Sobre um problema misto para a equação de Boussinesq num domínio não cilíndrico

Flávio Roberto Dias Silva

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Cícero Lopes Frota

Maringá - PR

Março - 2010

FLAVIO ROBERTO DIAS SILVA

Sobre um problema misto para a equação de Boussinesq num domínio não cilíndrico.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos nescessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Cícero Lopes Frota.

Maringá - PR

2010

FLÁVIO ROBERTO DIAS SILVA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr. Cícero Lopes Frota (orientador) ....

Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino ....

Universidade Estadual de Maringá

Prof. Dr. Fágner Dias Araruna ....

Universidade Federal da Paraíba

Maringá - PR

Março de 2010

Agradecimentos

Primeiramente agradeço as pessoas que foram indispensáveis para a realização desse trabalho.

Ao professor Cícero pela orientação e pelo apoio durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao professor Aldevino que me apoiou desde o meu primeiro dia em Maringá e ajudou a escrever a minha historia de mestrado, que sem ele teria sido muito diferente. Dentre o muito devo agradecer pela casa, comida, pela companhia, pelo playstation, pela internet, aos almoços de domingo com a $P(x)$ correndo e latindo entre os Miuras vermelhos etc...

Agradeço também aos muitos amigos do (B-3)-UNESP, Malcon, Carlos (Bom de Bico), Bauru, Ruivão, Humbertão, Luciano(Zanga), ao Max, mano Oda, ao Fernas com quem dividi o quarto no B-3, Puff, Jorge Willian, H.U., Zé Brajé, Rafael (Catarro), Moises, e tanta gente que nem é possível citar o nome, que sempre me receberam bem em suas casas quando estive de volta, com convite ou sem aviso, e me proporcionaram as melhores lembranças e as melhores historias que eu tenho para contar.

Agradeço ao programa de pós-graduação em Matematica da UEM por me dar a oportunidade de realizar este trabalho e a Capes pelo apoio financeiro.

"O topo das montanhas não é tão alto

para quem sai do chão e espera o céu"

Conteúdo

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema de valores iniciais e de fronteira para a equação de Boussinesq, num domínio com fronteira movel $\widehat{\mathcal{Q}}$

$$\left|\begin{array}{lcl} u_{tt} - (u(x,t) + u_t(x,t) + u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx}(x,t) & = & 0 \quad em \quad \widehat{\mathcal{Q}} \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) & = & 0 \quad para \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x); \quad u_t(x,0) = u_1(x) & & \quad para \quad x \in [\alpha_0, \beta_0] \end{array}\right.$$

Aqui α e β são funções reais definidas em $[0,\infty)$ com $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e $\widehat{\mathcal{Q}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \alpha(t) < x < \beta(t) \quad t > 0 \quad \}$. Provamos a existencia de solução fraca global, o decaimento exponencial da energia associada e um resultado sobre a unicidade de solução.

ABSTRACT

In this work we study the initial boundary value problem for the Boussinesq's equation in moving boundary domain $\widehat{\mathcal{Q}}$:

$$\left| \begin{array}{lcl} u_{tt} - (u(x,t) + u_t(x,t) + u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx}(x,t) & = & 0 \quad in \quad \widehat{\mathcal{Q}} \\ u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) & = & 0 \quad for \quad t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x); \quad u_t(x,0) = u_1(x) & & for \quad x \in [\alpha_0, \beta_0] \end{array} \right.$$

Here α and $\beta$are real functions defined on $[0,\infty)$ with $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ and $\widehat{\mathcal{Q}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2, \alpha(t) < x < \beta(t) \quad t > 0 \quad \}$. We prove the existence of global weak solution, the exponential decay for the associate energy and a uniqueness result.

Introdução

Neste trabalho estudamos a existência e unicidade de solução fraca global para a equação dissipativa de Boussinesq (unidimensional) em um domínio não cilíndrico. A equação recebe esse nome devido ao trabalho do matemático e físico frances Joseph Valentin Boussinesq.

Joseph Valentin Boussinesq nasceu em Saint-André-de-Sangonis, 13 de março de 1842 e faleceu em Paris, 19 de fevereiro de 1929. Seu pai era camponês, sua mãe morreu quando ele tinha 15 anos e sua educação inicial foi conduzida por um tio padre que lhe ensinou latim e grego. Logo passa a estudar matemática e mecânica, enquanto também se interessa por religião e filosofia. Aos 20 anos começa a ensinar no Collège d'Agde. Nesta época publicou seu primeiro artigo no Comptes Rendus da Academia Francesa de Ciências, sobre o problema de um jato d'água incidindo sobre uma placa plana. A seguir se mudou para Vigas, onde realizou seus primeiros estudos sobre ótica. Apresentou sua tese de doutorado em 1867, na Academia Francesa de Ciências, sobre a propagação de calor em um meio heterogêneo. Ao mesmo tempo publicou um artigo na Academia, sobre pequenas deformações de corpos elásticos sujeitos a uma carga exercida nas três direções principais. Em 1868, durante uma visita aos alpes franceses, começa a se interessar por hidrodinâmica. Examinando escoamentos turbulentos, tomou contato com os experimentos de Henri Emile Bazin e reconheceu a origem da formação dos turbilhões como sendo ação da viscosidade. Contrariamente a Navier e a Stokes, Boussinesq deduziu que a ação da viscosidade não depende unicamente do fluido, mas também da posição dentro do escoamento e da intensidade da turbulência. Foi o primeiro pesquisador a quantificar a turbulência. Em 1886 foi eleito Membro da Academia de Ciências de Paris. Em 1872 foi professor de física na Faculdade de Ciências de Lille e École Centrale de Lille. Posteriormente lecionou, na Faculdade de Ciências de Paris, mecânica e física experimental (1886-1896), depois física, matemática e cálculo das probabilidades até 1913. Seus principais trabalhos relacionam-se à Mecânica Geral e Física, às teorias de propagação do calor e da óptica, à capilaridade, à elasticidade e resistência dos materiais.

Em 1872, Boussinesq foi um dos primeiros a analisar a teoria de ondas de água, para o caso de aguas rasas e de ondas de pequena amplitude, idealizadas por Scott-Russell em 1834 ver Boussinesq[2]. Em seu trabalho foi deduzido uma classe de equações diferenciais dissipativas e não-lineares que são agora conhecidas como as equações de Boussinesq. A equação de Boussinesq, considerada por exemplo em Boussinesq[3] e Craig[9], pode ser escrita como a seguinte equação de evolução:

$$u_{tt} - (u + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0 \tag{1}$$

onde $u = u(x,t)$ é a componente vertical da velocidade na superfície livre de um fluído irrotacional, a é uma constante real positiva e b é uma constante real, ambas dependendo da profundidade do fluido. Quando $b > 0$, a equação (1) em um domínio cilíndrico descreve pequenas oscilações transversais não-lineares de uma barra elástica e denomina-se na literatura como a "boa" equação de Boussinesq. Para $b < 0$, (1) é chamada de a equação "má" de Boussinesq; veja Zabusky[20].

A equação de Boussinesq (1) com a e b positivos sob ação de um forte amortecimento interno, que significa a existência de uma amortecimento estrutural cu_{xxt}, com $c > 0$, modela oscilações não-lineares da barra na presença de viscosidade; assim (1) torna-se

$$u_{tt} - (u + cu_t + au^2)_{xx} + bu_{xxxx} = 0. \tag{2}$$

Neste trabalho faremos uma apresentação didática dos resultados contidos na referência Frota[11] sobre o problema de valor inicial e de fronteira para equação dissipativa, não-linear e unidimensional de Boussinesq, dentro de um domínio não cilíndrico de $\mathbb{R}^2$

que tem pequenos deslocamentos, tanto crescentes como decrescentes, a saber:

$$u_{tt}(x,t) - (u(x,t) + u_t(x,t) + u^2(x,t))_{xx} + u_{xxxx}(x,t) = 0 \quad em \quad \widehat{\mathcal{Q}}, \tag{3}$$

$$u(\alpha(t),t) = u(\beta(t),t) = u_x(\alpha(t),t) = u_x(\beta(t),t) = 0 \quad para \quad t > 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = u_0(x); \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad para \quad x \in [\alpha_0, \beta_0], \tag{5}$$

aqui α e β são funções reais definidas em $[0,\infty)$, $\alpha(0) = \alpha_0 < \beta_0 = \beta(0)$ e

$$\widehat{\mathcal{Q}} = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \alpha(t) < x < \beta(t) \quad \text{e} \quad t > 0\}$$

é o domínio não cilíndrico.

O intervalo $[\alpha_0, \beta_0]$ representa a barra na posição de repouso. As extremidades da barra variam pela ação de forças e tem posição $[\alpha(t), \beta(t)]$ no tempo $t > 0$.

Neste trabalho, provamos a existência e a unicidade de solução global fraca para (3) - (5) bem como o decaimento exponencial para a energia associada quando $t \to \infty$. As funções α e β não são necessariamente monótonas, implicando que o domínio não-cilíndrico $\widehat{\mathcal{Q}}$ não precisa ser um domínio crescente com respeito ao parâmetro t.

O trabalho está dividido em dois capítulos. No capítulo 1 enunciamos resultados necessários para o estudo feito e as notações usadas no decorrer do trabalho. No capítulo 2 provamos a existência e o decaimento de solução fraca global (Teorema 2.3) e um resultado sobre unicidade de solução (Teorema 2.4). Para provarmos a existência de solução, usamos o método de Faedo-Galerkin: Projetamos o problema em um subespaço de dimensão finita de $H_0^2(0,1)$ e consideramos um problema aproximado, provamos a existência de solução para o problema aproximado e fazemos estimativas convenientes para passarmos o limite e mostramos que o limite da seqüencia das soluções dos problemas aproximados é a solução procurada para o problema (3) - (5). Demosntramos o resultado de unicidade via o método de Ladyzhenskaya que poder ser visto, igualmente em Límaco-Medeiros[13].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, apresentaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

1.1 Espaços Funcionais

1.1.1 Distribuições

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais, cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito, necessitamos de algumas definições.

Sejam $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ pontos do $\mathbb{R}^n$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2 ..., \alpha_n)$ as n-uplas de números inteiros não negativos. Considerando $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 ... + \alpha_n$ e $\alpha! = \alpha_1!\alpha_2!...\alpha_n!$ denotamos o operador derivação, em $\mathbb{R}^n$, por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ uma função. Definimos o *suporte* da função φ e denotamos por $supp(\varphi)$, o fecho em Ω do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$. Quando $supp(\varphi)$ é compacto, dizemos que φ tem suporte compacto em Ω. Denotamos por $C_0^\infty(\Omega)$

o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que possuem suporte compacto em Ω.

O *espaço das funções testes* em Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$, é o espaço vetorial $C_0^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência: Dadas uma sequência $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ de funções de $C_0^\infty(\Omega)$ e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ dizemos que

$$\varphi_\nu \to \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega) \tag{1.1}$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

i) $supp(\varphi_\nu) \subset K, \ \forall \nu$ e $supp(\varphi) \subset K$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre $K, \ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Uma *distribuição* sobre Ω é uma forma linear $T : \mathcal{D}(\Omega) \longmapsto \mathbb{R}$ sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência dada em (1.1), isto é

$$\langle T, \varphi_\nu \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \text{ em } \mathbb{R} \text{ sempre que } \varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(\Omega).$$

Chamamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$ o *espaço vetorial das distribuições* sobre Ω. Dizemos que $(T_\nu)_{\nu\in\mathbb{R}}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$, converge para $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e escreveremos

$$T_\nu \to T \text{ em } \mathcal{D}(\Omega)$$

quando

$$\langle T_\nu, \varphi \rangle \to \langle T, \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

Dada uma distribuição T sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a derivada distribucional de ordem α da distribuição T, denotada por $D^\alpha T$, é definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Com essa definição, uma distribuição $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ possui derivada distribucional de todas as ordens e $D^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso a aplicação

$$\begin{aligned} D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) &\rightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\mapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

é linear e contínua.

1.1.2 Espaços $L^p(\Omega)$

Sejam Ω um subconjunto do $\mathbb{R}^n$ e p um número real tal que $1 \leq p < \infty$. Denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções mensuráveis u, definidas em Ω tais que $|u|^p$ é Lebesgue integrável sobre Ω. O espaço $L^p(\Omega)$, munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

é um espaço de Banach.

Se define $L^\infty(\Omega)$ como o conjunto formado pelas funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tais que u é mensurável e existe uma constante C tal que $|u(x)| \leq C$ para quase todo $x \in \Omega$. Uma norma em $L^\infty(\Omega)$ é dada por

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} = \inf\{C; |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega\},$$

a qual o torna um espaço de Banach.

Em particular, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert, cujo produto interno e norma denotamos respectivamente por

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx$$

e

$$\|u\| = \big(u, u\big)^{1/2} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Seja $1 < p < \infty$. Diz-se que p' é o *índice conjugado* de p se $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$. No caso $p = 1$ definimos como seu índice conjugado $p' = \infty$.

Proposição 1.1 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^{p'}(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$. *Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |uv| \leq ||u||_{L^p(\Omega)} ||v||_{L^{p'}(\Omega)}$$

Demonstração: Ver [4].

□

Proposição 1.2 ***(Desigualdade de Minkowski)*** *Sejam* u, $v \in L^p(\Omega)$ *e* $1 \leq p \leq \infty$ *então*

$$||u+v||_{L^p(\Omega)} \leq ||u||_{L^p(\Omega)} + ||v||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [18].

□

Denota-se por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u \in L^p(\mathbb{K})$, para todo subconjunto compacto $\mathbb{K} \subset \Omega$.

Proposição 1.3 ***(Du Bois Raymond)*** *Sejam* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)\ dx = 0, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

então $u = 0$ *quase sempre em* Ω.

Demonstração: Ver [5].

□

Definição 1.4 *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. *Definimos a distribuição* $T_u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ *por:*

$$\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

Mostra-se sem dificuldades que T_u é uma distrinbuição. Do Lema de Du Bois Raymond segue-se que para cada u $\in L^1_{loc}(\Omega)$, temos T_u univocamente determinada por u sobre Ω, quase sempre, no seguinte sentido: se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ então $T_u = T_v$ se e somente se $u = v$ quase sempre em Ω . Por esta razão, identificase u com a distribuição T_u por ela definida e diz-se a distribuição u ao invés dde dizer a distribuição T_u .

1.1.3 Espaços de Sobolev

Nesta seção veremos a definição e alguns resultados sobre os espaços de Sobolev, ferramenta indispensável para a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais.

Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $m \geq 1$. O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que existe $w_\alpha \in L^p(\Omega)$ onde

$$T_{w_\alpha} = D^\alpha T_u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\,n} \text{ tal que } |\alpha| \leq m$$

Simbolicamente

$$\begin{aligned} W^{m,p}(\Omega) &= \{u \in L^p(\Omega);\ \text{tal que existe } w_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ onde } T_{w_\alpha} = D^\alpha T_u \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \\ &\quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\,n} \text{ com } |\alpha| \leq m\} \\ &= \Big\{u \in L^p(\Omega); \exists w_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tal que } \int_\Omega w_\alpha(x)\varphi(x)dx \\ &\quad = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\,n} \text{ com } |\alpha| \leq m\Big\} \\ &= \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^{\,n} \text{ com } |\alpha| \leq m\}\,. \end{aligned}$$

Uma norma em $W^{m,p}(\Omega)$ é dada por

$$||u||^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx, \text{ se } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$||u||_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess } |D^\alpha u(x)| \; dx,$$

a qual o torna um espaço de Banach. No caso $p = 2$, escrevemos $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ e munindo-o com o produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v),$$

temos um espaço de Hilbert.

Define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, ou seja,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Proposição 1.5 (Desigualdade de Poincaré) *Suponhamos que Ω seja um aberto limitado do $\mathbb{R}^n$. Então pra todo $1 \leq p < \infty$, existe uma constante C (dependendo da medida de Ω e de p) tal que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla\|_{L^p(\Omega)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: ver[4].

□

Quando Ω é limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ então a norma em $W_0^{m,p}(\Omega)$ dada por

$$||u||^p = \sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \; dx$$

é equivalente a norma induzida por $W^{m,p}(\Omega)$.

Representa-se por $W^{-m,p'}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$ e p' é o índice conjugado de p. Por $H^{-m}(\Omega)$ denota-se o dual topológico de $H_0^m(\Omega)$.

Existem diversos teoremas de imersão para os espaços de Sobolev. No caso da reta obtemos uma melhor regularidade para as funções de $W^{m,p}(I)$, $I \subset \mathbb{R}$.

Proposição 1.6 *Seja $I=(a,b)$ um intervalo da reta $\mathbb{R}$, temos com $m \geq 1$:*

a) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C^{m-1,\lambda}\left(\overline{I}\right)$ *com* $0<\lambda\leq 1-\dfrac{1}{p}$ *se* $p>1$

b) $W^{m,p}(I) \hookrightarrow C_b^{m-1}\left(\overline{I}\right)$ *se* $p=1$.

Demonstração: ver [16]

□

Em particular, considerando $I=(0,1)$ temos que

$$H^1(0,1) \hookrightarrow C^{0,\lambda}\left([0,1]\right), \quad 0<\lambda\leq \frac{1}{2}$$

$$H^2(0,1) \hookrightarrow C^{1,\lambda}\left([0,1]\right), \quad 0<\lambda\leq \frac{1}{2}$$

Nós observamos que

$$||v|| \leq ||v_y|| \leq ||v_{yy}|| \tag{1.2}$$

e

$$||v||_{L^\infty(0,1)} \leq ||v_y|| \qquad \left(H_0^1(I) \hookrightarrow L^\infty(I)\right) \tag{1.3}$$

para todo $v \in H_0^2(0,1)$. De fato: A primeira desigualdade é dada pela desigualdade de Poincaré, a segunda segue de:

$$\begin{aligned} |v(y)| &= \left|\int_0^y v_y(s)ds\right| \\ &\leq \int_0^1 |v_y(s)|ds \\ &\leq \left(\int_0^1 |v_y(s)|ds\right)^{1/2}\left(\int_0^1 ds\right)^{1/2} \\ &= \|v_y\| \quad \forall y \in [0,1]; \end{aligned}$$

tomando o supremo temos o desejado.

1.2 Espaços de Funções a Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotamos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \to X$, infinitamente diferenciáveis cujo suporte é um compacto contido em $(0,T)$. Dizemos que uma sequência

$$\varphi_\nu \longrightarrow \varphi \text{ em } \mathcal{D}(0,T;X)$$

se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

i) $supp(\varphi_\nu)$ e $supp(\varphi)$ estão contidos em K, para todo ν;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{d^k}{dt^k}\varphi_\nu(t) \longrightarrow \dfrac{d^k}{dt^k}\varphi(t)$ em X, uniformemente em K.

O espaço das aplicações lineares contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \to X$ é linear e se $\theta_\nu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\nu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que

$$S_\nu \longrightarrow S \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;X)$$

se

$$\langle S_\nu, \theta \rangle \longrightarrow \langle S, \theta \rangle \;\text{ em } X, \forall \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das *distribuições vetoriais* de $(0,T)$ com valores em X.

Denota-se por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T ||u(t)||_X^p dt < \infty.$$

Denota-se por $L^\infty(0,T;X)$, o espaço das (classes de) funções vetoriais $u:(0,T)\to X$ mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\sup_{t\in[0,T]} \text{ess}||u(t)||_X < \infty.$$

Se X é Hilbert com produto interno $(\cdot,\cdot)_X$, então o espaço $L^2(0,T,X)$ munido do produto interno

$$(u,v)_{L^2(0,T,X)} = \int_0^T \big(u(t),v(t)\big)_X dt$$

é também um espaço de Hilbert.

1.3 Topologias Fracas, Espaços Reflexivos e Separáveis

Nesta seção temos algumas propriedades das topologias fraca e fraca $*$, assim como resultados de convergência nestas topologias envolvendo a reflexividade e a separabilidade dos espaços.

1.3.1 Topologia Fraca

Considerando E um espaço de Banach, a *topologia fraca* $\sigma(E,E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f\in E'$.

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$uma sucessão convergente para x na topologia fraca $\sigma(E,E')$. Quando não houver possibilidade de confusão diremos apenas que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco para x e denotaremos por

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E$$

Proposição 1.7 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então*

i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f,x_n\rangle \to \langle f,x\rangle\,,\quad$ em $\mathbb{R}\forall f\in E'$;

ii) Se $x_n\to x$ em E, então $x_n\rightharpoonup x$ em E;

iii) Se $x_n\rightharpoonup x$ em E, então $||x||_E$ é limitada e $||x||_E \leq \liminf ||x_n||_E$;

iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Ver [4].

□

1.3.2 Topologia Fraca $*$

Sejam E um espaço de Banach e $x \in E$ fixo. A aplicação

$$\begin{array}{rcl} J_x : E' & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle \end{array}$$

é linear e contínua e, portanto, $J_x \in E''$, $\forall x \in E$. Deste modo, definamos a aplicação $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$, a qual é chamada de *injeção canônica* de E em E''.

A topologia fraca $*$, ou $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que faz contínuas todas as aplicações J_x.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão convergente para f na topologia fraca $*$ $\sigma(E', E)$. Com vistas a simplificação das notações escreveremos apenas que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fraco $*$ para f, ou simbolicamente

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E',$$

quando não houver possibilidade confusão.

Proposição 1.8 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sucessão em E', então*

i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$ em $\mathbb{R}$ $\forall x \in E$;

ii) Se $f_n \to f$ forte, então $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$;

iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $\sigma(E', E'')$, então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E';

iv) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E', então $||f_n||_{E'}$ está limitada e $||f||_{E'} \leq \liminf ||f_n||_{E'}$;

v) Se $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' e $x_n \to x$ em E, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$ em $\mathbb{R}$.

Demonstração: Ver [4].

□

1.3.3 Espaços Reflexivos e Espaços Separáveis

Dizemos que um espaço de Banach E é *reflexivo* quando a injeção canônica $J : E \to E''$ é sobrejetora.

Um espaço métrico E é dito *separável* quando existe um subconjunto $M \subset E$ enumerável e denso em E.

Teorema 1.9 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em E', então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$tal que $f_{n_k} \overset{\star}{\rightharpoonup} f$em E'. $(\sigma(E', E))$.*

Demonstração: Ver [4].

□

Teorema 1.10 *Seja E um espaço de Banach reflexivo. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência limitada em E. Então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$ tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em E.*

Demonstração: Ver [4].

□

1.4 Teoria Espectral

Nesta seção caminharemos para enunciar o Teorema espectral para operadores compactos simétricos. O teorema espectral é uma ferramenta muito útel, a versão que enunciaremos nos garante a existência de uma base ortonormal de vetores próprios em um espaço de Hilbert H com produto interno $(\cdot, \cdot)$.

Definição 1.11 *Um operador A de H é denominado compacto, quando para toda sequência limitada $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de vetores de H, podemos extrair de $(Au_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência convergente em H. Em outras palavras, A leva conjuntos limitados em conjunto relativamente compactos.*

Definição 1.12 *Seja $A : D(A) \subset H \longmapsto H$ um operador linear de H o operador $A^* : D(A^*) \subset H \longmapsto H$ que verifica*

$$\big(Au, v\big) = \big(u, A^*v\big) \quad \forall u \in D(A) \text{ e } v \in D(A^*)$$

onde

$$D(A^*) = \{v \in H, \exists v^* \in H \text{ que verifica } \big(Au, v\big) = \big(u, v^*\big), \quad \forall u \in D(A)\}$$

é chamado operador adjunto de A

Definição 1.13 *Um operador linear A de H é chamado simétrico se seu domínio $D(A)$ é denso em H e*

$$\big(Au, v\big) = \big(u, Av\big)$$

Teorema 1.14 *Seja A um operador compacto, simétrico e não-nulo de H. Então, podemos construir uma coleção finita ou enumerável $\{\lambda_\nu\}$ de valores próprios não-nulos de A e uma coleção $\{v_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de correspondentes vetores próprios tais que*

(i) Se $\{\lambda_\nu\}$ é enumerável, então

$$|\lambda_\nu| \geq |\lambda_{\nu+1}| \quad \text{para todo } \nu \text{ e } \lambda_\nu \longrightarrow 0$$

(ii) $\{v_\nu\}$ um sistema ortonormal de H e é válida a representação

$$Au = \sum_\nu \big(Au, v_\nu\big)v_\nu = \sum_\nu \lambda_\nu\big(u, v_\nu\big)v_\nu$$

($\sum\limits_{\nu}$ indica soma finita ou enumerável.)

(iii) Todos os valores próprios não-nulos de A estão na coleção $\{\lambda_\nu\}$, portanto, a coleção de valores próprios não-nulos de A é no máximo enumerável.

Demonstração: Ver [4]

□

Teorema 1.15 (Teorema Espectral para operadores simétricos e compactos) *Seja H um espaço de Hilbert separável e A um operador compacto e simétrico de H. Então, existe um sistema ortonormal e completo $\{e_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de H, formado por vetores próprios de A.*

Demonstração: Ver[4]

□

A partir deste teorema podemos garantir a existencia de uma base de $H_0^2(0,1)$ a qual é ortonormal em $L^2(0,1)$ ortogonal em $H_0^1(0,1)$ e ortogonal em $H_0^2(0,1)$ a saber

$$\begin{aligned} \Delta \quad : H_0^2(0,1) \quad &\longrightarrow \quad L^2(0,1) \\ u \qquad &\longmapsto \quad \Delta u = u_{xx} \end{aligned}$$

afirmamos

· Δ é operador inverso de um operador compacto

· Δ é simétrico

(a verificação destas afirmações pode ser vista em [10].)
pelo teorema espectral para operadores compactos e simétricos (Teorema 1.15) podemos

escolher $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ como sendo uma base de auto funções para $H_0^2(0,1)$ associadas ao operador Δ, ortonormal em $L^2(0,1)$, além disso

$$\begin{aligned}\big(w_i,w_j\big)_{H_0^1(0,1)} &= \int_0^1 w_{iy}w_{jy}dy\\ &= -\int_0^1 w_{iyy}w_j dy\\ &= -\lambda_i\int_0^1 w_i w_j dy\\ &= -\lambda_i\big(w_i,w_j\big) = \begin{cases} -\lambda_i & \text{se} \quad i=j\\ 0 & \text{se} \quad i\neq j\ .\end{cases}\end{aligned}$$

Portanto ortogonal em $H_0^1(0,1)$ e

$$\begin{aligned}\big(w_i,w_j\big)_{H_0^2(0,1)} &= \int_0^1 w_{iyy}w_{jyy}dy\\ &= \int_0^1 \lambda_i w_i\lambda_j w_j dy\\ &= \lambda_i\lambda_j\int_0^1 w_i w_j dy\\ &= \lambda_i\lambda_j\big(w_i,w_j\big) = \begin{cases} \lambda_i^2 & \text{se} \quad i=j\\ 0 & \text{se} \quad i\neq j\ ,\end{cases}\end{aligned}$$

ou seja, ortogonal também em $H_0^2(0,1)$.

1.5 Alguns Resultados

1.5.1 Teorema de Carathéodory

O teorema de Carathédory é indispensável para a resolução de nosso problema, por isso o enunciamos aqui e uma demonstração pode ser encontrada na referência [8].

Dadas $a,b\in\mathbb{R}^+,\ \ t_0\in\mathbb{R}$ e $x_0\in\mathbb{R}^n$ considere o retangulo em $\mathbb{R}^{n+1}$ definido por

$$\{(t,x)\in\mathbb{R}^{n+1};|t-t_0|<a \text{ e } \|x-x_0\|_{\mathbb{R}^n}<b\}$$

Diz-se que a função $f : R \subset \mathbb{R}^{n+1} \longmapsto \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory no retangulo R se

i) $f(x,t)$ é mensurável em t para cada x fixado;

ii) $f(x,t)$ é contínua em x para cada t fixo e

iii) para todo compacto $K \subset R$ existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que $||f(t,x)||_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t)$, para todo par $(t,x) \in K$.

Uma solução local para o problema de valor inicial

$$\left| \begin{array}{rcl} x'(t) & = & f(t,x(t)) \\ x(t_0) & = & x_0 \end{array} \right. \tag{1.4}$$

é uma função $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, definida e diferenciavel num intervalo da reta $I = \{t \in \mathbb{R}; \quad |t - t_0| < \beta \quad \beta > 0\}$ tal que

$$x'(t) = f(t,x(t)), \qquad \forall t \in I \text{ e } x(t_0) = x_0$$

Teorema 1.16 ***(de Carathéodory)*** *Seja $f : R \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory no retangulo R. Então o problema* (1.4) *tem uma solução local.*

Corolário 1.17 *Sejam $U = [0,T] \times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; \ \|x\| \leq b\}$, onde $b > 0$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathédory. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de 1.4 tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo I, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, para todo $t \in I$, M independente de I e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0,T]$.*

1.5.2 Mais Alguns Resultados

Enuciamos nesta seção mais alguns resultados utilizados no texto.

Proposição 1.18 ***(Desigualdade de Young)*** *Se a e b são números reais não negativos então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$$

sempre que $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$.

Demonstração: Ver [4].

□

Proposição 1.19 ***(Lema de Gronwall)*** *Sejam $z \in L^1(0,T)$ e $\varphi \in C([0,T])$ funções não negativas $c \geq 0$ uma constante tais que*

$$\varphi(t) \leq c + \int_0^t z(s)\varphi(s)ds, \ \forall t \in [0,T].$$

Então

$$\varphi(t) \leq c.e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

Em aprticular, se $c = 0$ então $\varphi \equiv 0$.

Demonstração: Ver [16].

□

Teorema 1.20 ***(Representação de Riesz-Fréchet)*** *Seja H um espaço de Hilbert. Dada $\varphi \in H'$, existe $f \in H$ único tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = (f, u), \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$||f||_H = ||\varphi||_{H'}$$

Demonstração: Ver [4].

□

Se chama *base hilbertiana*, ou simplesmente base, de um espaço de Hilbert H a toda sequência (e_n) de elementos de H tais que

i) $||e_n||_H = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}, \; (e_m, e_n)_H = 0 \; \forall m, \; n, \; m \neq n.$

ii) O espaço vetorial gerado pelos $\{e_n\}$ é denso em H.

Com essa definição temos o

Teorema 1.21 *Todo espaço de Hilbert separável admite uma base Hilbertiana.*

Demonstração: Ver [4].

□

Teorema 1.22 ***(Aubin-Lions)*** *Sejam B_0, B e B_1 espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Então*

$$W = \{u \in L^{p_0}(0,T;B_0); u_t \in L^{p_1}(0,T;B_1)\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, W munido da norma

$$||u||_W = ||u||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||u||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

é um espaço de Banach e a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver[1]

□

Proposição 1.23 ***(Lema de Lions)*** *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções pertencentes a* $L^q(Q)$ *com* $1 < q < \infty$. *Se*

i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

ii) $||u_\nu||_{L^q(Q)} \leq c$, *para todo* $\nu \in \mathbb{N}$,

então $u_\nu \rightharpoonup u$ *em* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver[15]

$\square$

Lema 1.24 *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach tal que* $X \hookrightarrow Y$. *Se* $u \in L^p\big(0,T;X\big)$ *e* $u' \in L^p\big(0,T;Y\big)$, *onde* $1 \leq p \leq \infty$, *então* $u \in C^0\big([0,T];Y\big)$.

Demonstração: Ver[19]

$\square$

Lema 1.25 *Sejam* X *e* Y *dois espaços de Banach tais que* $X \hookrightarrow Y$ *e* X *é reflexivo. Se* $u \in L^\infty\big(0,T;X\big)$ *e* $u' \in L^p\big(0,T;Y\big)$, *onde* $1 \leq p \leq \infty$, *então* $u \in C^0_w\big([0,T];X\big)$, *isto é, a aplicação* $t \longmapsto \langle \xi, u(t)\rangle_{X,X'}$ *é continua em* $[0,T] \quad \forall \xi \in X'$.

Demonstração: Ver[19]

$\square$

Capítulo 2

Existência e Unicidade

Neste capítulo apresentaremos um estudo qualitativo do problema (3) - (5). Provaremos resultados sobre a existência de soluções fraca global e o decaimento exponencial da energia associada (Teorema 2.3), bem como um resultado de unicidade de solução (Teorema 2.4).

Mediante hipóteses convenientes sobre as funções α e β, que descrevem o comportamento da fronteira do domínio não cilíndrico, usando o método construtivo de Faedo - Galerkin provamos a existência de solução fraca global. A demonstração do resultado de unicidade esta baseada no método de Ladyzhenskaya empregado em Limaco e Medeiros [13].

Este capítulo está subdividido em três seções. Na seção 2.1 fixamos as hipóteses sobre o domínio não cilíndrico $\widehat{\mathcal{Q}}$, introduziremos o conceito de solução fraca global para o problema (3) - (5) e definimos a função energia associada. A seção 2.2 contempla um resultado de existência de solução fraca global e o decaimento exponencial da energia associada. Finalizamos com a seção 2.3 onde provaremos um resultado de unicidade de solução global.

2.1 Hipóteses e o Conceito de Solução

Suponhamos que as funções α e β, que definem o domínio não cilíndrico $\widehat{\mathcal{Q}}$ satisfazem as seguintes hipóteses:

(H_1) $\alpha',\ \beta',\ \alpha'',\ \beta''\ \in L^1([0,\infty[;\mathbb{R})$;

(H_2) Existe δ tal que $0 < \delta \leq \gamma(t) =: \beta(t) - \alpha(t)$, para todo $t \geqslant 0$;

(H_3) $|\alpha''(t) + y\gamma''(t)| \leqslant \frac{1}{\gamma(t)}|\alpha'(t) + y\gamma'(t)|^2$, para todo $y \in [0,1]$ e $t \geqslant 0$.

Precisamos também de mais uma hipótese sobre as funções, que garanta pequenas variações para as extremidades do domínio não-cilíndrico $\widehat{\mathcal{Q}}$.

Note que a partir de (H_1) podemos escrever

$$\gamma(t) = \int_0^t \Big[\beta'(s) - \alpha'(s)\Big] ds + (\beta_0 - \alpha_0), \quad \text{para todo } t \geqslant 0.$$

Utilizando que α', $\beta' \in L^1([0,\infty[,\mathbb{R})$ temos que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(t) \leqslant K \quad \text{para} \quad \text{todo} \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Consideremos o polinômio

$$P(Z) = 1/8 - (2K^2 + 11/2)Z - 42Z^2 - 4Z^3 - 8Z^4,$$

então $P(0) > 0$ e $P(1) < 0$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, a primeira raiz positiva de $P(Z)$ a qual denotamos por Z_0, está no intervalo $(0,1)$. Assim consideramos a hipótese adicional sobre α e β:

(H_4) $\Theta(t) := |\alpha'(t)| + |\beta'(t)| \leqslant min\{1, \frac{1}{8K}, \frac{Z_0}{K}\}$.

Como $|\alpha'(t) + y\gamma'(t)| \leqslant max\{|\alpha'(t)|, |\beta'(t)|\}$ *para todo* $y \in [0,1]$, de $(H4)$ nós deduzimos

$$|\gamma'(t)| \leq \Theta(t) \;\text{ e }\; |\alpha'(t) + y\gamma'(t)| \leq \Theta(t) \quad para \quad todo \quad t \geq 0 \quad e \quad y \in [0,1]. \tag{2.2}$$

Definimos

$$\gamma_0 = \gamma(0) = \beta_0 - \alpha_0$$

e

$$a_0(y) = \frac{1}{\gamma_0^2} - \left(\frac{\alpha'(0) - y\gamma'(0)}{\gamma_0}\right)^2 \quad \text{com } y \in [0,1]$$

Para $u_0 \in H^2(\alpha_0, \beta_0)$ e $u_1 \in L^2(\alpha_0, \beta_0)$ escreveremos

$v_0(y) = u_0(\alpha_0 + y\gamma_0)$ para $y \in [0,1]$;

$v_1(y) = u_1(\alpha_0 + y\gamma_0) + (\alpha'(0) + y\gamma'(0))u_{0x}(\alpha_0 + y\gamma_0)$ para $y \in [0,1]$ e

$$E_0 = \int_0^1 \left[|v_1(y)|^2 + a_0(y)|v_{0y}(y)|^2 + \frac{|v_{0yy}(y)|^2}{\gamma_0^4} + \frac{v_0(y)v_1(y)}{2\gamma_0^2} + \frac{|v_{0y}(y)^2|}{4\gamma_0^4} \right] dy. \tag{2.3}$$

Definição 2.1 *Dizemos que uma função real* $u = u(x,t)$ *definida em* $\widehat{Q}$ *é uma solução fraca global do problema de valor inicial e de fronteira* (3) - (5) *se:*

i) $$u \in L^\infty_{loc}\Big(0,\infty; H_0^2(\alpha(t),\beta(t))\Big), \quad u_t \in L^2_{loc}\Big(0,\infty; H_0^1(\alpha(t),\beta(t))\Big);$$

ii) Para todo $T > 0$ *e toda função* $\phi \in L^2\Big(0,T; H_0^2(\alpha(t),\beta(t))\Big)$ *tal que* $\phi_t \in L^2\Big(0,T; L^2(\alpha(t),\beta(t))\Big)$ *e* $\phi(0) = \phi(T) = 0$ *tem-se que* u *satisfaz a equação integral:*

$$-\int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_t(x,t)\phi_t(x,t)dxdt + \int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \Big(u(x,t) + u_t(x,t) + \Big[u^2(x,t)\Big]\Big)_x \phi_x(x,t)dxdt$$

$$+\int_0^T \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} u_{xx}(x,t)\phi_{xx}(x,t)dxdt = 0;$$

iii) $$u(x,0) = u_0(x) \text{ e } u_t(x,0) = u_1(x) \text{ para todo } x \in \big(\alpha(t),\beta(t)\big).$$

Definição 2.2 *Para cada função* u *solução fraca de* (3) - (5) *definimos a energia associada como sendo a função*

$E(u) : [0,\infty) \longmapsto \mathbb{R}$ *dada por*

$$E(u)(t) = \frac{1}{2}\left\{ ||u_t(t)||^2_{L^2(\alpha(t),\beta(t))} + ||u(t)||^2_{H_0^1(\alpha(t),\beta(t))} + ||u(t)||^2_{H_0^2(\alpha(t),\beta(t))} \right\}.$$

2.2 Existência de solução fraca global e decaimento exponencial

Nesta seção vamos provar a existência de solução fraca global para o problema (3) - (5), bem como o decaimento exponencial da energia associada. Utilizaremos o método construtivo de Faedo-Galerkin o qual consiste em: projetar nosso problema em sub-espaços de dimensão finita, obtendo uma seqüência de problemas aproximados; aplicar resultados da teoria de equações diferenciais ordinárias obtendo soluções aproximadas; a próxima etapa é a obtenção de estimativas a priori (limitações) apropriadas para as seqüencias de soluções aproximadas; finalizaremos aplicando resultados de compacidade os quais levarão a existência de uma subseqüência (da seqüência das soluções aproximadas) convergente, cujo o limite deverá ser a solução fraca global desejada.

Teorema 2.3 *(Existência de Solução e decaimento Exponencial)Seja* $(H_1) - (H_4)$ *asseguradas. Se* $u_0 \in H_0^2(\alpha_0, \beta_0)$ *e* $u_1 \in L^2(\alpha_0, \beta_0)$ *são dados tais que*

$$(128K^2 + 4)E_0 + \left(\frac{64K^2 + 2}{\delta^2}\right)\sqrt{E_0} < \frac{1}{8K^6}, \tag{2.4}$$

então existe pelo menos uma solução fraca global u *para o problema* (3) - (5)*. Além disso, existem constantes reais positivas* k_0, k_1 *tal que a energia:*

$$E(u)(t) \leqslant k_0 e^{-k_1 t} \quad \forall t \geq 0. \tag{2.5}$$

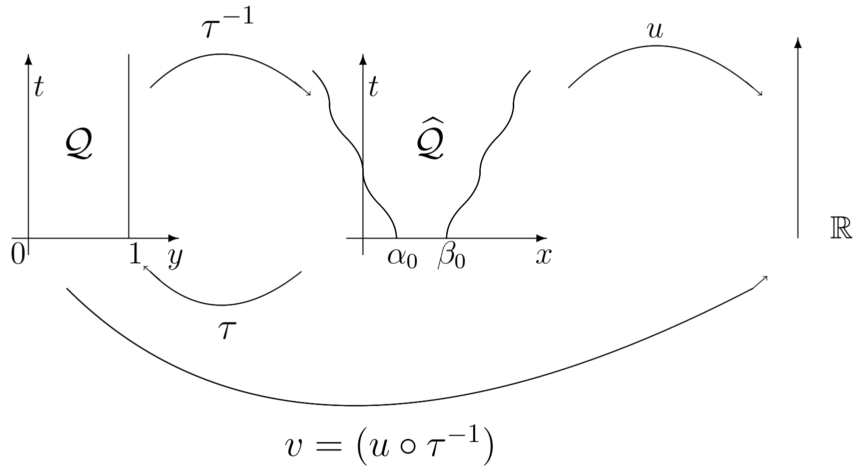
Demonstração:

A idéia é transformar o problema misto não-cilíndrico (3) - (5) em um outro problema misto sobre um domínio cilíndrico. Esta transformação será feira por meio de uma mudança de coordenadas (difeomorfismo) apropriada. A técnica que transforma problemas de fronteira móvel em problemas com fronteira fixa tem sido usada por vários autores; ver, por exemplo Límaco-Medeiros[13], Límaco et al.[12], Medeiros et al. [17], Clark et al.[7]. Seja $\mathcal{Q} = (0,1) \times [0,\infty)$ e $\mathcal{T} : \widehat{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathcal{Q}$ o difeomorfismo definido por:

$$\mathcal{T}(x,t) = (y,t) = \left(\frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}, t\right)$$

. Para cada função $u : \widehat{\mathcal{Q}} \longrightarrow \mathbb{R}$ colocamos

$$v(y,t) = (u \circ \mathcal{T}^{-1})(y,t) = u(x,t) \quad \forall (y,t) \in \mathcal{Q}.$$



Pela regra da cadeia, após vários cálculos e agrupando os termos convenientes, temos as seguintes identidades:

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) &= v_t(y,t) - \frac{1}{\gamma(t)}[\alpha'(t) + y\gamma'(t)]v_y(y,t); && (2.6)\\
u_{tt}(x,t) &= \frac{1}{\gamma^2(t)}\{2\gamma'(t)[\alpha'(t)+y\gamma'(t)] - \gamma(t)[\alpha''(t)+y\gamma''(t)]\}v_y(y,t) \\
&\quad + \frac{2}{\gamma(t)}[\alpha'(t)+y\gamma'(t)]v_{yt}(y,t) + \frac{1}{\gamma^2(t)}[\alpha'(t)+y\gamma'(t)]^2 v_{yy}(y,t) \\
&\quad + v_{tt}(y,t); && (2.7)\\
\frac{\partial^k u}{\partial x^k}(x,t) &= \frac{1}{\gamma^k(t)}\frac{\partial^k v}{\partial y^k}(y,t), \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad ; && (2.8)\\
u_{xxt}(x,t) &= -2\frac{\gamma'(y)}{\gamma^3(t)}v_{yy}(y,t) - \frac{1}{\gamma^3(t)}[\alpha'(t)+y\gamma'(t)]v_{yyy}(y,t) \\
&\quad + \frac{1}{\gamma^2}v_{yyt}(y,t). && (2.9)
\end{aligned}$$

Tendo em mente (2.6) - (2.9) podemos ver que o problema não cilíndrico (3) - (5) é transformado no problema cilíndrico

$$\begin{aligned} & v_{tt} + 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} v_{yy} - \frac{1}{\gamma^2(t)} v_{yyt} + \frac{1}{\gamma^4(t)} v_{yyyy} - \frac{\partial}{\partial y}(a(y,t)v_y); \\ & \quad +b(y,t)v_y + c(y,t)v_{yt} + d(y,t)v_{yyy} - \frac{1}{\gamma^2(t)}[v^2]_{yy} \quad = \quad 0 \quad em \quad \mathcal{Q} \; ; \quad (2.10) \\ & v(0,t) = v(1,t) = v_y(0,t) = v_y(1,t) = 0, \quad \forall t \geq 0; \quad (2.11) \\ & v(y,0) = v_0(y), \qquad v_t(y,0) = v_1(y), \quad \forall y \in [0,1], \quad (2.12) \end{aligned}$$

onde os coeficientes da equações (2.10) são dados por:

$$\begin{aligned} a(y,t) &= \frac{1}{\gamma^2(t)}\{1 - [\alpha'(t) - y\gamma'(t)]^2\}, \qquad b(y,t) = \frac{1}{\gamma(t)}[\alpha''(t) - y\gamma''(t)], \\ c(y,t) &= -\frac{2}{\gamma(t)}[\alpha'(t) - y\gamma'(t)], \qquad d(y,t) = \frac{1}{\gamma^3(t)}[\alpha'(t) - y\gamma'(t)]. \end{aligned}$$

Da Hipótese $(H4)$ e de (2.2) observamos que

$$a(y,t) \geq 0 \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } y \in [0,1].$$

Também observamos que de $u_0 \in H_0^2(\alpha_0, \beta_0)$ e $u_1 \in L^2(\alpha_0, \beta_0)$, obtemos que $v_0 \in H_0^2(0,1)$ e $v_1 \in L^2(0,1)$.

Agora que obtemos o problema cilíndrico equivalente, vamos verificar a existência da solução v. Iniciamos considerando o problema aproximado. Para tal seja $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço de Sobolev $H_0^2(0,1)$, ortonormal em $L^2(0,1)$ e ortogonal em $H_0^1(0,1)$ e $H_0^2(0,1)$.

Consideremos V_m o subespaço de $H_0^2(0,1)$ de dimensão finita gerado pelos m vetores $\{w_1, w_2, ...w_m\}$ da base escolhida. Para cada $m \in \mathbb{N}$ procuramos uma função da forma

$v^m(x,t) = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j(x)$ em V_m, solução do problema de valor inicial aproximado:

$$
\begin{aligned}
&(v_{tt}^m(t), w_k) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{tt}^m(t), w_k) - \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}^m, w_k) + \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}^m(t), w_{kyy}) \\
&- \big([a(y,t)v_y^m(t)]_y, w_k\big) + \big(b(y,t)v_y^m(t), w_k\big) + \big(c(y,t)v_{yt}^m(t), w_k\big) \\
&- \big(d(y,t)v_{yy}^m, w_{ky}\big) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v^m(t))^2]_{yy}, w_k\big) = 0 \qquad 1 \le k \le m
\end{aligned} \tag{2.13}
$$

$$
v^m(y,0) = v_0^m(y) = \sum_{j=1}^{m} \big(v_0(y), w_j\big) \longrightarrow v_0(y) \quad \text{em} \quad H_0^2(0,1), \tag{2.14}
$$

$$
v_t^m(y,0) = v_1^m(y) = \sum_{j=1}^{m} \big(v_1(y), w_j\big) \longrightarrow v_1(y) \quad \text{em} \quad L^2(0,1) \tag{2.15}
$$

2.2.1 Existência de solução para o problema aproximado

Note que (2.13) é um sistema de equações diferenciais ordinárias, não linear, de segunda ordem e (2.14), (2.15) são condições iniciais. Vamos reescrever esse sistema na forma matricial. Observemos que para cada k fixado:

$$
\big(v_{tt}^m(t), w_k\big) = \Big(\sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t) w_j, w_k\Big) = \sum_{j=1}^{m} g''_{jm}(t)\big(w_j, w_k\big) = g''_{km}(t); \tag{2.16}
$$

$$
\begin{aligned}
\big(v_{yy}^m(t), w_k\big) &= -\big(v_y(t), w_k\big) = -\Big(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_{jy}, w_{ky}\Big) = -\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(w_{jy}, w_{ky}\big) \\
&= -g_{km}(t)\|w_k\|_{H_0^1(0,1)};
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

$$
\big(v_{yyt}^m(t), w_{kyy}\big) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\big(w_{jyy}, w_{kyy}\big) = g'_{km}(t)\|w_k\|_{H_0^2(0,1)}; \tag{2.18}
$$

$$
\big(v_{yy}^m(t), w_{kyy}\big) = \Big(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_{jyy}(x), w_{kyy}\Big) = g_{km}(t)\|w_k\|_{H_0^2(0,1)}; \tag{2.19}
$$

$$
\begin{aligned}
-\big([a(y,t)v_y^m(t)]_y, w_k)\big) &= \big(a(y,t)v_y^m(t), w_{ky}\big) = \Big(a(y,t)\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_{jy}, w_{ky}\Big) \\
&= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(a(y,t)w_{jy}, w_{ky}\big). \qquad (2.20)
\end{aligned}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
\big(b(y,t)v_y^m(t), w_k\big) &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(b(y,t)w_{jy}, w_k\big); \qquad (2.21)\\
\big(c(y,t)v_{yt}^m(t), w_k\big) &= \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\big(c(y,t)w_{jy}, w_k\big); \qquad (2.22)\\
\big(d(y,t)v_{yy}^m(t), w_{ky}\big) &= \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(d(y,t)w_{jyy}, w_{ky}\big); \qquad (2.23)\\
\big([(v^m(t))^2]_{yy}, w_k\big) &= -\left(\left[\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j\right)^2\right]_y, w_{ky}\right). \qquad (2.24)
\end{aligned}
$$

E como

$$
\begin{aligned}
v^m(y,0) &= \sum_{j=1}^{m} \big(v_0, w_j\big)w_j(y) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(0)w_j(y)\\
v_t^m(y,0) &= \sum_{j=1}^{m} \big(v_1, w_j\big)w_j(y) = \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(0)w_j(y),
\end{aligned}
$$

temos:

$$
g_{jm}(0) = \big(v_0, w_j\big) \quad \text{e} \quad g'_{jm}(0) = \big(v_1, w_j\big) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq m. \qquad (2.25)
$$

Desta forma, utilizando (2.16) - (2.25), a partir do problema (2.13) - (2.15) obtemos o seguinte sistema de equações:

$$
\begin{aligned}
&g''_{km}(t) - \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)} g_{km}(t)\|w_k\|_{H_0^1(0,1)} - \frac{1}{\gamma^2(t)} g'_k(t)\|w_k\|_{H_0^2(0,1)} + \frac{1}{\gamma^4(t)} g_{km}(t)\|w_k\|_{H_0^2(0,1)} \\
&+ \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(a(y,t)w_{jy}, w_{ky}\big) + \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(b(y,t)w_{jy}, w_k\big) \sum_{j=1}^{m} g'_{jm}(t)\big(c(y,t)w_{jy}, w_k\big) \\
&- \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)\big(d(y,t)w_{jyy}, w_{ky}\big) + \frac{1}{\gamma^2(t)} \left(\left[\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \right)^2 \right]_y, w_{ky} \right) = 0 \\
&\hspace{22em} 1 \le k \le m; \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

$$g_{km}(0) = \big(v_0, w_k\big) \quad \text{para} \quad 1 \le k \le m; \qquad (2.27)$$

$$g'_{km}(0) = \big(v_1, w_k\big) \quad \text{para} \quad 1 \le k \le m. \qquad (2.28)$$

Considerando $m \in \mathbb{N}$ fixo, e escrevendo

$$
Y(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix}, \quad Y_0 = \begin{bmatrix} (u_0, w_1) \\ (u_0, w_2) \\ \vdots \\ (u_0, w_m) \end{bmatrix}, \quad Y_1 = \begin{bmatrix} (u_1, w_1) \\ (u_1, w_2) \\ \vdots \\ (u_1, w_m) \end{bmatrix},
$$

$$
\Big[A(t)\Big]_{m\times m} = \Big[\big(c(y,t)w_j, w_i\big)\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} - \frac{1}{\gamma^2(t)}\Big[\delta_{i,j}\|w_i\|_{H_0^2(0,1)}\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}},
$$

$$
\Big[B(t)\Big]_{m\times m} = \Big[\big(a(y,t)w_{jy}, w_{iy}\big)\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\Big[\delta_{i,j}\|w_i\|_{H_0^1(0,1)}\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} + \Big[\big(b(y,t)w_{jy}, w_i\big)\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}}
$$

$$
- \Big[\big(d(y,t)w_{jyy}, w_{iy}\big)\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}} + \frac{1}{\gamma^4(t)}\Big[\delta_{i,j}\|w_i\|_{H_0^2(0,1)}\Big]_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le m}},
$$

onde δ_{ij} denota o delta de Kronecker

$$
\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j \end{cases},
$$

$$\Big[C(t,Z(t))\Big]_{m\times 1} = \frac{1}{\gamma^2(t)}\left[\left(\left[\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t)w_j\right)^2\right]_y, w_{iy}\right)\right]_{1\le i\le m},$$

podemos escrever o sistema de equações (2.26) - (2.28) na forma

$$\begin{cases} Y''(t) + A(t)Y'(t) + B(t)Y(t) + C(t,Y(t)) = 0, \\ Y(0) = Y_0, \\ Y'(0) = Y_1. \end{cases} \tag{2.29}$$

Portanto encontrar uma solução do sistema (2.26) - (2.28) consiste em encontrar uma função

$$\begin{aligned} Y:\ [0,T_m] &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ t &\longmapsto Y(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

satisfazendo (2.29).

Com o objetivo de reduzirmos a ordem do problema de Cauchy (2.29), consideremos

$$\mathbb{Z}(t) = \begin{bmatrix} \mathbb{Z}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbb{Z}_m(t) \\ \mathbb{Z}_{m+1}(t) \\ \vdots \\ \mathbb{Z}_{2m}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix}$$

então

$$\mathbb{Z}(0) = \begin{bmatrix} Y(0) \\ Y'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \end{bmatrix} = \mathbb{Z}_0$$

e

$$
\begin{aligned}
\mathbb{Z}'(t) &= \begin{bmatrix} Y'(t) \\ Y''(t) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Y'(t) \\ -A(t)Y'(t) - B(t)Y(t) - C(t, Y(t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B(t) & -A(t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y(t) \\ Y'(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -C(t, Y(t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} Y'(t) \\ -A(t)Y'(t) - B(t)Y(t) - C(t, Y(t)) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & I \\ -B(t) & -A(t) \end{bmatrix} \mathbb{Z}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -C(t, Y(t)) \end{bmatrix} \\
&= \mathcal{A}(t)\mathbb{Z}(t) + \mathcal{C}(t, \mathbb{Z}(t)) \\
&= f(t, \mathbb{Z}(t))
\end{aligned}
$$

Logo (2.29) é equivalente ao seguinte sistema:

$$
\left\{ \begin{aligned} \mathbb{Z}'(t) &= f(t, \mathbb{Z}(t)) \\ \mathbb{Z}(0) &= \mathbb{Z}_0 \end{aligned} \right. \tag{2.30}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
f: \ [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} &\longmapsto \mathbb{R}^{2m} \\
(t, \mathbb{Z}) &\longrightarrow f(t, \mathbb{Z}) = \mathcal{A}(t)\mathbb{Z} + \mathcal{C}(t, \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

A existência das soluções aproximadas v^m é equivalente a existência de solução local para o problema de Cauchy (2.30). Assim nosso objetivo é aplicar o teorema de Caratheódory (Teorema 1.16) e para isso verifiquemos que a função f satisfaz as hipóteses deste teorema. Para simplificar a notação denotaremos os vetores de $\mathbb{Z} \in \mathbb{R}^{2m}$ na seguinte forma

$$\mathbb{Z} = \big(\overline{z_1}, \overline{z_2}, \cdots, \overline{z_m}, z_1.z_2, \cdots, z_m\big)$$

$\vdash$A função $f(t, \mathbb{Z})$ é contínua em relação a $\mathbb{Z}$ para cada t fixo. De fato, observemos que

$$\begin{aligned}
\|f(t,\mathbb{Z}) - f(t,\mathbb{Z}_0)\|_{\mathbb{R}^{2m}} &= \|\mathcal{A}(t)\mathbb{Z} + \mathcal{C}(t,\mathbb{Z}) - (\mathcal{A}(t)\mathbb{Z}_0 + \mathcal{C}(t,\mathbb{Z}_0))\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\
&= \|\mathcal{A}(t)(\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0) - \big(\mathcal{C}(t,\mathbb{Z}) - \mathcal{C}(t,\mathbb{Z}_0)\big)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\
&\leq \|\mathcal{A}(t)\|_{\mathbb{R}^{4m^2}} \cdot \|\mathbb{Z} - \mathbb{Z}_0\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\
&\quad + \|\mathcal{C}(t,\mathbb{Z}) - \mathcal{C}(t,\mathbb{Z}_0)\|_{\mathbb{R}^{2m}}. \qquad (2.31)
\end{aligned}$$

Temos ainda que

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(t,\mathbb{Z}) - \mathcal{C}(t,\mathbb{Z}_0)\|^2_{R^{2m}} &= \frac{1}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left(\left[\left(\sum_{j=1}^{m} z_j(t) w_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} z_{0j}(t) w_j \right)^2 \right]_y, w_{ky} \right)^2 \\
&\leq \frac{1}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} z_j(t) w_j \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{m} z_{0j}(t) w_j \right)^2 \right\|^2_{H_0^1(0,1)} \cdot \|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)} \\
&\leq \frac{1}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} z_j(t) w_j - \sum_{j=1}^{m} z_{0j}(t) w_j \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} z_j(t) w_j + \sum_{j=1}^{m} z_{0j}(t) w_j \right) \right\|^2_{H_0^1(0,1)} \cdot \|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)} \\
&= \frac{1}{\gamma^2(t)} \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} \big(z_j(t) - z_{0j}(t)\big) w_j \right) \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} \big(z_j(t) + z_{0j}(t)\big) w_j \right) \right\|^2_{H_0^1(0,1)} \cdot \sum_{k=1}^{m} \|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\gamma^2(t)}\left\|\sum_{i,j=1}^{m}\big(z_j(t)-z_{0j}(t)\big)\big(z_i(t)+z_{0i}(t)\big)w_iw_j\right\|^2_{H_0^1(0,1)}\cdot\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)}\\
&\leq \frac{1}{\gamma^2(t)}\left(\sum_{i,j=1}^{m}\underbrace{|z_j(t)-z_{0j}(t)|}_{\leq\delta}\cdot\underbrace{|z_i(t)+z_{0i}(t)|}_{\leq\|\mathbb{Z}_0\|+1}\cdot\|w_iw_j\|_{H_0^1(0,1)}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)}
\end{aligned}
$$

Então

$$
\begin{aligned}
\|f(t,\mathbb{Z})-f(t,\mathbb{Z}_0)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq\ & \|A(t)\|_{\mathbb{R}^{4m^2}}\cdot\|\mathbb{Z}-\mathbb{Z}_0\|_{\mathbb{R}^{2m}}+\frac{1}{\gamma^2(t)}\left(\sum_{i,j=1}^{m}|z_j(t)-z_{0j}(t)|\cdot\right.\\
&\left.\cdot|z_i(t)+z_{0i}(t)|\cdot\|w_iw_j\|_{H_0^1(0,1)}\right)^2\cdot\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)} \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

Portando dado $\varepsilon>0$, seja

$$\delta=\min\left\{1,\frac{\varepsilon}{\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{R}^{4m^2}}+\mathcal{M}}\right\}$$

onde

$$\mathcal{M}=\frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\|\mathbb{Z}_0\|_{\mathbb{R}^{2m}}+1\big)\cdot\sum_{i,j=1}^{m}\|w_iw_j\|_{H_0^1(0,1)}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)}}$$

com isto, se $\|\mathbb{Z}-\mathbb{Z}_0\|<\delta$ de (2.32) tem-se

$$
\begin{aligned}
\|f(t,\mathbb{Z})-f(t,\mathbb{Z}_0)\| &\leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{R}^{4m^2}}\delta+\frac{1}{\gamma^2(t)}\left(\delta\big(\|\mathbb{Z}_0\|_{\mathbb{R}^{2m}}+1\big)\cdot\sum_{i,j=1}^{m}\|w_iw_j\|_{H_0^1(0,1)}\right)^2\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2_{H_0^1(0,1)}\\
&\leq \|\mathcal{A}\|_{\mathbb{R}^{4m^2}}\delta+\delta\mathcal{M}\\
&= \Big(\|\mathcal{A}\|_{\mathbb{R}^{4m^2}}+\mathcal{M}\Big)\delta<\varepsilon
\end{aligned}
$$

o que prova a afirmação.

$\vdash$ Temos que f é mensurável em t para $\mathbb{Z}$ fixo.

Para isso basta observar que as funções $A(t),\ B(t)$ tem seus coeficientes dados em termos de funções continuas em t, logo integráveis em intervalos limitados, portanto mensuráveis.

Além disso, considere $D = [0, T] \times B_b$ onde

$$B_b = \{x \in \mathbb{R}^{2m}; |x| \leq b \text{ e } b > 0\}.$$

Dado $(t, \mathbb{Z}) \in D$, utilizando do teorema de imersão de Sobolev (Proposição 1.6) que nos dá que $H_0^1(0,1) \hookrightarrow L^4(0,1)$ e a desigualdade de Hölder generalizada temos

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{C}(t,\mathbb{Z})\|^2_{R^{2m}} &= \frac{1}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left(\left[\left(\sum_{j=1}^{m} z_j w_j \right)^2 \right]_y, w_{ky} \right)^2 \\
&= \frac{1}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^1 \left[\left(\sum_{j=1}^{m} z_j w_j \right)^2 \right]_y \cdot w_{ky} dy \right]^2 \\
&= \frac{2}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left[\int_0^1 \underbrace{\sum_{j=1}^{m} z_j w_j}_{\in L^2(0,1)} \cdot \underbrace{\sum_{j=1}^{m} z_j w_{jy}}_{\in L^4(0,1)} \cdot \underbrace{w_{ky}}_{\in L^4(0,1)} \, dy \right]^2 \\
&\leq \frac{2}{\gamma^2(t)} \sum_{k=1}^{m} \left[\left(\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{m} z_j w_j \right)^2 dy \right)^{1/2} \cdot \left(\int_0^1 \left(\sum_{j=1}^{m} z_j w_{jy} \right)^4 dy \right)^{1/4} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \left(\int_0^1 w_{ky}^4 dy \right)^{1/4} \right] \\
&= \frac{2}{\gamma^2(t)} \left\| \sum_{j=1}^{m} z_j w_j \right\| \cdot \left\| \sum_{j=1}^{m} z_j w_{jy} \right\|_{L^4(0,1)} \cdot \sum_{k=1}^{m} \|w_{ky}\|_{L^4(0,1)} \\
&\leq \frac{2}{\gamma^2(t)} \max_{1 \leq j \leq m} \|w_j\| \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \|w_{jy}\|_{L^4(0,1)} \cdot \sum_{k=1}^{m} \|w_{ky}\|_{L^4(0,1)} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} |z_j| \right)^2}_{\leq b^2} \\
&= \frac{2}{\gamma^2(t)} \cdot C \cdot b^2,
\end{aligned}$$

onde $C = \max_{1 \leq j \leq m} \|w_j\| \cdot \max_{1 \leq j \leq m} \|w_{jy}\|_{L^4(0,1)} \cdot \sum_{k=1}^{m} \|w_{ky}\|_{L^4(0,1)}$

Portanto

$$\begin{aligned} \|f(t,\mathbb{Z})\|_{\mathbb{R}^{2m}} &\leq \|\mathcal{A}(t)\|_{\mathbb{R}^{4m^2}} \|\mathbb{Z}\|_{\mathbb{R}^{2m}} + \|\mathcal{C}(t,\mathbb{Z})\|_{\mathbb{R}^{2m}} \\ &\leq \|\mathcal{A}(t)\|_{\mathbb{R}^{4m^2}} \cdot b \ + \cdot \frac{2}{\gamma^2(t)} \cdot C \cdot b^2 = m_{B_b}(t). \end{aligned}$$

Como a função $m_{B_b}(t)$ integrável em $[0,T]$, posto que as funções $A(t)$, $B(t)$ e $\gamma^2(t)$ são continuas em relação a t.

Temos então que o sistema (2.30) se encaixa nas hipóteses do Teorema de Carathéodory. Logo o sistema (2.30) admite uma solução $\mathbb{Y}(t)$ no intervalo $[0,T_m]$ com $T_m < T$. Desta forma, para todo m temos funções $g_{1m}(t), g_{2m}(t), \cdots, g_{mm}(t)$ satisfazendo a equação dada em (2.26), e conseqüentemente, o problema (2.13) - (2.15) tem solução qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

2.2.2 Estimativas a Priori

Nesta etapa buscamos estimativas apropriadas para seqüência de soluções aproximadas $(v^m)_{m\in\mathbb{N}}$. Como v^m satisfaz (2.13) para todo $k = 1, ..., m$ temos a seguinte equação aproximada

$$\begin{aligned} &(v^m_{tt}(t), w) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v^m_{yy}(t), w) - \frac{1}{\gamma^2(t)}(v^m_{yyt}, w) + \frac{1}{\gamma^4(t)}(v^m_{yy}(t), w_{yy}) \\ &- \big([a(y,t)v^m_y(t)]_y, w\big) + \big(b(y,t)v^m_y(t), w\big) + \big(c(y,t)v^m_{yt}(t), w\big) \\ &- \big(d(y,t)v^m_{yy}, w_y\big) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v^m(t))^2]_{yy}, w\big) = 0, \quad \forall w \in V_m. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Daqui em diante para simplificar a notação escreveremos v em vez de v^m.

Estimativa 1 Escolhemos $w = 2v_t$ em (2.33), temos assim:

$$\begin{aligned} &(v_{tt}(t), 2v_t(t)) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), 2v_t(t)) - \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}, 2v_t(t)) + \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), 2v_{yyt}(t)) \\ &- \big([a(y,t)v^m_y(t)]_y, 2v_t(t)\big) + (b(y,t)v_y(t), 2v_t(t)) + (c(y,t)v_{yt}(t), 2v_t(t)) \\ &- (d(y,t)v_{yy}, 2v_{yt}(t)) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v(t))^2]_{yy}, 2v_t(t)\big) = 0 \end{aligned} \tag{2.34}$$

Observando que

$$
\begin{aligned}
\big(v_{tt}(t), 2v_t(t)\big) &= 2\big(v_{tt}(t), v_t(t)\big) = \frac{d}{dt}\big(v_t(t), v_t(t)\big) = \frac{d}{dt}\|v_t(t)\|^2, &(2.35)\\
-\frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_{yyt}(t), 2v_t(t)\big) &= \frac{2}{\gamma^2(t)}\big(v_{yt}(t), v_{yt}(t)\big) = \frac{2}{\gamma^2(t)}\|v_{yt}(t)\|^2 &(2.36)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\gamma^4(t)}\big(v_{yy}(t), 2v_{yyt}(t)\big) &= \frac{1}{\gamma^4(t)}2\big(v_{yy}(t), v_{yyt}(t)\big) = \frac{1}{\gamma^4(t)}\frac{d}{dt}\big(v_{yy}(t), v_{yy}(t)\big)\\
&= \frac{1}{\gamma^4(t)}\frac{d}{dt}\|v_{yy}(t)\|^2, &(2.37)
\end{aligned}
$$

podemos substituir (2.35) - (2.37) em (2.34) e obtermos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}||v_t(t)||^2 + 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_{yy}(t), v_t(t)\big) + 2\frac{1}{\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 + \frac{1}{\gamma^4(t)}\frac{d}{dt}||v_{yy}(t)||^2\\
&\quad -2\big([a(y,t)v_y(t)]_y, v_t(t)\big) + 2\big(b(y,t)v_y(t), v_t(t)\big) + 2\big(c(y,t)v_{yt}, v_t(t)\big)\\
&\quad -2\big(d(y,t)v_{yy}(t), v_{yt}(t)\big) - \frac{2}{\gamma^2(t)}\big([v^2(t)]_{yy}, v_t(t)\big) = 0 \qquad (2.38)
\end{aligned}
$$

Nos cálculos que se seguem estaremos utilizando as desigualdades (1.2) e (1.3).

Estimamos (2.38) etapa por etapa considerando $\varepsilon > 0$ um parâmetro arbitrariamente fixado. Temos

$$
\begin{aligned}
\left|2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_{yy}, v_t(t)\big)\right| &= \left|2\left(\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}2\sqrt{\varepsilon}\|v_{yy}\| \cdot \frac{1}{2\gamma(t)\sqrt{\varepsilon}}\|v_t\|\right)\right|\\
&\le \frac{4\varepsilon(\gamma'(t))^2}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{4\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2\\
&\le \frac{4\varepsilon\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{4\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2\\
&\le \frac{4\varepsilon\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 &(2.39)
\end{aligned}
$$

e

$$
\frac{1}{\gamma^4(t)}\frac{d}{dt}||v_{yy}(t)||^2 = \frac{4\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2\right). \qquad (2.40)
$$

Integrando por partes temos

$$-2\Big([a(y,t)v_y(y,t)]_y, v_t(t)\Big) = \frac{d}{dt}\big(a(y,t)v_y(t), v_y(t)\big) - \big(a_t(y,t)v_y(t), v_y(t)\big) \tag{2.41}$$

Diferenciando $a(y,t)$ em relação a t obtemos:

$$a_t(y,t) = \frac{1}{\gamma^3(t)}\{2\gamma'(t) + 2\gamma(t)[\alpha'(t) + y\gamma'(t)[\alpha''(t) + y\gamma''(t)]\} + 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}[\alpha'(t) + y\gamma'(t)]^2$$

Assim das hipóteses $(H3)$ e de (2.2) com $y \in [0,1]$ obtenmos:

$$|a_t(y,t)| \leq \frac{1}{\gamma^3(t)}[2\Theta(t) + 4\Theta^3(t)] \leq \frac{1}{\gamma^3(t)}\left[2\left(\frac{K}{\gamma(t)}\right)^2\Theta(t) + 4\Theta^3(t)\right]$$

Onde na ultima desigualdade nós usamos $\left(\frac{K}{\gamma(t)}\right)^2 \geq 1$. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
|(a_t(y,t)v_y(t), v_y(t))| &\leq \int_0^1 |a_t(y,t)||v_y(y,t)|^2 dy \\
&\leq \left(\frac{2K^2\Theta(t)}{\gamma^5(t)} + \frac{4\Theta^3(t)}{\gamma^3(t)}\right)||v_{yy}(t)||^2; \qquad (2.42)\\
2|(b(y,t)v_y(t), v_t(t))| &\leq \frac{2}{\gamma(t)}\int_0^1 |\alpha'' + y\gamma''||v_y(t)||v_t(t)|dy \\
&\leq \frac{2\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)}\int_0^1 \sqrt{\varepsilon}\Theta(t)|v_y(t)|\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}\Theta(t)}|v_t(t)|dy \\
&\leq \frac{\varepsilon\Theta^4(t)}{\gamma^2(t)}||v_{tt}(t)||^2 + \frac{1}{\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

Levando em conta a hipótese $(H4)$ e a equação (2.1) observamos que

$$\Theta(t) \leq \frac{1}{8K} \leq \frac{1}{8\gamma(t)}.$$

Então

$$\begin{aligned}
2|(c(y,t)v_y(t), v_t(t))| &= (c_y(y,t)v_t(t), v_t(t)) \leq \frac{2\gamma'(t)}{\gamma(t)}||v_t(t)||^2 \\
&\leq \frac{2\Theta(t)}{\gamma(t)}||v_{yt}(t)||^2 \leq \frac{1}{4\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2. \qquad (2.44)
\end{aligned}$$

Utilizando a desigualdade de Young como feito anteriormente obtemos também:

$$2|(d(y,t)v_{yy}, v_{yt}(y,t))| \leq \frac{\varepsilon\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2. \tag{2.45}$$

O último termo de (2.38) é superiormente limitado como segue:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\gamma^2(t)}([v^2(t)]_{yy}, v_t(t)) &= -\frac{2}{\gamma^2(t)}([v^2(t)]_y, v_{yt}(t)) \\
&= -\frac{4}{\gamma^2(t)}(v(t)v_y(t), v_{yt}(t)) \leq \frac{4}{\gamma^2(t)}||v(t)||_{L^\infty(0,1)}||v_y(t)||||v_{yt}(t)|| \\
&\leq \frac{4}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^2||v_{yt}(t)|| \\
&\leq \frac{4\varepsilon}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^4 + \frac{1}{\varepsilon\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2.
\end{aligned} \tag{2.46}$$

Combinando as desigualdades (2.38) - (2.46) resulta

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{||v_t(t)||^2 + (a(y,t)v_y(t), v_y(t)) + \frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2\right\} + \frac{2}{\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 \\
&\leq \left[\frac{(2K^2+4)\Theta(t)}{\gamma^5(t)} + \frac{5\varepsilon\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)} + \frac{4\Theta^3(t)}{\gamma^3(t)} + \frac{\varepsilon\Theta^4(t)}{\gamma^2(t)}\right]||v_{yy}(t)||^2 \\
&+ \left(\frac{4}{\varepsilon\gamma^2(t)} + \frac{1}{4\gamma^2(t)}\right)||v_{yt}(t)||^2 + \frac{4\varepsilon}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^4, \qquad \text{para} \quad \varepsilon > 0.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

Reescrevendo a desigualdade (2.47) e escolhendo convenientemente $\varepsilon = 8$ segue que:

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{||v_t(t)||^2 + \big(a(y,t)v_y(t), v_y(t)\big) + \frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2\right\} + \frac{5}{4\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 \\
&\leq \left[\frac{(2K^2+4)\Theta(t)}{\gamma^5(t)} + \frac{40\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)} + \frac{4\Theta^3(t)}{\gamma^3(t)} + \frac{8\Theta^4(t)}{\gamma^2(t)}\right]||v_{yy}(t)||^2 + \frac{32}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^4,
\end{aligned} \tag{2.48}$$

que é nossa primeira estimativa.

Estimativa 2: Substituindo w por $v(t)$ em (2.33) temos a seguinte igualdade:

$$
\begin{aligned}
&(v_{tt}(t), v(t)) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), v(t)) - \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}, v(t)) + \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), v_{yy}(t)) \\
&- \big([a(y,t)v_y^m(t)]_y, v(t)\big) + (b(y,t)v_y(t), v(t)) + (c(y,t)v_{yt}(t), v(t)) \\
&- (d(y,t)v_{yy}, v_y(t)) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v(t))^2]_{yy}, v(t)\big) = 0.
\end{aligned} \tag{2.49}
$$

Observemos que

$$
\begin{aligned}
\big(v_{tt}(t), v(t)\big) &= \frac{d}{dt}\big(v_t(t), v(t)\big) - \big(v_t(t), v_t(t)\big) \\
&= \frac{d}{dt}\big(v_t(t), v(t)\big) - \|v_t(t)\|^2,
\end{aligned} \tag{2.50}
$$

e

$$
\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_{yy}(t), v(t)\big) = -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\|v_y(t)\|^2. \tag{2.51}
$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma^2(t)}\|v_y(t)\|^2\right) &= -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\|v_y(t)\|^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\big[\big(v_{yt}(t), v_y)(t)\big) + \big(v_y(t), v_{yt}(t)\big)\big] \\
&= -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\|v_y(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_{yt}(t), v_y(t)\big),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_{yt}(t), v_y(t)\big) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\gamma^2(t)}\|v_y(t)\|^2\right) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\|v_y(t)\|^2. \tag{2.52}
$$

Substituindo (2.50) - (2.52) em (2.49), temos

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\big(v_t(t), v(t)\big) - ||v_t(t)||^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_{yy}(t)\|^2\right) + \frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 \\
&+\big(a(y,t), (v_y(t))^2\big) + \big(b(y,t)v_y(t), v(t)\big) \\
&+\big(c(y,t)v_{yt}(t), v(t)\big) - \big(d(y,t)v_{yy}(t), v_y(t)\big) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([v^2(t)]_{yy}, v(t)\big) = 0.
\end{aligned} \tag{2.53}
$$

Agora usando as hipóteses fixadas na seção (2.1), estimamos os últimos quatro termos em (2.53) como segue:

$$\begin{aligned}|\big(b(y,t)v_y(t),v(t)\big)| &\leq \int_0^1 \frac{|\alpha'(t)+y\gamma'(t)|^2}{\gamma^2(t)}|v_y(y,t)||v(y,t)|dy\\ &\leq \frac{\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)}\|v_y(t)\|\|v_{yy}(t)\| \leq \frac{\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)}||v_{yy}(t)||^2, \end{aligned} \tag{2.54}$$

$$\begin{aligned}|\big(c(y,t)v_{yt}(t),v(t)\big)| &\leq \frac{2}{\gamma(t)}\int_0^1 |\alpha'(t)+y\gamma'(t)||v_{yt}(y,t)||v(y,t)|dy\\ &\leq \frac{2\Theta(t)}{\gamma(t)}||v_{yt}(t)||||v_{yy}(t)||\\ &\leq \frac{1}{2}||v_{yt}(t)||^2+\frac{2\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)}||v_{yy}(t)||^2, \end{aligned} \tag{2.55}$$

$$\begin{aligned}|\big(d(y,t)v_{yy}(t),v_y(t)\big)| &\leq \frac{1}{\gamma^3(t)}\int_0^1 |\alpha'(t)+y\gamma'(t)||v_{yy}(y,t)||v_y(y,t)|dy\\ &\leq \frac{\Theta(t)}{\gamma^3(t)}||v_{yy}(t)||^2, \end{aligned} \tag{2.56}$$

$$\frac{1}{\gamma^2(t)}|\big([v^2(t)]_{yy},v(t)\big)| \leq \frac{2}{\gamma^2(t)}||v(t)||_{L^\infty(0,1)}||v_y(t)||^2 \leq \frac{2}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^3. \tag{2.57}$$

Combinando as desigualdades (2.54) - (2.57) com (2.53) resulta que

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\big(v_t(t),v(t)\big)+\frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_y(t)||^2\right\}+\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big)+\frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2\\ &\leq ||v_t(t)||^2+\left(\frac{3\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)}+\frac{\Theta(t)}{\gamma^3(t)}\right)||v_{yy}(t)||^2+\frac{1}{2}||v_{yt}(t)||^2+\frac{1}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^3.\end{aligned}$$

Multiplicando esta desigualdade por $\frac{1}{2\gamma^2(t)}$ obtemos:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(v_t(t),v(t)\big)+\frac{1}{4\gamma^4(t)}||v_y(t)||^2\right\}+\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_t(t),v(t)\big)+\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big)\\ &+\frac{1}{2\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2 \leq \frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_t(t)||^2+\left(\frac{3\Theta^2(t)}{2\gamma^4(t)}+\frac{3\Theta(t)}{2\gamma^5(t)}\right)||v_{yy}(t)||^2\\ &+\frac{1}{4\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2+\frac{1}{\gamma^4(t)}||v_y(t)||^3\end{aligned} \tag{2.58}$$

Observando que

$$\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_t(t),v(t)\big) \le \frac{\Theta(t)}{\gamma^3(t)}||v_t(t)||||v(t)|| \le \frac{1}{2\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 + \frac{\Theta^2(t)}{2\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2,$$

reescrevemos (2.58) como segue

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(v_t(t),v(t)\big) + \frac{1}{4\gamma^4(t)}||v_y(t)||\right\} + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{1}{2\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2\\ &\le \frac{1}{\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 + \left(\frac{2\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)} + \frac{3\Theta(t)}{2\gamma^5(t)}\right)||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{\gamma^4(t)}||v_y(t)||^3 \end{aligned} \tag{2.59}$$

que é a segunda estimativa.

Somando as desigualdades (2.48) e (2.59), temos

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\Bigg\{||v_t(t)||^2 + \big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{1}{\gamma^4(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(v_t(t),v(t)\big)\\ &+ \frac{1}{4\gamma^4(t)}||v_y(t)||^2\Bigg\} + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{1}{4\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2 + \frac{1}{2\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2\\ &\le \left[\left(2K^2 + \frac{11}{2}\right)\frac{\Theta(t)}{\gamma^5(t)} + 42\frac{\Theta^2(t)}{\gamma^4(t)} + 4\frac{\Theta^3(t)}{\gamma^3(t)} + 8\frac{\Theta^4(t)}{\gamma^2(t)}\right]||v_{yy}(t)||^2\\ &+\frac{1}{\gamma^4(t)}||v_y(t)||^3 + \frac{32}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^4 \end{aligned} \tag{2.60}$$

Definindo

$$E(t) = ||v_t(t)||^2 + \big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{||v_{yy}(t)||^2}{\gamma^4(t)} + \frac{\big(v_t(t),v(t)\big)}{2\gamma^2(t)} + \frac{||v_y(t)||^2}{4\gamma^4(t)}, \tag{2.61}$$

e, usando a desigualdade

$$\frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_y(t)||^2 + \frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2 + \frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_y(t)||^2 + \frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2 \le \frac{1}{2\gamma^6(t)}||v_{yy}(t)||^2,$$

podemos reescrevemos (2.60) na forma

$$\frac{d}{dt}E(t)+\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big)+\frac{1}{4\gamma^2(t)}||v_{yt}(t)||^2+\frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_y(t)||^2+\frac{1}{8\gamma^6(t)}||v_{yt}(t)||^2$$
$$+\frac{1}{\gamma^6(t)}\left\{\frac{1}{8}-[(2K^2+11/2)\Theta(t)\gamma(t)+42(\Theta(t)\gamma(t))^2+4(\Theta(t)\gamma(t))^3+8(\Theta(t)\gamma(t))^4]\right\}\cdot$$
$$\cdot||v_{yy}(t)||^2+\left[\frac{1}{8\gamma^6(t)}-\left(\frac{1}{\gamma^4(t)}||v_y(t)||+\frac{32}{\gamma^2(t)}||v_y(t)||^2\right)\right]||v_y(t)||^2\leq 0 \tag{2.62}$$

Denotamos

$$A(t)=\left[\frac{1+32\gamma^2(t)}{\gamma^4(t)}\right]\big(\|v_y(t)\|^2+\|v_y(t)\|\big)$$

e

$$B(t)=\frac{1}{8}-\big[(2K^2+11/2)\Theta(t)\gamma(t)+42(\Theta(t)\gamma(t))^2+4(\Theta(t)\gamma(t))^3+8(\Theta(t)\gamma(t))^4\big]$$

Pela hipótese (H_4), afirmamos, que $B(t)\geq 0$ para todo $t\in[0,T]$.

De fato:

$$\begin{aligned} B(t) &= \frac{1}{8}-\big[(2K^2+11/2)\Theta(t)\gamma(t)+42(\Theta(t)\gamma(t))^2+4(\Theta(t)\gamma(t))^3+8(\Theta(t)\gamma(t))^4\big] \\ &\geq \frac{1}{8}-\big[(2K^2+11/2)\Theta(t)K+42(\Theta(t)K)^2+4(\Theta(t)K)^3+8(\Theta(t)K)^4\big] \\ &\geq \frac{1}{8}-\big[(2K^2+11/2)Z_0+42(Z_0)^2+4(Z_0)^3+8(Z_0)^4\big]\geq 0 \end{aligned}$$

Afirmamos também que

$$\frac{1}{8\gamma^6(t)}-A(t)\geq 0,\quad \forall\ t\in[0,T] \tag{2.63}$$

Com efeito, antes de entrarmos precisamente na demonstração da afirmação note que

$$\left|\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(v_t(t),v(t)\big)\right|\leq\frac{1}{2\gamma^2(t)}\|v_t(t)\|\|v(t)\|\leq\frac{1}{4}\|v_t(t)\|^2+\frac{1}{4\gamma^4(t)}\|v_{yy}(t)\|^2 \tag{2.64}$$

e

$$\frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(v_t(t), v(t)\big) \geq -\frac{1}{4}\|v_t(t)\|^2 - \frac{1}{4\gamma^4(t)}\|v_{yy}(t)\|^2.$$

Então, a função $E(t)$ definida em (2.61) satisfaz

$$\begin{aligned} E(t) &\geq \frac{3}{4}\|v_t(t)\|^2 + \big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{3}{4\gamma^4(t)}\|v_{yy}(t)\|^2 + \frac{1}{4\gamma^4(t)}\|v_y(t)\|^2 \\ &\geq \frac{1}{4\gamma^4(t)}\|v_y(t)\|^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\|v_y(t)\|^2 \leq 4\gamma^4(t)E(t) \quad \text{e} \quad \|v_y(t)\| \leq 2\gamma^2(t)\sqrt{E(t)} \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.65}$$

Usando estas desigualdades podemos verificar que (2.63) é valida em $t = 0$,

$$\begin{aligned} A(0) &= \frac{1+32\gamma_0^2}{\gamma_0^4}(\|v_y(0)\|^2 + \|v_y(0)\|) \\ &\leq \frac{1+32\gamma_0^2}{\gamma_0^4}(4\gamma_0^4 E_0 + 2\gamma_0^2\sqrt{E_0}) \\ &= (128\gamma_0^2 + 4)E_0 + \left(\frac{64\gamma_0^2+2}{\gamma_0^2}\right)\sqrt{E_0}, \end{aligned} \tag{2.66}$$

onde $E_0 = E(0)$, dada por (2.3). Desta equação, (2.1) e (2.4) conseguimos

$$A(0) < \frac{1}{8\gamma_0^6}. \tag{2.67}$$

Agora para provar (2.63) suponhamos que a desigualdade não ocorra. A continuidade de $A(t)$ e (2.67)nos dá que existe $t_1 \in (0,T]$ tal que:

$$A(t_1) = \frac{1}{8\gamma^6(t_1)} \quad \text{e} \quad \frac{1}{8\gamma^6(t)} - A(t) > 0 \qquad \forall t \in [0,t_1).$$

Integrando (2.60) de $[0,t_1]$, usando que $B(t) > 0 \;\; \forall t \in [0,T]$ conseguimos que

$$\frac{d}{dt}E(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0,t_1],$$

o que nos leva a concluir que

$$E(t) \leq E(0), \ \ \forall t \in [0, t_1].$$

Portanto, pela definição de $A(t)$ e por (2.65) temos

$$\begin{aligned} A(t_1) &= \frac{1+32\gamma^2(t_1)}{\gamma^4(t_1)}\big(||v_y(t_1)||^2 + ||v_y(t_1)||\big) \\ &\leq \frac{1+32\gamma^2(t_1)}{\gamma^4(t_1)}\big(4\gamma^4(t_1)E(t_1) + 2\gamma^2(t_1)\sqrt{E(t_1)}\big) \\ &= \big(4+128\gamma^2(t_1)\big)E(t_1) + \frac{2+64\gamma^2(t_1)}{\gamma^2(t_1)}\sqrt{E(t_1)} \\ &< \Big(4+128K^2\Big)E_0 + \frac{2+64K^2}{\delta^2}\sqrt{E_0} \leq \frac{1}{8K^6} < \frac{1}{8\gamma^6(t)}, \end{aligned} \tag{2.68}$$

É importante observar que usamos nessa ultima desigualdade a hipótese (2.4). A equação (2.68) implica numa contradição $A(t_1) < \dfrac{1}{8\gamma^6(t)}$, o que mostra que (2.63) é verdadeira.

Usando a desigualdade (2.63) e o fato que $B(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$ a partir de (2.62) obtemos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{\|v_{yt}(t)\|^2}{4\gamma^2(t)} + \frac{1}{2\gamma^2(t)}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{\|v_{yy}(t)\|^2}{8\gamma^6(t)} + \frac{\|v_y(t)\|^2}{8\gamma^6(t)} \leq 0. \tag{2.69}$$

Levando em conta (2.64) e a desigualdade $\|v_t(t)\| \leq \|v_{yt}(t)\|$ podemos estimar superiormente $E(t)$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \frac{5}{4}\|v_{yt}(t)\|^2 + \big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{5}{4\gamma^4(t)}\|v_{yy}(t)\|^2 + \frac{1}{\gamma^4(t)}\|v_y(t)\|^2 \\ &\leq C\left(\frac{1}{4}\|v_{yt}(t)\|^2 + \frac{1}{2}\big(a(y,t),(v_y(t))^2\big) + \frac{1}{8\gamma^4(t)}\|v_{yy}(t)\|^2 + \frac{1}{8\gamma^4(t)}\|v_y(t)\|^2\right), \end{aligned}$$

onde C é uma constante real positiva. Desta desigualdade, (2.69) e (2.1) conseguimos

$$\frac{d}{dt}E(t) + \frac{1}{CK^2}E(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

o que implica

$$E(t) \leq E_0 e^{-\frac{t}{CK^2}}, \quad \forall t \geq 0. \tag{2.70}$$

Utilizando (2.61), (2.64)e (2.70), nós obtemos em particular que

$$\|v_t^m(t)\|^2 + \|v_{yy}^m(t)\|^2 \leq C. \tag{2.71}$$

2.2.3 Passagem ao Limite

Da estimativa (2.71) obtemos as seguintes limitações

$$v^m \text{ é limitada em } L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big),$$

$$v_t^m \text{ é limitada em } L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big).$$

Portanto existe (v^ν), subseqüência de $(v^m), v \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$ e $w \in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$ tais que

$$v^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big),$$

$$v^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} w \text{ em } L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big).$$

Vamos mostrar que em verdade e $v_t = w$. Para isso consideremos o retângulo $Q = (0,1)\times(0,T)$ e o espaço $\mathcal{D}'(Q)$ e vejamos que se $v^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$ então $v^\nu \longrightarrow v$ em $\mathcal{D}'(Q)$.

De fato, provar a convergência em $\mathcal{D}'(Q)$ é equivalente mostrar que

$$\int_0^T\int_0^1 v^\nu(t,x)\xi(t,x)dxdt \longrightarrow \int_0^T\int_0^1 v(t,x)\xi(t,x)dxdt, \quad \forall\ \xi \in \mathcal{D}(Q). \tag{2.72}$$

Dada $\xi \in \mathcal{D}(Q)$ definimos

$$\begin{aligned} h_\xi :\ [0,T] &\longrightarrow H^{-2}(0,1) \\ t &\longmapsto h_\xi(t) \end{aligned}$$

onde

$$\begin{array}{rccl} h_\xi(t): & H_0^2(0,1) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 u(y)\xi(y,t)dy \end{array}$$

Notemos que h_ξ está bem definida. Com efeito,

i) $u(\cdot)\xi(\cdot,t) \in L^1(0,1)\ \ \forall\ t \in [0,T]$; pois $u(\cdot) \in H_0^2(0,1) \subset L^2(0,1)$ e $\xi(\cdot,t) \in \mathcal{D}(0,1) \subset L^2(0,1)$

ii) Pela linearidade da integral, quaisquer que sejam escalares λ e c temos

$$h_\xi(t)(\lambda u + cv) = \lambda h_\xi(t)(u) + c h_\xi(t)(v),\ \ \forall\ u, v \in H_0^2(0,1).$$

iii) Existe uma constante $c > 0$ tal que $|h_\xi(t)(u)| \leq c\|u\|_{H_0^2(0,1)}$, $\forall\ u \in H_0^2(0,1)$ e $t \in [0,T]$, pois

$$|h_\xi(t)(u)| = \int_0^1 u(y)\xi(y,t)dy \leq \|u\|\|\xi\| \leq \underbrace{\left[\max_{(y,t)\in Q} |\xi(yt)|\right]^2}_{c_1} c_0\|u\|_{H_0^2(0,1)} = c\|u\|_{H_0^2(0,1)}.$$

Desta forma, $h_\xi \in L^1\big(0,T;H^{-2}(0,1)\big)$ e, para toda $\psi \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big) = \Big(L^1\big(0,T;H^{-2}(0,1)\big)\Big)'$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \psi, h_\xi \rangle_{L^\infty\left(0,T;H_0^2(0,1)\right)\times L^1\left(0,T;H^{-2}(0,1)\right)} &= \int_0^T \langle h_\xi(t), \psi(t)\rangle_{H^{-2}(0,1)\times H_0^2(0,1)} dt \\ &= \int_0^T\int_0^1 \psi(y,t)\xi(y,t)dydt. \end{aligned} \tag{2.73}$$

Desde que $v^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$ temos que

$$\langle v^\nu, h_\xi \rangle_{L^\infty\left(0,T;H_0^2(0,1)\right)\times L^1\left(0,T;H^{-2}(0,1)\right)} \longrightarrow \langle v, h_\xi \rangle_{L^\infty\left(0,T;H_0^2(0,1)\right)\times L^1\left(0,T;H^{-2}(0,1)\right)} \text{ em } \mathbb{R}$$

Desta convergência e (2.73) resulta que

$$\int_0^T \int_0^1 v^\nu(y,t)\xi(y,t)dydt \longrightarrow \int_0^T \int_0^1 v(y,t)\xi(y,t)dydt$$

o que prova nossa afirmação.

Agora, utilizando que em $\mathcal{D}'(Q)$ o operador $\dfrac{d}{dt}$ é contínuo obtemos

$$\frac{d}{dt}v^\nu \longrightarrow \frac{d}{dt}v \text{ em } \mathcal{D}'(Q)$$

Utilizando um raciocínio análogo ao feito anteriormente teremos que a convergência $v_t^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} w$ em $L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \quad \Rightarrow \quad v_t^\nu \longrightarrow w$ em $\mathcal{D}'(Q)$. Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(Q)$ temos que $w = v_t$.

$$v^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} v \text{ em } L^\infty\big(0,T;H_0^1(0,1)\big) \tag{2.74}$$

$$v_t^\nu \overset{\star}{\rightharpoonup} v_t \text{ em } L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big) \tag{2.75}$$

Por outro lado, como $H_0^1(0,1) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,1)$ e pelo teorema de Aubin - Lions o espaço

$$W = \big\{u \in L^2\big(0,T;H_0^1(0,1)\big); \quad u' \in L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)\big\}$$

munido da norma

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^2\left(0,T;H_0^1(0,1)\right)} + \|u'\|_{L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)}$$

tem imersão compacta em $L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$. Como (v^ν) é limitada em W temos que existe uma subseqüência de (v^ν) a qual continuaremos chamando de (v^ν) e uma $w \in L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$ tal que $v^\nu \longrightarrow w$ forte em $L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$.

Utilizando de argumentos semelhantes aos feitos acima temos que em verdade $v = w$. ou seja,

$$v^\nu \longrightarrow v \text{ forte em } L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big). \tag{2.76}$$

Com as convergências (2.74) - (2.76) podemos passar o limite na equação aproximada. Para isso consideremos o sistema (2.13) com $k \in \mathbb{N}$ fixo, o multipliquemos por $\Theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integremos de 0 a T.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (v_{tt}^m(t), w_k)\Theta(t) + \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}^m(t), w_k)\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}^m(t), w_k)\Theta(t)dt\\
&+\int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}^m(t), w_{kyy})\Theta(t)dt - \int_0^T \big([a(y,t)v_y^m(t)]_y, w_k\big)\,\Theta(t)dt\\
&+\int_0^T \big(b(y,t)v_y^m(t), w_k\big)\,\Theta(t)dt + \int_0^T \big(c(y,t)v_{yt}^m(t), w_k\big)\,\Theta(t)dt\\
&-\int_0^T \big(d(y,t)v_{yy}^m(t), w_{ky}\big)\,\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v^m(t))^2]_{yy}, w_k\big)\,\Theta(t)dt = 0 \quad \forall \nu \geq k
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Pela convergência (2.75) temos

$$\int_0^T \big(v_t^\nu(t), \xi(t)\big)dt \longrightarrow \int_0^T \big(v_t(t), \xi(t)\big)dt, \quad \forall \xi \in L^1\big(0,T;L^2(0,1)\big)$$

Fazendo $\xi = -w_{kj}\Theta'$ o termo

$$\int_0^T \big(v_{tt}^\nu(t), w_k\big)\Theta(t)dt = -\int_0^T \big(v_t^\nu(t), w_k\big)\Theta'(t)dt \longrightarrow -\int_0^T \big(v_t(t), w_k\big)\Theta'(t)dt. \tag{2.78}$$

Fazendo $\xi = -\dfrac{\theta w_{kyy}}{\gamma^2}$ o termo

$$\begin{aligned}
&-\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_{yyt}^\nu(t), w_k\big)\Theta(t)dt\\
&\quad = -\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_t^\nu(t), w_{kyy}\big)\Theta(t)dt \quad \longrightarrow \quad -\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v_t(t), w_{kyy}\big)\Theta(t)dt.
\end{aligned} \tag{2.79}$$

Fazendo $\xi = -\big(c(y,t)w_y - 2\frac{\gamma'}{\gamma}w\big)\Theta$

$$\begin{aligned}\int_0^T \big(c(y,t)v^\nu_{yt}(t), w_k\big)\Theta(t)dt &= -\int_0^T \big(v^\nu_t(t), [c(y,t)w_k]_y\big)\Theta(t)dt\\ &= -\int_0^T \big(v^\nu_t(t), c(y,t)w_{ky} - c_y(y,t)w_k\big)\Theta(t)dt\\ &= -\int_0^T \big(v^\nu_t(t), c(y,t)w_{ky} - 2\frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}w_k\big)\Theta(t)dt\\ &\longrightarrow -\int_0^T \big(v_t(t), [c(y,t)w_k]_y\big)\Theta(t)dt. \qquad (2.80)\end{aligned}$$

Agora passaremos o limite nos termos de (2.77) compostos por $v^m; v^m_y; v^m_{yy}$. Para isso observemos que pela convergência $v^m \overset{\star}{\rightharpoonup} v$ em $L^\infty\big(0,T;H^2_0(0,1)\big)$ obtemos que $v^m_y \overset{\star}{\rightharpoonup} v_y$ e $v^m_{yy} \overset{\star}{\rightharpoonup} v_{yy}$ em $L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big)$.

Fazendo $\xi = \dfrac{\gamma'}{\gamma^3}w_k\Theta$

$$\int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v^\nu_{yy}(t), w\big)\Theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(v_{yy}(t), w\big)\Theta(t)dt. \qquad (2.81)$$

Fazendo $\xi = \dfrac{1}{\gamma^4}w_{yy}\Theta$

$$\int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}\big(v^\nu_{yy}(t), w_{kyy}\big)\Theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}\big(v_{yy}(t), w_{kyy}\big)\Theta(t)dt. \qquad (2.82)$$

Fazendo $\xi = -a(y,t)w_{ky}\Theta$

$$\begin{aligned}&\int_0^T \big([a(y,t)v^\nu_y(t)]_y, w_k\big)\Theta(t)dt\\ &= -\int_0^T \big(v^\nu_y(t), a(y,t)w_{ky}\big)\Theta(t)dt \;\longrightarrow\; -\int_0^T \big(v_y(t), a(y,t)w_{ky}\big)\Theta(t)dt. \qquad (2.83)\end{aligned}$$

Fazendo $\xi = b(y,t)w_k\Theta$

$$\int_0^T \big(b(y,t)v^\nu_y(t), w_k\big)\Theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \big(v_y(t), b(y,t)w_k\big)\Theta(t)dt. \qquad (2.84)$$

Fazendo $\xi = -d(y,t)w_y\Theta$

$$-\int_0^T \big(d(y,t)v^\nu_{yy}(t), w_{ky}\big)\Theta(t)dt \longrightarrow -\int_0^T \big(v_{yy}(t), d(y,t)w_{ky}\big)\Theta(t)dt. \tag{2.85}$$

Finalmente, utilizando do Lema de Lions (Lema 1.23) mostraremos a convergência do termo não linear. Da convergência forte (2.76), podemos obter uma subseqüência de (v^ν), que ainda denotaremos por (v^ν), tal que

$$v^\nu \longmapsto v \quad \text{q.s. em} \quad Q$$

Então

$$(v^\nu)^2 \longrightarrow (v)^2 \quad \text{q.s. em} \quad Q \tag{2.86}$$

Além disso,

$$\|(v^\nu)^2\|^2_{L^2(Q)} = \int_0^T\int_0^1 [v^\nu(y,t)]^4 dydt = \int_0^T \|(v^\nu(t))\|^4 dt \le C\int_0^T \|v^\nu(t)\|^4_{H_0^2(0,1)}dt \le \overline{C}T$$

onde pela penúltima desigualdade usamos $H_0^2(0,1) \hookrightarrow L^4(0,1)$. Pelo Lema de Lions

$$(v^\nu)^2 \rightharpoonup v^2 \quad \text{em} \quad L^2(Q). \tag{2.87}$$

De posse desse fato, chamando $\xi = \dfrac{-1}{\gamma^2}w_{kyy}(y)\Theta$ que é elemento de $L^2(Q)$, podemos passar o limite no termo não linear

$$\begin{aligned}-\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v^\nu(t))^2]_{yy}, w_k\big)\Theta(t)dt = \quad & -\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big((v^\nu(t))^2, w_{yy}\big)\Theta(t)dt \\ & \longrightarrow -\int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big((v(t))^2, w_{kyy}\big)\Theta(t)dt \end{aligned} \tag{2.88}$$

Através das convergências (2.78) - (2.88), passamos o limite em (2.77) obtendo

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (v_t(t), w_k)\Theta'(t) + \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), w_k)\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}(t), w_k)\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), w_{kyy})\Theta(t)dt - \int_0^T ([a(y,t)v_y(t)]_y, w_k)\,\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (b(y,t)v_y(t), w_k)\,\Theta(t)dt + \int_0^T (c(y,t)v_{yt}(t), w_k)\,\Theta(t)dt \\
&- \int_0^T (d(y,t)v_{yy}(t), w_{ky})\,\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v(t))^2]_{yy}, w_k\right)\Theta(t)dt = 0, \ \forall k \in \mathbb{N}. \qquad (2.89)
\end{aligned}$$

pela totalidade dos $\{w_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ temos que v satisfaz

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (v_t(t), w)\Theta'(t) + \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), w)\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}(t), w)\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), w_{yy})\Theta(t)dt - \int_0^T ([a(y,t)v_y(t)]_y, w)\,\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (b(y,t)v_y(t), w)\,\Theta(t)dt + \int_0^T (c(y,t)v_{yt}(t), w)\,\Theta(t)dt \\
&- \int_0^T (d(y,t)v_{yy}(t), w_y)\,\Theta(t)dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v(t))^2]_{yy}, w\right)\Theta(t)dt = 0, \\
&\forall \ w \in H_0^2(0,1,) \quad \forall \ \Theta(t) \in \mathcal{D}(0,T). \qquad (2.90)
\end{aligned}$$

Observemos que

$$\mathcal{H} = \{\phi \in L^2\big(0,T; H_0^2(0,1)\big); \quad \phi_t \in L^2\big(0,T; L^2(0,1)\big) \quad \text{e} \quad \phi(0) = \phi(T) = 0\}$$

munido da norma

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}} = \|\phi\|_{L^2\left(0,T;H_0^2(0,1)\right)} + \|\phi_t\|_{L^2\left(0,T;L^2(0,1)\right)}$$

é espaço de Banach. Além disso,

$$\{(w\cdot\Theta); w \in H_0^2(0,1) \text{ e } \Theta \in \mathcal{D}(0,T)\} \subset \mathcal{H} \quad \text{e denso em } \mathcal{H}.$$

Então

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^T\int_0^1 v_t(y,t),\phi_t(y,t)dydt+\int_0^T\int_0^1 \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}v_{yy}(y,t),\phi(y,t)dydt\\
&-\int_0^T\int_0^1 \frac{1}{\gamma^2(t)}v_t(y,t)\phi_{yy}(y,t)dydt+\int_0^T\int_0^1 \frac{1}{\gamma^4(t)}v_{yy}(y,t)\phi_{yy}(y,t)dydt\\
&+\int_0^T\int_0^1 a(y,t)v_y(y,t)\phi_y(y,t)dydt+\int_0^T\int_0^1 b(y,t)v_y(y,t)\phi(y,t)dydt\\
&+\int_0^T\int_0^1 c(y,t)v_{yt}(y,t)\phi(y,t)dydt-\int_0^T\int_0^1 d(y,t)v_{yy}(y,t)\phi_y(y,t)dydt\\
&-\int_0^T\int_0^1 \frac{1}{\gamma^2(t)}(v(y,t))^2\phi_{yy}(y,t)dydt=0 \qquad (2.91)
\end{aligned}
$$

$$\text{onde } \phi\in L^2\big(0,T;H_0^2(0,1)\big) \text{ e } \phi_t\in L^2\big(0,T;L^2(0,1)\big) \text{ com } \phi(T)=\phi(0)=0. \qquad (2.92)$$

2.2.4 Condições Iniciais

Inicialmente vamos provar que $v(0)=v_0$. Começamos observando que pelo lema (1.24) resulta que $v\in C\big([0,T];L^2(0,1)\big)$, pois $v\in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$, $v_t\in L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)$ e $L^2(0,1)\hookrightarrow H_0^2(0,1)$. Logo faz sentido calcularmos $v(0)$. Vamos mostrar que $v(0)=v_0$.

Seja $\Theta\in C^1([0,1])$ tal que $\Theta(0)=1$ e $\Theta(T)=0$. Então pela convergência (2.75) temos que

$$\int_0^T \big(v_t^\nu(t),w\big)\Theta(t)dt \longrightarrow \int_0^T \big(v_t(t),w\big)\Theta(t)dt,\quad \forall w\in H_0^2(0,1), \qquad (2.93)$$

Por outro lado, usando integração por partes podemos ver que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \big(v_t^\nu(t),w\big)\Theta(t)dt &= \int_0^T\int_0^1 v_t^\nu(y,t)w(y)\Theta(t)dydt\\
&= \int_0^1\left[\int_0^T v_t^\nu(y,t)\Theta(t)dt\right]w(y)dy\\
&= \int_0^1\left[v^\nu(y,t)\Theta(t)\Big|_0^T-\int_0^T v^\nu(y,t)\Theta'(t)dt\right]w(y)dy\\
&= \int_0^1\left[v^\nu(y,0)-\int_0^T v^\nu(y,t)\Theta'(t)dt\right]w(y)dy
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\big(v^\nu(0), w\big) - \int_0^T \big(v^\nu(t), w\big)\theta'(t)dt \\
&= -\big(v_{0\nu}, w\big) - \int_0^T \big(v^\nu(t), w\big)\theta'(t)dt
\end{aligned} \tag{2.94}
$$

Usando as convergências (2.14), (2.93) e tomando o limite no segundo membro da ultima igualdade concluímos que

$$\int_0^T \big(v_t^\nu(t), w\big)\Theta(t)dt \longrightarrow -\big(v_0, w\big) - \int_0^T \big(v(t), w\big)\Theta'(t)dt \tag{2.95}$$

Logo de (2.93) e (2.95) e a unicidade do limite, devemos ter que

$$\int_0^T \big(v_t(t), w\big)\Theta(t)dt = -\big(v_0, w\big) - \int_0^T \big(v(t), w\big)\Theta'(t)dt$$

Vejamos ainda que

$$\int_0^T \big(v_t(t), w\big)\Theta(t)dt = -\big(v(0), w\big) - \int_0^T \big(v(t), w\big)\Theta'(t)dt. \tag{2.96}$$

Portanto

$$\big(v(0), w\big) = \big(v_0, w\big), \quad w \in H_0^2(0,1),$$

provando que $v(0) = v_0$ em $H_0^2(0,1)$.

Para verificar que $v_t(0) = v_1$ começamos observando que pelo Lema 1.25 resulta que $v \in C_w^0\big([0,T]; L^2(0,1)\big)$ pois $v \in L^\infty\big(0,T; H_0^2(0,1)\big)$ e $v' \in L^\infty\big(0,T; L^2(0,1)\big)$. Logo faz sentido calcular $\big(v_t(0), \xi\big), \quad \forall \xi \in L^2(0,1)$.

Consideremos agora as seguintes funções auxiliares: Dado $0 < \delta \leq T$ definimos

$$\Theta_\delta(t) = \begin{cases} -\dfrac{t}{\delta} + 1 & \text{se } 0 \leq t \leq \delta \\[2em] 0 & \text{se } \delta \leq t \leq T \end{cases}$$

É fácil ver que $\Theta_\delta(t) \in H^1(0,T)$ qualquer que seja $0 < \delta \leq T$. Então como as

$(v^\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ verificam

$$\begin{aligned}
&(v^\nu_{tt}(t),w_j)+2\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_j)-\frac{1}{\gamma^2(t)}(v^\nu_{yyt}(t),w_j)+\frac{1}{\gamma^4(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_{jyy})\\
&-\big([a(y,t)v^\nu_y(t)]_y,w_j\big)+\big(b(y,t)v^\nu_y(t),w_j\big)+\big(c(y,t)v^\nu_{yt}(t),w_j\big)\\
&-\big(d(y,t)v^\nu_{yy},w_{jy}\big)-\frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v^\nu(t))^2]_{yy},w_j\right)=0 \quad 1\le j\le\nu
\end{aligned}$$

Fixando $j\in\mathbb{N}$, temos que a equação acima se verifica para todo $\nu\ge j$. Multiplicando-a por Θ_δ e integrando de 0 a T temos:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T(v^\nu_{tt}(t),w_j)\Theta_\delta(t)+2\int_0^T\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_j)\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^T\frac{1}{\gamma^2(t)}(v^\nu_{yyt},w_j)\Theta_\delta(t)dt+\int_0^T\frac{1}{\gamma^4(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_{jyy})\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^T\left([a(y,t)v^\nu_y(t)]_y,w_j\right)\Theta_\delta(t)dt+\int_0^T\left(b(y,t)v^\nu_y(t),w_j\right)\Theta_\delta(t)dt\\
&+\int_0^T\left(c(y,t)v^\nu_{yt}(t),w_j\right)\Theta_\delta(t)dt-\int_0^T\left(d(y,t)v^\nu_{yy},w_{jy}\right)\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^T\frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v^m(t))^2]_{yy},w_j\right)\Theta_\delta(t)dt=0.
\end{aligned}$$

Como $\Theta_\delta(t)=0$ se $\delta\le t\le T$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^\delta(v^\nu_{tt}(t),w_j)\Theta_\delta(t)+2\int_0^\delta\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_j)\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^\delta\frac{1}{\gamma^2(t)}(v^\nu_{yyt},w_j)\Theta_\delta(t)dt+\int_0^\delta\frac{1}{\gamma^4(t)}(v^\nu_{yy}(t),w_{jyy})\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^\delta\left([a(y,t)v^\nu_y(t)]_y,w_j\right)\Theta_\delta(t)dt+\int_0^\delta\left(b(y,t)v^\nu_y(t),w_j\right)\Theta_\delta(t)dt\\
&+\int_0^\delta\left(c(y,t)v^\nu_{yt}(t),w_j\right)\Theta_\delta(t)dt-\int_0^\delta\left(d(y,t)v^\nu_{yy},w_{jy}\right)\Theta_\delta(t)dt\\
&-\int_0^\delta\frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v^m(t))^2]_{yy},w_j\right)\Theta_\delta(t)dt=0.
\end{aligned} \tag{2.97}$$

Observamos ainda que

$$\begin{aligned}
\int_0^\delta (v_{tt}^\nu(t), w_j)\Theta_\delta(t) &= \int_0^\delta \frac{d}{dt}\big[(v_t^\nu(t), w_j)\big]\Theta_\delta(t)dt \\
&= \big(v_t^\nu(t), w_j\big)\Theta_\delta(t)\Big|_0^\delta - \int_0^\delta (v_t^\nu(t), w_j)\Theta_\delta'(t)dt \\
&= -\big(v_t^\nu(0), w_j\big) - \int_0^\delta (v_t^\nu(t), w_j)\frac{1}{\delta}dt.
\end{aligned}$$

Retornando a (2.97), temos

$$\begin{aligned}
&-\big(v_t^\nu(0), w_j\big) - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (v_t^\nu(t), w_j)dt + 2\int_0^\delta \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}^\nu(t), w_j)\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}^\nu, w_j)\Theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}^\nu(t), w_{jyy})\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta \big([a(y,t)v_y^\nu(t)]_y, w_j\big)\,\Theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta \big(b(y,t)v_y^\nu(t), w_j\big)\,\Theta_\delta(t)dt \\
&+ \int_0^\delta \big(c(y,t)v_{yt}^\nu(t), w_j\big)\,\Theta_\delta(t)dt - \int_0^\delta \big(d(y,t)v_{yy}^\nu, w_{jy}\big)\,\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v^m(t))^2]_{yy}, w_j\big)\,\Theta_\delta(t)dt = 0.
\end{aligned}$$

Das convergências obtidas tomando o limite na equação acima quando $\nu \longrightarrow \infty$, obtemos:

$$\begin{aligned}
&-\big(v_1, w_j\big) - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (v_t(t), w_j)dt + 2\int_0^\delta \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), w_j)\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}, w_j)\Theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), w_{jyy})\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta ([a(y,t)v_y(t)]_y, w_j)\,\Theta_\delta(t)dt + \int_0^\delta (b(y,t)v_y(t), w_j)\,\Theta_\delta(t)dt \\
&+ \int_0^\delta (c(y,t)v_{yt}(t), w_j)\,\Theta_\delta(t)dt - \int_0^\delta (d(y,t)v_{yy}, w_{jy})\,\Theta_\delta(t)dt \\
&- \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}\big([(v(t))^2]_{yy}, w_j\big)\,\Theta_\delta(t)dt = 0,
\end{aligned}$$

ou escrito de outra forma

$$
\begin{aligned}
&-\big(v_1, w_j\big) - \frac{1}{\delta}\int_0^\delta (v_t(t), w_j)dt + 2\int_0^\delta \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(v_{yy}(t), w_j)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt\\
&-\int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}(v_{yyt}, w_j)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt + \int_0^\delta \frac{1}{\gamma^4(t)}(v_{yy}(t), w_{jyy})\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt\\
&-\int_0^\delta \left([a(y,t)v_y(t)]_y, w_j\right)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt + \int_0^\delta \left(b(y,t)v_y(t), w_j\right)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt\\
&\int_0^\delta \left(c(y,t)v_{yt}(t), w_j\right)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)t - \int_0^\delta \left(d(y,t)v_{yy}, w_{jy}\right)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt\\
&-\int_0^\delta \frac{1}{\gamma^2(t)}\left([(v(t))^2]_{yy}, w_j\right)\big(\frac{-t}{\delta}+1\big)dt = 0 \qquad \forall j \in \mathbb{N}
\end{aligned}
$$

Agora tomando o limite quando $\delta \longrightarrow 0$ temos

$$\big(v_1, w_j\big) = \big(v_t(0), w_j\big) \Rightarrow \big(v_t(0) - v_1, w_j\big) = 0, \forall j \in \mathbb{N}$$

ou seja, $v_t(0) = v_1$.

2.2.5 Decaimento exponencial

Finalmente vamos mostrar o decaimento (2.5). Observemos que a solução está globalmente definada (isto é, está definida para todo $t \geq 0$). Em verdade a taxa de decaimento (2.70) é a mesma para a função limite v em vista das convergências (**??**), (2.75) e (2.76). A seguir compararemos os termos de E com $E(u)(t)$.

De (2.6) segue que

$$
\begin{aligned}
|u_t(x,t)|^2 &= \left| v_t(y,t) - \frac{1}{\gamma(t)}\big[\alpha'(t) - y\gamma'(t)\big]v_y(y,t)\right|^2\\
&\leq 2|v_t(y,t)|^2 + \frac{2}{\gamma^2(t)}|\alpha'(t) + \gamma'(t)|^2|v_y(y,t)|^2.
\end{aligned}
$$

Integrando essa desigualdade de $\alpha(t)$ até $\beta(t)$ e lembrando que $y = \frac{x-\alpha(t)}{\gamma(t)}$ obtemos,

$$\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} |u_t(x,t)| \quad dx \quad \leq 2\int_0^1 |v_t(y,t)|^2\gamma(t)dy + \frac{2}{\gamma^2(t)}\left(|\alpha'(t)| + |\beta'(t)|\right)^2 \int_0^1 |v_y(y,t)|^2 dy$$

Usando a desigualdade (2.1), a hipótese (H_2) e (2.2) conseguimos:

$$\|u_t(t)\|^2_{L^2(\alpha(t),\beta(t))} \leq 2K\left(\|v_t(t)\|^2 + \frac{1}{\delta}\|v_y(t)\|^2\right) \tag{2.98}$$

Tendo em vista (2.8) e repetindo os argumentos acima também conseguimos as relações

$$\|u\|^2_{H_0^1(\alpha(t),\beta(t))} \leq \frac{1}{\delta}\|v_y(t)\|^2, \qquad \|u(t)\|^2_{H_0^2(\alpha(t),\beta(t))} \leq \frac{1}{\delta^2}\|v_{yy}(t)\|^2 \tag{2.99}$$

Empregando os mesmos argumentos usados em (2.65) obtemos

$$\frac{4}{3}E(t) \geq \|v_t(t)\|^2, \qquad 4K^4E(t) \geq \|v_y(t)\|^2, \qquad \frac{4}{3}K^4E(t) \geq \|v_{yy}(t)\|^2. \tag{2.100}$$

Utilizando (2.98) - (2.100) temos

$$\begin{aligned} E(u)(t) &= \frac{1}{2}\left\{\|u_t(t)\|^2_{L^2(\alpha(t),\beta(t))} + \|u(t)\|^2_{H_0^1(\alpha(t),\beta(t))} + \|u(t)\|^2_{H_0^2(\alpha(t),\beta(t))}\right\} \\ &\leq \frac{1}{2}\left\{2K\left(\|v_t(t)\|^2 + \frac{1}{\delta}\|v_y(t)\|^2\right) + \frac{1}{\delta}\|v_y(t)\|^2 + \frac{1}{\delta^2}\|v_{yy}(t)\|^2\right\} \\ &\leq \left(\frac{4K}{3} + \frac{4K^5}{\delta} + \frac{2K^4}{\delta} + \frac{2K^4}{3\delta^2}\right)E(t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{2.101}$$

De (2.70) e (2.101) conseguimos (2.5) e isso termina a prova do Teorema 2.3.

■

2.3 Um resultado de unicidade

Nesta seção mostraremos que, com uma hipótese adicional sobre α' e β', a solução fraca global para o problema (3) - (5) é única. Lembramos que α e β são as funções que descrevem o domínio $\widehat{Q}$ não cilíndrico do nosso problema.

Teorema 2.4 *(Unicidade de Soluções)Suponhamos que as hipóteses do teorema* 2.3 *estejam satisfeitas. Assumamos também que para algum número real μ tal que $0 < \mu < \dfrac{\delta^4}{12\gamma_0^4}$ tenhamos*

$$||\alpha'||_{L^1(0,+\infty)} + ||\beta'||_{L^1(0,+\infty)} \leq \frac{\delta\mu}{18\delta^3 + \delta + 4} \tag{2.102}$$

e

$$|\gamma''(t)| \leq \frac{1}{\delta}. \tag{2.103}$$

Então a solução fraca global para o problema de valor inicial de fronteira (3) - (5) é única em $[0, T]$, para qualquer $T > 0$.

Demonstração:

Pela equivalência dos problemas (3) - (5) e (2.10) - (2.12) basta provarmos a unicidade de solução para o problema (2.10) - (2.12).

Suponha que v e $\widehat{v}$ são duas soluções fracas globais do problema (2.10) - (2.12). Então, fazendo $\phi = v - \widehat{v}$ temos que $\phi \in L^\infty\big(0, T; H_0^2(0, 1)\big)$ e satisfaz:

$$\begin{aligned}
&- \int_0^T (\phi_t(t), w)\Theta'(t) + \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t), w)\Theta(t)dt \\
&- \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}(\phi_t(t), w_{yy})\Theta(t)dt + \int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t), w_{yy})\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (a(y,t)\phi_y(t), w_y)\,\Theta(t)dt + \int_0^T (b(y,t)\phi_y(t), w)\,\Theta(t)dt \\
&+ \int_0^T (c(y,t)\phi_{yt}(t), w)\,\Theta(t)dt - \int_0^T (d(y,t)\phi_{yy}(t), w_y)\,\Theta(t)dt \\
&- \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\big((v(t))^2 - (\widehat{v}(t))^2, w_{yy}\big)\,\Theta(t)dt = 0 \\
&\quad \forall w \in H_0^2(0,1) \quad \forall \Theta \in \mathcal{D}(0,T)
\end{aligned} \tag{2.104}$$

$$\phi(0,t) = \phi(1,t) = \phi_y(0,t) = \phi(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2.105}$$

$$\phi(y,0) = \phi_t(y,0) = 0 \tag{2.106}$$

Para cada $s \in (0,T)$ seja $\psi : (0,T) \longrightarrow H_0^2(0,1)$ uma função definida por:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s \phi(r)dr & \text{se } 0 \leq t \leq s \\ \\ 0 & \text{se } s \leq t \leq T \end{cases}$$

onde a integral acima é uma integral de Bochner no espaço $H_0^2(0,1)$.

Note que a função ψ está em $L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$, pois

$$\|\psi(t)\|_{H_0^2(0,1)} = \left\|\int_t^s \phi(r)dr\right\|_{H_0^2(0,1)} \leq \int_t^s \|\phi(r)\|_{H_0^2(0,1)}dr \leq MT, \quad \forall t \in (0,T),$$

a ultima desigualdade é dada pelo fato de $\phi \in L^\infty\big(0,T;H_0^2(0,1)\big)$.

A partir da função ψ nós conseguimos as seguintes relações:

$$\psi'(t) = \phi(t) \qquad \text{e} \qquad \psi(s) = 0 \tag{2.107}$$

além disso, chamando $\psi_1(t) = \displaystyle\int_0^t \phi(r)dr$ podemos ver que

$$\psi(t) = \psi_1(t) - \psi_1(s) \text{ para } t \leq s \qquad \text{e} \qquad \psi(0) = -\psi_1(s). \tag{2.108}$$

Observemos agora que a equação (2.104) define uma dualidade em $\mathcal{D}'(0,T) \times \mathcal{D}(0,T)$ assim podemos reescreve-la da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
&-\big\langle((\phi_t(t),w),\Theta'\big\rangle + \left\langle \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t),w),\Theta\right\rangle - \left\langle \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi_t(t),w_{yy}\big),\Theta(t)\right\rangle \\
&-\left\langle \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t),w_{yy}),\Theta\right\rangle + \big\langle\,(a(y,t)\phi_y(t),w_y)\,,\Theta\big\rangle + \big\langle\,(b(y,t)\phi_y(t),w)\,,\Theta\big\rangle \\
&+\big\langle\,(c(y,t)\phi_{yt}(t),w)\,,\Theta\big\rangle - \big\langle\,(d(y,t)\phi_{yy}(t),w_y)\,,\Theta\big\rangle \\
&-\left\langle \frac{1}{\gamma^2(t)}\,\big((v(t))^2 - (\widehat{v}(t))^2,w_{yy}\big)\,,\Theta\right\rangle = 0 \qquad \forall\Theta \in \mathcal{D}(0,T)
\end{aligned}$$

Utilizando a definição de derivada distribucional temos:

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\phi_t(t), w), \Theta \right\rangle = \big\langle (\phi_t(t), w), \Theta' \big\rangle \qquad \forall \Theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

Logo

$$\begin{aligned}&\left\langle \frac{d}{dt}(\phi_t(t), w) + \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t), w) - \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi_t(t), w_{yy}\big) - \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t), w_{yy}) \right.\\ &+ (a(y,t)\phi_y(t), w_y) + (b(y,t)\phi_y(t), w) + (c(y,t)\phi_{yt}(t), w) - (d(y,t)\phi_{yy}(t), w_y)\\ &\left. - \frac{1}{\gamma^2(t)}\left((v(t))^2 - (\widehat{v}(t))^2, w_{yy}\right), \Theta \right\rangle = 0 \qquad \forall \Theta \in \mathcal{D}(0,T)\end{aligned}$$

ou ainda

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\phi_t(t), w) = -\frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t), w) + \frac{1}{\gamma^2(t)}(\phi_t(t), w_{yy}) - \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t), w_{yy})\\ &- (a(y,t)\phi_y(t), w_y) - (b(y,t)\phi_y(t), w) - (c(y,t)\phi_{yt}(t), w) + (d(y,t)\phi_{yy}(t), w_y)\\ &+\frac{1}{\gamma^2(t)}\left((v(t))^2 - (\widehat{v}(t))^2, w_{yy}\right) \qquad \text{em } \mathcal{D}'(0,T) \qquad (2.109)\end{aligned}$$

Desde que o 2ºmembro desta igualdade é uma função de $L^2(0,T)$, concluímos que a derivada distribucional $\frac{d}{dt}\big(\phi_t(t), w\big)$ também está em $L^2(0,T)$ e a identidade (2.109) é valida q.s. em $(0,T)$. Observe ainda que

$$\frac{d}{dt}\big(\phi_t(t), w\big) = \big(\phi_{tt}(t), w\big)$$

tomando $w = \psi(t)$ e integrando de 0 a T, temos

$$\begin{aligned}&\int_0^T (\phi_{tt}(t), \psi(t))dt + \int_0^T \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t), \psi(t))dt - \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}(\phi_t(t), \psi_{yy}(t))dt\\ &+ \int_0^T \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t), \psi_{yy}(t))dt + \int_0^T (a(y,t)\phi_y(t), \psi_y(t))\, dt + \int_0^T (b(y,t)\phi_y(t), \psi(t))\,(t)dt\\ &+ \int_0^T (c(y,t)\phi_{yt}(t), \psi(t))\, dt - \int_0^T (d(y,t)\phi_{yy}(t), \psi_y(t))\, dt\\ &- \int_0^T \frac{1}{\gamma^2(t)}\left((v(t))^2 - (\widehat{v}(t))^2, \psi_{yy}(t)\right) dt = 0.\end{aligned}$$

Utilizando a definição da ψ podemos re-escrever na forma:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^s (\phi_{tt}(t),\psi(t)) + \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}(\phi_{yy}(t),\psi(t))dt - \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}(\phi_t(t),\psi_{yy}(t))dt \\
&+\int_0^s \frac{1}{\gamma^4(t)}(\phi_{yy}(t),\psi_{yy}(t))dt + \int_0^s (a(y,t)\phi_y(t),\psi_y(t))\,dt + \int_0^s (b(y,t)\phi_y(t),\psi(t))\,(t)dt \\
&+\int_0^s (c(y,t)\phi_{yt}(t),\psi(t))\,dt - \int_0^s (d(y,t)\phi_{yy}(t),\psi_y(t))\,dt \\
&-\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big((v(t))^2-(\widehat{v}(t))^2,\psi_{yy}(t)\big)\,dt = 0
\end{aligned}
\tag{2.110}
$$

Agora utilizando integração por partes e as hipóteses $(H_1),(H_2)$ e (H_4) e as propriedades de ψ (2.107), (2.108) vamos analisar os termos de (2.110)

$$
\begin{aligned}
\int_0^s \big(\phi''(t),\psi(t)\big)dt &= \underbrace{\big(\phi'(t),\psi(t)\big)\Big|_0^s}_{=0} - \int_0^s \big(\phi'(t),\psi'(t)\big)dt \\
&= -\int_0^s\int_0^1 \phi'(y,t)\psi'(y,t)dydt \\
&= -\int_0^s\int_0^1 \phi'(y,t)\phi(y,t)dydt \\
&= -\int_0^1\int_0^s \frac{1}{2}\big[\phi(y,t)^2\big]'dydt \\
&= -\frac{1}{2}\|\phi(s)\|^2;
\end{aligned}
\tag{2.111}
$$

$$
\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi_{yy}(t),\psi(t)\big)dt = \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt; \tag{2.112}
$$

$$
\begin{aligned}
-\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi'(t),\psi_{yy}(t)\big)dt &= -\int_0^s \Big(\phi_y(t),\Big(\frac{1}{\gamma^2(t)}\psi_y(t)\Big)'\Big)dt \\
&= \int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi_y(t),\psi_y(t)\big)dt \\
&\quad -\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi_y'(t),\psi_y'(t)\big)dt \\
&= -\int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt \\
&\quad -\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|dt;
\end{aligned}
\tag{2.113}
$$

$$\begin{aligned}
\int_0^s \frac{1}{\gamma^4(t)}\big(\phi_{yy}(t),\psi_{yy}(t)\big)dt &= \int_0^s \frac{1}{\gamma^4(t)}\big(\psi'_{yy}(t),\psi_{yy}(t)\big)dt \\
&= \int_0^1\int_0^s \frac{1}{2\gamma^4(t)}\big[\psi^2_{yy}(y,t)\big]'dtdy \\
&= \int_0^1 \left[\frac{1}{2\gamma^4(t)}\psi_{yy}(y,t)\Big|_0^s - \int_0^s \frac{-2\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}\psi^2_{yy}(y,t)dt\right]dy \\
&= -\frac{1}{2\gamma_0^4}\int_0^1 \psi^2_{yy}(y,0)dy + \int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}\int_0^1 \psi^2_{yy}(y,t)dydt \\
&= -\frac{1}{2\gamma_0^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2 + \int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}\|\psi_{yy}(t)\|^2dt; \qquad (2.114)
\end{aligned}$$

$$\int_0^s \big(a(y,t)\phi_y(t),\psi_y(t)\big)dt = -\int_0^s \big(\phi(t),a_y(y,t)\phi_y(t)+a(y,t)\phi_{yy}(t)\big)dt; \qquad (2.115)$$

$$\int_0^s \big(b(y,t)\phi_y(t),\psi(t)\big)dt = -\int_0^s \big(\phi(t),b_y(y,t)\psi(t)+b(y,t)\psi_y(t)\big)dt; \qquad (2.116)$$

$$\begin{aligned}
\int_0^s \big(c(y,t)\phi'_y(t),\psi(t)\big)dt &= \int_0^s \big(\phi_y(t),[c(y,t)\psi(t)]'\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),c'(y,t)\psi(t)+c(y,t)\psi'(t)\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),c'(y,t)\psi(t)\big)dt - \frac{1}{2}\int_0^s \big((\phi^2(t))_y,c(y,t)\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),c'(y,t)\psi(t)\big)dt + \frac{1}{2}\int_0^s \big(\phi^2(t),c_y(y,t)\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),c'(y,t)\psi(t)\big)dt + \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\|\phi(t)\|^2dt; \qquad (2.117)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\int_0^s \big(d(y,t)\phi_{yy}(t),\psi_y(t)\big)dt &= \int_0^s \big(\phi_y(t),[d(y,t)\psi_y(t)]_y\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),d_y(y,t)\psi_y(t)\big)dt \\
&\quad + \int_0^s \big(\phi_y(t),d(y,t)\psi_{yy}(y,t)\big)dt \\
&= -\int_0^s \big(\phi(t),[d_y(y,t)\psi_y(t)]_y\big)dt \\
&\quad + \int_0^s \big(\phi_y(t),d(y,t)\psi_{yy}(y,t)\big)dt \\
&= \int_0^s \big(\phi_y(t),d(y,t)\psi_{yy}(y,t)\big)dt \\
&\quad - \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt; \qquad (2.118)
\end{aligned}$$

$$-\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(v^2(t)-\widehat{v}^2(t),\psi_{yy}(t)\big)dt = \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi(t)\big[v(t)+\widehat{v}(t)\big],\psi_{yy}(t)\big). \qquad (2.119)$$

Substituindo (2.111) - (2.119) em (2.110) nós temos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\phi(s)\|^2 + \frac{1}{2\gamma_0^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2 + \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi(t)\|^2 = &\\
-\int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt + \int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}\|\psi_{yy}(t)\|^2 dt &\\
-\int_0^s \big(\phi(t), a_y(t)\psi_y(t) + a(t)\psi_{yy}\big)dt - \int_0^s \big(\phi(t), b_y(t)\psi(t) + b(t)\psi_y(t)\big)dt &\\
-\int_0^s \big(c'(t)\phi_y(t),\psi(t)\big)dt - \int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\|\phi(t)\|^2 dt &\\
+\int_0^s \big(\phi_y(t), d(t)\psi_{yy}(t)\big)dt + \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\big(\phi(t)\big[v(t)+\widehat{v}(t)\big],\psi_{yy}\big)dt. & \qquad (2.120)
\end{aligned}$$

Agora nós usaremos as hipóteses $(H_2),(H_4)$, as desigualdades (2.1), (2.108) e as desigualdades usuais para estimarmos os termos do lado direito de (2.120):

$$\begin{aligned}
\left|-\int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt\right| &\le \frac{2}{\delta^3}\int_0^s \|\phi(t)\|\|\psi_{yy}(t)\|dt\\
&\le \frac{2}{\delta^3}\int_0^s \|\phi(t)\|\Big[\|\psi_{1yy}(t)\| + \|\psi_{1yy}(s)\|\Big]dt\\
&= \frac{2}{\delta^3}\left[\int_0^s \|\phi(t)\|\|\psi_{1yy}(t)\|dt + \int_0^s \|\phi(t)\|\|\psi_{1yy}(s)\|dt\right]\\
&\le \frac{1}{\delta^3}\int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{1}{\delta^3}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt\\
&\quad + \frac{2}{\delta^3}\|\psi_{1yy}(s)\|\int_0^s \|\phi(t)\|dt. \qquad (2.121)
\end{aligned}$$

Utilizando as desigualdades de Hölder e Young na ultima parcela da soma

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\delta^3}\|\psi_{1yy}(s)\|\int_0^s \|\phi(t)\|dt &\le 2\frac{\sqrt{\mu}}{\delta^2}\|\psi_{1yy}(s)\|\frac{1}{\sqrt{\mu}\delta}\left(\int_0^s \|\phi(t)\|dt\right)^{1/2}\cdot s^{1/2}\\
&\le \frac{\mu}{\delta^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2 + \frac{s}{\mu\delta^2}\int_0^s \|\phi(t)\|dt.
\end{aligned}$$

Substituindo a equação acima em (2.121) obtemos:

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^s \frac{2\gamma'(t)}{\gamma^3(t)}\big(\phi(t),\psi_{yy}(t)\big)dt\right| &\le \frac{1}{\delta^3}\int_0^s \|\psi(t)\|^2 dt + \left(\frac{1}{\delta^3}+\frac{s}{\mu\delta^2}\right)\int_0^s \|\phi_{1yy}(t)\|^2 dt \\ &+\frac{\mu}{\delta^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2. \end{aligned} \tag{2.122}$$

$$\begin{aligned}\left|2\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma^5(t)}\|\psi_{yy}(t)\|^2 dt\right| &\le 2\int_0^s \frac{\Theta(t)}{\delta^5}\Big[\|\psi_{1yy}(t)\|+\|\psi_{1yy}(s)\|\Big]^2 dt \\ &\le 4\int_0^s \frac{\Theta(t)}{\delta^5}\|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt + 4\|\psi_{1yy}(s)\|^2\int_0^s \frac{\Theta(t)}{\delta^5}dt \\ &\le \frac{4}{\delta^5}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt \\ &+\frac{4}{\delta^5}\big(\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)}+\|\beta'\|_{L^1(0,\infty)}\big)\|\psi_{1yy}(s)\|^2 \end{aligned} \tag{2.123}$$

$$\begin{aligned}\left|-\int_0^s \big(\phi(t),a_y(t)\psi_y(t)+a(t)\psi_{yy}\big)dt\right| &\le \int_0^s \|\phi(t)\|\Big(|a_y(y,t)|\|\psi_y(t)\|+|a(y,t)|\|\psi_{yy}\|\Big)dt \\ &\le \int_0^s \|\phi(t)\|\Big(\frac{2}{\delta^2}\|\psi_{yy}(t)\|+\frac{2}{\delta^2}\|\psi_{yy}(t)\|\Big)dt \\ &\le \frac{4}{\delta^2}\int_0^s \|\phi(t)\|\Big(\|\psi_{1yy}(t)\|+\|\psi_{1yy}(s)\|\Big)dt \\ &\le \frac{2}{\delta^2}\int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt + \frac{2}{\delta^2}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt \\ &+\frac{4}{\delta^2}\|\psi_{1yy}(s)\|\left(\int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt\right)^{1/2} s^{1/2} \\ &\le 2\Bigg[\frac{1}{\delta^2}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt + \frac{\mu}{\delta^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2 \\ &+\left(\frac{1}{\delta^2}+\frac{s}{\mu}\right)\int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt\Bigg], \end{aligned} \tag{2.124}$$

onde acima utilizamos:

$$|a(y,t)| = \left|\frac{1}{\gamma^2(t)}\left[1-(\alpha'(t)+y\gamma'(t))^2\right]\right| \le \frac{1}{\delta^2}+\frac{\Theta(t)}{\delta^2} \le \frac{2}{\delta^2}$$

e

$$|a_y(y,t)| = \left|-2\big[\alpha'(t)+y\gamma'(t)\big]\frac{\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\right| \le 2\Theta^2(t)\frac{1}{\delta^2} \le \frac{2}{\delta^2}.$$

$$
\begin{aligned}
\left|-\int_0^s \big(\phi(t), b_y(t)\psi(t) + b(t)\psi_y(t)\big)dt\right| &\leq \int_0^s \left[\frac{1}{\delta^2}\|\phi(t)\|\|\psi(t)\| + \frac{1}{\delta^2}\|\phi(t)\|\|\psi_y(t)\|\right] dt \\
&\leq \int_0^s \frac{2}{\delta^2}\|\phi(t)\|\|\psi_{yy}(t)\|dt \\
&\leq \int_0^s \frac{2}{\delta^2}\|\phi(t)\|\Big[\|\psi_{1yy}(t)\| + \|\psi_{1yy}(s)\|\Big]dt \\
&\leq \frac{1}{\delta^2}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt + \frac{\mu}{\delta^4}\|\psi_{1yy}(s)\|^2 \\
&\quad + \left(\frac{1}{\delta^2} + \frac{s}{\mu}\right)\int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt, \qquad (2.125)
\end{aligned}
$$

acima utilizamos:

$$
|b(y,t)| = \left|-\frac{1}{\gamma(t)}[\alpha''(t) + y\gamma''(t)]\right| \leq \frac{\Theta^2(t)}{\delta^2} \leq \frac{1}{\delta^2}
$$

$$
|b_y(y,t)| = \left|\frac{-\gamma''(t)}{\gamma(t)}\right| \leq \frac{1}{\delta^2}.
$$

$$
\begin{aligned}
\left|-\int_0^s \big(c'(t)\phi_y(t), \psi(t)\big)dt\right| &\leq \int_0^s \frac{4\Theta(t)}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|\|\psi(t)\|dt \\
&\leq 4\int_0^s \frac{\Theta(t)}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|\Big[\|\psi_{1yy}(t)\| + \|\psi_{1yy}(s)\|\Big]dt \\
&\leq 4\left[\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|\|\psi_{1yy}(t)\|dt + \int_0^s \frac{\Theta(t)}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|\|\psi_{1yy}(s)\|dt\right] \\
&\leq \frac{2}{9}\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi(t)\|^2 dt + \frac{18}{\delta^2}\|\psi_{1yy}(s)\|^2\int_0^s \Theta^2(t)dt \\
&\quad + \frac{2}{9}\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi(t)\|^2 dt + \frac{18}{\delta^2}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt \\
&\leq \frac{4}{9}\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi(t)\|^2 dt + \frac{18}{\delta^2}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt \\
&\quad + \frac{18}{\delta^2}\Big(\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)} + \|\beta'\|_{L^1(0,1)}\Big)\|\psi_{1yy}(s)\|^2 \qquad (2.126)
\end{aligned}
$$

acima usamos:

$$\begin{aligned}
|c'(y,t)| &= \left|-2\left[\frac{\alpha''(t)\gamma(t)-\alpha'(t)\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}+y\frac{(\gamma'(t))^2-\gamma(t)\gamma'(t)}{\gamma^2(t)}\right]\right| \\
&= \left|\frac{-2}{\gamma^2(t)}\Big[\gamma(t)[\alpha''(t)+y\gamma''(t)]-\gamma'(t)[\alpha'(t)+y\gamma'(t)]\Big]\right| \\
&\leq \frac{2[\alpha'(t)+y\gamma'(t)]}{\gamma^2(t)}+\frac{2\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)} \\
&\leq \frac{2\Theta(t)}{\gamma^2(t)}+\frac{2\Theta^2(t)}{\gamma^2(t)} \\
&= 2\Theta(t)\left[\frac{1}{\gamma^2(t)}+\frac{\Theta(t)}{\gamma^2(t)}\right]\leq\frac{4\Theta(t)}{\gamma^2(t)}.
\end{aligned}$$

$$\left|\int_0^s \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)}\|\phi(t)\|^2dt\right| \leq \frac{1}{\delta}\int_0^s \|\phi(t)\|^2dt, \tag{2.127}$$

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^s \big(\phi_y(t),d(t)\psi_{yy}\big)dt\right| &\leq \int_0^s \frac{\Theta(t)}{\gamma^3(t)}\|\phi_y(t)\|\|\psi_{yy}(t)\|dt \\
&\leq \int_0^s \|\phi_y(t)\|\Big[\|\psi_{1yy}(t)\|+\|\psi_{1yy}(s)\|\Big]dt \\
&\leq \int_0^s \left\{\frac{1}{4\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|^2+\frac{\Theta(t)}{\gamma^4(t)}\Big[\|\psi_{1yy}(t)\|^2+\|\psi_{1yy}(s)\|^2\Big]\right\}dt \\
&\leq \frac{1}{4}\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|^2dt+\frac{1}{\delta^4}\int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2dt \\
&\quad +\frac{1}{\delta^4}\Big(\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)}+\|\beta'\|_{L^1(0,\infty)}\Big)\|\psi_{1yy}(s)\|^2,
\end{aligned} \tag{2.128}$$

acima usamos

$$|d(y,t)| = \left|\frac{1}{\gamma^3(t)}\big[\alpha'(t)+y\gamma'(t)\big]\right| \leq \frac{\Theta(t)}{\gamma^3(t)}.$$

$$
\begin{aligned}
&\left| \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)} \big(\phi(t)\big[v(t)+\widehat{v}(t)\big], \psi_{yy}(t)\big) dt \right| \\
&\qquad \le \frac{1}{\delta^2} \int_0^s \big\|\phi(t)[v(t)+\widehat{v}(t)]\big\| \|\psi_{yy}(t)\| dt \\
&\qquad \le \frac{1}{\delta^2} \int_0^s \big\|[v(t)+\widehat{v}(t)]\big\|_{L^\infty(0,1)} \|\phi(t)\| \|\psi_{yy}(t)\| dt \\
&\qquad \le \frac{1}{\delta^2} \int_0^s \big\|[v_{yy}(t)+\widehat{v}_{yy}(t)]\big\| \|\phi(t)\| \|\psi_{yy}(t)\| dt \\
&\qquad \le \frac{1}{\delta^2} \Big[\|v_{yy}(t)\|_{L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)} + \|\widehat{v}_{yy}(t)\|_{L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)} \Big] \cdot \\
&\qquad\quad \cdot \int_0^s \|\phi(t)\| \Big[\|\psi_{1yy}(t)\| + \|\psi_{1yy}(s)\| \Big] dt \\
&\qquad \le \frac{\mu}{\delta^4} \|\psi_{1yy}(s)\|^2 + \frac{1}{2\delta^4} \int_0^s \|\psi_{1yy}(t)\|^2 dt \\
&\qquad\quad + \Big[\|v_{yy}(t)\|_{L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)} + \|\widehat{v}_{yy}(t)\|_{L^\infty\big(0,T;L^2(0,1)\big)} \Big]^2 \cdot \\
&\qquad\quad \cdot \left(\frac{s}{4\mu} + \frac{1}{2} \right) \int_0^s \|\phi(t)\|^2 dt. \qquad (2.129)
\end{aligned}
$$

Levando em conta (2.122) - (2.129) sobre a equação (2.120) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\phi(s)\|^2 + \left[\frac{1}{2\gamma_0^4} - \frac{1}{\delta^4} \left(5\mu + \frac{18\delta^3+\delta+4}{\delta} \Big(\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)} + \|\beta'\|_{L^1(0,\infty)} \Big) \right) \right] \|\psi_{1yy}(s)\|^2 \\
+ \frac{11}{36} \int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)} \|\phi_y(t)\|^2 dt \le C \int_0^s \left[\frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 + \frac{1}{\delta^4} \|\psi_{1yy}(t)\|^2 \right] dt \qquad (2.130)
\end{aligned}
$$

onde $C = \max\{C_1, C_2\}$ com:

$$
\begin{aligned}
C_1 &= 2\left(\frac{s}{\mu\delta^2} + \frac{1}{\delta^3} \right) + 4\left(\frac{s}{\mu} + \frac{1}{\delta^2} \right) + \frac{2}{\delta} + 2\left(\frac{s}{4\mu} + \frac{1}{2} \right) \cdot \Big(\|\alpha'\|_{L^1(0,\infty)} + \|\beta'\|_{L^1(0,\infty)} \Big) \\
&\text{e} \\
C_2 &= \delta + 21\delta^2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{\delta}.
\end{aligned}
$$

Da equação (2.130) e da hipótese (2.102) nós obtemos:

$$\frac{1}{2}\|\phi(s)\|^2 + \left(\frac{1}{2\gamma_0^4} - \frac{6\mu}{\delta^4}\right)\|\psi_{1yy}(s)\|^2 + \frac{11}{36}\int_0^s \frac{1}{\gamma^2(t)}\|\phi_y(t)\|^2 dt$$
$$\leq C\int_0^s \left[\frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 + \frac{1}{\delta^4}\|\psi_{1yy}(t)\|^2\right] dt.$$

pela hipótese sobre o número μ temos que

$$\left(\frac{1}{2\gamma_0^4} - \frac{6\mu}{\delta^4}\right) > 0,$$

então

$$\|\phi(s)\|^2 + \|\psi_{1yy}(s)\|^2 \leq C\int_0^s \left(\|\phi(s)\|^2 + \|\psi_{1yy}(s)\|^2\right) dt$$

e aplicando a desigualdade de Gronwall resulta

$$\|\phi(s)\|^2 + \|\psi_{1yy}(s)\|^2 = 0$$

pela arbitrariedade de $s \in (0,T)$, obtemos

$$\phi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v = \widehat{v} \text{ em } L^\infty\big(0,T; H_0^2(0,1)\big)$$

provando a unicidade.

Bibliografia

[1] AUBIN J.P. , *Un theorème de compacité*, C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963) 5042-5044.

[2] BOUSSINESQ, M. J.,*"Théorie des ondes et des remouns qui se propagent le long d'um canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans se canal des vitesses senciblement pareilles de la surface au fond"*, J. Math. Pures Appl. 17 (1872) 55-108.

[3] BOUSSINESQ, M. J., *Essai sur la théorie des eaux courantes*, Mém. Présentés par divers savants à l'Académie des Sciences Inst. France (séries 2) 17 (1877) 1-680.

[4] BRÉZIS, H.,*"Análisis Funcional: Teoría y Aplicaciones"*, Alianza Editorial, S.A., Madrid, España, 1984.

[5] CAVALCANTI, M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.,*"Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev"*, Vol. 1, DMA/UEM, Maringá, Brasil, 2000.

[6] CAVALCANTI, M. M. e DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.,*"Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev"*, Vol. 2, DMA/UEM, Maringá, Brasil, 2000.

[7] CLARK, H. R., RINCON, M. A. , RODRIGUES, R., *"Beam equation with weak-internal dumping in domain with moving boundary"*, Appl. Numer. Math. 47 (2003) 139-157.

[8] CODDINGTON, E., LEVINSON, N., *"Theory of Ordinary Differential Equations"*, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[9] CRAIG, W., *An existence theory for water waves and the Boussinesq and Korteweg de Vries scaling limits*, Comm. Partial Differential Equations 10 (1985) 787-1003.

[10] EVANS, L. C.*"Partial Diferential Equations"*, American Matematical Society, v19 (1997)

[11] FROTA, C. L., CLARK, H. R., COUSIN, A. T., LÍMACO J., *"On the dissipative Boussinesq equation in a non-cylindrical domain"*, Nonlinear Analysis, 67 (2007) 2321-2333

[12] LÍMACO, J., CLARK, H. R., MEDEIROS, L. A. *"On equations of Benjamim-Bona-Mahony type"*, Nonlinear Analysis, 59 (2004) 1243-1265

[13] LÍMACO, J., MEDEIROS, L. A. , *"Kirchhoff-Carrier elastic strings in noncylindrical domains"* , Port. Math. 56 (1999) 465-500 Fasc. 4.

[14] LIONS, J. L., MAGENES E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications*, Vol.1, Springer Verlag, Berlin, 1972.

[15] LIONS, J. L., *Quelques Methodes de Resolution des Problèmes aux Limites non Lineaires*, Dunod, Paris, 1969.

[16] MEDEIROS, L. A.,*"Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações"*, Textos de Métodos Matemáticos, Vol. 16, Institudo de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1983.

[17] MEDEIROS, L. A., LÍMACO, J., MENEZES, S. B. *"Vibrations of elastic strings mathematical aspects"*, Part two, J. Comput. Anal. Appl. 4(3) (2002) 211-263

[18] MEDEIROS, L. A. e MELLO, E. A. de, *"A Integral de Lebesgue"*,sexta edição, Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2008.

[19] TEMAM,R., *"Infinity-dimensional dynamical"*, Academic Press, New York, 1967.

[20] ZABUSKY, N. J., *"Nonlinear Partial Differential Equations"*, Academic Press, New York, 1967.