UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Álgebras com Identidades Polinomiais

FERNANDA TALINE DA SILVA STORI
Orientador: Ednei Aparecido Santulo Júnior

Maringá - PR
2011

Álgebras com Identidades Polinomiais

FERNANDA TALINE DA SILVA STORI

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Álgebra

Orientador: Prof. Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior

Maringá - PR

2011

Agradecimentos

Aos meus pais, Vera e Elemar da Silva, pelo apoio infinito desde meu ingresso na vida acadêmica e por acreditarem em mim mais do que eu mesma.

Ao meu irmão, Felipe da Silva, pelo incentivo que talvez nem ele mesmo imagina.

Ao meu esposo, companheiro e amigo, Newton Stori, por ser minha vida e estar ao meu lado em cada momento, sempre pronto a me amparar e ouvir.

À minha eterna professora, Fabiana Papani, pelo exemplo.

Ao meu orientador, professor Dr. Ednei Aparecido Santulo Júnior, pelo acompanhamento.

À Fundação Araucária, pelo apoio financeiro.

Resumo

No presente trabalho são introduzidas definições e resultados básicos sobre PI-álgebras, são enunciados e demonstrados resultados clássicos da teoria que as envolvem, são fornecidas demonstrações, utilizando identidades graduadas, de partes do Teorema do Produto Tensorial de Kemer e, utilizando métodos assintóticos, é mostrado que o mesmo não se estende ao caso de característica positiva.

Abstract

In this work we introduce basic definitions and results about PI-algebras, we state and prove classical results of their theory, we provide proofs, through graded identities, of parts of Kemer's Tensor Product Theorem and, by using asymptotic methods, we show it is not valid for the case of positive characteristic.

Sumário

Agradecimentos **1**

Abstract **3**

Introdução **6**

1 Conceitos Preliminares **9**

1.1 Álgebras 9

1.2 PI-álgebras 14

1.3 Geradores dos T-ideais 21

1.4 Matrizes Genéricas 28

1.5 Polinômios Centrais 31

1.6 Dimensão Gelfand-Kirillov 34

2 Teoremas Clássicos da PI-teoria **36**

2.1 O Teorema da Codimensão de Regev 36

2.2 O Teorema de Amitsur-Levitzki 44

2.3 O Teorema de Nagata-Higman 47

2.4 Teorema de Shirshov 49

3 Identidades Polinomiais Graduadas de Álgebras T-primas **58**

3.1 Álgebras Graduadas e Bases Multiplicativas 59

3.2 Identidades Polinomiais Graduadas de $M_{p,q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$. 62

3.3 Identidades Monomiais Multilineares para a Àlgebra $M_{p,q}(E)$ 69

4 Identidades Polinomiais de Álgebras em Característica Positiva 75

4.1 Conceitos Introdutórios 75

4.2 GK-dimensão de Álgebras Relativamente Livres 77

4.2.1 As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ 77

4.2.2 As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ 79

Referências Bibliográficas 81

Introdução

Entre os objetos importantes de estudo estão as álgebras de matrizes sobre anéis, as álgebras comutativas e as álgebras de dimensão finita, visto que o campo de aplicações destes objetos é bastante amplo. Essas álgebras pertencem a uma classe mais ampla de álgebras, a qual denominamos de PI-álgebras ou álgebras com identidades polinomiais, ou seja, são álgebras para as quais, existe pelo menos um polinômio não nulo cujo produto entre as variáveis é associativo mas não comutativo, que é anulado em qualquer substituição das variáveis por elementos da álgebra em questão. Estudar PI-álgebras consiste em estudar como as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra interferem em sua estrutura.

Ainda que os primeiros passos no estudo de identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra tenham sido dados em 1922 com o artigo [9], seu estudo se intensificou nesta direção em torno dos anos 1950, principalmente devido a trabalhos importantes de Jacobson e Kaplansky, os quais influenciaram o posterior desenvolvimento da PI-teoria. Vale observar que Kaplansky, em [15], elaborou uma extensa lista de problemas relevantes na teoria de anéis. Nessa lista estão vários problemas em aberto sobre PI-álgebras. Alguns desses problemas já foram resolvidos e em sua solução surgiram novos problemas, outros permanecem sem solução e têm sido alvo de pesquisas e trabalhos de alta relevância. Nessa mesma época, Specht levantou o seguinte problema: "*O T-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra é sempre finitamente gerado?* Tal problema passou a ser conhecido como problema de Specht e uma solução (positiva) para ele, em característica zero, foi obtida por Kemer em [16]. Neste trabalho Kemer ainda classificou as álgebras T-primas, a menos de PI-equivalência, em característica zero, e obteve o Teorema do Produto Tensorial.

Teorema (Teorema do Produto Tensorial). *Seja* $char K = 0$. *Então*

1. $M_{a,b}(E) \otimes E \sim M_{a+b}(E)$.

2. $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E) \sim M_{ac+bd,ad+bc}(E)$.

3. $M_{1,1}(E) \sim E \otimes E$.

Em particular, tal teorema estabelece que o produto tensorial de duas álgebras T-primas é igualmente uma álgebra T-prima.

Posteriormente, surgiram demonstrações alternativas para o Teorema do Produto Tensorial em característica zero (por exemplo [10]) bem como foi demonstrado que o Teorema do Produto Tensorial não é válido quando as álgebras são consideradas sobre outros tipos de corpos (por exemplo [1]).

Na presente dissertação fornecemos os fundamentos da PI-teoria, fornecemos alguns resultados clássicos e procuramos mostrar como tais ferramentas foram utilizadas para obter demonstrações alternativas de partes do Teorema do Produto Tensorial de Kemer ou para mostrar que o mesmo não se estende, em geral, para o caso de característica positiva.

A dissertação está organizada do seguinte modo.

No Capítulo 1 são introduzidos conceitos e resultados básicos da PI-teoria.

No Capítulo 2 são enunciados e demonstrados resultados clássicos da PI-teoria, a saber, o Teorema de Amitsur-Levitzki (no caso de característica zero), o Teorema de Shirshov sobre a Altura, o Teorema de Regev sobre a Codimensão e o Teorema de Nagata-Higman.

No Capítulo 3 são fornecidos geradores para o T-ideal de identidades $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{p,q} \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{p,q}(E)$ (Teorema 3.2.5) e é fornecida uma demonstração devida a Di Vincenzo e Nardozza para um dos casos do Teorema de Kemer sobre o Produto Tensorial utilizando identidades graduadas (Teorema 3.2.7). Também é feita uma análise acerca de que subálgebras especiais de $M_n(E)$ satisfazem identidades monomiais não triviais (Teorema 3.3.4).

No Capítulo 4 é mostrado (seguindo métodos de Alves e Koshlukov) que dois dos casos de tal teorema falha para corpos infinitos de característica positiva (Teoremas 4.2.5 e 4.2.9).

Capítulo 1

Conceitos Preliminares

Neste capítulo introduzimos definições que serão utilizadas ao longo de toda a dissertação, bem como enunciamos resultados básicos, porém de uso recorrente ao longo de todo o texto.

Iniciamos com a definição de álgebra associativa e de definições e resultados elementares sobre tais álgebras, definimos álgebra livre em uma variedade, definimos PI-álgebras (graduadas) e álgebras relativamente livres, enunciamos alguns resultados relativos aos geradores do T-ideal de identidades satisfeitas por uma álgebra, exibimos e enunciamos algumas propriedades da álgebra de matrizes genéricas (que constituem um modelo bastante útil de álgebra relativamente livre na variedade determinada por $M_n(K)$, sendo K infinito), fazemos uma breve discussão acerca dos polinômios centrais e, por fim, definimos e enunciamos resultados referentes à GK-dimensão de uma PI-álgebra.

1.1 Álgebras

Nesta seção definimos e fornecemos as propriedades básicas de álgebras.

Definição 1.1.1. Uma **álgebra** A sobre um corpo K (ou uma K-álgebra) é um espaço vetorial sobre K munido de uma operação $* : A \times A \longrightarrow A$, chamada multiplicação, tal que, para qualquer $\alpha \in K$ e quaisquer $a, b, c \in A$,

1. $(a + b) * c = a * c + b * c$;

2. $a * (b + c) = a * b + a * c$;

3. $\alpha(a * b) = (\alpha a) * b = a * (\alpha b)$.

Na definição anterior usamos o símbolo $*$ para a multiplicação de dois elementos de A, a fim de distingui-la da multiplicação por escalar, mas ao longo do restante do texto denotaremos ambas as operações da mesma forma.

Repare que uma álgebra possui, simultaneamente, as estruturas de espaço vetorial e de anel. Se a álgebra A, como anel, é um anel comutativo, dizemos que A é uma **álgebra comutativa** e se A é um anel unitário, dizemos que A é uma **álgebra unitária**. Se a álgebra A é unitária, ela contém uma cópia do corpo K, o conjunto $\{\lambda.1 : \lambda \in K\}$; que, por abuso de notação, é denotado por K.

Uma K-álgebra A é uma **álgebra de Lie** se, para quaisquer $a, b, c \in A$ vale que

1. $a * a = 0$

2. $(a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$ (identidade de Jacobi).

Uma **subálgebra** B de uma álgebra A é um subconjunto da mesma que, com relação às operações de A, também é uma álgebra, ou seja, B deve ser fechado com respeito à adição, multiplicação e multiplicação por escalar de A. No caso ainda em que A é unitária, B deve possuir também 1. Tal como ocorre para ideais em um anel, a interseção de qualquer família de subálgebras de uma álgebra também é uma subálgebra desta álgebra. Assim, a **subálgebra gerada por um subconjunto** X de uma álgebra A, denotada por $[X]$, é a menor subálgebra que contém esse conjunto, isto é, $[X]$ é a interseção de todas as subálgebras de A que contém X.

Um subconjunto I de A é um **ideal da álgebra** A se o mesmo é, simultaneamente, um ideal de A como anel e um subespaço vetorial de A como espaço vetorial. No caso em que a álgebra é unitária, se I é um ideal de A como anel, temos automaticamente que I é um subespaço vetorial de A. Tal como no caso de anéis e de espaços vetoriais, podemos definir o quociente de uma álgebra A por um seu ideal I estendendo as operações de A às classes de equivalência de A/I. As operações são bem definidas já que I é, ao mesmo tempo, ideal de um anel e subespaço vetorial.

O **centro** $Z(A)$ de uma álgebra A é a subálgebra definida por $Z(A) := \{a \in A : ab = ba, \forall b \in A\}$. Se a álgebra A é unitária, então $K \subset Z(A)$ e A é uma **álgebra central** se $Z(A) = K$.

Se uma álgebra A pode ser escrita como soma direta de subespaços indexados por elementos de um grupo abeliano $(G, +)$, isto é, $A = \bigoplus_{g \in G} A_g$ e, além disso, se dados $a \in A_g$ e $b \in A_h$ temos que $ab \in A_{g+h}$, dizemos que a álgebra A é G-**graduada** e um elemento $a \in A_g$ é chamado de **elemento homogêneo de grau g**. O grau de um elemento homogêneo $a \in A$ é denotado por $\partial(a)$.

Exemplo 1.1.2. Todo corpo L extensão de K, com as operações usuais, é uma K-álgebra comutativa e unitária.

Exemplo 1.1.3. A álgebra $M_n(K)$ das matrizes $n \times n$ com entradas em um corpo K, com as operações usuais de adição, multiplicação e multiplicação por escalar, é uma K-álgebra unitária e central. A álgebra $M_n(K)$ admite uma $\mathbb{Z}_n$-graduação natural. Para cada $k \in \mathbb{Z}_n, M_n(K)_k := \{(a_{ij}) : a_{ij} = 0 \text{ se } j - i \not\equiv k (\text{mod } n)\}$.

Definição 1.1.4. Seja K um corpo e seja V um espaço vetorial tendo por base um conjunto enumerável (eventualmente finito) X, cujos elementos são denotados por e_i sendo i um inteiro positivo $(1 \leq i \leq |X|)$. A **álgebra de Grassmann** sobre V (denotada por $E(V)$, ou simplesmente por E) é a K-álgebra unitária tendo como base $\beta = \{e_{i_1}e_{i_2} \cdots e_{i_k} : k \geq 1; i_1 < i_2 \cdots < i_k\} \cup \{1\}$, sendo a adição e multiplicação formais levando-se em conta as relações $e_ie_j = -e_je_i$, $e_i^2 = 0$ (se $charK \neq 2$ essa última condição segue da primeira).

Para um elemento de β definimos seu **comprimento** como sendo o número de fatores e_j que o formam (tendo 1 comprimento 0). Denotando por E_0 o subespaço da álgebra de Grassmann gerado por todos os elementos de β que possuem comprimento par e, por E_1 o subespaço gerado pelos elementos de β que possuem comprimento ímpar, temos que $E = E_0 \oplus E_1$ é uma $\mathbb{Z}_2$ -graduação de E e que $Z(E) = E_0$ se $charK \neq 2$.

Definição 1.1.5. Seja K um corpo e sejam A e B duas K-álgebras. A aplicação $\varphi : A \to B$ é um **homomorfismo de álgebras** se é, simultaneamente, uma transformação linear de K-espaços vetoriais e um homomorfismo de anéis.

Um homomorfismo é chamado de **isomorfismo** se é bijetor. Um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A$ é chamado **endomorfismo da álgebra** A.

O núcleo de um homomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ é o núcleo como homomorfismo de anéis. O mesmo é sempre um ideal de A e propriedades análogas do núcleo e imagem de um homomorfismo de anéis valem para homomorfismo de álgebras.

Teorema 1.1.6 (Teorema do Isomorfismo para Álgebras)**.** *Sejam A e B álgebras e seja $\varphi : A \to B$ um homomorfismo. Então $A/\ker\varphi$ é isomorfo a $Im\varphi$.*

A demonstração é essencialmente a mesma do caso de anéis, tomando-se o cuidado em verificar que o isomorfismo de anéis, nesse caso, também preserva a multiplicação por escalar.

Uma classe mais restrita de ideais de uma álgebra, mas que desempenha papel importante no estudo de PI-álgebras, é a dos T-ideais, que definimos a seguir.

Definição 1.1.7. Um ideal I de uma álgebra A é um **T-ideal de** A se, para qualquer endomorfismo $\varphi : A \to A$, tivermos que $\varphi(I) \subset I$.

Exemplo 1.1.8. Seja K um corpo, então o conjunto I das matrizes triangulares superiores com entradas em K de diagonal nula é um T-ideal de $UT_n(K)$ (conjunto das matrizes triangulares superiores). A verificação de que I é um ideal é canônica. Para verificar que é fechado por endomorfismos, basta reparar que I representa o conjunto de todas as matrizes nilpotentes de $UT_n(K)$ e um endomorfismo deve mandar elementos nilpotentes em elementos nilpotentes.

Tal como ocorre com os ideais, a interseção de qualquer família de T-ideais de uma álgebra A é também um T-ideal e, portanto, podemos falar no **T-ideal gerado por um subconjunto X de A**, que denotamos por $\langle X \rangle^T$.

Definição 1.1.9. Seja $\mathcal{B}$ uma classe de álgebras à qual pertence A gerada, como álgebra, por um subconjunto X. Dizemos que A **é livre na classe $\mathcal{B}$ livremente gerada por** X se, para qualquer álgebra $B \in \mathcal{B}$, e qualquer aplicação $f : X \to B$, existir um homomorfismo $\varphi : A \to B$ que estende f, isto é, o diagrama abaixo, no qual i denota a inclusão de X em A, comuta.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & B \\ A \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

A cardinalidade do conjunto X é chamada de **posto** da álgebra A.

Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ um conjunto enumerável, possivelmente finito. Denotamos por $K\langle X \rangle$ a K-álgebra dos polinômios nas variáveis x_j, com a multiplicação sendo associativa, mas não comutativa. Em outras palavras, $K\langle X \rangle$ é a K-álgebra que possui por base, como espaço vetorial, a união de $\{1\}$ com o conjunto formado por todos os monômios da forma $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}$; $k \in \mathbb{N}$ e cada i_j um inteiro positivo menor ou igual a $|X|$, podendo ocorrer repetição de índices. O resultado da multiplicação entre dois monômios $x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ e $x_{j_1}\cdots x_{j_l}$ é o monômio $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_l}$ e se estende por linearidade para todos os elementos de $K\langle X \rangle$.

Proposição 1.1.10. *A álgebra $K\langle X\rangle$ é livre, livremente gerada por X na classe de todas as álgebras associativas e unitárias. Assim como a álgebra $K\langle X\rangle \setminus K$ é livre, livremente gerada por X na classe de todas as álgebras associativas.*

Demonstração: Mostraremos apenas a primeira afirmação, uma vez que a demonstração da segunda é similar. Seja A uma álgebra associativa unitária e seja $f : X \to A$ uma aplicação qualquer. Para cada inteiro positivo i (menor ou igual a $|X|$ no caso em que X é finito) denotamos por a_i a imagem de x_i pela f. Então, dado $p(x_1, \cdots, x_k) \in K\langle X\rangle$, para que φ estenda f, $\varphi(p) = p(a_1, \cdots, a_k)$, obtido a partir de p substituindo-se cada x_i por a_i em p. Claramente, φ é homomorfismo.

■

Um polinômio $p(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ é chamado de **homogêneo**, se o grau total de cada um de seus monômios é constante. O polinômio p é chamado de **multihomogêneo de multigrau** $(k_1, \cdots, k_n)$ se, em todos os monômios que constituem p, e, para todo j entre 1 e n , a variável x_j tem grau k_j. Um polinômio multihomogêneo de multi-grau $(1, 1, \cdots, 1)$ é chamado de **multilinear** .

Definição 1.1.11. Sejam A, B duas K-álgebras. Então A e B são K-módulos bilaterais sendo a ação (tanto à esquerda quanto à direita) a multiplicaçõ por escalar. O produto tensorial $A \otimes_K B$ (ou simplesmete $A \otimes B$) é o produto tensorial de A e B como K-módulos (vide [3]) munido de multiplicação definida por

$$(a \otimes b) \cdot (a' \otimes b') = aa' \otimes bb'$$

para quaisquer $a, a' \in A$ e $b, b' \in B$ e estendida por linearidade.

1.2 PI-álgebras

A fim de evitar repetições desnecessárias, ao longo do texto, exceto quando explicitado o contrário, K denotará um corpo, A uma K- álgebra e G um grupo abeliano com notação aditiva. Além disso, todas as álgebras consideradas por nós serão unitárias e grande parte do que fazemos aqui pode ser generalizado para álgebras quaisquer tomando-se os devidos cuidados. Assim trataremos a álgebra $K\langle X\rangle$ simplesmente por álgebra livre, ficando subentendido que é livre na classe de todas as álgebras associativas e unitárias.

Definição 1.2.1. Seja A uma K-álgebra. Dizemos que A é uma **álgebra com identidade polinimial** ou simplesmente uma **PI-álgebra**, se existe um polinômio não-nulo $p(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ de modo que, para qualquer homomorfismo de álgebras $\varphi : K\langle X\rangle \to A$, temos que $p(x_1, \cdots, x_n) \in \ker\varphi$. Nesse caso dizemos que a álgebra A **satisfaz o polinômio** p .

Repare que a definição anterior é equivalente a dizer que qualquer substituição das variáveis do polinômio p por elementos da álgebra A anula o polinômio em A, um vez que cada tal substituição induz automaticamente uma aplicação $f : X \to A$ que se estende a um homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \to A$.

Exemplo 1.2.2. Toda K-álgebra unitária comutativa é uma PI-álgebra, já que satisfaz $x_1x_2 - x_2x_1$.

Proposição 1.2.3. *Toda K-álgebra A de dimensão finita n satisfaz o polinômio standard* $s_{n+1}(x_1, \cdots, x_{n+1}) = \sum_{\sigma\in S_{n+1}} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(n+1)}$.

Demonstração: Como o polinômio em questão é multilinear, basta verificar que o mesmo se anula para elementos em uma base β de A. Seja $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de A, então, ao substituirmos cada x_i por um elemento de β, algum v_j aparecerá pelo menos duas vezes em cada monômio. Denotemos por x_{i_1} e x_{i_2} duas variáveis substituídas pelo mesmo v_j. Então, para cada $\sigma \in S_{n+1}$ par, os monômios associados às permutações σ e $(i_1i_2)\sigma$ fornecem o mesmo elemento de A com o sinal trocado, logo a soma de tais parcelas se anula e, $s_{n+1}(v_{j_1}, \cdots, v_{j_{n+1}}) = 0$ se $v_{j_1}, \cdots, v_{j_{n+1}} \in \beta$ e, portanto, A satisfaz $s_{n+1}(x_1, \cdots, x_{n+1})$.

■

Para quaisquer polinômios $p, q \in K\langle X\rangle$ denotamos por $[p, q]$ o polinômio $pq - qp$.

Proposição 1.2.4. *A álgebra de Grassmann E satisfaz $[[x_1, x_2], x_3]$.*

Demonstração: Como o polinômio em questão é multilinear, basta verificar que o mesmo se anula para os elementos v_j da base β dada na Definição 1.1.4.

Se x_1 ou x_2 é substituído por um elemento de comprimento par, como o mesmo está em $E_0 = Z(E)$, temos que $[v_1, v_2]$ (e, consequentemente, $[[v_1, v_2], v_3]$) é igual a zero. Por outro lado, se ambos, v_1 e v_2, possuem comprimento ímpar, v_1v_2 e v_2v_1 possuem, ambos, comprimento par, estando $[v_1, v_2]$ em E_0. Como E_0 está contido no centro de E (sendo o próprio centro se $char K \neq 2$), $[[v_1, v_2], v_3] = 0$.

■

Seja A uma PI-álgebra. Denotamos por $T(A) \subset K\langle X\rangle$ o conjunto de todos os polinômios satisfeitos por A.

Proposição 1.2.5. *Seja A uma PI-álgebra. Então $T(A)$ é um T-ideal de $K\langle X\rangle$.*

Demonstração: Note que $T(A) = \bigcap_{\varphi: K\langle X\rangle \to A} \ker \varphi$, que é uma interseção de uma família de ideais de $K\langle X\rangle$ e, portanto, ideal de $K\langle X\rangle$. Verifiquemos pois que $T(A)$ é fechado por endomorfismos. Ora, $p \in T(A)$ se, e somente se, $p \in \ker \psi$, para qualquer homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \to A$. Em particular, sendo φ um endomorfismo de $K\langle X\rangle, p \in \ker(\psi \circ \varphi)$, para qualquer homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \to A$. Logo $\varphi(p) \in \ker \psi$ para qualquer homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \to A$; e, portanto, $\varphi(p) \in T(A)$.

■

Dizemos que duas álgebras A e B são **PI-equivalentes** se $T(A) = T(B)$.

Seja I um conjunto de índices indexando $p_i \in K\langle X\rangle$. Denotemos por J o T-ideal $\langle p_i : i \in I\rangle^T$ de $K\langle X\rangle$ e seja $\mathcal{B}$ a classe de todas as álgebras que satisfazem todos os polinômios de J (podendo satisfazer mais polinômios). Em outras palavras, $A \in \mathcal{B}$ se $J \subset T(A)$. A classe de álgebras $\mathcal{B}$ é chamada de **variedade de álgebras determinada pelas identidades** $\{p_i : i \in I\}$.

Seja $\mathcal{B}$ uma variedade de álgebras. Uma álgebra em $\mathcal{B}$ é chamada **relativamente livre da variedade** $\mathcal{B}$, (livremente gerada por um conjunto X), denotada por $L_X(\mathcal{B})$, se é livre na classe $\mathcal{B}$ e livremente gerada por X tal como na Definição 1.1.9.

Exemplo 1.2.6. Seja $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ um conjunto enumerável (possivelmente finito).

A álgebra $K[X]$, que tem por base $\{1\}$ unido com o conjunto formado por todos os monômios $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}, k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_k \leq |X|$ com a multiplicação entre os monômios $x_{j_1}\cdots x_{j_k}$ e $x_{i_1}\cdots x_{i_l}$ dada por $x_{n_1}x_{n_2}\cdots x_{n_{k+l}}$, no qual os índices $n_1, \cdots, n_{k+l}$ são a reordenação dos índices $i_1, \cdots, i_l, j_1, \cdots, j_k$ de modo que $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_{k+l}$ (ou seja, as variáveis comutam) é relativamente livre na variedade determinada pelo polinômio $[x_1, x_2]$.

O fato de que tal álgebra é relativamente livre na variedade determinada por $[x_1, x_2]$ segue do teorema seguinte com o fato de que $K[X] = K\langle X\rangle/\langle [x_1, x_2]\rangle^T$.

Teorema 1.2.7. *Seja $\mathcal{B}$ uma variedade definida por um dado conjunto de polinômios $\{p_i : i \in I\} \subset K\langle X\rangle$. Seja J o T-ideal de $K\langle X\rangle$ gerado por tal família de polinômios. Então a álgebra $K\langle X\rangle/J$ é relativamente livre na variedade $\mathcal{B}$. Além disso, álgebras relativamente livres em uma mesma variedade e com mesmo posto são isomorfas.*

Demonstração: Claramente $K\langle X\rangle/J \in \mathcal{B}$. Denotemos por $\overline{X}$ a imagem do conjunto X pela projeção canônica $\pi : K\langle X\rangle \to K\langle X\rangle/J$, sendo $\overline{x_i} \in \overline{X}$ a imagem de x_i pela π. Sejam $A \in \mathcal{B}, \overline{f} : \overline{X} \to A$ uma aplicação e $f : X \to A$ dada por

$f = \overline{f} \circ \pi$. Como $K\langle X\rangle$ é a álgebra livre, existe homomorfismo $\psi : K\langle X\rangle \to A$ de modo que $\psi|_X = f$, em outras palavras, o diagrama abaixo comuta.

$$\begin{tikzcd} K\langle X\rangle \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & A \\ K\langle X\rangle/J \arrow[ur, dashed, "\overline{f}"'] & \end{tikzcd}$$

O homomorfismo $\overline{\psi} : K\langle X\rangle/J \to A$ que naturalmente estenderia $\overline{f}$ seria dado por $\overline{\psi}(\pi(p)) = \psi(p)$, mas note que tal aplicação só está bem definida se $\pi(p) = \pi(q)$ (e, portanto $p - q \in \ker \pi$) implicar $\psi(p) = \psi(q)$; o que ocorre se, e somente se, $p - q \in \ker \psi$. Ou seja, $\ker \pi$ deve estar contido em $\ker \psi$, mas $\ker \pi = J$ e como $A \in \mathcal{B}, J \subset T(A) \subset \ker \psi$. Portanto tal aplicação $\overline{\psi}$ está bem definida e é um homomorfismo.

Por fim, vamos mostrar que se $|X| = |Y|$ então $L_X(\mathcal{B}) \cong L_Y(\mathcal{B})$. Seja $f : X \to Y$ uma bijeção. Então existem homomorfismos $\varphi : L_X(\mathcal{B}) \to L_Y(\mathcal{B})$ e $\psi : L_Y(\mathcal{B}) \to L_X(\mathcal{B})$ que estendem, respectivamente, f e f^{-1}. Mas então todo elemento de X é deixado fixo por $\psi \circ \varphi$, o mesmo ocorrendo com os elementos de Y para $\varphi \circ \psi$, e portanto $\psi \circ \varphi = Id_{L_X(\mathcal{B})}$ e $\varphi \circ \psi = Id_{L_Y(\mathcal{B})}$, de onde segue que ψ e φ são isomorfismos, sendo um o inverso do outro.

■

Muitas vezes é difícil trabalhar com as identidades polinomiais de uma álgebra, convindo utilizar tipos mais fracos de identidades polinomiais, mas que sejam mais fáceis de serem manipuladas. É o caso das identidades com traço, das identidades com involução, dos polinômios centrais e das identidades graduadas, por exemplo. Falaremos somente dos últimos dois.

Para tanto, primeiro definimos a **álgebra G-graduada livre** $K\langle X\rangle_G$. Seja G um grupo abeliano com notação aditiva. Para cada $g \in G$, tomamos um conjunto

$X_g = \{x_1^{(g)}, x_2^{(g)}, \cdots, x_n^{(g)}, \cdots\}$ enumerável e definimos $X := \bigcup_{g\in G} X_g$. Note que $K\langle X\rangle_G$ é G-graduada se considerarmos $K\langle X\rangle_g$ o subespaço gerado por todos os monômios $x_{i_1}^{(g_1)} x_{i_2}^{(g_2)} \cdots x_{i_k}^{(g_k)}, k \in \mathbb{N}$ de modo que $g_1 + g_2 + \cdots + g_k = g$. No caso particular de X_0 acrescentamos o 1 à sua base. Usando um argumento similar ao utilizado na demonstração da Proposição 1.1.10, mostra-se que $K\langle X\rangle$, com tal graduação é G-livre na variedade de todas as álgebras G-graduadas, isto é, dada uma álgebra G-graduada A, e uma aplicação $f : X \to A$ que, para todo $g \in G$, manda $x_i^{(g)}$ para algum elemento de A_g, existe um homomorfismo $\varphi : K\langle X\rangle \to A$ G-graduado (tal que $\varphi(K\langle X\rangle_g) \subset A_g$, para todo $g \in G$) que estende f.

Definição 1.2.8. Seja A uma PI-álgebra G-graduada. Dizemos que o polinômio graduado não-nulo $p \in K\langle X\rangle_G$ é uma **identidade polinomial G-graduada de A** se p pertence ao $\ker\varphi$ para qualquer homomorfismo graduado $\varphi : K\langle X\rangle_G \to A$.

Uma definição equivalente é dizer que $p(x_1^{(g_1)}, \cdots, x_m^{(g_m)})$ é identidade graduada de A se o mesmo sempre se anula ao substituirmos cada variável $x_i^{(g_i)}$ de p por qualquer elemento de A_{g_i}. O conjunto de todas as identidades polinomiais G-graduadas satisfeitas por uma álgebra A é denotado por $T_G(A)$ que, analogamente ao que ocorre no caso das identidades ordinárias, é um T-ideal G-graduado de $K\langle X\rangle_G$, isto é, $T_G(A)$ é invariante por endomorfismos G-graduados de $K\langle X\rangle_G$. O conceito de álgebra relativamente livre também se estende para o caso graduado de maneira natural.

Em geral, é mais fácil determinar um conjunto de identidades geradoras do T-ideal graduado de uma álgebra do que um conjunto de geradores do T-ideal de identidades ordinárias. Vasilovsky determinou em [22], por exemplo, um conjunto gerador para o T-ideal $\mathbb{Z}_n$-graduado de $M_n(K)$ para o caso em que $char K = 0$. No entanto, para $n \geq 3$ um conjunto gerador de T-ideal de identidades ordinárias de tal álgebra permanece desconhecido (no início da próxima seção fornecemos a lista de algumas álgebras para as quais o T-ideal de identidades é conhecido).

Exemplo 1.2.9. Como já visto, a álgebra de Grassmann E é naturalmente $\mathbb{Z}_2$-graduada. Considerando tal $\mathbb{Z}_2$-graduação, E satisfaz as seguintes identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas de $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$.

$$[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}] \text{ e } x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$$

Acima, $x \circ y$ é usado para denotar $xy + yx$.

Mais adiante veremos que, quando E é considerada sobre um corpo infinito, essas três identidades geram o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de E.

Uma das vantagens de se trabalhar com as identidades graduadas é que elas podem fornecer alguma informação sobre o T-ideal de identidades ordinárias de uma álgebra. O teorema seguinte serve para ilustrar como isso acontece.

Teorema 1.2.10. *Sejam A e B duas PI-álgebras G-graduadas. Se $T_G(A) \subset T_G(B)$, então $T(A) \subset T(B)$. Em particular, se $T_G(A) = T_G(B)$, então A e B são PI-equivalentes.*

Demonstração: Considere $K\langle X\rangle$ a álgebra associativa livre, com $X = \{x_1, x_2, \cdots\}$ e $f(x_1, x_2, \cdots x_n) \in T(A)$. Sejam $b_1, b_2, \cdots, b_n \in B$, tome $b_{i_g} \in B_g$, para $i = 1, \cdots, n$ e $g \in G$, de maneira que $b_i = \sum_{g\in G} b_{i_g}$. Para cada $b_{i_g} \neq 0$, tome $x_{i_g} \in X_g$ e considere o polinômio $f_1 = f\Big(\sum_{g\in G} x_{1_g}, \cdots, \sum_{g\in G} x_{n_g}\Big) \in K\langle X\rangle$. Visto que $f \in T(A)$, segue que $f_1 \in T_G(A)$ e, por hipótese, temos $f_1 \in T_G(B)$. Substituindo $x_{i_g} = b_{i_g}$, para $i = 1, \cdots, n$ e $g \in G$, obtemos

$$f(b_1, b_2, \cdots, b_n) = f\Big(\sum_{g\in G} b_{1_g}, \sum_{g\in G} b_{2_g}, \cdots, \sum_{g\in G} b_{n_g}\Big) = 0,$$

ou seja, $f \in T(B)$.

Por fim, se $T_G(A) = T_G(B)$, então $T_G(A) \subset T_G(B)$ e $T_G(A) \subset T_G(B)$. Disso segue que $T(A) \subset T(B)$ e $T(B) \subset T(A)$, o que conclui a prova da última afirmação.

$\blacksquare$

1.3 Geradores dos T-ideais

Um tipo de problema comum e, geralmente bastante difícil no estudo de PI-álgebras é determinar um conjunto de identidades polinomiais que geram o T-ideal de uma determinada álgebra. São conhecidos conjuntos de geradores para identidade satisfeitas pelas álgebras matriciais $M_n(K), n \leq 4$, quando o corpo K é finito; pela álgebra de Grassmann E sobre qualquer corpo; pelas matrizes triangulares superiores, também sobre qualquer corpo. Para álgebras de grande importância tais como $M_n(K)$, quando K é infinito ainda não foram encontradas bases de identidades polinomiais que geram o T-ideal da mesma no caso $n \geq 3$. Mesmo as identidades da álgebra das matrizes de ordem 2, sobre corpos de característica 2 não são totalmente conhecidas e não se sabe sequer se seu T-ideal é finitamente gerado ou não.

Também conhece-se um conjunto de geradores para as identidades polinomiais satisfeitas pelo quadrado tensorial da álgebra de Grassmann $E \otimes E$, sobre um corpo de característica zero.

Nosso intuito nessa seção é apresentar algumas propriedades dos geradores de T-ideais de identidades polinomiais que possam ser úteis para se determinar um conjunto de geradores do T-ideal de uma PI-álgebra.

Se K é infinito, podemos encontrar um conjunto de geradores conveniente para o T-ideal de identidades satisfeitas por uma K-álgebra.

Lema 1.3.1. *Seja K infinito e seja $p(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X\rangle$ um polinômio escrito como $p = p_0 + \cdots + p_k$, onde cada parcela p_j é homogênea com respeito à variável x_1 com grau j (consideramos que o polinômio nulo é homogêneo em x_1 de qualquer grau). Se $p \in J$, sendo J um T-ideal de $K\langle X\rangle$, então cada p_j pertence a J.*

Demonstração: Como K é infinito, existem $\lambda_0, \cdots, \lambda_k \in K$ distintos dois a dois e não-nulos. Para cada inteiro j entre 0 a k, denotamos por φ_j o endomorfismo de $K\langle X\rangle$ obtido a partir da aplicação $f_j : X \to K\langle X\rangle$ tal que $x_1 \mapsto \lambda_j x_1$ e $x_m \mapsto x_m$

se $m > 1$. Como J é um T-ideal, $\varphi_j(p) \in J$, para cada j, ou seja, $\overline{\varphi_j(p)} = \overline{0}$ em $K\langle X\rangle/J$. Por outro lado, note que $\overline{\varphi_j(p)} = \overline{p_0} + \lambda_j\overline{p_1} + \cdots + \lambda_j^k\overline{p_k}$.

Isso nos fornece que $(\overline{p_0}, \cdots, \overline{p_k})$ é solução do sistema linear homogêneo seguinte nas variáveis $\xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_k$ assumindo valores em $K\langle X\rangle/J$.

$$\begin{cases} \xi_0 & + & \lambda_0\xi_1 & + & \cdots & + & \lambda_0^k\xi_k & = & \overline{0} \\ \vdots & + & \vdots & + & \vdots & + & \vdots & = & \vdots \\ \xi_0 & + & \lambda_k\xi_1 & + & \cdots & + & \lambda_k^k\xi_k & = & \overline{0} \end{cases}$$

Mas a matriz reduzida do sistema é a matriz de Vandermonde nos escalares $\lambda_0, \cdots, \lambda_k$, cujo determinante é $\prod_{i<j}(\lambda_j - \lambda_i)$. Uma vez que tomamos os λ_j distintos dois a dois, tal determinante é não-nulo. Portanto tal sistema só deve admitir solução trivial, de onde segue que $\overline{p_j} = \overline{0}$ para todo j entre 0 e k, ou seja, cada $p_j \in J$.

Embora tenhamos suposto K infinito, repare que utilizamos apenas o fato de K possuir $k+1$ escalares distintos dois a dois, sendo k o grau de x_1 em p.

■

Aplicando indução e o argumento utilizado anteriormente, temos o seguinte corolário.

Corolário 1.3.2. *Sejam K um corpo infinito e J um T-ideal de $K\langle X\rangle$. O polinômio $p(x_1, \cdots, x_n) \in J$ se, e somente se, cada uma de suas componentes multihomogêneas pertence a J.*

Exemplo 1.3.3. Tomemos o polinômio $p(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_1x_3 - x_2^2x_1 + x_2x_3x_1^2 + 2x_1x_2x_3^2 \in \mathbb{Q}\langle X\rangle$. Aplicando o Lema 1.3.1, temos que p pertence ao T-ideal J de $\mathbb{Q}\langle X\rangle$ se, e somente se, ambos os polinômios $q_1 = x_1x_2x_1x_3 + x_2x_3x_1^2$ e $q = -x_2^2x_1 + 2x_1x_2x_3^2$ pertencem a J, sendo que o primeiro deles é multihomogêneo. Agora, aplicando o mesmo raciocínio utilizado para a variável x_1, para a variável x_2 no segundo polinômio, temos que ambos $q_2 = -x_2^2x_1$ e $q_3 = 2x_1x_2x_3^2$ devem pertencer a J. Em particular, o T-ideal gerado por p é também $\langle q_1, q_2, q_3\rangle^T$.

Outra consequência do Lema 1.3.1 é o seguinte teorema.

Teorema 1.3.4. *Todo T-ideal de identidades polinomiais satisfeitas por uma PI-álgebra A, sobre um corpo infinito, é gerado pelas identidades multihomogêneas satisfeitas por essa álgebra.*

Quando investigamos o T-ideal de identidades satisfeitas por uma álgebra A, é importante procurar pelas identidades de menor grau total satisfeitas por tal álgebra, já que, dentre elas, se encontrarão certamente alguns geradores de $T(A)$. A proposição seguinte nos garante que basta procurar entre as identidades multilineares.

Proposição 1.3.5. *Seja A uma K-álgebra que satisfaz um polinômio $p \in K\langle X\rangle$ de grau total d. Então existe $q \in T(A)$ multilinear e de grau d.*

Demonstração: Suponha que o grau de x_1 em p é maior do que 1. É claro que se $p(x_1, \cdots, x_m) \in T(A)$, então $q(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ dado por

$$p(x_1 + x_2, x_3, x_4, \cdots, x_{m+1}) - p(x_1, x_3, \cdots, x_{m+1}) - p(x_2, x_3, \cdots, x_{m+1}) \in T(A),$$

possui mesmo grau total d e o grau de x_1 diminui em 1 com relação ao seu grau em p. Repete-se o procedimento até obter o grau de x_1 sendo 1. Uma vez conseguido isso, repete-se o processo para as outras variáveis até obter um polinômio multilinear.

■

Observação 1.3.6. Uma consequência importante da Proposição 1.3.5 é que $M_n(K)$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau $k \leq 2n-1$. Vamos verificar para $k = 2n-1$ primeiramente. Denotemos por e_{ij} a matriz de $M_n(K)$ cuja entrada (i, j) é 1 e que possui todas as demais entradas nulas. Seja $p(x_1, \cdots, x_{2n-1})$ um polinômio multilinear não-nulo. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o monômio $x_1 x_2 \cdots x_{2n-1}$ possui coeficiente não-nulo λ em p. Substituindo-se a variável x_i por

$e_{\frac{i+1}{2},\frac{i+1}{2}}$ se i é ímpar; e por $e_{\frac{i}{2},\frac{i}{2}+1}$ se i é par; temos que o único monômio que não se anula mediante tal substituição é aquele correspondente a $x_1x_2\cdots x_{2n-1}$ e, portanto, p avaliado mediante tal substituição resulta em $\lambda \neq 0$. Para $k < 2n-1$, aplica-se a mesma substituição, limitada claramente por k.

O mesmo argumento utilizado na observação anterior pode ser aplicado para se mostrar que, para um K-espaço vetorial V de dimensão infinita, tanto a álgebra $L_V := \{T : V \to V : T \text{ é linear}\}$ bem como sua subálgebra $B := \{T \in L_V : \dim(\mathrm{Im}T) < \infty\}$ (a multiplicação sendo dada pela composição) não são PI-álgebras. Fixada uma base β de V e tomando um subconjunto infinito enumerável $\{v_1, \cdots, v_n, \cdots\} \subset \beta$, para cada par de inteiros i, j, denotamos por S_{ij} o operador linear de V que envia v_j para v_i e envia para vetor nulo todos os demais elementos de β. Tal como ocorre com as matrizes e_{ij}, $S_{ij}S_{kl} = 0$ se $j \neq k$ e $S_{ij}S_{jl} = S_{il}$. Repare que podemos proceder tal como na Observação 1.3.6, sem nos preocuparmos com um limite para o grau do polinômio e, portanto, L_V não satisfaz nenhuma indentidade polinomial, o mesmo valendo para a subálgebra B, já que todos os S_{ij} pertencem a B.

O processo descrito na demonstração da Proposição 1.3.5 é chamado **processo de linearização** de um polinômio p. O exemplo a seguir ilustra a aplicação de tal processo.

Exemplo 1.3.7. Suponhamos que x_1^3 pertença a $T(A)$, então substituindo-se a variável x_1 por $x_1 + x_2$ devemos obter ainda uma identidade de $T(A)$. Assim,

$$x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1x_2x_1 + x_2x_1^2 + x_2^2x_1 + x_2x_1x_2 + x_1x_2^2 + x_2^3 \in T(A),$$

porém, como x_1^3 e x_2^3 pertecem ambos a $T(A)$, temos que

$$p(x_1, x_2) = x_1^2x_2 + x_1x_2x_1 + x_2x_1^2 + x_2^2x_1 + x_2x_1x_2 + x_1x_2^2$$

deve igualmente pertencer a $T(A)$.

Aplicando novamente o processo de linearização, concluímos que o polinômio multilinear

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_2x_1x_3 + x_1x_3x_2 + x_2x_3x_1 + x_3x_1x_2 + x_3x_2x_1 \in T(A).$$

A próxima questão a ser investigada é: sob que condições podemos garantir que uma identidade polinomial p pertence ao T-ideal gerado pelo(s) polinômio(s) multilineare(s) obtido(s) no processo de linearização de p?

Teorema 1.3.8. *Sejam K um corpo de característica zero e $p(x_1, \cdots, x_m) \in K\langle X\rangle$. O T-ideal $\langle p\rangle^T$ de $K\langle X\rangle$ é gerado pelos polinômios multilineares de $K\langle X\rangle$ obtidos no processo de linearização de cada uma das componentes multihomogêneas de p.*

Demonstração: Seja $p(x_1, \cdots, x_m)$, tal como no enunciado do teorema. Como K possui característica zero, é infinito, e portanto, pelo Teorema 1.3.4, $\langle p\rangle^T = \langle p_1, \cdots, p_k\rangle^T$, onde os p_j's são as componentes multihomogêneas de p. Então podemos nos ater ao caso em que $p(x_1, \cdots, x_m)$ é multihomogêneo. Após o primeiro passo de processo de linearização do polinômio p, obtemos um polinômio $q(x_1, x_2, \cdots, x_{m+1})$ de mesmo grau total, cujas componentes multihomogêneas possuem grau menor com relação a primeira variável de grau maior do que 1. Logicamente o polinômio assim obtido é gerado por p, mas se fizermos, no polinômio q, a substuição dada por $x_1 \mapsto x_1$ e $x_i \mapsto x_{i-1}$, para $2 \leq i \leq m+1$, obtemos $n.p(x_1, \cdots, x_m)$, onde n é o número de parcelas de q, ou seja, $n.p \in \langle q\rangle^T$. Como $char K = 0, p \in \langle q\rangle^T$. Como K é infinito, q é consequência de suas componentes multihomogêneas, (possivelmente algumas multilineares). Para aquelas que não são multilineares, repete-se o processo de linearização e o raciocínio anterior até obtermos um sistema de identidades multilineares geradoras de T-ideal gerado por p.

■

Os resultados demonstrados nessa seção se estendem para as identidades graduadas de uma álgebra. Isto é, se o corpo-base da álgebra é infinito, o T-ideal graduado da álgebra é gerado pelas identidades graduadas multihomogêneas e se $charK = 0$, o T-ideal graduado é gerado pelas identidades graduadas multilineares.

Como aplicação dos resultados aqui apresentados, encerramos essa seção com a demonstração de que as identidades $\mathbb{Z}_2$-graduadas da álgebra de Grassmann E listadas no Exemplo 1.2.9 geram o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de identidades de E quando a álgebra é tomada sobre um corpo infinito de característica diferente de 2. Comecemos por um lema.

Lema 1.3.9. *Seja J o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ gerado pelos polinômios $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}]$ e $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)}$ e considere um monômio graduado*

$$m(x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_l^{(1)}) \in K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$$

no qual, para cada $i; 1 \leq i \leq k$, a variável $x_i^{(0)}$ possui grau a_i, e para cada $j; 1 \leq j \leq l$; a variável $x_j^{(1)}$ possui grau b_j. Então, se algum $b_j > 1, \overline{m} = \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$, caso contrário (isto é, $b_j = 1$ para todo j) temos

$$\overline{m} = \pm\overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \cdots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \cdots x_l^{(1)}} \text{ em } K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J.$$

Demonstração: Pelos dois primeiros polinômios geradores de J, temos que, em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J, \overline{x_2 x_1^{(0)}} = \overline{x_1^{(0)} x_2}$, independente de $\mathbb{Z}_2$-grau de x_2. Disso segue que $\overline{m} = \pm\overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \cdots (x_k^{(0)})^{a_k} m'}$ onde m' é um monômio envolvendo somente as variáveis ímpares. Utilizando agora o terceiro polinômio gerador de J, temos que $\overline{x_2^{(1)} x_1^{(1)}} = -\overline{x_1^{(1)} x_2^{(1)}}$. Assim, a menos de sinal, podemos colocar as varíaveis ímpares também em ordem crescente de índices em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$. No entanto, se uma variável ímpar, por exemplo $x_1^{(1)}$, aparece mais de uma vez, temos um fator $(x_1^{(1)})^2$ dentro de $\overline{m}$. Mas $charK \neq 2$ e, pelo terceiro polinômio gerador de J, temos $\overline{2(x_1^{(1)})^2} = \overline{0}$ e portanto $\overline{(x_1^{(1)})^2} = \overline{0}$. Caso contrário, tal como queríamos, obtemos

$$\overline{m} = \pm\overline{(x_1^{(0)})^{a_1} \cdots (x_k^{(0)})^{a_k} x_1^{(1)} \cdots x_l^{(1)}}.$$

$\blacksquare$

Teorema 1.3.10. *Os polinômos* $[x_1^{(0)}, x_2^{(0)}], [x_1^{(0)}, x_1^{(1)}]$ *e* $x_1^{(1)} \circ x_2^{(1)} \in K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ *geram o* T*-ideal de identidades* $\mathbb{Z}_2$*-graduadas satisfeitas por* E *com graduação natural se* K *é infinito de característica diferente de* 2.

Demonstração: Denotemos por J o T-ideal $\mathbb{Z}_2$-graduado de $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ gerado pelas três identidades listadas no enunciado da proposição e por I o T-ideal graduado de polinômios graduados satisfeitos por E. Como E satisfaz tais polinômios, temos que $J \subset I$ e, portanto, precisamos mostrar que $I \subset J$ ou, equivalentemente, que se $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$ então $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$.

Como K é infinito, I é gerado pelas identidades graduadas multihomogêneas satisfeitas por I, bastando analisar o caso em que p é multihomogêneo. Suponhamos então que $p(x_1^{(0)}, \cdots, x_k^{(0)}, x_1^{(1)}, \cdots, x_l^{(1)})$ é multihomogêneo de multi-grau $(a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l)$. Então $p = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j m_j$, sendo n o número de parcelas de p e tendo cada m_j multi-grau $(a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_l)$. Pelo Lema 1.3.9, se algum $b_j > 1$, então $\overline{p} = \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$. Suponhamos então que todos os b_j's sejam iguais a 1. Então cada m_j é igual a $\pm(x_1^{(0)})^{a_1} \cdots (x_k^{(0)})^{a_k}(x_1^{(1)}) \cdots (x_l^{(1)})$ módulo J e, portanto

$$\overline{p} = \sum_{j=1}^{n} \overline{\beta_j (x_1^{(0)})^{a_1} \cdots (x_k^{(0)})^{a_k}(x_1^{(1)}) \cdots (x_l^{(1)})}$$

em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$, onde cada $\beta_j = \pm\alpha_j$, dependendo da paridade do número de transposições necessárias entre as variáveis ímpares para colocar as variáveis na ordem desejada. Se o coeficiente obtido é nulo, temos que $\overline{p} = \overline{0}$. Suponhamos então que $\sum_{j=1}^{n} \beta_j = \gamma \neq 0$ (e, portanto $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/J$), vamos mostrar que $\overline{p} \neq \overline{0}$ também em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$. Note que ao substituirmos todas as variáveis pares por 1 e cada variável $x_j^{(1)}$ por e_j, temos que $p(1, \cdots, 1, e_1, \cdots, e_l) = \gamma e_1 \cdots e_l \neq 0$ em E e portanto $\overline{p} \neq \overline{0}$ em $K\langle X\rangle_{\mathbb{Z}_2}/I$.

$\blacksquare$

Um invariante muito utilizado no estudo de PI-álgebras é a sequência de codimensões de uma PI-álgebra. Como visto anteriormente, as identidades multilineares de uma PI-álgebra fornecem informação importante sobre o T-ideal de identidades da mesma, especialmente no caso de característica zero. Convém muitas vezes analisar o comportamento de tais polinômios módulo o T-ideal de identidades de uma álgebra, como a seguir.

Definição 1.3.11. Seja $P_n \subset K\langle X\rangle$ o subespaço formado por todos os polinômios multilineares de grau n, nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$. A **n-ésima codimensão** da PI-álgebra A é o número

$$c_n(A) = dim\frac{P_n}{(P_n \cap T(A))}$$

Na seção 2.1 fornecemos uma estimativa para a n-ésima codimensão.

1.4 Matrizes Genéricas

A álgebra de matrizes genéricas definida nessa seção constitui um modelo bastante útil de álgebra relativamente livre na variedade determinada por $M_n(K)$ e algumas generalizações dela serão utilizadas no capítulo 3.

Nesta seção assumimos que o corpo K é arbitrário e sendo $n \geq 2$ um inteiro, fixamos a notação $\Omega = \Omega_n$ para a álgebra de polinômios em infinitas variáveis comutativas $\Omega_n = K[y_{pq}^{(i)} | p, q = 1, \cdots, n, \quad i = 1, 2, \cdots]$.

Definição 1.4.1. As matrizes $n \times n$ com entradas em $\Omega_n, y_i = \displaystyle\sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(i)} e_{pq}, \quad i = 1, 2, \cdots$ são chamadas **matrizes genéricas** $n \times n$.

A álgebra A_n gerada pelas matrizes genéricas $n \times n$ é a **álgebra matricial genérica** $n \times n$. Denotamos A_{nm} a subálgebra de A_n gerada pelas primeiras m matrizes genéricas $y_1, \cdots, y_m$

Exemplo 1.4.2. Para $n = m = 2$, fazendo $y_{pq}^{(1)} = x_{pq}, y_{pq}^{(2)} = y_{pq}$, temos A_{22} gerada por

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix}$$

Para qualquer K-álgebra comutativa A, as matrizes $n \times n$ com entradas em A podem ser obtidas por substituições das entradas das matrizes genéricas por entradas da álgebra A, por exemplo

$$a = \sum_{p,q=1}^{n} \gamma_{pq} e_{pq} \quad \gamma_{pq} \in A$$

é obtida de

$$y_1 = \sum_{p,q=1}^{n} y_{pq}^{(1)} e_{pq},$$

substituindo as variáveis $y_{pq}^{(1)}$ por γ_{pq}.

Proposição 1.4.3. *Se K é infinito, a álgebra matricial genérica A_n é isomorfa a álgebra relativamente livre $L(M_n(K))$ da variedade de matrizes $n \times n$, isto é, $A_n \simeq K\langle X \rangle / T(M_n(K))$. Se K é finito e P é uma extensão infinita qualquer de K, $A_n \simeq L(M_n(P))$.*

Demonstração: ver [17].

■

Lema 1.4.4. *Os autovalores da matriz genérica $n \times n$, y_1, são dois a dois distintos.*

Demonstração: Consideremos y_1 como sendo uma matriz com entradas no corpo de frações da álgebra polinomial Ω_n.

Seja $f(\lambda)$ o polinômio característico de y_1. Suponhamos que $f(\lambda)$ possui pelo menos uma raiz de multiplicidade maior que um. Então o discriminante de $f(\lambda)$

é igual a zero. Como cada matriz M de ordem $n \times n$ com entradas em K pode ser obtida por uma substituição de y_1, o discriminante do polinômio característico $f_M(\lambda)$ também é igual a zero e isto significa que $M \in M_n(K)$ possui pelo menos um autovalor com multiplicidade algébrica maior que 1.

Para mostrar o lema é suficiente encontrarmos uma matriz $M \in M_n(K)$ em que todos os autovalores possuem multiplicidade algébrica 1.

Se K é um corpo infinito, então podemos considerar uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal são todos distintos.

Se $K = F_q$ é um corpo com q elementos, então existe um polinômio irredutível sobre F_q de grau n e dessa forma podemos construir uma matriz $M \in M_n(F_q)$ que tem como polinômio característico este polinômio irredutível (basta tomar a matriz companheira do polinômio).

Portanto, a matriz M não tem autovalores múltiplos em nenhuma extensão de F_q.

■

Corolário 1.4.5. *Seja Ω_n nas condições anteriores e seja $y_1' = \sum_{p=1}^{n} y_{pp}^{(1)} e_{pp}, \quad y_i' = y_i, \quad i > 1$. A álgebra A_n' gerada por $y_1', y_2', y_3', \cdots$ é isomorfa a álgebra matricial genérica A_n.*

Demonstração: Seja Ξ o fecho algébrico do corpo de frações da álgebra polinomial Ω_k. Pelo lema anterior, a matriz genérica y_1 não tem autovalores múltiplos. Assim, y_1 é diagonalizável, isto é, existe uma matriz inversível z com entradas em Ξ tal que a matriz $u_1 = z^{-1} y_1 z$ é diagonal.

Denote por U_n a K-subálgebra de $M_n(\Xi)$ gerada por $u_1, u_2, \cdots$, onde $u_k = z^{-1} y_k z$.

Temos $U_n \simeq A_n$. De fato, sejam $\phi : A_n \to A_n'$ e $\psi : A_n' \to U_n$ os homomorfismos de K-álgebras, estendidos respectivamente pelas aplicações $\phi_0 : y_i \to y_i'$ e $\phi_0 : y_i' \to u_i, i = 1, 2, \cdots$

Como as matrizes u_i são obtidas como substituições de matrizes "genéricas"y_i', ψ é um homomorfismo.

A composição $\psi \circ \phi : A_n \to U_n$ é o homomorfismo definido por $y_i \to u_i = z^{-1} y_i z$. Isso implica que $\ker \phi = 0$ e, como ϕ vai para A_n', é um isomomorfismo.

■

O último corolário nos permite substituir uma das matrizes genéricas por uma matriz diagonal, o que será muito útil em considerações posteriores.

Algumas vezes, se considerarmos uma única matriz $n \times n$ genérica y, podemos usar caracteres gregos para as entradas da diagonal de y e, escrever, por exemplo, $y = \sum_{p=1}^{n} \eta_p e_{pp}$ em vez de $y = \sum_{p=1}^{n} y_{pp} e_{pp}$, assumindo que $\eta_1, \cdots, \eta_k$ são variáveis comutativas.

1.5 Polinômios Centrais

Assim como as identidades graduadas de uma álgebra, os polinômios centrais podem fornecer infromações sobre as identidades polinomiais de uma álgebra.

O problema sobre a existência de polinômios centrais para $M_n(K)$ para, $n > 2$, foi colocado pela primeira vez por Kaplansky em 1956 e respondido por Formanek e Razmylov na década de 1970. Nessa seção fornecemos os polinômios centrais de Razmylov.

Definição 1.5.1. Seja A uma álgebra. O polinômio $c(x_1, \cdots, x_n) \in K\langle X \rangle$ é chamado **polinômio central de** A se $c(x_1, \cdots, x_n)$ não possui o termo constante, pertence ao centro de A para quaisquer $a_1, \cdots, a_n \in A$ e não é uma identidade polinomial de A.

Seja $K[u_1, \cdots, u_{n+1}]$ a álgebra polinomial em $n+1$ variáveis comutativas. Definimos uma aplicação linear θ (não é um homomorfismo de álgebras) de $K[u_1, \cdots, u_{n+1}]$

na álgebra livre $K\langle x, y_1, \cdots, y_n\rangle$ de posto $n+1$, da seguinte maneira:

Se

$$g(u_1, \cdots, u_{n+1}) = \sum \alpha_a u_1^{a_1} \cdots u_{n+1}^{a_{n+1}}, \alpha_a \in K[u_1, \ldots, u_{n+1}],$$

então a imagem de g por θ é

$$\theta(g)(x, y_1, \cdots, y_{n+1}) = \sum \alpha_a x^{a_1} y_1 x^{a_2} y_2 x^{a_3} y_3 \cdots x^{a_n} y_n x^{a_{n+1}}.$$

Teorema 1.5.2 (Formanek). *Seja*

$$g(u_1, \cdots, u_{n+1}) = \prod_{2 \le p \le n} (u_1 - u_p)(u_{n+1} - u_p) \prod_{2 \le p < q \le n} (u_p - u_q)^2 \in K[u_1, \cdots, u_{n+1}].$$

O polinômio da álgebra associativa livre $K\langle x, y_1, \cdots, y_n\rangle$

$$c(x, y_1, \cdots, y_n) = \theta(g)(x, y_1, \cdots, y_n) + \theta(g)(x, y_2, \cdots, y_n, y_1) + \cdots +$$

$$+\theta(g)(x, y_n, y_1, \cdots, y_{n-1})$$

é um polinômio central para a matriz polinomial $M_n(K)$ sobre o corpo K.

Demonstração: É suficiente mostrar que o polinômio $c(\overline{x}, \overline{y_1}, \cdots, \overline{y_n})$ é uma matriz escalar, ou seja, pertence a $Z(M_n(K))$, quando $\overline{x}, \overline{y_1}, \cdots \overline{y_n}$ são matrizes genéricas e $c(x, y_1, \cdots, y_n)$ não é uma identidade polinomial para $M_n(K)$.

Pelo Corolário 1.4.5, podemos assumir que a matriz genérica $\overline{x}$ é diagonal, $\overline{x} = \sum_{p=1}^{n} \xi_p e_{pp}$, onde $\xi_1, \cdots, \xi_n$ são variáveis comutativas. Como $c(x, y_1, \cdots, y_n)$ é multilinear em $y_1, \cdots, y_n$ podemos assumir também que $\overline{y_1}, \cdots, \overline{y_n}$ são matrizes elementares (e_{ij}). Portanto,

$$c(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_{q=1}^{n} \theta(\overline{x}, e_{i_q, j_q}, \cdots, e_{i_n, j_n}, e_{i_1, j_1}, \cdots, e_{i_{q-1}, j_{q-1}}) =$$

$$= \sum_{q=1}^{k} g(\xi_{i_q}, \cdots, \xi_{i_n} \xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_{q-1}}, \xi_{j_{q-1}}) e_{i_q, j_q} \cdots e_{i_n, j_n} e_{i_1, j_1} \cdots e_{i_{q-1}, j_{q-1}}$$

Como escolhemos g de forma especial, $g(\xi_{i_q}, \cdots, \xi_{i_n}\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_q-1}, \xi_{j_q-1}) = 0$ se alguma das variáveis ξ_{i_p} e $\xi_{i'_p}$ são iguais ou se $\xi_{j_{q-1}}$ é igual a algum ξ_{i_p} com $q \neq p$. (Sempre há repetição, são $n+1$ posições e n variáveis). Por outro lado, se $i_1, \cdots, i_n$ é uma permutação de $1, \cdots, n$ então

$$g(\xi_{i_q}, \cdots, \xi_{i_n}\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_{q-1}}, \xi_{i_q}) = g(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \xi_1) =$$

$$\prod_{1 \leq p < p' \leq n} (\xi_p - \xi_{p'})^2, \theta(g)(\overline{x}, e_{i_q,i_{q+1}}, e_{i_{q+1},i_{q+2}}, \cdots, e_{i_n,i_1}, e_{i_1,i_2}, \cdots, e_{i_{q-1},i_q}) =$$

$$\prod_{1 \leq p < p' \leq n} (\xi_p - \xi_{p'})^2 e_{i_q,i_q}$$

Portanto,

$$c(\overline{x}, e_{i_1,i_2}, e_{i_2,i_3}, \cdots, e_{i_{n-1},i_n}, e_{i_n,i_1}) = \prod_{1 \leq p,q \leq n} (\xi_p \xi_q)^2 \sum_{q=1}^{n} e_{i_q,i_q} = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\xi_p - \xi_q)^2 I,$$

se $i_1, i_2, \cdots, i_n$ é uma permutação de $1, 2, \cdots, n$.

$$c(\overline{x}, e_{i_1,j_1}, e_{i_2,j_2}, \cdots, e_{i_n,j_n}) = 0 \text{ caso contrário.}$$

Agora resta provar que $c(x, y_1, \cdots, y_n)$ não é uma identidade polinomial para $M_n(K)$. Se $\overline{x}$ é uma matriz diagonal com autovalores distintos $\rho_1, \cdots, \rho_n$, vemos que

$$c(\overline{x}, e_{1,2}, e_{2,3}, \cdots, e_{n-1,n}, e_{n,1}) = \prod_{1 \leq p < q \leq n} (\rho_p - \rho_q)^2 I$$

a qual é uma matriz escalar não-nula em $M_n(K)$. Se $K = F_q$, consideramos $\overline{x} \in M_n(F_q)$ com autovalores distintos. Então $\overline{x}$ é diagonalizável sobre algum F_{q^m}. Portanto, $c(\overline{x}, \overline{y_1}, \cdots, \overline{y_n})$ é uma combinação linear (com coeficientes em F_{q^m}) de $c(\overline{x}, e_{i_1,j_1}, \cdots, e_{i_n,j_n}) \in M_n(F_q)$, algum $c(\overline{x}, e_{i_1,j_1}, \cdots, e_{i_n,j_n})$ é diferente de zero. Isso completa a prova do Teorema de Formanek.

■

1.6 Dimensão Gelfand-Kirillov

A dimensão de Gelfand-Kirillov, ou simplesmente GK-dimensão, é um invariante bastante utilizado no estudo de PI-álgebras através de métodos assintóticos. Se duas PI-álgebras possuem GK-dimensões distintas, então elas não são PI-equivalentes. Ela será utilizada no Capítulo 4 para mostrar que o Teorema do Produto Tensorial não se estende ao caso de característica positiva.

Definição 1.6.1. Seja ϕ o conjunto de todas as funções $f : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$ as quais são eventualmente monótonas crescentes e positivas. Isso significa que existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f(n_0) > 0$ e $f(n_2) \geq f(n_1)$ para todo $n_2 \geq n_1 \geq n_0$.

Definimos uma relação $\preceq$ em ϕ assumindo que $f \preceq g$ para $f, g \in \phi$ se, e somente se, existem inteiros positivos a e p tais que, para todo n suficientemente grande, $f(n) \leq ag(pn)$. A relação $\sim$ dada por $f \sim g$ para $f, g \in \phi$ se, e somente se, $f \preceq g$ e $g \preceq f$ é de equivalência. Chamamos a classe de equivalência $G(f) = \{g \in \phi | f \sim g\}$ de **crescimento de** f.

Definição 1.6.2. Seja A uma álgebra finitamente gerada e seja $\{a_1, \cdots, a_m\}$ um conjunto de geradores. Seja V^n o espaço vetorial gerado pelo conjunto $\{a_{i_1} \cdots a_{i_n} | i_j = 1, \cdots, m\}, n = 0, 1, 2, \cdots$ onde assumimos que $V^0 = K$ se A é unitária e $V^0 = 0$ se A não é unitária. A função crescimento de A é definida por

$$g_V(n) = dim(V^0 + V^1 + \cdots + V^n), n = 0, 1, 2, \cdots$$

A classe de equivalência $\mathcal{G}(A) = G(g_V)$ é chamada crescimento de A (com respeito ao espaço vetorial gerador V).

A proposição que segue mostra que a GK-dimensão está bem definida.

Proposição 1.6.3. *O crescimento da álgebra finitamente gerada A não depende do conjunto de geradores escolhido. Se V, gerado por $\{r_1, r_2, \cdots, r_m\}$, e W, gerado por $\{s_1, s_2 \cdots, s_{m'}\}$, são espaços vetoriais geradores de A, então $G(g_V) = G(g_W)$.*

Demonstração: Como $r_1, r_2, \cdots, r_m$ geram A, como espaço vetorial, existe p tal que todo s_j está em $V^0 + V^1 + \cdots + V^p$. Logo,

$$W^0 + W^1 + \cdots + W^n \subset V^0 + V^1 + \cdots + V^{pn}, n = 0, 1, 2, \cdots$$

e $g_W(n) \leq g_V(pn)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Similarmente, temos que existe um $q \in \mathbb{N}$ tal que $g_V(n) \leq g_W(qn), n \in \mathbb{N}$. Então, $G(g_V) = G(g_W)$

$\blacksquare$

Definição 1.6.4. Seja A a álgebra finitamente gerada, com um conjunto de geradores $\{a_1, \cdots, a_m\}$ e seja $g_V(n)$ a função crescimento de A, onde $V = span\{a_1 \cdots a_m\}$. A **dimensão Gelfand-Kirillov de** A é definida por

$$GKdim(A) = \limsup_{n\to\infty}(\log_n g_V(n)) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\log g_V(n)}{\log n}.$$

Lema 1.6.5. *$GKdim([K[x_1, \cdots, x_m]) = m$.*

Demonstração: O número de todos os monômios de grau menor do que n em m variáveis é igual ao número de todos os polinômios de grau n em $m+1$ variáveis, uma vez que $a_1 + \cdots + a_m \leq n$ existe uma correspondência injetora

$$x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m} \to x_0^{a_0} x_1^{a_1} \cdots x_m^{a_m}, \quad a_0 = n - (a_1 + \cdots + a_m)$$

entre estes conjuntos.

Portanto, com respeito ao conjunto usual de geradores de $A = K[x_1, \cdots, x_m]$, $g(n) = \begin{pmatrix} m+n \\ m \end{pmatrix}$ que é um polinômo de grau m. Então $\mathcal{G}(A) = G(n^m)$.

$\blacksquare$

Capítulo 2

Teoremas Clássicos da PI-teoria

Neste capítulo serão enunciados e demonstrados resultados clássicos da PI-teoria. O primeiro deles é o Teorema de Regev sobre a Codimensão que fornece um limitante superior para a n-ésima codimensão de uma álgebra que satisfaz uma identidade polinomial de grau d. O segundo resultado é o Teorema de Amitsur-Levitzki em característica zero, que fornece uma identidade polinomial de grau $2n$ para a álgebra $M_n(K)$ (relembramos que tal álgebra não satisfaz identidade polinomial de grau menor - v. Observação 1.3.6). O terceiro resultado é o Teorema de Nagata-Higman que mostra que toda álgebra nil é nilpotente. O último resultado apresentado é o Teorema de Shirshov sobre a Altura que garante a finitude da altura de uma PI-álgebra finitamente gerada.

2.1 O Teorema da Codimensão de Regev

Nessa seção demonstramos o Teorema da Codimensão de Regev, que fornece uma sequência majorante, de crescimento exponencial, para a sequência de codimensão de uma PI-álgebra que satisfaz uma identidade polinomial de grau d.

Além disso, obtemos que o produto tensorial de duas PI-álgebras também é uma

PI-álgebra.

Definição 2.1.1. Um conjunto P com a relação $\prec$ é **parcialmente ordenado** se a relação satisfaz as seguintes condições:

1. $a \prec a, \forall a \in P$

2. Se $a \prec b$ e $b \prec c$ então $a \prec c, \forall a, b, c \in P$

3. $a \prec b$ e $b \prec a$ implica $a = b$.

Os elementos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ formam uma **cadeia em** P se os índices podem ser rearranjados de modo que $a_1 \prec a_2 \prec \cdots \prec a_k$ e, eles formam uma **anticadeia** se $a_i \not\prec a_j$ para todo par (a_i, a_j) com $i \neq j$.

Teorema 2.1.2 (Dilworth). *Seja $(P, \prec)$ um conjunto finito parcialmente ordenado. Então o número mínimo de cadeias nas quais P pode ser particionado (ou seja, apresentado como uma união disjunta) é igual ao número máximo de elementos em uma anticadeia de P.*

Demonstração: A prova segue por indução sobre o comprimento do conjunto P. O resultado é válido para P vazio. Suponha agora que o conjunto P tenha, pelo menos, um elemento e, considere a o elemento maximal de P. Assumimos, por indução, que para algum inteiro k, o conjunto parcialmente ordenado $P' := P \backslash \{a\}$ pode ser coberto por k cadeias disjuntas $C_1, C_2, \cdots, C_k$ e tem pelo menos uma anticadeia A_0 de comprimento k.

Veja que $A_0 \cap C_i \neq \emptyset$, para $i = 1, 2, \cdots, k$

Para $i = 1, 2, \cdots, k$, seja x_i o elemento maximal em C_i que pertence a uma anticadeia de comprimento k em P e, defina $A := \{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$.

Afirmamos que A é um anticadeia. Seja A_i uma anticadeia de comprimento k que contém x_i. Fixe índices árbitrários distintos i e j, então

$$A_i \cap C_j \neq \emptyset.$$

Seja $y \in A_i \cap C_j$. Então $y \leq x_j$, pela definição de x_j. Isso implica que $x_i \ngeq x_j$, pois $x_i \ngeq y$. Trocando os papéis de i e j neste argumento, também temos que $x_j \ngeq x_i$ e, disso segue que A é uma anticadeia . Voltando ao conjunto P, suponha que $a \geq x_i$ para alguns $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$. Seja K a cadeia

$$\{a\} \cup \{z \in C_i : z \leq x_i\}$$

Assim, pela escolha de x_i, $P \backslash K$ não tem uma anticadeia de comprimento k. Pela hipótese de indução, $P \backslash K$ pode ser coberta por $k-1$ cadeias disjuntas visto que $A \backslash \{x_i\}$ é uma anticadeia de comprimento $k-1$ em $P \backslash K$. Assim, P pode ser coberta por k cadeias disjuntas. E, se $a \ngeq x_i$ para cada $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, então $A \cup \{a\}$ é uma anticadeia de comprimento $k+1$ em P, já que a é maximal em P. Portanto, P pode ser coberto por $k+1$ cadeias $\{a\}, C_1, C_2, \cdots, C_k$. O que completa a prova.

■

Definição 2.1.3. Para a permutação π em S_n denotamos por $d(\pi)$ o maior número d para o qual existem inteiros $1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_d \leq n$ tais que $\pi(i_1) > \pi(i_2) > \cdots > \pi(i_d)$. Em outras palavras, para uma permutação $\pi \in S_n$ fixada, introduzimos uma **ordenação parcial sobre o conjunto** $P = \{1, 2, \cdots, n\}$ da seguinte maneira

$$i \lneqq j \text{ se } i < j \text{ e } \pi(i) < \pi(j).$$

Então $d(\pi)$ é o maior número de elementos em uma anticadeia de $\{1, \cdots, n\}$ e π é d-**boa** se não existe anticadeia de comprimento d.

Exemplo 2.1.4. Seja $n = 6$ e $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 2 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$. Então $d(\pi) = 4$ já que $1 < 2 < 3 < 5$ e $\pi(1) > \pi(2) > \pi(3) > \pi(5)$ (e não há anticadeias de comprimento 5). Portanto, π é 5-boa (e, também 6-boa).

Definição 2.1.5. Para uma permutação $\pi \in S_n$ construímos um par de tabelas $T_1(\pi) = (t_{ij})$ e $T_2(\pi) = (u_{ij})$.

Primeiro definimos T_1 impondo $t_{11} = 1$. Por indução, se $t_{i,j-1}$ existe, t_{ij}, caso exista, é o menor k, que ainda não apareceu na tabela, tal que $t_{i,j-1} \leq k \leq n$ e $\pi(k) > u_{i,j-1}$. Caso não exista k satisfazendo tal condição, passa-se à proxima linha definindo $t_{i+1,1}$ como sendo o menor elemento que não aparece nas linhas superiores. O processo termina quando se esgotam todos os inteiros entre 1 e n.

A tabela $T_2(\pi)$ possui o mesmo formato de $T_1(\pi)$ e $u_{ij} = \pi(t_{ij})$.

Exemplo 2.1.6. Seja $n = 6$ e $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Damos os passos consecutivos para construir $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$.

$$t_{11} = 1, \quad u_{11} = \pi(t_{11}) = 4, T_1 = (1), T_2 = (4)$$

$$\pi(2) = 3 < 4 = u_{11}, \pi(3) = 5 > 4 = u_{11},$$

portanto

$$t_{12} = 3, u_{12} = 5;$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Seguindo o raciocínio,

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}, T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Não podemos continuar o processo. Os inteiros remanescentes em π são

$$\pi = \begin{pmatrix} * & 2 & * & 4 & 5 & * \\ * & 3 & * & 1 & 2 & * \end{pmatrix}$$

E começamos com a segunda linha de $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi), t_{21} = 2, u_{21} = 3$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & & \end{pmatrix} T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & & \end{pmatrix}.$$

De forma análoga, completamos a tabela

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 2 & & \\ 4 & 5 & \end{pmatrix} T_2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 3 & & \\ 1 & 2 & \end{pmatrix}$$

Lema 2.1.7 (Amitsur)**.** *Para uma permutação $\pi \in S_n$, o inteiro $d(\pi)$ é igual ao número de linhas da tabela $T_1(\pi)$.*

Demonstração: Pela construção das tabelas $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$, se $i_1 < \cdots < i_{d(\pi)}$ e $\pi(i_1) > \cdots > \pi(i_{d(\pi)})$ então, $i_1, \cdots, i_{d(\pi)}$ estão em linhas distintas de $T_1(\pi)$.

Portanto $d(\pi)$ é menor ou igual ao número de linhas.

Agora construiremos uma sequência $i_1 < \cdots < i_d$ com $\pi(i_1) > \cdots > \pi(i_d)$. Começamos com $i_d = t_{d1}$ e, por indução, se i_{k+1} está na $(k+1)$-ésima linha de $T_1(\pi)$, definimos $i_k = t_{kj}$ como sendo o maior j tal que $t_{kj} < i_{k+1}$.

Se $u_{kj} < \pi(i_{k+1})$, então i_{k+1} deve estar na k-ésima linha de $T_1(\pi)$, o que não é verdade. Assim, $\pi(i_k) = \pi(t_{kj}) = u_{kj} > \pi(i_{k+1})$ e podemos continuar o processo. Isso nos dá que $d(\pi) = d$.

■

Teorema 2.1.8 (Latyshev)**.** *Se A é uma PI-álgebra e o T-ideal $T(A)$ contém uma identidade polinomial de grau d, então o espaço vetorial de polinômios multilineares de grau n em $K\langle X\rangle/T(A)$ é gerado por monômios $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$, onde $\pi \in S_n$ é d-boa (ou seja, $d(\pi) < d$).*

Demonstração: Como $T(A)$ contém uma identidade polinomial de grau d, pela Proposição 1.3.5, este contém também um polinômio multilinear de grau d. Sem perda de generalidade, podemos assumir que A satisfaz uma identidade da forma

$$x_d x_{d-1} \cdots x_1 = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \cdots x_{\sigma(d)}, \quad \alpha_\sigma \in K,$$

sendo δ a permutação

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & d-1 & d \\ d & d-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trabalharemos em $P_n(A) = P_n/(P_n \cap T(A))$, isto é, no espaço vetorial de polinômios multilineares de grau n, módulo identidades polinomiais de A.

Seja G_d o conjunto de todos os monômios $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} \in P_n(A)$ tal que a permutação $\pi \in S_n$ é d-boa. Mostraremos que $P_n(A)$ é gerado por G_d. Ordenamos lexicograficamente os monômios em $P_n(A)$ assumindo que $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} < x_{\tau(1)} \cdots x_{\tau(n)}$ se, e somente se,, para algum k, $\sigma(1) = \tau(1), \cdots \sigma(k) = \tau(k), \sigma(k+1) < \tau(k+1)$.

Seja $h = x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$ o monômio minimal que não pertence ao subespaço gerado por G_d. Portanto $d(\pi) \geq d$ e existem $i_1 < \cdots < i_d$ com $\pi(i_1) > \cdots > \pi(i_d)$. Escrevemos h na forma $h = h_0 x_{\pi(i_1)} h_1 x_{\pi(i_2)} h_2 \cdots x_{\pi(i_{d-1})} h_{d-1} x_{\pi(i_d)} h_d$.

Usando a identidade polinomial de grau d para

$$\overline{x_d} = x_{\pi(i_1)} h_1, \quad \overline{x_{d-1}} = x_{\pi(i_2)} h_2, \cdots, \overline{x_2} = x_{\pi(i_{d-1})} h_{d-1}, \overline{x_1} = x_{\pi(i_d)} h_d,$$

obtemos

$$h = h_0(\overline{x}_d \overline{x}_{d-1} \cdots \overline{x}_1) = \sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma h_0 \overline{x}_{\sigma(1)} \overline{x}_{\sigma(2)} \cdots \overline{x}_{\sigma(d)} =$$

$$\sum_{\sigma \in S_d \setminus \{\delta\}} \alpha_\sigma h_0 x_{\pi(i_{\sigma(d)})} h_{\sigma(d)} x_{\pi(i_{\sigma(d-1)})} \cdots x_{\pi(i_{\sigma(1)})} h_{\sigma(1)}.$$

Como $\pi(i_1) > \cdots > \pi(i_d)$, obtemos que todos os monômios na última parcela estão abaixo de n na ordem lexicográfica e, por argumentos indutivos, pertence ao subespaço vetorial $span(G_d)$ gerado pelo conjunto G_d correspondente as permutações d-boas. Portanto h também pertence ao $span(G_d)$ e, isso completa a prova.

■

Teorema 2.1.9. *Seja A uma PI-álgebra com uma identidade polinomial de grau d. Então, a sequência das codimensões de A satisfaz $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}, n = 0, 1, 2, \cdots$*

Demonstração: Pelo Teorema 2.1.8, é suficiente mostrar que o número de permutações d-boas em S_n é limitado por $(d-1)^{2n}$.

Pelo Lema 2.1.7, para qualquer permutação d-boa π, as tabelas $T_1(\pi) = (t_{ij})$ e $T_2(\pi) = (u_{ij})$ construídas na Definição 2.1.5, tem menos do que d linhas. Já que $\pi(t_{ij}) = (u_{ij})$, toda permutação π é unicamente determinada pelo par $(T_1(\pi), T_2(\pi))$. Em cada linha de $T_1(\pi)$ e $T_2(\pi)$, os inteiros $t_{i_1}, t_{i_2}, \cdots$ e $u_{i_1}, u_{i_2}, \cdots$ aumentam. Cada inteiro $1, 2, \cdots, n$ pode ser escrito em uma das $(d-1)$ linhas de $T_1(\pi)$ e em uma das $(d-1)$ linhas de $T_2(\pi)$. Portanto, o número máximo de pares de tabelas com menos do que d linhas é limitado por $(d-1)^{2n}$. Isso completa a prova do teorema.

■

Teorema 2.1.10. *O produto tensorial $A = A_1 \otimes_K A_2$ de duas PI-álgebras A_1 e A_2 também é uma PI-álgebra.*

Demonstração: Sejam A_1 e A_2, satisfazendo respectivamente, identidades polinomiais de grau d_1 e d_2. Portanto, pelo Teorema 2.1.9,

$$c_n(A_1) \leq (d_1 - 1)^{2n}, \quad c_n(A_2) \leq (d_2 - 1)^{2n}.$$

Escolhemos n tal que $c_n(A_1)c_n(A_2) < n!$. Isso sempre é possível porque a^n é menor do que $n!$ para n grande. Sejam

$$\{g_i(x_1, \cdots, x_n) | i = 1, 2, \cdots, c' = c_m(A_1)\},$$

$$\{h_j(x_1, \cdots, x_n) | j = 1, 2, \cdots, c'' = c_m(A_2)\}$$

bases, respectivamente, de $P_n(A_1)$ e $P_n(A_2)$, onde $P_n(A_i) = \frac{P_n}{T(A_i) \cap P_n}, i = 1, 2$. Para toda permutação $\pi \in S_n$, consideramos $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$ como um elemento de $P_n(A_1)$

e escrevemos o mesmo como uma combinação linear

$$x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} = \sum_{i=1}^{c'} \beta_{\pi_i} g_i(x_1, \cdots, x_n), \quad \beta_{\pi_i} \in K$$

Similarmente, em $P_n(A_2)$,

$$x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)} = \sum_{j=1}^{c''} \gamma_{\pi_j} h_j(x_1, \cdots, x_n), \gamma_{\pi_j} \in K$$

Veja que as duas equações são identidades polinomiais, respectivamente, para A_1 e A_2, isto é, elas são automaticamente satisfeitas para quaisquer $u_1, \cdots, u_n \in A_1$ e $v_1, \cdots, v_n \in A_2$, respectivamente. Queremos garantir uma identidade polinomial multilinear de grau n para o produto tensorial $A = A_1 \otimes_K A_2$ de K-álgebras A_1 e A_2.

Seja $f(x_1, \cdots, x_n) = \sum\limits_{\pi \in S_n} \xi_\pi x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(n)}$ a identidade polinomial desejada para A, onde ξ_π's são coeficientes desconhecidos de K. Como f é multilinear, é suficiente supor que se f se anula para arbitrários $u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \cdots, u_n \otimes v_n, \quad u_1, \cdots, u_n \in A_1, \quad v_1, \cdots, v_n \in A_2$.

Calculamos $f(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \cdots, u_n \otimes v_n)$ e obtemos

$$f(u_1 \otimes v_1, u_2 \otimes v_2, \cdots, u_n \otimes v_n) = \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \otimes v_{\pi(1)}) \cdots (u_{\pi(n)} \otimes v_{\pi(n)}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \xi_\pi (u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(n)}) \otimes (v_{\pi(1)} \cdots v_{\pi(n)}) =$$

$$= \sum_{\pi \in S_n} \sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} \xi_\pi \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} g_i(u_1, \cdots, u_n) h_j(v_1, \cdots, v_n) = 0.$$

Reescrevemos esta equação na forma

$$\sum_{i=1}^{c'} \sum_{j=1}^{c''} (\sum_{\sigma \in S_n} \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} \xi_\pi) g_i(u_1, \cdots, u_n) h_j(v_1, \cdots, v_n) = 0.$$

Consideremos o sistema linear homogêneo

$$\sum_{\pi \in S_n} \beta_{\pi_i} \gamma_{\pi_j} \xi_\pi = 0, \quad i = 1, \cdots, c', \quad j = 1, \cdots, c''.$$

O número de ξ_π desconhecidos é $n!$ e o número de equações é $c'c'' = c_n(A_1)c_n(A_2)$ que é menor que $n!$. Portanto, o sistema possui uma solução não trivial do sistema correpondente a uma identidade polinomial para $A = A_1 \otimes A_2$.

■

2.2 O Teorema de Amitsur-Levitzki

Como apontado previamente na Observação 1.3.6, a álgebra $M_n(K)$ não satisfaz nenhuma identidade polinomial de grau menor ou igual a $2n - 1$ e a Proposição 1.2.3 nos garante que tal álgebra satisfaz uma identidade de grau $n^2 + 1$. Uma pergunta natural é: qual o menor grau de uma identidade satisfeita por $M_n(K)$? A resposta ($2n$) foi dada por Amitsur e Levitzki em 1950 em [2], utilizando argumentos combinatórios indutivos. Mais quatro demonstrações foram apresentadas desde então, utilizando recursos variados, como teoria de grafos e co-homologia. A demonstração que apresentamos a seguir é essencialmente a fornecida por Rosset em [20] e é válida somente para o caso de característica zero (embora o Teorema seja verdadeiro para um corpo K arbitrário).

Portanto, daqui em diante, K é um corpo de característica zero.

Primeiro vamos utilizar a Fórmula de Newton. Sejam $l \leq k$ inteiros positivos, definimos os polinômios $e_l(x_1, \cdots, x_k)$ e $S_l(x_1, \cdots, x_k)$ em $K[X]$ - a álgebra comutativa livre - como sendo

$$e_l(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_l \leq k} x_{i_1} \cdots x_{i_l} \text{ e } S_l(x_1, \cdots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^l.$$

Lema 2.2.1 (Fórmula de Newton). *Sejam $l \leq k$ inteiros positivos. Então*

$$S_l - e_1 S_{l-1} + e_2 S_{l-2} + \cdots + (-1)^{l-1} e_{l-1} S_1 + (-1)^l e_l = 0.$$

A demonstração para tal fórmula pode ser encontrada em [14].

Corolário 2.2.2. *Seja k um inteiro positivo. Então, para cada $l \leq k$, temos que existe $h(x_1, \cdots, x_l) \in K[X]$ tal que $e_l(x_1, \cdots, x_k)$ pode ser expresso como um polinômio $h(S_1(x_1, \cdots, x_k), \cdots, S_l(x_1, \cdots, x_k))$.*

O resultado é consequência da Fórmula de Newton.

Lema 2.2.3. *Seja K um corpo de característica zero e seja $A \in M_n(K)$. Se $trA^j = 0$, para todo $j, 1 \leq j \leq n$, então $A^n = 0$.*

Demonstração: Sejam $\xi_1, \cdots, \xi_n$, os autovalores de A no fecho algébrico de K. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton, e utilizando a forma normal de Jordan, temos que

$$A^n - e_1(\xi_1, \cdots, \xi_n)A^{n-1} + \cdots + (-1)^n e_n(\xi_1, \cdots, \xi_n)I = 0.$$

Mas, pelo Corolário 2.2.2, cada e_j pode ser escrito em função dos $S_i(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, para $i \leq j$. Por outro lado, repare que $S_i(\xi_1, \cdots, \xi_n) = trA^i$, que, por hipótese, é igual a zero para qualquer $i \leq n$ e portanto, $A^n = 0$.

■

Lema 2.2.4. *Seja C uma K-álgebra comutativa e seja $A \in M_n(C)$. Se $trA^j = 0$, para todo inteiro $j, 1 \leq j \leq n$, então $A^n = 0$.*

Demonstração: Repare que o resultado é válido pra $K[X]$ (qualquer que seja X), já que o mesmo é um domínio e podemos mergulhá-lo em seu corpo de frações. Por outro lado, $K[X]$ é a álgebra comutativa livre e, escolhendo X suficientemente grande, podemos garantir a existência de um homomorfismo sobrejetor $\varphi : K[X] \to C$. Então φ induz um homomorfismo sobrejetor $\tilde{\varphi} : M_n(K[X]) \to M_n(C)$ dado por $\tilde{\varphi}((a_{ij})) = (\varphi(a_{ij}))$. Segue diretamente da definição de $\tilde{\varphi}$ que $tr(\tilde{\varphi}(B^j)) = \varphi(trB^j))$, para qualquer matriz $B \in M_n(K[X])$.

Agora considere A, tal como no enunciado do lema, e seja $B \in M_n(K[X])$ tal que $\tilde{\varphi}(B) = A$. Logo $\varphi(trB^j) = trA^j = 0$, para todo inteiro positivo j menor ou igual a n. Pelo Teorema de Cayley-Hamilton e pela Fórmula de Newton,

$$B^n + h_1(trB)B^{n-1} + h_2(trB, trB^2)B^{n-2} + \cdots + h_n(trB, trB^2, \cdots, trB^n)I = 0$$

Aplicando $\tilde{\varphi}$ à equação acima, obtemos $A^n = 0$.

■

Enfim estamos prontos para proceder à demonstração do Teorema de Amitsur-Levitzki.

Teorema 2.2.5 (Teorema de Amitsur-Levitzki). *A álgebra $M_n(K)$ satisfaz a identidade $s_{2n}(x_1, \cdots, x_{2n}) \in K[X]$.*

Demonstração: Como K é de característica zero, $\mathbb{Q} \subset K$. Além do mais, s_{2n} é multilinear, bastando portanto verificar tal identidade em uma base de $M_n(K)$. Repare que $\{e_{ij} : 1 \leq i, j \leq n\} \subset M_n(\mathbb{Q})$ é uma base para $M_n(K)$, (e_{ij} tal como definido da Obvervação 1.3.6) . Logo, basta verificar que $M_n(\mathbb{Q})$ satisfaz o polinômio s_{2n}. Consideremos então, matrizes $A_1, A_2, \cdots, A_{2n} \in M_n(\mathbb{Q})$. Denotando por $e_1, e_2, \cdots, e_{2n}$ alguns dos geradores da $\mathbb{Q}$-álgebra de Grassmann E, temos que a matriz $B = e_1A_1 + \cdots + e_{2n}A_{2n}$ pertence a $M_n(E)$ e, pelo fato de E ser supercomutativa,

$$B^2 = \sum_{i<j} e_ie_j(A_iA_j - A_jA_i) \in M_n(E_0).$$

Denotemos por C a matriz B^2. É de simples verificação que, para todo inteiro positivo $k, 1 \leq k \leq n$,

$$C^k = \sum_{i_1 < \cdots < i_{2k}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} (s_{2k}(A_{i_1}, \cdots, A_{i_{2k}})) \tag{2.1}$$

e, pela linearidade do traço,

$$tr(C^k) = \sum_{i_1 < \cdots < i_{2k}} e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} tr(s_{2k}(A_{i_1}, \cdots, A_{i_{2k}})).$$

Como $tr(AB - BA) = 0$, para quaisquer matrizes $A, B \in M_n(\mathbb{Q})$, e um $2n$-ciclo é uma permutação ímpar, para qualquer $\sigma \in S_{2k}$, as parcelas

$$A_{\sigma(i_1)} A_{\sigma(i_2)} \cdots A_{\sigma(i_{2k})} \text{ e } A_{\sigma(i_{2k})} A_{\sigma(i_1)} A_{\sigma(i_2)} \cdots A_{\sigma(i_{2k-1})}$$

aparecem com sinal trocado em $s_{2k}(A_{i_1}, \cdots, A_{i_{2k}})$ e, consequentemente

$$tr(s_{2k}(A_{i_1}, \cdots, A_{i_{2k}})) = 0$$

e $tr(C^k) = 0$ para todo k. Como a matriz C pertence a $M_n(E_0)$, e E_0 é uma álgebra comutativa, o Lema 2.2.4 nos garante que $C^n = 0$. Por outro lado, pela Equação 2.1,

$$C^n = e_1 \cdots e_{2n} s_{2n}(A_1, \cdots, A_{2n}).$$

Como $e_1 e_2 \cdots e_{2n} \neq 0$ e $s_{2n}(A_1, \cdots, A_{2n}) \in M_n(\mathbb{Q})$, temos que $s_{2n}(A_1, \cdots, A_{2n}) = 0$ para quaisquer matrizes $A_1, \cdots, A_{2n}$ de $M_n(\mathbb{Q})$, sendo portanto identidade para $M_n(\mathbb{Q})$ e, consequentemente, para $M_n(K)$ se K é corpo de característica zero.

■

2.3 O Teorema de Nagata-Higman

Nesta seção vamos provar o clássico Teorema Nagata-Higman para a nilpotência de nil álgebras de índice limitado. Consideramos álgebras não unitárias.

Lema 2.3.1. *Se char$K \neq 2$, então a identidade x^2 implica na identidade $x_1x_2x_3$.*

Demonstração: Linearizando a identidade x^2, temos $(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1 + x_2^2$. Implicando $x_1x_2 + x_2x_1 = e_2(x_1, x_2) \in \langle x^2 \rangle^T$. Consideremos as consequências:

$$e_2(x_1x_2, x_3) = (x_1x_2)x_3 + x_3(x_1x_2) = \overline{0} \in \frac{K\langle X\rangle \backslash K}{\langle x^2\rangle^T}$$
$$e_2(x_2x_3, x_1) = (x_2x_3)x_1 + x_1(x_2x_3) = \overline{0} \in \frac{K\langle X\rangle \backslash K}{\langle x^2\rangle^T}$$
$$e_2(x_3x_1, x_2) = (x_3x_1)x_2 + x_2(x_3x_1) = \overline{0} \in \frac{K\langle X\rangle \backslash K}{\langle x^2\rangle^T}$$

como um sistema linear homogêneo com incógnitas $x_1x_2x_3, x_2x_3x_1, x_3x_1x_2$.

Assim, temos a matriz associada

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

cujo determinante é igual a $2 \neq 0$.

Então, a única solução do sistema dado acima é a trivial, ou seja, $x_1x_2x_3 = x_2x_3x_1 = x_3x_1x_2 = \overline{0}$. E segue que $x_1x_2x_3 \in \langle x^2 \rangle$.

■

Teorema 2.3.2 (Dubnov-Ivanov-Nagata-Higman)**.** *Seja A uma álgebra associativa não unitária sobre um corpo K de característica zero satisfazendo a identidade polinomial $x^k = 0$. Existe um inteiro $d = d(k)$, dependendo apenas de k, tal que A é nilpotente de classe d, isto é, A satisfaz a identidade polinomial $x_1 \cdots x_d$.*

Demonstração: Vamos trabalhar módulo a identidade $x^k = 0$, ou seja, na álgebra relativamente livre $A = (K\langle X\rangle \setminus K)/\langle x^k\rangle^T$ da variedade de álgebras definida pela identidade polinomial $x^k = 0$.

A linearização parcial de x^k é

$$f(x,y) = x^{k-1}y + x^{k-2}yx + \cdots + xyx^{k-2} + yx^{k-1} = 0.$$

Daí segue que

$$f(x,yz^j)z^{k-j-1} = x^{k-1}yz^{k-1} + x^{k-2}yz^jxz^{k-j-1} + \cdots + xyz^jx^{k-2}z^{k-j-1} + yz^jx^{k-1}z^{k-j-1}$$

é consequência de x^k e, portanto,

$$\sum_{j=0}^{k-1} f(x,yz^j)z^{k-j-1} = kx^{k-1}yz^{k-1} + \sum_{i=1}^{k-2} x^iyf(z,x^{k-i-1})$$

também é.

Como $f \in \langle x^k\rangle^T$ e $charK = 0$, temos $x^{k-1}yz^{k-1} \in \langle x^k\rangle^T$. Por indução, a identidade $x^{k-1} = 0$ implica em nilpotência. Portanto, para algum $d = d(k-1)$,

$$x_1 \cdots x_d = \sum_i a_ib_i^{k-1}c_i, \text{ e } x_{d+2} \cdots x_{2d+1} = \sum_j u_jv_j^{k-1}w_j,$$

onde $b_i, v_j \in A$ e a_i, c_i, u_j, v_j pertencem a K ou a A.

Então, $x_1 \cdots x_dx_{d+1}x_{d+2} \cdots x_{2d+1} = \sum_{i,j} a_i(b_i^{k-1}(c_ix_{d+1}u_j)v_j^{k-1})w_j = \bar{0}$ em A e, a álgebra relativamente livre A (e consequentemente qualquer álgebra da variedade) é nilpotente de classe $2d+1$.

■

2.4 Teorema de Shirshov

Fixamos o número $m > 1$ de geradores da álgebra livre associativa. Seja $W = \langle x_1, \cdots, x_m\rangle$ o conjunto de todos os monômios em $K\langle x_1, x_2, \cdots, x_m\rangle$. Este é chamado de semigrupo unitário livre de posto m e é o objeto livre na classe de todos os semigrupos com unidade. Para $w = x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n} \in W$, denotamos por $|w|$ o comprimento (ou grau) de w.

Definição 2.4.1. Introduzimos a ordenação lexicográfica parcial em W assumindo que $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ e, então, estendendo em W da seguinte forma

$$x_{i_1} \cdots x_{i_p} > x_{j_1} \cdots x_{j_q} \text{ se, e somente se, } i_1 = j_1, \cdots, i_k = j_k, i_{k+1} > j_{k+1}$$

para algum $k \geq 0$. Duas palavras u e v são **incomparáveis** se uma delas é o começo da outra (ou seja, $u = vw$ para algum $w \in W, w \neq 1$). Um subconjunto finito de W é chamado **incomparável** se contém duas palavras incomparáveis.

Definição 2.4.2. A palavra $w \in W$ é chamada d-**decomponível** se pode ser escrita na forma $w = w_0 w_1 \cdots w_d w_{d+1}$ (algumas das palavras w_0 e w_{d+1} podem ser a unidade) e $w_0 w_1 \cdots w_{d+1} > w_0 w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} w_{d+1}$, para toda permutação não trivial $\sigma \in S_d$.

Observe que se todas as palavras $w_1, \cdots, w_d$ são comparáveis duas a duas, temos que w é d-decomponível se $w_1 > w_2 > \cdots > w_d$.

Exemplo 2.4.3. $w = x_2x_1x_3x_2x_1x_2x_3x_1x_2x_4x_1 = (x_2x_1)(x_3x_2x_1x_2)(x_3x_1x_2)(x_4x_1)$ é uma decomposição, com $w_0 = x_2x_1$ e $w_3 = x_4x_1$, porque

$$(x_2x_1)(x_3x_2x_1x_2)(x_3x_1x_2)(x_4x_1) > (x_2x_1)(x_3x_1x_2)(x_3x_2x_1x_2)(x_4x_1) = w_0w_2w_1w_3.$$

Lema 2.4.4. *Se $w \in W$ tem a apresentação $w = pq = rp$ para certas palavras de comprimento positivo p, q, r, então w tem a forma a^n ou $abab \cdots aba = (ab)^{n-1}a$ para certos $a, b \neq 1$ e $n > 1$.*

Demonstração: (i) Se $|p| < |r|$, então $r = pb$ e assim $w = pbp$, ou seja, $w = aba$ para $a = p$.

(ii) Se $|r| \leq |p|$, então $p = rp_1$. Logo, $w = rp_1q = rrp_1$ e $p_1q = rp_1$. Se $|r| \leq |p_1|$, então $p_1 = rp_2$ e $p_2q = rp_2$. Continuamos este processo até obter $p_k = rp_{k+1}$ e $p_{k+1}q = rp_{k+1}$ onde $|p_{k+1}| < |r|$. Neste caso, temos

(a) Se $p_{k+1} = 1$, então $p = r^{k+1}$ e $w = r^{k+2} = a^{k+2}$ para $a = r$.

(b) Se $p_{k+1} \neq 1$, então $p_{k+1}q = rp_{k+1}$ e $|p_{k+1}| < |r|$. Do caso (i), temos que $a = p_{k+1}$, $r = ab$, $p = r^{k+1}p_{k+1}$ e $w = r^{k+2}p_{k+1} = (ab)^{k+2}a$.

∎

Lema 2.4.5. *Seja $v = w_0ww_1ww_2 \cdots w_{d-1}ww_d$ um monômio tal que a subpalavra w tem d diferentes subpalavras comparáveis. Então, v é d-decomponível.*

Demonstração: Queremos mostrar que v pode ser escrito como

$$v = b_0'b_1' \cdots b_{d+1}' \text{ e } b_0'b_1' \cdots b_{d+1}' > b_0'b_{\sigma(1)}' \cdots b_{\sigma(d)}'b_{d+1}', \forall \sigma \in S_d.$$

Seja $w = a_iv_ib_i, i = 1, 2, \cdots, d$ e $v_1 > v_2 > \cdots > v_d$. Então v tem a seguinte d-decomposição

$$v = (w_0a_1)(v_1b_1w_1a_2)(v_2b_2w_2a_3) \cdots (v_{d-1}b_{d-1}w_{d-1}a_d)(v_db_d)w_{d+1}$$

pois $t_1 > t_2 > \cdots > t_d$, onde $t_i = v_ib_iw_ia_{i+1}, \quad i = 1, \cdots, d-1$ e $t_d = v_db_d$.

∎

Exemplo 2.4.6. Sejam p e q palavras comparáveis. Então a palavra $w = p^{d-1}q$ contém d subpalavras comparáveis. Se $p > q$, então $p^{d-1}q > p^{d-2}q > \cdots > pq > q$. Se $p < q$ então $p^{d-1}q < p^{d-2} < \cdots < pq < q$.

Definição 2.4.7. Seja $w \in W$ e $|w| \geq d$. Escreva $w = 1.w_1 = e_2w_2 = \cdots = e_dw_d$, onde e_i é um começo de w e $|e_i| = i - 1$. Então $|w_i| = |w| - i + 1$. Dizemos que as palavras $w_1, w_2, \cdots, w_d$ são os ***d*-fins de** w.

Lema 2.4.8. *Seja $|w| \geq d$ tal que o conjunto formado por todos os d-fins de w é incomparável. Então $w = ab^tc$, onde $|a| + |b| < d, t \geq 1$ e qualquer $c = 1$ ou c um começo de b. Se, para um inteiro positivo k, $|w| \geq dk$, então $t \geq k$ e, em particular, w contém uma subpalavra b^k com $|b| < d$ se $k \leq \left[\dfrac{|w|}{d}\right]$.*

Demonstração: Sejam w_i e w_j dois d-fins incomparáveis de $w, i < j$. Então, $w = aw_i$ e $w = abw_j$, assim $w_i = bw_j$.

Como w_i e w_j são incomparáveis, temos que $w_i = w_j u$ e, pelo Lema 2.4.4, $(w_i = bw_j = w_j u)$ segue que $w_i = b^t c$, onde cada $c = 1$ ou c é um começo de b, ou seja, $w = ab^t c$. Além disso, $|a| + |b| = j - 1 < d$. Se $dk \leq |w|$, então

$$dk \leq |a| + |b| + (t-1)|b| + |c| < d + (t-1)|b| + |c| < d + (t-1)d \text{ e } k \leq t.$$

■

Lema 2.4.9. *Seja $w \in W$ tal que $|w| = kd$. Se w não contém uma subpalavra $b^k, |b| < d$, então w pode ser escrito como $w = vu$, com $|v| \geq d$ e os d-fins de v comparáveis dois a dois, e v pertence a um conjunto finito S de cardinalidade limitada por*

$$|S| \leq s(d,k) = \frac{d(d-1)}{2}(k-1)m^d$$

Demonstração: Se w não contém uma subpalavra b^k, pela contrapositiva do Lema 2.4.8, todos os d-fins da palavra w são comparáveis.

Seja v o começo de w de comprimento mínimo tal que os d-fins de q são comparáveis. Pela definição de d-fins, $|v| \geq d$.

Seja $v = qx$ para alguma letra x. Então cada $|q| < d$ ou os d-fins de q são incomparáveis.

No segundo caso, os Lemas 2.4.4 e 2.4.8 nos dão que $q = a(cb)^t c$, onde $c, b \neq 1, |a| + |b| + |c| < d$ e $t \geq 1$ ou $q = ab^t$, onde $b \neq 1$ e $|a| + |b| < d$.

O caso $t \geq k$ é impossível, pois w contém $(bc)^t$ e $|bc| = |b| + |c| < d$. Portanto, $t < k$. Denotemos por S o conjunto de todas as palavras escritas de uma das seguintes duas formas:

(i) $v = a(cb)^t cx$, onde $c, b \neq 1, 1 \leq t \leq k-1, |a| + |b| + |c| \leq d-1$ e a letra x é diferente da primeira letra de b.

(ii) $v = ab^t x$, onde $b \neq 1, 1 \leq t \leq k-1, |a|+|b| \leq d-1$ e a letra x é uma letra diferente da primeira letra de b.

Vamos estimar o número de palavras de primeiro tipo (em alguns lugares temos inequações porque não garantimos que a representação correspondente é única).

Seja $l = |a|+|b|+|c|$. Então $2 \leq l \leq d-1$. Os dois inteiros $|a|$ e $|a|+|c|$ determinam $|a|,|b|,|c|$. Portanto, escolhemos dois inteiros distintos $|a|$ e $|a|+|c|$ entre $0,1,2,\cdots,l-1$, e temos $\dfrac{l(l-1)}{2}$ possibilidades para $|a|,|b|,|c|$. Para l fixo, as possibilidades para v são $\dfrac{l(l-1)}{2}m^l(k-1)(m-1)$ (m letras em cada uma das l posições de a,b,c; $k-1$ possibilidades para t; e $m-1$ letras x distintas da primeira letra de b). A soma para $l = 2,3,\cdots,d-1$ nos dá que o número de palavras do primeiro tipo é limitado por

$$\sum_{l=2}^{d-1} \frac{l(l-1)}{2} m^l (k-1)(m-1).$$

Similarmente, para as palavras do segundo tipo, temos

$$\sum_{l=1}^{d-1} l m^l (k-1)(m-1).$$

Por fim, usando a relação de Stifel, e $l \leq d-1$, temos

$$|S| \leq (k-1)(m-1)\sum_{l=1}^{d-1} \frac{(l+1)l}{2} m^l \leq (k-1)(m-1)\frac{d(d-1)}{2}\sum_{l=0}^{d-1} m^l \leq$$

$$\leq (k-1)\frac{d(d-1)}{2} m^d.$$

■

Teorema 2.4.10 (Belov). *Seja w uma palavra do semigrupo livre $\langle x_1, x_2, \cdots, x_m \rangle$, $m > 1$ e, sejam k e d inteiros fixos com $k \geq d > 1$. Se a palavra w não é d-decomponível, então pode ser escrita na forma*

$$w = c_0 v_1^{k_1} c_1 v_2^{k_2} \cdots v_r^{k_r} c_r$$

onde $|v_i| < d,\quad k_i \geq k,\quad r < dm^d,\quad \sum_{i=0}^{r} |c_i| \leq d^2ks(d,k) + dk(r+1) \leq \dfrac{d^4k^2m^d}{2}$, *as palavras* v_i *e* c_i *não têm começo comum. Aqui,* $s(d,k)$ *foi definido no Lema 2.4.9.*

Demonstração: Se $|w| \leq d^2ks(d,k)$, então assumimos que $c_0 = w$ e temos o resultado. Se $|w| > d^2ks(d,k)$, então $w = u_1w_1u_2w_2\cdots u_tw_tu_{t+1}$ onde $t = ds(d,k), |w_i| = kd, |b| < d$, e os u_i's são arbitrários. Pelo Lema 2.4.9, se nenhum w_i contém uma subpalavra $b^k, |b| < d$, então $w_i = v_ix_i$, onde v_i está no conjunto S definido no Lema 2.4.9 e v_i contém d subpalavras comparáveis. Como $t = ds(d,k) \geq d|S|$, algum v_i aparece pelo menos d vezes em w e, pelo Lema 2.4.5, a palavra w é d-decomponível. Portanto, algum w_i (e então, também w) contém uma subpalavra $b^k, |b| < d$.

Seja c_0 o menor início de w tal que $w = c_0v_1^{k_1}w_1$, onde $|v_1| < d, k_1 \geq k$ e as palavras v_1 e w_1 não têm começo comum, o que pode ser facilmente obtido sempre. Se w_1 contém uma subpalavra $b^k, |b| < d$, então escolhemos c_1 tal que $w_1 = c_1v_2^{k_2}w_2$ e c_1 com menor tamanho possível.

Como acima, podemos assumir que v_2 e w_2 não têm começo comum. Fazemos w_2 da mesma maneira que w_1, etc. Obtemos a seguinte forma para w:

$$w = c_0v_1^{k_1}c_1v_2^{k_2}\cdots c_{r-1}v_r^{k_r}c_r$$

onde $|v_i| < d, k_i \geq k, c_i$ não contém uma subpalavra da forma $b^k, |b| < d$, e cada v_i e c_i não têm começo comum ou, se $c_i = 1$, então v_i e v_{i+1} não têm começo comum. Portanto, w contém $r-1$ subpalavras disjuntas $v_i^{d-1}x_i, i = 1,\cdots,r-1$, onde x_i é uma letra diferente da primeira letra de v_i.

Aqui usamos que $k \geq d$ (e que talvez $c_r = 1$). O número de palavras distintas da forma $v^{d-1}x, |v| < d$ e x uma letra diferente da primeira letra de v é

$$\sum_{l=1}^{d-1} m^l(m-1) = m^d - m < m^d.$$

Se assumirmos que $r \geq dm^d$, então alguma palavra da forma $v^{d-1}x$, onde $|v| < d$, e x não é a primeira letra de v, aparece em w pelo menos d vezes

$$w = q_0(v^{d-1}x)q_1(v^{d-1}x)q_2 \cdots q_{d-1}(v^{d-1}x)q_d.$$

Pelo exemplo 2.4.6, a palavra $v^{d-1}x$ contém d subpalavras comparáveis e, pelo Lema 2.2.4, obtemos uma d-decomposição de w, o que é uma contradição. Portanto, $r < dm^d$.

Para provar a desigualdade de $\sum_{i=0}^{r} |c_i|$, vamos dividir cada uma das palavras c_i em várias subpalavras consecutivas de comprimento dk e uma palavra de comprimento menor do que dk. Assim temos,

$$p = \sum_{i=0}^{r} \left[\frac{|c_i|}{dk}\right] > \frac{1}{dk} \sum_{i=0}^{r} |c_i| - (r+1)$$

intervalos de comprimento dk. Como c_i não contém subpalavras da forma $b^k, |b| < d$, pelo Lema 2.4.9, cada um desses intervalos tem como começo um elemento do conjunto S, que aparece como uma subpalavra de w. Isso torna a palavra w d-decomponível. Como isso é impossível, obtemos que $p < ds(d,k)$. Usando também a desigualdade $\sum_{i=0}^{r} |c_i| < dk(p + (r+1))$, obtemos

$$\sum_{i=0}^{r} |c_i| \leq d^2ks(d,k) + dk(r+1) \leq d^2km^d(\frac{(k-1)(d-1)d}{2} + 1) \leq \frac{1}{2}d^4k^2m^d.$$

■

Definição 2.4.11. Seja A uma álgebra gerada por $a_1, \cdots, a_m$. Seja H um conjunto finito de palavras de $a_1, \cdots, a_m$. Dizemos que A **tem altura** h **com relação ao conjunto de palavras** H, se h é o menor inteiro com a propriedade que, como um espaço vetorial, A é gerado por todos os produtos

$$u_{i_1}^{k_1} \cdots u_{i_t}^{k_t} \text{ tal que } u_{i_1}, \cdots, u_{i_t} \in H \text{ e } t \leq h.$$

Agora, provamos o teorema de Shirshov para a altura de PI-álgebras finitamente geradas.

Teorema 2.4.12 (Teorema de Shirshov). *Seja A uma PI-álgebra gerada por m elementos $a_1, \cdots, a_m$ e satisfazendo uma identidade polinomial de grau $d > 1$. Então A tem altura finita com relação ao conjunto de todas as palavras $a_{i_1} \cdots a_{i_s}$ de comprimento $s < d$.*

Demonstração: Nossas considerações serão similares as da prova do Teorema de Regev para o crescimento exponencial da sequência de codimenções de uma PI-álgebra. Assumimos que A satisfaz uma identidade multilinear da forma

$$x_1 \cdots x_d = \sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(d)}, \ \alpha_\sigma \in K,$$

onde a soma está em todas as permutações não-triviais $\sigma \in S_d$. Considere um produto $w = a_{i_1} \cdots a_{i_p} \in A$. Primeiro, se w é d-decomponível, então podemos escrevê-la como um produto de $d+2$ subpalavras $w_0 w_1 \ldots w_d w_{d+1}$ tais que

$$w = w_0 w_1 \cdots w_d w_{d+1} > w_0 w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)} w_{d+1},$$

para qualquer permutação $\sigma \in S_d$ não-trivial. Então aplicamos a identidade polinomial

$$w_0(w_1 \cdots w_d) w_{d+1} = \sum_{\sigma \in S_d} \alpha_\sigma w_0 (w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(d)}) w_{d+1}.$$

Obtemos que w é uma combinação linear de palavras que são menores na ordenação lexicográfica e, continuando o processo até obter que todos os elementos de A são combinações lineares de palavras em $a_1, \cdots, a_m$, as quais não são d-decomponíveis.

Agora, fixamos o inteiro $k = d$. Pelo Teorema 2.4.10, se a palavra não é d-decomponível então ela pode ser escrita na forma

$$w = c_0 v_1^{k_1} c_1 v_2^{k_2} \cdots v_t^{k_t} c_t,$$

em que $|v_i| < d$, $k_i \geq k = d$, $t < dm^d$, e $\sum_{i=0}^{t} |c_i| \leq \frac{d^4k^2m^d}{2} = \frac{d^6m^d}{2}$. Considerando as palavras c_i's como um produto $c_i = u_{j_1} \cdots u_{j_q}$ de comprimento $q = |c_1|$ com relação as palavras $a_1, \cdots, a_m$ (de comprimento $1 < d$), temos que A é gerada por todos

$$w = u_1 \cdots u_{p_0} v_1^{k_1} u_{p_0+1} \cdots u_{p_1} v_2^{k_2} \cdots v_t^{k_t} u_{p_{t-1}+1} \cdots u_{p_t}.$$

Portanto, a altura de A é limitada pela soma de t e $|c_0| + \cdots |c_t| = p_t$ e, t e p_t são limitados em termos de d e m, onde m é o número de geradores da álgebra A e d é o grau da identidade polinomial satisfeita por A.

■

Corolário 2.4.13. *Seja A uma PI-álgebra finitamente gerada, com altura h, a $GKdim(A) \leq h$.*

Capítulo 3

Identidades Polinomiais Graduadas de Álgebras T-primas

Em 1987, em [16], Kemer respondeu ao Problema de Specht e também classificou as álgebras T-primas, a menos de PI-equivalência, em característica zero. Nesse mesmo trabalho ele demonstrou o Teorema do Produto Tensorial

Teorema 3.0.14 (Teorema do Produto Tensorial)**.** *Seja* $char K = 0$*. Então*

1. $M_{a,b}(E) \otimes E \sim M_{a+b}(E)$.

2. $M_{a,b}(E) \otimes M_{c,d}(E) \sim M_{ac+bd,ad+bc}(E)$.

3. $M_{1,1}(E) \sim E \otimes E$.

Os métodos utilizados por ele usam fortemente a teoria de estrutura de anéis. Mais tarde surgiram demonstrações alternativas para o teorema utilizando métodos combinatórios e identidades graduadas. Neste capítulo é apresentada uma demonstração desse tipo para $T(M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)) = T(M_{pr+qs,ps+qr}(E))$, bem como são discutidas as equivalências entre subálgebras graduadas de $M_n(E)$.

3.1 Álgebras Graduadas e Bases Multiplicativas

Definição 3.1.1. Seja $\mathcal{B}$ uma base para a álgebra A. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma **base multiplicativa para** A se, para quaisquer $b_1, b_2 \in \mathcal{B}$, tais que $b_1 b_2 \neq 0$, existe $\alpha \in K \setminus \{0\}$ tal que $\alpha b_1 b_2 \in \mathcal{B}$.

Quando existe $\mathcal{B}$, uma base multiplicativa para A, se podemos definir uma aplicação $|\cdot| : \mathcal{B} \to G$, em que G denota um grupo (abeliano com notação aditiva), satisfazendo

$$b_1 b_2 \neq 0 \Rightarrow |b_1 b_2| = |b_1| + |b_2|, \forall b_1, b_2 \in \mathcal{B}, \tag{3.1}$$

tal aplicação induz uma G-graduação em A sendo, para cada $g \in G$, A_g o subespaço gerado pelo conjunto $\{b \in \mathcal{B} | \ |b| = g\}$. Dessa forma, a base $\mathcal{B}$ é G-homogênea. Uma base com tal propriedade chamamos G-**multiplicativa** para a álgebra G-graduada A.

As álgebras $M_{p,q}(E)$ e seus produtos tensoriais possuem bases multiplicativas canônicas. Preliminarmente, vamos fixar algumas notações. Para um inteiro positivo m, $[m]$ denotará o conjunto $\{1, 2, \cdots, m\}$.

Definição 3.1.2. Seja $A = M_m(K)$. Qualquer aplicação $\mu : [m] \to [m]$ induz uma $\mathbb{Z}_m$-graduação em A definindo $|e_{ij}| := \overline{\mu(j) - \mu(i)} \in \mathbb{Z}_m (1 \leq i, j \leq m)$.

Essa $\mathbb{Z}_m$-graduação é chamada de **graduação elementar induzida por** μ. Na verdade, $\mathcal{B} = \{e_{ij} | 1 \leq i, j \leq m\}$ é uma base $\mathbb{Z}_m$-multiplicativa para $M_m(K)$ e $|\cdot|_\mu$ satisfaz a Equação 3.1. Daqui em diante, quando nos referirmos a uma graduação elementar em $M_n(K)$, ficará implícito que μ é uma bijeção. Denotamos por $\imath$ a aplicação identidade em $[m]$. Neste caso, $|e_{ij}| = \overline{j - i}$ fornece a graduação introduzida por Vasilovsky em [2].

Como visto, logo após a Definição 1.1.4, a álgebra de Grassmann E de um espaço vetorial V de dimensão infinita tem uma $\mathbb{Z}_2$-graduação natural $E = E_0 \oplus E_1$.

A base β (que ao longo desse capítulo denotaremos por ε para evitar conflito de notação) para E exibida na Definição 1.1.4 é $\mathbb{Z}_2$-multiplicativa e, portanto, podemos particioná-la em $\varepsilon = \varepsilon_0 \cup \varepsilon_1$, sendo ε_0 formado pelos elementos de comprimento par, e ε_1 o conjunto formado pelos elementos de comprimento ímpar.

Como $M_n(E) \cong M_n(K) \otimes E$ pode-se combinar uma graduação elementar para $M_m(K)$ com a graduação natural em E para obter uma graduação em $M_n(E)$.

Definição 3.1.3. Seja $A = M_m(E)$ e $\mu \in S_m$. Para todo $a \in \varepsilon$ e $i, j \in [m]$ definimos $|ae_{ij}| := (|e_{ij}|_\mu, |a|_2) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$.

Toda $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação considerada em $M_m(E)$ será como na definição anterior.

Como $|\cdot|$ satisfaz 3.1, esta transforma $M_m(E)$ em uma álgebra $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduada, denotada por $(M_m(E), \mu)$.

Agora buscamos uma classe muito importante de subálgebras de $M_m(E)$, a classe da álgebra $M_{p,q}(E)$, com $m = p + q$. Lembramos que os elementos $M_{p,q}(E)$ são matrizes em blocos $\begin{pmatrix} (E_0)_{p\times p} & (E_1)_{p\times q} \\ (E_1)_{q\times p} & (E_0)_{q\times q} \end{pmatrix}$ com entradas em E_0 e E_1.

Então $M_{p,q}(E)$ herda a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação de $(M_m(E), \mu)$ e, definindo $\eta : [m] \to \mathbb{Z}_2$ tomando valores 0 se $i \leq p$ e 1, caso contrário. O conjunto $\mathcal{B}_p = \{ae_{ij} | i, j \in [m], a \in \varepsilon_{\eta(i)+\eta(j)}\}$ é uma base $(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2)$-multiplicativa para $M_{p,q}(E)$.

Observação 3.1.4. Quaisquer dois $\mu, \nu \in S_m$ induzem $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduações isomorfas em $M_m(E)$, ou seja, existe um isomorfismo $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduado $\varphi : (M_m(E), \mu) \to (M_m(E), \nu)$. Isso não é verdade para $M_{p,q}(E)$. Por exemplo, se $m = 2n$ e $\nu = (n\ n+1)$, então $(M_{n,n}(E), \imath)$ e $(M_{n,n}(E), \nu)$ não são isomorfas como álgebras graduadas, pois a componente $(n-1, 0)$ -graduadas tem dimensão infinita em $(M_{n,n}(E), \imath)$ e zero em $(M_{n,n}(E), \nu)$.

No entanto, sempre podemos mergulhar $(M_{p,q}(E), \mu)$ dentro de $(M_m(E), \imath)$ através de um homomorfismo $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduado φ_μ definido em $\mathcal{B}_p$ por

$$\begin{array}{rccc} \varphi_\mu & : & (M_{p,q}(E), \mu) & \longrightarrow & (M_m(E), \imath) \\ & & ae_{ij} & \longmapsto & ae_{\mu(i)\mu(j)} \end{array}.$$

De fato, note que

$$|\varphi(ae_{ij})|_\imath = |ae_{\mu(i)\mu(j)}|_\imath = (\overline{\mu(j) - \mu(i)}, |a|_2) = |ae_{ij}|_\mu.$$

Além disso, os vetores de $\varphi_\mu(\mathcal{B}_p)$ constituem uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-base multiplicativa para $\varphi_\mu(M_{p,q}(E))$.

Observação 3.1.5. Seja $P_\mu := \mu([p]) \subseteq [m]$, e defina $\alpha : [m] \to \mathbb{Z}_2$ como $\alpha(i) = 0 \in \mathbb{Z}_2$ se $i \in P_\mu$ e 1, caso contrário. Denotando por $M_\alpha(E)$ a subálgebra de $M_m(E)$ que, como espaço vetorial, é gerado por $\{ae_{ij} | a \in \varepsilon_{\alpha(i)+\alpha(j)}\}$, temos que $M_\alpha(E)$ é a imagem de $(M_{p,q}(E), \mu)$ em $M_m(E)$ pela aplicação φ_μ.

Por outro lado, seja $\alpha : [m] \to \mathbb{Z}_2$ uma aplicação qualquer e assuma que uma entre as fibras de 0 e 1 tem exatamente p elementos, a saber $i_1, \cdots, i_p \in [m]$. Definindo $\{j_1, \cdots, j_q\} := [m] \backslash \{i_1, \cdots i_p\}$, temos que $M_\alpha(E)$ é um isomorfo a $(M_{p,q}(E), \mu)$, sendo μ

$$\mu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & p & p+1 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_p & j_1 & \cdots & j_q \end{pmatrix} \in S_m.$$

Portanto, estudar uma $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $(M_{p,q}(E), \mu)$ é equivalente a estudar uma subálgebra conveniente $M_\alpha(E)$ em $(M_m(E), \imath)$.

O produto tensorial $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é dotado da seguinte graduação.

Definição 3.1.6. Seja $m = p + q, n = r + s$ e, seja $\mu \in S_m, \nu \in S_n$. Dado $(ae_{ij}, be_{uv}) \in \mathcal{B}_p \times \mathcal{B}_r$ defina

$$|ae_{ij} \otimes be_{uv}| := (\overline{n(\mu(j) - \mu(i)) + (\nu(v) - \nu(u))}, |a|_2 + |b|_2) \in \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2.$$

Como $\{x \otimes y | x \in \mathcal{B}_p, y \in \mathcal{B}_r\}$ é uma base multiplicativa para $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e a aplicação $|\cdot|$ satisfaz a Equação (3.1), isso define uma $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-graduação nesta álgebra.

Vamos provar que esta álgebra é graduada PI-equivalente a $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ com respeito a uma graduação quase canônica.

3.2 Identidades Polinomiais Graduadas de $M_{p,q}(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$

A seguir, fazemos algumas observações gerais a respeito do T-ideal G-graduado de uma álgebra A.

Uma vez que assumimos que o corpo K possui característica zero, o T-ideal G-graduado de identidades polinomiais G-graduadas satisfeitas por uma K-álgebra A, é gerado por polinômios multilineares. Se $\mathcal{B}$ é uma base G-homogênea de A, para verificar se um polinômio multilinear f pertence a $T_G(A)$, basta verificar se ele pertence ao núcleo de qualquer homomorfismo graduado $S : K\langle X\rangle_G \to A$ tal que $S(x_i) \in \mathcal{B}$, para qualquer i. Neste caso, chamamos S uma **substituição standard** e denotamos por $f|_S$. Note que $f|_S = 0$ ou $cf|_S \in \mathcal{B}$ para algum $c \in K\backslash\{0\}$.

No resultado que segue, $\mathcal{M}$ denota o conjunto de todos os monômios multilineares na álgebra livre G-graduada $K\langle X\rangle_G$.

Proposição 3.2.1. *Sejam A uma álgebra G-graduada e $\mathcal{B}$ uma base G-multiplicativa de A. Seja $\mathcal{N}$ um conjunto de identidades polinomiais graduadas de A e denote por I o T_G-ideal gerado por $\mathcal{N}$. Assuma que para todos $h, h' \in \mathcal{M}\backslash T_G(A)$ existem uma substituição standard S e um elemento não-nulo $c \in K$ tal que*

$$0 \neq h|_S = ch'|_S \text{ se, e somente se, } h \equiv ch' \pmod{I}.$$

Então $T_G(A)$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$.

Demonstração: Seja J o T_G-ideal gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$. Temos $I \subseteq J \subseteq T_G(A)$ e, portanto, devemos provar apenas que toda identidade multilinear graduada de A está em J.

Suponha que existe um polinômio multilinear $f = f(x_1, \cdots, x_n) \in T_G(A)$ que não está em J. Então podemos escrever $f = \sum_{i=1}^{t} c_i f_i \pmod J$, onde cada $f_i \in \mathcal{M}$, os escalares c_i são não nulos, e o número de parcelas t é o menor possível. O número de parcelas t deve ser maior que 1, pois J contém $\mathcal{M} \cap T_G(A)$. Como t é mínimo, $f_1 \notin T_G(A)$, e portanto existe uma substituição standard S tal que $f_1|_S \neq 0$. Daí

$$c_1 f_1|_S = -\sum_{i=2}^{t} c_i f_i|_S.$$

Sendo $\mathcal{B}$ uma base multiplicativa G-homogênea, alguma avaliação não-nula $f_i|_S$ fornece um elemento de bases homogêneas $\mathcal{B}$ de A, a menos de um coeficiente não-nulo c_i'. Portanto, existe $j \in \{2, \cdots, t\}$, digamos $j = 2$, tal que $f_1|_S = c f_2|_S$ para algum $c \in K \setminus \{0\}$. Logo, por nossa suposição, segue que $f_1 \equiv c f_2 \pmod I$. Finalmente, isso garante que

$$f \equiv (c_1 c + c_2) f_2 + \sum_{i=3}^{t} c_i f_i \pmod J$$

contradizendo a minimalidade de t.

∎

Análogo ao que acontece com uma única álgebra $M_{p,q}(E)$, o produto tensorial $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é isomorfo, preservando-se a graduação, ao produto tensorial $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ para convenientes $\alpha : [m] \to \mathbb{Z}_2$ e $\gamma : [n] \to \mathbb{Z}_2$. Relembramos que neste caso, a $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduação para $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ é definida por

$$|ae_{ij} \otimes be_{uv}| = \overline{(n(j-i) + (v-u))}, |a|_2 + |b|_2) \in \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2.$$

No resto da seção, vamos denotar por $|\cdot|_{mn}$ o $\mathbb{Z}_{mn}$-grau de um elemento homogêneo de $A = M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$, enquanto $|\cdot|$ vai denotar $\mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$-grau.

Um fato importante é que $|ae_{ij} \otimes be_{uv}|_{mn} = 0$ se, e somente se, $i = j$ e $u = v$. Como uma consequência, $|ae_{ij} \otimes be_{uv}| = (0, 0)$ e $A_{(0,1)} = 0$. Em outras palavras, qualquer monômio em $K\langle X \rangle_{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2}$ de grau $(0, 1)$ é uma identidade polinomial de A.

Agora, seja $\mathcal{N}$ o seguinte conjunto de polinômios multilineares

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 - x_2x_1 & \text{com } |x_1| = |x_2| = (0,0) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2 \\ x_1x_2x_3 + (-1)^{s+1}x_3x_2x_1 & \text{com } |x_1| = |x_3| - |x_2| = (t,s) \in \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2. \end{array}$$

Lema 3.2.2. *Seja $G := \mathbb{Z}_{mn} \times \mathbb{Z}_2$. Então $\mathcal{N} \subseteq T_G(A)$.*

Demonstração: Para qualquer elemento homogêneo w de uma álgebra G-graduada, vamos denotar por $\partial(w) \in \mathbb{Z}_2$ a segunda componente de G-grau. Agora, seja

$$w_h := a_h e_{i_h j_h} \otimes b_h e_{u_h v_h} \in \mathcal{B} \text{ para } h = 1,2,3$$

e assuma

$$|w_1|_{mn} = |w_3|_{mn} = -|w_2|_{mn}.$$

Se $w_1w_2w_3 \neq 0$ então $|w_1w_2| = (0,0)$ e $w_1w_2 \neq 0$. Como acima, isso implica que $j_1 = i_2$ e $v_1 = u_2$ e, além disso, $j_2 = i_1$ e $v_2 = u_1$. Analogamente, $j_2 = i_3, v_2 = u_3, j_1 = i_2, v_3 = u_2$. Em outras palavras, obtemos

$$w_1 = a_1e_{ij} \otimes b_1e_{uv}, \quad w_2 = a_2e_{ji} \otimes b_2e_{vu}, \quad w_3 = a_3e_{ij} \otimes b_3e_{uv}$$

para alguns $1 \leq i,j \leq m$ e $1 \leq u,v \leq n$.

Portanto,

$$w_1w_2w_3 = a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv},$$

$$w_3w_2w_1 = a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{uv}.$$

Note que $a_1a_2a_3 = \pm a_3a_2a_1$ (o mesmo vale para os b's). Se $s = 0$, as paridades de a_k e b_k são as mesmas, logo

$$a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1 \text{ se, e somente se, } b_1b_2b_3 = b_3b_2b_1$$

e, portanto,

$$a_1a_2a_3e_{ij} \otimes b_1b_2b_3e_{uv} = a_3a_2a_1e_{ij} \otimes b_3b_2b_1e_{uv}.$$

Já se $s = 1$ as paridades de a_k e b_k são distintas e

$$a_1a_2a_3 = a_3a_2a_1 \text{ se, e somente se, } b_1b_2b_3 = -b_3b_2b_1,$$

de onde seguem as identidades do segundo tipo. Para as do primeiro tipo, aplica-se um raciocínio análogo a mais simples.

∎

Relembramos que I denotará o T_G-ideal de $K\langle X\rangle_G$ gerada pelo conjunto $\mathcal{N}$.

Lema 3.2.3. *Sejam f, f' monômios multilineares nas mesmas variáveis e seja S uma substituição standard em $A = M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ tal que $f'|_S = cf|_S \neq 0$ para algum $c \in K$. Então $f' \equiv cf \pmod{I}$.*

Demonstração: Seja $f = x_1x_2\cdots x_d$ e $f' = f_\sigma = x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(d)}$ para alguma permutação $\sigma \in S_d$. Se $d = 1$, então o resultado é verdadeiro. Façamos então indução sobre d e assumamos $d \geq 2$. Primeiro, vamos provar que existe $c' \in K$ tal que

$$f' \equiv c'x_1f''(x_2, \cdots, x_d) \pmod{I}.$$

Sejam a, b inteiros tais que $1 \leq a \leq b \leq d$ e seja $\mathtt{m}$ um monômio $\mathtt{m} = x_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_d}$. Denotamos por $\mathtt{m}_{[a,b]}$ o submonômio $x_{i_a}\cdots x_{i_b}$. Seja

$$S(x_h) = w_h = a_he_{i_hj_h} \otimes b_he_{u_hv_h} \in \mathcal{B} \text{ para } h = 1, 2, \cdots, d.$$

Como $f'|_S = cf|_S \neq 0$, obtemos $i_1 = i_{\sigma(1)}$ e $u_1 = u_{\sigma(1)}$. Assuma $\sigma^{-1}(1) > 1$ e seja $t = min\{j \leq d|\sigma^{-1}(j) < \sigma^{-1}(1)\}$. Claramente $t > 1$ e, além disso, $\sigma^{-1}(t) < \sigma^{-1}(1) \leq \sigma^{-1}(t-1)$. Definimos

$$l := \sigma^{-1}(t), \quad h := \sigma^{-1}(1), \quad k := \sigma^{-1}(t-1)$$

e considere as duas possibilidades: $l = 1$ ou $l > 1$.

No primeiro caso, temos

$$|f_\sigma^{[1,h-1]}|_{mn} = |(f_\sigma^{[1,h-1]})_{|S}| = |w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(h-1)}|_{mn} =$$

$$= \overline{n(j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)}) + v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)}}$$

e,

$$|f_\sigma^{[h,k]}|_{mn} = |(f_\sigma^{[h,k]})_{|S}| = |w_{\sigma(h)} \cdots w_{\sigma(k)}|_{mn} =$$

$$= \overline{n(j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)}) + v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)}}.$$

Como $w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(h-1)} \neq 0 \neq w_{\sigma(h)} \cdots w_{\sigma(k)}$, disto segue que

$$\begin{aligned} j_{\sigma(h-1)} - i_{\sigma(1)} &= 0; \\ v_{\sigma(h-1)} - u_{\sigma(1)} &= 0; \\ j_{\sigma(k)} - i_{\sigma(h)} &= 0; \\ v_{\sigma(k)} - u_{\sigma(h)} &= 0. \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f_\sigma^{[1,h-1]}|_{mn} = |f_\sigma^{[h,k]}|_{mn} = 0.$$

Claramente, $\partial(|f_\sigma^{[1,h-1]}|) = \delta(|f_\sigma^{[h,k]}|) = 0$, de outra maneira, estes monômios serão identidades G-graduadas de A pois $A_{(0,1)} = 0$.

Como I contém o polinômio $x_1x_2 - x_2x_1$ com $|x_1| = |x_2| = (0,0) \in G$, então temos $f' \equiv f_\sigma^{[h,k]} f_\sigma^{[1,h-1]} f_\sigma^{[k+1,d]} \pmod I$ e $f_\sigma^{[h,k]}$ começa com x_1.

Se $l > 1$, utilizando o mesmo raciocínio do caso anterior, chegamos que

$$|f_\sigma^{[1,l-1]}|_{mn} = -|f_\sigma^{[h,h-1]}|_{mn} = |f_\sigma^{[h,k]}|_{mn}$$

e,

$$\partial(f_\sigma^{[1,l-1]}) = \partial(f_\sigma^{[l,h-1]}) = \partial(f_\sigma^{[h,k]}).$$

Como $\mathcal{N} \subseteq I$, existe $c' \in \{1,-1\}$ tal que $f' \equiv c' f_\sigma^{[h,k]} f_\sigma^{[l,h-1]} f_\sigma^{[1,l-1]} f_\sigma^{[k+1,d]} \pmod I$ e este monômio começa com x_1, também.

Como $c'x_1f''(x_2, \cdots x_d) \equiv f' \pmod{I}$, temos $c'w_1f''(w_2, \cdots, w_d) = f'|_S = cf|_S = cw_1w_2 \cdots w_d \neq 0$.

Disso segue que $c'f''(w_1 \cdots w_d) = cw_2 \cdots w_d \neq 0$ e, por indução $f''(x_2, \cdots, x_d) \equiv c''x_2 \cdots x_d \pmod{I}$, onde $c'' = c(c')^{-1}$. Portanto, $f' \equiv cx_1x_2 \cdots x_d \pmod{I}$, e temos o resultado.

$\blacksquare$

Então $\mathcal{N}$ satisfaz as condições da Proposição 3.2.1, de onde segue, imediatamente, o próximo teorema.

Teorema 3.2.4. *$T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E))$ é gerado por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(A))$, conjunto formado pelos polinômios*

$$\begin{array}{ll} x_1x_2 - x_2x_1 & \textit{onde } |x_1| = |x_2| = (0,0) \\ x_1x_2x_3 - x_3x_2x_1 & \textit{onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t,0), t \in \mathbb{Z}_m \\ x_1x_2x_3 + x_3x_2x_1 & \textit{onde } |x_1| = |x_3| = -|x_2| = (t,1), t \in \mathbb{Z}_m. \end{array}$$

juntamente com todos os monômios multilineares que são identidades graduadas de $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$.

Um raciocínio análogo fornece descrição de identidades $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas de $M_{p,q}(E), m = p + q$, com respeito a uma graduação tal como na Definição 3.1.3. De fato, como comentado na observação 3.1.5, podemos descrever equivalentemente as identidades polinimiais graduadas de uma álgebra $M_\alpha(E)$ e, então dos mesmos argumentos usados para obter o Teorema 3.2.4, tomando $n = 1$ e $\gamma(1) = 0$, obtemos o seguinte teorema.

Teorema 3.2.5. *Seja $G = \mathbb{Z}_{p+q} \times \mathbb{Z}_2$. Se $M_{p,q}(E)$ está dotada da G-graduação, então $T_G(M_{p,q}(E))$ é gerada por $\mathcal{N} \cup (\mathcal{M} \cap T_G(M_{p,q}(E)))$.*

De fato, para qualquer $\mu \in S_{(p+q)}$ e $\nu \in S_{(r+s)}$ o produto tensorial $M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ é $\mathbb{Z}_{(p+q)(r+s)}$-PI-equivalente a $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ com relaçãoo a uma $\mathbb{Z}_{(p+q)(r+s)} \times \mathbb{Z}_2$-graduação. Mais precisamente, sejam $m = p+q$ e $n = r+s$, consideremos as aplicações α, γ como anteriormente e o produto tensorial $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$. Isso é suficiente para mostrar que esta álgebra é PI-equivalente (preservando a graduação) a uma subálgebra $M_\eta(E) \subseteq M_{mn}(E)$ cuja fibra tem $pr + qs$ elementos. O primeiro passo é o seguinte

Observação 3.2.6. Sejam $m, n \in \mathbb{N}$. Então para qualquer $t \in [mn]$, existe um único par $(i, u) \in [m] \times [n]$, tal que $t = n(i-1) + u$. Agora, seja $M_\alpha(E) \subseteq M_m(E)$ e $M_\gamma(E) \subseteq M_n(E)$. Para qualquer $t \in [mn]$, se $t = n(i-1) + u$ com $(i, u) \in [m] \times [n]$, defina $\eta(t) := \alpha(i) + \gamma(u)$ e considere a subálgebra $M_\eta(E)$. Note que $\eta(t) = 0$ se, e somente se, $\alpha(i) = \gamma(u)$ e isso acontece exatamente para $pr + qs$ pares $(i, u) \in [m] \times [n]$. Então temos o resultado seguinte.

Teorema 3.2.7. *$M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ e $M_\eta(E)$ são PI-equivalentes como álgebras graduadas. Em particular, elas são PI-equivalentes.*

Demonstração: Visto o que já foi mencioando, é suficiente mostrar que $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ e $M_\eta(E)$ satisfazem os mesmos monômios multilineares.

Agora, seja $f = x_1 \cdots x_d \in \mathcal{M}$. Se $f \notin T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E))$, então existem $w_1, \cdots, w_d$ na base multiplicativa canônica de $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ tal que $w_1 \cdots w_d \neq 0$ e $|x_i| = |w_i|, \forall i = 1, \cdots, d$. Digamos $w_l = a_l e_{i_l j_l} \otimes b_l e_{u_l v_l}$ e defina

$$h_l := n(i_l - 1) + u_l, \quad k_l := n(j_l) - 1 + v_l \quad z_l := e_{k_l k_l} \in M_{mn}(K).$$

Como $j_l = i_{l+1}, v_l = u_{l+1}$, para $l = 1, \cdots, d-1$, então temos $k_l = h_{l+1}$ e, assim $z_1 \cdots z_d = e_{h_1 k_d} \neq 0$. Além disso, podemos encontrar $c_1, \cdots, c_d \in E$ tal que $c_l \in E_{\eta(h_l)+\eta(k_l)}$ e $c_1 \cdots c_d \neq 0$. Assim, $f \notin T_G(M_\eta(E))$.

Por outro lado, se $f = x_1 \cdots x_d \notin T_G(M_\eta(E))$, então existem $z_1 \cdots z_d$ na base de $M_\eta(E)$ tal que $|z_l| = |x_l|$ e $z_1 \cdots z_d \neq 0$. Escrevemos $z_l = c_l e_{h_l k_l}$ onde

$$h_l = n(i_l - 1) + u_l, \quad k_l = n(j_l - 1) + v_l, \quad 1 \leq i_l, j_l \leq m, 1 \leq u_l, v_l \leq n.$$

Consideremos $w_l = a_l e_{i_l j_l} \otimes b_l e_{u_l v_l} \in M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E)$ onde $a_l \in E_{\alpha(i_l)+\alpha(j_l)}, b_l \in E_{\gamma(u_l)+\gamma(v_l)}$ são vetores na álgebra de Grassmann E tais que $a_1 \cdots a_d b_1 \cdots b_d \neq 0$. Então, $|w_l| = |x_l|$ e $w_1 \cdots w_d \neq 0$, disso $f \notin T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E))$.

Em outras palavras, temos $T_G(M_\eta(E)) = T_G(M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E))$. Pelo Lema 1.2.10, segue que $M_\alpha(E)$ e $M_\alpha(E) \otimes M_\gamma(E))$ satisfazem as mesmas identidades polinomiais.

■

Como consequência imediata temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.8. *$M_{p,q}(E) \otimes M_{r,s}(E)$ e $M_{pr+qs,ps+qr}(E)$ são PI-equivalentes.*

3.3 Identidades Monomiais Multilineares para a Àlgebra $M_{p,q}(E)$

Nesta seção, vamos dar atenção às álgebras $M_{p,q}(E)$, com $p + q = m$. Pelo Teorema 3.2.5, o $T_{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2}$-ideal é gerado pelo conjunto $\mathcal{N}$ e mais alguns monômios multilineares graduados. A álgebra $M_n(K)$ não tem identidades monomiais. Resultados similares são válidos para identidades graduadas para $M_m(E)$ e $M_{p,q}(E) \otimes E$. No caso mais geral de álgebras $M_{p,q}(E)$, sempre existem monômios que são identidades multilineares, por exemplo, se $|x| = (0, 1)$ então é sempre verdade que $x \in T_{\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2}(M_{p,q}(E))$. Claramente, x é uma identidade graduadade A se, e somente se, $A_{|x|} = 0$. Denotando por $\mathcal{I}_0$ o conjunto formado por todas as identidades monomiais da álgebra A e por I_0

o T-ideal graduado gerado por esse conjunto, chamamos **identidades monomiais triviais** da álgebra A quaisquer monômios graduados pertencentes a I_0.

Uma pergunta natural é saber quando todas as identidades monomiais de $M_{p,q}(E)$ são triviais. Para responder esta questão, vamos trabalhar com álgebras $M_\alpha(E)$ outra vez.

Primeiro, vamos listar três classes de álgebras cujas identidades monomiais são todas triviais. Observamos que como E é a álgebra de Grassmann de um espaço vetorial de dimensão infinita, então as álgebras $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas $M_\alpha(E) \subseteq M_m(E)$ e $(M_m(K), \imath \times \alpha)$, com $|e_{ij}| := (\overline{j-i}, \alpha(j) - \alpha(i))$, satisfazem exatamente as mesmas identidades **monomiais** $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-graduadas. De fato, se $x_1 \ldots x_d$ é um monômio satisfeito por $M_\alpha(E)$, para $v_1, \ldots, v_d \in \varepsilon$, sendo o $\mathbb{Z}_2$-grau de v_i coerente com o de x_i, e de modo que cada e_i aparece em, no máximo, um v_j; então $v_1 e_{i_1,j_1} \ldots v_d e_{i_d,j_d} = 0$ para (i_k, j_k) condizente com o grau de x_k para todo k. Então $e_{i_1,j_1} \ldots e_{i_d,j_d} = 0$ e portanto $x_1 \ldots x_d$ deve ser identidade de $M_m(E)$.

Proposição 3.3.1. *Para qualquer $m \geq 1$, a álgebra $M_{m,0}(E) =: M_\omega(E) \subseteq M_m(E)$ tem apenas identidades monomiais triviais.*

Proposição 3.3.2. *Seja $m \equiv 0 \pmod 2$ e seja $\pi : [m] \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\pi(j) = \bar{j}$, para todo $j \in [m]$. Então $M_\pi(E) \subseteq M_m(E)$ possui apenas identidades monomiais triviais.*

Demonstração: O que segue prova as duas afirmações anteriores. De fato, seja $\alpha \in \{\omega, \pi\}$ e considere $A = (M_m(K), \imath \times \alpha)$. Seja

$$a := e_{12} + e_{23} + \cdots + e_{m1} \text{ e } \delta := \alpha(2) \in \mathbb{Z}_2.$$

Então, $a \in A_{(\bar{1},\delta)}$ e $A_{(\bar{1},\delta+1)} = 0$. Além disso, $a^t \in A_{(\bar{t},t\delta)}$ e $A_{(\bar{t},t\delta+1)} = 0, \forall t \in \mathbb{N}$. Assim, se $x_1 \ldots x_d$ é um monômio que não é identidade trivial, para cada fator x_i, $|x_i| = (\bar{t}_i, t_i\delta)$. Se substituirmos cada x_i por a^{t_i}, obtemos um elemento não-nulo e portanto tal monômio não é uma identidade da álgebra.

■

Proposição 3.3.3. *Seja m um inteiro positivo divisível por 4 e sejam $\rho_1, \rho_2 : [m] \to \mathbb{Z}_2$ definidas por*

$$\rho_1(j) := \begin{cases} 0 & se\ j \equiv 0\ ou\ 1 \pmod 4 \\ 1 & se\ j \equiv 2\ ou\ 3 \pmod 4 \end{cases} \quad e\ \rho_2(j) := \begin{cases} 0 & se\ j \equiv 1\ ou\ 2 \pmod 4 \\ 1 & se\ j \equiv 0\ ou\ 3 \pmod 4 \end{cases}$$

Todo monômio satisfeito por $M_{\rho_1}(E), M_{\rho_2}(E) \subseteq M_m(E)$ é uma identidade monomial trivial.

Demonstração: Seja $A = (M_m(K), \imath \times \rho_1)$ e suponha que A satisfaça alguma identidade monomial não trivial. Seja $f = x_1 \cdots x_d =: x_1 f' x_d$ de comprimento mínimo d dentre todos os monômios não-trivias satisfeitos pela álgebra. Necessariamente $d \geq 2$ e defina $(\bar{h_i}, \eta_i) := |x_i|$.

A fim de simplificar a notação, vamos escrever simplesmente $a \equiv b$ para denotar $a \equiv b \pmod 4$ e $(a, \delta) \equiv (b, \delta)$ para denotar $(\bar{a}, \delta) = (\bar{b}, \delta)$. Se $e_{ij} \in \mathcal{B} \cap A_{(\bar{k},\delta)}$ então $j \equiv i + k \pmod m$ e $\rho_1(i) + \rho_1(j) = \delta$. Tomando $a = e_{1,2} + e_{2,3} + \cdots e_{m-1,m} + e_{m,1}$ note que se $k \equiv 2$ então $A_{(\bar{k},0)} = 0$ e $A_{(\bar{k},1)}$ contém a matriz invertível a^k. Analogamente, se $k \equiv 0$ então $A_{(\bar{k},1)} = 0$ e $A_{(\bar{k},0)}$ contém a matriz invertível a^k.

Portanto, nem h_1, nem h_d podem ser pares, pois, nesse caso, substituindo x_1 (x_d) por a^{h_1} (a^{h_d}), o monômio só se anula se $x_2 \ldots x_d$ ($x_1 \ldots x_{d-1}$) se anula por qualquer substituição standard. Logo $x_2 \ldots x_d$ ($x_1 \ldots x_{d-1}$) pertence a I_0 e $x_1 \ldots x_d \in I_0$.

Se k é ímpar, $A_{(\bar{k},\delta)} \neq 0$ para qualquer $\delta \in \mathbb{Z}_2$. A tabela seguinte ilustra a que componente graduada pertence $e_{i,j}$ quando $j - i$ é ímpar.

k	δ	i	j
$k \equiv 1 \pmod 4$	0	par	ímpar
$k \equiv 1 \pmod 4$	1	ímpar	par
$k \equiv 3 \pmod 4$	0	ímpar	par
$k \equiv 3 \pmod 4$	1	par	ímpar

Em particular, se k é ímpar, as matrizes $e_{1,k+1}, e_{m,k}$ pertencem a diferentes componentes homogêneas, a primeira de grau $(\bar{k}, \rho_1(k+1))$ e a segunda $(\bar{k}, \rho_1(k))$. Além disso, o elemento homogêneo a^2 induz, através de conjugação, um automorfismo interno graduado ϕ de A. Claramente, $\phi(e_{ij}) = e_{\pi_\phi(i),\pi_\phi(j)}$ onde a permutação π_ϕ satisfaz $(\pi_\phi)^{-1} := (1\ 3\ 5 \cdots m-1)(2\ 4\ 6 \cdots m) \in S_m$. Portanto, se k é ímpar, então as $m/2$ matrizes de $\mathcal{B}$ gerando $A_{(\bar{k},\delta)}$ são todas conjugadas a $e_{1,k+1}$ ou $e_{m,k}$ dependendo de δ. Como $x_1 f'$ não pode ser identidade, existe uma substituição standard S tal que $0 \neq (x_1 f')|_S = e_{ij}$, onde $|e_{ij}| = |x_1 f'|$. Finalmente, defina $S(x_l) := e_{i_l j_l}$. Agora, veja que se $|x_1 f'| \equiv (1,0)$ ou $(3,1)$, então j é ímpar e $|x_d| \equiv (1,1)$ ou $(3,0)$ caso contrário f é trivial. Similarmente, se $|x_1 f'| \equiv (1,1)$ ou $(3,0)$ então j é par e $|x_d| \equiv (1,0)$ ou $(3,1)$. Em todos os casos, existe $e_{ju} \in A_{(\bar{h_t},\eta_t)}$ e isso nos dá uma substituição standard S' tal que $f|_{S'} = e_{iu} \neq 0$, então f não pode ser identidade.

Portanto, o que resta verificar é $|x_1 f'| \equiv (2,1)$ ou $(0,0)$.

Neste caso, $d > 2, f'|_S = e_{j_1 j}$ e $|f'| = (\bar{h}, \eta)$ onde $h \equiv 1,3$. Por outro lado, como $f' x_d$ não pode ser uma identidade, existe uma substituição standard S^* tal que $0 \neq (f' x_t)|_{S^*} = e_{pq}$. Claramente, para algum $r \in [m], f'|_{S^*} = e_{pr}$ e e_{pr} pertence a componente homogênea de grau $(\bar{h}, \eta)$. Sendo $h \equiv 1,3$ então, como dissemos acima, existe um automorfismo graduado θ de A tal que $\theta(e_{j_q j}) = e_{pr}$. Agora, considere uma substituição standard S'' dada por $S''(x_l) := \theta(e_{i_l j_l})$ para $l = 2, \cdots, t-1$ e $S''(x_t) := S^*(x_t) = e_{rq}$. Claramente, obtemos $f|_{S''} = e_{\theta(i)} q$ e, portanto, f não é uma identidade monomial, uma contradição.

Finalmente, note que as álgebras $M_{\rho_1}(E)$ e $M_{\rho_2}(E)$ são isomorfas como $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_2$-álgebras. De fato, fixando $\sigma := (12 \cdots m) \in S_m$, a aplicação $ae_{ij} \in M_{\rho_2}(E) \to ae_{\sigma(i)\sigma(j)} \in M_{\rho_1}(E)$ é um isomorfismo graduado.

■

Realmente, as álgebras das Proposições 3.3.1 - 3.3.3 são as únicas álgebras cujas identidades monomiais são todas triviais.

Teorema 3.3.4. *Seja $m \geq 1$ e suponha que $M_\alpha(E) \subseteq M_m(E)$ não possui identidades monomiais não-triviais. Então,*

(1) $M_\alpha(E) = M_{m,0}(E)$ ou

(2) $M_\alpha(E) = M_\pi$ e $m \equiv 0 \pmod 2$ ou

(3) $M_\alpha(E) \in \{M_{\rho_1}(R), M_{\rho_2}(E)\}$ e $m \equiv 0 \pmod 4$

Demonstração: Defina $A := M_\alpha(E)$ e suponha que A não tenha identidade monomiais não-triviais. Podemos assumir $\alpha(1) = 0 \in \mathbb{Z}_2$. De fato, as aplicações α e $\alpha + 1$ definem a mesma subálgebra de $(M_m(E), \iota)$. Se $\alpha = \omega$, a aplicação nula, então $A = M_m(E_0) = M_{m,0}(E)$, e a afirmação segue trivialmente. Daí, suponha $\alpha \neq \omega$ e considere o subespaço de grau $(1,1)$, que é, necessariamente, não-nulo, já que $\alpha \neq \omega$. Há dois casos a analisar: $A_{(1,0)} \neq 0$ ou $A_{(1,0)} = 0$.

Agora, note que para qualquer $i, j \in [m]$ temos $e_{ii}Ae_{jj} \subseteq A_{(\overline{j-i},\alpha(i)+\alpha(j))}$. Em particular,

$$A_1 := A_{(1,0)} \oplus A_{(1,1)} = e_{1,1}Ae_{2,2} \oplus \cdots \oplus e_{m-1,m-1}Ae_{m,m} \oplus e_{m,m}Ae_{1,1}.$$

Se $A_{(1,0)} = 0$ então $A_1 = A_{(1,1)}$, daí todas as parcelas estão em $A_{(1,1)}$. Portanto, $\alpha(i+1) = \alpha(i) + 1$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $\alpha(1) = \alpha(m) + 1$. Equivalentemente,

$$\alpha(i) = \begin{cases} 0 \text{ se } i \text{ é ímpar} \\ 1 \text{ se } i \text{ é par} \end{cases}.$$

Por isso, se m é ímpar, então $\alpha(m) + \alpha(1) = 0$ e $A_{(1,0)} \neq 0$, o que é uma contradição. Portanto, $A_{(1,0)} = 0$ se, e somente se, m for par e $\alpha = \pi$.

Agora, suponha $\alpha \neq \omega, \pi$ e considere (ciclicamente)a sequência de $\mathbb{Z}_2$-graus de somas diretas

$$\alpha(1) + \alpha(2), \alpha(2) + \alpha(3), \cdots, \alpha(m-1) + \alpha(m), \alpha(m) + \alpha(1).$$

Isso não é constante, pois $\alpha \neq \omega, \pi$. Seja t o comprimento máximo das subsequências feitas de zeros consecutivos, é claro, de forma cíclica. Por exemplo, se $\alpha = 00110$, então a sequência cíclica é 01010 e $t = 2$. Então o monômio $x_1x_2\cdots x_tx_{t+1}$ com $|x_i| = (1,0)$ é certamente uma identidade monomial multilinear. Se $A_{(t+1,0)} = 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a sequência cíclica é $\underbrace{0\cdots0}_{t}\underbrace{\delta_1\delta_2\cdots}_{t}1$.

Agora é fácil mostrar que $\delta_1 = \delta_2 = \cdots = \delta_t = 0$. Portanto, a sequência cíclica deve ser do tipo $\underbrace{0\cdots0}_{t}1\underbrace{0\cdots0}_{t}1\cdots\underbrace{0\cdots0}_{t}1$ e então, x_1x_2, com $|x_1| = |x_2| = (1,1)$ é uma identidade monomial. Outra vez, se $A_{(2,0)} \neq 0$ é uma identidade monomial não trivial, portanto devemos supor que $A_{(2,0)} = 0$ e a sequência cíclica deve ser $1010\cdots01$ ou $0101\cdots01$. Daí segue $\alpha = \rho_1 = \underbrace{0110}\underbrace{0110}\cdots\underbrace{0110}$ ou $\alpha = \rho_2 = \underbrace{0011}\underbrace{0011}\cdots\underbrace{0011}$. Assim, $M_\alpha(E) = M_{\rho_1}(E)$ ou $M_{\rho_2}(E)$. Observe que, para qualquer $t \in \mathbb{N}$, as subálgebras $M_{\rho_1}(E)$ e $M_{\rho_2}(E)$ de $M_{4t}(E)$ são isomorfas preservando $\mathbb{Z}_{4t} \times \mathbb{Z}_2$-graduação. Portanto, elas dão origem à graduações isomorfas em $M_{2t,2t}(E)$.

$\blacksquare$

Capítulo 4

Identidades Polinomiais de Álgebras em Característica Positiva

Neste capítulo é mostrado que o Teorema do Produto Tensorial falha no caso de corpos de característica positiva utilizando-se estimativas para a GK-dimensão de algumas álgebras relativamente livres. No Teorema 4.2.5 é mostrado que as álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes e no Teorema 4.2.9 é mostrado que $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$ não são PI-equivalentes.

4.1 Conceitos Introdutórios

Ao longo de todo esse capítulo denotaremos por Γ a álgebra supercomutativa livre, isto é, considerando $Z = X \cup Y$, Γ é o quociente da álgebra $K\langle Z\rangle_{\mathbb{Z}_2}$ (sendo X sendo o conjunto das variáveis pares e Y das variáveis ímpares) pelo T-ideal gerado pelos polinômios da forma $z_1z_2 + (-1)^{\partial(z_1)\partial(z_2)}z_2z_1$; $z_1, z_2 \in Z$.

Observamos que Γ herda a $\mathbb{Z}_2$-graduação de $K\langle Z\rangle_{\mathbb{Z}_2}$. Denotaremos por Γ' a álgebra supercomutativa livre sem unidade.

Denotaremos por $U_m(M_n(E))$ e $U_m(M_{a,b}(E))$ as álgebras relativamente livre de posto m nas variedades determinadas, respectivamente, por $M_n(E)$ e por $M_{a,b}(E)$. Aqui esboçamos essa construção. Suponha

$$X = \{x_{ij}^{(r)} | i, j = 1, \cdots, n;\ r = 1, 2, \cdots\}$$

$$Y = \{y_{ij}^{(r)} | i, j = 1, 2, \cdots, n;\ r = 1, 2, \cdots\}$$

os geradores de Γ a álgebra supercomutativa livre. Podemos realizar $U_m(M_n(E))$ e $U_m(M_{a,b}(E))$ como subálgebras de $M_n(\Gamma)$ do modo seguinte:

1. Denote por B_r a matriz $n \times n$ onde a entrada (i,j) é $x_{ij}^{(r)} + y_{ij}^{(r)}$; $1 \leq i, j \leq n$.
2. Denote por C_r a matriz cuja entrada (i,j) é $x_{ij}^{(r)}$, se $1 \leq i, j \leq a$ ou $a+1 \leq i, j \leq a+b$, e $y_{ij}^{(r)}$ caso contrário.

Teorema 4.1.1. *Denote por $K\langle B_1, \cdots, B_m\rangle$ e por $K\langle C_1, \cdots, C_m\rangle$ as álgebras geradas pelas matrizes correspondentes. Então*

$$U_m(M_n(E)) \cong K\langle B_1, \cdots, B_m\rangle \qquad U_m(M_{a,b}(E)) \cong K\langle C_1, \cdots, C_m\rangle$$

Analogamente para as respectivas álgebras relativamente livres de posto infinito

$$U_m(M_n(E)) \cong K\langle B_1, B_2, \cdots\rangle \qquad U_m(M_{a,b}(E)) \cong K\langle C_1, C_2, \cdots\rangle$$

A demonstração desse teorema é muito similar à demonstração de que a álgebra de matrizes genéricas é relativamente livre na variedade determinada por $M_n(K)$.

No que segue, sempre assumiremos que o posto das respectivas álgebras relativamente livres é maior ou igual a 2. Em [17], Procesi calculou a GK-dimensão da álgebras gerada por m matrizes genéricas $n \times n$, isto é, $GKdim(U_m(M_n(K))) = (m-1)n^2+1$. Berele, nos Teoremas 7 e 18 de [8] provou que $GKdim(U_m(M_n(E))) = (m-1)n^2+1$ e $GKdim U_m(M_{a,b}(E)) = (m-1)(a^2+b^2)+2$.

A GK-dimensão de uma PI-álgebras é fechada com relação à sua altura. Agora, além da altura, que definimos na seção 2.4, vamos definir também a **altura essencial**

$h_{ess}(A)$ de uma PI-álgebra A finitamente gerada. Sejam U e V subconjuntos finitos de A, então $h_{ess}(A)$ com respeito a U e V, é o menor inteiro positivo q tal que A é gerada pelos produtos $v_1u_1^{a_1}v_2u_2^{a_2}\cdots v_qu_q^{a_{q+1}}, u_i \in U, v_i \in V, a_i \geq 0$.

Seja A uma subálgebra de uma álgebra finitamente gerada S, e suponha U e V subconjuntos finitos de S. A **altura essencial generalizada** $h_{gess}(A)$ de A com respeito a U e V é definida como a altura essencial de S com respeito a U e V. O seguinte teorema foi provado em [13].

Teorema 4.1.2. *Se A é uma PI-álgebra finitamente gerada, U e V subconjuntos finitos de A e, S uma álgebra contendo A, então $GKdim(A) \leq h_{ess}(A)$ e $GKdim(A) \leq h_{gess}(A)$.*

Considere as álgebras $A_{a,b}$ introduzidas em [4] e [5]. Seja Δ_0 o conjunto de todos (i,j) tal que ou $1 \leq i,j \leq a$ ou $a+1 \leq i,j \leq a+b = n$ e, seja Δ_1 o conjunto de (i,j) onde $1 \leq i \leq a, a+1 \leq j \leq a+b$ ou $1 \leq j \leq a, a+1 \leq i \leq a+b$. Então, $M_{a,b}(E)$ consiste de matrizes em $M_n(E)$ cuja entrada (i,j) pertence a E_β, quando $(i,j) \in \Delta_\beta$. Definimos $A_{a,b}$ como a subálgebra de $M_{a+b}(E)$ consistindo de todas as matrizes (a_{ij}) tais que $a_{ij} \in E$ se $(i,j) \in \Delta_0$ e $a_{ij} \in E'$ se $(i,j) \in \Delta_1$ (E' é a álgebra de Grassmann sem unidade).

4.2 GK-dimensão de Álgebras Relativamente Livres

4.2.1 As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$

Seja $B = K \oplus M_{1,1}(E)$. Foi provado em [4], que as álgebras B e $E \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades.

Lema 4.2.1. *$U_m(B) = U_m(E \otimes E)$ e $GKdimU_m(B) = GKdimU_m(E \otimes E)$.*

Lema 4.2.2. *$GKdimU_m(B) \geq m$.*

Continuamos com a construção de uma álgebra genérica para B. Seja Γ a álgebra supercomutativa livre sobre geradores pares $x_{11}^{(i)}, x_{22}^{(i)}$ e ímpares $y_{12}^{(i)}, y_{21}^{(i)}, i = 1, 2, \cdots, m$. Sejam $x_1, \cdots, x_m$ elementos transcendentais independentes sobre K e seja $L = K(x_1, \cdots, x_m)$ o respectivo corpo de funções racionais. Defina as matrizes

$$X_i = \begin{pmatrix} x_i & 0 \\ 0 & x_i \end{pmatrix} \text{ e } Y_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & y_{12}^{(i)} \\ y_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \text{ onde } i = 1, 2, \cdots, m.$$

Seja U_L a L-álgebra gerada pelas matrizes $Z_i = X_i + Y_i, i = 1, \cdots, m$. Observe que U_L é uma subálgebra de $M_2(\Gamma'_L)$ onde Γ'_L é a L-álgebra supercomutativa livre sem unidade. Então, U_L pode ser considerada como K-álgebra, denotamos esta K-álgebra por U.

■

Lema 4.2.3. *A álgebra U é isomorfa a álgebra universal $U_m(B)$.*

Demonstração: A prova repete resultados análogos sobre as matrizes genéricas.

Lema 4.2.4. *$GKdimU_m(E \otimes E) = m$.*

Demonstração: As álgebras $E \otimes E$ e B satisfazem as mesmas identidades, portanto provaremos que $GKdimU_m(B) \leq m$. Um resultado de Regev, Teorema 2.1 [18], implica que $GKdimU_m(M_n(E')) = 0$ sempre que $charK = p > 2$. Veja que E' satisfaz a identidade $x^p = 0$ e que subálgebras finitamente geradas de E' são nilpotentes.

Temos a inclusão $U_m(B) = U \subseteq V = U_m(M_2(E'))[X_1, X_2, \cdots, X_m]$. Aqui consideramos $U_m(M_2(E'))$ como a álgebra gerada pelas matrizes Y_i de antes.

Então, o espaço vetorial V é gerado por elementos do tipo $X_1^{a_1} \cdots X_m^{a_m} g$ onde $g \in U_m(M_2(E'))$. Agora, de acordo com Teorema 2.1(b) de [18], podemos escolher um conjuto finito de polinômios para o mencionado g, digamos $g_1, \cdots, g_t$. Então, tomando $P = \{X_1, \cdots, X_m\}$ e $Q = \{1, g_1, \cdots, g_t\}$ obtemos facilmente um limite superior para a altura essencial $h_{ess}(V)$ com respeito aos conjuntos P e Q, isto é, $h_{ess}(V) \leq m$. Mas isso implica que $h_{gess}(U_m(B)) \leq m$. Portanto $h_{gess}(U_m(E \otimes E)) \leq m$. Agora, de acordo com o Teorema 4.1.2, $GKdimU_m(E \otimes E) \leq m$ e, pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.2, obtemos $GKdimU_m(E \otimes E) = m$.

■

Lembramos que de acordo com o Teorema 18 de [8], temos $GKdimU_m(M_{a,b}(E)) = (m-1)(a^2+b^2)+2$. Para $a = b = 1$ segue que

$$GKdimU_m(M_{1,1}(E)) = 2m.$$

Portanto, apresentamos outra prova de um dos principais resultados em [7].

Teorema 4.2.5. *Seja K um corpo infinito, $charK = p > 2$. As álgebras $E \otimes E$ e $M_{1,1}(E)$ não são PI-equivalentes.*

4.2.2 As álgebras $M_{1,1}(E) \otimes E$ e $M_2(E)$

Primeiro lembramos que $A_{a,b}$ posto como uma subálgebra de $M_{a+b}(E)$ consistindo das matrizes (a_{ij}),

$$a_{ij} \in E \text{ se } (i,j) \in \Delta_0 \quad \text{e} \quad a_{ij} \in E' \text{ se } (i,j) \in \Delta_1.$$

Assim, $M_{a,b}(E) \subset A_{a,b}$. Como consequência imediata do Teorema 18 de [8], obtemos o seguinte lema.

Lema 4.2.6. $GKdimU_m(A_{a,b}) \geq (m-1)(a^2+b^2)+2$.

De acordo com [5], as álgebras $A_{1,1}$ e $M_{1,1}(E) \otimes E$ satisfazem as mesmas identidades, assim $U_m(A_{1,1}) = U_m(M_{1,1}(E) \otimes E)$ e as últimas duas álgebras têm a mesma GK-dimensão, de acordo com o Lema anterior, esta é, no mínimo $2m$. Portanto, o seguinte lema garante.

Lema 4.2.7. *$GKdimU_m(M_{1,1}(E)\otimes E) = GKdimU_m(A_{1,1}) \geq 2m$ desde que $charK = p > 2$*

Observamos que o Lema 4.2.7 é obviamente verdadeiro em característica zero, visto que as álgebras E e E' são PI-equivalentes. Como no caso das álgebras $E \otimes E$ e A, construimos um modelo genérico para $A_{1,1}$. Seja $\begin{pmatrix} \tilde{a} & b \\ c & \tilde{d} \end{pmatrix} \in A_{1,1}$, então

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & b \\ c & \tilde{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \alpha_1, \alpha_2 \in K, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(E')$$

Como $charK = p \neq 2$, podemos representar nossas matrizes como

$$\begin{pmatrix} \tilde{a} & b \\ c & \tilde{d} \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

onde $\beta_1 = \frac{(\alpha_1+\alpha_2)}{2}, \beta_2 = \frac{(\alpha_1-\alpha_2)}{2}$

Agora definimos

$$X_i = r_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_i = t_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad W_i = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & x_{12}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix}$$

onde r_i e t_i são variáveis comutativas e $x_{jk}^{(i)}$ são geradores livre de Γ'. Agora definimos U como a K-álgebra gerada pelas matrizes $Z_i = X_i + W_i, i = 1, 2, \cdots, m$. A álgebra U é isomorfa a álgebra genérica $U_m(A_{1,1})$.

Proposição 4.2.8. *$GKdimU_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = 2m$.*

Demonstração: De acordo com a última afirmação que antecede à proposição, é suficiente mostrar que $GKdimU \leq 2m$. Dividimos as matrizes W_i como $W_i = W_i^{(1)} + W_i^{(2)}$, onde

$$W_i^{(1)} = \begin{pmatrix} x_{11}^{(i)} & 0 \\ 0 & x_{22}^{(i)} \end{pmatrix}, \quad W_i^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & x_{12}^{(i)} \\ x_{21}^{(i)} & 0 \end{pmatrix}$$

É óbvio que X_i são centrais, Y_i comuta com Y_j e, Y_i comuta com $W_j^{(1)}$ e anticomuta com $W_j^{(2)}$. Portanto, $Y_i W_j = W_j' Y_i$, onde $W_j' = W_j^{(1)} - W_j^{(2)}$.

Escrevemos $X_{m+1}, \cdots, X_{2m}$ para $Y_1, \cdots, Y_m$, respectivamente. Então, todo elemento de U pode ser escrito como uma combinação linear de elementos da forma

$$g_1 X_1^{a_1} g_2 X_2^{a_2} \cdots g_{2m} X_{2m}^{a_{2m}} g_{2m+1}, \quad g_i \in U_m(M_2(E')).$$

Se V é gerado de elementos acima então obviamente ele é fechado com respeito a multiplicação e assim é uma álgebra V. Como na prova da proposição 4.2.4, segundo [18], podemos escolher um conjunto finito de polinômios $Q = \{\bar{g}_1, \bar{g}_2, \cdots \bar{g}_t\}$ tal que $g_i \in Q, \forall i$ e, para todo elemento de U. Agora, sejam $P = \{X_1, \cdots, X_{2m}\}$ e $Q = \{g_1, \cdots, g_t\}$. Calculando a altura essencial com respeito a P e Q obtemos facilmente que

$$GKdimU_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = GKdimU \leq h_{gess}(U) = h_{ess}(V) \leq 2m.$$

Mas no Lema 4.2.6 obtemos $GKdimU_m(M_{1,1}(E) \otimes E) \geq 2m$. Portanto, a prova da proposição está completa.

■

A partir desses resultados, segue a prova de um dos principais resultados em [5].

Teorema 4.2.9. *Seja* $charK = p > 2$. *As álgebras* $M_{1,1}(E) \otimes E$ *e* $M_2(E)$*não são PI-equivalentes.*

Demonstração: Segundo [8], $GKdimU_m(M_2(E)) = 4m - 3$. Por outro lado, $GKdimU_m(M_{1,1}(E) \otimes E) = 2m \neq 4m - 3$.

■

Observamos que em [5], na verdade, foi mostrado a inclusão própria de $T(M_2(E))$ em $T(M_{1,1}(E) \otimes E)$.

Referências Bibliográficas

[1] Alves, S.M., Koshlukov, P., *Polynomial Identities of Algebras in Positive Characteristic*, Journal de Algebra **305**, 1149-1165 (2006).

[2] Amitsur, S.A, Levitzki, J., *Minimal Identities for Álgebras*, Proc Amer Math. Soc., **1**, 449-463 (1950).

[3] Atiyah, M.F., Mac Donald I.G., *Introduction to Commutative Algebra*, Perseus, New York, 1994.

[4] Azevedo, S.S., Fidelis, M., Koshlukov, P., *Tensor Product Theorems in Positive Characteristic*, J. Algebra 276 (2) 836-845 (2004).

[5] Azevedo, S.S., Fidelis, M., Koshlukov, P., *Graded Identities and PI equivalence of Algebras inm Positive Characteristic*, Comm. Algebra 33 (4) 1011-1022 (2005).

[6] Bahturin, Y.A., Drensky, v., *Graded Polynomial Identities of Matrices* Linear Algebra Appl **357** 15 - 34 (2002).

[7] Belov, A. Ya., *Counterexample to Specht problem*, Mat. Sb., **191**, 13-24 (2000).

[8] Berele, A., *Generic Verbally Prime Algebras and their GK-dimensions*, Comm. Algebra 21 (5) 1487-1504 (1993).

[9] Dehn, M., *Über die Grunddlagen der projektiven geometrie und algemeine Zahlsysteme*, Math. Annalen **85**, 184-194 (1922).

[10] Di Vicenzo, O.M., Nardozza, V., *Graded Polynomial Identities of Verbally Prime Algebras*, Journal of Algebra and Its Applications, **Vol. 6, No. 3**, 385-401 (2007).

[11] Di Vicenzo, O.M., Nardozza, V., $\mathbb{Z}_{k+l} \times \mathbb{Z}_2$ *- graded identities of* $M_{k\times l}(E) \otimes E$ Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **108** 27 - 39 (2002).

[12] Drensky, V., *Free Álgebras and PI-Álgebras*, Springrt, Singapore, 2000.

[13] Drensky, V., *Gelfand-Kirillov dimensions of PI-algebras*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **198**, Dekker, New York, 97-113, 1998.

[14] Garcia, A., Lequain, Y., *Elementos de Álgebra*, Proijeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2003.

[15] Kaplansky, I., *Problens in the Theory of Rings*, Report of a Conference on Linear Algebras, June, 1956, in National Acad. of Sci. - National Research Council, Washington, Publ. **502**, 1-3 (1957)

[16] Kemer, A.R., *Ideals os Identities os Associative Algebras*, Translation os Math. Monographs, **87**, AMS, Providence, 1991.

[17] Procesi C., *Non-commutative affine rings*. Atti Accad. Naz Lincei Men. Cl.Sci. Fis. Mat. Natur. Sez. **I** (8) 8 (1967).

[18] Regev, A., *Grassmann Algebras over Finite Fields*, Comm. Algebra 19, 1829-1849 (1991).

[19] Regev, A., *Tensor product of matrix algebras over the Grassmann algebra*, J. Algebra 133, 351-396, (1990).

[20] Rosset, S., *A new proof of the Amitsur-Levitzki Identity* Israel, J, math, **23**, 187-188, (1976).

[21] Specht, W., *Gesetze in Ringen I*, Math Z., **52**, 557-589, (1950).

[22] Vasilovsky, S.Yu., $\mathbb{Z}_n$ *-graded Polynomial Identities of the full Matrix Algebra of Order* n, Proc. Amer. Math. Soc., **127**, 3517-3524 (1999).