# Controlabilidade na Fronteira de um Sistema Híbrido Linear com Origem no Controle de Ruídos

**Flávio Gomes de Moraes**

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - PR

2008

# Controlabilidade na Fronteira de um Sistema Híbrido Linear com Origem no Controle de Ruídos

**Flávio Gomes de Moraes**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM ....................................................
(Orientador)

Prof. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM ................................................

Prof. Mauro de Lima Santos - UFPA ....................................................

Maringá

Março - 2008

# Dedicatória

Quero dedicar este trabalho às minhas afilhadas Lorena Cabral Assis e Emanuelle Assis Couto, aos meus irmãos Leandro Gomes de Moraes e Taisa Gomes de Moraes, aos meus pais Vanderlan Rosa de Moraes e Oraídes Gomes Assis Moraes e a minha namorada Ludmilla Magalhães Silva.

# Agradecimentos

Em primeiro lugar, agradeço a Deus pela minha vida, pela minha família, pela minha saúde, pela oportunidade de mais uma conquista e por colocar em meu caminho pessoas tão especiais.

Quero agradecer também a todo o departamento de matemática desta universidade, em especial aos professores com os quais tive a oportunidade e o prazer em trabalharmos juntos.

A secretária do PMA Lúcia Kato, por todo suporte durante esse período.

Também agradeço a CAPES, pelo apoio financeiro, sem o qual não seria possível a realização deste trabalho.

Aos amigos que aqui encontrei, pelo companheirismo e amizade sincera, em especial aos amigos com os quais dividi o mesmo teto, tornando-se minha família ao longo desse período.

Aos amigos e parentes que deixei em Goiás, os quais sempre me ajudaram e torcem pelo meu sucesso de um modo geral.

Aos professores Marcelo Moreira Cavalcanti e Valéria Neves D. Cavalcanti, por todo o incentivo durante esse período e apoio na conclusão deste trabalho. Ao professor Juan Amadeo Soriano Palomino, pela intensa dedicação com a qual me orientou e por dividir grande parte de seu conhecimento matemático.

Finalmente, quero agradecer aos meus irmãos pela amizade e companheirismo, a minha namorada por todo amor, carinho e compreensão concedido a mim e aos meus pais pelo amor, apoio, incentivo e pela excelente criação que me deram.

Flávio Gomes de Moraes.

# Resumo

Neste trabalho nos propomos a estudar o seguinte problema: Dado $T$ suficientemente grande e um dado inicial $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ em um espaço que está em nossa disposição, encontrar um controle $\beta = \beta(x,t) \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$ tal que a solução do sistema

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\; \in \;\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases}$$

satisfaça as seguintes relações:

$$\begin{cases} \Phi(T) = c_1 = cte & \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = cte & W_t(T) = 0 \end{cases}$$

# Abstract

In this work in we consider the study of the following problem: Given $T$ large enough and initial data $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ in a suitable space we want to obtain a control $\beta = \beta(x,t) \in H^{-2}(0,T; L^2(0,1))$ such that the solution of the system

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\; \in \;\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0, \end{cases}$$

satisfies the identities

$$\begin{cases} \Phi(T) = c_1 = cte & \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = cte & W_t(T) = 0. \end{cases}$$

# Sumário

**Introdução** **1**

**1 Preliminares** **7**

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.1.1 Noção de Derivada Fraca . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 7

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 9

1.1.3 Espaços de Sobolev . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 13

1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais . . . . . . . . . . . . . . 16

1.2 Teoria de Traço . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 18

1.2.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

1.2.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

1.3 Operadores Maximais Monótonos - O Teorema de Hille Yosida . . . . 22

1.4 Semigrupos . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 28

1.5 Resultados Auxiliares . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

**2 Existência e Unicidade de Solução** **40**

**3 Controlabilidade para Sistemas Unidimensionais** **49**

3.1 Existência e Unicidade de Solução do
Problema Adjunto . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 50

3.2 Regularidade Escondida . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 58

3.3 Desigualdade da Observabilidade . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 62

3.4 Desigualdade Melhorada da Observabilidade . . . . . . . . . . . . . . 68

3.5 Controlabilidade: O caso $n \geq 1$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 79

3.6 Controlabilidade: O Caso $n = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 88

**4 Controlabilidade do Sistema Bidimensional** **96**

**Bibliografia** **100**

# Introdução

Nos últimos anos muito se tem estudado sobre o controle ativo de ruído gerado em recintos fechados distintos, pela vibração das estruturas flexíveis que formam as paredes.

Atualmente, um exemplo que tem despertado interesse neste tipo de problema é a possibilidade de controlar as vibrações acústicas no interior de um avião. Hoje, aviões com motores (ou turbopropulsores) cada vez mais potentes e eficientes, provocam vibrações acústicas de alta amplitude que se transmitem a fuselage de toda a aeronave, produzindo a vibração desta. A interação entre a estrutura da aeronave e o campo acústico interior, faz com que as vibrações determinem um alto nível de ruído no interior do avião e que pode resultar em danos aos passageiros.

Para contornar o problema acima mencionado tem se analisado diversas estratégias para controlar as vibrações acústicas interiores. Dentre estas estratégias, uma das mais interessante, sem dúvida, consiste na implementação do controle mediante peças piezoceramic fixadas sobre uma parte da fuselage. Estas peças transformam a excitação elétrica que estão submetidas em vibrações mecânicas nas estruturas sobre as quais estão fixadas. Desta maneira tem-se uma mudança da dinâmica das partes flexíveis e que finalmente reduzem o ruído interior.

Este é apenas um exemplo, de muitos outros que tem motivado o estudo dos fenômenos de transmissão de vibrações de uma estrutura a outra.

Como já é de se esperar, neste trabalho consideraremos um modelo simples que baseia-se no controle de ruídos e tem como texto base um artigo de Sorin MICU e Enrique ZUAZUA (veja [24]).

Para isso, considere $\Omega$ o quadrado bidimensional

$$\Omega = (0,1) \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2.$$

Vamos supor que $\Omega$ é ocupado por um fluído elástico, não viscoso e compressível, cujo campo de velocidade $\overrightarrow{v}$ é dado pelo potencial $\Phi = \Phi(x,y,t)$ : $\overrightarrow{v} = \nabla\Phi$.

Vamos supor também que o potencial $\Phi$ satisfaz a equação linear da onda em $\Omega \times (0,\infty)$.

A fronteira $\Gamma = \partial\Omega$ de $\Omega$ está dividida em duas partes. $\Gamma_0 = \{(x,0) : x \in (0,1)\}$ e $\Gamma_1 = \Gamma \backslash \Gamma_0$. O subconjunto $\Gamma_1$ é suposto rígido e impomos que a velocidade normal do líquido seja zero nele. O subconjunto $\Gamma_0$ é suposto flexível e ocupado por uma corda flexível que vibra com a pressão do líquido no plano onde $\Omega$ se encontra. O deslocamento de $\Gamma_0$ é descrito por uma função escalar $W = W(x,t)$, que obedece a equação da onda unidimensional. Ainda, em $\Gamma_0$ vamos impor a continuidade da velocidade normal do líquido na corda. A corda é suposta para satisfazer as condições de fronteira de Neumann em seus extremos.

Consideraremos também que todas as deformações, são suficientemente pequenas de modo que a teoria linear se aplique.

Sob condições iniciais naturais para $\Phi$ e $W$ o movimento linear deste sistema é descrito por meio das equações de onda acopladas:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial\nu} = 0 & sobre \ \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \ \ \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = 0 & sobre \quad \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \ \ t \ \ \in \ (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \ \ \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \ \ \Gamma_0. \end{cases} \tag{1}$$

Analisando o sistema (1) podemos observar que este acopla duas equações diferenciais que descrevem as vibrações de estruturas de natureza diferente (fluído e corda). Por esta razão, pela qual consideramos que nosso sistema é um sistema híbrido. Veja também que o sistema (1) possui duas equações com derivadas parciais, uma bidimensional e outra unidimensional, e é devido a isso que consideremos que o nosso sistema é um sistema híbrido bidimensional.

Estudaremos a controlabilidade do sistema (1) sobre a ação de uma força exterior ou uma fonte de ruídos na parte flexível da fronteira $\Gamma_0$. O controle será dado por uma função escalar $\beta = \beta(x,t)$ e o sistema a ser controlado é o seguinte:

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\; \in \;\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \;\; \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases} \tag{2}$$

Veremos no capítulo 2, que a energia do sistema (1) dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\nabla\Phi|^2 + |\Phi_t|^2]dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}[|W_x|^2 + |W_t|^2]dx$$

permanece constante ao longo das trajetórias. Da definição de energia facilmente obtemos que o equilíbrio do sistema é da forma

$$(\Phi, \Phi_t, W, W_t) = (c_1, 0, c_2, 0) \tag{3}$$

onde $c_1$ e $c_2$ são funções constantes.

Tendo em vista a velocidade finita da propagação da equação da onda satisfeita por $\Phi$, a geometria de $\Omega$ e o suporte do controle $\beta$ (o subconjunto $\Gamma_0$ da fronteira de $\Omega$) o tempo mínimo para a controlabilidade do sistema (2) é $T = 2$.

O problema de controlabilidade pode ser formulado da seguinte maneira: Dado $T > 2$, encontrar um espaço de dados iniciais $(\Phi_0, \Phi_1, W_0, W_1)$ que pode ser conduzido ao equilíbrio da forma (3) em um tempo $T$ por meio de um controle apropriado $\beta \in H^{-2}(0,T;L^2(\Gamma_0))$.

Para obtermos os resultados almejados neste trabalho, iremos decompor o controle $\beta$, as soluções $\Phi,\ W$ e os dados iniciais em série de Fourier. A análise de Fourier é possível por causa das condições de fronteira que impomos para $W$. Na realidade, $W$ é suposto para satisfazer as condições de fronteira de Neumann que sejam compatíveis com $\Phi$ para desenvolver as soluções em séries de Fourier.

Vamos decompor o controle $\beta$, as soluções $\Phi,\ W$ e os dados iniciais da seguinte maneira:

$$\begin{cases} \beta = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n(t)\cos(n\pi x), \\ \Phi = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(y,t)\cos(n\pi x),\ \ \Phi^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^0(y)\cos(n\pi x);\ \ \Phi^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n^1(y)\cos(n\pi x), \\ W = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} V_n(t)\cos(n\pi x),\ \ W^0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^0\cos(n\pi x),\ \ W^1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_n^1\cos(n\pi x). \end{cases} \tag{4}$$

Com esta decomposição, o sistema (2) pode ser escrito como uma sequência de sistemas controláveis unidimensionais para $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{cases} \psi_{n,tt} - \psi_{n,yy} + n^2\pi^2\psi_n = 0 & \textit{para}\ \ (y,t) \in (0,1)\times(0,\infty) \\ \psi_{n,y}(1,t) = 0 & \textit{para}\ \ t > 0 \\ \psi_{n,y}(0,t) = -V_t(t) & \textit{para}\ \ t > 0 \\ V_{n,tt}(t) + n^2\pi^2 V_n(t) + \psi_{n,t}(0,t) = \beta_n(t) & \textit{para}\ \ t > 0 \\ \psi_n(0) = \psi_n^0,\ \ \psi_{n,t}(0) = \psi_n^1 & \textit{em}\ \ (0,1) \\ V_n(0) = V_n^0,\ \ V_{n,t}(0) = V_n^1. \end{cases} \tag{5}$$

Para obtermos a controlabilidade do sistema (2), primeiro estudaremos a controlabilidade do sistema (5). Combinando os resultados de controlabilidade unidimensional com a decomposição de Fourier (4) iremos obter a controlabilidade para o sistema (2).

O controle que vamos obter é da forma $\beta = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\gamma$, com $\gamma \in L^2(\Gamma_0 \times (0,T))$ com suporte compacto no tempo. Desta forma, temos que $\displaystyle\int_0^T \beta = 0$. Integrando a primeira equação de (2) em $\Omega$ obtemos que $\displaystyle\int_\Omega \Phi_t dxdy - \int_{\Gamma_0} W dx$ permanece constante no tempo. Portanto necessariamente

$$c_2 = \int_{\Gamma_0} W_0 dx - \int_{\Omega} \Phi_1 dx dy. \tag{6}$$

Por outro lado, usando o fato que $\displaystyle\int_0^T \beta = 0$ e integrando a equação satisfeita por $W$ em $\Gamma_0 \times (0, T)$ deduzimos que:

$$\int_{\Gamma_0} W_t(T) dx + \int_{\Gamma_0} \Phi(x, 0, T) dx = \int_{\Gamma_0} W_1 dx + \int_{\Gamma_0} \Phi_0(x, 0) dx$$

e portanto

$$c_1 = \int_{\Gamma_0} (W_1 + \Phi_0(x, 0)) dx \tag{7}$$

Do exposto acima obtemos que as constantes $c_1$ e $c_2$ do equilíbrio que alcançamos no tempo $t = T$ são determinadas a priori pelos dados iniciais.

Em termos dos coeficientes de Fourier dados em (4) estas constantes podem ser escritas da seguinte maneira:

$$\begin{cases} c_1 = V_0^1 + \psi_0^0(0) \\ c_2 = V_0^0 - \displaystyle\int_0^1 \psi_0^1(y) dy \end{cases} \tag{8}$$

Com isto concluímos que as constantes $c_1$ e $c_2$ do equilíbrio são unicamente determinadas pelos coeficientes de Fourier dos dados iniciais que correspondem a frequência $n = 0$ na variável $x$.

Esse fato está relacionado com natureza diferente do sistema (5) para $n = 0$ e $n \geq 1$. Veremos que quando $n \geq 1$ o sistema (5) é exatamente controlável e quando $n = 0$ ele é parcialmente controlável, pois podemos somente controlar o sistema ao equilíbrio dado em (8) em termos dos dados iniciais.

Esse trabalho está organizado em 4 capítulos, cuja disposição é a seguinte: No Capítulo 1 apresentamos algumas notações e resultados básicos, necessário ao desenvolvimento do estudo a ser realizado. No segundo, mostraremos que o problema é bem posto no espaço de energia $H = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$ para as variáveis $(\Phi, \Phi_t, W, W_t)$ e mostraremos que a energia dada por

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\nabla\phi|^2 + |\phi_t|^2]dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}[|W_x|^2 + |W_t|^2]dx$$

permanece constante ao longo das trajetórias. No Capítulo 3 dedicaremos ao estudo do problema de controle unidimensional, e no quarto e último capítulo dedicaremos ao estudo principal deste trabalho, que é o problema de controle bidimensional.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, colocaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

## 1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

### 1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuirem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por $D^\alpha$ o operador derivação de ordem $\alpha$ definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em $\Omega$ e que tem suporte compacto, onde suporte $\varphi$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em $\Omega$, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K$ de $\Omega$, tal que:

**i)** $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

**ii)** $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre $K$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre $\Omega$ a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre $\Omega$ é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre $\Omega$, munido da seguinte noção de convergência: Seja $(T_\nu)$ uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi \rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi \rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam $u, v$ definidas num aberto limitado $\Omega$ do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira $\Gamma$ é regular.

Suponhamos que $u$ e $v$ possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se $u$ ou $v$ se anula sobre $\Gamma$, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em $\Omega$, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_{\Omega} v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora, tal conceito de derivada ter sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja $T$ uma distribuição sobre $\Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. a derivada de ordem $\alpha$ de $T$, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^{\alpha} T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^{\alpha} \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^{\alpha} T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^{\alpha} : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada $T$ associa-se $D^{\alpha} T$, é linear e contínuo.

### 1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em $\Omega$ com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em $\Omega$.

**Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função $u$. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então $u$ é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

**Demonstração**: Ver [13].

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left( \int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \ \textit{para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

**Proposição 1.2. (Desigualdade de Young)** - *Sejam $1 < p\,, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Demonstração**: Ver [1].

**Proposição 1.3. (Desigualdade de Minkowski)** - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g$ em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Demonstração**: Ver [13].

**Teorema 1.4. (Fubini)** *Seja $G = I \times J$ um retângulo e $u : G \to \mathbb{R}$ uma função integrável em $G$. Então*

$$\int_G u(x,y) dx dy = \int_I \left[ \int_J u(x,y) dy \right] dx = \int_J \left[ \int_I u(x,y) dx \right] dy$$

**Demonstração**: Ver [15] $\square$

**Proposição 1.5. (Desigualdade de Hölder)** - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Demonstração**: Ver [1].

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

**Corolário 1.6. (Desigualdade de Hölder generalizada)** - *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

**Proposição 1.7. (Desigualdade de Interpolação)** - *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

*onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.*

**Demonstração**: Ver [15].

Além dos resultados acima, temos que:

**i)** $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

**ii)** $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iii)** $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iv)** Se $(f_n)$ é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência $(f_{n_k})$ tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em $\Omega$.

**Proposição 1.8. (Teorema da Representação de Riesz)** - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

**Demonstração**: Ver [1].

Quando $p = \infty$, temos:

**Proposição 1.9.** *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

**Demonstração**: Ver [1].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$ munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão $u_\nu$ converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto $K$ de $\Omega$ tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left( \int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

**Proposição 1.10. (Lema de Du Bois Raymond)** - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* $\Omega$. *Onde* $T_u$ *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [14].

Desta proposição tem-se que $T_u$ fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em $\Omega$.

**Proposição 1.11.** *Seja* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [14].

### 1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que $u$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

**Observação:** Quando $\Omega$ é um aberto limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$. Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim\limits_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0,$ para todo polinômio $p$ de $n$ variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente descrescente no infinito, $S'$ o dual topológico de $S$ e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de $u$ definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\Omega$ um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

que leva $u$ na sua restrição a $\Omega$. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))' \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

**Teorema 1.12. (Imersão de Sobolev)** - *Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\ \textit{se } m > \frac{n}{2} + k.$$

**Demonstração**: Ver [12].

**Proposição 1.13.** *Sejam $\Omega$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe $C^m$, com fronteira limitada e $m$ um inteiro tal que $m \geq 1$; e $1 \leq p < \infty$. Então temos as segintes imersões contínuas:*

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

*se* $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [4].

**Teorema 1.14. (Teorema de Rellich Kondrachov)** - *Seja $\Omega$ um subconjunto aberto limitado do $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ de classe $C^1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então*

*se* $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

*se* $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

*se* $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

**Demonstração**: Ver [4].

**Notação:** $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

**Proposição 1.15. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)**

*Se $1 \leq p < n$, então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

*onde $p*$ vem dado por* $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$, *existe uma constante $C = C(p, n)$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

**Demonstração**: Ver [1].

**Teorema 1.16.** *Quando $n > 2$ temos a inclusão $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ para todo $\rho$ satisfazendo $2 \leq \rho \leq p$, onde $p$ é dado por:* $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$.

**Demonstração**: Ver [7].

### 1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Seja $X$ um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \mapsto X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se:

**i)** $\exists K$ compacto de $(0,T)$ tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em $K$, $\forall \nu$;

**ii)** Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em $X$ uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em $X$ será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em $X$. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em $X$, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em $X$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;X)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach (das classes) de funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ fortemente mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(u,v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$. Denotaremos por $H_0^1(0,T;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T;X) = \{v \in L^2(0,T;X); v' \in L^2(0,T;X),\ v(0) = v(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((v,w)) = \int_0^T (v(t), w(t))_X dt + \int_0^T (v'(t), w'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T;X)$ com o seu dual $(L^2(0,T;X))^{'}$, via teorema de Riesz, obtemos então

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^1(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(0,T;X)$$

onde

$$H^{-1}(0,T;X) = \left(H_0^1(0,T;X)\right)^{'}.$$

**Proposição 1.17.** *Seja $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle \xi)_X, \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\, \xi \in X.$$

**Demonstração**: Ver [16].

Baseado na proposição anterior, identificamos $f$ com $u'$. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

**Proposição 1.18.** *A aplicação*

$$u \in L^2(0,T;X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$$

*onde $X$ é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.*

**Demonstração**: Ver [16].

**Proposição 1.19.** *Se $1 \leq p \leq \infty$. Então $W^{1,p}(I,X) \hookrightarrow C_{b,u}(I,X)$, onde $I$ é um intervalo aberto dos $\mathbb{R}$ e $C_{b,u}$ é o espaço das funções uniformemente contínuas e limitadas de $I$ em $X$.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

## 1.2 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou $\Omega$ um aberto limitado bem regular do $R^n$ com fronteira $\Gamma$. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais $w$ definidas em $\Gamma$, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função $u$ definida em $\overline{\Omega}$, representa-se $\gamma_0 u$ a restrição de $u$ a $\Gamma$.

**Proposição 1.20.** *Existe uma constante positiva $C$ tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

*para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.*

**Demonstração**: Ver [15].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição (1.20) que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por $\gamma_0$, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função traço.

**Teorema 1.21.** *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$e o núcleo de $\gamma_0$ é o espaço $H^1_0(\Omega)$.*

**Demonstração**: Ver [15].

Consideremos, agora, $\Omega$ uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$ bem regular, e seja $\nu$ a normal unitária exterior em $\Gamma$. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma$ a derivada normal de ordem $j$ de $u$ e $\gamma_0 u\ u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.22.** *Existe uma única aplicação linear e contínua $\gamma$ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

*Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.*

**Demonstração**: Ver [15].

Além desses resultados, considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos produtos internos $(u,v)_0 = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $(u,v)_0 = (u,v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente, temos os seguintes resultados:

**Proposição 1.23.** *A aplicação linear $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) \ &\rightarrow\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u \ &\mapsto\ \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

*Além disso, a aplicação $\gamma$ acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.*

**Demonstração**: Ver [5].

**Proposição 1.24.** *A aplicação linear $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_\Gamma$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \ \rightarrow\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

**Demonstração**: Ver [5].

### 1.2.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$.

Pelo visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.1}$$

que é linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e admite uma inversa à direita linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & L^2(0,T;H^m(\Omega)) & \to & L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.2}$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.1) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.1) e (1.2) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.2) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita $\tau$ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega)),;\gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.3}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.4}$$

que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.2).

**Proposição 1.25.** *Seja $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ com $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então $\gamma u' = (\gamma u)'$.*

**Demonstração**: Ver [5].

### 1.2.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e $M$ o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))},$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & M^{\perp} \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{array} \tag{1.5}$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| + \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v')$ $= \langle f, v\rangle \ \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f$. A aplicação definida em (1.5) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ defini-se $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \tag{1.6}$$

$w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma} f \end{array} \tag{1.7}$$

$\widetilde{\gamma} f$ definido por (1.6), que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim são válidos os seguintes resultados:

**Proposição 1.26.** *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma} u.$$

**Proposição 1.27.** *Se $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ então*

$$\widetilde{\gamma} u' = (\gamma u)'.$$

**Teorema 1.28.** *A aplicação traço (1.7) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\widetilde{\tau} : H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

**Observação 1.29.** *Além desses resultados se considerarmos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ ou $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ em vez* *de $H^m(\Omega)$ em conjunto com as proposições 1.23 e 1.24 obteremos a existência das aplicações*

$$\gamma : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

*e*

$$\gamma_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

## 1.3 Operadores Maximais Monótonos - O Teorema de Hille Yosida

Nesta seção daremos a definição e propriedades elementares dos operadores maximais monótonos, e ainda apresentaremos o Teorema de Hille-Yosida. Para isso, seja $H$ um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em $H$. Seja $A$ um operador não limitado sobre $H$: $A : D(A) \subset H \to H$, temos a seguinte definição:

**Definição 1.30.** *Dizemos que $A$ é um operador monótono se para todo $v \in D(A)$ tivermos $(Av, v) \geq 0$.*

*E ainda, $A$ é dito operador maximal monótono se*

$$R(I + A) = H$$

*isto é,*

$$\forall\, f \in H,\ \exists\, u \in D(A) \text{ tal que } u + A\,u = f,$$

*onde $R(I + A)$ denota a imagem do operador $I + A$.*

Uma observação importante a se fazer nesse momento, é que se $A$ é um operador maximal monótono, então $\lambda A$ é maximal monótono para todo $\lambda > 0$ (veja [1], pg 102).

**Observação 1.31.** *Alguns autores dizem que $A$ é m-acretivo ou que $-A$ é m-dissipativo.*

**Proposição 1.32.** *Seja $A$ um operador maximal monótono sobre $H$, então temos:*

*i)* $\overline{D(A)} = H$.

*ii)* $A$ *é fechado.*

*iii)* $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)$ *é bijetor de* $D(A)$ *sobre* $H$ *e* $(I + \lambda A)^{-1}$ *é limitado com*

$$|(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

**Proposição 1.33.** *Seja $A$ um operador m-dissipativo em $H$ com domínio denso. Então existe um espaço de Banach $\overline{H}$, e um operador m-dissipativo $\overline{A}$ em $\overline{H}$, tal que:*

*(i)* $H \hookrightarrow \overline{H}$, *com imersão contínua e densa;*

*(ii) Para todo* $u \in H$, *a norma de* $u$ *em* $\overline{H}$ *é igual a* $|J_1 u|_H$;

*(iii)* $D(\overline{A}) = H$, *com normas equivalentes;*

*(iv)* $\overline{A}u = Au$, *para todo* $u \in D(A$.

*E ainda, $\overline{H}$ e $\overline{A}$ satisfazendo (i)-(iv) são únicos, a menos de isomorfismos.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Corolário 1.34.** *Se $x \in H$ é tal que $\overline{A}x \in H$, então $x \in D(A)$ e $Ax = \overline{A}x$.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Teorema 1.35.** *Para todo $u_0 \in D(A)$, $u(t) = S(t)u_0$ é a única solução do problema*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), D(A)) \cap C^1([0,\infty), H); \\ \\ u'(t) = Au(t), \forall\ t \geq 0; \\ \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

*onde $A$ é um operador m-dissipativo. E ainda $S(t)Au_0 = AS(t)u_0$ para todo $u_0 \in D(A)$ e $t \geq 0$.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

Em geral, se $u_0 \notin D(A)$, $S(t)u_0$ não é diferenciável em $H$ e então não satisfaz $u'(t) = Au(t)$. A Proposição (1.33) nos permite identificar $S(t)u_0$. Vamos denotar por $(S(t))_{t\geq 0}$ e $(\overline{S}(t))_{t\geq 0}$ os semigrupos correspondentes de $A$ e $\overline{A}$. Temos os seguintes resultados:

**Proposição 1.36.** *Para todo $u_0 \in H$ e todo $t \geq 0$, temos que $S(t)u_0 = \overline{S}(t)u_0$.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Corolário 1.37.** *Seja $u_0 \in H$. Então $u(t) = S(t)u_0$ é a única solução de*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), H) \cap C^1([0,\infty), \overline{H}); \\ u'(t) = \overline{A}u(t), \forall\ t \geq 0; \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.9}$$

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Proposição 1.38.** *Seja $u_0 \in H, f \in L^1((0,T); H)$, a função $u$ definida por*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$$

*é a única solução de*

$$\begin{cases} u \in C([0,\infty), H) \cap C^1([0,\infty), \overline{H}); \\ u'(t) = \overline{A}u(t) + f(t), \forall\ t\ \in [0,T]; \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.10}$$

*e ainda satisfaz*

$$\|u\|_{C([0,T],H)} \leq \|u_0\|_H + \|f\|_{L^1(0,T;H)}$$

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

Considere o sistema

$$\begin{cases} u'(t) = Au(t) + f(t), \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

onde $A$ é um operador m-dissipativo e $f \in L^1((0,T);H)$.

**Definição 1.39.** *Dizemos que uma função $u$ é solução forte de (1.11) se:*

*(i)* $u \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T],H)$,

*(ii) $u$ satisfaz (1.11) pontualmente,*

*(iii)* $u(0) = u_0$.

**Definição 1.40.** *Dizemos que uma função $u$ é solução fraca de (1.11) se:*

*(i)* $u \in C([0,T];H) \cap C^1([0,T],\overline{H})$,

*(ii)* $u'(t) = \overline{A}u(t) + f(t), \forall\ t\ \in [0,T]$

*(iii)* $u(0) = u_0$.

**Definição 1.41.** *Seja $A$ operador maximal monótono. Pondo-se, para todo $\lambda > 0$ $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ e $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$. Denotaremos $J_\lambda$ o* <u>*resolvente*</u> *de $A$ e $A_\lambda$ a* <u>*regularização Yosida*</u> *de $A$. Note em particular que $||J_\lambda||_{\mathbb{L}(H)} \leq 1$.*

**Proposição 1.42.** *Seja $A$ um operador maximal monótono. Então se verificam as seguintes condições:*

$a_1)$ $A_\lambda = A(J_\lambda); \forall\, v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$.

$a_2)$ $A_\lambda = J_\lambda(Av); \forall v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$.

$b)$ $|A_\lambda \leq |Av|; \forall\, v \in D(A)$ *e* $\forall \lambda > 0$.

$c)$ $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v; \forall\, v \in D(A)$ *e* $\forall\, \lambda > 0$.

$d)$ $\lim_{\lambda \to 0} v = Av; \forall\, v \in H$.

$e)$ $(A_{\lambda \cdot v}) \geq 0; \forall\, v \in H$ *e* $\forall \lambda > 0$.

$f)$ $|A_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}|v|; \forall v \in H$ *e* $\forall\, \lambda > 0$.

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

Enunciaremos agora o principal resultado desta seção, o qual nos permitirá garantir a existência e unicidade de solução do nosso problema.

**Teorema 1.43.** *(Hille-Yosida) Seja $A$ um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

*tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.12}$$

*Ademais, se verifica:*

$$|u(t)| \leq |u_0| \;\; e \;\; \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall\, t \geq 0, \tag{1.13}$$

*onde $D(A)$ é um espaço de Banach para a norma do gráfico:*

$$||u||_{D(A)} = |u| + |A\,u|.$$

**Demonstração**: Ver [1] □

**Observação 1.44.** *A principal aplicação do Teorema de Hille-Yosida, reside no fato que para resolver o problema de evolução (1.12), basta mostrar que o operador $A$ é maximal monótono, ou seja, estudar a equação estacionária $u + \lambda Au = f$.*

Uma outra aplicação interessante do Teorema de Hille-Yosida será apresentada na observação abaixo.

**Observação 1.45.** *Seja $A$ um operador maximal monótono e $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + Au + \lambda u = 0; \quad em\ [0, +\infty[ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.14}$$

*Multiplicando* $(1.14)_1$ *por* $e^{\lambda t}$ *teremos*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}u(t)\right) + A\left(e^{\lambda t}u(t)\right) = 0. \tag{1.15}$$

*Denotando* $v(s) = e^{\lambda t}u(t)$, *obtemos que* $v$ *verifica*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v}{dt} + Av = 0; \quad \text{em } [0, +\infty[ \\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

*Assim, resolver (1.14), se reduz a resolver (1.12) graças ao artifício (1.15).*

Passaremos agora a estudar o caso em que o operador $A$ é auto-adjunto, cuja definição daremos a seguir.

Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado com $\overline{D(A)} = H$. Se temos a identificação $H' \approx H$, pode-se considerar $A^*$ como um operador não limitado em $H$.

**Definição 1.46.** *Dizemos que* $A$ *é* *simétrico* *se*

$$(A\,u, v) = (u, A\,v); \quad \forall\, u, v \in D(A);$$

$A$ *é* *auto-adjunto* *se* $A^* = A$ *e* $D(A^*) = D(A)$.

Note que todo operador auto-adjunto é simétrico. Porém, se $A$ é maximal monótono, temos a recíproca.

**Proposição 1.47.** *Seja* $A$ *um operador maximal monótono e simétrico. Então* $A$ *é auto-adjunto.*

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

O teorema que veremos a seguir, difere do Teorema de Hille-Yosida, pois o dado inicial $u_0 \in H$, ao invés de $u_0 \in D(A)$. Porém, sua conclusão é mais fraca, porque $\frac{d\,u(t)}{dt}$ pode ocasionalmente explodir quando $t \to 0$.

**Teorema 1.48.** *Seja $A$ um operador maximal monótono, auto-adjunto. Então, para todo $u_0 \in D(A)$, existe uma única solução*

$$u \in C([0,+\infty);H) \cap C((0,+\infty);D(A))$$

*tal que*

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = 0 \qquad em\ (0,+\infty) \\ \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.16}$$

*E ainda, se verifica*

$$|u(t)| \leq |u_0| \qquad e \qquad \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |A\,u(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0|\,; \quad \forall\, t > 0$$

*com*

$$u \in C^k((0,+\infty);D(A^l)); \quad \forall\, k,l \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

**Demonstração**: Ver [1] □

Com este teorema encerramos esta seção, e passaremos agora a nos dedicar ao estudo da teoria de Semigrupos.

## 1.4 Semigrupos

Nesta seção introduzimos conceitos e propriedades básicas da teoria de semigrupos. Para iniciarmos, sejam $H$ um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ um operador linear e contínuo. Vamos considerar o problema de Cauchy abstrato

$$(PC) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = 0 \qquad \text{em } H\,, \forall\, t \geq 0 \\ \\ u(0) = u_0 \qquad \text{em } H. \end{cases} \tag{1.18}$$

O problema de dado inicial descrito em $(PC)$ possui uma única solução para $t \geq 0$ dada por $u(t) = e^{t\,(-A)}\,u_0$, onde

$$e^{-A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-A)^k}{k!}.$$

Todavia, há diversas equações diferenciais parciais de evolução que possuem a natureza de $(PC)$, onde $A$ é um operador linear de $H$ não necessariamente contínuo. No âmbito de elucidar tais problemas, surge uma questão natural: "Existem operadores de $H$, com propriedades análogas às da aplicação exponencial $e^A$, que resolvem $(PC)$ com $A$ não necessariamente contínuo?"

Para responder tal pergunta, foi desenvolvida a Teoria de Semigrupos, que será o nosso próximo objeto de estudo. Estudaremos o semigrupo $S$ gerado por um operador maximal monótono $A$. Assim, com tal enfoque unindo os resultados da seção anterior, juntamente com os resultados a seguir, estudamos a existência, unicidade e regularidade da solução de nosso problema em questão.

Usando o Teorema de Hille-Yosida, podemos definir para $t \geq 0$, o seguinte operador linear:

$$\begin{aligned} S(t) : D(A) &\rightarrow D(A) \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

Por Hille-Yosida, temos

$$|S(t)u_0| = |u(t)| \leq |u_0|\,; \quad \forall\, v \in D(A). \tag{1.19}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(t) : H &\rightarrow H \\ u_0 &\mapsto \widetilde{S}(t)u_0 \end{aligned}$$

Como $\overline{D(A)} = H$, existem $u_n$ e $v_n$ em $D(A)$ tal que $u_n \rightarrow u_0$ em $H$ e $v_n \rightarrow v_0$ em $H$. Logo,

$$|S(t)u_n - S(t)v_n| = |S(t)\underbrace{(u_n - v_n)}_{\in\, D(A)}| \leq |u_n - v_n|.$$

Em virtude que $(u_n - v_n) \in D(A)$, podemos usar o fato mencionado em (1.19). Assim, fazendo $n \to +\infty$, teremos

$$|\widetilde{S}(t)u_n - \widetilde{S}(t)v_n| \leq |u_0 - v_0|,$$

o que nos diz que $\widetilde{S}(t)$ é uma contração em $H$. Por convenção , denotaremos de agora em diante, $\widetilde{S}(t) = S(t)$, isto é, $S(t) \in \mathcal{L}(H)$.

**Definição 1.49.** *$S(t)$é chamado* <u>*Semigrupo*</u> *gerado por $-A$.*

Veja que $S(t)$ é gerado por $-A$ decorre do fato que

$$\lim_{h\to 0} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(h) - u(0)}{h} = \frac{d}{dt}u(0) = -Au(0) = -Au_0.$$

Também, $S(t) \in \mathcal{L}(H)$.

De fato, dados $u_0, v_0 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

$S(t)u_0 = u(t)$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au(t) = 0\,; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.20}$$

E $\lambda S(t)v_0 = v(t)$, solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v(t)}{dt} + Av(t) = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.21}$$

Somando as equações (1.20) e (1.21) teremos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u + v) + A(u + v) = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) + v(0) = u_0 + v_0 \end{cases} \tag{1.22}$$

$$\therefore\ S(t)(u_0 + \lambda v_0) = u(t) + v(t) = S(t)u_0 + \lambda S(t)v_0;\ \forall\, t \geq 0.$$

Ademais, $S(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

**Proposição 1.50.** *Seja $S(t) \in \mathcal{L}(H)$, semigrupo gerado por $-A$. Para todo $t \geq 0$, temos:*

*i)* $S(0) = I_H$ *e* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$; $\forall\, t_1, t_2 \geq 0$.

*ii)* $|S(t)u_0| \leq |u_0|\,, \quad \forall\, u_0 \in H, \quad \forall\, t \geq 0.$

*iii)* $\lim_{t\to 0} |S(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall\, u_0 \in H.$

**Demonstração**: Ver [2] □

**Definição 1.51.** *A família $\{S(t)\}_{t\geq 0} \in \mathcal{L}(H)$ que satisfaz a proposição (1.50) é denominado semigrupo contínuo de contrações.*

A seguir, enunciaremos um resultado que mostra através da teoria de semigrupos, que podemos obter a recíproca do Teorema de Hille-Yosida, ou seja, podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre operadores maximais monótonos e semigrupos contínuos de contrações.

**Teorema 1.52.** *Se $S(t)$ é semigrupo contínuo de contrações, então existe um único operador maximal monótono $A$ em $H$, tal que $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.*

**Demonstração**: Ver [2] □

A seguir, veremos outras propriedades de semigrupos, dentre elas, algumas que tratam da diferenciabilidade de um semigrupo.

**Proposição 1.53.** *Seja $S(t)$ um semigrupo gerado por $-A$. Temos as seguintes propriedades:*

*i)* *Se $u_0 \in D(A)$, então $S(t)u_0 \in D(A)$*

*e ainda,*

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

*ii)* *Se* $u_0 \in H$, *então* $\int_0^t S(s)u_0\,ds \in D(A), \forall\, t \geq 0$.

*iii)* $A\left(\int_0^t S(s)u_0\,ds\right) = S(t)u_0 - u_0$.

**Demonstração**: Ver [2] $\square$

**Definição 1.54.** *Se $A$ e $-A$ são operadores maximais monótonos, nós podemos definir $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ semigrupos gerados por $A$ e $-A$, respectivamente.*

*Definamos*

$$S_A(t) = S(t)\,; \quad t \geq 0;$$

$$S_{-A}(t) = S(-t)\,; \quad t \leq 0.$$

Claramente, $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ são semigrupos, pois são restrições do semigrupo $S(t)$.

**Proposição 1.55.** *Sejam $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ definidos acima. Então, temos que*

$$S_A(t) = [S_{-A}(t)]^{-1}.$$

**Demonstração**: Ver [2] $\square$

**Proposição 1.56.** *Para que $A$ seja maximal monótono, é necessário e suficiente que $A^*$ também seja maximal monótono.*

**Demonstração**: Ver [2] $\square$

**Proposição 1.57.** *Seja $S(t)$ semigrupo gerado por $-A$. Se $A^*$ existe, então $S^*(t) = S(t)^*$ é o semigrupo gerado por $-A^*$.*

**Demonstração**: Ver [2] $\square$

**Proposição 1.58.** *Considere $S_A(t), S_{-A}(t)$ de acordo com a definição (1.54). Então:*

$$i) \quad S(0) = I;$$

$$ii) \quad S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2); \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R};$$

$$iii) \quad |S(t)u_0| = |u_0|; \quad \forall\, u_0 \in H, \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

*$S(t)$ é dito <u>grupo de operadores unitários</u> sobre $H$.*

**Demonstração**: Ver [2] □

**Definição 1.59.** *$A$ é dito <u>anti-adjunto</u> se $A = -A$.*

**Proposição 1.60.** *$A$ é anti-adjunto se, se e somente se, $A$ e $-A$ são operadores maximais monótonos.*

**Demonstração**: Ver [2] □

Para encerrarmos esta seção, apresentaremos de forma resumida alguns resultados de extrema importância para demonstrarmos o principal teorema da primeira seção do capítulo 3.

Para isso seja $X$ um espaço de Banach e $A$ um operador m-dissipativo com domínio denso. Vamos denotar por $(S(t))_{t\geq 0}$ o semigrupo de contrações gerado por $A$.

Considere o seguinte problema:

$$(\star) \quad \begin{cases} u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; X) \\ \\ \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t)\ \forall\, t \in [0,T]; \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde $T > 0$, $x \in X$ e $f$ é uma função definida em $[0,T]$ assumindo valores em $X$.

Temos os seguintes resultados para o problema $(\star)$:

**Proposição 1.61.** *Para todo* $u_0 \in D(A)$ *e* $f \in C([0,T],X)$ *o problema* $(\star)$ *possui no máximo uma solução.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Proposição 1.62.** *Seja* $u_0 \in D(A)$ *e seja* $f \in C([0,T],X)$*. Assuma que uma das seguintes condições é satisfeita:*

*i)* $f \in L^1((0,T),D(A))$;

*ii)* $f \in W^{1,1}((0,T),X)$.

*Então o problema* $(\star)$ *possui solução.*

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

**Proposição 1.63.** *Para todo* $u_0 \in X$ *e* $f \in L^1((0,T),X)$*, a função* $u$ *definida por* $u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds$*, é solução fraca de*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u(t) = Au(t) + f(t) \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

*onde* $u \in C([0,T];X)$ *e ainda satisfaz*

$$\|u\|_{C([0,T];X)} \leq \|x\|_X + \|f\|_{L^1((0,T),X)}$$

.

**Demonstração**: Ver [6] $\square$

## 1.5 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

**Proposição 1.64. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** - *Sejam* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

**Teorema 1.65. (Hahn-Banach, forma analítica)** *Seja* $p : E \to \mathbb{R}$ *uma aplicação que verifica*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \forall\ x \in E \quad e \quad \forall \lambda > 0$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall\ x, y \in E$$

*Seja também* $G \subset E$ *um subespaço vetorial e* $g : G \to \mathbb{R}$ *uma aplicação linear tal que*

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall\ x \in G.$$

*Então existe uma forma linear* $f$ *definida sobre* $E$ *sobre estende* $g$*, isto é,*

$$g(x) = f(x) \quad \forall x \in G$$

*e ainda*

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

**Demonstração**: Ver [1] □

**Corolário 1.66.** *Seja* $G$ *um subespaço vetorial de* $E$*, e seja* $g : G \to \mathbb{R}$ *uma aplicação linear e contínua. Então existe* $f \in E'$ *que estende* $g$ *tal que* $\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$*.*

**Demonstração**: Ver [1] □

**Proposição 1.67.** *Sejam* $E$ *e* $F$ *dois espaços de Banach e seja* $T$ *um operador linear contínuo e bijetivo de* $E$ *sobre* $F$*. Então* $T^{-1}$ *é contínuo de* $F$ *em* $E$*.*

**Demonstração**: Ver [1] □

**Teorema 1.68. (Teorema da Representação de Riesz-Fréchet)** *Dado $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ única tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \ \forall v \ \in H$$

*e ainda satisfaz*

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

**Definição 1.69.** *Se diz que uma forma bilinear $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ é:*

*(i) Contínua se existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C|u||v| \ \ \forall \ u, v \in H.$$

*(ii) Coerciva se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v, v) \geq \alpha |v|^2$$

**Lema 1.70. (Lax-Milgram)** *Seja $a(u, v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo $\varphi \in H'$ existe $u \in H$ único tal que*

$$a(u, v) = \langle \varphi, v \rangle \forall v \in H.$$

*E ainda, se $a$ é simétrica, então $u$ se caracteriza pela propriedade*

$$u \in H \ \ e \ \ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(u, v) - \langle \varphi, v \rangle \right\}$$

.

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

**Lema 1.71. (Lema de Gronwall)** - *Sejam $z \in L^{\infty}(0, T)$ e $f \in L^1(0, T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja $c$ uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s) f(s) ds, \ \forall t \in [0, T],$$

*então*
$$f(t) \leq c e^{\int_0^t z(s)ds},\ \forall t \in [0,T].$$

**Demonstração**: Ver [12].

**Proposição 1.72. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green)** - *Seja $\Omega$ um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leq i \leq n$ temos que*
$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$
*onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n)$ e $\nu$ denota o vetor normal unitário exterior à $\Gamma$.*

*Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos a fórmula de Green:*
$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

**Demonstração**: Ver [5].

**Proposição 1.73. (Fórmula de Green generalizada)** - *Para todo $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$e $v \in H^1(\Omega)$, tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

*onde $\Gamma = \partial\Omega$.*

**Demonstração**: Ver [5].

**Teorema 1.74. (Regularidade do problema Dirichlet)** - *Seja $\Omega$ um aberto de classe $C^2$ com fronteira $\Gamma$ limitada (ou $\Omega = \mathbb{R}^n_+$). Seja $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H^1_0(\Omega)$, verificando*
$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \forall \varphi \in H^1_0(\Omega).$$

*Então, $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, onde $c$ é uma constante que só depende de $\Omega$. Além disso, se $\Omega$ é de classe $C^{m+2}$ e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se $\Omega$ é de classe $C^\infty$ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.*

**Demonstração**: Ver [1].

**Teorema 1.75. (Regularidade para o problema de Neumann)**- *Com as mesmas hipóteses do teorema anterior se obtém as mesmas conclusões para a solução do problema de Neumann, ou seja, para $u \in H^1(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi,\ \forall \varphi \in H^1(\Omega).$$

**Demonstração**: Ver [1] $\square$

**Teorema 1.76. (Propriedade de Continuação Única)** *Assuma que $u$ pertença ao espaço $L^2(\Omega\times(0,T))$ e seja uma solução fraca de $\Box u + v(x,t)\,u = 0$ em $\Omega\times(0,T)$, (onde $\Box$ é o operador D'Alembertiano) tal que $T > diam\,\Omega$ e $v \in L^\infty(0,T;L^n(\Omega))$, onde $\Omega$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$.*

*Então se $u = 0$ em algum conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n /\, a(x) > 0\} \times (0,T)$, temos que $u \equiv 0$.*

**Demonstração**: Ver [21].

**Lema 1.77.** *Sejam $H$ e $V$ espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

**Demonstração**: Ver [19].

**Teorema 1.78. (Regra da Cadeia)** *Seja $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então a função $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G\circ u) = (G'\circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

**Demonstração**: Ver [9].

**Observação 1.79.** *É conveniente observar uma conseqüência muito útil da desigualdade de Hölder: Seja $f_1, f_2, ..., f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega)\ \ 1 \leq i \leq k \ \ com \ \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k}.$$

*Então o produto* $f = f_1 f_2 .... f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} ... \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

*Em particular, se* $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leqq \leq \infty$, *então* $f \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *se verifica a desigualdade de interpolação.*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \text{ onde } \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Para encerrarmos esta seção enunciaremos um teorema que terá um papel fundamental na demonstração de alguns resultados presentes no capítulo 3.

**Teorema 1.80.** *(A. Haraux, Th. 4)*
*Seja* $f = f(t)$ *da seguinte forma*

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t},$$

*onde* $\lambda_n$ *é uma seqüência de números reais. Vamos assumir que* $a_n \in L^2$ *e que existe* $N \in \mathbb{N}, \gamma > 0$ *e* $\gamma_\infty > 0$ *tal que*

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \gamma_\infty > 0 \text{ se } |n| > N \tag{1.23}$$

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n \geq \gamma > 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

*Seja* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo finito de comprimento* $\mid J \mid > \frac{2\pi}{\gamma_\infty}$. *Então, existe existe duas constantes positivas* $c_1, c_2 > 0$ *tal que*

$$c_1 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_J |f(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{1.25}$$

*Mais precisamente* $c_1 = C_1(2N+1)$ *e* $c_2 = C_2(2N+1)$ *onde* $c_i(j); i = 1, 2$ *são dados pela seguinte fórmula de recorrência:*

$$\begin{cases} c_1(j+1) = \left[ \left( \frac{2c_2(j)}{|J|} + 1 \right) \frac{288|J|\gamma_\infty}{c_1(j)(|J|\gamma_\infty - 2\pi)^2 \gamma^4} + \frac{2}{|J|} \right]^{-1} \\ \\ c_2(j+1) = 2(|J|(j+1) + c_2(j)), \quad j = 0, 1... \end{cases} \tag{1.26}$$

*e* $c_1(0)$, $c_2(0)$ *são tal que (1.25) se satisfaz no caso particular em que* $\gamma_\infty = \gamma > 0$.

# Capítulo 2

# Existência e Unicidade de Solução

Como mencionamos na introdução, este capítulo será dedicado para garantirmos a existência e unicidade das soluções do sistema (1), assim como as propriedades elementares de continuidade com respeito aos dados iniciais. Para assegurarmos tais resultados, lançaremos mão da teoria hilbertiana dos operadores maximais-monótonos e o Teorema de Hille-Yosida. Primeiramente, vamos escrever o sistema (1) de forma abstrata que nos permite o estudo das soluções em um espaço de energia finita.

Seja o espaço $\mathcal{X} = H^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times L^2(\Gamma_0)$. Definimos em $\mathcal{X}$ o produto escalar:

$$(f, g) = \int_\Omega (\nabla f_1 . \nabla g_1 + f_1 g_1) dxdy + \int_\Omega f_2 g_2 dxdy + \int_{\Gamma_0} ((f_3)_x (g_3)_x + f_3 g_3) dx + \int_{\Gamma_0} f_4 g_4 dx,$$

$$\forall\ f = (f_1, f_2, f_3, f_4) \ \ e \ \ \forall\ g = (g_1, g_2, g_3, g_4) \quad \in \mathcal{X}.$$

onde . representa o produto escalar em $\mathbb{R}^2$. Desta forma $(\mathcal{X}, (.,.))$ é um espaço de Hilbert.

Para prosseguirmos definimos os seguintes operadores:

$$B \in \mathcal{L}(H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0), (H^1(\Omega))')$$

tal que

$$\langle B(\phi,\gamma,\omega,V),\varphi\rangle = \int_\Omega (\nabla\phi.\nabla\varphi)dxdy - \int_{\Gamma_0} V\varphi dx$$

e ainda

$$C \in \mathcal{L}(H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)\times H^1(\Gamma_0),(H^1(\Gamma_0))')$$

onde

$$\langle C(\phi,\gamma,\omega,V),\psi\rangle = \int_{\Gamma_0}\omega_x\psi_x dx + \int_{\Gamma_0}\gamma\psi dx.$$

Com o intuito de aplicar a teoria acima mencionada, buscaremos um operador $A$, tal que $A+\mathcal{I}$ seja maximal e monótono em $\mathcal{X}$. Consideremos o operador $(D(A),A)$ definido por:

$$\begin{aligned} D(A) \;\; = \;\; & \Big\{U = (\phi,\gamma,\omega,V)\in \; H^1(\Omega)\times H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)\times H^1(\Gamma_0) : \\ & B(U)\in L^2(\Omega),\; C(U)\in L^2(\Gamma_0), \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \; sobre \; \Gamma_1, \\ & \frac{\partial\phi}{\partial\nu} = V \; sobre \; \Gamma_0,\; \omega_x(0) = \omega_x(1) = 0\Big\} \end{aligned}$$

$$A(\phi,\gamma,\omega,V) = (-\gamma, B(\phi,\gamma,\omega,V), -V, C(\phi,\gamma,\omega,V)) \tag{2.1}$$

Vejamos em seguida em que sentido se cumprem as condições de contorno presentes na definição do domínio $D(A)$.

De $C(U)\in L^2(\Gamma_0)$ e usando o resultado de regularidade para o Laplaciano em dimensão um (veja Teorema (1.75)) com condições de Neumann , se obtém que $\omega \in H^2(\Gamma_0)$ se $U\in D(A)$ e portanto o traço $\omega_x$ está bem definido.

Em segundo lugar o elemento, $U = (\phi,\gamma,\omega,V)\in D(A)$ tem que cumprir as condições $B(U)\in L^2(\Omega)$, o que, na forma diferencial se escreve:

$$\begin{cases} -\Delta\phi \in L^2(\Omega) \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = 0 \; sobre \; \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial\nu} = V \;\; \in H^1(\Gamma_0) \; sobre \; \Gamma_0 \end{cases}$$

Como o domínio $\Omega$ é uma poligonal não podemos deduzir que $\phi\in H^2(\Omega)$ usando diretamente os resultados clássicos de regularidade para o Laplaciano, já que em geral neste tipo de domínio a função pode ser menos regular em seus vértices.

No entanto resultados de regularidade (veja [8], Teorema 5.1.3.5 pg 263), nos assegura que em nosso caso, devido aos valores particulares dos ângulos (iguais a $\frac{\pi}{2}$) e convexidade do domínio $\Omega$, não perdemos a regularidade. Resulta que $\phi \in H^2(\Omega)$ e portanto $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ sobre $\Gamma_0$ tem sentido como traço.

Dos comentários feitos acima concluímos que:

$$D(A) \subset H^2(\Omega) \times H^1(\Omega) \times H^2(\Gamma_0) \times H^1(\Gamma_0).$$

Com estas definições e considerando $U = (\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ o sistema (1) se escreve:

$$\begin{cases} U_t(t) + AU(t) = 0 \ \ para \ t \ \in \ (0, \infty) \\ U(0) = (\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \ \in D(A) \\ U(t) \in D(A), \forall t \in (0, \infty) \end{cases} \tag{2.2}$$

De fato, como $U_t(t) + AU(t) = 0$, segue que

$$(\phi_t, \phi_{tt}, \omega_t, \omega_{tt}) + (-\phi_t, B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), -\omega_t, C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)) = 0$$

e portanto temos que:

$$\phi_{tt} + B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t) = 0 \tag{2.3}$$

$$\omega_{tt} + C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t) = 0 \tag{2.4}$$

De (2.3) obtemos que:

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} + (B(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla\phi \nabla\varphi dxdy - \int_{\Gamma_0} \omega_t \varphi dx = 0 \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

$$(\phi_{tt}, \varphi)_{L^2(\Omega)} - (\Delta\phi, \varphi)_{L^2(\Omega)} = 0 \qquad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

donde segue que $\phi_{tt} - \Delta\phi = 0$ obtendo assim a primeira equação de (1).

De (2.4) obtemos que:

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} + (C(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t), \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \qquad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} + (\omega_x, \psi_x)_{L^2(0,1)} + (\phi_t, \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

$$(\omega_{tt}, \psi)_{L^2(0,1)} - (\omega_{xx}, \psi)_{L^2(0,1)} + (\phi_t, \psi)_{L^2(0,1)} = 0 \quad \forall\ \psi \in \mathcal{D}(0,1)$$

Logo, $\omega_{tt} - \omega_{xx} + \phi_t = 0$, donde temos a segunda equação de (1).

As demais condições segue diretamente da definição do $D(A)$. Portanto temos que o sistema (1) pode ser reescrito como (2.2) com havíamos afirmado.

De posse de (2.2) enunciaremos e demonstraremos o resultado que nos garante a existência e unicidade de solução do problema (1), bem como a continuidade com respeito aos dados iniciais, concluindo assim o objetivo principal deste capítulo.

**Teorema 2.1.** *Se $A$ é o operador definido em (2.1) então:*

*(i) $A + \mathcal{I}$ é um operador maximal e monótono em $\mathcal{X}$;*

*(ii)Soluções fortes: Se $(\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \in D(A)$ existe uma única solução $(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ da equação (2.2) com as seguintes propriedades:*

$$(\phi, \omega) \in C^2\left([0,\infty); L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)\right) \cap C^1\left([0,\infty; H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0))\right) \cap$$
$$\cap C\left([0,\infty); H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma_0)\right)$$

*onde estas soluções verificam o sistema (1) pontualmente.*

*(iii)Soluções fracas: Se $(\phi^0, \phi^1, \omega^0, \omega^1) \in \mathcal{X}$ existe uma única solução $(\phi, \phi_t, \omega, \omega_t)$ da equação (2.2) com as seguintes propriedades:*

$$(\phi, \omega) \in C^1\left([0,\infty); L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_0)\right) \cap C\left([0,\infty); H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)\right)$$

**Demonstração**: Como havíamos comentado anteriormente, nosso primeiro passo será mostrar que o operador $A + \mathcal{I}$ é maximal e monótono em $\mathcal{X}$.

Monótono

Seja $z = (\phi, \gamma, \omega, V) \in D(A)$ arbitrário, teremos:

$$\begin{aligned}
(z, (A+\mathcal{I})z) &= ((\phi,\gamma,\omega,V), (-\gamma, B(\phi,\gamma,\omega,V), -V, C(\phi,\gamma,\omega,V)) + (\phi,\gamma,\omega,V)) \\
&= (z,z) + ((\phi,\gamma,\omega,V), (-\gamma, B(\phi,\gamma,\omega,V), -V, C(\phi,\gamma,\omega,V)) \\
&= -\int_\Omega (\nabla\phi.\nabla\gamma + \phi\gamma)dxdy - \int_{\Gamma_0} (\omega_x V_x + \omega V)dx \\
&\quad + \int_\Omega \gamma B(\phi,\gamma,\omega,V)dxdy + \int_{\Gamma_0} VC(\phi,\gamma,\omega,V) + (z,z)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_{\Omega}(\nabla\phi.\nabla\gamma+\phi\gamma)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\omega_x V_x+\omega V)dx\\
&\quad \langle B(\phi,\gamma,\omega,V),\gamma\rangle+\langle C(\phi,\gamma,\omega,V),V\rangle+(z,z)\\
&= -\int_{\Omega}(\nabla\phi.\nabla\gamma+\phi\gamma)dxdy-\int_{\Gamma_0}(\omega_x V_x+\omega V)dx+\int_{\Omega}\nabla\phi.\nabla\gamma dxdy\\
&\quad -\int_{\Gamma_0}\gamma V+\int_{\Gamma_0}\omega_x V_x dx+\int_{\Gamma_0}\gamma V dx+(z,z)\\
&= -\int_{\Omega}\phi\gamma dxdy-\int_{\Gamma_0}\omega V dx+\int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dxdy+\int_{\Omega}|\phi|^2dxdy+\int_{\Omega}|\gamma|^2dxdy\\
&\quad +\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\int_{\Gamma_0}|\omega|^2dx+\int_{\Gamma_0}|V|^2dx\\
&= \int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dxdy+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega}(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy\right)+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Omega}(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy-\int_{\Omega}\phi\gamma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)-\int_{\Gamma_0}\omega V dx\\
&\geq \int_{\Omega}|\nabla\phi|^2dxdy+\int_{\Gamma_0}|\omega_x|^2dx+\frac{1}{2}\left(\int_{\Omega}(|\phi|^2+|\gamma|^2)dxdy\right)\\
&\quad +\frac{1}{2}\int_{\Gamma_0}(\omega^2+V^2)dx\geq 0
\end{aligned}
$$

onde dos extremos temos que $(z,(A+\mathcal{I})z)\geq 0$ o que mostra que o operador $A+\mathcal{I}$ em questão é monótono.

<u>Maximal</u>

Mostremos agora que o operador $A+\mathcal{I}$ é maximal. Para isso seja $S=(f,g,m,n)\in H^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)\times L^2(\Gamma_0)$ arbitrário e busquemos um elemento $z=(\phi,\xi,\omega,\eta)\in D(A)$ tal que $(A+2\mathcal{I})z=S$.

Isto é equivalente a encontrar $(\phi,\xi,\omega,\eta)\in D(A)$ solução de:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
2\phi-\xi=f\\
2\xi+B(\phi,\xi,\omega,\eta)=g\\
2\omega-\eta=m\\
2\eta+C(\phi,\xi,\omega,\eta)=n
\end{array}
\right. \tag{2.5}
$$

o que por sua vez, se reduz a encontrar $(\phi,\omega)\in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$ tal que:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
4\displaystyle\int_{\Omega}\phi u dxdy+\int_{\Omega}\nabla\phi.\nabla u dxdy-2\int_{\Gamma_0}\omega u dx=\int_{\Omega}(2f+g)u dxdy-\int_{\Gamma_0}m u dx\\[2ex]
4\displaystyle\int_{\Gamma_0}\omega v dx+\int_{\Gamma_0}\omega_x v_x dx+2\int_{\Gamma_0}\phi v dx=\int_{\Gamma_0}(n+2m+f)v dx.
\end{array}
\right. \tag{2.6}
$$

para todo $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H^1(\Gamma_0)$. Mostremos a afirmação feita acima, ou seja, que o sistema (2.5) é equivalente a (2.6). De fato, de (2.5) obtemos :

$$\begin{array}{lcl} \xi = 2\phi - f & \Longrightarrow & 4\phi - 2f + B(\phi,\xi,\omega,\eta) = g \\ \eta = 2\omega - m & \Longrightarrow & 4\omega - 2m + C(\phi,\xi,\omega,\eta) = n \end{array}$$

e portanto

$$(4\phi, u)_{L^2(\Omega)} - (2f, u)_{L^2(\Omega)} + (B(\phi,\xi,\omega,\eta), u)_{L^2(\Omega)} = (g, u)_{L^2(\Omega)}$$

ou seja,

$$4\int_\Omega \phi u dx dy + \int_\Omega \nabla\phi\nabla u dx dy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx = \int_\Omega (2f+g) u dx dy - \int_{\Gamma_0} m u dx$$

obtendo assim a primeira equação de (2.6). Analogamente se obtém a segunda equação.

Com o objetivo de de aplicar o Lema de Lax-Milgram para encontrar $(\phi,\omega)$ mencionado acima, definimos a forma bilinear

$$a\left(H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)\right)^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

onde

$$\begin{aligned} a\big((\phi,\omega),(u,v)\big) \;\; = \;\; & \int_\Omega \nabla\phi.\nabla u dx dy + 4\int_\Omega \phi u dx dy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx \\ & + \int_{\Gamma_0} \omega_x v_x dx + 4\int_{\Gamma_0} \omega v dx + 2\int_{\Gamma_0} \phi v dx \end{aligned}$$

$\forall\ (\phi,\omega),(u,v) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$.

Definimos também a forma linear

$$L : H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0) \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por:

$$L(\phi,\omega) = \int_\Omega (2f+g)\phi dx dy - \int_{\Gamma_0} m\phi dx + \int_{\Gamma_0} (n + 2m + f)\omega dx$$

$\forall\ (\phi,\omega) \in H^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_0)$.

Claramente "$a$"é uma forma bilinear. Verifiquemos agora que ela é contínua e coerciva. De fato,

$$\begin{aligned} a\big((\phi,\omega),(\phi,\omega)\big) &= \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dxdy + 4\int_\Omega |\phi|^2 dxdy - 2\int_{\Gamma_0} \omega\phi dx + \int_{\Gamma_0} |\omega_x|^2 dx \\ &\quad +4\int_{\Gamma_0} |\omega|^2 dx + 2\int_{\Gamma_0} \omega\phi dx \\ &\geq \|(\phi,\omega)\|^2_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)} \end{aligned}$$

o que nos mostra que a aplicação é coerciva. Para verificarmos que "$a$"é contínua basta aplicar a Desigualdade Triangular, a continuidade da aplicação traço para então obtermos que

$$\Big|a\big((\phi,\omega),(u,v)\big)\Big| \leq C\|(\phi,\omega)\|_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)}\|(u,v)\|_{H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)},$$

e portanto "$a$"é contínua.

Mostremos agora que "$L$"é uma forma linear e contínua. Claramente $L$ é linear, restando apenas mostrar que é contínua. Temos que:

$$|L(\phi,\omega)| \leq \left|\int_\Omega (2f+g)\phi dxdy\right| + \left|\int_{\Gamma_0} m\phi dx\right| + \left|\int_{\Gamma_0} (n+2m+f)\omega dx\right|$$

e então usando a Desigualdade de Holder e a continuidade da aplicação traço temos o desejado.

Pelo Lema de Lax-Milgram resulta que existe uma única $(\phi,\omega) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$ tal que

$$a\big((\phi,\omega),(u,v)\big) = L(u,v),\ \forall (u,v) \in H^1(\Omega)\times H^1(\Gamma_0)$$

Da igualdade obtida acima, considerando um elemento da forma $(u,0)$ com $u \in H^1(\Omega)$ obtemos que $a\big((\phi,\omega),(u,0)\big) = L(u,0)$, ou seja,

$$4\int_\Omega \phi u dxdy + \int_\Omega \nabla\phi.\nabla u dxdy - 2\int_{\Gamma_0} \omega u dx = \int_\Omega (2f+g) u dxdy - \int_{\Gamma_0} m u dx$$

obtendo assim a primeira igualdade de (2.6).

Considerando agora um elemento da forma $(0, v)$ com $v \in H^1(\Gamma_0)$ temos que $a\big((\phi, \omega), (0, v)\big) = L(0, v)$, ou seja,

$$4\int_{\Gamma_0} \omega v dx + \int_{\Gamma_0} \omega_x v_x dx + 2\int_{\Gamma_0} \phi v dx = \int_{\Gamma_0} (n + 2m + f) v dx$$

obtendo a segunda igualdade de (2.6).

Portanto $(\phi, \omega)$ encontrados acima é solução de (2.6). Como $\phi \in H^1(\Omega)$ e $\xi = 2\phi - f$ segue que $\xi \in H^1(\Omega)$. Da mesma maneira se obtém que $\eta \in H^1(\Gamma_0)$.

Da segunda equação de (2.6) e do Teorema (1.75) se obtém que $\omega \in H^2(\Gamma_0)$. Temos ainda, que verifica as condições de contorno $\omega_x(0) = \omega_x(1)$ no sentido clássico, já que $\omega_x \in H^1(\Gamma_0) \subset C[0, 1]$.

Por último, os resultados de regularidade para o operador $-\triangle$, com condições de Neumann não homogênea em $\Omega$ (ver [8] Teorema 5.1.3.5 pag 263), implica que a função $\phi$, solução da primeira equação de (2.6), pertence a $H^2(\Omega)$. As condições de contorno para $\phi$ se cumprem no sentido de traço.

Resulta que existe uma única solução do sistema (2.5) em $D(A)$ e portanto $A+\mathcal{I}$ é maximal. Logo o operador $A + \mathcal{I}$ é maximal monótono como havíamos afirmado.

Finalmente, aplicando o Teorema de Hille-Yosida e a Proposição (1.63), obtemos que o sistema:

$$\begin{cases} Z_t(t) + (A + \mathcal{I})Z(t) = 0, \quad t \in (0, \infty) \\ Z(0) = (\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1) \ \in \mathcal{X}. \end{cases}$$

possui uma única solução $Z(t)$ com seguinte propriedade de regularidade:

$$\begin{array}{l} Z \in C^1([0, \infty), \mathcal{X}) \cap C([0, \infty), D(A)) \ \textit{se} \ Z(0) \in D(A), \\ Z \in C([0, \infty), \mathcal{X}) \ \textit{se} \ Z(0) \ \in \mathcal{X} \end{array}$$

Se denotarmos por $U(t) = e^t Z(t)$, se deduz que $U$ é solução da equação (2.2) e que ainda possui todas as propriedades de regularidade de $Z$. Com isso concluímos a demonstração deste teorema que nos garante a existência e unicidade de solução, bem como a continuidade com respeito aos dados iniciais. $\square$

Definimos a energia do sistema por:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left[|\nabla\Phi|^2 + |\Phi_t|^2\right] dxdy + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_0} \left[|W_x|^2 + |W_t|^2\right] dx$$

Multiplicando a primeira equação de (1) por $\Phi_t$, e integrando por partes se obtém que:

$$0 = \int_{\Omega} (\Phi_{tt} - \Delta\Phi)\Phi_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega} \left[|\nabla\Phi|^2 + |\Phi_t|^2\right] - \int_{\Gamma_0} W_t\Phi_t \tag{2.7}$$

Agora multiplicando a quarta equação de (1) por $W_t$ e integrando por partes se obtém:

$$0 = \int_{\Gamma_0} (W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t)W_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_0} (|W_t|^2 + |W_x|^2) + \int_{\Gamma_0} W_t\Phi_t \tag{2.8}$$

agora somando (2.7) e (2.8) obtemos que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0,$$

o que quer dizer que o sistema tem caráter conservativo e conseqüentemente a energia se conserva ao longo das trajetórias.

# Capítulo 3

# Controlabilidade para Sistemas Unidimensionais

Como já mencionado na introdução deste trabalho, para encontrar a solução do sistema (1) iremos reduzi-lo em uma infinidade de problemas de controles unidimensionais. O presente capítulo tem como objetivo, encontrar tais controles, o que nos permitirá mais adiante, encontrar o controle para o caso bidimensional.

Para encontrar esses controles unidimensionais, primeiro mostraremos que o problema adjunto de (5) está bem posto no espaço de energia $\mathcal{Y} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Logo após usando técnicas de multiplicadores, vamos encontrar alguns resultados de regularidade escondida. Na terceira seção, com as mesmas técnicas vamos obter algumas desigualdade de observabilidade. Na quarta seção, usando a desigualdade de Ingham's, obteremos uma versão refinada de desigualdade de observabilidade. Finalmente, nas últimas seções vamos aplicar HUM (Hilbert Uniqueness Method) e demonstrar o resultado de controlabilidade para o sistema (5).

## 3.1 Existência e Unicidade de Solução do Problema Adjunto

De maneira semelhante ao que fizemos no capítulo anterior, mostraremos nesta seção que o problema adjunto de (5) está bem posto no espaço de energia $\mathcal{Y} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Para tal, considere o sistema:

$$\begin{cases} \eta_{tt} - \eta_{yy} + n^2\pi^2\eta = f & em\ \ (0,1) \times (0,T) \\ \eta_y(1) = 0 & para\ \ t \in\ (0,T) \\ \eta_y(0) = u_t & para\ \ t \in\ (0,T) \\ u_{tt} + n^2\pi^2 u - \eta_t(0) = g & para\ \ t \in\ (0,T) \\ \eta(0) = \eta_0,\ \eta_t(0) = \eta_1 & em\ \ (0,1) \\ u(0) = u_0,\ \ u_t(0) = u_1. \end{cases} \tag{3.1}$$

O sistema (3.1) é o adjunto de (5). As variáveis são $\eta = \eta(y,t)$ e $u = u(t)$. Naturalmente, como os coeficientes do sistema dependem de $n = 0, 1, ...$, as soluções $(\eta, u)$ também dependem de $n$. No entanto, para simplificar as notações não usaremos o índice $n$ para distinguir as soluções de (3.1) para diferentes valores de $n$. O espaço energia para o sistema (3.1) é o espaço:

$$\mathcal{Y} = H^1(0,1) \times L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \tag{3.2}$$

que dotado com o produto escalar:

$$\begin{aligned} ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) \quad = \quad & \int_0^1 ((f_1)_y (g_1)_y + n^2\pi^2 f_1 g_1) dy \\ & + \int_0^1 f_2 g_2 dy + n^2\pi^2 f_3 g_3 + f_4 g_4 \end{aligned} \tag{3.3}$$

é um espaço de Hilbert, quando $n \neq 0$. No caso $n = 0$, (3.3) não define um produto escalar, e neste caso consideremos o produto escalar definido por:

$$\begin{aligned} ((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4)) \quad = \quad & \int_0^1 ((f_1)_y (g_1)_y + f_1 g_1) dy \\ & + \int_0^1 f_2 g_2 dy + f_3 g_3 + f_4 g_4 \end{aligned} \tag{3.4}$$

O nosso próximo passo agora, é mostrar que para cada $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}$ e $(f, g) \in L^1(0, T; L^2(0, 1) \times \mathbb{R})$ o sistema (3.1) possui uma única solução na classe:

$$\eta \in C([0, T]; H^1(0, 1)) \cap C^1([0, T]; L^2(0, 1)); u \in C^1([0, T]; \mathbb{R}) \tag{3.5}$$

Para tal definamos os seguintes operadores:

- $$B_1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow (H^1(0, 1))'$$

$$\langle B_1(\psi, \xi, w, v), \varphi\rangle = \int_0^1 ((\psi)_y(\varphi)_y + n^2\pi^2\psi\varphi)dy + v\varphi(0).$$

- $$C_1 : H^1(0, 1) \times H^1(0, 1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}.$$

$$C_1(\psi, \xi, w, v) = n^2\pi^2 w - \xi(0)$$

Consideremos agora o operador:

$$A^1 : D(A^1) \subset \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}$$

$$D(A^1) = \{(\psi, \xi, w, v) \in \mathcal{Y} : \xi \in H^1(0, 1), \;\; B_1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1),$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial y}(1) = 0, \;\; \frac{\partial \psi}{\partial y}(0) = v\}$$

$$A^1(\psi, \xi, w, v) = (-\xi, B_1(\psi, \xi, w, v), -v, C_1(\psi, \xi, w, v)) \tag{3.6}$$

Com as considerações feitas, temos que $\psi \in H^2(0, 1)$. De fato, como $B_1(\psi, \xi, w, v) \in L^2(0, 1)$ então existe uma função $h \in L^2(0, 1)$ tal que:

$$\int_0^1 (\psi_y\varphi_y)dy - v\varphi(0) = \int_0^1 h\varphi dy \;\;\; \forall \;\; \varphi \in H^1(0, 1)$$

Definimos:

$\tilde{\psi} = \psi - (\frac{y^2}{2} - y)v$ desta forma tem-se que $\tilde{\psi}_y = \psi_y - yv + v$ e portanto

$$\int_0^1 \tilde{\psi}_y\varphi_y = \int_0^1 (\psi_y - yv + v)\varphi_y = \int_0^1 \psi_y\varphi_y - \int_0^1 yv\varphi_y + \int_0^1 v\varphi_y$$

Agora, usando o fato de que $\displaystyle\int_0^1 (\psi_y \varphi_y)dy = \int_0^1 h\varphi dy + v\varphi(0)$ segue que:

$\displaystyle\int_0^1 \tilde{\psi}_y \varphi_y = \int_0^1 h\varphi + v\varphi(0) - \int_0^1 yv\varphi_y + \int_0^1 v\varphi_y$, integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{\psi}_y \varphi_y &= \int_0^1 h\varphi + v\varphi(0) - \left[ vy\varphi|_0^1 - \int_0^1 v\varphi \right] + v\varphi|_0^1 \\
&= \int_0^1 h\varphi + v\varphi(0) - v\varphi(1) + \int_0^1 v\varphi + v\varphi(1) - v\varphi(0) \\
&= \int_0^1 (h+v)\varphi \ \ \forall \ \ \varphi \in H^1(0,1)
\end{aligned}$$

dos extremos segue que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \tilde{\psi}_y \varphi_y &= \int_0^1 (h+v)\varphi \ \ \forall \ \ \varphi \in H^1(0,1) \\
(\tilde{\psi}_y, \varphi_y)_{L^2(0,1)} &= (h+v, \varphi)_{L^2(0,1)} \ \forall \ \ \varphi \in H^1(0,1) \\
(-\tilde{\psi_{yy}}, \varphi)_{L^2(0,1)} &= (h+v, \varphi)_{L^2(0,1)} \ \forall \ \ \varphi \in H^1(0,1)
\end{aligned}$$

Logo $-\tilde{\psi}_{yy} = h + v$, e assim $\tilde{\psi}_{yy} \in L^2(0,1)$ o que implica que $\tilde{\psi} \in H^2(0,1)$ e consequentemente $\psi \in H^2(0,1)$. Onde as condições de contorno tem sentido em $D(A^1)$ como traço.

Se denotarmos $U = (\psi, \xi, V, \zeta)$ e $H = (0, f, 0, g)$, o sistema (3.1) se escreve:

$$\begin{cases} U_t + A^1 U = H \\ U(0) = U_0 \\ U(t) \in D(A^1), \forall \in [0,T] \end{cases} \tag{3.7}$$

De fato, de $U_t + A^1 U = H$, temos que:

$$(\psi_t, \xi_t, V_t, \zeta_t) + (-\xi, B_1(\psi, \xi, V, \zeta), -\zeta, C_1(\psi, \xi, V, \zeta)) = (0, f, 0, g)$$

ou ainda

$$\psi_t - \xi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \psi_t = \xi \tag{3.8}$$

$$\xi_t + B_1(\psi, \xi, V, \zeta) = f \tag{3.9}$$

$$V_t - \zeta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad V_t = \zeta \tag{3.10}$$

$$\zeta_t + C_1(\psi, \xi, V, \zeta) = g \qquad \Rightarrow \qquad \zeta_t + n^2\pi^2\xi(0) = g \tag{3.11}$$

De (3.8) e (3.9) obtemos:

$$\psi_{tt} + B_1(\psi, \xi, V, \zeta) = f, \tag{3.12}$$

Considere $\varphi \in \mathcal{D}(0,1)$, então:

$$\begin{aligned}
\langle \psi_{tt}, \varphi \rangle + \langle B_1(\psi, \xi, V, \zeta), \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \ \forall \ \varphi \ \mathcal{D}(0,1) \\
\Rightarrow \ \langle \psi_{tt}, \varphi \rangle + \int_0^1 ((\psi)_y(\varphi)_y + n^2\pi^2\psi\varphi)dy &= \langle f, \varphi \rangle \ \forall \ \varphi \ \mathcal{D}(0,1) \\
\Rightarrow \ \langle \psi_{tt}, \varphi \rangle + \langle \psi_y, \varphi_y \rangle + \langle n^2\pi^2\psi, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \ \forall \ \varphi \ \mathcal{D}(0,1) \\
\Rightarrow \ \langle \psi_{tt}, \varphi \rangle - \langle \psi_{yy}, \varphi \rangle + \langle n^2\pi^2\psi, \varphi \rangle &= \langle f, \varphi \rangle \ \forall \ \varphi \ \mathcal{D}(0,1)
\end{aligned}$$

onde as dualidades aqui são dadas em $L^2(0,1)$. Portanto $\psi_{tt} - \psi_{yy} + n^2\pi^2\psi = f$ satisfazendo a primeira equação do sistema (3.1).

De (3.8) e (3.11) temos que $V_{tt} + n^2\pi^2 V - \psi_t(0) = g$, obtendo assim a quarta equação de (3.1).

Como $U(t) \in D(A^1), \forall t \in [0,T]$, segue $\psi_y(1) = 0$ e $\psi_y(0) = V_t$. Portanto com as notações acima o sistema (3.1) se escreve como (3.7).

Agora com as considerações feitas acima, estamos prontos para enunciar e demonstrar o principal teorema desta seção.

**Teorema 3.1.** *Se $A^1$ é o operador definido em (3.6) então:*

*(i) O operador $A^1$ gera um semigrupo de contrações em $\mathcal{Y}$, denotado $\{S^1(t)\}_{t\geq 0}$*

*(ii) Soluções fortes: Se $U_0 \in D(A^1)$ e $H = (0, f, 0, g) \in W^{1;1}(0,T;\mathcal{Y})$ então existe uma única solução forte $U$ da equação (3.7) com a seguinte propriedade:*

$$U \in C^1([0,T], \mathcal{Y}) \cap C([0,T], D(A^1)).$$

*(iii) Soluções fracas: Se $U_0 \in \mathcal{Y}$ e $H = (0, f, 0, g) \in L^1(0,T;\mathcal{Y})$ então existe uma única solução da equação (3.7) com as propriedades:*

$$U \in C([0,T], \mathcal{Y}), \quad U(t) = S^1(t)U_0 + \int_0^t S^1(t-s)H(s)ds.$$

*Para quaisquer duas soluções fracas, $U$ e $\hat{U}$, se tem a seguinte propriedade de continuidade com respeito aos dados iniciais e aos termos não homogêneos:*

$$\left\|U(t)-\hat{U}(t)\right\|_{\mathcal{Y}} \leq \left\|U_0-\hat{U}_0\right\|_{\mathcal{Y}} + \left\|H-\hat{H}\right\|_{L^1(0,T;\mathcal{Y})}$$

*Se $H-\hat{H}=0$ a desigualdade acima se converte em uma igualdade e expressa a conservação da energia do sistema.*

**Demonstração**: Primeiro mostraremos que $A^1$ é maximal monótono. Mostraremos então que $A^1$ é monótono, para isso vamos analisar o produto escalar:

$$\begin{aligned}
&(A^1(\psi,\xi,w,v),(\psi,\xi,w,v)) = ((-\xi, B_1(\psi,\xi,w,v), -v, C_1(\psi,\xi,w,v)),(\psi,\xi,w,v))\\
&= \int_0^1 (-\psi_y\xi_y - n^2\pi^2\psi\xi)dy + \int_0^1 B_1(\psi,\xi,w,v)\xi dy - n^2\pi^2 vw + C_1(\psi,\xi,w,v)v\\
&= \int_0^1 (-\psi_y\xi_y - n^2\pi^2\psi\xi)dy + \int_0^1 B_1(\psi,\xi,w,v)\xi dy - n^2\pi^2 vw + n^2\pi^2 vw - \xi(0)v\\
&= \xi(0)v - \xi(0)v = 0,
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato que $B_1(\psi,\xi,w,v)\in L^2(0,1)$. Então dos extremos segue que $(A^1(\psi,\xi,w,v),(\psi,\xi,w,v))=0$, ou seja $A^1$ é um operador monótono.

Mostraremos agora que $A^1$ é um operador maximal. De fato consideremos $(f,g,h,i)\in\mathcal{Y}$ então devemos encontrar $(\psi,\xi,w,v)\in D(A^1)$ tal que:

$$(A^1+\mathcal{I})(\psi,\xi,w,v) = (f,g,h,i), \tag{3.13}$$

ou seja

$$(-\xi+\psi, B_1(\psi,\xi,w,v)+\xi, -v+w, C_1(\psi,\xi,w,v)+v) = (f,g,h,i)$$

$$-\xi+\psi = f \qquad \Rightarrow \qquad \xi = \psi - f \tag{3.14}$$

$$B_1(\psi,\xi,w,v)+\xi = g \tag{3.15}$$

$$-v+w = h \tag{3.16}$$

$$C_1(\psi,\xi,w,v)+v = i \qquad \Rightarrow n^2\pi^2 w - \xi(0) + v = i \tag{3.17}$$

de (3.14) e (3.15) obtemos

$$B_1(\psi,\xi,w,v)=g-\psi+f$$

e consequentemente

$$(B_1(\psi,\xi,w,v),\phi)=(g,\phi)-(\psi,\phi)+(f,\phi)\ \ \forall\ \ \phi\in H^1(0,1) \tag{3.18}$$

e de (3.14), (3.16) e (3.17) temos que

$$(n^2\pi^2+1)w-\psi(0)=i+h-f(0) \tag{3.19}$$

Logo de (3.18) e (3.19), concluímos que resolver (3.13) se reduz a encontrar $\psi\in H^1(0,1)$ e $w\in\mathbb{R}$ solução de:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1(\psi_y\phi_y+n^2\pi^2\psi\phi)dy+\int_0^1\psi\phi dy+w\phi(0) \\ \qquad\qquad \displaystyle=\int_0^1 f\phi dy+\int_0^1 g\phi dy+h\phi(0)\ \ \forall\ \phi\in H^1(0,1) \\ (n^2\pi^2+1)w-\psi(0)=i+h-f(0) \end{cases} \tag{3.20}$$

Consideremos agora a forma bilinear $a:\big(H^1(0,1)\times\mathbb{R}\big)\times\big(H^1(0,1)\times\mathbb{R}\big)\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por:

$$a\big((\psi,w),(\phi,v)\big)=\int_0^1\big(\psi_y\phi_y+n^2\pi^2\psi\phi\big)dy+\int_0^1\psi\phi dy+(n^2\pi^2+1)wv+w\phi(0)-v\psi(0).$$

A forma bilinear "$a$" definida acima é uma forma bilinear coerciva pois,

$$\begin{aligned} a\big((\psi,w),(\psi,w)\big)&=\int_0^1\big(\psi_y^2+n^2\pi^2\psi^2\big)dy+\int_0^1\psi^2dy+(n^2\pi^2+1)w^2+w\psi(0)-w\psi(0). \\ &\geq\big\|(\psi,w)\big\|^2_{H^1(0,1)\times\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Agora, usando a Desigualdade de Holder e o fato de que $H^1(0,1)\hookrightarrow C[0,1]$ obtemos

$$\big|a\big((\psi,w),(\phi,v)\big)\big|\leq C\big\|(\psi,w)\big\|_{H^1(0,1)\times\mathbb{R}}\big\|(\phi,v)\big\|_{H^1(0,1)\times\mathbb{R}}$$

donde concluímos que "$a$" é uma forma bilinear contínua.

Consideremos ainda a forma linear:

$$\big\langle L, (\phi, v)\big\rangle = \int_0^1 f\phi dy + \int_0^1 g\phi dy + h\phi(0) + (i + h - f(0))v$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, e usando que $H^1(0,1) \hookrightarrow C[0,1]$ segue que L é linear e contínua.

Pelo Lema de Lax-Milgram resulta que existe uma única $(\psi, w) \in H^1(0,1) \times \mathbb{R}$ tal que:

$$a\big((\psi, w), (\phi, v)\big) = \big\langle L, (\phi, v)\big\rangle \quad \forall \quad (\phi, v) \in H^1(0,1) \times \mathbb{R}$$

Considerando elemento da forma $(\phi, 0) \in H^1(0,1) \times \mathbb{R}$, temos que: $a\big((\psi, w), (\phi, 0)\big) = \big\langle L, (\phi, 0)\big\rangle$, ou seja,

$$\int_0^1 (\psi_y \phi_y + n^2\pi^2 \psi\phi) dy + \int_0^1 \psi\phi dy + w\phi(0) = \int_0^1 f\phi dy + \int_0^1 g\phi dy + h\phi(0) \quad (3.21)$$

Por outro lado, temos que $a\big((\psi, w), (0,1)\big) = \big\langle L, (0,1)\big\rangle$, ou seja:

$$(n^2\pi^2 + 1)w - \psi(0) = i + h - f(0) \quad (3.22)$$

Logo de (3.21) e (3.22) temos a existência de uma $\psi \in H^1(0,1)$ e $w \in \mathbb{R}$ que verifica (3.20). Devido a definição do domínio do operador $A^1$, tem-se que $(\psi, \xi, w, v) \in D(A^1)$. Assim obtemos que o operador <u>$A^1$ é maximal e monótono</u> em $\mathcal{Y}$. Aplicando as Proposições (1.61), (1.19), (1.62) e (1.63) obtemos os demais resultados mencionados no teorema. □

**Observação 3.2.** *No caso $n = 0$ o operador $A^1$ correspondente não é maximal em $\mathcal{Y}$. Para contornar esse problema, decompomos o espaço $\mathcal{Y}$ em soma direta de dois subespaços $\mathcal{Y} = \mathcal{Y}^0 \oplus \mathcal{Y}^1$ onde:*

$$\mathcal{Y}^1 = \{(c_1, 0, c_2, 0) : c_1, c_2 \in \mathbb{R}\}$$

$$\mathcal{Y}^0 = \left\{ (\psi_0, \psi_1, V_0, V_1) \in \mathcal{Y} : \int_0^1 \psi_1 dy + V_0 = 0, \quad V_1 - \psi_0(0) = 0 \right\}$$

*Desta forma, o operador $A^1$ é maximal e monótono em $\mathcal{Y}^0$ e todas as propriedades do Teorema (3.1) são válidas se substituirmos $\mathcal{Y}$ por $\mathcal{Y}^0$.*

A energia do sistema (3.1) e dada por:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ |\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2\eta^2 \right] dy + \frac{1}{2} \left[ |u_t|^2 + n^2\pi^2 |u|^2 \right] \tag{3.23}$$

e satisfaz

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \int_0^1 f(y,t)\eta_t(y,t)dy + g(t)u_t(t). \tag{3.24}$$

De fato, multiplicando a primeira equação do sistema (3.1) por $\eta_t$ e integrando por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f\eta_t dy &= \int_0^1 \eta_{tt}\eta_t dy - \int_0^1 \eta_{yy}\eta_t dy + \int_0^1 n^2\phi^2\eta\eta_t dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\eta_t|^2 dy - \left[ \eta_t\eta_y \Big|_0^1 - \int_0^1 \eta_y\eta_{ty} dy \right] + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 n^2\pi^2|\eta|^2 dy \\
&= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big( |\eta_t|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2 \Big) dy - \eta_t(1,t)\eta_y(1,t) + \eta_t(0,t)\eta_y(0,t) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 |\eta_y|^2 dy
\end{aligned}$$

ou ainda:

$$+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 \Big( |\eta_t|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2 + |\eta_y|^2 \Big) dy + \eta_t(0,t)\eta_y(0,t) = \int_0^1 f\eta_t dy \tag{3.25}$$

Agora multiplicando a quarta equação de (3.1) por $u_t$ obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[ |u_t|^2 + n^2\pi^2|u|^2 \Big] - \eta_t(0)u_t = gu_t \tag{3.26}$$

Agora somando (3.25) e (3.26) obtemos (3.24).

Portanto, quando $f \equiv 0$, $g \equiv 0$ a energia $\varepsilon$ permanece constante ao longo das trajetórias.

Observemos que quando $n \geq 1$ a raiz quadrada da energia define uma norma em $\mathcal{Y}$ equivalente a norma canônica $\|.\|_{\mathcal{Y}}$ de $\mathcal{Y}$:

$$\|(u, v, \omega, z)\|_{\mathcal{Y}} = \left[\int_0^1 \left(|u_y|^2 + |u|^2 + |v|^2\right) dy + \omega^2 + z^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Na seção seguinte iremos obter um resultado de regularidade escondida que será bastante utilizado no decorrer deste trabalho.

## 3.2 Regularidade Escondida

O resultado de regularidade escondida que demonstraremos agora, além de fornecer uma estimativa que será bastante utilizada ao longo deste trabalho, nos permitirá concluir que a função $u$, do par $(\eta, u)$, onde $(\eta, u)$ é a solução de (3.1) é mais regular do que até então nos era garantido.

**Proposição 3.3.** - *Para todo $T > 0$ existe uma constante $C(T) > 0$ que não dependente de $n = 0, 1, 2, ...$ tal que*

$$\begin{aligned}\left(\int_0^T |u_{tt}| dt\right)^2 \quad &+ \quad \int_0^T \left[|u_t|^2 + (1 + n^4\pi^4)u^2 + (1 + n^2\pi^2)\eta^2(0, t)\right] dt \\ &\leq \quad \mathrm{C}(n^4 + 1)\left[\ \|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{Y}} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))^2} + \|g\|^2_{L^1(0,T)}\right].\end{aligned}$$

*para todo $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}$, $f \in L^1(0, T; L^2(0, 1))$ e $g \in L^1(0, T)$. Se $g \in L^2(0, T)$, então $u \in H^2(0, T)$ e teremos que*

$$\int_0^T |u_{tt}|^2 dt \leq \mathrm{C}(n^4 + 1)\left[\|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1\|^2_{\mathcal{Y}} + \|f\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))^2} + \|g\|^2_{L^2(0,T)})\right].$$

**Demonstração**:

Consideremos uma sucessão de dados regulares $(\eta_0^m, \eta_1^m, u_0^m, u_1^m)_{m\geq 0} \subset D(A^1)$, tal que $(\eta_0^m, \eta_1^m, u_0^m, u_1^m) \longrightarrow (\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)$ em $\mathcal{Y}$ quando $m \to \infty$, $(f^m)_{m\geq 0} \subset$

$W^{1,1}(0,T;L^2(0,1))$, $\quad f^m \longrightarrow f$ em $L^1(0,T;L^2(0,1))$ quando $m \to +\infty$. $\quad (g^m)_{m\geq 0} \subset W^{1,1}(0,T)$, $g^m \longrightarrow g$ em $L^1(0,T)$ quando $m \to +\infty$.

Com estes dados o Teorema (3.1) nos garante a existência de solução forte para cada $m \in \mathbb{N}$ $\ (\eta^m, (\eta^m)_t, u^m, (u^m)_t) \in C^1([0,T],\mathcal{Y}) \cap C([0,T], D(A^1))$, que satisfaz a equação em quase todo ponto:

$$\left\{\begin{array}{ll} (\eta^m)_{tt} - (\eta^m)_{yy} + n^2\pi^2\eta^m = f^m & em\ \ (0,1)\times(0,T) \\ (\eta^m)_y(1) = 0 & para\ \ t\in\ (0,T) \\ (\eta^m)_y(0) = (u^m)_t & para\ \ t\in\ (0,T) \\ (u^m)_{tt} + n^2\pi^2 u^m - (\eta^m)_t(0) = g^m & para\ \ t\in\ (0,T) \\ \eta^m(0) = \eta_0^m,\ \ \eta_t(0) = \eta_1^m & em\ \ (0,1) \\ u^m(0) = u_0^m,\ \ (u^m)_t(0) = u_1^m. & sobre\quad \Gamma_0 \end{array}\right. \tag{3.27}$$

Agora vamos obter estimativas para estas soluções, aplicando técnicas de multiplicadores. Multiplicamos a primeira equação de (3.21) por $(1-y)(\eta^m)_y$ e integrando por parte em $(0,T)\times(0,1)$ :

$$\int_0^T\int_0^1 f^m(1-y)(\eta^m)_y = \int_0^T\int_0^1 [(\eta^m)_{tt} - (\eta^m)_{yy} + n^2\pi^2\eta^m](1-y)(\eta^m)_y$$

$$= \int_0^T\int_0^1 (\eta^m)_{tt}(1-y)(\eta^m)_y - \int_0^T\int_0^1 (\eta^m)_{yy}(1-y)(\eta^m)_y + \int_0^T\int_0^1 (n^2\pi^2\eta^m)(1-y)(\eta^m)_y$$

$$= \int_0^1 (\eta^m)_t(1-y)(\eta^m)_y\Big|_0^T - \int_0^T\int_0^1 (\eta^m)_t(1-y)(\eta^m)_{yt} - \int_0^T\int_0^1 (\eta^m)_{yy}(1-y)(\eta^m)_y$$

$$+ \int_0^T\int_0^1 n^2\pi^2\eta^m(1-y)(\eta^m)_y$$

$$= \int_0^1 (\eta^m)_t(1-y)(\eta^m)_y\Big|_0^T - \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1 (1-y)\Big[((\eta^m)_t)^2 + ((\eta^m)_y)^2 - n^2\pi^2(\eta^m)^2\Big]_y$$

$$= \int_0^1 (\eta^m)_t(1-y)(\eta^m)_y\Big|_0^T - \frac{1}{2}\Big\{\int_0^T (1-y)\Big[((\eta^m)_t)^2 + ((\eta^m)_y)^2 - n^2\pi^2(\eta^m)^2\Big]\Big|_0^1$$

$$+ \int_0^T\int_0^1 \Big[((\eta^m)_t)^2 + ((\eta^m)_y)^2 - n^2\pi^2(\eta^m)^2\Big]\Big\}$$

Disso resulta que:

$$\frac{1}{2}\int_0^T \Big(((\eta^m)_t)^2 + ((\eta^m)_y)^2 - n^2\pi^2(\eta^m)^2\Big)(0) = -\int_0^1 (\eta^m)_t(1-y)(\eta^m)_y\Big|_0^T$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1 \Big(((\eta^m)_t)^2 + ((\eta^m)_y)^2 - n^2\pi^2(\eta^m)^2\Big) + \int_0^T\int_0^1 f^m(1-y)(\eta^m)_y \tag{3.28}$$

Veja agora que o segundo membro da igualdade acima tem sentido para soluções fracas que pertencem $C([0,T];\mathcal{Y})$ se $f \in L^1(0,T;L^2(0,1))$. Como $\eta \in C\big([0,T],H^1(0,1)\big)$, usando a unicidade do limite e a relação $\|U-\widehat{U}\|_{\mathcal{Y}} \leq \|U_0-\widehat{U}_0\| + \|H-\widehat{H}_0\|$ obtida no Teorema (3.1) e passando o limite em (3.28) obtemos $\displaystyle\int_0^T (\eta_t)^2(0) < +\infty$.

Agora como $u_{tt} = g - n^2\pi^2 u + \eta_t(0)$ se obtém que $u \in W^{2,1}(0,T)$ se $g \in L^1(0,T)$ e $u \in H^2(0,T)$ se $g \in L^2(0,T)$.

**Observação 3.4.** *Nesse momento, podemos observar que $u$ é mais regular do que tínhamos inicialmente. De fato, o Teorema (3.1) nos garantia somente que $u \in C^1[0,T]$ e no entanto o resultado anterior nos assegura que $u \in W^{2,1}(0,T)$. Este é o resultado de regularidade adicional que havíamos mencionado no início desta seção.*

O nosso próximo passo agora, é obter estimativas para a norma. Passando o limite em (3.28) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \Big((\eta_t)^2 + ((\eta_y)^2 - n^2\pi^2\eta^2\Big)(0) &= \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1 \Big((\eta_t)^2 + ((\eta_y)^2 - n^2\pi^2\eta^2\Big) \\
&\quad - \int_0^1 \eta_t(1-y)\eta_y\Big|_0^T + \int_0^T\int_0^1 f(1-y)\eta_y \\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_0^1 \Big((\eta_t)^2 + (\eta_y)^2 - n^2\pi^2\eta^2\Big) + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big((\eta_t)^2 + (\eta_y)^2\Big)(0) \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_0^1 \Big((\eta_t)^2 + (\eta_y)^2\Big)(T) + \int_0^T \Big[\Big(\int_0^1 f^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_0^1 (\eta_y)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{1}{2}T\big\|\eta_t\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \frac{1}{2}T\big\|\eta_y\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + n^2\pi^2\frac{1}{2}T\big\|\eta\big\|^2_{C([0,T],H^1)} \\
& + \big\|\eta_t\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \frac{T+1}{2}\big\|\eta_y\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \big\|f\big\|^2_{L^1(0,T;L^2)} \\
\leq\ & \frac{T+4}{2}\Big(\big\|\eta_t\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \big\|\eta\big\|^2_{C([0,T],H^1)} + n^2\pi^2\big\|\eta\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \big\|f\big\|^2_{L^1(0,T;L^2)}\Big)
\end{aligned}
$$

Tomando em conta a relação dada no ítem (iii) do Teorema (3.1) se deduz que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \Big((\eta_t)^2 + (\eta_y)^2 + n^2\pi^2\eta^2\Big)(0) \ \leq\ & \frac{T+4}{2}\Big(\big\|\eta_t\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + (2n^2\pi^2+1)\big\|\eta\big\|^2_{C([0,T],H^1)} \\
& + n^2\pi^2\big\|\eta\big\|^2_{C([0,T],L^2)} + \big\|f\big\|^2_{L^1(0,T;L^2)}\Big)
\end{aligned}
$$

$$\leq \frac{(2n^2\pi^2+1)(T+4)}{2}\Big(\|(\eta^0,\eta^1,u^0,u^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|^2_{L^1(0,T;L^2)} + \|g\|^2_{L^1(0,1)}\Big)$$

Por outro lado, como $u_{tt} = g - n^2\pi^2 u + \eta_t(0)$ e $u_t = \eta_y(0)$ se obtém:

$$
\begin{aligned}
&\left(\int_0^T |u_{tt}|\right)^2 + \int_0^T \left((u_t)^2 + n^4\pi^4u^2\right) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & \left(\int_0^T |g - n^2\pi^2u + \eta_t(0)|\right)^2 + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & \left(\int_0^T |g|\right)^2 + 2\int_0^T |g|\left(\int_0^T n^2\pi^2|u| + \int_0^T |\eta_t(0)|\right)\\
&\qquad + \left(\int_0^T n^2\pi^2|u| + \int_0^T |\eta_t(0)|\right)^2\\
&\qquad + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & \left(\int_0^T |g|\right)^2 + \left(\int_0^T |g|\right)^2 + \left(\int_0^T n^2\pi^2|u| + \int_0^T |\eta_t(0)|\right)^2\\
&\qquad + \left(\int_0^T n^2\pi^2|u| + \int_0^T |\eta_t(0)|\right)^2\\
&\qquad + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & 2\left(\int_0^T |g|\right)^2 + 2\left(\int_0^T n^2\pi^2|u| + \int_0^T |\eta_t(0)|\right)^2 + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2)\\
&\qquad + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & 2\left(\int_0^T |g|\right)^2 + 2\left[\left(\int_0^T n^2\pi^2|u|\right)^2 + 2\int_0^T n^2\pi^2|u|\int_0^T |\eta_t(0)| + \left(\int_0^T |\eta_t(0)|\right)^2\right]\\
&\qquad + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & 2\left(\int_0^T |g|\right)^2 + 2\left[T\int_0^T (n^2\pi^2u)^2 + T\int_0^T (n^2\pi^2u)^2 + T\int_0^T \eta_t^2(0) + T\int_0^T \eta_t^2(0)\right]\\
&\qquad + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2) + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & 2\left(\int_0^T |g|\right)^2 + 4T\int_0^T (n^2\pi^2u)^2 + 4T\int_0^T \eta_t^2(0) + \int_0^T (\eta_y)^2(0) + \int_0^T (n^4\pi^4u^2)\\
&\qquad + n^2\pi^2\int_0^T \eta^2(0)\\
\leq\ & 4(T+1)\left[\left(\int_0^T |g|\right)^2 + \int_0^T (n^2\pi^2u)^2 + \int_0^T \left((\eta_t)^2 + (\eta_y)^2 + n^2\pi^2\eta^2\right)(0)\right]
\end{aligned}
$$

Onde além da Desigualdade de Schwarz e da Desigualdade Triangular, usamos ainda a desigualdade $2ab \leq a^2 + b^2$. E portanto temos que:

$$\left(\int_0^T |u_{tt}|\right)^2 + \int_0^T \left(|u_t|^2 + (1+n^4\pi^4)u^2 + (1+n^2\pi^2)\eta^2(0,t)\right) \leq$$
$$(2n^4\pi^4+1)4(T+1)(T+4)\left(\|(\eta^0,\eta^1,u^0,u^1)\|_{\mathcal{Y}}^2 + \|f\|_{L^1(0,T;L^2)}^2 + \|g\|_{L^1(0,T)}\right)$$

Como queríamos.

De maneira análoga se obtém a desigualdade no caso em que $g \in L^2(0,T)$. $\square$

Com isto encerramos esta seção e agora buscaremos algumas desigualdade de observabilidade.

## 3.3 Desigualdade da Observabilidade

Neste parágrafo vamos considerar o sistema adjunto (3.1) no caso particular onde $f \equiv 0$ e $g \equiv 0$. Mais precisamente, assuma que $\eta$ e $u$ seja solução de:

$$\begin{cases} \eta_{tt} - \eta_{yy} + n^2\pi^2\eta = 0 & em\ \ (0,1)\times(0,T) \\ \eta_y(1) = 0 & para\ \ t \in\ (0,T) \\ \eta_y(0) = u_t & para\ \ t \in\ (0,T) \\ u_{tt} + n^2\pi^2 u - \eta_t(0) = 0 & para\ \ t \in\ (0,T) \\ \eta(0) = \eta^0,\ \ \eta_t(0) = \eta^1 & em\ \ (0,1) \\ u(0) = u^0,\ \ u_t(0) = u^1. \end{cases} \tag{3.29}$$

Demonstraremos agora um resultado de observabilidade, o qual nos fornecerá algumas observações que irão nos auxiliar na construção dos controles para os casos unidimensionais e conseqüentemente para o caso bidmensional.

**Proposição 3.5.** *Dado $T > 2$, então existe uma constante $C > 0$ a qual independe de n=0,1,2... tal que:*

$$2\varepsilon(0) + \|\eta_0\|_{L^2(0,1)}^2 + |u_0|^2 \leq Ce^{2n\pi}\int_0^T \Big[|u_{tt}|^2 + |u_t|^2 + (1+n^4\pi^4)|u|^2 + (1+n^2\pi^2)|\eta(0,t)|^2\Big]dt \tag{3.30}$$

*para toda solução de (3.29).*

**Demonstração**: Primeiramente vamos definir a seguinte função:

$G(y) : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, pondo-se:

$$G(y) = \frac{1}{2}\int_y^{T-y} \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dt$$

Desta forma temos que:

$$G(0) = \frac{1}{2}\int_0^{T} \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](0,t)dt \tag{3.31}$$

Agora aplicando a regra de Leibniz, segue que:

$$\begin{aligned} G'(y) \;\; = \;\; & \frac{1}{2}\int_y^{T-y} \Big[2\eta_t\eta_{ty} + 2\eta_y\eta_{yy} + 2n^2\pi^2\eta\eta_y\Big](y,t)dt \\ & + \frac{1}{2}\Big[|\eta_t(y,T-y)|^2 + |\eta_y(y,T-y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,T-y)|^2\Big].(-1) \\ & - \frac{1}{2}\Big[|\eta_t(y,y)|^2 + |\eta_y(y,y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,y)|^2\Big].(1) \end{aligned}$$

integrando por partes o termo $\eta_t\eta_{ty}$ teremos:

$$\int_y^{T-y} \eta_t(y,t)\eta_{ty}(y,t)dt = \eta_y(y,t)\eta_t(y,t)\Big|_{t=y}^{t=T-y} - \int_y^{T-y} \eta_y(y,t)\eta_{tt}(y,t)dt$$

Portanto;

$$\begin{aligned} G'(y) \;\; = \;\; & \int_y^{T-y} \Big[\eta_{yy} - \eta_{tt} + n^2\pi^2\eta\Big]\eta_y(y,t) + \eta_y(y,t)\eta_t(y,t)\Big|_{t=y}^{t=T-y} \\ & - \frac{1}{2}\Big[|\eta_t(y,T-y)|^2 + |\eta_y(y,T-y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,T-y)|^2 \\ & + |\eta_t(y,y)|^2 + |\eta_y(y,y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,y)|^2\Big] \end{aligned} \tag{3.32}$$

Como $(\eta, u)$ é solução de (3.29), temos que $\eta_{tt} - \eta_{yy} + n^2\pi^2\eta = 0$ o que implica que $\eta_{yy} = \eta_{tt} + n^2\pi^2\eta$ logo temos que:

$$\int_y^{T-y} \Big[\eta_{yy} - \eta_{tt} + n^2\pi^2\eta\Big]\eta_y(y,t)dt = 2n^2\pi^2\int_y^{T-y} \eta\eta_y(y,t)dt \tag{3.33}$$

onde na igualdade acima substituímos $\eta_{yy}$ por $\eta_{tt} + n^2\pi^2\eta$.

Agora usando as desigualdades

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \qquad e \qquad -ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

obtemos que:

$$\eta_y(y,t)\eta_t(y,t)\Big|_{t=y}^{t=T-y} - \frac{1}{2}\Big[|\eta_t(y,T-y)|^2 + |\eta_y(y,T-y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,T-y)|^2$$
$$+|\eta_t(y,y)|^2 + |\eta_y(y,y)|^2 + n^2\pi^2|\eta(y,y)|^2\Big] \leq 0 \qquad (3.34)$$

Combinando (3.33), (3.34) com (3.32) deduzimos que:

$$G'(y) \leq 2n^2\pi^2 \int_y^{T-y} \eta\eta_y(y,t)dt.$$

Observemos da desigualdade acima que se $n = 0$ tem se que $G'(y) \leq 0$ e portanto $G'(y) \leq 2n\pi G(y)$. No caso em que $n \neq 0$, levando em conta a desigualdade

$$ab \leq \frac{1}{\nu}\ a^2 + \frac{\nu}{4}\ b^2 \quad \forall \quad \nu > 0$$

segue que:

$$G'(y) \leq 2n^2\pi^2 \int_y^{T-y} \Big[\frac{1}{\nu}\ |\eta_y|^2 + \frac{\nu}{4}|\eta|^2\Big](y,t)dt \ \ \forall \ \ \nu > 0.$$

Em particular para $\nu = 2n\pi$, ou seja,

$$G'(y) \leq 2n^2\pi^2 \int_y^{T-y} \Big[\frac{1}{2n\pi}\ |\eta_y|^2 + \frac{2n\pi}{4}|\eta|^2\Big](y,t)dt \ \ ou \ \ ainda$$
$$G'(y) \leq n\pi \int_y^{T-y} \Big[|\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dt \ \leq \ 2n\pi G(y)$$

Dos extremos temos que $G'(y) \leq 2n\pi G(y)$, e portanto

$$G'(y) - 2n\pi G(y) \leq 0 \qquad (3.35)$$

Multiplicando (3.35) por $e^{-2n\pi y}$ temos que $G'(y)e^{-2n\pi y} - 2n\pi e^{-2n\pi y}G(y) \leq 0$, ou seja, $\Big(G(y)e^{-2n\pi y}\Big)' \leq 0$, integrando esta última desigualdade no intervalo $[0,y]$,com $y \ \in (0,1)$ segue que:

$$G(s)e^{-2n\pi s}\Big|_0^y = G(y)e^{-2n\pi y} - G(0) \leq 0$$

o que implica que

$$G(y) \leq e^{2n\pi} G(0) \quad \forall\, y \ \in \ (0,1), \tag{3.36}$$

já que a função exponencial é uma função crescente e $y$ é menor do que um. Portanto de (3.36) tem-se

$$\int_0^1 G(y)dy \leq e^{2n\pi} G(0), \tag{3.37}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \int_y^{T-y} \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dtdy$$
$$\leq \frac{1}{2}e^{2n\pi}\int_0^T \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](0,t)dt \tag{3.38}$$

Como $\Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big] \geq 0$ e a amplitude do intervalo $(y, T-y)$ é maior do que a amplitude do intervalo $(1, T-1)$ segue que:

$$\int_0^1 \int_1^{T-1} \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dtdy$$
$$\leq \int_0^1 \int_y^{T-y} \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dtdy \tag{3.39}$$

do Teorema de Fubini e de (3.38) e (3.39) resulta que:

$$\int_1^{T-1} \int_0^1 \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](y,t)dtdy \leq e^{2n\pi}\int_0^T \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](0,t)dt$$

Como $f \equiv 0$ e $g \equiv 0$ temos que a energia permanece constante e portanto

$$(T-2)\varepsilon(T)$$
$$= \int_1^{T-1} \varepsilon(t)dt = \frac{1}{2}\int_1^{T-1} \left\{ \left[\int_0^1 |\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\right] dy + |u_t|^2 + n^2\pi^2u^2 \right\} dt$$
$$\overset{por(3.39)}{\leq} \frac{1}{2}\int_0^1 G(y)dy + \frac{1}{2}\int_1^{T-1} \Big[|u_t|^2 + n^2\pi^2u^2\Big]dt$$
$$\overset{por(3.37)}{\leq} \frac{e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](0,t)dt + \frac{1}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + n^2\pi^2u^2\Big]dt$$

onde dos extremos tem-se

$$(T-2)\varepsilon(T) \leq \frac{e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[|\eta_t|^2 + |\eta_y|^2 + n^2\pi^2|\eta|^2\Big](0,t)dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + n^2\pi^2u^2\Big]dt \tag{3.40}$$

Temos que $u_{tt} = -n^2\pi^2 u + \eta_t(0)$ e $u_t = \eta_y(0)$, substituindo essas identidades na desigualdade (3.40) segue que:

$$\begin{aligned}
(T-2)\varepsilon(t) &\leq \frac{e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + |u_{tt} + n^2\pi^2 u|^2 + n^2\pi^2\eta^2(0,t)\Big]dt \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + n^2\pi^2 u^2\Big]dt \\
&\leq \frac{e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + 2|u_{tt}|^2 + 2n^4\pi^4|u|^2 + n^2\pi^2\eta^2(0,t)\Big]dt \\
&\qquad + \frac{1}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + n^2\pi^2 u^2\Big]dt \\
&\leq \frac{e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[2|u_t|^2 + 2|u_{tt}|^2 + 3n^4\pi^4|u|^2 + n^2\pi^2\eta^2(0,t)\Big]dt \\
&\leq \frac{3e^{2n\pi}}{2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + n^4\pi^4|u|^2 + n^2\pi^2\eta^2(0,t)\Big]dt
\end{aligned}$$

Usando agora a conservação da energia, dos extremos segue que:

$$2\varepsilon(0) \leq \frac{3e^{2n\pi}}{T-2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + n^4\pi^4|u|^2 + n^2\pi^2\eta^2(0,t)\Big]dt$$

Observando ainda que $2\varepsilon(0) + \|\eta^0\|^2_{L^2(0,1)} + |u^0|^2 \leq\ 3\varepsilon(0)$ da desigualdade acima temos:

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon(0) + \|\eta^0\|^2_{L^2(0,1)} + |u^0|^2 \leq \\
&\qquad \frac{6e^{2n\pi}}{T-2}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + (1+n^4\pi^4)|u|^2 + (1+n^2\pi^2)\eta^2(0,t)\Big]dt
\end{aligned}$$

ou seja;

$$\begin{aligned}
&2\varepsilon(0) + \|\eta^0\|^2_{L^2(0,1)} + |u^0|^2 \leq \\
&\qquad Ce^{2n\pi}\int_0^T \Big[|u_t|^2 + |u_{tt}|^2 + (1+n^4\pi^4)|u|^2 + (1+n^2\pi^2)\eta^2(0,t)\Big]dt
\end{aligned}$$

onde $C = \frac{6}{T-2}$. Agora quando $n = 0$ basta somarmos

$$\int_0^T \Big[|\eta|^2(0,t) + |u|^2(t)\Big]dt$$

no segundo membro de (3.40) para deduzirmos que (3.30) se satisfaça. $\square$

Faremos agora algumas observações que serão bastante utilizadas no decorrer do trabalho.

**Observação 3.6.** *Seja $\rho : (0,T) \to [0,1]$ uma função não negativa de classe $C^\infty$ com suporte compacto e $\rho \equiv 1$ em $(\epsilon, T-\epsilon)$ com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $T - 2\epsilon > 2$. Devido a invariância do tempo para o sistema (3.29) deduzimos que*

$$2\varepsilon(\varepsilon) + \|\eta(\varepsilon)\|^2_{L^2(0,1)} + |u(\varepsilon)|^2 \leq Ce^{2n\pi} \int_0^T \rho(t) \Big[ |u_{tt}|^2 + |u_t|^2 + (1+n^4\pi^4)|u|^2 + (1+n^2\pi^2)|\eta(0,t)|^2 \Big] dt.$$

*Agora, usando a conservação da energia, obtemos também que*

$$\begin{aligned} \|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{Y}} &\leq 2\varepsilon(0) + \|\eta_0\|^2_{L^2(0,1)} + |u_0|^2 \\ &\leq Ce^{2n\pi} \int_0^T \rho(t) \Big[ |u_{tt}|^2 + |u_t|^2 + (1+n^4\pi^4)|u|^2 + (1+n^2\pi^2)|\eta(0,t)|^2 \Big] dt \end{aligned} \tag{3.41}$$

A demonstração da estimativa acima é feita de maneira análoga à demonstração da proposição anterior. Esta estimativa nos permitirá construir controles com suporte compacto no tempo.

**Observação 3.7.** *Quando $n = 0$, a desigualdade (3.40) mostra que*

$$\|\eta_{0y}\|^2_{L^2(0,1)} + \|\eta_1\|^2_{L^2(0,1)} + |u_1|^2 \leq C \int_0^T \left[ |u_{tt}|^2 + |u_t|^2 \right] dt. \tag{3.42}$$

*Para verificar esta desigualdade basta usar a definição da energia, ou seja, olhar quem é $\varepsilon(0)$. Esta desigualdade não provém de alguma estimativa sobre $u_0$. Isto está relacionado com o fato que, quando $n = 0$, o sistema (5) não pode ser exatamente conduzido para zero e sim para o equilíbrio dado pelas constantes $c_1$ e $c_2$ em (8).*

Na próxima seção, demonstraremos alguns resultados de desigualdades melhoradas da observabilidade.

## 3.4 Desigualdade Melhorada da Observabilidade

Nesta seção, teremos como principal objetivo obter desigualdades de observabilidade da forma (3.30), mas no lado direito aparecendo somente o termo $\int_0^T |u_{tt}|^2 dt$. Mas, para obter tais resultados faremos uma resumida análise espectral de nosso problema, nos concentrando principalmente nos autovalores associado ao sistema (3.29). No decorrer desta seção, assumiremos alguns resultados sem a devida demonstração, mas sempre tomando o cuidado de deixar uma referência para que o leitor interessado possa obter as mesmas.

No que segue estamos interessados em encontrar os autovalores e expor alguns resultados com relação as autofunções relativas a esses autovalores do operador diferencial associado ao problema (3.29). Para isso buscamos soluções de (3.29) em variáveis separáveis da forma:

$$(\eta, u) = e^{\nu t}(\varphi, w) \ com \ \varphi = \varphi(y) \ e \ w \in \mathbb{R}.$$

Deste modo o sistema (3.29) se reduz a:

$$\begin{cases} \varphi_{yy} - (\nu^2 + n^2\pi^2)\varphi = 0 & \forall \ y \ \in (0,1) \\ \varphi_y(1) = 0 \\ (-\nu^2 - n^2\pi^2)\varphi_y(0) + \nu^2\varphi(0) = 0 \end{cases} \tag{3.43}$$

Onde a última igualdade da equação acima obtivemos da seguinte maneira:

Primeiramente note que $\varphi_y(0) = \nu w \ e \ \varphi(0) = \nu w + \frac{n^2\pi^2 w}{\nu}$. Logo segue que:

$$\varphi_y(0) - \varphi(0) + \frac{n^2\pi^2 w}{\nu} = 0, \tag{3.44}$$

Multiplicando a equação acima por $\nu^2$ segue que:

$$\nu^2\varphi_y(0) - \nu^2\varphi(0) + n^2\pi^2\nu w = 0 \tag{3.45}$$

Agora como $\nu w = \varphi_y(0)$ de (3.45) deduzimos que

$$(-\nu^2 - n^2\pi^2)\varphi_y(0) + \nu^2\varphi(0) = 0.$$

Da primeira equação de (3.43) temos que

$$\varphi(y) = c_1 e^{\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}y} + c_2 e^{-\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}y}$$

E das condições iniciais dadas segue que:

$$\varphi(y) = e^{\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}(y-1)} + e^{-\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}(y-1)}.$$

Agora observe que os autovalores $\nu$ do problema vem dados pela equação:

$$e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}} = -\frac{\left[\nu^2 - \sqrt{\nu^2+n^2}\,(\nu^2+n^2\pi^2)\right]}{\nu^2 + \sqrt{\nu^2+n^2}\,(\nu^2+n^2\pi^2)}. \tag{3.46}$$

Usando que $c_2 = c_1 e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}}$ temos que:

$$\begin{aligned}
&(-\nu^2 - n^2\pi^2)\left[c_1\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2} - c_2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}\right] + \nu^2\left[c_1+c_2\right] = 0 && \Longrightarrow\\
&-(\nu^2+n^2\pi^2)\left[\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}(c_1-c_2)\right] + \nu^2\left[c_1+c_2\right] = 0 && \Longrightarrow\\
&(\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}}(c_1-c_2) = \nu^2\left[c_1+c_2\right] && \Longrightarrow\\
&(\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}}(c_1 - c_1e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}}) = \nu^2\left(c_1 + c_1e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}}\right) && \Longrightarrow\\
&(\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - (\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}}e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}} = \nu^2 + \nu^2e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}} && \Longrightarrow\\
&(\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}} - \nu^2 = \left[(\nu^2+n^2\pi^2)^{\frac{3}{2}}\right]e^{2\sqrt{\nu^2+n^2\pi^2}}
\end{aligned}$$

Da última igualdade temos (3.46).

Demonstraremos agora um teorema de fundamental importância na demonstração do principal resultado desta seção.

**Teorema 3.8.** *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixo. A equação (3.46) possui uma sucessão de zeros imaginários $(\nu_{n,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ que são dados pela fórmula*

$$\nu_{n,m} = \sqrt{z_{n,m}^2 + n^2\pi^2}i \text{ se } m > 0 \text{ e } \nu_{n,m} = -\nu_{n,-m} \text{ se } m < 0, \tag{3.47}$$

*onde $(z_{n,m})_{m\in\mathbb{Z}}$ são os zeros (em ordem crescente) da equação*

$$tgz = \frac{z^2+n^2\pi^2}{z^3} \tag{3.48}$$

*Além dos zeros* $(z_{n,m})_{m\in\mathbb{Z}^*}$*, a equação (3.46) possui outros dois únicos zeros, denotados por* $\nu_n^\star$ *e* $\nu_n^{\star\star}$ *de módulos menores que* $n\pi$ *e que são dados pela fórmulas*

$$\nu_n^\star = \sqrt{n^2\pi^2 - (z_n^\star)^2}\,i, \quad \nu_n^{\star\star} = \overline{\nu_n}^\star \tag{3.49}$$

*onde* $z_n^\star$ *é a única raiz real positiva da equação:*

$$e^{2z} = \frac{z^3 - z^2 + n^2\pi^2}{z^3 + z^2 - n^2\pi^2} \tag{3.50}$$

*Neste último caso se* $n = 0$, $\nu_n^\star = \nu_n^{\star\star} = 0$*.*

**Demonstração**: Fazendo uma mudança de variável pondo $\zeta = \sqrt{\nu^2 + n^2\pi^2}$ a equação (3.46) se transforma em:

$$e^{2\zeta} = \frac{\zeta^3 - \zeta^2 + n^2\pi^2}{\zeta^3 + \zeta^2 - n^2\pi^2} \tag{3.51}$$

Como os zeros da equação (3.46) são puramente imaginários (já que o operador diferencial associado é anti-adjunto) teremos que os zeros $\zeta$ da equação (3.51) são:

- Reais se $|\nu| \leq n\pi$
- Imaginários se $|\nu| > n\pi$

Caso 1: Suponhamos que as raízes $\zeta$ da equação (3.51) são imaginárias, $\zeta = zi$ com $z \in \mathbb{R}$. Nesta situação obtemos de (3.51) que:

$$e^{2zi} = \frac{-z^3 i + z^2 + n^2\pi^2}{-z^3 i - z^2 - n^2\pi^2} \tag{3.52}$$

Igualando a zero a parte real de (3.52) se obtém a seguinte equação para $z$:

$$tgz = \frac{z^2 + n^2\pi^2}{z^3}$$

De fato, multiplicando (3.52) por

$$\frac{z^3 i - z^2 - n^2\pi^2}{z^3 i - z^2 - n^2\pi^2}$$

e igualando a zero a parte imaginária obtemos:

$$\cos 2z = \frac{z^6 - (z^2 + n^2\pi^2)^2}{z^6 + (z^2 + n^2\pi^2)^2}$$

E consequentemente tem-se que

$$\begin{aligned}
&\cos 2z\,[z^6 + (z^2+n^2\pi^2)^2] = z^6 - (z^2+n^2\pi^2)^2 && \Longrightarrow \\
&z^6\cos 2z + (z^2+n^2\pi^2)^2\cos 2z - z^6 + (z^2+n^2\pi^2)^2 = 0 && \Longrightarrow \\
&z^6(cos2z - 1) + (z^2+n^2\pi^2)^2(cos2z+1) = 0 && \Longrightarrow \\
&z^6(-2\sin^2 z) + (z^2+n^2\pi^2)^2(2\cos^2 z) = 0 && \Longrightarrow \\
&(z^2+n^2\pi^2)^2(2\cos^2 z) = z^6(2\sin^2 z)
\end{aligned}$$

E portanto temos que:

$$tgz = \frac{z^2+n^2\pi^2}{z^3} \tag{3.53}$$

Esta equação possui, para cada $n$, um zero em cada intervalo $(m\pi, m\pi+\frac{\pi}{2}), m \in \mathbb{N}$, que denotaremos por $z_{n,m+1}$. Para justificarmos esta afirmação, considere a função $f(z) = tgz - \frac{z^2+n^2\pi^2}{z^3}$. Aplicando o teorema do Valor Intermediário obtemos que $f$ possui um zero em cada intervalo $(m\pi, m\pi+\frac{\pi}{2}), m \in \mathbb{N}$. Para garantirmos que $f$ possui um único zero no referido intervalo aplicaremos o Teorema de Rolle da seguinte maneira. Suponha que exista $z_m^1\ e\ z_m^2$ raízes distintas de $f$ no intervalo $(m\pi, m\pi+\frac{\pi}{2})$, logo pelo teorema de Rolle existe $z_0 \in (z_m^1, z_m^2)$ tal que $f'(z_0) = 0$. Por outro lado derivando $f$, temos que $f'(z) \neq 0\ \forall\ z \in (z_m^1, z_m^2)$, chegando assim a contradição desejada e portanto $f$ possui uma única raiz no intervalo $(m\pi, m\pi+\frac{\pi}{2})$, como havíamos afirmado.

<u>Caso 2:</u> Suponhamos que as raízes da equação (3.51) são reais. Usando o fato de que $L(z) = z^3 + z^2 - n^2\pi^2$ é uma função crescente e injetora em $(0,\infty)$, obtemos que o denominador da função de variável real

$$h(z) = \frac{z^3 - z^2 + n^2\pi^2}{z^3 + z^2 - n^2\pi^2}$$

se anula em um único ponto positivo compreendido entre $0\ e\ n\pi$. Chamando tal ponto de $z_0$, obtemos aplicando o Teorema do Valor Intermediário que a equação (3.51) possui uma raiz no intervalo $(z_0, n\pi)$ a qual denotaremos por $z_n^\star$. Mostremos agora que essa raiz é única. Suponha que exista outra raiz a qual denotaremos por $z_1$. Sem perda de generalidade suponha que $z_n^\star < z_1$. Considere o intervalo $(z_n^\star, z_1) \subset (z_0, n\pi)$. Aplicando o Teorema de Rolle, temos que existe $c \in (z_n^\star, z_1)$ tal que $f'(c) = 0$, onde $f$ é dada por $f(z) = e^{2z} - h(z)$. Derivando $f$, obtemos que $f'(z) \neq 0 \forall z \in (z_n^\star, z_1)$ o que gera a contradição desejada. Denotando por $\nu_n^\star = \sqrt{n^2\pi^2 - (z_n^\star)^2} i$, obtemos um único valor $\nu_n^\star$ que possui módulo menor que $n\pi$. No caso $n = 0$ se obtém diretamente do sistema (3.43) que $\nu_n^\star = 0$ é um autovalor do problema. $\square$

Para os outovalores caracterizados no teorema acima temos as seguintes estimativas:

**Teorema 3.9.** *Para todo $n = 0, 1, ...$ e $m \in \mathbb{Z}$ tal que $|m| > n$ temos*

$$\begin{cases} \left|\nu_{n,m} - \sqrt{m^2 + n^2}\pi i\right| \leq \frac{24}{\sqrt{m^2+n^2}\pi} & se\ m > n \\ \\ \left|\nu_{n,m} + \sqrt{m^2 + n^2}\pi i\right| \leq \frac{24}{\sqrt{m^2+n^2}\pi} & se\ m < -.n \end{cases} \tag{3.54}$$

**Demonstração**: Para a demonstração deste veja [22] e [23]. $\square$

**Observação 3.10.** *Este teorema mostra que, para frequências suficientemente altas, os autovalores de (3.29) estão uniformemente próximos dos autovalores $\lambda = \pm\sqrt{m^2 + n^2}\pi i$ da equação da onda com condições de Neumann na fronteira.*

$$\begin{cases} \eta_{tt} - \eta_{yy} + n^2\pi^2\eta = 0 & em \quad (0,1) \times (0, \infty) \\ \eta_y(0,t) = \eta_y(1,t) = 0 & para \quad t > 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

*onde o sistema (3.55) corresponde com decomposição da equação da onda no quadrado $\Omega$ com condições de fronteira de Neumann seguindo o desenvolvimento (4) em série de Fourier.*

De posse do Teorema (3.9) temos as seguintes estimativas para os autovalores já mencionados.

**Proposição 3.11.** *Dado $n = 0, 1...$ e $0 < \delta < \pi$ teremos que*

$$|\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq \pi - \delta \tag{3.56}$$

*para todo $m$ com $|m| \geq N(n,\delta)$ onde $N(n,\delta)$ é dado por:*

$$N(n,\delta) = max\left[\sqrt{\left|\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2\right|} + 1, \frac{\pi(3+2n)}{\delta} - n - 1\right] \tag{3.57}$$

*e por outro lado*

$$\begin{cases} |\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq \frac{\pi}{4}, & \forall\ m \in \mathbb{Z}\ se\ n = 0, 1 \\ \\ |\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq \frac{\pi}{1+2n}, & \forall\ m \in \mathbb{Z}\ se\ n \geq 2. \end{cases} \tag{3.58}$$

**Demonstração**: Das condições dadas para $|m|$ segue que $|m| \geq n$, Logo aplicando (3.54) temos que:

$$\begin{aligned}
&|\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \\
\geq\ & \pi\left|\sqrt{(m+1)^2+n^2} - \sqrt{m^2+n^2}\right| - \frac{24}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(m+1)^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{m^2+n^2}}\right] \\
\geq\ & \pi\left|\sqrt{(m+1)^2+n^2} - \sqrt{m^2+n^2}\right| - \frac{24}{\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}}\right] \\
\geq\ & \pi\left|\frac{(m+1)^2+n^2-m^2-n^2}{\sqrt{(m+1)^2+n^2}+\sqrt{m^2+n^2}}\right| - \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} \\
\geq\ & \frac{\pi|2m+1|}{\sqrt{(m+1)^2+n^2}+\sqrt{m^2+n^2}} - \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} \\
\geq\ & \frac{\pi(2|m|-1)}{2(|m|+1)+2n} - \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} \\
=\ & \pi - \left[\frac{\pi(3+2n)}{2(|m|+1)+2n} + \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}}\right]
\end{aligned}$$

dos extremos temos que:

$$|\nu_{n,m+1} - \nu_{n,m}| \geq\ \pi - \left[\frac{\pi(3+2n)}{2(|m|+1)+2n} + \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}}\right] \tag{3.59}$$

onde na igualdade acima usamos que:

$$\frac{\pi(2|m|-1)}{2(|m|+1)+2n} = \pi - \frac{\pi(3+2n)}{2(|m|+1)+2n}$$

Mostraremos agora que quando $|m| \geq N(n,\delta)$, onde $N(n,\delta)$ é dado por (3.56), tem-se que:

$$\frac{\pi(3+2n)}{2(|m|+1)+2n} + \frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} \leq \delta \tag{3.60}$$

De fato, para isso mostraremos que cada parcela da soma acima é menor que $\frac{\delta}{2}$.

<u>1ª Parcela:</u>

$$\frac{\pi(3+2n)}{2(|m|+1)+2n} \leq \frac{\pi(3+2n)}{2\left(\frac{\pi(3+2n)}{\delta} - n - 1 + 1\right) + 2n} \leq \frac{\delta}{2} \tag{3.61}$$

<u>2ª Parcela:</u>

Temos que $|m| \geq \sqrt{\left|\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2\right|} + 1$ e portanto $|m| - 1 \geq \sqrt{\left|\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2\right|}$ e portanto

$$(|m|-1)^2 \geq \left|\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2\right| \geq \left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2$$

Logo segue que:

$$\frac{48}{\pi\sqrt{(|m|-1)^2+n^2}} \leq \frac{48}{\pi\sqrt{\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2 + n^2}} = \frac{\delta}{2} \tag{3.62}$$

De (3.61) e (3.62) concluímos (3.60). Agora de (3.59) e (3.60) tem-se (3.56). Por uma análise do gráfico das funções (3.48) e (3.50) e fácil ver que (3.58) se satisfaz. Para uma prova mais detalhada veja [23]. □

Estamos caminhando em direção ao principal teorema desta seção, antes porém, lançaremos mão de algumas definições e resultados que serão essenciais na demonstração do mesmo.

**Definição 3.12.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma sucessão de elementos $(e_n)_{n\geq 1}$ se chama completa em $\mathcal{H}$, se para qualquer elemento $x \in \mathcal{H}$ existe uma sucessão de escalares $(a_n)_{n\geq 1}$ tal que:* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n = x$.

**Definição 3.13.** *Seja $\mathcal{H}$ um espaço de Hilbert. Uma sucessão de elementos $(e_n)_{n\geq 1}$ se chama base de Riesz em $\mathcal{H}$, se é completa e existem duas constantes positivas $c_1$ e $c_2$ tal que, para qualquer sucessão de escalares $(a_n)_{n\geq 1}$ se tenha:*

$$c_1 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right\|^2 \leq c_2 \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2.$$

A noção de base de Riesz é uma generalização natural da noção de base ortogonal e tem uma grande utilidade para expressar soluções de equações diferenciais e dar estimativas com respeito as normas destas. Enunciaremos agora um resultado cuja demonstração será omitida. Tomaremos o cuidado de sugerir uma referência para que o leitor interessado possa obter a demonstração do mesmo.

**Teorema 3.14.** *As autofunções correspondente ao operador diferencial associado ao sistema (3.29) formam uma base de Riesz em $\mathcal{Y}$.*

**Demonstração**: Ver [22] $\square$

Com as definições feitas acima e os resultados até aqui apresentados, estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, como faremos agora.

**Teorema 3.15.** *Assuma que $T > 2$. Então,*
*(i) Para todo $n \geq 1$ existe uma constante $C = C(T, n) > 0$ tal que*

$$\|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \leq \mathbb{C}(T, n) e^{2n\pi} \int_0^T |u_{tt}|^2 dt \tag{3.63}$$

*para toda solução de (3.29).*
*(ii) Se $n = 0$ então existe uma constante $C = C(T) > 0$ tal que*

$$\|\eta_{0y}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\eta_1\|_{L^2(0,1)}^2 + |u_1|^2 \leq C(T) \int_0^T \left[|u_{tt}|^2\right] dt \tag{3.64}$$

*para toda solução de (3.29).*

**Demonstração**:

Primeiramente vamos considerar o caso $n \geq 1$.

De acordo com Proposição (3.5) é suficiente mostrar a existência de uma constante $C > 0$ (dependendo de $n$ e de $T$) tal que:

$$\int_0^T \left[|u_t|^2 + n^4\pi^4|u|^2 + n^2\pi^2|\eta(0,t)|^2\right] dt \leq C \int_0^T |u_{tt}|^2 dt \tag{3.65}$$

se satisfaça para toda solução de (3.29).

Antes de iniciar a demonstração da desigualdade (3.65) recordemos que o operador diferencial associado ao sistema (3.29) possui uma sucessão de autovalores $(\nu_{n,m})_{m\in\ \mathbb{Z}^*} \cup \{\nu_n^\star, \nu_n^{\star\star}\}$ cujas propriedades estão descritas no Teorema (3.8 ).

Do Teorema (3.14) temos que as autofunções correspondentes $(\xi_{n,m})_{m\in\ \mathbb{Z}^*} \cup \{\xi_n^\star, \xi_n^{\star\star}\}$ formam uma base de Riesz no espaço $\mathcal{Y}$. Consequentemente a solução $U(t) = (\eta(t), \eta_t(t), u(t), u_t(t))$ de (3.29) pode ser escrita como

$$U(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi_{\nu_{n,m}} + a_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi_{\nu_n^\star} + a_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi_{\nu_n^{\star\star}}$$

onde $\xi = (\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$.

Desta relação obtemos que:

$$\eta(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi^1_{\nu_{n,m}} + a_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi^1_{\nu_n^\star} + a_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi^1_{\nu_n^{\star\star}}$$

$$u(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi^3_{\nu_{n,m}} + a_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi^3_{\nu_n^\star} + a_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi^3_{\nu_n^{\star\star}}$$

Para conseguir a limitação (3.65) primeiro observe que

$$\eta(0,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi^1_{\nu_{n,m}}(0) + a_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi^1_{\nu_n^\star}(0) + a_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi^1_{\nu_n^{\star\star}}(0)$$

e

$$\eta_t(0,t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} -a_{n,m}\nu_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi^1_{\nu_{n,m}}(0) - a_n^\star \nu_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi^1_{\nu_n^\star}(0) - a_n^{\star\star}\nu_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi^1_{\nu_n^{\star\star}}(0)$$

De posse da Proposição (3.11) e com o intuito de aplicar o Teorema (1.80), vamos fazer algumas considerações.

Como $T > 2$, segue que $T = 2 + \epsilon$, onde evidentemente $\epsilon > 0$. Considerando $J = (0, T)$, para aplicarmos o Teorema (1.80) devemos impor que $T > \frac{2\pi}{\pi-\delta}$, onde $\delta$ é tal que $0 < \delta < \pi$. Sendo assim, substituindo $T$ por $2+\epsilon$ obtemos que $2+\epsilon > \frac{2\pi}{\pi-\delta}$ o que implica que $\delta$ deve ser tal que $\delta < \frac{\pi\epsilon}{2+\epsilon} \leq \pi$.

Tomando $\gamma = \frac{\pi}{1+2n}$ se $n \geq 2$ ou $\gamma = \frac{\pi}{4}$ se $n = 0, 1$, $\gamma_\infty = \pi - \delta$ e $N(n,\delta) = max\left[\sqrt{\left|\left(\frac{96}{\pi\delta}\right)^2 - n^2\right|} + 1, \frac{\pi(3+2n)}{\delta} - n - 1\right]$. Obtemos da Proposição (3.11), que com essas considerações estamos nas hipóteses do Teorema (1.80) e portanto

$$\int_0^T |\eta(0,t)|^2 dt \leq C_2 \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}\xi^1_{\nu_{n,m}}(0)|^2 + |a_n^\star \xi^1_{\nu_n^\star}(0)|^2 + |a_n^{\star\star}\xi^1_{\nu_n^{\star\star}}(0)|^2 \right\} \tag{3.66}$$

Então levando em conta que

$$|\nu_n^\star| = min\{|\nu_{n,m}|, |\nu_n^\star|, |\nu_n^{\star\star}|\},$$

(isso devido a caracterização dos autovalores dada no Teorema (3.8)) segue que

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\eta(0,t)|^2 dt &\leq C_2 \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}\xi^1_{\nu_{n,m}}(0)|^2 + |a_n^\star \xi^1_{\nu_n^\star}(0)|^2 + |a_n^{\star\star}\xi^1_{\nu_n^{\star\star}}(0)|^2 \right\} \\
&\leq \frac{C_2}{|\nu_n^\star|^2} \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}\xi^1_{\nu_{n,m}}(0)|^2 |\nu_{n,m}|^2 + |a_n^\star \xi^1_{\nu_n^\star}(0)|^2 |\nu_n^\star|^2 \right. \\
&\quad \left. + |a_n^{\star\star}\xi^1_{\nu_n^{\star\star}}(0)|^2 |\nu_n^{\star\star}|^2 \right\} \\
&\leq \frac{C_2 C_1}{|\nu_n^\star|^2} \int_0^T |\eta_t(0,t)|^2 dt
\end{aligned}$$

Por outro lado, como $\eta_t(0,t) = u_{tt}(t) + n^2\pi^2 u(t)$ (veja (3.29)) temos que $\eta_t^2(0,t) = (u_{tt}(t) + n^2\pi^2 u(t))^2 \leq 2(u_{tt}^2(t) + n^4\pi^4 u^2(t))$ e portanto

$$\int_0^T |\eta_t(0,t)|^2 dt \leq 2 \int_0^T \left[ |u_{tt}(t)|^2 + n^4\pi^4 |u(t)|^2 \right] dt. \tag{3.67}$$

Deste modo, a fim de concluir (3.65) é suficiente mostrar que

$$\int_0^T \left[ |u_t(t)|^2 + n^4\pi^4 |u(t)|^2 \right] dt \leq C \int_0^T |u_{tt}(t)|^2 dt$$

para alguma constante $C > 0$.

Os mesmos argumentos usados para limitar $\int_0^T |\eta(0,t)|^2 dt$ nos permite mostrar que

$$\int_0^T |u|^2 dt \leq \frac{C_1 C_2}{|\nu_n^\star|^4} \int_0^T |u_{tt}|^2 dt \tag{3.68}$$

De fato, como

$$u(t) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{n,m} e^{-\nu_{n,m}t} \xi^3_{\nu_{n,m}} + a_n^\star e^{-\nu_n^\star t} \xi^3_{\nu_n^\star} + a_n^{\star\star} e^{-\nu_n^{\star\star} t} \xi^3_{\nu_n^{\star\star}}$$

Aplicando o Teorema (1.80), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T |u(t)|^2 dt &\leq C_2 \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}\xi^3_{\nu_{n,m}}|^2 + |a^\star_n \xi^3_{\nu^\star_n}|^2 + |a^{\star\star}_n \xi^3_{\nu^{\star\star}_n}|^2 \right\} \\
&\leq \frac{C_2}{|\nu^\star_n|^4} \left\{ \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_{n,m}\xi^3_{\nu_{n,m}}|^2 |\nu_{n,m}|^4 + |a^\star_n \xi^3_{\nu^\star_n}|^2 |\nu^\star_n|^4 + |a^{\star\star}_n \xi^3_{\nu^{\star\star}_n}|^2 |\nu^{\star\star}_n|^4 \right\} \\
&\leq \frac{C_2 C_1}{|\nu^\star_n|^4} \int_0^T |u_{tt}(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

como havíamos afirmado.

De modo análogo a essa última limitação obtemos que

$$\int_0^T |u_t|^2 dt \leq \frac{C_1 C_2}{|\nu^\star_n|^2} \int_0^T |u_{tt}|^2 dt \tag{3.69}$$

Da Proposição (3.5), temos que:

$$\|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{Y}} \leq Ce^{2n\pi} \int_0^T \left[ |u_{tt}|^2 + |u_t|^2 + (1 + n^4\pi^4)|u|^2 + (1 + n^2\pi^2)|\eta(0,t)|^2 \right] dt$$

Seja

$$\begin{aligned}
C(T,n) = max \Big\{ C,\ C\frac{C_1C_2}{|\nu^\star_n|^2},\ C(1+n^4\pi^4)\frac{C_1C_2}{|\nu^\star_n|^4}, \\
2C(1+n^2\pi^2),\ C(1+n^2\pi^2)n^4\pi^4 \frac{C_1C_2}{|\nu^\star_n|^4} \Big\}
\end{aligned}$$

Das limitações (3.67), (3.68) e (3.69) obtemos que

$$\|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{Y}} \leq \mathbb{C}(T,n)e^{2n\pi} \int_0^T |u_{tt}|^2 dt$$

como havíamos afirmado em (3.63), desta maneira concluímos a demonstração deste teorema para o caso $n \geq 1$.

Vamos agora considerar o caso $n = 0$. Uma observação importante a se fazer nesse momento é que no caso $n = 0$ tem se que $\nu^\star_n = \nu^{\star\star}_n = 0$.

De acordo com (3.42) temos que:

$$\|\eta_{0y}\|^2_{L^2(0,1)} + \|\eta_1\|^2_{L^2(0,1)} + |u_1|^2 \leq C(T) \int_0^T \left[ |u_{tt}|^2 + |u_t|^2 \right] dt$$

Portanto para obtermos (3.64) é suficiente mostrar que

$$\int_0^T |u_t|^2 dt \leq C \int_0^T |u_{tt}|^2 dt \tag{3.70}$$

Procedendo como no caso $n \neq 0$, obtemos que (3.70) se satisfaz com $C = \frac{C_1 C_2}{|\nu_{n,1}|^2}$, onde $C_1 = C_1(2N+1)$, $C_2 = C_2(2N+1)$ e $N = N(0,\delta)$ com $\delta > 0$ tal que $T > \frac{2\pi}{\pi - \delta}$. Com isto encerramos a demonstração deste teorema. □

**Observação 3.16.** *Assim como na observação (3.6), nas estimativas (3.63) e (3.64) pode-se substituir o lado direito pela quantidade* $\int_0^T \rho(t)|u_{tt}(t)|^2 dt$ *quando* $\rho$ *é uma função suave não negativa com suporte compacto em* $(0,T)$ *e tal que* $\rho \equiv 1$ *em* $(\epsilon, T-\epsilon)$ *com* $\epsilon > 0$ *suficientemente pequeno tal que* $T - 2\epsilon > 2$.

Com a demonstração deste resultado encerramos esta seção e buscaremos nas próximas seções resultados de controlabilidade dos sistemas unidimensionais para os diferentes valores de $n$.

## 3.5 Controlabilidade: O caso $n \geq 1$.

Nesta seção, aplicando HUM (Hilbert Uniqueness Method), encontraremos resultados de controlabilidade em um subespaço de $\mathcal{Y}' = (H^1(0,1))' \times L^2(0,1) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ como consequência da Desigualdade de Observabilidade (3.63).

**Teorema 3.17.** *Assuma que* $T > 2$ *e* $n \geq 1$. *Logo para todo* $(\psi_1, \psi_0, v_0, v_1) \in \mathcal{Y}'$ *tal que* $\psi_0$ *é contínua em* $y = 0$ *existe um controle* $\beta \in H^{-2}(0,T)$ *com suporte compacto tal que a solução* $(\psi, V)$ *de (5) satisfaz*

$$\begin{cases} \psi(T) \equiv \psi_t(T) \equiv 0 \ em \ \ (0,1) \\ V(T) = V_t(T) = 0 \end{cases}$$

*e ainda*

$$|\beta\|^2_{H^{-2}(0,T)} \leq C \left\{ \|(\psi_1, \psi_0, V_1, V_0)\|^2_{\mathcal{Y}'} + |\psi_0(0)|^2 \right\}$$

**Observação 3.18.** *No enunciado do Teorema (3.17) e em toda esta seção não indexaremos o índice $n$ para as variáveis $(\psi, V)$ para simplificar a notação.*

**Demonstração**: Dado algum $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}$ seja $(\eta, u)$ a solução do sistema adjunto (3.29) para estes dados iniciais.

Agora fixamos uma função $\rho : (0, T) \to [0, 1]$ de classe $C^\infty$ com suporte compacto tal que $\rho \equiv 1$ em $(\epsilon, T - \epsilon)$ com $T - 2\epsilon > 2$.

Então resolvemos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} + n^2\pi^2\psi = 0 & em \ \ (0,1) \times (0,T) \\ \psi_y(1,t) = 0 & para \ \ t \in (0,T) \\ \psi_y(0,t) = -V_t(t) & para \ \ t \in (0,T) \\ V_{tt} + n^2\pi^2 V + \psi_t(0,t) = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t)) & para \ \ t \in (0,T) \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0 & em \ \ (0,1) \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{cases} \tag{3.71}$$

A solução de (3.71) é definida por transposição (veja [10]). Se multiplicarmos em (3.71) por uma solução $(\tilde{\eta}, \tilde{u})$ de (3.1) e integrar (formalmente) por partes vamos obter a seguinte identidade:

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho(t) u_{tt} \tilde{u}_{tt}(t) dt &= \int_0^1 [-\psi_t(0)\tilde{\eta}(0) + \psi(0)\tilde{\eta}_t(0)]\, dy + V(0)\tilde{\eta}(0,0) + \psi(0,0)\tilde{u}(0) \\ &+ \int_0^T \int_0^1 \tilde{f}\psi dy dt + \int_0^T \tilde{g} V dt - V(0)\tilde{u}_t(0) + V_t(0)\tilde{u}(0). \end{aligned} \tag{3.72}$$

De fato, para obtermos (3.72), vamos multiplicar a primeira equação de (3.71) por $\tilde{\eta}$ e integrar por partes em $(0,1) \times (0,T)$. Sendo assim

$$\int_0^1 \int_0^T \psi_{tt}\tilde{\eta} - \int_0^1 \int_0^T \psi_{yy}\tilde{\eta} + \int_0^1 \int_0^T n^2\pi^2\psi\tilde{\eta} = 0 \tag{3.73}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^T \psi_{tt}\tilde{\eta} &= \int_0^1 [\psi_t(T)\tilde{\eta}(T) - \psi_t(0)\tilde{\eta}(0)]\, dy - \int_0^1 [\psi(T)\tilde{\eta}_t(T) - \psi(0)\tilde{\eta}_t(0)]\, dy \\ &+ \int_0^1 \int_0^T \psi\tilde{\eta}_{tt} \end{aligned} \tag{3.74}$$

$$\int_0^T\int_0^1 \psi_{tt}\tilde{\eta} \;=\; \int_0^T [\psi_y(1)\tilde{\eta}(1)-\psi_y(0)\tilde{\eta}(0)]\,dt - \int_0^T [\psi(1)\tilde{\eta}_y(1)-\psi(0)\tilde{\eta}_y(0)]\,dt$$
$$+\int_0^T\int_0^1 \psi\tilde{\eta}_{yy} \qquad (3.75)$$

De (3.73), (3.74), (3.75) e das condições dadas em (3.1) e em (3.71) temos que:

$$-\int_0^1 \psi_t(0)\tilde{\eta}(0)dy + \int_0^1 \psi(0)\tilde{\eta}_t(0)dy + \int_0^T \psi_y(0)\tilde{\eta}(0)dt - \int_0^T \psi(0)\tilde{\eta}_y(0)$$
$$+\int_0^1\int_0^T \psi\tilde{f} = 0 \qquad (3.76)$$

Agora multiplicando $V_{tt}+n^2\pi^2V+\psi_t(0,t) = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t))$ por $\tilde{u}(t)$ e integrando de 0 a $T$ obtemos:

$$\int_0^T V_{tt}(t)\tilde{u}(t)dt + \int_0^T n^2\pi^2 V(t)\tilde{u}(t)dt + \int_0^T \psi_t(0,t)\tilde{u}(t)dt$$
$$= -\int_0^T \frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t))\tilde{u}_{tt}(t)dt \qquad (3.77)$$

Agora veja que:

$$\int_0^T V_{tt}(t)\tilde{u}(t)dt = \tilde{u}(T)V_t(T) - \tilde{u}(0)V_t(0) - \tilde{u}_t(T)V(T) + \tilde{u}_t(0)V(0) + \int_0^T V\tilde{u}_{tt} \quad (3.78)$$

$$\int_0^T \frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t))\tilde{u}(t)dt = \frac{d}{dt}(\rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}(t))\Big|_0^T - (\rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_t(t))\Big|_0^T$$
$$+\int_0^T \rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt \qquad (3.79)$$

De (3.77), (3.78), (3.79) e das condições dadas em (3.1) e (3.71) e ainda do fato que $\rho$ possui suporte compacto, obtemos:

$$-\tilde{u}(0)V_t(0) + \tilde{u}_t(0)V(0) + \int_0^T V(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt + \int_0^T n^2\pi^2V(t)\tilde{u}(t)dt + \int_0^T \psi_t(0,t)\tilde{u}(t)dt$$
$$= -\int_0^T \rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt \qquad (3.80)$$

De (3.76) e 3.80) obtemos:

$$-\int_0^1 \psi_t(0)\tilde{\eta}(0)dy + \int_0^1 \psi(0)\tilde{\eta}_t(0)dy + \int_0^T \psi_y(0)\tilde{\eta}(0)dt - \int_0^T \psi(0)\tilde{\eta}_y(0)dt$$
$$+\int_0^1\int_0^T \psi\tilde{f}dtdy = -\tilde{u}(0)V_t(0) + \tilde{u}_t(0)V(0) + \int_0^T V(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt \qquad (3.81)$$
$$+\int_0^T n^2\pi^2V(t)\tilde{u}(t)dt + \int_0^T \psi_t(0,t)\tilde{u}(t)dt \int_0^T \rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt$$

Como $\tilde{\eta}_y(0) = \tilde{u}_t$, segue que:

$$-\int_0^T \psi(0)\tilde{\eta}_y(0)dt = -\int_0^T \psi(0)\tilde{u}_t dt = \psi(0,0)\tilde{u}(0) + \int_0^T \psi_t(0)\tilde{u}dt \tag{3.82}$$

temos também que:

$$\int_0^T \psi_y(0)\tilde{\eta}(0)dt = -\int_0^T V_t(t)\tilde{\eta}(0)dt = -\left[V\tilde{\eta}(0)\Big|_0^T - \int_0^T V(t)\tilde{\eta}_t(0)dt\right]$$

ou seja

$$\int_0^T \psi_y(0)\tilde{\eta}(0)dt = V(0)\tilde{\eta}(0,0) + \int_0^T V\tilde{\eta}_t(0)dt \tag{3.83}$$

De (3.81), (3.82), (3.83) e de que $\tilde{u}_{tt} + n^2\pi^2\tilde{u} - \tilde{\eta}_t(0) = \tilde{g}$ segue que:

$$\begin{aligned}\int_0^T \rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt &= \int_0^1 \left[-\psi_t(0)\tilde{\eta}(0) + \psi(0)\tilde{\eta}_t(0)\right] dy + V(0)\tilde{\eta}(0,0) \\ \psi(0,0)\tilde{u}(0) + \int_0^1\int_0^T \psi\tilde{f}dtdy &- \int_0^T \tilde{g}(t)V(t)dt - \tilde{u}_t(0)V(0) + \tilde{u}(0)V_t(0)\end{aligned} \tag{3.84}$$

Como havíamos afirmado.

Adotamos o par $(\psi, V)$ que satisfaz (3.84) como definição de solução para (3.71) no sentido de transposição.

Observemos que (3.84) pode ser reescrito da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}&\int_0^T \rho(t)u_{tt}(t)\tilde{u}_{tt}(t)dt - \int_0^1\int_0^T \psi\tilde{f}dtdy + \int_0^T \tilde{g}(t)V(t)dt \\ &\qquad = \langle -\psi_t(0) + V(0)\delta_0, \tilde{\eta}(0)\rangle + (\psi(0), \tilde{\eta}_t(0)) + (V_t(0) + \psi(0,0))\tilde{u}(0) \\ &\qquad\quad -V(0)\tilde{u}_t(0)\end{aligned} \tag{3.85}$$

onde $\langle .,. \rangle$ denota dualidade entre $(H^1(0,1))'$ e $H^1(0,1)$, $(.,.)$ o produto escalar em $L^2(0,1)$ e $\delta_0 \in (H^1(0,1))'$ denota o delta de Dirac em $y = 0$.

Temos o seguinte resultado de existência e unicidade de solução no sentido de transposição.

**Proposição 3.19.** *O sistema (3.71) possui uma única solução no sentido de transposição. Mais precisamente para toda solução $(\eta, u)$ de (3.29) com dados iniciais em*

*$\mathcal{Y}$ existe únicas $(\psi, V) \in C([0,T]; L^2(0,1)) \times L^2(0,T)$, $\rho^0 \in L^2(0,1)$, $\rho^1 \in (H^1(0,1))'$, $\mu^0 \in \mathbb{R}$ e $\mu^1 \in \mathbb{R}$ satisfazendo:*

$$\begin{aligned}\int_0^T \rho(t) u_{tt}(t) \tilde{u}_{tt} dt = & \int_0^T \int_0^1 \tilde{f} \psi dy dt - \int_0^T \tilde{g} V dt + \langle \rho^1, \tilde{\eta}(0) \rangle \\ & + \langle \rho^0, \tilde{\eta}_t(0) \rangle + \mu^1 \tilde{u}(0) + \mu^0 \tilde{u}_t(0)\end{aligned} \tag{3.86}$$

*Para toda solução $(\tilde{\eta}, \tilde{u})$ de (3.1) com*

$$(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1) \in \mathcal{Y}; \;\; \tilde{f} \in L^1(0,T; L^2(0,1)), \;\; \tilde{g} \in L^2(0,T). \tag{3.87}$$

**Demonstração**: Para demonstrarmos esta proposição definamos a seguinte aplicação:

$$(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}, \tilde{g}) \longmapsto \int_0^T \rho(t) u_{tt}(t) \tilde{u}_{tt} dt \tag{3.88}$$

onde esta é uma forma linear e contínua de $\mathcal{Y} \times L^1(0,T; L^2(0,1)) \times L^2(0,T)$ em $\mathbb{R}$. De fato, claramente esta aplicação é linear, mostremos agora que ela é contínua.

$$\left| \int_0^T \rho(t) u_{tt}(t) \tilde{u}_{tt} dt \right| \leq \int_0^T \|\rho u_{tt}\| \|\tilde{u}_{tt}\| dt$$

e aplicando Hölder temos

$$\left| \int_0^T \rho(t) u_{tt}(t) \tilde{u}_{tt} dt \right| \leq \left( \int_0^T \rho^2 |u_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T |\tilde{u}_{tt}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Agora da Proposição (3.1) vem que:

$$\begin{aligned}\left| \int_0^T \rho(t) u_{tt}(t) \tilde{u}_{tt} dt \right| & \leq C \left[ \|(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1)\|^2_{\mathcal{Y}} + \|\tilde{f}\|^2_{L^1(0,T;L^2(0,1))} + \|\tilde{g}\|^2_{L^2(0,T)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ & \leq C \left[ \|(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1)\|_{\mathcal{Y}} + \|\tilde{f}\|_{L^1(0,T;L^2(0,1))} + \|\tilde{g}\|_{L^2(0,T)} \right]\end{aligned}$$

e portanto temos a continuidade.

Logo a aplicação (3.88) pertence ao dual de $\mathcal{Y} \times L^1(0,T; L^2(0,1)) \times L^2(0,T)$ e portanto existem únicas funções $\psi \in L^\infty(0,T; L^2(0,1))$, $V \in L^2(0,T)$, $\rho^0 \in L^2(0,1)$, $\rho^1 \in (H^1(0,1))'$, $\mu^0 \in \mathbb{R}$ e $\mu^1 \in \mathbb{R}$ que satisfazem (3.86) $\forall\ \tilde{f} \in L^1(0,T; L^2(0,1))$, $\forall\ \tilde{g} \in L^2(0,T)$, e $\forall\ (\tilde{\eta}^0, \tilde{\eta}^1, \tilde{u}^0, \tilde{u}^1) \in \mathcal{Y}$. E ainda, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\|(\psi, V)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \times L^2(0,T)} & + \|(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)\|_{\mathcal{Y}'} \leq C \|u_{tt}\|_{L^2(0,T)} \\ & \leq C \|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{Y}}\end{aligned} \tag{3.89}$$

Mostremos agora que $\psi \in C([0,T];L^2(0,1))$.

Seja $(\beta_m) \subset \mathcal{D}(0,T)$ tal que $\beta_m \longrightarrow u_{tt}$ em $L^2(0,T)$ e portanto $-\frac{d^2}{dt^2}(\rho\beta_m) \longrightarrow -(\rho\beta)$ em $H^{-2}(0,T)$ visto que aplicação derivada no sentido de distribuições é contínua.

Considere $(\widetilde{\psi}^m, \widetilde{V}^m)$ a solução do sistema

$$\begin{cases} \widetilde{\psi}^m_{tt} - \widetilde{\psi}^m_{yy} + n^2\pi^2\widetilde{\psi}^m = 0 & em \ \ (0,1)\times(0,T) \\ \widetilde{\psi}^m_y(1,t) = 0 & para \ \ t\in(0,T) \\ \widetilde{\psi}^m_y(0,t) = \widetilde{V}^m_t(t) & para \ \ t\in(0,T) \\ \widetilde{V}^m_{tt} + n^2\pi^2\widetilde{V}^m - \widetilde{\psi}^m_t(0) = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho\beta_m) & para \ \ t\in(0,T) \\ \widetilde{\psi}^m(T) = \widetilde{\psi}^m_t(t) = 0 & em \ \ (0,1) \\ \widetilde{V}^m(T) = \widetilde{V}^m_t(T) = 0. \end{cases} \tag{3.90}$$

Como $-\frac{d^2}{dt^2}(\rho\beta_m) \in \mathcal{D}(0,T)$, resulta aplicando o Teorema (3.1) que (3.90) possui uma única solução forte $\widetilde{\psi}^m \in C([0,T];H^2(0,1)) \cap C^1([0,T];H^1(0,1)) \cap C^2([0,T];L^2(0,1))$ e $\widetilde{V}^m \in C^2[0,T]$.

Agora denotando por $\psi^m = -\widetilde{\psi}^m$ e $V^m = \widetilde{V}^m$ temos que o par $(\psi^m, V^m)$ é solução de (3.71) e possui as mesmas regularidades de $(\widetilde{\psi}^m, \widetilde{V}^m)$.

Analogamente ao que fizemos quando definimos solução por transposição obtemos que:

$$\begin{aligned} \int_0^T \rho(t)\beta_m(t)\tilde{u}_{tt}dt = \int_0^T\int_0^1 \tilde{f}\psi^m dydt - \int_0^T \tilde{g}V^m dt + \langle \rho_1^m, \tilde{\eta}(0)\rangle \\ +\langle \rho_0^m, \tilde{\eta}_t(0)\rangle + \mu_1^m\tilde{u}(0) + \mu_0^m\tilde{u}_t(0) \end{aligned} \tag{3.91}$$

porém agora já não é mais formalmente.

Temos também que a aplicação

$$(\tilde{\eta}_0, \tilde{\eta}_1, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1, \tilde{f}, \tilde{g}) \longmapsto \int_0^T \rho(t)\beta_m(t)\tilde{u}_{tt}dt$$

é linear e contínua em $\mathcal{Y} \times L^1(0,T;L^2(0,1)) \times L^2(0,T)$, onde aqui usamos o fato que $\rho\beta_m \in \mathcal{D}(0,T)$ e portanto para cada $m \in \mathbb{N}$ $\rho\beta_m$ é limitada.

Logo existe um único par $(\psi^{m^*}, V^{m^*}) \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \times L^2(0,T)$ e $(\rho_1^{m^*}, \rho_0^{m^*}, \mu_1^{m^*}, \mu_0^{m^*}) \in \mathcal{Y}'$ tal que (3.91) se satisfaça e ainda existe uma constante

$C > 0$ tal que

$$\|(\psi^{m^*}, V^{m^*})\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))\times L^2(0,T)} \quad +\|(\rho_1^{m^*}, \rho_0^{m^*}, \mu_1^{m^*}, \mu_0^{m^*})\|_{\mathcal{Y}'} \leq C\|\beta_m\|_{L^2(0,T)}$$

Por outro lado, como $(\psi^m, V^m)$ é solução forte de (3.71) vimos que $(\psi^m, V^m)$ também satisfaz (3.91) e pela unicidade segue $\psi^{m^*} = \psi^m$, $V^{m^*} = V^m$, $\rho_1^{m^*} = \rho_1^m$, $\rho_0^{m^*} = \rho_0^m$, $\mu_1^{m^*} = \mu_1^m$, $\mu_0^{m^*} = \mu_0^m$.

Sendo nosso problema linear, fazendo a diferença entre os sistemas correspondentes as soluções $(\psi^m, V^m)$ e $(\psi, V)$ obtemos que:

$$\|(\psi^m - \psi, V^m - V)\|_{L^\infty(0,T;L^2(0,1))\times L^2(0,T)} + \|(\rho_1^m - \rho_1, \rho_0^m - \rho_0, \mu_1^m - \mu_1, \mu_0^m - \mu_0)\|_{\mathcal{Y}'}$$
$$\leq C\|\beta_m - u_{tt}\|_{L^2(0,T)}$$

Fazendo $m \longrightarrow \infty$, deduzimos que

$$(\psi^m, V^m) \longrightarrow (\psi, V) \quad em\ \text{Ł}^\infty(0, T; L^2(0, 1)) \times L^2(0, T)$$

onde $(\psi, V)$ é a solução de (3.86). Daí resulta que $\psi \in C([0, T]; L^2(0, 1))$, como queríamos.

$\square$

**Observação 3.20.** *Por definição o par $(\psi, V)$ encontrado na proposição anterior é a solução de (3.71). Implicitamente considera que se $(\psi, V)$ é a solução de (3.86) então $\psi(T) = \psi_t(T) = 0$, $V(T) = V_t(T) = 0$, onde estas quantidades nem sempre estão bem definidas.*

*Veremos a seguir que as quantidades tem efetivamente sentido no caso de soluções fracas.*

*De fato, voltando ao processo de regularização apresentado anteriormente obte-*

*mos que:*

$$\lim_{m\to\infty}(-\psi_t^m(0)+V^m(0)\delta_0)=\rho_1 \quad em \quad (H^1(0,1))'$$
$$\lim_{m\to\infty}\psi^m(0)=\rho_0 \quad em \quad L^2(0,1)$$
$$\lim_{m\to\infty}V^m(0)=-\mu_0 \quad em \quad \mathbb{R}$$
$$\lim_{m\to\infty}(-V_t^m(0)-\psi^m(0,0))=\mu_1 \quad em \quad \mathbb{R}$$

As últimas relações nos indicam que as quantidades $(\rho_0, \rho_1, \mu_0, \mu_1)$ são os traços de $(\psi, -\psi_t + V\delta_0, -V, \psi(0) + V_t)$ em $t = 0$, onde nem sempre podemos dar sentido a cada uma dessas componentes separadas.

Os mesmos argumentos nos permite mostrar que traços também estão bem definidos em $t = T$. Isto é suficiente para se afirmar que a solução fraca de (3.71) está em repouso em $t = T$.

Caminharemos agora para a conclusão do Teorema (3.17). Para isso consideremos o seguinte operador

$$\Lambda : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$$

definido por:

$$\Lambda(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1)=(-\psi_t+V\delta\big|_{t=0},\psi(0),V_t+\psi(0,t)\big|_{t=0},-V\big|_{t=0})$$

ou seja, $\Lambda(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) = (\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$.

Tomando em (3.86), $\tilde{f} \equiv 0$, $\tilde{g} \equiv 0$ e $(\tilde{\eta}, \tilde{u}) = (\eta, u)$ obtemos que:

$$\langle\Lambda(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1),(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1)\rangle=\int_0^T\rho(t)|u_{tt}(t)|^2dt$$

Agora, de acordo com o Teorema (3.15) e Observação (3.16) deduzimos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\langle\Lambda(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1),(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1)\rangle\geq C\|(\eta_0,\eta_1,u_0,u_1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \qquad (3.92)$$

Na realidade, $C = \left[C(T,n)e^{2n\pi}\right]^{-1}$, onde $C(T,n)$ é como em (3.63).

Da Proposição (3.3) e da desigualdade acima temos que o operador $\Lambda$ define um produto interno em $\mathcal{Y}$ da seguinte maneira:

$$((f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4))_{\mathcal{Y}} = \langle \Lambda(f_1, f_2, f_3, f_4), (g_1, g_2, g_3, g_4) \rangle_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}}$$

Isto pois, do exposto acima é evidente que esta é uma aplicação linear estritamente positiva.

Mostremos agora que

$$\Lambda : \mathcal{Y} \longrightarrow \mathcal{Y}'$$

é um isomorfismo.

De fato, a desigualdade (3.92) mostra que $\Lambda$ é injetor. Veremos agora que o operador $\Lambda$ também é sobrejetivo. Com efeito, posto que $\Lambda$ define um produto interno em $\mathcal{Y}$, podemos aplicar o Teorema da Representação de Riesz e obter que dado $(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0) = U^* \in \mathcal{Y}'$ existe um único $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) = U \in \mathcal{Y}$ tal que $\langle U^*, v \rangle = (U, v) = \langle \Lambda U, v \rangle_{\mathcal{Y}', \mathcal{Y}}\ \forall\ v \in \mathcal{Y}$, ou seja, $\Lambda U = U^*$. Portanto concluímos que $\Lambda$ é um isomorfismo.

Isto mostra que dado algum $(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0) \in \mathcal{Y}'$ existe $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) = \Lambda^{-1}(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$ tal que a solução correspondente de (3.71) no sentido de transposição satisfaz $\psi(0) = \rho_0$, $-\psi_t + V\delta\big|_{t=0} = \rho_1$, $-V\big|_{t=0} = \mu_0$, $V_t + \psi(0, t)\big|_{t=0} = \mu_1$.

O controle que obtemos é da forma $\beta = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho u_{tt})$, onde $u$ corresponde a solução $(\eta, u)$ do sistema (3.29), com dados iniciais $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) = \Lambda^{-1}(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$, onde $(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$ são dados por

$$\rho_0 = \psi_0,\ \rho_1 = -\psi_1 + V_0\delta_0,\ \mu_0 = -V_0,\ \mu_1 = V_1 + \psi_0(0) \tag{3.93}$$

Das identidades acima, Proposição (3.3) e Proposição (1.64) obtemos que

$$\begin{aligned} \|\beta\|^2_{H^{-2}(0,T)} \leq |\rho u_{tt}|^2_{L^2(0,T)} &\leq C\|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|^2_{\mathcal{Y}} = C\|\Lambda^{-1}(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)\|^2_{\mathcal{Y}} \\ &\leq C\|(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)\|^2_{\mathcal{Y}'} \leq C\left\{\|(\psi_1, \psi_0, V_1, V_0)\|^2_{\mathcal{Y}'} + |\psi_0(0)|^2\right\} \end{aligned}$$

como queríamos. $\square$

**Observação 3.21.** *Para obtermos a desigualdade acima, usamos o fato que se* $f \in L^2(0,T)$ *então* $f'' \in H^{-2}(0,T)$. *Mostremos a afirmação acima. Tome* $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$, *então*

$$|\langle f'', \varphi \rangle| = |\langle f, \varphi'' \rangle| \leq \|f\|_{L^2(0,T)} \|\varphi''\|_{L^2(0,T)}$$

*o que implica*

$$|\langle f, \varphi'' \rangle| \leq \|f\|_{L^2(0,T)} \|\varphi\|_{H_0^2(0,T)} \ \forall \ \varphi \in \mathcal{D}(0,T)$$

*Por densidade concluímos que*

$$|\langle f'', v \rangle| \leq \|f\|_{L^2(0,T)} \|v\|_{H_0^2(0,T)} \ \forall \ v \in H_0^2(0,T)$$

*e portanto* $f'' \in H^{-2}(0,T)$ *e ainda tomando o supremo tem-se que*

$$\|f''\|_{H^{-2}(0,T)} \leq \|f\|_{L^2(0,T)}$$

*como havíamos afirmado.*

**Observação 3.22.** *A demonstração do Teorema (3.17) nos mostra uma dependência contínua do controle com respeito aos dados iniciais. Mais precisamente*

$$\|\beta_n\|^2_{H^{-2}(0,T)} \leq C_n \left\{ \|(\psi_1, \psi_0, V_1, V_0)\|^2_{\mathcal{Y}'} + |\psi_0(0)|^2 \right\} \tag{3.94}$$

*para quaisquer dados iniciais* $(\psi_1, \psi_0, V_1, V_0)$ *como no enunciado do Teorema (3.17).*

Para concluirmos o estudo de controlabilidade unidimensional, resta-nos estudar o controle para o caso $n = 0$, que é o que faremos na próxima seção.

## 3.6 Controlabilidade: O Caso $n = 0$

Nesta seção demonstraremos um resultado controlabilidade para o caso $n = 0$, e que juntamente com os resultados obtidos na seção anterior nos permitirá encontrar o controle procurado para o caso bidimensional.

**Teorema 3.23.** *Assuma que $T > 2$ e $n = 0$. Então, para todo $(\psi_0, \psi_1, V_0, V_1) \in \mathcal{Y}'$ tal que $\psi_0$ é contínua em $y = 0$ existe um controle $\beta \in H^{-2}(0,T)$ com suporte compacto tal que a solução $(\psi, V)$ de (5) satisfaz*

$$\begin{cases} \psi(T) = V_1 + \psi_0(0), & \psi_t(T) \equiv 0 \ em \ \ (0,1) \\ V(T) = V_0 - \int_0^1 \psi_1 dy, & V_t(T) = 0 \end{cases} \tag{3.95}$$

**Observação 3.24.** *Como mencionamos na introdução (veja (8)), este resultado afirma que, quando $n = 0$ toda solução de (5) pode ser levada a uma configuração de equilíbrio a qual é a priori determinada pelos dados iniciais.*

**Demonstração**: Em primeiro lugar observamos que para provar o Teorema (3.23) é equivalente a exibir para quaisquer dados iniciais como no enunciado do Teorema (3.23) e satisfazendo as suposições adicionais

$$V_1 + \psi_0(0) = 0, \quad V_0 - \int_0^1 \psi_1 dy = 0 \tag{3.96}$$

então existe um controle $\beta$ tal que

$$\begin{cases} \psi(T) \equiv \psi_t(T) \equiv 0 \ em \ \ (0,1) \\ V(T) = V_t(0) = 0 \end{cases}$$

Realmente, isto é uma conseqüência imediata da observação feita na introdução que mostra isso quando a integral de $\beta$ é zero as seguintes identidades se satisfazem

$$\begin{aligned} V_t(T) + \psi(0,T) &= V_1 + \psi_0(0) \\ V(T) - \int_0^1 \psi_t(y,T) &= V_0 - \int_0^1 \psi_1 dy dy \end{aligned}$$

Deste modo, em seguida enfocaremos os dados iniciais $(\psi_0, \psi_1, V_0, V_1)$ satisfazendo (3.96). Para o sistema adjunto

$$\begin{cases} \eta_{tt} - \eta_{yy} = 0 & em \ \ (0,1) \times (0,T) \\ \eta_y(1) = 0 & para \ \ t \in \ (0,T) \\ \eta_y(0) = u_t & para \ \ t \in \ (0,T) \\ u_{tt} - \eta_t(0) = 0 & para \ \ t \in \ (0,T) \\ \eta(0) = \eta^0, \ \ \eta_t(0) = \eta^1 & em \ \ (0,1) \\ u(0) = u^0, \ \ u_t(0) = u^1. \end{cases} \tag{3.97}$$

Vamos considerar o subespaço $\mathcal{Y}_0$ de $\mathcal{Y}$.

$$\mathcal{Y}_0 = \left\{(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}; \quad u_1 - \eta_0(0) = 0, \ \int_0^1 \eta_1 dy + u_0 = 0\right\}$$

Consideremos agora um dado inicial $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$ e demonstraremos que a solução corresponde em (3.97) permanece em $\mathcal{Y}_0$.

Primeiro analisaremos o caso em que $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0 \cap D(A^1)$. Neste caso a solução $(\eta, u)$ correspondente satisfaz o sistema (3.97) em quase todo ponto. Da primeira equação, temos

$$0 = \int_0^1 \eta_{tt} - \int_0^1 \eta_{yy} = \int_0^1 \eta_{tt} - \eta_y\big|_0^1 = \int_0^1 \eta_{tt} - \eta_y(1) + \eta_y(0).$$

Logo de $(3.97)_2$ e $(3.97)_3$ temos que

$$0 = \int_0^1 \eta_{tt} dt + u_t \quad \Longrightarrow \quad 0 = \left(\int_0^1 \eta_t dt + u\right)_t$$

integrando esta última desigualdade de 0 a $t$ obtemos

$$0 = \int_0^1 \eta_t(y,t) dy + u(t) - \left(\int_0^1 \eta_t(y,0) + u(0)\right)$$

Como os dados iniciais pertencem a $\mathcal{Y}_0$ segue que

$$0 = \int_0^1 \eta_t dy + u(t).$$

Agora como

$$u_{tt} - \eta_t(0) = (u_t - \eta(0))_t = 0,$$

integrando de 0 a $t$ obtemos

$$u_t(t) - \eta(0,t) - (u_t(0) - \eta(0,0)) = 0$$

Como $u_t(0) - \eta(0,0) = 0$, segue que $u_t(t) - \eta(0,t) = 0$

Logo a solução forte do problema correspondente a um dado inicial em $\mathcal{Y}_0$ permanece em $\mathcal{Y}_0$.

No caso geral vamos aplicar um argumento de regularização do dado inicial e passar o limite.

De maneira mais precisa, se $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$, consideremos uma sucessão de elementos $(\eta_0^m, \eta_1^m, u_0^m, u_1^m) \in \mathcal{Y}_0 \cap D(A^1)$ tal que

$$(\eta_0^m, \eta_1^m, u_0^m, u_1^m) \longrightarrow (\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \ \ em \ \ \mathcal{Y}_0$$

Se denotarmos por $(\eta^m, u^m)$ a solução forte do problema (3.97) correspondente ao dado inicial $(\eta_0^m, \eta_1^m, u_0^m, u_1^m)$ obtemos que:

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \eta_t^m(y,t)dy + u^m(t) = 0 \\ \\ u_t^m(t) - \eta^m(0,t) = 0 \end{cases}$$

Agora usando (iii) do Teorema (3.1) e passando o limite nas relações se obtém

$$\begin{cases} \displaystyle\int_0^1 \eta_t(y,t)dy + u(t) = 0 \\ \\ u_t(t) - \eta(0,t) = 0 \end{cases}$$

onde $(\eta, u)$ é a solução de (3.97) correspondente ao dado inicial $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)$.

Obtemos assim que, neste caso, a solução também permanece em $\mathcal{Y}_0$, concluindo nossa afirmação.

Agora, dado $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$ primeiramente resolvemos (3.97) e então o sistema retrógrado

$$\begin{cases} \psi_{tt} - \psi_{yy} = 0 & em \ \ (0,1) \times (0,T) \\ \psi_y(1,t) = 0 & para \ \ t \in (0,T) \\ \psi_y(0,t) = -V_t(t) & para \ \ t \in (0,T) \\ V_{tt} + \psi_t(0,t) = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t)) & para \ \ t \in (0,T) \\ \psi(T) = \psi_t(T) = 0 & em \ \ (0,1) \\ V(T) = V_t(T) = 0. \end{cases} \tag{3.98}$$

onde $\rho$ é como na demonstração do teorema (3.17).

Procedendo como na demonstração da Proposição (3.19) podemos mostrar que (3.98) possui uma única solução definida por transposição tal que o traço (3.93) está bem definido. Por outro lado, integrando as equações em (3.98) podemos deduzir que:

$$\int_0^1 \rho_1(y)dy = 0 \ \text{ e } \ \mu_1 = 0 \tag{3.99}$$

De fato, temos que $\psi_{tt} - \psi_{yy} = 0$ e portanto

$$\int_0^1 \psi_{tt}dy - \int_0^1 \psi_{yy}dy = o, \quad \text{ou} \quad \text{seja,} \quad \int_0^1 \psi_{tt}dy - \psi_y(1) + \psi_y(0) = 0$$

ou ainda

$$\int_0^1 \psi_{tt}(y,t)dy - V_t(t) = 0$$

agora integrando de 0 a $T$, obtemos

$$\int_0^T \int_0^1 (\psi_t(y,t)dy - V(t))_t = \int_0^1 (\psi_t(y,t)dy - V(t))\Big|_0^T = 0,$$

donde segue

$$\int_0^1 \rho_1(y)dy = 0$$

Temos ainda que, $V_{tt} + \psi_t(0,t) = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t))$, integrando essa igualdade de 0 a $T$ deduzimos que

$$-V_t(0) - \psi(0,0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mu_1 = V_t + \psi(0,t)\big|_{t=0} = 0$$

como havíamos afirmado.

**Observação 3.25.** *Os resultados acima apresentados foram obtidos através de argumentos clássicos de densidade, e ainda* $\int_0^1 \rho_1(y)dy$ *é na realidade a dualidade* $\langle \rho_1, 1\rangle_{(H^1(0,1))'H^1(0,1)}$.

Vamos denotar por $Z$ o subespaço de $\mathcal{Y}'$ satisfazendo (3.99). Mais precisamente:

$$Z = \left\{ (\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0) \in \mathcal{Y}' : \int_0^1 \rho_1(y)dy = 0 \ \text{ e } \ \mu_1 = 0 \right\}$$

Mostremos agora que a quantidade $\left[ \|\eta_{0y}\|^2_{L^2(0,1)} + \|\eta_1\|^2_{L^2(0,1)} + |u_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ define uma norma em $\mathcal{Y}_0$ induzida por $\mathcal{Y}$. Primeiro vejamos que ela define uma norma. Para isso, seja $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$. tal que

$$\left[ \|\eta_{0y}\|^2_{L^2(0,1)} + \|\eta_1\|^2_{L^2(0,1)} + |u_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}} = 0,$$

logo $\eta_1 = 0$, $u_1 = 0$ e $\eta_{0y} = 0$ o que implica que $\eta_0 = $ cte. Como $\eta_1 = 0$ logo $u_0 = 0$ e ainda como $u_1 = 0$ tem se $\eta_0(0) = 0$ e consequentemente $\eta_0 = 0$, donde podemos concluir que a quantidade acima realmente define uma norma. Para verificarmos que esta norma é equivalente a norma induzida por $\mathcal{Y}$, veja que $\| \,.\, \|_{\mathcal{Y}_0} \leq \| \,.\, \|_{\mathcal{Y}}$, restando apenas a desigualdade contrária. Para obtermos tal desigualdade, basta apenas majorar o termo $|\eta_0|^2_{L^2(0,1)}$ por combinações de termos que aparecem na norma de $\mathcal{Y}_0$. Para isso veja que

$$|\eta_0(y)| = \left| \int_0^y \eta_{0y}(s)ds + u_1 \right| \leq \left| \int_0^y \eta_{0y}(s)ds \right| + |u_1| \leq \left( \int_0^1 \eta_{0y}^2(s)ds \right)^{\frac{1}{2}} + |u_1|$$

elevando ao quadrado e integrando obtemos

$$|\eta_0|^2_{L^2(0,1)} \leq 2 \left( |\eta_{0y}|^2_{L^2(0,1)} + |u_1|^2 \right),$$

e portanto temos que $\| \,.\, \|_{\mathcal{Y}_0} \leq \| \,.\, \|_{\mathcal{Y}} \leq k \| \,.\, \|_{\mathcal{Y}_0}$ como queríamos.

Veremos agora que $Z$ é na realidade o dual de $\mathcal{Y}_0$. De fato, o espaço $\mathcal{Y}_0'$ é isomorfo a um espaço quociente de $\mathcal{Y}'$. Para verificarmos esta afirmação vamos definir em $\mathcal{Y}'$ a seguinte relação de equivalência:

$$S_1, S_2 \in \mathcal{Y}', S_1 \equiv S_2 \Leftrightarrow \langle S_1 - S_2, U_0 \rangle \forall U_0 \in \mathcal{Y}_0.$$

Usando a equivalência das normas e do Teorema de Hahn-Banach temos que

$$\mathcal{Y}_0' = \mathcal{Y}' \Big|_{\mathcal{Y}_0}$$

e portanto a aplicação

$$\begin{array}{llll} L: & \mathcal{Y}_0' & \longrightarrow & \mathcal{Y}'/\equiv \\ & S_0 & \longmapsto & L(S_0) = \Pi(\overline{S}_0) \end{array}$$

é um isomorfismo, onde $\overline{S}_0$ é tal que $\overline{S}_0 \in \mathcal{Y}'$ e $\overline{S}_0 \Big|_{\mathcal{Y}_0} = S_0$.

Mostremos agora que $Z$ é isomorfo a $\mathcal{Y}'/\equiv$.

<u>Afirmação:</u> A aplicação

$$\Pi : Z \longrightarrow \mathcal{Y}'/\equiv$$

é um isomorfismo, onde $\Pi$ é a projeção restrita a $Z$ sobre $\mathcal{Y}'/\equiv$.

De fato, seja $S_1 = (\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$ e $S_2 = (\beta_1, \beta_0, \alpha_1, \alpha_0)$ pertencentes a $Z$ tal que $\Pi(S_1) = \Pi(S_2)$. Sendo assim $\langle S_1 - S_2, U_0\rangle = 0 \forall\, U_0 \in \mathcal{Y}_0$. Consideremos agora um elemento $U^1 = (\eta^0, \eta^1, u^0, u^1) \in \mathcal{Y}\backslash\mathcal{Y}_0$, ou seja, $\displaystyle\int_0^1 \eta^1(y)dy = c_1$ e $\mu^1 - \eta^0(0) = c_2$. Observemos que

$$\widetilde{U}_0 = (\widetilde{\eta}^0, \widetilde{\eta}^1, \widetilde{u}^0, \widetilde{u}^1) = (\eta^0 + c_2, \eta^1, u_0 - c_1, u_1) \in \mathcal{Y}_0$$

e portanto

$$\langle S_1 - S_2, \widetilde{U}_0\rangle = 0,$$

sendo $S_1 - S_2$ linear temos que

$$\langle S_1 - S_2, \widetilde{U}_0\rangle = \langle S_1 - S_2, U^1\rangle + \langle S_1 - S_2, U^2\rangle = 0$$

onde $U^2 = (c_2, 0, -c_1, 0)$. É fácil ver que $\langle S_1 - S_2, U^2\rangle = 0$ e com isso temos que $\langle S_1 - S_2, U^1\rangle = 0$, sendo $U^1 \in \mathcal{Y}\backslash\mathcal{Y}_0$ arbitrário segue que $S_1 = S_2$, donde concluímos que $\Pi$ é injetora.

Mostremos agora que $\Pi$ é sobrejetora. Seja $C$ uma classe de equivalência de $\mathcal{Y}'/\equiv$ e $S_1 = (\rho^1, \rho^0, \mu^1, \mu^0) \in C$ tal que $\displaystyle\int_0^1 \rho^1(y)dy = c_1$ e $\mu^1 = c_2$, se $c_i = 0, i = 1, 2$ temos que $S_1 \in Z$, caso contrário considere um elemento $S_2 = (\beta^1, \beta^0, \alpha^1, \alpha^0) \in C$.

Desta forma $\langle S_1 - S_2, U_0\rangle = 0 \forall\, U_0 \in \mathcal{Y}_0$. Considere agora $S^\bullet = (-\delta_0 c_1, -c_2, -c_2, c_1) \in \mathcal{Y}'$ e observe que

$$S^\star = S_1 + S^\bullet \in Z.$$

Agora veja que

$$\langle S^\star - S_2, U^0\rangle = \langle S_1 + S^\bullet - S_2, U^0\rangle = \langle S_1 - S_2, U^0\rangle + \langle S^\bullet, U^0\rangle = 0 \;\forall\; U^0 \in \mathcal{Y}_0$$

Desta forma $S^\star \in C$, logo podemos concluir que $Z \cong \mathcal{Y}'/\equiv$, e conseqüentemente $\mathcal{Y}_0' \cong Z$.

Como na demonstração do Teorema (3.17) podemos definir o operador linear e contínuo

$$\Lambda : \mathcal{Y}_0 \longrightarrow Z,$$

que associa o traço $(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0) \in Z$ em (3.93) para cada $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$.

Temos também que:

$$\langle \Lambda(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1), (\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \rangle = \int_0^T \rho(t)|u_{tt}(t)|^2 dt$$

Devido ao Teorema (3.15) e Observação (3.16) deduzimos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\langle \Lambda(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1), (\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \rangle \geq C \|(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1)\|_{\mathcal{Y}}^2 \ \ \forall \ \ (\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) \in \mathcal{Y}_0$$

visto que a quantidade $\left[ |\eta_{0y}\|_{L^2(0,1)}^2 + \|\eta_1\|_{L^2(0,1)}^2 + |u_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$ define uma norma induzida por $\mathcal{Y}$.

Do exposto acima, e de forma análoga ao que fizemos na demonstração do teorema anterior, deduzimos que $\Lambda : \mathcal{Y}_0 \longrightarrow Z$ é um isomorfismo.

Logo, para todo dado inicial como no enunciado do Teorema (3.23) e tal que (3.96) se satisfaça definimos $(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0) \in Z$ por (3.93). O controle procurado é então $\beta = -\frac{d^2}{dt^2}(\rho(t)u_{tt}(t))$ onde $u$ é a segunda componente da solução $(\eta, u)$ de (3.97) com dados iniciais $(\eta_0, \eta_1, u_0, u_1) = \Lambda^{-1}(\rho_1, \rho_0, \mu_1, \mu_0)$. Com isto concluímos a prova do Teorema (3.23). $\square$

Tendo em mãos todos os resultados até agora apresentados, estamos aptos estudar a controlabilidade para o caso bidimensional. Isto será feito no próximo capítulo.

# Capítulo 4

# Controlabilidade do Sistema Bidimensional

Neste capítulo nos propomos a estudar o seguinte problema: Dado $T$ suficientemente grande e um dado inicial $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ em um espaço que está em nossa disposição, encontrar um controle $\beta = \beta(x,t) \in H^{-2}(0,T; L^2(0,1))$ tal que a solução do sistema

$$\begin{cases} \Phi_{tt} - \Delta\Phi = 0 & em \quad \Omega \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial \nu} = 0 & sobre \;\; \Gamma_1 \times (0,\infty) \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = -W_t & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_{tt} - W_{xx} + \Phi_t = \beta & sobre \;\; \Gamma_0 \times (0,\infty) \\ W_x(0,t) = W_x(1,t) = 0 & para \;\; t \;\; \in \;\; (0,\infty) \\ \Phi(0) = \Phi^0, \quad \Phi_t(0) = \Phi^1 & em \;\; \Omega \\ W(0) = W^0, \quad W_t(0) = W^1 & sobre \;\; \Gamma_0. \end{cases} \tag{4.1}$$

satisfaça as seguintes relações

$$\begin{cases} \Phi(T) = \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = W_t(T) = 0 \end{cases} \tag{4.2}$$

Dito de outra maneira, queremos controlar o sistema mediante um termo $\beta$ que representa uma força distribuída que atua na parte flexível $\Gamma_0$ da fronteira.

O que vamos obter é um resultado de controlabilidade parcial onde a relação (4.2) será substituída por

$$\begin{cases} \Phi(T) = c_1 = cte & \Phi_t(T) = 0 \\ W(T) = c_2 = cte & W_t(T) = 0 \end{cases} \tag{4.3}$$

onde as constantes $c_1$ e $c_2$ são determinadas de maneira única en função dos dados iniciais do sistema.

Para alcançarmos nosso principal objetivo, faremos algumas considerações para obtermos o resultado de controlabilidade para o sistema bidimensional.

Fixemos algum $T > 2$.

Vamos usar o método de decomposição de Fourier descrito na introdução. Assim desenvolvemos os dados iniciais $(\Phi^0, \Phi^1, W^0, W^1)$ a serem controlados em série ode Fourier:

$$\begin{cases} \Phi^0 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_0^n(y)\cos(n\pi x); \ \phi^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_1^n(y)\cos(n\pi x), \\ W^0 = \sum_{n=0}^{\infty} V_0^n(y)\cos(n\pi x), \ \ W^1 = \sum_{n=0}^{\infty} V_1^n(y)\cos(n\pi x). \end{cases}$$

Vamos assumir que para cada $n = 0, 1, ...$ os dados iniciais satisfazem as condições impostas nos Teoremas (3.17) e (3.23). Fixemos $\rho_0^n = \psi_0^n$, $\rho_1^n = -\psi_1^n + V_0^n\delta_0$, $\mu_0^n = -V_0^n$, $\mu_1^n = V_1^n + \psi_0^n(0)$.

Vamos introduzir o seguinte espaço de dados iniciais:

$$H = \left\{ \left(\phi^0, \phi^1, W^0, W^1\right) : \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left\| \left(\rho_n^1, \rho_n^0, \mu_n^1, \mu_n^0\right) \right\|_{\mathcal{Y}'}^2 = \left\| \left(\phi^0, \phi^1, W^0, W^1\right) \right\|_H^2 < \infty \right\} \tag{4.4}$$

onde as constante $C_n$ são dadas em (3.94).

Com todos os resultados e considerações até aqui apresentados, estamos aptos a enunciar e demonstrar o principal resultado deste trabalho.

**Teorema 4.1.** *Assuma que $T > 2$. Então, para cada dado inicial $(\phi^0, \phi^1, W^0, W^1) \in H$ existe um controle $\beta \in H^{-2}(0, T; L^2(0, 1))$ tal que a solução $(\phi, W)$ de (2) satisfaz*

$$\begin{cases} \phi(T) \equiv \mu^1 = \int_0^1 W^1(x)dx + \int_0^1 \phi^0(x, 0)dx, \quad \phi_t(T) \equiv 0 & em \ \ \Omega \\ W(T) \equiv < \rho^1, 1 >= \int_0^1 W^0(x)dx - \int_0^1 \int_0^1 \phi^1(x, y)dxdy, W_t(T) = 0 & em \ \ (0, 1) \end{cases} \tag{4.5}$$

*E ainda existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\beta\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} \leq C\| \left(\phi^0, \phi^1, W^0, W^1\right) \|_H, \forall \left(\phi^0, \phi^1, V^0, V^1\right) \in \ H \tag{4.6}$$

**Demonstração**: Devido ao Teorema (3.17) e ao Teorema (3.23) para todo $n = 0, 1...$ existe um controle $\beta_m \in H^{-2}(0,T)$ tal que a solução $(\psi_m, V_m)$ de (5) satisfaz

$$\begin{cases} \psi^m(T) \equiv \psi_t^m(T) \equiv 0 \ em \ \ (0,1) \\ V^m(T) = V_t^m(0) = 0 \end{cases} \tag{4.7}$$

para todo $n \geq 1$ e

$$\begin{cases} \psi^0(T) \equiv \mu^1, & \psi_t^0(T) \equiv 0 \ em \ \ (0,1) \\ V^0(T) = \langle \rho_1, 1 \rangle, & V_t^0(0) = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

quando $n = 0$.

Por outro lado

$$\|\beta_n\|^2_{H^{-2}(0,T)} \leq C_n \|(\rho_1^n, \rho_0^n, \mu_1^n, \mu_0^n)\|^2_{\mathcal{Y}'_n}. \tag{4.9}$$

Vamos construir o seguinte controle para o sistema bidimensional

$$\beta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \cos(n\pi x) \tag{4.10}$$

Para prosseguirmos levaremos em conta o seguinte lema.

**Lema 4.2.** *Se $\varphi(x,t) = \alpha(t)h(x)$, onde $\alpha \in H^{-2}(0,T)$ e $h \in L^2(0,1)$ então $\varphi \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$ e*

$$\|\varphi\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} = \|\alpha\|_{H^{-2}(0,T)}.\|h\|_{L^2(0,1)} \tag{4.11}$$

**Demonstração**: De fato, como o conjunto $\{\theta\xi, \theta \in \mathcal{D}(0,T) \ e \ \xi \in \mathcal{D}(0,1)\}$ é total em $H_0^2(0,T;L^2(0,1))$ e

$$\langle \varphi, \theta\xi \rangle = \langle \alpha, \theta \rangle \langle h, \xi \rangle,$$

segue que

$$|\langle \varphi, \theta\xi \rangle| \leq \|\alpha\|_{H^{-2}(0,T)} \|h\|_{L^2(0,1)} \|\theta\xi\|_{H_0^2(0,T;L^2(0,1))} \tag{4.12}$$

e portanto tomando o supremo em (4.12) quando $\|\theta\xi\|_{H_0^2(0,T;L^2(0,1))} \leq 1$ temos que

$$\|\varphi\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} \leq \|\alpha\|_{H^{-2}(0,T)}.\|h\|_{L^2(0,1)} < \infty, \tag{4.13}$$

ou seja, $\varphi \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$.

Por outro lado,

$$|\langle\alpha,\theta\rangle\langle h,\xi\rangle| = |\langle\varphi,\theta\xi\rangle| \leq \|\varphi\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))}.\|\theta\xi\|_{H_0^2(0,T;L^2(0,1))}$$

e portanto $|\langle\alpha,\theta\rangle\langle h,\xi\rangle| \leq \|\varphi\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))}$ se $\|\theta\xi\|_{H_0^2(0,T;L^2(0,1))} \leq 1$.

Tomando o supremo no primeiro membro com $\|\theta\|_{H_0^2(0,T)} \leq 1$ e $\|\xi\|_{L^2(0,1)\leq 1}$ obtemos que

$$\|\alpha\|_{H^{-2}(0,T)}\|h\|_{L^2(0,1)} \leq \|\varphi\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} \tag{4.14}$$

Logo de (4.13) e (4.14) obtemos (4.11). □

**Observação 4.3.** *Considere $L_n(x) = \cos(n\pi x)$. Temos que $\|L_n\|^2_{L^2(0,1)} = \dfrac{1}{2}$ para $n = 1, 2, ...$ e ainda $(L_n, L_{n+1})_{L^2(0,1)} = 0$ para $n = 0, 1, 2, ...$*

Voltando ao nosso problema, como o espaço em questão é um espaço de Hilbert, então temos a identidade $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + 2(a,b) + \|b\|^2$. Desta informação, da Observação (4.3) e do Lema (4.2) segue que:

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} &= \|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\beta_k L_k\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\|\sum_{k=0}^{n}\beta_k L_k\|^2 \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\|\beta_0\|^2_{H^{-2}(0,T)} + \frac{1}{2}\|\beta_1\|^2_{H^{-2}(0,T)} + ... + \frac{1}{2}\|\beta_n\|^2_{H^{-2}(0,T)}\right] \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|\beta_n\|^2_{H^{-2}(0,T)}
\end{aligned}$$

Dos extremos, (4.9) e de (4.4) temos que

$$\begin{aligned}
\|\beta\|_{H^{-2}(0,T;L^2(0,1))} &\leq \sum_{n=0}^{\infty}\|\beta_n(t)\|^2_{H^{-2}(0,T)} \\
&\leq \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left\|\left(\rho_n^1, \rho_n^0, \mu_n^1, \mu_n^0\right)\right\|^2_{\mathcal{Y}'} = \left\|\left(\phi^0, \phi^1, W^0, W^1\right)\right\|^2_H < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto $\beta \in H^{-2}(0,T;L^2(0,1))$. Por outro lado,

$$\begin{cases} \phi(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^m(y,t)\cos(n\pi x) \\ W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V^m(t)\cos(n\pi x) \end{cases}$$

é solução de (2) com $\beta$ dado por (4.10). Verificaremos agora que as funções definidas acima satisfazem (4.5) no tempo $t = T$. De fato,

$$\Phi(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi^n(y,T)\cos(n\pi x) = V_0^1 + \psi_0^0(0) = \mu_1$$

por outro lado,

$$V_0^1 = \int_0^1 W^1(x)dx \quad e \quad \psi_0^0(0) = \int_0^1 \Phi^0(x,0)dx$$

e portanto $\Phi(T) = \int_0^1 W^1(x)dx + \int_0^1 \Phi^0(x,0)dx$ e consequentemente $\Phi_t(T) = 0$.

Analogamente se tem que

$$W(T) = \int_0^1 W^0(x)dx - \int_0^1 \int_0^1 \Phi^1(x,y)dxdy \quad e \quad W_t(T) = 0.$$

E com isto concluímos a prova deste teorema. $\square$

# Bibliografia


[1] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[2] BRÉZIS, H.: **Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert**. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[3] BRÉZIS, H. e CAZENAVE, T.: **Nonlinear Evolution Equations.** preliminary version of chapters 1,2 and 3 and the appendix. 18 Oct 1994.

[4] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[5] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[6] CAZENAVE, T. e HARAUZ, A.: **An Introdution to Semilinear Evolutions Equations** Clarendon Press - Oxford, 1998.

[7] DAUTRAY, R., LIONS, J. L.:**Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology.**, Vol. II. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, New York, 1990.

[8] GRISVARD, P. **Elliptic Problems in Nonsmooth Domains.** London: Pitman Publishing Limited, 1985.

[9] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. John Wiley and Sons, New Dehli, 1989.

[10] LIONS, J. L.: **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[11] LIONS, J.L., MAGENES. E.: **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications.**, Vol. I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[12] MEDEIROS, L. A.: **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[13] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[14] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos e Metodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[15] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[16] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[17] MILLA MIRANDA, M.: **Análise espectral em espaços de Hilbert**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[18] MOREIRA GOMES, A.: **Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicação às Equações de Evolução.** 2ª edição, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1999.

[19] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[20] RIVERA, J.E. M. **Teoria das Distribuições e Equações Diferenciais Parciais**. Textos Avançados, Rio de Janeiro, Petrópolis, LNCC. 1999.

[21] RUIZ, A. **Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential**. J. Math. Pures Appl., v.71, p.455-467, 1992.

[22] MICU, S.D. **Analisis de un Sistema Hibrido Bidimensional Fluido-Estructura.** Ph. D. dissertation at Universidad Complutense de Madrid, 1996.

[23] MICU, S.D., ZUAZUA, E. **Asymptotic for the spectrum of a fluid/struture hybrid system arising in the control of noise.** SIAM J. MATH, Anal., 29 (1998), 4, 967-1001.

[24] MICU, S.D., ZUAZUA, E. **Boundary Controllability of a Linear Hybrid System Arising in the Control of Noise.** SIAM. J. Cont. Optim. 35 (1997), nº 5, 1614-1638.

[25] MICU, S.D., ZUAZUA, E. **Stabilization and Periodic Solutions of a Hybrid System Arising in the Control of Noise.** International Series of Numerical Mathematics, Vol 126, Birkhauser Verlag, (1996), 4, 207-222.