strauss

Seja X um espaço de HIlbert real com produto interno $(\cdot,\cdot)$. Se X' é seu dual, então existe um isomorfismo natural $I : X \to X'$ definido por

$$\langle Iu, v\rangle = (u, v),$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota a paridade entre X e X'.

Observação 5.1. **(i)** *Neste capítulo usaremos I explicitamente e sempre identificaremos X'' com X de uma maneira natural;*

(ii) *Quando nos referirmos ao adjunto de um operador linear, estaremos fazendo isso com respeito a $\langle\cdot,\cdot\rangle$ e não $(\cdot,\cdot)$.*

Seja J um operador linear fechado de X' em X com domínio denso $D(J) \subset X'$. Suponhamos que J é anti-simétrico, ou seja,

$$\langle Ju, v\rangle = -\langle u, Jv\rangle \quad \forall u, v \in D(J), \tag{5.1}$$

e também que

$$J \text{ é sobrejetor.} \tag{5.2}$$

Observação 5.2. *Na verdade não precisamos supor que J seja sobrejetor mas somente que Φ_ω e χ_ω(veremos suas respectivas definições depois) pertençam a imagem de J.*

Seja $E : X \to \mathbb{R}$ um funcional de classe C^2 definido em todo X. Escreveremos sua derivada como $\langle E'(u), v\rangle$, onde $E' : X \to X'$, e sua segunda derivada como $\langle E''(u)w, v\rangle$ (veremos uma definição mais formal para tais derivadas no próximo capítulo).

Seja T um grupo unitário. Então, $T(s) : X \to X$ é um operador unitário para cada $s \in \mathbb{R}$, $T(s)T(r) = T(s+r)$, $\forall s, r \in \mathbb{R}$, $T(0) = I_d$ e $s \to T(s)$ é fortemente contínuo. Suponhamos que $(T(s)u, v) = (u, T(-s)v)$ $\forall s \in \mathbb{R}$ e $\forall u, v \in X$. Denotemos por $T'(0)$ o gerador infinitesimal, no qual é um operador anti-adjunto com respeito ao produto interno $(\cdot,\cdot)$ e com domínio denso em X. O adjunto de T pode ser expressado, para $s \in \mathbb{R}$, como

$$T^*(s)I = IT(-s),$$

onde $T^*(s) : X' \to X'$, pois

$$\begin{aligned} \langle IT(-s)u, v\rangle &= (T(-s), v) = (u, T(s)v) \\ &= \langle Iu, T(s)v\rangle = \langle T^*(s)Iu, v\rangle \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Suponhamos que E é invariante sobre T, isto é,

$$E(T(s)u) = E(u); \quad s \in \mathbb{R},\, u \in X. \tag{5.3}$$

Derivando a igualdade anterior com respeito a u, obtemos

$$E'(T(s)u)T(s) = E'(u).$$

Note que

$$\begin{aligned} \langle E'(T(s)u), T(s)v\rangle &= \Big(I^{-1}E'(T(s)u), T(s)v\Big) = \Big(T(-s)I^{-1}E'(T(s)u), v\Big) \\ &= \Big\langle IT(-s)I^{-1}E'(T(s)u), v\Big\rangle = \langle T^*(s)E'(T(s)u), v\rangle\,, \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

Portanto,

$$T^*(s)E'(T(s)u) = E'(u). \tag{5.4}$$

Derivando novamente com respeito a u, temos devido ao fato de $T^*(s)$ ser limitado que

$$T^*(s)E''(T(s)u)T(s) = E''(u). \tag{5.5}$$

Por outro lado, derivando a igualdade (5.3) com respeito a s em $s = 0$, resulta que

$$E'(T(s)u)T'(0)T(s)u\big|_{s=0} = 0.$$

ou seja,

$$\langle E'(u), T'(0)u\rangle = 0, \quad \text{para } u \in D(T'(0)). \tag{5.6}$$

Suponhamos que J comuta com T, no seguinte sentido

$$T(s)J = JT^*(-s). \tag{5.7}$$

Note que $T^*(s)T^*(-s) = I_d$, $\forall s \in \mathbb{R}$, pois

$$\begin{aligned} \langle T^*(s)T^*(-s)u, v\rangle &= \langle T^*(-s)u, T(s)v\rangle = \langle u, vT(-s)T(s)\rangle \\ &= \langle u, v\rangle\,, \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Assim, temos que $T(s)JT^*(s) = J$ é equivalente à igualdade (5.7). Utilizando o fato de que $T^*(s)I = IT(-s)$, também temos que $JIT(s) = T(s)JI$ é equivalente à igualdade (5.7).

Definamos o funcional $F : X \to \mathbb{R}$ dado por

$$F(u) = \frac{1}{2}\langle Iu, u\rangle = \frac{1}{2}\|u\|^2. \tag{5.8}$$

Temos que F invariante sobre T, ou seja,

$$F(T(s)u) = F(u) \quad \text{para } s \in \mathbb{R}, u \in X. \tag{5.9}$$

De fato, basta ver que do fato de $T(s)$ ser operador unitário, temos que

$$F(T(s)u) = \frac{1}{2}\|T(s)u\|^2 = \|u\|^2 \quad \forall s \in \mathbb{R}, \forall u \in X. \tag{5.10}$$

Note que JI é uma extensão de $T'(0)$. Derivando a igualdade (5.8), obtemos que $F'(u) = Iu$ e $F''(u) = I$. Além disso,

$$\begin{aligned}
&\text{(a) } T^*(s)F'(T(s)u) = F'(u);\\
&\text{(b) } T^*(s)IT(s) = I;\\
&\text{(c) } IT'(0) = -T'(0)^*I;\\
&\text{(d) } I[D(T'(0))] = D(T'(0)^*).
\end{aligned} \tag{5.11}$$

Com efeito, (a) decorre do fato de que

$$\begin{aligned}
\langle F'(T(s)u), T(s)v\rangle &= \Big(I^{-1}F'(T(s)u), T(s)v\Big) = \Big(T(-s)I^{-1}F'(T(s)u), v\Big)\\
&= \Big\langle IT(-s)I^{-1}F'(T(s)u), v\Big\rangle = \langle T^*(s)F'(T(s)u), v\rangle\,, \quad \forall v \in X,
\end{aligned}$$

(b) decorre do fato de que $T^*(s)I = IT(-s)$, (c) decorre do fato de que

$$\begin{aligned}
\langle IT'(0)u, v\rangle &= (T'(0)u, v) = -(u, T'(0)v)\\
&= -\langle Iu, T'(0)v\rangle = -\langle T'(0)^*Iu, v\rangle \quad \forall u, v \in X.
\end{aligned}$$

e (d) decorre imediatamente de (c).

A equação estudada neste capítulo tem a fórmula abstrata

$$\frac{du}{dt} = JE'(u(t)), \quad u(t) \in X. \tag{5.12}$$

Note que E e F são conservativos sobre o fluxo de (5.12). De fato, veja que

$$\frac{dE(u)}{dt} = \left\langle E'(u), \frac{du}{dt}\right\rangle = \langle E'(u), JE'(u)\rangle = -\langle JE'(u), E'(u)\rangle = -\Big(I^{-1}JE'(u), E'(u)\Big) = 0$$

Utilizando a igualdade (5.6) e o fato de que J é anti-simétrico também obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{dF(u)}{dt} &= \left\langle F'(u), \frac{du}{dt} \right\rangle = \langle Iu, JE'(u) \rangle = - \langle JIu, E'(u) \rangle \\ &= - \langle T'(0)u, E'(u) \rangle = 0,\end{aligned}$$

o que mostra o desejado.

Consideraremos, a partir de agora, a equação (5.12) somente no sentido fraco.

Definição 5.1. *Uma solução de (5.12) em um intervalo I, é uma função $u \in C(I; X)$ tal que*

$$\frac{d}{dt} \langle u(t), \psi \rangle = \langle E'(u(t)), -J\psi \rangle = \langle JE'(u(t)), \psi \rangle \tag{5.13}$$

em $\mathcal{D}'(I)$, $\forall \psi \in D(J) \subset X'$.

Hipótese 1(Existência de Soluções). Para cada $u_0 \in X$, existe $t_0 > 0$ dependendo somente de μ, onde $\|u_0\| \leq \mu$, e existe uma solução u da equação (5.12) no intervalo $I = [0, t_0)$ tal que

(a) $u(0) = u_0$ e

(b) $E(u(t)) = E(u_0)$ e $F(u(t)) = F(u_0)$ para $t \in I$.

Observe que se $u(t)$ é solução de (5.12), então $T(s)u(t)$ também é solução de (5.12), $\forall s \in \mathbb{R}$. Com efeito, das igualdades (5.4) e (5.7) e do fato de J ser anti-simétrico obtemos, para $s \in \mathbb{R}$, que

$$\begin{aligned}\langle E'(T(s)u(t)), J\psi \rangle &= \langle E'(u(t)), T(-s)J\psi \rangle = \langle E'(u(t)), JT^*(s)\psi \rangle \\ &= - \langle JE'(u(t)), T^*(s)\psi \rangle = -\frac{d}{dt} \langle u(t), T^*(s)\psi \rangle \\ &= -\frac{d}{dt} \langle T(s)u(t), \psi \rangle, \quad \forall \psi \in D(J).\end{aligned}$$

Definição 5.2. *Definimos solução do tipo “bound state” como sendo uma solução da equação* *de evolução (5.12) que possui a forma*

$$u(t) = T(\omega t)\Phi \tag{5.14}$$

onde $\omega \in \mathbb{R}$ *e* $\Phi \in X$.

Temos que se $\Phi \in D(T'(0))$ satisfaz a equação "estacionária"

$$E'(\Phi) = \omega F'(\Phi), \tag{5.15}$$

então $T(\omega t)\Phi$ é solução bound state. De fato, basta ver que das igualdades (5.11) e (5.4) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}T(\omega t)\Phi &= \omega T'(0)T(\omega t)\Phi = \omega JIT(\omega t)\Phi = \omega JT^*(-\omega t)I\Phi \\ &= \omega JT^*(-\omega t)F'(\Phi) = JT^*(-\omega t)E'(\Phi) = JE'(T(\omega t)\Phi). \end{aligned}$$

Hipótese 2 (Existência de Solução Bound State). Existem números reais ω_1 e ω_2 tal que $\omega_1 < \omega_2$ e uma função

(a) $\omega \to \Phi_\omega$ de um intervalo aberto (ω_1, ω_2) até X na qual é C^1 tal que para cada $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$:

(b) $E'(\Phi) = \omega F'(\Phi)$;

(c) $T'(0)\Phi_\omega \neq 0$;

(d) $\Phi_\omega \in D(T'(0)^2)$.

Definamos a função escalar

$$d(\omega) = E(\Phi_\omega) - \omega F(\Phi_\omega) \tag{5.16}$$

e o operador de X em X'

$$H_\omega = E''(\Phi_\omega) - \omega F''(\Phi_\omega). \tag{5.17}$$

Suponhamos que H_ω é auto-adjunto. Lembremos que o espectro de H_w consiste de todos os números reais λ tais que $H_\omega - \lambda I$ é não invertível.

Temos que $\lambda = 0$ pertence ao espectro de H_ω. Com efeito, segue das igualdades (5.4), (5.11) e (5.15) que

$$E'(T(s)\Phi_\omega) - \omega F'(T(s)\Phi_\omega) = T^*(-s)(E'(\Phi_\omega) - \omega F'(\Phi_\omega)) = 0$$

Derivando a igualdade acima com respeito a s em $s = 0$, deduzimos que

$$[E''(T(s)\Phi_\omega)T(s)T'(0)\Phi_\omega]\,|_{s=0} - [\omega F''(T(s)\Phi_\omega)T(s)T'(0)\Phi_\omega]\,|_{s=0} = 0,$$

ou seja,

$$E''(\Phi_\omega)T'(0)\Phi_\omega - \omega F''(\Phi_\omega)T'(0)\Phi_\omega = 0$$

Assim,

$$H_\omega(T'(0)\Phi_\omega) = 0, \tag{5.18}$$

e portanto, $T'(0)\Phi_\omega$ é uma autofunção com autovetor 0, consequentemente a afirmação está provada.

Definição 5.3. *A Φ_ω-órbita $\{T(\omega t)\Phi_\omega, t \in \mathbb{R}\}$ é estável se dado $\varepsilon > 0$ existe $0 < \delta(\varepsilon) < \varepsilon$ tal que se $\|u_0 - \Phi_\omega\| < \delta$ e $u(t)$ é uma solução de (5.12) em algum intervalo $[0, t_0]$ com $u(0) = u_0$, então $u(t)$ é solução $\forall t \geq 0$ e*

$$\sup_{0 \leq t < \infty} \inf_{s \in \mathbb{R}} \|u(t) - T(s)\Phi_\omega\| < \varepsilon.$$

Caso contrário dizemos que a Φ_ω-órbita é instável. Em particular, isto aconteceria no caso de soluções em que não podem ser prolongadas.

Hipótese 3. Para cada $\omega \in (\omega_1, \omega_2)$, H_ω tem exatamente um autovalor negativo simples, seu núcleo é gerado por $T'(0)\Phi_\omega$ e o resto do espectro é positivo e limitado longe do zero.

Proposição 5.1. *Se $d''(\omega) > 0$ então H_ω tem no mínimo um autovalor negativo.*

Demonstração: Derivando (5.16) e utilizando a hipótese de que $E'(\Phi_\omega) = \omega F'(\Phi_\omega)$, obtemos

$$d'(\omega) = E'(\Phi_\omega)\frac{d\Phi_\omega}{d\omega} - F(\Phi_\omega) - \omega F'\Phi_\omega\frac{d\Phi_\omega}{d\omega} = -F(\Phi_\omega). \tag{5.19}$$

Por outro lado, derivando (5.15), temos que

$$E''(\Phi_\omega)\frac{d\Phi_\omega}{d\omega} = F'(\Phi_\omega) + \omega F''(\Phi_\omega)\frac{d\Phi_\omega}{d\omega},$$

ou seja,

$$H_\omega\frac{d\Phi_\omega}{d\omega} = F'(\Phi_\omega). \tag{5.20}$$

Portanto,

$$d''(\omega) = \left\langle -F'(\Phi_\omega), \frac{d\Phi_\omega}{d\omega}\right\rangle = -\left\langle H_\omega\frac{d\Phi_\omega}{d\omega}, \frac{d\Phi_\omega}{d\omega}\right\rangle. \tag{5.21}$$

Consequentemente, se $d''(\omega) > 0$ então $\left\langle H_\omega\frac{d\Phi_\omega}{d\omega}, \frac{d\Phi_\omega}{d\omega}\right\rangle < 0$, o que prova o desejado. $\square$

5.1 Estabilidade

Frequentemente, quando o parâmetro ω permanecer fixado, retiraremos o subíndice ω, ou seja, escreveremos Φ para Φ_ω e H para H_ω.

Definição 5.4. *Uma vizinhança tubular, ou simplesmente tubo, em torno da órbita $\{T(s)\Phi, s \in \mathbb{R}\}$ é definido por*

$$U_\varepsilon = \left\{u \in X; \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u - T(s)\Phi\| < \varepsilon\right\}.$$

Lema 5.1. *Se as Hipóteses 2 e 3 são válidas, então*

(i) *$T(s)\Phi = \Phi$ para algum $s > 0$*

ou

(ii) *Se $T(s_n)\Phi \to \Phi$ com $(s_n) \subset \mathbb{R}$, então $s_n \to 0$.*

Demonstração: Considere A_Φ como sendo o conjunto dos pontos críticos de $L = E - \omega F$ em um vizinhança de Φ. Da Hipótese 2, segue que $L'(\Phi) = 0$. Desta forma, se u é um ponto crítico, então usando série de Taylor, podemos escrever

$$\begin{aligned} 0 = L'(u) &= L'(\Phi) + L''(\Phi)(u - \Phi) + O(\|u - \Phi\|^2) \\ &= L''(\Phi)(u - \Phi) + O(\|u - \Phi\|^2), \end{aligned}$$

donde segue que

$$0 = L'(u) - L'(\Phi) = H(u - \Phi) + O(\|u - \Phi\|^2).$$

Logo, o conjunto dos pontos críticos A_Φ é localmente isomorfo ao espaço nulo de H. Se Φ é ponto crítico, então $T(s)\Phi$ é ponto crítico $\forall s \in \mathbb{R}$, pois

$$L'(T(s)\Phi) = E'(T(s)\Phi_\omega) - \omega F'(T(s)\Phi_\omega) = T^*(-s)(E'(\Phi_\omega) - \omega F'(\Phi_\omega)) = 0, \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

Como L' é contínua e $s \to T(s)\Phi$ é suave, então existe uma vizinhança N de Φ e um número $\mu > 0$ tal que

$$\{u \in N; L'(u) = 0\} = \{T(s)\Phi; |s| < \mu\}.$$

Suponhamos que (ii) é falso. Então, existe uma sequência $\{r_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que $|r_n| \geq \mu$ e $T(r_n)\Phi \in N$ para n suficientemente grande. Fixe tal n. Para este n fixo, já provamos que existe s_n com $|s_n| < \mu$ tal que $T(r_n)\Phi = T(s_n)\Phi$. Logo, $T(r_n - s_n)\Phi = \Phi$, ou seja, (i) é válido. $\square$

Lema 5.2. *Dadas as Hipóteses 2 e 3, existe $\varepsilon > 0$ e uma função de classe C^2*

$$s : U_\varepsilon \to \mathbb{R} \qquad (\mathbb{R}/\textit{período, se a órbita é periódica.})$$

tal que, $\forall u \in U_\varepsilon$ e $\forall r \in \mathbb{R}$,

(i) $\|T(s(u))u - \Phi\| \leq \|T(r)u - \Phi\|$;

(ii) $(T(s(u))u, T'(0)\Phi) = 0$;

(iii) *$s(T(r)u) = s(u) - r$, módulo o período se a órbita for periódica.*

Demonstração: Seja $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ tal que $\rho(s) = \|T(s)u - \Phi\|^2$. Vamos agora definir $s(u)$ como sendo o mínimo de $\rho(s)$ para u próximo da órbita de Φ. Com efeito, usando o fato de $T'(0)$ ser anti-adjunto, temos que

$$\begin{aligned}
\rho'(s) &= (T'(0)T(s)u, T(s)u - \Phi) + (T(s)u - \Phi, T'(0)T(s)u) \\
&= (T'(0)T(s)u, T(s)u) - (T'(0)T(s)u, \Phi) + (T(s)u, T'(0)T(s)u) - (\Phi, T'(0)T(s)u) \\
&= 2(T(s)u, T'(0)\Phi)
\end{aligned}$$

e

$$\rho''(s) = 2(T'(0)T(s)u, T'(0)u) = -2(T(s)u, T'(0)^2\Phi)$$

Em particular, se $u = \Phi$ e $s = 0$, então

$$\rho'(0) = 2(\Phi, T'(0)\Phi) = 0,$$

pois do fato de $T'(0)$ ser anti-adjunto vem que

$$(\Phi, T'(0)\Phi) = (T'(0)\Phi, \Phi) = -(\Phi, T'(0)\Phi),$$

e

$$\rho''(0) = -2(\Phi, T'(0)^2\Phi) = 2(T'(0)\Phi, T'(0)\Phi) = 2\|T'(0)\Phi\|^2 > 0,$$

pela Hipótese 2. Considere agora $h(s, u) = 2(T(s)u, T'(0)\Phi)$. Conforme já vimos $h(0, \Phi) = 0$ e $\frac{d}{ds}h(0, \Phi) \neq 0$. Desta forma, pelo Teorema da Função Implícita existe uma bola aberta V com centro Φ, um intervalo I contendo $s = 0$, e uma função de classe C^2 $s : V \to I$ tal que $h(s, u) = 0$, ou seja, $\rho'(s) = 0$, possui uma única solução $s = s(u) \in I$, $\forall u \in V$. Logo, $s(u)$ é o único mínimo de $\rho(s)$ em I para cada $u \in V$. Note que não existe $s > 0$ tal que $T(s)\Phi = \Phi$, pois o único s que satisfaz tal igualdade é $s(\Phi) = 0$. Assim, pelo Lema 5.1 segue que $\forall \delta > 0$ (δ menor que a metade do período no caso periódico) existe

$\eta(\delta) > 0$ tal que se $\|T(s)\Phi - \Phi\| < \eta(\delta)$, então $|s| < \delta$. Considere $I_1 = (-\delta, \delta) \subset I$ e $V_1 = \left\{v; \|v - \Phi\| < \frac{\eta(\delta)}{4}\right\} \subset V$.

Dados $u \in V$ e $r \in \mathbb{R}$, suponhamos por absurdo que

$$\|T(r)u - \Phi\| < \|T(s(u))u - \Phi\|.$$

Então, utilizando o fato de $T(r)$ ser um operador unitário e $s(u)$ ser o mínimo de $\rho(s)$, segue que

$$\begin{aligned}
\|T(r)\Phi - \Phi\| &\leq \|T(r)\Phi - T(r)u\| + \|T(r)u - \Phi\| \\
&= \|T(r)(u - \Phi)\| + \|T(r)u - \Phi\| \\
&\leq \|T(r)(u - \Phi)\| + \|T(s(u))u - \Phi\| \\
&\leq 2\|u - \Phi\| < \eta(\delta),
\end{aligned}$$

isto é, $r \in I_1 \subset I$. Mas sabemos que $s(u)$ é o único mínimo de $\rho(s)$ em I. Portanto, $r = s(u)$ (mais um múltiplo do período no caso periódico), o que é um absurdo. Logo,

$$\|T(s(u))u - \Phi\| \leq \|T(r)u - \Phi\|,$$

e portanto, o item (i) está provado para $u \in V_1$. O item (ii), para $u \in V_1$, decorre imediatamente do fato de que $\rho'(s(u)) = 0$. Para mostrarmos (iii) válido para V_1, primeiramente note que do fato de $T(r)$ ser unitário temos que para $r \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\|T(s(u) - r)\Phi - \Phi\| &= \|T(-r)T(s(u))\Phi - \Phi\| = \|T(s(u))\Phi - T(r)\Phi\| \\
&\leq \|T(s(u))\Phi - T(r)u\| + \|T(r)u - T(r)\Phi\| \\
&= \|T(s(u))\Phi - T(r)u\| + \|u - \Phi\| \\
&\leq \|T(s(u))\Phi - \Phi\| + \|T(r)u - \Phi\| + \|u - \Phi\| \\
&\leq \|T(s(u))\Phi - T(s(u))u\| + \|T(s(u))u - \Phi\| + \|T(r)u - \Phi\| + \|u - \Phi\| \\
&\leq 2\|u - \Phi\| + \|T(s(u))u - \Phi\| + \|T(r)u - \Phi\|.
\end{aligned}$$

Daí, se $T(r)u \in V_1$ e $u \in V_1$, então

$$\|T(s(u)-r)\Phi - \Phi\| < \frac{\eta(\delta)}{2} + \frac{\eta(\delta)}{4} + \frac{\eta(\delta)}{4} = \eta(\delta).$$

Consequentemente, $s(u) - r \in I$ (módulo o período). Note que $\|T(s(u)-r)T(r)u - \Phi\| = \|T(s(u))u - \Phi\|$, ou seja, $\|T(t)T(r)u - \Phi\|$ assume o menor valor possível em $t = s(u) - r$. Da unicidade resulta que $s(T(r)u) = s(u) - r$ (módulo o período). Finalmente, estenderemos a definição de $s(u)$ à $u \in U_\varepsilon$, onde $\varepsilon = \frac{\eta(\delta)}{4}$, conforme segue: se $\|u - T(s_0)\Phi\| < \varepsilon$ para algum $s_0 \in \mathbb{R}$, definamos

$$s(u) \equiv s(T(-s_0)u) - s_0.$$

Esta definição independe da escolha de s_0. Com efeito, se $\|u - T(s_0)\| < \varepsilon$ e $\|u - T(s_1)\| < \varepsilon$, então $T(-s_0)u$ e $T(-s_1)u$ pertencem a V_1. Logo, de (iii), segue que

$$s(T(-s_1)u) = s(T(s_0 - s_1)T(-s_0)u = s(T(-s_0)u) - (s_0 - s_1)$$

(mais um multíplo do período se a órbita é periódica), onde $r = s_0 - s_1$. Assim,

$$s(T(-s_1)u) - s_1 = s(T(-s_0)u) - s_0 \quad \text{(em } \mathbb{R}/\text{período)}$$

Portanto, $s(u)$ está definido para todo $u \in U_\varepsilon$ e, fazendo os mesmos processos feito anteriormente, obtemos que $s(u)$ satisfaz (i)-(iii). □

A partir de agora, assumiremos as Hipóteses 2 e 3 e fixaremos um parâmetro ω. Lembremos que $T'(0)\Phi$ gera, por Hipótese, o núcleo de H. Considere $\chi = \chi_\omega$ uma autofunção associada a um autovalor negativo de H, ou seja,

$$H_\omega \chi_\omega = -\lambda^2 I \chi_\omega, \quad \|\chi_\omega\| = 1. \tag{5.22}$$

Denotemos por $P = P_\omega$ o subespaço positivo de H. Então existe $\delta = \delta_\omega > 0$ tal que

$$\langle Hp, p\rangle \geq \delta \|p\|^2, \quad p \in P. \tag{5.23}$$

Com efeito, sendo $P = ([\chi] \oplus [T'(0)\Phi])^\perp$, segue que P é fechado, e portanto, não existe sequência em P tal que $p_n \to p$ e $Hp_n \to 0$. Desta forma, existe $\delta > 0$ tal que

$$\langle Hp, p\rangle \geq \delta \quad \forall p \in P.$$

Em particular, se $p = \frac{\tilde{p}}{\|\tilde{p}\|}$, obtemos (5.23).

Teorema 5.1. *Seja $d''(\omega) > 0$. Se $\langle F'(\Phi), y\rangle = (T'(0)\Phi, y) = 0$ e $y \neq 0$, então $\langle Hy, y\rangle > 0$*

Demonstração: Por (5.21) segue que $\left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, \frac{d\Phi}{d\omega}\right\rangle < 0$. Fazendo uma decomposição espectral, obtemos $\frac{d\Phi}{d\omega} = a_0\chi + b_0T'(0)\Phi + p_0$, onde $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$ e $p_0 \in P$. Assim,

$$\langle H(a_0\chi + b_0T'(0)\Phi + p_0), a_0\chi + b_0T'(0)\Phi + p_0\rangle < 0,$$

ou seja,

$$\langle Ha_0\chi, a_0\chi\rangle + \langle Ha_0\chi, p_0\rangle + \langle Hp_0, a_0\chi\rangle + \langle Hp_0, p_0\rangle < 0.$$

Note que da decomposição anterior, segue que os elementos de P e $[\chi]$ são ortogonais, e daí usando o fato de que H é auto-adjunto resulta que $\langle Ha_0\chi, p_0\rangle = \langle Hp_0, a_0\chi\rangle = 0$. Logo,

$$-\lambda^2 a_0^2 + \langle Hp_0, p_0\rangle < 0.$$

Agora, seja $y \in X$ tal que $\langle F'(\Phi), y\rangle = (T'(0)\Phi, y) = 0$. Consequentemente $y \in [T'(0)\Phi]^\perp$. Desta forma, decompondo y, temos que

$$y = a\chi + p \quad \text{com } p \in P. \tag{5.24}$$

Da igualdade (5.20), resulta que

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle F'(\Phi), y\rangle = \left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, y\right\rangle = \left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, a\chi\right\rangle + \left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, p\right\rangle \\
&= \langle Ha_0\chi, a\chi\rangle + \langle Hp_0, a\chi\rangle + \langle Ha_0\chi, p\rangle + \langle Hp_0, p\rangle \\
&= -a_0 a\lambda^2 + \langle Hp_0, p\rangle,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\langle Hp_0, p\rangle = a_0 a\lambda^2.$$

Como $H|_P$ é m-acretivo, temos que existe $H|_P^{\frac{1}{2}}$ auto-adjunto com $\left(H|_P^{\frac{1}{2}}\right)^2 = H|_P$ (Ver Capítulo 5 da Referência [17]). Desta forma,

$$
\begin{aligned}
\langle Hp, p_0\rangle &\leq |\langle Hp, p_0\rangle| = \left|\left\langle \left(H^{\frac{1}{2}}\right)^2 p, p_0\right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle H^{\frac{1}{2}}p, H^{\frac{1}{2}}p_0\right\rangle\right| \leq \|H^{\frac{1}{2}}p\|\|H^{\frac{1}{2}}p_0\| \\
&= \left\langle H^{\frac{1}{2}}p, H^{\frac{1}{2}}p\right\rangle^{\frac{1}{2}}\left\langle H^{\frac{1}{2}}p_0, H^{\frac{1}{2}}p_0\right\rangle^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$\langle Hp, p_0\rangle^2 \leq \left\langle H^{\frac{1}{2}}p, H^{\frac{1}{2}}p\right\rangle\left\langle H^{\frac{1}{2}}p_0, H^{\frac{1}{2}}p_0\right\rangle.$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\langle Hy, y\rangle &= -a^2\lambda^2 + \langle Hp, p\rangle \\
&\geq -a^2\lambda^2 + \frac{\langle Hp, p_0\rangle^2}{\langle Hp_0, p_0\rangle} \\
&> -a^2\lambda^2 + \frac{(a_0 a\lambda^2)^2}{a_0^2\lambda^2} = 0.
\end{aligned}
$$

□

Corolário 5.1. *Seja $d''(\omega) > 0$. Se $\langle F'(\Phi), y\rangle = 0$, então*

$$\langle Hy, y\rangle \geq c\|\Pi y\|^2$$

para algum $c > 0$, onde Π é a projeção ortogonal sobre $[T'(0)\Phi]^{\perp}$.

Demonstração: Seja $y \in H$ tal que $\langle F'(\Phi), y\rangle = 0$, então podemos escrever $y = y_1 + \Pi y$, onde $y_1 \in [T'(0)\Phi]$ e $\Pi y \in [T'(0)\Phi]^{\perp}$. Note que $\langle T'(0)\Phi, \Pi y\rangle = 0$ e $\langle F'(\Phi), \Pi y\rangle = 0$, pois

$$\begin{aligned}\langle F'(\Phi), \Pi y\rangle &= \langle F'(\Phi), y - y_1\rangle = \langle F'(\Phi), y\rangle - \langle F'(\Phi), y_1\rangle \\ &= -\left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, y_1\right\rangle = -\left\langle \frac{d\Phi}{d\omega}, Hy_1\right\rangle = 0.\end{aligned}$$

Desta forma, aplicando o teorema anterior para Πy, obtemos

$$\langle H\Pi y, \Pi y\rangle \geq c\|\Pi y\|^2$$

para algum $c > 0$, mas

$$\begin{aligned}\langle H\Pi y, \Pi y\rangle &= \langle Hy - y_1, y - y_1\rangle \\ &= \langle Hy, y\rangle,\end{aligned}$$

e portanto, temos o desejado. □

Teorema 5.2. *Se $d''(\omega) > 0$, então existe $c > 0$ e $\varepsilon > 0$ tal que*

$$E(u) - E(\Phi) \geq c\|T(s(u))u - \Phi\|^2$$

para $u \in U_{\varepsilon}$ tal que $F(u) = F(\Phi)$.

Demonstração: Seja $q = I^{-1}F'(\Phi)$ e considere $H = [q] \oplus [q]^{\perp}$. Assim, podemos escrever $T(s(u))u - \Phi \in H$ da seguinte forma

$$T(s(u))u - \Phi = aq + y,$$

onde $(y,q)=0$ e a é um escalar. Desta forma, usando série de Taylor temos que

$$\begin{aligned}
F(\Phi) &= F(u) = F(T(s(u))u) \\
&= F(\Phi) + \langle F'(\Phi), T(s(u))u - \Phi\rangle + O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2) \\
&= F(\Phi) + \langle F'(\Phi), aq + y\rangle + O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2) \\
&= F(\Phi) + \langle Iq, aq + y\rangle + O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2) \\
&= F(\Phi) + (q, aq + y) + O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2) \\
&= F(\Phi) + a\|q\|^2 + O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2)
\end{aligned}$$

Logo, $a = O(\|T(s(u))u - \Phi\|^2)$. Seja $L(u) = E(u) - \omega F(u)$. Utilizando novamente Taylor, obtemos que

$$L(u) = L(T(s(u))u) = L(\Phi) + \langle L'(\Phi), v\rangle + \frac{1}{2}\langle L''(\Phi)v, v\rangle + o(\|v\|^2)$$

onde $v = T(s(u))u - \Phi = aq + y$. Sendo $F(u) = F(\Phi)$, $L'(\Phi) = 0$ e $L''(\Phi) = H$, podemos escrever

$$\begin{aligned}
E(u) - E(\Phi) &= L(u) - L(\Phi) \\
&= \frac{1}{2}\langle Hv, v\rangle + o(\|v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\langle Haq + y, aq + y\rangle + o(\|v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}a^2\langle Hq, q\rangle + \frac{1}{2}a\langle Hq, y\rangle + \frac{1}{2}a\langle y, Hq\rangle + \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + o(\|v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + O(a^2) + O(a\|v\|) + o(\|v\|^2) \\
&= \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + o(\|v\|^2). \qquad (5.25)
\end{aligned}$$

Note que $0 = (q, y) = (I^{-1}F'(\Phi), y) = \langle F'(\Phi), y\rangle$, e portanto, pelo Lema 5.2 segue que

$$\begin{aligned}
(y, T'(0)\Phi) &= (T(s(u))u - \Phi - aq, T'(0)\Phi) \\
&= -a\,(q, T'(0)\Phi) = -a\,\langle F'(\Phi), T'(0)\Phi\rangle \\
&= -a\left\langle H\frac{d\Phi}{d\omega}, T'(0)\Phi\right\rangle = -a\left\langle \frac{d\Phi}{d\omega}, HT'(0)\Phi\right\rangle = 0
\end{aligned}$$

Pelo Corolário 5.1, resulta que

$$\begin{aligned} E(u) - E(\Phi) &= \frac{1}{2}\langle Hy, y\rangle + o(\|v\|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}c\|y\|^2 + o(\|v\|^2). \end{aligned}$$

Finalmente, observe agora que

$$\|y\| = \|v - aq\| \geq \|v\| - |a|\|q\| \geq \|v\| - o(\|v\|^2)$$

Portanto, para $\|v\|$ pequeno temos

$$\begin{aligned} E(u) - E(\Phi) &\geq \frac{1}{2}c[\|v\| - o(\|v\|^2)]^2 + o(\|v\|^2) \\ &\geq \frac{1}{2}c\|v\|^2 - c\|v\|o(\|v\|^2) + \frac{1}{2}c[O(\|v\|^2)]^2 + o(\|v\|^2) \\ &\geq \frac{1}{4}c\|v\|^2, \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

Teorema 5.3. *Seja $d''(\omega) > 0$. Dadas as Hipóteses 1,2 e 3, a Φ-órbita é estável.*

Demonstração: Suponhamos que a Φ-órbita é instável, então existe uma sequência de dados iniciais $u_n(0)$ e $\delta > 0$ tal que

$$\|u_n(0) - \Phi\| \to 0 \qquad \text{mas} \quad \sup_{t>0}\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t) - T(s)\Phi\| > \delta$$

para n suficientemente grande, onde $u_n(t)$ é a solução com dado inicial $u_n(0)$. Note que $\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(0) - T(s)\Phi\| \to 0$, pois

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(0) - T(s)\Phi\| \leq \|u_n(0) - T(0)\Phi\| = \|u_n(0) - \Phi\|.$$

Logo, para n suficientemente grande segue que

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(0) - T(s)\Phi\| < \delta.$$

Agora, como $t \to \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t)-T(s)\Phi\|$ é contínua e $\sup_{t>0} \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t)-T(s)\Phi\| > \delta$, então existe $t_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\| = \delta \tag{5.26}$$

Consideremos u_n como sendo a solução existente no intervalo de tempo $[0, t_n]$. Pela Hipótese 1 e pelo fato de que E e F são de classe C^2, em particular contínuas, resulta que

$$\begin{aligned} E(u_n(t_n)) &= E(u_n(0)) \to E(\Phi) \\ F(u_n(t_n)) &= F(u_n(0)) \to F(\Phi). \end{aligned}$$

Vamos agora construir uma sequência v_n tal que $F(v_n) = F(\Phi)$ e $\|v_n - u_n(t_n)\| \to 0$. Com efeito, observe que como $F(u_n(0)) \to F(\Phi) \neq 0$, então, para n suficientemente grande, $F(u_n(0)) = \frac{1}{2}\|u_n\|^2 \neq 0$, ou seja, $\|u_n\| \neq 0$. Desta forma existe uma sequência $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que, para cada n, $\|\Phi\| = \alpha_n \|u_n(0)\|$. Além disso, $\alpha_n^2 \to 1$, pois $\|u_n(0)\| \to \|\Phi\|$. Defina

$$v_n := \alpha_n u_n(t_n).$$

Portanto, temos que

(a) $F(v_n) = F(\alpha_n u_n(t_n)) = \alpha_n^2 F(u_n(t_n)) = \alpha_n^2 F(u_n(0)) = F(\Phi) \quad \forall n;$

(b) Como

$$\begin{aligned} \|u_n(t_n)\| + \inf_{s\in\mathbb{R}} \{-\|T(s)\Phi\|\} &= \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n)\| + \inf_{s\in\mathbb{R}} \{-\|T(s)\Phi\|\} \\ &\leq \inf_{s\in\mathbb{R}} \{\|u_n(t_n)\| - \|T(s)\Phi\|\} \\ &\leq \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\| = \delta, \end{aligned}$$

então

$$\|u_n(t_n)\| \leq \delta - \inf_{s\in\mathbb{R}} \{-\|T(s)\Phi\|\} \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

ou seja, $\|u_n(t_n)\|$ é limitada. Logo,

$$\|v_n - u_n(t_n)\| = |\alpha_n - 1| \|u_n(t_n)\| \to 0;$$

(c) $v_n \in U_\varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ pequeno. De fato, temos do item anterior que para n suficientemente grande

$$\begin{aligned} \|v_n - T(s)\Phi\| &\leq \|v_n - u_n(t_n)\| + \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\|. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} \inf_{s\in\mathbb{R}} \|v_n - T(s)\Phi\| - \frac{\varepsilon}{3} &= \inf_{s\in\mathbb{R}} \|v_n - T(s)\Phi\| - \inf_{s\in\mathbb{R}} \frac{\varepsilon}{3} \\ &\leq \inf_{s\in\mathbb{R}} \left\{ \|v_n - T(s\Phi)\| - \frac{\varepsilon}{3} \right\} \\ &\leq \inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\|. \end{aligned}$$

Mas $\inf_{s\in\mathbb{R}} \|u_n(t_n) - T(s)\Phi\| = \delta$. Logo, escolhendo $\delta < \frac{\varepsilon}{2}$, resulta que para n suficientemente grande

$$\inf_{s\in\mathbb{R}} \|v_n - T(s)\Phi\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Desta forma, fica provado a existência da sequência. Da continuidade de E, resulta que $E(v_n) \to E(\Phi)$. Escolhendo δ suficientemente pequeno, obtemos do Teorema 5.2 que

$$0 \leftarrow E(v_n) - E(\Phi) \geq c\|T(s(v_n))v_n - \Phi\|^2 = c\|v_n - T(-s(v_n))\Phi\|^2.$$

Portanto, $\|v_n - T(-s(v_n))\Phi\| \to 0$, o que contradiz (5.26). $\square$

5.2 Aplicação - Estabilidade Orbital para a Equação de Schrödinger Não-Linear

Nosso objetivo, neste capítulo, é aplicar o método de Grillakis, Shatah, e Strauss estudado na seção anterior. Aplicaremos tal método com o intuito de encontrar estabilidade orbital para a equação de Schödinger não-linear (3.1), onde

$$\left\{e^{i\omega t}\Phi_\omega; t \in \mathbb{R}\right\}$$

com $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$ e ϕ_ω dado por (3.46), é a Φ_ω-órbita associada à tal equação. Note que, neste caso, $T(s) = e^{is}$, $s \in \mathbb{R}$, é o grupo unitário associado e

$$E(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |\nabla u|^2 - \frac{2}{\alpha+2}|u|^{\alpha+2}dx \quad \text{e} \quad F(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} |u|^2 dx \tag{5.27}$$

são as energias da equação (3.1) na qual devemos considerar.

No que segue, consideraremos $X = H_e^1(\mathbb{R}) \times H_e^1(\mathbb{R})$, onde o espaço $H_e^1(\mathbb{R})$ é constituído de funções pares de $H^1(\mathbb{R})$ com valores reais.

Sabemos que um funcional E é diferenciável à Gatêux em $u \in X$ se existe

$$f \in X'$$

tal que

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[E(u+hv) - E(u) - \langle f, hv\rangle_{X',X}] = 0, \quad \forall v \in X.$$

Neste caso, denotaremos a derivada à Gatêux de E em $u \in X$ por $E'(u) = f$.

Seja $f \in X'$. Primeiramente, vamos mostrar que o funcional E definido em (5.27) é diferenciável. De fato, temos que, para $h \neq 0$ e $u, v \in X$,

$$\begin{aligned}
& E(u+hv) - E(u) - \langle f, hv\rangle_{X',X} \\
= \ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}[(Re(u_x+hv_x))^2 + (Im(u_x+hv_x))^2] - \frac{2}{\alpha+2}[(Re(u+hv))^2 + (Im(u+hv))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}}dx \\
& -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}[(Re(u_x))^2 + (Im(u_x))^2] - \frac{2}{\alpha+2}[(Re(u))^2 + (Im(u))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}}dx - \langle f, hv\rangle_{X',X} \\
= \ & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}[2hRe(u_x)Re(v_x) + h^2(Re(v_x))^2 + 2hIm(u_x)Im(v_x) + h^2(Im(v_x))^2] \\
& -\frac{2}{\alpha+2}[(Re(u+hv))^2 + (Im(u+hv))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}}dx \\
& -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} -\frac{2}{\alpha+2}[(Re(u))^2 + (Im(u))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}}dx - \langle f, hv\rangle_{X',X}
\end{aligned} \tag{5.28}$$

Considere $g(y) = g(Re(y), Im(y)) = [(Re(y))^2 + (Im(y))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}}$. Usando série de Taylor, obtemos que

$$\begin{aligned} g(u+hv) &= g(u) + g'(u)hv + o(hv) \\ &= [(Re(u))^2 + (Im(u))^2]^{\frac{\alpha+2}{2}} + (\alpha+2)|u|^\alpha h(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v)) + o(hv) \end{aligned}$$

Desta forma, substituindo a igualdade anterior na igualdade (5.28) , temos

$$\begin{aligned} & E(u+hv) - E(u) - \langle f, hv\rangle_{X',X} \\ = & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [2hRe(u_x)Re(v_x) + h^2(Re(v_x))^2 + 2hIm(u_x)Im(v_x) + h^2(Im(v_x))^2] \\ & -\frac{2}{\alpha+2}[(\alpha+2)|u|^\alpha h(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v)) + o(hv)]dx - \langle f, hv\rangle_{X',X} \\ = & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} h[2Re(u_x)Re(v_x) + 2Im(u_x)Im(v_x) + h(Re(v_x))^2 + h(Im(v_x))^2] \\ & -\frac{2}{\alpha+2}[(\alpha+2)|u|^\alpha h(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v)) + o(hv)]dx - \langle f, hv\rangle_{X',X} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[E(u+hv) - E(u) - \langle f, hv\rangle_{X',X}] \\ = & \int_{\mathbb{R}} Re(u_x)Re(v_x) + Im(u_x)Im(v_x) - |u|^\alpha(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v))dx - \langle f, v\rangle_{X',X} \\ = & \int_{\mathbb{R}} -Re(u)_{xx}Re(v) - Im(u)_{xx}Im(v) - |u|^\alpha Re(u)Re(v) + |u|^\alpha Im(u)Im(v)dx - \langle f, v\rangle_{X',X} \\ = & \left\langle \begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} - |u|^\alpha Re(u) \\ -Im(u)_{xx} - |u|^\alpha Im(u) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix} \right\rangle_{X',X} - \langle f, v\rangle_{X',X}. \end{aligned}$$

Isto implica, pela arbitrariedade de v que

$$E'(u) = f = \begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} - |u|^\alpha Re(u) \\ -Im(u)_{xx} - |u|^\alpha Im(u) \end{pmatrix}.$$

é a derivada de Gatêux de E em $u = (Re(u), Im(u))$.

Usando argumentos similares aos feitos anteriormente, obtemos que F em (5.27) é diferenciável à Gatêux em $u = (Re(u), Im(u))$ e

$$F'(u) = \begin{pmatrix} Re(u) \\ Im(u) \end{pmatrix}.$$

Consideremos $\zeta = E + \omega F$ tal que $\omega > 0$. É oportuno mencionar que abordamos no Capítulo anterior o funcional $\zeta = E - \omega F$ com $-\omega$ no lugar de ω. Todavia os cálculos tornam-se similares quando consideramos este novo funcional e fazemos esta escolha porque as aplicações mais usuais do método em [15] são tratados com o sinal positivo.

Logo, temos que ζ é diferenciável à Gatêux em $u = (Re(u), Im(u))$ e

$$\zeta'(u) = E'(u) + \omega F'(u) = \begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} + Re(u)(\omega - |u|^{\alpha}) \\ -Im(u)_{xx} + Im(u)(\omega - |u|^{\alpha}) \end{pmatrix}.$$

Como ζ é diferenciável à Gatêux e o funcional ζ' é contínuo, resulta que ζ é diferenciável à Fréchet em $u \in X$, onde tal derivada também dada pela expressão acima. Além disso,

$$\zeta'(\phi_\omega, 0) = \begin{pmatrix} -\phi_\omega'' + \omega\phi_\omega - \phi_\omega^{\alpha+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \tag{5.29}$$

ou seja, $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$ é ponto crítico do funcional ζ.

Note que para u solução da equação (3.1), obtemos que

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \begin{pmatrix} Re(u_t) \\ Im(u_t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Im(u_{xx}) - |u|^{\alpha} Im(u) \\ Re(u_{xx}) + |u|^{\alpha} Re(u) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} - |u|^{\alpha} Re(u) \\ -Im(u)_{xx} - |u|^{\alpha} Im(u) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta forma, obtemos

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

um operador anti-simétrico. Consequentemente, a equação de Schrödinger não-linear, via igualdade acima, pode ser interpretada como um sitema Hamiltoniano abstrato.

Para aplicar a teoria de Grillakis-Shatah-Strauss, feito na seção anterior, no estudo da estabilidade orbital, precisamos conhecer o Jacobiano do funcional ζ aplicado a um ponto crítico, no caso, $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$. Na sequência, analisaremos a diferenciabilidade à Fréchet do operador $\zeta' : X \to X'$. Para isto, analisaremos separadamente a diferenciabilidade dos operadores E' e F'.

Dizemos que uma função $f_1 \in B(X, X')$ é a derivada à Gatêaux de E' em $u \in X$ se

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{h}[E'(u + hv) - E'(u)] - f_1(v) = 0, \quad \forall v \in X. \tag{5.30}$$

Neste caso, denotamos $E''(u) = f_1$ e temos que

$$E''(u)v = f_1(v), \quad \forall v \in X.$$

Seja $f_1 \in B(X, X')$. Temos, para $h \neq 0$ e $u, v \in X$, que

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{h}[E'(u + hv) - E'(u)] - f_1(v) \\
= \quad & \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} - hRe(v)_{xx} - |u + hv|^\alpha(Re(u) + hRe(v)) \\ -Im(u)_{xx} - hIm(v)_{xx} - |u + hv|^\alpha(Im(u) + hIm(u)) \end{pmatrix} \\
& - \begin{pmatrix} -Re(u)_{xx} - |u|^\alpha Re(u) \\ -Im(u)_{xx} - |u|^\alpha Im(u) \end{pmatrix} - f_1(v) \\
= \quad & \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -hRe(v)_{xx} - |u + hv|^\alpha(Re(u) + hRe(v)) + |u|^\alpha Re(u) \\ -hIm(v)_{xx} - |u + hv|^\alpha(Im(u) + hIm(u)) + |u|^\alpha Im(u) \end{pmatrix} - f_1(v) \\
= \quad & \frac{1}{h}\begin{pmatrix} -hRe(v)_{xx} - |u|^\alpha hRe(u) - g_1(u, v)(Re(u) + hRe(v)) \\ -hIm(v)_{xx} - |u|^\alpha hIm(v) - g_1(u, v(Im(u) + hIm(u)) \end{pmatrix} - f_1(v) \\
= \quad & \begin{pmatrix} -Re(v)_{xx} - |u|^\alpha Re(u) - g_2(u, v)(Re(u) + hRe(v)) \\ -Im(v)_{xx} - |u|^\alpha Im(v) - g_2(u, v)(Im(u) + hIm(u)) \end{pmatrix} - f_1(v)
\end{aligned} \tag{5.31}$$

onde

$$g_1(u,v) = \alpha|u|^{\alpha-2}h(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v)) + o(hv)$$

e

$$g_2(u,v) = \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v)) + \frac{o(hv)}{h}.$$

Desta forma, utilizando a igualdade (5.31), segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}[E'(u+hv) - E'(u)] - f_1(v) \\
&= \begin{pmatrix} -Re(v)_{xx} - |u|^\alpha Re(u) - \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v))Re(u)) \\ -Im(v)_{xx} - |u|^\alpha Im(v) - \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u)Re(v) + Im(u)Im(v))Im(u) \end{pmatrix} - f_1(v) \\
&= \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u))^2 & -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) \\ -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) & -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Im(u))^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix} \\
&-f_1 \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Pela arbitrariedade de $v \in X$, resulta que

$$E''(u) = f_1 = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u))^2 & -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) \\ -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) & -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Im(u))^2 \end{pmatrix}$$

é a derivada à Gatêaux de E' em $u = (Re(u), Im(u))$. Analogamente, obtemos que F' é Gatêaux diferenciável em $u = (Re(u), Im(u))$ e

$$F''(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com base nas informações apresentadas, obtemos que ζ' é diferenciável à Gatêaux em $u \in X$ e

$$\begin{aligned}\zeta''(u) &= (E'' + \omega F'')(u)\\ &= \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Re(u))^2 + \omega & -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) \\ -\alpha|u|^{\alpha-2}Im(u)Re(u) & -\frac{d^2}{dx^2} - |u|^\alpha - \alpha|u|^{\alpha-2}(Im(u))^2 + \omega \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Devido à continuidade de ζ'', segue que ζ' é diferenciável à Fréchet com a derivada em $u \in X$ também dada pela expressão anterior. Já ressaltamos que $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$ é um ponto crítico do funcional E. Além disto,

$$\zeta''(\phi_\omega, 0) = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha + \omega & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} - \phi_\omega^\alpha + \omega \end{pmatrix}.$$

Definamos o operador $H_\omega : X \to X'$, dado por

$$H_\omega(v) = \zeta''(\phi_\omega, 0)v = \begin{pmatrix} -\frac{d^2}{dx^2} - (\alpha+1)\phi_\omega^\alpha + \omega & 0 \\ 0 & -\frac{d^2}{dx^2} - \phi_\omega^\alpha + \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix}. \tag{5.32}$$

Desta forma,

$$H_\omega(v) = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \mathcal{L}^+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Re(v) \\ Im(v) \end{pmatrix},$$

onde $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}^+$ são os operadores estudados no capítulo 4.

Observe que

$$\sigma(H_\omega) = \sigma(\mathcal{L}) \cup \sigma(\mathcal{L}^+),$$

e portanto, já conhecemos o espectro não positivo de H_ω.

Teorema 5.4. *Seja $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$, onde $\omega > 0$ e ϕ_ω é a solução onda estacionária do tipo solitária deduzida em (3.46) . Se $\alpha \in [1, 4)$, então a órbita associada à Φ_ω, que é apenas gerada por rotações, é estável em X com respeito ao fluxo da equação (3.1).*

Demonstração: O intuito é verificar as Hipóteses 1, 2 e 3 estabelecidas na seção anterior para, então, podermos aplicar o Teorema 5.3 e assim obter o desejado. Com efeito, a Hipótese

(1) decorre dos argumentos tratados no Capítulo 3 para podermos obter boa colocação em $H_e^1(\mathbb{R})$. A hipótese 2-(a) segue do fato em que tem-se uma solução explícita para a EDO não-linear (3.39)

$$\phi_\omega(x) = \left(\omega\frac{\alpha+2}{2}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\alpha\sqrt{\omega}x}{2}\right)\right)^{\frac{2}{\alpha}},$$

e portanto, $\omega \in (0,+\infty) \to \Phi_\omega$ é uma aplicação C^1. O item (b) desta hipótese decorre do fato de $\Phi_\omega = (\phi_\omega, 0)$ ser ponto crítico do funcional ζ em (5.29), enquanto que o item (c) decorre do fato de que $T'(0)\Phi_\omega = (0,\phi_\omega) \neq 0$ e o item (d) decorre do fato de que, no nosso caso, temos $D(T(s)) = D(T'(0))$. A parte espectral (Hipótese 3) decorre dos Teoremas 2.38 e 2.39 e do fato de que $\Phi'_\omega \notin H_e^1(\mathbb{R})$, ou seja, o núcleo de H_ω é gerado por $T'(0)\Phi_\omega$. Por fim, precisamos verificar a condição $d''(\omega) > 0$ para todo $\omega > 0$. Todavia isto provém de (5.21) e do fato estabelecido em (4.7) para $\alpha \in [1,4)$. A prova do teorema está completa. $\square$

Bibliografia

[1] ANGULO, J. **Nonlinear stability of periodic traveling wave solutions to the Schrödinger and the modified Korteweg-de Vries equations**, Journal of Differential Equations, 235 (2007) 1-30.

[2] ANGULO, J. **Nonlinear Dispersive Equations: existence and estability of solitary and periodic travelling wave solutions**, Providence, AMS, 2009.

[3] BENJAMIN, T.B. **The stability of solitary waves**, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 338 (1972) 153-183.

[4] BONA, J.L. **On the stability theory of solitary waves**, Proc. R. Soc. Lond. Ser. A, 344 (1975) 363-374.

[5] BRÉZIS, H. **Analyse Fonctionnelle: Théorie et Applications**, Masson, Paris, 1983.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev**, Maringá, Eduem, 2009.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. **Introdução à Análise Funcional**, Maringá, DMA/UEM, 2007.

[8] CAZENAVE, T. **Semilinear Schrödinger equations**, Courant Lecture Notes Math., vol. 10, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, AMS, New York, Providence, RI, 2003.

[9] DEIMLING, K. **Nonlinear Functional Analisys**, Springer-Verlag, New York, 1980.

[10] EVANS, L. C. **Partial Differential Equations**, Graduate Studies in Mathematics, 19, AMS, 1998.

[11] FERNÁNDEZ, A. J. C.; NATALI, F.; CAVALCANTE, M. P. A. **Introdução à Análise Harmônica e Aplicações**, Preprint, 2012.

[12] FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JÚNIOR, N. C. **Introdução às Funções de uma Variável Complexa**, - 2.Ed - Rio de Janeiro, SBM, 2006.

[13] FIGUEIREDO, D.G. **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1977.

[14] GOMES, A. M. **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução**, - 2.Ed - Rio de Janeiro, UFRJ. IM , 2000.

[15] GRILLAKIS, M.; SHATAH, J.; STRAUSS, W. **Stability theory of solitary waves in the presence of symmetry, I**, Journal of Functional Analysis, 74 (1987) 160-197.

[16] IÓRIO JR. R.; IÓRIO, V. **Equações Diferenciais Parciais, uma introdução**, Rio de Janeiro, IMPA, Projeto Euclides, 1988.

[17] KATO, T., **Perturbation Theory for Linear Operators**, - 2.Ed - Berlin, Springer, 1984.

[18] KREYSZIG, E., **Introductory Functional Analysis with Applications**, New York, John Wiley & Sons, 1978.

[19] LINARES, F.; PONCE, G. **Introduction to Nonlinear Dispersive Equations**, New York, Springer, 2000.

[20] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A. **A Integral de Lebesgue**, Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ, 1989.

[21] TERÁN, E. A. C. **O problema de existência de soluções para a equação de Schrödinger não linear**, Dissertação de Mestrado, UNICAMP, Campinas, 1995.

[22] WEINSTEIN, M.I. **Modulation stability of ground states of nonlinear Schrödinger equations**, SIAM J. Math., 16 (1985) 472-490.