UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

GILBERTO BRITO DE ALMEIDA FILHO

AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS SOBRE ÁLGEBRAS: TEORIA DE GALOIS E CONTEXTO DE MORITA

Maringá - PR

2018

GILBERTO BRITO DE ALMEIDA FILHO

AÇÕES PARCIAIS DE GRUPOS SOBRE ÁLGEBRAS: TEORIA DE GALOIS E CONTEXTO DE MORITA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. LAERTE BEMM

Maringá - PR

2018

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me guardar, principalmente nestes últimos dois anos. Agradeço a minha mãe e irmãs por sempre me apoiar nas minhas jornadas, pois sem elas nada disso seria possível. Agradeço a minha namorada Stéfani C. Vieira pela paciência e apoio nas disciplinas que cursei até aqui e também pelas sugestões para escrever este trabalho.

Agradeço ao meu orientador, professor e amigo Laerte Bemm, por orientar-me com dedicação e paciência no decorrer destes anos. Não tenho palavras para descrever minha gratidão por toda orientação e disponibilidade durante esse processo.

Agradeço aos professores por aceitarem participar da banca deste trabalho.

À CAPES pelo apoio financeiro, que permitiu-me a realização desta dissertação.

E por fim, agradeço a meus amigos e professores que compartilharam comigo esta jornada. Em especial gostaria de agradecer a professora Irene Naomi Nakaoka com quem pude aprender muito durante o mestrado e a Lúcia K. Kato secretaria do PMA por toda disponibilidade e eficiência.

"A mathematician is a person who can find analogies between theorems, a better mathematician is one who can see analogies between proofs and the best mathematician can notice analogies between theories; and one can imagine that the ultimate mathematician is one who can see analogies between analogies."

Stefan Banach, 1892-1945.

Resumo

Neste trabalho, estamos interessados em estudar condições para que os anéis R^α e $R*_\alpha G$ sejam Morita equivalentes. Veremos (no teorema principal) que uma condição para que tais anéis sejam Morita equivalentes é quando o anel R possui coordenadas de Galois parciais sobre R^α. Isto nos leva ao estudo da Teoria de Morita, ações parciais de grupos sobre anéis (num contexto puramente algébrico) e extensões de Galois parciais.

Palavras-chave: álgebras, ações parciais, módulos, Morita, skew anel de grupo parcial.

Abstract

In this work, we are interested in studying conditions so that the R^α and $R*_\alpha G$ rings are Morita equivalents. We will see (in the main theorem) that a condition for such rings to be Morita equivalents is when the ring R has partial Galois coordinates on R^α. This leads us to the study of Morita Theory, partial actions of groups on rings (in a purely algebraic context) and extensions of partial Galois.

Keywords: algebras, partial actions, modules, Morita theory, partial skew group ring .

Sumário

Introdução

Num contexto puramente algébrico, o conceito de uma ação parcial de um grupo agindo sobre um anel foi introduzido em 2005 pelos matemáticos M. Dokuchaev e R. Exel. O estudo de ações parciais vem ganhando destaque em várias áreas da Matemática devido a sua aplicabilidade. Por exemplo, podemos encontrar aplicações de Ações Parciais em Sistemas Dinâmicos, Álgebras de Operadores, na Teoria de Representações de Semigrupos, etc. Esta recente teoria pode ainda ser muito mais abrangente, uma vez que generaliza a Teoria de Ações e esta, como sabemos, possui aplicações em diversas áreas da matemática, como em Álgebras de Lie, Teoria de Galois e Álgebras de Identidades Polinomiais.

Considerando um anel R, um grupo G e uma ação parcial α de G sobre R, podemos definir o conceito de skew anel de grupo parcial $R *_\alpha G$, o qual é formado por todas somas formais finitas da forma $\sum a_g \delta_g$. Este conceito foi estabelecido em [?]. Também foram exibidas condições para que $R *_\alpha G$ seja associativo e além disso, condições necessárias e suficientes para que uma ação de grupo parcial admita uma ação, a qual será apresentada como ação envolvente.

Naturalmente, surgiram questionamentos sobre a possível hereditariedade das propriedades de um certo anel R para R^α, como podemos citar a semi-primalidade e a semi-simplicidade. Similarmente, tais perguntas também surgiram para $R *_\alpha G$.

Dado um anel R e uma ação parcial α que admite uma ação envolvente, estamos interessados em dizer se os anéis R^α e $R *_\alpha G$ podem ser ditos de certa forma equivalentes ou não. A noção de equivalência na qual estamos interessados foi estabelecida pela primeira vez por K. Morita em [?] para o caso geral de dois anéis, a qual necessita do conceito de categoria de módulos que também definiremos aqui. Voltando ao caso de nosso interesse principal, iremos desenvolver a construção de um contexto de Morita envolvendo R^α e $R *_\alpha G$.

Além disso, estamos interessados em construir os dois alicerces para uma melhor compreensão do nosso objeto de estudo. O primeiro é a teoria de ações envolventes apresentada em [?] e o segundo, encontrado em [?], é a teoria de extensões de Galois.

No Capítulo 1, nosso principal objetivo é tratar de alguns conceitos e resultados básicos para o desenvolvimento deste trabalho. Muitos destes são bem conhecidos e podem ser encontrados em [?] e [?]. Por não se tratar do objetivo principal deste trabalho, omitiremos algumas demonstrações, mas sempre deixaremos uma referência de onde podem ser encontradas. Além disso, fixaremos notações que serão utilizadas livremente no decorrer deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos um pouco da Teoria de Morita. Definiremos conceitos essenciais para o desenvolvimento do Capítulo 4, como por exemplo, a noção de módulos progeradores e contexto de Morita. Ainda veremos que sempre é possível construir um contexto de Morita a partir de um dado módulo e como este fato nos permite caracterizar mais facilmente quando um módulo é um progerador ou não. O foco deste capítulo é apresentar três dos teoremas de Morita e também caracterizar todos os anéis numa mesma classe de Morita equivalência.

No Capítulo 3, apresentamos brevemente algumas noções envolvendo ações (globais) e em seguida apresentaremos as definições de ações parciais e skew anel de grupo parcial, conforme foi feito em [?]. Veremos, através de exemplos, que nem sempre o skew anel de grupo parcial satisfaz a associatividade e portanto estudamos resultados apresentados em [?] que fornecem condições para que a associatividade seja satisfeita. A questão da associatividade para o skew anel de grupo parcial merece atenção especial, pois esta é uma condição essencial para que possamos fazer uso da Teoria de Morita apresentada no Capítulo 2. Veremos que o fato que uma ação parcial admitir uma ação envolvente é uma dessas condições e isto nos remete ao teorema principal deste capítulo, intitulado Teorema de Existência e Unicidade de envolventes (Teorema **??**), enunciado e provado em [?].

No Capítulo 4, começamos definindo dois objetos importantes (já conhecidos no caso global) para nosso trabalho, o anel R^α e a aplicação traço parcial tr_α. Primeiramente, estudamos algumas relações entres esses objetos nos contextos global e parcial. Em seguida, estudamos a definição de extensão de Galois parcial, a qual foi apresentada em 2007 pelos matemáticos M. Dokuchaev, M. Ferrero e A. Paques. Eles estudaram, em [**?**], as relações entre as extensões de Galois e as extensões de Galois parciais. Veremos como um anel ser uma extensão de Galois parcial pode ser influenciar na obtenção de informações tanto sobre o skew anel de grupo parcial como também sobre o contexto de Morita que construiremos, conforme feito em [**?**]. A fim de dizer se os anéis R^α e $R *_\alpha G$ são Morita equivalentes, reproduzimos a construção feita em [**?**], do contexto Morita $(R^\alpha, R*_\alpha, V, W; \Gamma, \Gamma')$. O objetivo principal deste capítulo e desta dissertação é a demonstração do Teorema **??**. Este teorema já possui generalizações para ações de grupoides parciais e aplicações na Teoria de Produto Smash. Finalmente, finalizamos o capítulo com algumas consequências deste teorema.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Este capítulo é dedicado ao desenvolvimento de conceitos básicos para este trabalho. Nas três primeiras seções abordamos definições e resultados básicos da Teoria de Módulos, na quarta seção falamos brevemente do "produto tensorial de módulos", na quinta seção motivados a estudar a Teoria de Morita, apresentados algumas definições e resultados sobre categorias. Finalmente, na última seção deste capítulo apresentados a definição de módulos projetivos a fim de anunciar o "Lema da Base Dual".

1.1 Módulos

Nesta seção, falaremos da teoria básica de módulos. Vale lembrar que Espaços Vetoriais são conjuntos não vazios munidos com um operação interna (adição) e uma operação externa (multiplicação por escalar) por elementos de um corpo, onde estas operações são algebricamente compatíveis. A definição de um módulo é uma generalização natural de Espaços Vetoriais. Na definição de módulos exigimos que a ação externa seja por elementos de um anel (e não necessariamente elementos de um corpo). Veremos que ao utilizar um anel para a operação externa, o comportamento de um módulo pode ser bastante diferente do que já conhecíamos em Espaços Vetoriais. Em todo o trabalho, consideraremos que os anéis são associativos com identidade.

Definição 1.1. *Seja R um anel. Dizemos que um conjunto não vazio M é um $R-$**módulo à direita** e o denotamos por M_R, se este conjunto possui operações binárias adição $+$ e produto por escalar $(\cdot)$ tais que M é um grupo abeliano aditivo com respeito a operação $+$ e com respeito a operação externa $(\cdot)$ faz corresponder cada $(m, a) \in M \times R$ um único elemento $am \in M$ tal que para todos $a, b \in R$ e $m, n \in M$, as seguintes relações são* *satisfeitas:*

1. $(mb)a = m(ba)$
2. $(m + n)a = ma + na$
3. $m(a + b) = ma + mb$
4. $m1_R = m$.

De forma análoga, definimos $R-$módulo à esquerda e o denotamos por ${}_RM$. Com estas duas noções de módulos podemos definir a noção de **bimódulo**: dados dois anéis R e S, dizemos que M é um $(R, S)-$**bimódulo** e denotamos por ${}_RM_S$, se M é um $R-$módulo à esquerda, um $S-$módulo à direita e satisfaz $(rm)s = r(ms)$, para cada $r \in R,\ s \in S$ e $m \in M$.

Vale ressaltar que quando o anel R é comutativo podemos dizer que um $R-$módulo à esquerda é simplesmente um módulo, pois podemos torná-lo um módulo à direita definindo a multiplicação por escalar como $ma := am$.

Daqui em diante nos referimos, salvo caso seja necessário, a um $R-$módulo à direita simplesmente por $R-$módulo.

Exemplo 1.2. 1. *Todo anel R é um $R-$módulo sobre si mesmo.*

2. *Todo $\mathbb{K}-$espaço vetorial é um $\mathbb{K}-$módulo.*
3. *Todo grupo abeliano (aditivo) G é um $\mathbb{Z}-$módulo.*

Definição 1.3. *Seja M um $R-$módulo à direita. Um subconjunto não vazio $N \subset M$ é dito um $R-$**submódulo** (ou simplesmente submódulo) de M quando N é um subgrupo aditivo de M e N é fechado em relação a multiplicação por escalares de R.*

Exemplo 1.4. *É fácil ver que os seguintes conjuntos são submódulos:*

1. *Todo ideal à direita de um anel R é um $R-$submódulo de R_R.*
2. *Todo subgrupo H de um grupo abeliano G é um $\mathbb{Z}-$submódulo de ${}_{\mathbb{Z}}G$.*

3. *Todo subespaço vetorial W de um $\mathbb{K}-$espaço vetorial V é um submódulo de V como $\mathbb{K}-$módulo.*

4. *Dado um submódulo N de um $R-$módulo M, o conjunto $\frac{M}{N} = \{m + N \mid m \in M\}$ é um $R-$módulo com as seguintes operações:*

   $(x + N) + (y + N) = (x + y) + N$ *e* $(x + N)r = (xr + N)$, *para todos* $x, y \in M$ *e* $r \in R$. *Tal módulo é chamado de* ***módulo quociente*** *de M por N.*

5. *A soma de submódulos de um módulo M é um submódulo de M, isto é, dados dois submódulos N_1 e N_2 de M o conjunto $N_1 + N_2 = \{x + y \mid x \in N_1,\ y \in N_2\}$ é um submódulo de M e é chamado de* ***submódulo soma*** *de N_1 e N_2.*

6. *Seja M um $R-$módulo à direita. Fixado $m \in M$, o conjunto $mR = \{mr \mid r \in R\}$ é um submódulo de M.*

Notamos que todo anel R pode ser visto como um módulo sobre si mesmo. Como R possui unidade 1_R é fácil ver que para cada $x \in R$, existe $r \in R$ tal que $x = 1_R r$. Em outras palavras, todo elemento de R pode ser visto como o produto do elemento 1_R por algum elemento de R. Assim temos a seguinte definição.

Definição 1.5. *Um $R-$módulo à direita M é dito* ***finitamente gerado*** *quando existem $m_1, ..., m_t \in M$ tais que $M = m_1R + \cdots + m_tR$. O conjunto $\{m_1, ..., m_t\}$ é chamado conjunto gerador de M. Além disso, quando $t = 1$ temos que $M = m_1R$ e neste caso, dizemos que M é um $R-$módulo* ***cíclico****.*

Sejam R um anel e M um $R-$módulo à direita. O conjunto

$$ann(M) = \{r \in R \mid mr = 0,\ \forall m \in M\}$$

é chamado **anulador** de M em R. É fácil ver que $ann(M)$ é um ideal de R. Dizemos que um $R-$módulo M é **fiel** quando, $ann(M) = 0$.

Note que todo anel visto como um módulo sobre si mesmo é finitamente gerado e fiel.

1.2 Homomorfismos de Módulos

Nesta seção vamos tratar de funções entre dois $R-$módulos que preservam a estrutura do módulo. Estas funções especiais são chamadas de homomorfismo de módulos, que significa “mesma” (homo) “forma” (morfismo).

Definição 1.6. *Sejam R anel, M e N $R-$módulos à direita e $f : M \longrightarrow N$ uma função. Dizemos que f é um* ***homomorfismo de** $R-$**módulos à direita*** *(ou $R-$homomorfismo) quando para todos $x, y \in M$ e $r \in R$ temos que:*

(a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

(b) $f(xr) = f(x)r$.

Analogamente define-se homomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Exemplo 1.7. *1. Toda transformação linear entre dois Espaços Vetoriais é um homomorfismo de módulos.*

2. Todo homomorfismo entre grupos abelianos é um $\mathbb{Z}-$homomorfismo.

3. Seja M um $R-$módulo à direita. Fixado $r \in R$ a função $f : M \to M$ dada por $f(m) = mr$, para todo $m \in M$, é um homomorfismo de $R-$módulos.

4. Seja N um submódulo de um $R-$módulo à direita M. A aplicação $\pi_N : M \to \frac{M}{N}$ definida por $\pi_N(m) = m+N$, para todo $m \in M$ é um homomorfismo de $R-$módulos à direita. Esta aplicação recebe o nome de ***homomorfismo canônico***.

Definição 1.8. *Uma aplicação entre $(R, S)-$bimódulos $f : M \to N$ é chamada* ***homomorfismo de** $(R, S)-$**bimódulos*** *(ou simplesmente $(R, S)-$homomorfismo) quando, f é um homomorfismo de $R-$módulos à esquerda, um homomorfismo de $S-$módulos à direita e $f(rxs) = rf(xs) = f(rx)s$ para cada $x \in M$, $r \in R$ e $s \in S$.*

Observação 1.9. *Notemos que a definição de $R-$homomorfismos generaliza a definição de transformações lineares.*

Para um $R-$homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ temos os conjuntos $Im(f) = \{f(x) \mid x \in M\}$ ***imagem de** f* *e $Ker(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$* ***núcleo de** f*. *Tais* *conjuntos são submódulos de N e M respetivamente. Da mesma forma que em Espaços Vetoriais, $f : M \to N$ é um $R-$homomorfismo injetor se, e somente se, $Ker(f) = 0$.*

É fácil ver que a composta de dois homomorfismos de módulos é um homomorfismo de módulos e que a composta entre três (ou mais) homomorfismos de módulos é associativa. Com isso podemos definir a noção de isomorfismo. Dizemos que um $R-$homomorfismo $f : M \longrightarrow N$ é um **isomorfismo de $R-$módulos**, quando existe um $R-$homomorfismo $g : N \longrightarrow M$ tal que $g \circ f = Id_M$ e $f \circ g = Id_N$, onde Id_M e Id_N denotam os homomorfismos identidade de M e N, respectivamente. Equivalentemente, f é um $R-$isomorfismo se, e somente se, f for uma função bijetora e um $R-$homomorfismo. Quando existir um isomorfismo de $R-$módulos $f : M \to N$ diremos que M e N são **isomorfos** e denotaremos por $M \simeq N$.

O conjunto de todos os $R-$homomorfismos entre dois $R-$módulos M e N é denotado por $Hom_R(M, N)$. Este conjunto é um grupo abeliano com a operação de adição pontual de funções. Em particular, se $M = N$ denotamos o conjunto $Hom_R(M, N)$ por $End_R(M)$. Quando não houver risco de confusão denotaremos $Hom_R(M, N)$ simplesmente por $Hom(M, N)$. Como veremos, este conjunto desempenha um papel de destaque neste trabalho. Portanto, fazemos a seguinte observação.

Observação 1.10. *Podemos dar estruturas variadas (de módulos) ao conjunto Hom da seguinte forma: sejam M e U $(R, S)-$bimódulos e N e V $(S, R)-$bimódulos.*

1. *Se U for visto apenas como $R-$módulo à esquerda (resp. $S-$módulo à direita), então $Hom_R(M, U)$ (resp. $Hom_S(M, U)$) possui estrutura de $S-$módulo à esquerda (resp. $R-$módulo à direita), onde $sf : m \mapsto f(ms)$ (resp. $gr : m \mapsto g(rm)$), para todos $f \in Hom_R(M, U)$, $g \in Hom_S(M, U)$, $r \in R$, $s \in S$ e $m \in M$;*

2. *Se for V visto apenas como $R-$módulo à direita (resp. $S-$módulo à esquerda), então $Hom_R(V, N)$ (resp. $Hom_S(V, N)$) possui estrutura de $S-$módulo à esquerda (resp. $R-$módulo à direita), onde $sf : x \mapsto s[f(x)]$ (resp. $gr : x \mapsto [g(x)]r$), para todos $f \in Hom_R(V, N)$, $g \in Hom_S(V, N)$, $r \in R$, $s \in S$ e $x \in V$.*

Para mais detalhes sobre a Observação **??** ver a página 78 de [**?**].

Lema 1.11. *Se M é um $R-$módulo, então $Hom_R(R, M) \simeq M$.*

Demonstração. É fácil ver que

$$\begin{aligned}\gamma : M_R \longrightarrow &\quad Hom_R(R_R, M_R)\\ m \longmapsto &\quad \gamma(m) : R \longrightarrow M\\ &\qquad\quad r \longmapsto mr\end{aligned}$$

é um isomorfismo de $R-$módulos. □

1.3 Módulos Livres

Em álgebra linear vimos que todo espaço vetorial de dimensão finita possui uma base. Como a Teoria de módulos é uma generalização dos espaços vetoriais, é natural se perguntar qual seria a definição de base para módulos. O conceito de base para um módulo pode ser abordada de duas formas distintas: a primeira através da definição de base via elementos (que usaremos) e a segunda via propriedade universal. Todavia, anomalias surgem com respeito aos conjuntos geradores e conjuntos linearmente independentes em módulos. Nesta seção, abordamos rapidamente o conceito de sequências exatas de módulos e veremos como módulos livres podem influenciar uma sequência exata.

Dada uma família de $R-$módulos $\{M_i\}_{i\in I}$, podemos dar uma estrutura de módulo ao produto cartesiano $M = \prod_{i\in I} M_i = \{(x_i) \mid x \in M_i, \forall i \in I\}$ definindo a adição e o produto por escalar por:

1. $(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i)$;

2. $(x_i)r = (x_i r)$,

para quaisquer $(x_i), (y_i) \in M$ e $r \in R$.

É fácil ver que o conjunto M possui estrutura de $R-$módulo à direita com as operações definidas acima. M é chamado **produto direto** da família $\{M_i\}_{i\in I}$. De forma similar, podemos tornar o produto cartesiano de módulos à esquerda um módulo à esquerda.

Dada uma família de $R-$módulos $\{M_i\}_{i\in I}$, dizemos que uma família de elementos $(m_i) \in M = \prod_{i\in I} M_i$ é **quase nula** quando, apenas um número finito de $m_i's$ é diferente de zero. Claramente, o conjunto de todas as famílias quase nulas de M é um $R-$submódulo de M com as operações induzidas de M. O conjunto de todas as famílias quase nulas de M é chamado de **produto direto externo** da família $\{M_i\}_{i\in I}$ e o denotaremos por $\dot{\bigoplus_{i\in I}} M_i$.

Proposição 1.12. *Seja $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de um $R-$módulo M. São equivalentes:*

(a) Todo elemento de $m \in M$ se escreve de maneira única como $m = \sum_{i\in I} m_i$, com a família (m_i) sendo quase nula.

(b) $M = \sum_{i\in I} M_i$ e $\sum_{i\in I} m_i = 0$, com $m_i \in M_i$ e (m_i) sendo uma família quase nula, então $m_i = 0$, para todo $i \in I$.

(c) $M = \sum_{i\in I} M_i$ e $M_j \cap \left(\sum_{i\in I-\{j\}} M_i\right) = 0$, para todo $j \in I$.

Demonstração. Ver Proposição $II.4.1$ na página 48 em [?]. □

Definição 1.13. *Um $R-$módulo M é a **soma direta interna** de uma família de submódulos $\{M_i\}_{i\in I}$ se satisfizer uma (e portanto todas) das condições da proposição anterior. Caso seja satisfeito, denotamos por $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$.*

O próximo resultado é imediato e para mais detalhes o leitor pode consultar na página 51 de [?].

Proposição 1.14. *Seja M um $R-$módulo e $\{M_i\}_{i\in I}$ uma família de submódulos de M. Então $\bigoplus_{i\in I} M_i \simeq \dot{\bigoplus_{i\in I}} M_i$.*

Por este motivo, daqui em diante nos referiremos a soma direta interna ou externa simplesmente por soma direta de módulos.

Dado um $R-$módulo M, sejam N e L submódulos de M tais que $M = N \oplus L$. Então definimos os homomorfismos **inclusão** e **projeção** $i_N : N \to M$ e $p_N : M \to N$, respectivamente, por $i_N(n) = n + 0$ e $p_N(x + l) = x$, para cada $x, n \in N$ e $l \in L$.

Seja N um submódulo de um $R-$módulo M. Dizemos que um submódulo N_1 de M é um **suplementar** de N quando, $M = N \oplus N_1$. Um submódulo L de M é dito um **somando direto** de M se, L possuir um suplementar em M.

Definição 1.15. *Sejam* $\{M_i\}_{i\in I}$ *uma família de* $R-$*módulos e* $\{f_i : M_i \longrightarrow M_{i+1}\}_{i\in I}$ *uma família de* $R-$*homomorfismos. Diz-se que a sequência de* $R-$*módulos*

$$\cdots \longrightarrow M_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} M_i \xrightarrow{f_i} M_{i+1} \longrightarrow \cdots$$

é uma ***sequência exata de*** $R-$***módulos*** *quando* $Im(f_{i-1}) = Ker(f_i)$ *para cada* $i \in I$.

Exemplo 1.16. *1. Sejam N e L submódulos de um $R-$módulo M. Se $M = N \oplus L$, então a seguinte sequência é exata*

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{p_L} L \longrightarrow 0$$

2. Seja N um submódulo de um $R-$módulo M. Então a seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{i_N} M \xrightarrow{\pi_N} \frac{M}{N} \longrightarrow 0$$

Definição 1.17. *Diz-se que uma sequência exata de* $R-$*módulos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

cinde *quando Ker(g) é um somando direto de* N.

O próximo resultado fornece uma maneira de decidir quando uma sequência exata do mesmo formato que em (**??**) cinde.

Proposição 1.18. *Dada uma sequência exata de* $R-$*módulos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0,$$

são equivalentes:

(a) A sequência cinde;

(b) *Existe um $R-$homomorfismo $\psi : N \to M$ tal que $\psi \circ f = Id_M$;*

(c) *Existe um $R-$homomorfismo $\phi : L \to N$ tal que $g \circ \phi = Id_L$.*

Nestas condições, $N \simeq M \oplus L$.

Demonstração. Ver Proposição $II.4.7$ na página 56 em [?]. □

Agora, fixaremos a seguinte notação: dado um anel R e um conjunto de índices I, denotamos por $R^{(I)}$, o conjunto de todas as famílias quase nulas $(\lambda_i)_{i\in I}$ com $\lambda_i \in R$, para todo $i \in I$. Notemos que $R^{(I)}$ é um $R-$módulo.

Sejam M um $R-$módulo e $X = \{x_i\}_{i\in I}$ um subconjunto não vazio de M. Dizemos que um elemento m do $R-$módulo M é **combinação linear** de elementos de X de M quando existir uma família quase nula $(\lambda_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$ tal que $m = \sum_{i\in I} x_i\lambda_i$. Quando todo elemento de M for combinação linear de elementos do subconjunto X, dizemos que X **gera** M. O subconjunto X de M é dito **linearmente independente** (ou somente $L.I.$) se, a única combinação linear possível do elemento nulo de M é a combinação nula (trivial), isto é, se $\sum x_i\lambda_i = 0$ para alguma família quase nula $(\lambda_i)_{i\in I} \in R^{(I)}$, então $\lambda_i = 0$, para todo $i \in I$. Um subconjunto de M que gera M e é $L.I.$ é dito uma **base** para M sobre R. Finalmente, se um módulo possui uma base, dizemos que este módulo é um **módulo livre**.

A seguir apresentamos alguns exemplos e contra-exemplos de propriedades que "valem" e "deixam de valer" quando passamos do estudo de bases em Espaços Vetoriais para o estudo de bases em módulos.

Exemplo 1.19. *Exemplos:*

1. *Todo anel R é um módulo livre visto como um módulo sobre si mesmo. Além disso, quando R é comutativo, as únicas bases possíveis para R_R são conjuntos unitários formados por elementos invertíveis de R.*

2. *Num anel comutativo R, um ideal é um $R-$módulo livre se, e somente se, for um ideal principal e seu gerador for L.I. sobre R.*

3. *O $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ é livre sobre $\mathbb{Z}$ com base $\{(1,0),(0,1)\}$.*

4. *Sejam R um anel e I um conjunto de índices. Para cada $i \in I$, definimos o elemento $e_i \in R^{(I)}$ como sendo a sequência com 1 na $i-$ésima entrada e zero nas demais. É fácil ver que o conjunto $\{e_i\}_{i\in I}$ é uma base para $R^{(I)}$.*

5. *Todo $\mathbb{K}-$espaço vetorial é um $\mathbb{K}-$módulo livre.*

Exemplo 1.20. *Contra-exemplos:*

1. *Em geral, não é verdade que todo subconjunto de um conjunto L.I. de um módulo livre pode ser "ampliado" a uma base. De fato, basta considerar $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ e o conjunto L.I. $\{2\}$.*

2. *Também é falso, em geral, que todo conjunto gerador contém uma base. De fato, basta considerar $\mathbb{Z}_\mathbb{Z}$ e o conjunto gerador $\{2,3\}$.*

3. *Nem sempre um submódulo de um módulo livre é livre. Com efeito, consideremos o $\mathbb{Z}-$módulo $\mathbb{Z}_6$ e o subconjunto $\{\overline{0},\overline{2},\overline{4}\}$.*

Proposição 1.21. *Sejam M um $R-$módulo livre com base $X = \{x_i\}_{i\in I}$, um $R-$módulo N e uma função $f : X \to N$. Então, sempre é possível estender f de maneira única à um homomorfismo $\overline{f} : M \to N$.*

Demonstração. Como X é uma base de M, temos que para cada $m \in M$, existem $r_1, ..., r_k \in R$ tais que $m = \sum_{i=1}^{k} x_i r_i$ com $x_i \in X$, para todo $i = 1, ..., k$. Assim, basta definir $\overline{f}(m) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i) r_i$.

Agora, suponha que exista outro homomorfismo $h : M \to N$ que também estende f. Note que $\overline{f}(x_i) = f(x_i) = h(x_i)$ para todo $x_i \in X$. Dado $m \in M$ existem $r_1, \ldots, r_n \in R$ tais que $m = \sum_{i=1}^{n} x_i r_i$. Logo,

$$\overline{f}(m) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}(x_i r_i) = \sum_{i=1}^{n} \overline{f}(x_i) r_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) r_i = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) r_i = \sum_{i=1}^{n} h(x_i r_i) = h(m).$$

Portanto, $h = \overline{f}$. $\square$

Corolário 1.22. *Seja M um $R-$módulo livre com base $X = \{x_i\}_{i\in I}$. Então $M \simeq R^{(I)}$ como $R-$módulos.*

Demonstração. Basta definir a função $f : M \to R^{(I)}$ por $f(x_i) = e_i$, para cada $i \in I$ e usar o resultado anterior. □

Proposição 1.23. *Seja L um $R-$módulo livre. Dados $f : M \to N$ e $g : L \to N$ homomorfismos de $R-$módulos, com f sobrejetor. Então, existe um $R-$homomorfismo $G : L \to M$ tal que $f \circ G = g$.*

Demonstração. Seja $X = \{x_i\}_{i\in I}$ uma base de L. Calculamos $y_i = g(x_i)$, para cada $i \in I$. Como f é sobrejetor, então existem elementos $m_i \in M$ tais que $f(m_i) = y_i$, para todo $i \in I$.

Definindo $g_1 : X \to M$ por $g_1(x_i) = m_i$, para cada $i \in I$, temos pela Proposição **??** que existe um homomorfismo $G : L \to M$ tal que $f \circ G = g$. □

Proposição 1.24. *Sejam M, N e L $R-$módulos, com L livre e $f : M \to L$ um $R-$homomorfismo sobrejetor. Então $M \simeq Ker(f) \oplus L$.*

Demonstração. Como L é livre, segue da proposição anterior, que existe $h : L \to M$ tal que $f \circ h = Id_L$. Logo, basta usar a Proposição **??**. □

Corolário 1.25. *Dada uma sequência exata de $R-$módulos*

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} L \longrightarrow 0.$$

Se L é livre, então a sequência cinde.

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior. □

Proposição 1.26. *Todo módulo é imagem epimórfica de um módulo livre.*

Demonstração. Seja M um $R-$módulo e considere $X = \{x_i\}_{i\in I}$ um conjunto de geradores de M (note que no pior dos casos $X = M$).

Defina $f' : R^{(I)} \to M$ por $f'(e_i) = x_i$, para todo $i \in I$. Logo, podemos estender f' a um $R-$homomorfismo sobrejetor $f : R^{(I)} \to M$. □

1.4 Produto Tensorial

Lembramos a definição de grupo abeliano livre. Dado um conjunto X, um **grupo abeliano livre sobre X** é um grupo abeliano $\mathtt{L}$ juntamente com uma função $\theta : X \to \mathtt{L}$ que satisfaz a seguinte propriedade universal: para qualquer grupo abeliano H e qualquer função $\phi : X \to H$ existe um único homomorfismo de grupos $f : \mathtt{L} \to H$ tal que $f \circ \theta = \phi$. Tal grupo é único a menos de isomorfismo. Um fato bem conhecido é que dado um conjunto não vazio X, sempre é possível construir um grupo abeliano livre sobre ele.

Definição 1.27. *Sejam M_R, ${}_RN$ $R-$módulos e G um grupo abeliano (aditivo). Uma função $f : M \times N \to G$ é dita $R-$**balanceada** se para quaisquer $x, y \in M$, $z, w \in N$ e $r \in R$ satisfaz as seguintes condições:*

i) $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$;

ii) $f(x, w + z) = f(x, w) + f(x, z)$;

iii) $f(mr, n) = f(m, rn)$.

Notamos que toda função bilinear entre espaços vetoriais é uma função balanceada.

Definição 1.28. *Sejam M_R e ${}_RN$ $R-$módulos e $\mathtt{L}$ o grupo abeliano livre sobre $M \times N$. Consideramos o subgrupo $\mathtt{K}$ de $\mathtt{L}$ gerado pelos elementos*

$$(x + y, z) - (x, z) - (y, z),\ (x, w + z) - (x, w) - (x, z),\ (xr, z) - (x, rz),$$

para todos $x, y \in M$, $z, w \in N$ e $r \in R$.

*Então o grupo quociente $\frac{\mathtt{L}}{\mathtt{K}}$ é chamado de **produto tensorial** de M e N. Denotamos o quociente $\frac{\mathtt{L}}{\mathtt{K}}$ por $M \otimes_R N$ e as classes $(x, z) + \mathtt{K}$ são denotadas por $x \otimes z$. Os elementos $x \otimes z$ são chamados **tensores elementares**.*

Como o grupo $\mathtt{L}$ é gerado pelos elementos de $M \times N$, então o quociente $\frac{\mathtt{L}}{\mathtt{K}}$ é gerado pelas classes $(x, z) + \mathtt{K}$, ou seja, os tensores elementares geram $M \otimes_R N$. Embora cada elemento de `L` seja da forma (x, z), não é verdade, em geral, que todo elemento de $M \otimes_R N$ seja da forma $x \otimes z$. Um exemplo disto pode ser encontrado na página 17 de [**?**]. Os elementos de $M \otimes N$ são na verdade somas finitas de tensores elementares.

Do produto tensorial de dois módulos surge naturalmente a aplicação canônica $\otimes : M \times N \to M \otimes_R N$ dada por $\otimes(m, n) = m \otimes n$, para quaisquer $(m, n) \in M \times N$. Note que $\otimes$ é balanceada pela forma que definimos o subgrupo `K` de `L`.

Em geral, demonstrar que uma propriedade em um produto tensorial de módulos arbitrários usando seus elementos é uma tarefa difícil, as vezes até inviável. Portanto, é imprescindível termos alguma ferramenta para contornar este obstáculo. O próximo resultado fornece esta ferramenta.

Teorema 1.29. *Sejam M_R e $_RN$ módulos e G um grupo abeliano. Se $\alpha : M \times N \to G$ é uma função balanceada, então existe um único homomorfismo de grupos $\overline{\alpha} : M \otimes_R N \to G$ tal que $\overline{\alpha} \circ \otimes = \alpha$.*

Demonstração. Ver Teorema 5.2 na página 209 de [**?**]. □

O Teorema **??** nos diz que o produto tensorial de dois módulos satisfaz uma propriedade universal, chamada **propriedade universal do produto tensorial**. Esta propriedade nos diz que dada qualquer aplicação $R-$balanceada $B : M \times N \to G$ existe um único homomorfismo de grupos $f : M \otimes_R N \to G$ tal que o diagrama abaixo comuta

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\otimes"] \arrow[d, "B"'] & M \otimes N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ G & \end{tikzcd}$$

ou seja, $f \circ \otimes = B$. Pela definição de produto tensorial dada no início da seção, dados dois módulos, sempre existe o produto tensorial destes. Uma pergunta pertinente a ser feita é se este objeto é único.

Corolário 1.30. *Se T e T' são dois produtos tensoriais de M_R e $_RN$, então $T \simeq T'$.*

Demonstração. Basta usar a propriedade universal. □

O produto tensorial de dois módulos sobre um anel qualquer não "nasce" um módulo, mas sim um grupo abeliano (aditivo). Mesmo assim, é possível dar uma estrutura de módulo ao produto tensorial.

Teorema 1.31. *Sejam R e S anéis, ${}_SM_R$, ${}_RL_S$ bimódulos e ${}_RN$, P_R módulos. Então:*

1. *$M \otimes_R N$ é um $S-$módulo à esquerda com multiplicação definida por $s(m \otimes n) = (sm) \otimes n$, para todos $m \in M,\ n \in N$ e $s \in S$.*

2. *$P \otimes_R L$ é um $S-$módulo à direita com multiplicação definida por $(p \otimes x)s = p \otimes xs$, para todos $p \in P,\ x \in L$ e $s \in S$.*

Demonstração. Ver Teorema 5.5 na página 210 em [**?**]. □

Proposição 1.32. *Sejam M_R, M'_R, N_R e N'_R módulos sobre um anel R e $f : M \to M'$, $g : N \to N'$ homomorfismo de $R-$módulos. Então existe um único homomorfismo de grupos $h : M \otimes_R N \to M' \otimes_R N'$ dado por $h(m \otimes n) = f(m) \otimes g(n)$, $\forall m \in M,\ n \in N$. Além disso, se f for um homomorfismo de $(S, R)-$bimódulos, então h é um homomorfismo de $S-$módulos à esquerda. Em particular, se f e g são isomorfismos, então h é um isomorfismo.*

Demonstração. Basta verificar que a aplicação $h' : M \times N \to M' \otimes_R N'$ dada por

$$h'(m, n) = f(m) \otimes g(n),$$

para quaisquer $m \in M$ e $n \in N$, é $R-$balanceada e usar o Teorema **??**. □

Daqui em diante, denotamos o homomorfismo h da proposição anterior por $f \otimes g$. Se $f' : M' \to M''$, $g' : N' \to N''$ são homomorfismos de $R-$módulos à direita como na proposição anterior, então as funções

$$(f' \otimes g') \circ (f \otimes g),\ ((f' \circ f) \otimes (g' \circ g)) : M \otimes_R N \to M'' \otimes_R N''$$

são iguais.

Proposição 1.33. *Se R é um anel e M_R, ${}_RN$ são $R-$módulos, então $f : M \otimes R \to M$ e $g : R \otimes N \to N$ dados, respectivamente, por $f(m \otimes r) = mr$ e $g(r \otimes n) = rn$ são isomorfismos de $R-$módulos.*

Demonstração. Ver Teorema 5.7 da página 212 de [?]. □

Na Proposição **??**, se M é um $(S,R)-$bimódulo, então $M \otimes_R R \simeq M$ como $S-$módulos à esquerda.

Teorema 1.34. *Sejam R e S anéis, M_R e $_SN$ módulos e $_RP_S$ um bimódulo. Então $(M \otimes_R P) \otimes_S N \simeq M \otimes_R (P \otimes_S N)$ como grupos. Além disso, se M é um $(S,R)-$bimódulo, então $(M \otimes_R P) \otimes_S N \simeq M \otimes_R (P \otimes_S N)$ como $S-$módulos à esquerda.*

Demonstração. Ver Teorema 5.8 na página 212 de [?]. □

Devido ao Teorema **??** podemos escrever $(M \otimes_R P) \otimes_S N$ simplesmente por $M \otimes_R P \otimes_S N$. Este teorema nos permite definir o produto tensorial de um número finito de módulos. Mais precisamente, dados $R_1, ..., R_n$ anéis e $M^1_{R_1}$, $_{R_1}M^2_{R_2}, ...,$ $_{R_n}M^{n+1}$ módulos, então o produto tensorial destes n módulos é dado por

$$M^1 \otimes_{R_1} M^2 \otimes_{R_2} \cdots \otimes_{R_n} M^{n+1}.$$

1.5 Categoria e Funtores

Nesta seção, faremos um breve estudo sobre categorias e funtores. O leitor interessado em estudar um pouco mais dessa teoria pode consultar as seguintes referências [?] e [?].

Assim, como é necessário definir espaços vetoriais para dar um contexto às transformações lineares é necessário definir categorias para que então se possa definir os funtores. Apresentaremos também alguns exemplos de categorias e funtores que serão utilizados posteriormente.

Definição 1.35. *Uma **categoria** $\mathcal{C}$ é formada por:*

i) uma classe de objetos $Obj(\mathcal{C})$,

ii) um conjunto de morfismos $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, para cada par de objetos A, B em $\mathcal{C}$;

iii) uma composição

$$\begin{array}{rcl} Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B,C) & \longrightarrow & Hom_{\mathcal{C}}(A,C), \\ (\ f,\ g\ ) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

definida para qualquer tripla de objetos A, B e C em $\mathcal{C}$. A classe de objetos, o conjunto de morfismos e a composição satisfazem os seguintes axiomas:

1. *Os conjuntos $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ são disjuntos aos pares, isto é, se*

$$f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B) \cap Hom_{\mathcal{C}}(C,D),$$

   então $A = C$ e $B = D$;

2. *Para cada objeto $A \in Obj(\mathcal{C})$ existe um único morfismo chamado **identidade** (e denotado por $Id_A \in Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$) tal que $f \circ Id_A = f$ e $Id_B \circ f = f$, para todo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$;*

3. *A composição é associativa, ou seja, dados morfismos $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$ e $h \in Hom(C,D)$, tem-se $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.*

Quando não houver risco de confusão, denotaremos $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ por $Hom(A,B)$ e escreveremos a composição de morfismos $g \circ f$ simplesmente por gf.

Existe uma grande quantidade de categorias, mas listaremos a seguir apenas aquelas que são pertinentes a este trabalho.

Exemplo 1.36 (**Ctos**). *Os objetos são os conjuntos, os morfismos são as funções e a composição é a composição usual de funções. A verificação de que **Ctos** é uma categoria é imediata.*

Exemplo 1.37 (**Grp**). *Os objetos são os grupos, os morfismos são os homomorfismos de grupos e a composição é a composição de homomorfismos de grupos. A verificação de que **Grp** é uma categoria segue da Teoria de Grupos.*

Exemplo 1.38 (**Anéis**). *Os objetos são os anéis, os morfismos são os homomorfismos de anéis e a composição é a composição de homomorfismos de anéis. A verificação de que **Anéis** é uma categoria segue da Teoria de Anéis.*

Exemplo 1.39 (Htp). *Os objetos são os espaços topológicos, os morfismos são as classes de homotopias de funções contínuas (portanto, aqui um morfismo não é uma função mas uma certa classe de equivalência de funções) e a composição é definida por* $[f][g] = [fg]$*, onde* $f \sim f'$ *e* $g \sim g'$ *então* $fg \sim f'g'$ *(*$\sim$ *significa que* f *é homotópico a* f'*). A verificação de que* ***Htp*** *é uma categoria segue do estudo de Topologia Geral.*

Este exemplo mostra que nem todo morfismo é uma função.

Exemplo 1.40 ($\mathcal{M}_R$**).** *Os objetos são os módulos à direita, os morfismos são os homomorfismos de módulos e a composição é a composição de homomorfismos de módulos. A verificação de que* $\mathcal{M}_R$ *é uma categoria segue das seções* 1.1 *e* 1.2*.*

A categoria de $R-$*módulos à esquerda* ${}_R\mathcal{M}$ *é definida de forma similar a categoria* $\mathcal{M}_R$*.*

Usando linguagem categórica, podemos generalizar as definições de homomorfismo de módulos injetores e sobrejetores. Seja $g : A \to B$ um morfismo em uma categoria $\mathcal{C}$. Dizemos que g é um **monomorfismo** se, para quaisquer morfismos $f, h : A' \to A$ tais que $gf = gh$, tem-se $f = h$. Dizemos que um morfismo g é um **epimorfismo** se, para quaisquer morfismos $f, h : B \to A'$ tais que $fg = hg$ implica que $f = h$. Dizemos que g é um **isomorfismo** quando, g for um epimorfismo e um monomorfismo.

Agora, consideramos um anel R e seja $U(R)$ o conjunto dos elementos invertíveis de R. É fácil ver que $U(R)$ é um grupo multiplicativo. Então podemos definir a aplicação F : **Anéis** $\to$ **Grp** por $F(R) = U(R)$ e $F(f) = f|_{U(R)}$, para cada homomorfismo de anéis $f : R \to S$. Note que F satisfaz algumas propriedades interessantes: F leva objetos de **Anéis** em objetos de **Grp**; homomorfismos de anéis em homomorfismos de grupos; e para quaisquer homomorfismos de anéis $f : R \to S$ e $g : S \to T$, tem-se $(g \circ f)|_{U(R)} = \big(g|_{U(S)}\big) \circ (f|U(R))$, isto é, $F(gf) = F(g)F(f)$. Além disso, é claro que $Id_R|_{U(R)} = Id_{U(R)}$. Com esta motivação, apresentamos a próxima definição.

Definição 1.41. *Sejam* $\mathcal{C}$ *e* $\mathcal{D}$ *categorias. Um* ***funtor covariante*** *é uma aplicação* $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ *que satisfaz:*

1) A cada $A \in Obj(\mathcal{C})$*, associa um único* $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$*;*

2) A cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, associa um único $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$;

3) Dados $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $F(gf) = F(g)F(f)$;

4) $F(Id_A) = Id_{F(A)}$, para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$.

Informalmente falando, um funtor covariante é uma função entre objetos e entre morfismos que "preserva" a composição (e o sentido da composição) e os morfismos identidades.

Definição 1.42. *Sejam $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ e $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ dois funtores. Definimos a composta $GF : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ da seguinte forma:*

1) $GF(A) = G(F(A))$; para todo $A \in Obj(\mathcal{A})$;

2) $GF(h) = G(F(h))$, para cada $A, B \in Obj(\mathcal{A})$ e cada $h \in Hom_{\mathcal{A}}(A, B)$.

É fácil ver que a composta de dois funtores covariantes é ainda um funtor covariante.

Exemplo 1.43. *Seja $\mathcal{C}$ uma categoria. Então o funtor identidade $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ é definido por: $1_{\mathcal{C}}(A) = A$, para cada $A \in Obj(\mathcal{C})$ e $1_{\mathcal{C}}(f) = f$, para cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.*

Agora daremos dois importantes exemplos de funtores.

Exemplo 1.44. *Sejam $\mathcal{M}_R$ a categoria dos $R-$módulos à direita e **Ctos** a categoria dos conjuntos. Dado um $R-$módulo à direita A, considere a aplicação $T_A : \mathcal{M}_R \to$ **Ctos** definida da seguinte forma:*

- *$T_A(B) = Hom(A, B)$, para todo $B \in Obj(\mathcal{M}_R)$;*
- *Dado $f \in Hom(B, C)$, definimos $T_A(f) \in Hom(Hom(A, B), Hom(A, C))$ por*

$$T_A(f) : h \mapsto f \circ h,$$

para todo $h \in Hom(A, B)$.

A fim de simplificação, vamos denotar $T_A(f)$ *por* f_*. *Mostraremos que aplicação* T_A *é um funtor. Pela definição de categorias temos que* $T_A(B) \in Obj(\boldsymbol{Ctos})$ *para cada* $B \in Obj(\mathcal{M}_R)$. *Dados* $f \in Hom(B, C)$ *e* $g \in Hom(C, D)$, *é imediato que*

$$f_* \in Hom(Hom(A, B), Hom(A, C)),\ (gf)_*,\ g_* f_* \in Hom(Hom(A, B), Hom(A, D)).$$

Além disso, para cada $h \in Hom(A, B)$ *temos que*

$$(gf)_* : h \mapsto (gf)h \quad e \quad g_* f_* : h \mapsto g(fh).$$

Assim, $(gf)_* = g_* f_*$ *e segue que* T_A *satisfaz as condições* 1), 2) *e* 3) *da definição de funtor covariante. Finalmente, para cada* $B \in Obj(\mathcal{M}_R)$ *considere* Id_B. *Temos que* $(Id_B)_* \in Hom(Hom(A, B), Hom(A, B))$ *e para cada* $h' \in Hom(A, B)$ *temos*

$$(Id_B)_* : h' \mapsto Id_B h' = h'.$$

Portanto, T_A *é um funtor covariante e é chamado* ***Funtor Hom***. *Denotaremos* T_A *por* $Hom_R(A, \Box)$ *(ou simplesmente* $Hom(A, \Box)$*). Por este motivo,* f_* *também denota* $Hom(A, f)$, *para cada* $f \in Hom_R(A, B)$.

Exemplo 1.45. *Sejam* R, S *anéis e* M *um* $(S, R)-$*bimódulo. Em particular,* $M \in Obj(\mathcal{M}_R)$. *Definimos* $G_M :_R \mathcal{M} \rightarrow {}_S\mathcal{M}$ *por:*

· $G_M(A) = M \otimes_R A$, *para cada* $A \in Obj({}_R\mathcal{M})$;

· $G_M(f) = Id_M \otimes f$, *para cada* $f \in Hom_{{}_R\mathcal{M}}(A, B)$.

Então:

- *Pelo Teorema* **??**, $G_M(A) \in Obj({}_S\mathcal{M})$, *para cada* $A \in Obj({}_R\mathcal{M})$.

- *Pela Proposição* **??**, $G_M(f) = Id_M \otimes f$ *é um homomorfismo de* $S-$*módulos à esquerda, para cada* $f \in Hom_{{}_R\mathcal{M}}(A, B)$.

- *Para cada* $f \in Hom_{{}_R\mathcal{M}}(A, B)$ *e* $g \in Hom_{{}_R\mathcal{M}}(B, C)$, *temos que*

$$G_M(gf) = Id_M \otimes gf = (Id_M \otimes g) \circ (Id_M \otimes f) = G_M(g) \circ G_M(f).$$

- $G_M(Id_A) = Id_{M \otimes_R A}$, *para todo objeto* A *em* ${}_R\mathcal{M}$.

Assim, G_M é um funtor covariante. Denotaremos G_M por $M \otimes_R \Box$. O funtor $M \otimes_R \Box$ é chamado ***funtor tensor****.*

De forma similar, definimos o funtor $\Box \otimes_R N$, para algum $(R, S)-$bimódulo N.

Se no exemplo acima, considerássemos apenas N um $R-$módulo à esquerda e M um $R-$módulo à direita, obteríamos funtores entre categorias de grupos.

Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é **fiel** se, para quaisquer $A,\ B \in Obj(\mathcal{C})$ a restrição de F ao conjunto $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ é injetora, isto é,

$$\begin{array}{rcl} F : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) & \to & Hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \\ f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

é injetora.

Definição 1.46. *Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ categorias, definimos o* ***funtor cotravariante*** *como uma aplicação $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ que satisfaz:*

1) A cada $A \in Obj(\mathcal{C})$, associa um único $F(A) \in Obj(\mathcal{D})$;

2) A cada $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$, associa um único $F(f) \in Hom_{\mathcal{D}}(F(B), F(A))$;

3) Dados $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$, $F(gf) = F(f)F(g)$;

4) $F(Id_A) = Id_{F(A)}$, para todo $A \in Obj(\mathcal{C})$.

Os Exemplos **??** e **??** são naturalmente modificados a fim de obter funtores contravariantes.

Em álgebra uma importante noção é a de quando dois objetos (do ponto de vista algébrico) são "iguais". Esta noção de "igualdade" que facilita o estudo de certas propriedades é chamada de *isomorfismo*. Por exemplo, em Teoria de Grupos, estamos interessados em classificar todos os grupos com "mesma estrutura algébrica", para tanto definimos a noção de isomorfismo de grupo. Mas, para definirmos tal noção de "isomorfismo" é necessário termos aplicações que "preservem" as estruturas que estamos interessados em estudar. Portanto, é natural se perguntar, qual seria a noção de "isomorfismo" entre duas categorias. Motivados em responder tal questão, apresentamos as seguintes definições.

Definição 1.47. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dois funtores de mesma variância. Uma* ***transformação natural*** *$\tau : G \to F$ é uma família de morfismos*

$$\tau = \big(\ \tau_V \quad : \quad G(V) \quad \to \quad F(V)\ \big)_{V \in Obj(\mathcal{C})}$$

tal que para quaisquer $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ e $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ o seguinte diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(A) & \xrightarrow{\tau_A} & F(A) \\ {\scriptstyle G(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\ G(B) & \xrightarrow{\tau_B} & F(B), \end{array}$$

é comutativo, ou seja, $F(f) \circ \tau_A = \tau_B \circ G(f)$.

Notamos que se exigirmos que cada τ_V na definição anterior seja um isomorfismo, então os funtores F e G "atuariam da mesma forma" em cada objeto A de $\mathcal{C}$ e isto motiva a seguinte definição.

Definição 1.48. *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores. Uma transformação natural $\tau : G \to F$ é um* ***isomorfismo natural*** *se, para cada $V \in Obj(\mathcal{C})$, τ_V for um isomorfismo. Quando existir um isomorfismo natural entre os funtores F e G, denotaremos por $F \cong G$.*

Informalmente falando, quando existe um isomorfismo natural entre dois funtores F e G é como se estes funtores fossem "iguais".

Notamos que as transformações naturais podem ser compostas a partir da seguinte definição: sejam $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ funtores de mesma variância e consideramos $\tau : G \to F$ e $\sigma : F \to H$ duas transformações naturais. Definimos a composição de σ com τ como sendo

$$\sigma \circ \tau = \big(\ \sigma_V \circ \tau_V \quad : \quad G(V) \quad \to \quad H(V)\ \big)_{V \in Obj(\mathcal{C})}.$$

Para qualquer funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, definimos a **transformação natural identidade** $\omega_F : F \to F$ como sendo $(\omega_F)_A : F(A) \to F(A)$ o morfismo identidade $Id_{F(A)}$. Assim, uma transformação natural $\tau : G \to F$ é um isomorfismo natural se, e somente se, existir uma transformação natural $\sigma : F \to G$ tal que $\sigma \circ \tau = \omega_G$ e $\tau \circ \sigma = \omega_F$.

Definição 1.49. *Dizemos que um funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é uma* ***equivalência de categorias*** *se, existir um funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e isomorfismos naturais tais que*

$$FG \cong 1_{\mathcal{D}} \quad e \quad GF \cong 1_{\mathcal{C}}.$$

Neste caso, G também é uma equivalência de categorias e é chamado ***equivalência inversa*** *de F. Duas categorias são* ***equivalentes****, quando existir uma equivalência de categorias de uma na outra.*

Sejam R um anel e $M, M' \in Obj(\mathcal{M}_R)$. Defina para cada $m \in M$

$$\begin{aligned} \rho_m : R &\longrightarrow M \\ r &\longmapsto mr \end{aligned}$$

Pelo Lema **??** temos que $\rho_M : M \to Hom_R(R, M)$ dada por $\rho_M(m) = \rho_m$ é um isomorfismo de $R-$módulos à direita. Além disso, dado $g \in Hom_R(M, M')$. É fácil ver que o seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "g"'] & Hom_R(R, M) \arrow[d, "g_* = Hom_R(R, g)"] \\ M' \arrow[r, "\rho_{M'}"] & Hom_R(R, M') \end{tikzcd}$$

é comutativo. Isto justifica o seguinte exemplo.

Exemplo 1.50. *Seja R um anel. Então $\rho : 1_{\mathcal{M}_R} \to Hom_R(R, \square)$ definido para cada $M \in Obj(\mathcal{M}_R)$ por $\rho_M(m) : r \mapsto mr$ é um isomorfismo natural.*

Para muitos dos resultados que estão por vir é necessário definir o universo que nossos objetos se encontraram. Embora a definição de categoria já pareça suficiente, ela não é, pois grande parte dos funtores que utilizarmos estarão definidos nas categorias de módulos, a qual pertence a uma classe de categorias mais restrita. A classe de categorias que nos referimos são as categorias aditivas e para defini-la, precisamos de algumas definições.

Dizemos que um objeto A numa categoria $\mathcal{C}$ é um **objeto inicial** (**objeto final**) quando, para cada objeto X de $\mathcal{C}$, existe um único morfismo $A \to X$ ($X \to A$). Também, um objeto A numa categoria $\mathcal{C}$ é um **objeto nulo**, quando ele for inicial e final. Por exemplo, na categoria $\mathcal{M}_R$ o módulo nulo é um objeto inicial e final.

Definição 1.51. *Sejam A e B dois objetos de uma categoria $\mathcal{C}$.*

1. *O **produto** de A por B é uma a tripla $(A \sqcap B,\ p,\ q)$, onde $A \sqcap B$ é um objeto de $\mathcal{C}$, $p : A \sqcap B \to A$ e $q : A \sqcap B \to B$ são morfismos satisfazendo a seguinte propriedade: para todo objeto X em $\mathcal{C}$ e quaisquer morfismos $f : X \to A$ e $g : X \to B$, existe um único morfismo $\theta : X \to A \sqcap B$ tal que $p \circ \theta = f$ e $q \circ \theta = g$.*

2. *O **coproduto** de A por B é uma a tripla $(A \sqcup B, p',\ q')$, onde $A \sqcup B$ é um objeto de $\mathcal{C}$, $p' : A \to A \sqcup B$ e $q' : B \to A \sqcup B$ são morfismos satisfazendo a seguinte propriedade: para todo objeto X de $\mathcal{C}$ e quaisquer morfismos $f' : A \to X$ e $g' : B \to X$, existe um único morfismo $\theta : A \sqcup B \to X$ tal que $\theta \circ p' = f'$ e $\theta \circ q' = g'$.*

Proposição 1.52. *Sejam A e B objetos em uma categoria $\mathcal{C}$. O produto (coproduto) de A por B, quando existe, é único a menos de isomorfismo.*

Demonstração. Ver nas páginas 216 e 218 de [**?**]. □

Por exemplo, nas categorias $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}$ o produto e o coproduto de dois módulos é a soma direta deles. Mais detalhes podem ser encontrados nas páginas 214 e 218 de [**?**].

Definição 1.53. *Uma categoria $\mathcal{C}$ é dita **aditiva** se:*

1. *$Hom(A, B)$ é um grupo abeliano (aditivo), para quaisquer $A,\ B \in Obj(\mathcal{C})$;*

2. *A lei da distributividade é valida, isto é, dados $A, B, X, Y \in Obj(\mathcal{C})$ e morfismos $h \in Hom(X, A)$, $f,\ g \in Hom(A, B)$ e $h' \in Hom(B, Y)$, temos que $h'(f + g) = h'f + h'g$ e $(f + g)h = fh + gh$;*

3. *$\mathcal{C}$ possui um objeto nulo;*

4. *$\mathcal{C}$ possui produtos e coprodutos de um número finito de objetos de $\mathcal{C}$.*

Um funtor F entre duas categorias aditivas $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ é um **funtor aditivo** se, para todos $A, B \in Obj(\mathcal{C})$ e $f, g \in Hom(A, B)$ temos que

$$F(f + g) = Ff + Fg.$$

Os Exemplos **??** e **??** são exemplos de funtores aditivos.

O próximo lema mostra que quando existe uma equivalência de categorias entre duas categorias $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ então é como se estas categorias fossem "iguais". Portanto, vemos que a definição de equivalência de categorias dá a noção de "isomorfismo entre duas categorias".

Lema 1.54. *Seja $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ uma equivalência de categorias aditivas (não necessariamente aditivo). São verdadeiras as afirmações:*

1) Para cada objeto B em $\mathcal{D}$, existe um objeto A em $\mathcal{C}$ tal que $F(A) \simeq B$.

2) Sejam $f, h \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$. Se $F(f) = F(h)$, então $f = h$.

3) Para cada morfismo $g \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C)$, existe um morfismo $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$ tal que $F(f) = g$.

Demonstração. 1) Seja $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ a equivalência de categorias inversa de F pelo isomorfismo natural $\tau : 1_{\mathcal{D}} \to FG$. Dado B um objeto em $\mathcal{D}$, consideramos $G(B) = A \in Obj(\mathcal{C})$. Assim, $B \simeq F(A)$.

2) Sejam $f, h \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$ tais que $F(f) = F(h)$, logo $GF(f) = GF(g)$. Seja $\eta : GF \to 1_{\mathcal{C}}$ o isomorfismo natural entre os funtores. Como $h = \eta_{Y'} \circ GF(h) \circ \eta_Y^{-1}$, para todo $h \in Hom_{\mathcal{C}}(Y, Y')$, o resultado segue.

3) Seja $\eta : GF \to 1_{\mathcal{C}}$ o isomorfismo natural entre os funtores. Dado $g \in Hom_{\mathcal{D}}(B, C)$, escolhamos $f = \eta_D \circ G(g) \circ \eta_A^{-1} \in Hom_{\mathcal{C}}(A, D)$, com $A \simeq FB$ e $D \simeq FC$. É fácil ver que $F(f) = g$. □

Como a maioria de nossos funtores estão definidos entre categorias aditivas e muitos dos resultados requerem que os funtores sejam aditivo, iremos daqui em diante (a menos de menção ao contrário) considerar apenas funtores aditivos.

Exemplo 1.55. *Para qualquer anel R as categorias $\mathcal{M}_R$ e ${}_R\mathcal{M}$ são aditivas, onde o objeto inicial é o módulo nulo, o produto e o coproduto de quaisquer dois módulos existem* *e são (a menos de isomorfismo) a soma direta deles. A verificação destas afirmações são imediatas. Mais detalhes podem ser encontrados na página* 303 *de [*?*].*

1.5.1 Propriedades de Funtores

Agora, apresentaremos alguns resultados que serão usados no Capítulo 2. Por isso, muitos funtores aqui apresentados estão definidos em categorias de módulos. Como muitos resultados que apresentamos nesta subseção são sobre equivalência de tais categorias, teremos uma quantidade considerável de exemplos de transformações naturais. No intuito de apresentar alguns exemplos de propriedades categóricas no Capítulo 2, apresentamos aqui resultados pertinentes a este assunto.

Teorema 1.56. *Se $G : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ é um funtor aditivo, então G preserva somas diretas finitas de módulos. Em particular, G preserva somas finitas de módulos.*

Demonstração. Ver Corolário 2.22 na página 50 em [**?**]. □

Teorema 1.57. *Sejam $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ uma equivalência entre categorias aditivas e $g \in Hom_{\mathcal{C}}(M, N)$. Então g é um monomorfismo (resp. epimorfismo) se, e somente se, $F(g)$ o é.*

Demonstração. Basta usar o Lema **??** e as definições dadas acima. □

Proposição 1.58. *Sejam ${}_SU_R$, ${}_SV_R$ bimódulos e $\nu : U \to V$ um homomorfismo $(S, R)-$bimódulos. Então a aplicação*

$$\eta : Hom_R(V_R, \square) \to Hom_R(U_R, \square)$$

dada por $\eta_M = Hom_R(\nu, M)$, para cada objeto M em $\mathcal{M}_R$, é uma transformação natural. Em particular, se ν é um isomorfismo, η é um isomorfismo natural.

Demonstração. Ver Proposição 20.5 na página 239 de [**?**]. □

Sejam ${}_RM$, N_S e ${}_RU_S$ módulos. Para cada $\gamma \in Hom_R(M, Hom_S(N, U))$ e todo $n \in N$, defina

$$\eta_\gamma(n) : M \longrightarrow U$$
$$m \mapsto [\gamma(m)](n)$$

Claramente, cada $\eta_\gamma(n) \in Hom_R(M,U)$.

Assim, temos a aplicação

$$\eta_\gamma : N \longrightarrow Hom_R(M,U)$$
$$n \mapsto \eta_\gamma(n)$$

É fácil ver que $\eta_\gamma \in Hom_S(N, Hom_R(M,U))$.

Teorema 1.59. *Com a notação anterior,*

$$\eta : Hom_R(M, Hom_S(N,U)) \to Hom_S(N, Hom_R(M,U))$$

dada por $\eta(\gamma) := \eta_\gamma$ *é um isomorfismo de grupos.*

Demonstração. Ver Proposição 20.7 na página 240 de [**?**]. □

Se no Teorema **??** N for um $(R,S)-$bimódulo, então η é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Proposição 1.60. *Dado um módulo* ${}_RP$*, existe um isomorfismo natural entre os funtores* $\Box \otimes_R P,\ Hom_R(R,\Box) \otimes_R P :\ {}_S\mathcal{M}_R \to\ {}_S\mathcal{M}$.

Demonstração. Para cada objeto M de ${}_S\mathcal{M}_R$, defina $\tau : \Box \otimes_R P \to Hom_R(R,\Box) \otimes_R P$ por $\tau_M = \rho_M \otimes Id_P$, onde ρ_M foi definida no Exemplo **??**. Temos que τ_M é um isomorfismo de $S-$módulos à esquerda, com inversa $\rho_M^{-1} \otimes Id_P$.

Além disso, dado $f : M \to M'$ um homomorfismo de $(S,R)-$bimódulos à esquerda, temos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
M \otimes_R P & \xrightarrow{\tau_M} & Hom_R(R,M) \otimes_R P \\
{\scriptstyle f\otimes Id_P}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_*\otimes Id_P} \\
M' \otimes_R P & \xrightarrow{\tau_{M'}} & Hom_R(R,M') \otimes_R P
\end{array}$$

comuta. Com efeito, para qualquer $m \otimes p \in M \otimes_R P$ temos

$$\tau_{M'} \circ f \otimes Id_P(m \otimes p) = \tau_{M'}(f(m) \otimes p) = \rho_{M'}(f(m)) \otimes p$$

e

$$f_* \otimes Id_P \circ \tau_M(m \otimes p) = f_* \otimes Id_P(\rho_M(m) \otimes p) = f \circ \rho_M(m) \otimes p.$$

Como $\rho_{M'}(f(m))(r) = f(m)r = f(mr)$ e $f \circ \rho_M(m)(r) = f(mr)$, $\forall r \in R$, concluímos a demonstração. $\square$

Proposição 1.61. *Seja $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ uma equivalência de categorias (aditiva). Então para cada $M, M' \in Obj(\mathcal{M}_R)$, a restrição de F a $Hom_R(M, M')$*

$$F : Hom_R(M, M') \to Hom_S(FM, FM')$$

é um isomorfismo de grupos abelianos. Em particular, se $M \neq 0$

$$F : End(M) \to End(FM)$$

é um isomorfismo de anéis.

Demonstração. Ver Proposição 21.2 na página 252 de [?]. $\square$

Sejam R e S anéis tais que as categorias $\mathcal{M}_R$ e $\mathcal{M}_S$ são equivalentes por funtores $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ e $G : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$. Então existem isomorfismos naturais $\eta : GF \to 1_{\mathcal{M}_R}$ e $\tau : FG \to 1_{\mathcal{M}_S}$. Para cada $M \in Obj(\mathcal{M}_R)$ e $N \in Obj(\mathcal{M}_S)$ podemos definir as seguintes aplicações:

$$\begin{array}{rcl} \phi : Hom_S(N, F(M)) & \to & Hom_R(G(N), M) \\ \gamma & \mapsto & \eta_M G(\gamma) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} \theta : Hom_S(F(M), N) & \to & Hom_R(M, G(N)). \\ \delta & \mapsto & G(\delta)\eta_M^{-1} \end{array}$$

É fácil ver que as aplicações ϕ e θ são $\mathbb{Z}-$homomorfismos.

Lema 1.62. *Com as notações acima, as aplicações ϕ e θ são isomorfismos naturais nas variáveis M e N. Em particular, para cada $\gamma \in Hom_S(N_1, FM_1)$, $\overline{\gamma} \in Hom_R(GN_1, M_1)$, $\delta \in Hom_S(FM_2, N_2)$, $\overline{\delta} \in Hom_S(M_2, GN_2)$ e cada $h \in Hom_R(M_1, M_2)$, $k \in Hom_S(N_2, N_1)$ temos que*

1) $\phi(F(h)\gamma k) = h\phi(\gamma)G(k)$; *2)* $\phi^{-1}(h\overline{\gamma}G(k)) = F(h)\phi^{-1}(\gamma)k$;

3) $\theta(k\delta F(h)) = G(k)\theta(\delta)h$; *4)* $\theta^{-1}(G(k)\overline{\delta}h)) = k\theta^{-1}(\delta)F(h)$.

Demonstração. Ver Lema 21.3 na página 253 em [?]. □

Teorema 1.63. *Seja $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ uma equivalência de categorias. Então a sequência de $R-$módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

é exata (cinde) se, e só se, a sequência

$$0 \longrightarrow F(M') \xrightarrow{F(f)} F(M) \xrightarrow{F(g)} F(M'') \longrightarrow 0$$

é exata (cinde).

Demonstração. Ver Proposição 21.4 na página 254 de [?]. □

A seguir apresentamos algumas definições afim de enunciarmos o próximo teorema. O leitor interessado em mais informações sobre estas definições pode consultar [?].

Definição 1.64. *Seja M um $R-$módulo à direita.*

1. *Dizemos que $M \neq 0$ é um **módulo simples** se M e (0) são seus únicos submódulos.*
2. *M é dito **semisimples** se todo submódulo de M é um somando direto de M.*
3. *Dizemos que M é um módulo **noetheriano (artiniano)** se toda cadeia ascendente (descendente) de submódulos de M é estacionária.*
4. *M é dito **indecomponível** quando M não pode ser escrito como soma direta de submódulos.*

Teorema 1.65. *Sejam M, M' $R-$módulos e $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ uma equivalência de categorias. Então*

1) *M é simples (resp. semisimples) se, e somente se, $F(M)$ o é;*

2) *M é finitamente gerado se, e somente se, $F(M)$ o é;*

3) M é artiniano (resp. noetheriano) se, e somente se, $F(M)$ o é;

4) M é indecomponível se, e somente se, $F(M)$ o é.

Demonstração. Ver Proposição 21.8 na página 258 de [?]. □

1.6 Módulos Projetivos e Injetivos

Nesta seção, introduziremos a definição de módulo projetivo, bem como algumas propriedades essenciais para desenvolver a Teoria de Morita. O principal resultado desta seção é o Lema da base dual.

Um $R-$módulo à direita M é dito ser **projetivo** se, para qualquer $R-$epimorfismo $g : A \to B$ e qualquer $R-$homomorfismo $h : M \to B$ existir um $R-$homomorfismo $f : M \to A$ tal que $h = g \circ f$. Isto pode ser sintetizado no seguinte diagrama

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "f"'] \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

Proposição 1.66. *Seja P um $R-$módulo. São equivalentes :*

i) P é projetivo;

ii) Se P é a imagem de um $R-$módulo M por um epimorfismo, então P é isomorfo a um somando direto de M;

iii) P é um somando direto de um módulo livre.

Demonstração. Ver Teorema V.2.1 na página 141 de [?]. □

Em particular, um $R-$módulo finitamente gerado P é projetivo se, e somente se, é um somando direto de algum R^n.

O próximo resultado estabelece uma relação entre a definição de módulo projetivo e o funtor Hom.

Lema 1.67. *Um $R-$módulo P é projetivo se, e somente se, para toda sequência exata de $R-$módulos*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

a sequência

$$0 \longrightarrow Hom_R(P, M') \xrightarrow{f^*} Hom_R(P, M) \xrightarrow{g^*} Hom_R(P, M'') \longrightarrow 0$$

é exata.

Demonstração. Ver Proposição $V.2.2$ na página 143 de [**?**]. □

Proposição 1.68. *Seja $\{P_i\}_{i\in I}$ uma família de $R-$módulos. A soma direta $P = \bigoplus_{i\in I} P_i$ é projetivo se, e só se, cada P_i é projetivo.*

Demonstração. Ver Proposição (2.5) na página 22 de [**?**]. □

Sejam P um $R-$módulo, $\{x_i\}_{i\in I} \subset P$ e $\{f_i\}_{i\in I} \subset P^* = Hom_R(P, R)$. Dizemos que a família $\{x_i,\ f_i\}_{i\in I}$ é uma **base dual para** P se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Para todo $p \in P$, $f_i(p) \neq 0$ para uma quantidade finita de índices em I;

2. Para todo $p \in P$, $\sum_{i\in I} x_i f_i(p) = p$.

Teorema 1.69 (Lema da Base Dual)**.** *Um $R-$módulo P_R é projetivo se, e somente se, existem uma família de elementos $\{a_i \mid i \in I\} \subset P$ e uma família de $R-$homomorfismos $\{f_i : P \to R \mid i \in I\}$ tais que, para qualquer $a \in P$, $f_i(a) = 0$ para quase todo $i \in I$, e $\sum_{i\in I} a_i f_i(a) = a$.*

Demonstração. Ver Teorema (2.9) na página 23 de [**?**]. □

Em outras palavras, o teorema acima nos diz que só módulos projetivos possuem base dual. Se o conjunto I no Teorema **??** for finito, então o módulo P é projetivo e finitamente gerado.

Teorema 1.70. *Dados ${}_RP$, N_T e ${}_RU_T$ módulos, a aplicação*

$$\eta : Hom_T(U, N) \otimes_R P \to Hom_T(Hom_R(P, U), N)$$

dada por $\eta(\gamma \otimes p) : \alpha \mapsto \gamma(\alpha(p))$, para cada $\gamma \in Hom_T(U, N)$, $\alpha \in Hom_R(P, U)$ e $p \in P$, é uma transformação natural. Se P é projetivo finitamente gerado, então η é um isomorfismo natural nas variáveis P e N.

Demonstração. Ver Proposição 20.10 na página 243 de [?]. □

Definição 1.71. *Seja P um $R-$módulo à direita.*

1. *Dizemos que P é um **módulo injetivo** se para cada homomorfismo de $R-$módulos injetivo $g : M \to N$ e qualquer $R-$homomorfismo $h : M \to P$ existe um $R-$homomorfismo $f : N \to P$ tal que $h = f \circ g$. Isto pode ser visto no seguinte diagrama*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g"] \arrow[d, "h"'] & N \arrow[dl, dashed, "f"] \\ P & \end{tikzcd}$$

2. *P é dito um **gerador** da categoria $\mathcal{M}_R$ se o funtor $Hom_R(P, \square)$ é fiel.*

Teorema 1.72. *Sejam $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ um funtor aditivo e U um $R-$módulo à direita. Se F é uma equivalência de categorias, então:*

1. *U é projetivo (resp. injetivo) se, e somente se, $F(U)$ o é;*

2. *U é um gerador se, e somente se, $F(U)$ gerador.*

Demonstração. Ver Teorema na página 255 de [?]. □

Definição 1.73. *Para qualquer $R-$módulo à direita P, o conjunto $\{\sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \mid k \in \mathbb{N},\ x_i \in P,\ f_i \in P^*\}$ é chamado de **ideal traço** de P em R e denotado por $tr(P)$, onde $P^* = Hom_R(P, R)$.*

Sejam R um anel e I um ideal de R. Lembramos que o **anulador à direita de** I em R é o conjunto $ann_R^d(I) = \{r \in R \mid xr = 0,\ \forall x \in I\}$.

Teorema 1.74. *Sejam P_R um módulo e $T = tr(P)$, temos que:*

1. *T é um ideal de R;*

2. *Se P é projetivo, então $PT = P$, $T^2 = T$ e $ann(P) = ann_R^d(T)$.*

Demonstração. Ver Proposição (2.40) na página 51 de [**?**]. $\square$

Capítulo 2

Teoria de Morita

Neste capítulo, vamos tratar mais profundamente sobre a questão de duas categorias serem equivalentes, mais especificamente, trataremos das categorias de módulos. Sabemos que anéis (e módulos) se diferenciam muitas vezes não só por seus elementos, mas também por "características" únicas que possuem. Veremos alguns exemplos de propriedades que são invariantes, no sentido apresentado pelo Matemático K. Morita. No nível de anéis podemos pensar na propriedade de um anel ser um domínio de integridade e no nível de módulos podemos pensar na propriedade de um módulo ser noetheriano. Será que essas propriedades são invariantes, isto é, se olharmos "categoricamente", será que essas propriedades são preservadas por equivalências de categorias? Estas perguntas serão respondidas nesse capítulo.

Os principais objetos desta seção são os progeradores e as equivalências de categorias, caracterizar os progeradores e as classes de anéis "Morita equivalentes" são as principais questões abordadas aqui. Os principais resultados são os Teoremas de Morita I, II e III e o Corolário **??**.

2.1 Propriedades Categóricas

Dados dois anéis R e S, dizemos que uma propriedade $\mathcal{P}$ em $Obj(\mathcal{M}_R)$ (respectivamente, nos morfismos) é uma **propriedade categórica** se, para qualquer equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$, sempre que $M \in \mathcal{M}_R$ (resp. $g \in Hom_R(M, N)$) satisfaz $\mathcal{P}$, então $F(M)$ (resp. $Fg \in Hom_S(FM, FN)$) também satisfaz $\mathcal{P}$. Assim, sempre que uma certa propriedade $\mathcal{P}$ é definida usando apenas termos categóricos (usando apenas objetos ou morfismos) então $\mathcal{P}$ é uma propriedade categórica, se F "transporta" $\mathcal{P}$ de M para

$F(M)$, para toda equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$.

Existe uma grande lista de propriedades que são categóricas, mas daremos exemplos de apenas algumas. Os Teoremas **??**, **??**, **??**, **??** e **??** mostram que as seguintes propriedades são categóricas: monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos; sequências de módulos serem exatas (cindir), módulos projetivos (injetivos), um módulo ser um gerador da categoria, um módulo ser simples, semisimples, finitamente gerado, artiniano, noetheriano e indecomponível.

Definição 2.1. *Dois anéis R e S são ditos* ***Morita equivalentes*** *se existir uma equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$. Quando R e S forem Morita equivalentes denotaremos por $R \approx S$.*

Uma propriedade "anel-teórica" $\mathcal{P}$ em um anel R é dita **Morita invariante** se todo anel S Morita equivalente a R também satisfaz $\mathcal{P}$. Observe que uma propriedade $\mathcal{P}$ é Morita invariante quando $\mathcal{P}$ pode ser caracterizada puramente em termos de categorias de módulos, ou seja, sem fazer referência a elementos do módulo ou do anel base. Definimos apenas Morita invariante, ao invés de Morita invariante à esquerda ou à direita, pois no decorrer deste capítulo mostraremos que se existe uma equivalência de categorias entre $\mathcal{M}_R$ e $\mathcal{M}_S$, então existe uma equivalência de categorias entre ${}_R\mathcal{M}$ e ${}_S\mathcal{M}$, e vice versa.

Para verificar que dois anéis não são Morita equivalentes basta exibir uma propriedade categórica que seja satisfeita por um anel e não seja satisfeita pelo outro anel. O próximo exemplo mostra que existem anéis que não são Morita equivalentes.

Exemplo 2.2. *Sejam $R = \mathbb{K}[x_1, ..., x_n]$ o anel de polinômios de n indeterminadas $x_1, ..., x_n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $S = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots]$ o anel de polinômios de infinitas (enumerável) indeterminadas sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então do Teorema da Base de Hilbert, temos que R é noetheriano. Como S não é noetheriano, temos que R e S não podem ser Morita equivalentes, pois ser noetheriano é uma propriedade categórica.*

Proposição 2.3. *As seguintes propriedades são Morita invariantes: simplicidade, semisimplicidade, noetheriano à direita, artiniano à direita.*

Demonstração. Notamos que se R é um anel, então R_R é um módulo e seus submódulos são os seus ideais à direita de R. Se S é um anel tal que $R \approx S$, então existe uma equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$. Considere S como $S-$módulo e aplique o Teorema ?? $\square$

2.2 Geradores e Progeradores

Começamos esta seção lembrando a definição de um módulo ser um gerador da categoria $\mathcal{M}_R$. Um $R-$módulo à direita P é um gerador da categoria $\mathcal{M}_R$ quando o funtor $Hom_R(P, \square)$ é fiel. O funtor $Hom_R(P,\ \square)$ é dito fiel se ele não anula morfismos não nulos, ou seja, se um morfismo $f : M \to M'$ é não nulo, então $Hom_R(P,\ f)$ é não nulo. Em outras palavras, existe $g : P \to M$ tal que $f \circ g$ não é nulo.

Exemplo 2.4. *Todo anel R é um gerador para $\mathcal{M}_R$. De fato, dado $f : M \to M'$ não nulo, temos que M é não nulo e $f(m) \neq 0$, para algum $m \in M - \{0\}$. Defina $g : R_R \to M$ por $g(r) = mr$ e com isso $g(1) = m \neq 0$ e $f \circ g(1) = f(m) \neq 0$. Portanto $Hom_R(R_R,\ \square)$ é fiel.*

Se P é um gerador $\mathcal{M}_R$ e existir um epimorfismo $f : P' \to P$, então P' é um gerador. Para mostrar este fato, basta usar diretamente a definição de gerador. Assim, um método bastante "simples" de obtermos novos geradores é considerar somas diretas de um gerador P com qualquer módulo Q.

O próximo resultado mostra que a definição de gerador tem uma relação estreita com a noção de ideal traço visto no final da Seção 1.6.

Teorema 2.5. *Para qualquer $R-$módulo P, são equivalentes:*

1) P é um gerador da categoria $\mathcal{M}_R$;

2) $tr(P) = R$;

3) R é um somando direto de $\bigoplus_{i=1}^{n} P$, para algum $n \in \mathbb{N}$;

4) R é um somando direto de $\bigoplus_{i\in I} P$, para algum conjunto de índices I;

5) Todo $R-$módulo M é imagem epimórfica de soma direta $\bigoplus_{i\in J} P$, para algum conjunto de índices J.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Seja $T = tr(P)$ e suponha que $T \subsetneq R$. Então a projeção canônica $\pi : R \to \frac{R}{T}$ é não nula. Por hipótese, existe $g \in Hom_R(P, R) = P^*$ tal que $\pi \circ g \neq 0$. Logo, $g(P) \nsubseteq tr(P)$ o que é um absurdo! Portanto, $T = R$.

2) $\Rightarrow$ 3) Suponha que $tr(P) = R$. Como R possui unidade 1_R, existem $g_1, ..., g_n \in P^*$ tais que $R = \sum_{i=1}^{n} g_i(P)$.

Defina $g : \bigoplus_{i=1}^{n} P \to R$ por $g(x) := \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$, para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \bigoplus_{i=1}^{n} P$. Claramente g é um homomorfismo sobrejetor. Pela Proposição **??** temos que

$$\bigoplus_{i=1}^{n} P = Ker(g) \oplus R,$$

pois $R = Im(g)$ é um $R-$módulo livre.

3) $\Rightarrow$ 4) Imediato.

4) $\Rightarrow$ 5) Seja M um $R-$módulo qualquer. Então, para algum conjunto de índices J existe um homomorfismo de $R-$módulos sobrejetor $f : R^{(J)} \to M$. Por hipótese, existe um submódulo N de $\bigoplus_I P$ tal que $\bigoplus_I P = N \oplus R$. Seja $\pi_R : \bigoplus_I P \to R$ a projeção canônica. Então, defina $\varphi : \bigoplus_J \bigoplus_I P \to \bigoplus_J R$ por $\varphi\left(\sum_J x_j\right) = \sum_J \pi_R(x_j)$, para todo $x_j \in \bigoplus_I P$. É fácil ver que φ é um homomorfismo sobrejetor. Portanto, $f \circ \varphi : \bigoplus_J \bigoplus_I P \to M$ é um homomorfismo de $R-$módulos sobrejetor.

5) $\Rightarrow$ 1) Considere um homomorfismo não nulo $f : M \to N$. Por hipótese existe um epimorfismo $\psi : \bigoplus_I P \to M$, para algum conjunto de índices J. Assim, $f \circ \psi$ é um homomorfismo não nulo, isto é, $f \circ \psi\left(\sum_{i\in I} x_i\right) \neq 0$, para algum $x = \sum_{i\in I} x_i \in \bigoplus_I P$. Logo, para algum $j_0 \in I$, a composta $f(\psi \circ i_0) : P \to N$ é não nula, onde $i_0 : P \to \bigoplus_I P$ é dada por $i_0(x) = (x_i)$ com x na posição j_0 e zero nas demais. Isto prova o item 1). $\square$

Observação 2.6. *Vejamos agora algumas observações sobre geradores e consequências imediatas do teorema anterior.*

A) Todo gerador é um módulo fiel. De fato, se P_R é um gerador, então pelo Teorema **??** *existe um submódulo N de P tal que $\bigoplus_I P \simeq R \oplus N$. Seja $a \in ann(P)$. Então $pa = 0$, para cada $p \in P$. Assim, $0 = ax = a(r_i + n_i)_{i\in I}$, para todo $x \in \bigoplus_I P$. Logo,*

$ar_i = -an_i$, para cada $r_i \in R$, $n_i \in N$ e $i \in I$. Como a soma é direta, concluímos que $a = 0$ e consequentemente P é fiel.

B) Pela observação anterior, uma pergunta natural surge: se P é um módulo fiel, então P é um gerador? Nem sempre é verdade, por exemplo, se considerarmos $P = \mathbb{Q}$ como $\mathbb{Z}-$módulo, segue imediatamente que P é fiel. Porém, não é um gerador, pois $Hom_{\mathbb{Z}}(P, \mathbb{Z}) = 0$.

C) Seja I um ideal à direita de R iremos mostrar que se $RI = R$, então I_R é um gerador. Com efeito, se $RI = R$, então existem $a_1, ..., a_k \in I$ tais que $\sum_{i=1}^{k} r_i a_i = 1$. Logo,

$$R = \sum_{i=1}^{k} r_i I \subset tr(I) \subset R.$$

*Portanto pelo Teorema **??**, I_R é um gerador.*

O Teorema **??** juntamente com a Proposição **??** sugerem uma interessante analogia entre geradores e módulos projetivos finitamente gerados: enquanto a Proposição **??** garante que P_R é um módulo projetivo finitamente gerado se, e só se, P_R é somando direto de R^n, para algum natural n, o Teorema **??** diz que P_R é um gerador se, e só se, R é somando direto de P^m, para algum natural m.

Estas duas analogias motivam a próxima definição.

Definição 2.7. *Um $R-$módulo P é um **progerador** se P é projetivo finitamente gerado e um gerador.*

Observação 2.8. *Ser um gerador (ou progerador) é uma propriedade categórica. Com efeito, vimos que a propriedade de um módulo ser projetivo e finitamente gerado é categoria. Pelo Lema **??** e pela Definição **??** ser gerador é uma propriedade categórica. Consequentemente, ser progerador o é. Em particular, todo anel R é um progerador.*

2.3 Contexto de Morita

Introduziremos nesta seção algumas construções e definições que serão úteis para entendermos equivalências de Morita. Primeiro apresentaremos uma noção geral do contexto de Morita e em seguida, o contexto de Morita associado a um dado módulo. Estudamos esta importante teoria e apresentamos três impactantes teoremas (Morita I,II e III) da Teoria de Anéis e finalizamos o capítulo com um resultado que permite caracterizar a classe de Morita equivalência de um anel.

Dado um $R-$módulo à esquerda M, é possível introduzir em M uma estrutura de $End(M)-$módulo à direita, definindo para quaisquer $x \in M$ e $f \in End(M)$, a ação $xf = (x)f$, onde $(x)f$ denota a imagem de x por f. Portanto, a composta de quaisquer duas funções $f, g \in End(M)$ é escrita como $(x)(f \circ g) = ((x)f)g$. De agora em diante, aplicar uma função à direita (ou à esquerda) num elemento ficará subentendido pelo contexto.

Definição 2.9. *Um* ***contexto de Morita*** *é uma sêxtupla* $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \tau, \mu)$ *em que* R *e* S *são anéis,* P *é um* $(S,R)-$*bimódulo,* Q *é um* $(R,S)-$*bimódulo e as aplicações*

$$\tau : Q \otimes_S P \to R \qquad e \qquad \mu : P \otimes_R Q \to S$$

são homomorfismos de $(R,R)-$*bimódulos e* $(S,S)-$*bimódulos, respectivamente, e fazem os diagramas abaixo comutarem*

$$\begin{array}{ccc} P \otimes_R Q \otimes_S P & \xrightarrow{\mu \otimes Id_P} & S \otimes_S P \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Id_P \otimes \tau} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi_1} \\ P \otimes_R R & \xrightarrow{\phi_2} & P \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} Q \otimes_S P \otimes_R Q & \xrightarrow{\tau \otimes Id_Q} & R \otimes_R Q \\ \Big\downarrow{\scriptstyle Id_Q \otimes \mu} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \phi'_1} \\ Q \otimes_S S & \xrightarrow{\phi'_2} & Q \end{array}$$

onde $\phi_1,\ \phi_2,\ \phi'_1$ *e* ϕ'_2 *denotam os homomorfismos naturais, definidos na Seção* 1.4.

Pela comutatividade dos diagramas da Definição **??** temos as seguintes igualdades:

$$\mu(p \otimes q)p' = p\tau(q \otimes p') \quad \text{e} \quad \tau(q \otimes p)q' = q\mu(p \otimes q'),$$

para quaisquer $p, p' \in P$ e $q, q' \in Q$.

Quando as aplicações τ e μ de um contexto de Morita $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \tau, \mu)$ são isomorfismos, dizemos que o contexto de Morita é **estrito**.

Para simplificar a notação, escreveremos $\tau(q \otimes p) = qp$ e $\mu(q \otimes p) = pq$. Com esta linguagem de "produto" a comutatividade dos diagramas acima podem ser reescritas da seguinte forma:

$$(pq)p' = p(qp') \quad (PQP - associatividade)$$
$$(qp)q' = q(pq') \quad (QPQ - associatividade)$$

para quaisquer $p, p' \in P$ e $q, q' \in Q$.

Agora, construiremos um contexto de Morita associado a um $R-$módulo. Seja P um $R-$módulo à direita, consideramos o anel $S = End(P_R)$ e o conjunto $Q = Hom_R(P, R)$. Observe que P pode ser visto como $S-$módulo à esquerda, definindo a $S-$ação à esquerda em P por: $sp := s(p)$, para todo $p \in P$ e $s \in S$. Com isso, P é um $(S, R)-$bimódulo. Agora, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $s \in S$ denotamos q aplicado em p por qp e $q \circ s = qs$. Assim, podemos definir a $S-$ação à direita em Q por $(qs)p = q(sp)$ e a $R-$ação à esquerda em Q por $(rq)p = r(qp)$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $s \in S$. Portanto, Q é um $(R, S)-$bimódulo.

Para cada $p \in P$ e $q \in Q$ definimos o produto pq por $pq(x) = p[q(x)]$, para todo $x \in P$ e segue que $pq \in S$. Isto nos permite definir a $(PQP)-$associatividade por $(pq)p' = p(qp')$, para todo $p, p' \in P$ e $q \in Q$. Facilmente mostra-se a validade da $(QPQ)-$associatividade dada por $(qp)q' = q(pq')$, para todo $p \in P$ e $q, q' \in Q$.

A fim de simplificar algumas demonstrações, iremos listar algumas associatividades geradas pelos anéis R e S e os módulos P e Q acima:

1. A $R-$ação em Q induz a $(RQP)-$associatividade $r(qp) = (rq)p$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $r \in R$.

2. A $(QPR)-$associatividade é dada por: $(qp)r = q(pr)$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $r \in R$. Esta associatividade segue do fato que $q \in Q = Hom_R(P, R)$.

3. A $S-$ação em Q induz a $(QSP)-$associatividade: $q(sp) = (qs)p$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $s \in S$.

As próximas associatividades são facilmente verificadas.

4. A $(PQR)-$associatividade é dada por: $(qp)r = q(pr)$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $r \in R$.

5. A $(PRQ)-$associatividade é dada por: $(pr)q = p(rq)$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $r \in R$.

6. A $(SPQ)-$associatividade é dada por: $s(qp) = (sq)p$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $s \in S$.

7. A $(PQS)-$associatividade é dada por: $(qp)s = q(ps)$, para quaisquer $p \in P,\ q \in Q$ e $s \in S$.

Lema 2.10. *Com as notações acima temos:*

(1) A aplicação $B : Q \times P \to R$ dada por $B(q,p) = qp$ induz um $(R,R)-$homomorfismo $\alpha : Q \otimes_S P \to R$;

(2) A aplicação $B' : P \times Q \to S$ dada por $B'(p,q) = pq$ induz um $(S,S)-$homomorfismo $\beta : P \otimes_R Q \to S$.

Demonstração. Como $P =_S P_R$ e $Q =_R Q_S$, temos que $Q \otimes_S P$ é um $(R,R)-$bimódulo e $P \otimes_R Q$ é um $(S,S)-$bimódulo. Sejam $p \in P$ e $q \in Q$ quaisquer. Então,
(1) Defina $B : Q \times P \to R$ por $B(q,p) = qp$, para todo $p \in P$ e $q \in Q$. Vamos mostrar que B é $S-$balanceada. É fácil ver que $(q + q')p = qp + q'p,\ q(p + p') = qp + qp'$. Pela $(QSP)-$associatividade temos que $(qs)p = q(sp)$, para todo $p, p' \in P,\ q, q' \in Q$ e $s \in S$. Assim, pela propriedade universal existe um homomorfismo de grupos $\alpha : Q \otimes_S P \to R$ tal que $\alpha(q \otimes p) = qp$. Pela $(RQP)-$ e $(QPR)-$associatividades temos que α é um homomorfismo de $(R,R)-$bimódulos.
(2) Defina $B' : P \times Q \to S$ por $B'(p,q) = pq$, para todo $p \in P$ e $q \in Q$. Vamos mostrar que B' é $R-$balanceada. Temos que $(p + p')q(x) = pq(x) + p'q(x) = [pq + p'q](x)$ e $p(q + q')(x) = p(q(x) + q'(x)) = pq(x) + pq'(x) = [pq + pq'](x)$, para todo $x \in P$. Assim, $(p + p')q = pq + p'q$ e $p(q + q') = pq + pq'$e temos pela $(PRQ)-$associatividade que B' é $R-$balanceada. Pela propriedade universal existe $\beta : P \otimes_R Q \to S$ homomorfismo de grupos. Segue da $(SPQ)-$e $(PQS)-$associatividade que β é um homomorfismo de $(S,S)-$bimódulos. $\square$

Proposição 2.11. *Com as notações acima a sêxtupla* $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \alpha,\ \beta)$ *é um contexto de Morita.*

Demonstração. Basta mostrar que os diagramas abaixo

$$\begin{tikzcd} P \otimes_R Q \otimes_S P \arrow[r, "\beta\otimes Id_P"] \arrow[d, "Id_P\otimes\alpha"'] & S \otimes_S P \arrow[d, "\phi_1"] \\ P \otimes_R R \arrow[r, "\phi_2"] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \otimes_S P \otimes_R Q \arrow[r, "\alpha\otimes Id_Q"] \arrow[d, "Id_Q\otimes\beta"'] & R \otimes_R Q \arrow[d, "\phi_1'"] \\ Q \otimes_S S \arrow[r, "\phi_2'"] & Q \end{tikzcd}$$

comutam. Mas isto segue da $PQP-$associatividade e $QPQ-$associatividade dadas acima. □

O contexto de Morita fornecido pela Proposição **??** é chamado **contexto de Morita associado a P**.

Os dois próximos resultados relacionam o estudo da seção anterior com os resultados apresentados nesta seção. Fixaremos o contexto de Morita associado ao módulo P_R, $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \alpha,\ \beta)$.

Proposição 2.12. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(1) P_R *é um gerador se, e somente se,* α *é sobrejetora.*

(2) Assuma que P_R *é um gerador. Então:*

(a) α *é um isomorfismo de* $(R,R)-$*bimódulos;*

(b) $Q \simeq Hom_S({}_SP, {}_SS)$*, como* $(R,S)-$*bimódulos;*

(c) $P \simeq Hom_S(Q_S, S_S)$*, como* $(S,R)-$*bimódulos;*

(d) $R \simeq End({}_SP) \simeq End(Q_S)$*, como anéis.*

Demonstração. Note que pela forma que o ideal traço e a aplicação α foram definidos temos que $Im(\alpha) = tr(P)$. Logo, o item (1) é imediato.

(2) Suponhamos que P seja um gerador. Então,

(a) Basta mostrar que α é injetora. De fato, seja $t \in Ker(\alpha)$ e escrevendo $t = \sum_{j=1}^{k} q_j' \otimes p_j'$

temos que $0 = \sum_{j=1}^{k} q'_j p'_j$. Como P é um gerador, temos do item (1) que existem $q_i \in Q$ e $p_i \in P$ com $i = 1, ..., n$, tais que $1_R = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i$. Logo,

$$\begin{aligned}
t &= \sum_{j=1}^{k} (1_R q'_j) \otimes p'_j \\
&= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{n} (q_i p_i) q'_j \right) \otimes p'_j, \text{ pela (QPQ)-associatividade} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (q_i (p_i q'_j) \otimes p'_j), \text{ pois } p_i q'_j \in S \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} (q_i \otimes (p_i q'_j) p'_j), \text{ pela (QPQ)-associatividade} \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=1}^{n} q_i \otimes p_i (q'_j p'_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} q_i \otimes p_i \left(\sum_{j=1}^{k} (q'_j p'_j) \right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, α é um isomorfismo.

(b) Para cada $q \in Q$, defina

$$\begin{aligned}
\lambda_q : P &\longrightarrow S \\
p &\mapsto pq
\end{aligned}$$

Defina $\lambda : Q \to Hom_S(P, S)$ por $\lambda(q) = \lambda_q$, para todo $q \in Q$ e segue da $(SPQ)-$associatividade que λ está bem definida e pelas $(RPQ)-$ e $(PQS)-$ associatividades temos que λ é um homomorfismo de $(R, S)-$bimódulos.

Vamos mostrar que λ é uma bijeção. De fato, pelo item (a), existem $q_i \in Q$ e $p_i \in P$ com $i = 1, ..., n$, tais que $1_R = \sum_{i=1}^{n} q_i p_i$. Se $\lambda(q) = 0$, então $pq = 0$, para todo $p \in P$. Assim, pela $(QPQ)-$associatividade temos que

$$q = 1_R q = \left(\sum_{i=1}^{n} q_i p_i \right) q = \sum_{i=1}^{n} q_i (p_i q) = 0. \tag{2.1}$$

Por outro lado, dado $f \in Hom(P,S)$ e escolhendo $q_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i f(p_i)$ temos que

$$f(p) = f\left(p\sum_{i=1}^{n} q_i p_i\right) = \sum_{i=1}^{n} f((pq_i)p_i) = \sum_{i=1}^{n}(pq_i)f(p_i) = p\sum_{i=1}^{n} q_i f(p_i). \tag{2.2}$$

Logo, $f = \lambda(q_0)$ e portanto, λ é um isomorfismo de $(R,S)-$bimódulos.

(c) Para cada $p \in P$, defina

$$\begin{aligned} \lambda'_p : Q &\longrightarrow S \\ q &\mapsto pq \end{aligned}$$

Defina $\lambda' : P \to Hom_S(Q,S)$ por $\lambda'(p) = \lambda'_p$, para todo $p \in P$ e segue da $(PQS)-$ associatividade que λ' está bem definida e pelas $(SPQ)-$ e $(PQR)-$ associatividades temos que λ' é um homomorfismo de $(R,S)-$bimódulos. De forma análoga a Equação (**??**) temos que λ' é injetiva. Para verificar a sobrejetividade, basta tomar $p_0 = \sum_{i=1}^{n} f(q_i)p_i$, para cada $f \in Hom_S(Q,S)$, e seguir passos similares ao da Equação (**??**).

(d) Defina para cada $r \in R$

$$\begin{aligned} \sigma_r : P &\longrightarrow P \qquad & \tau_r : Q &\longrightarrow Q \\ p &\mapsto pr & q &\mapsto rq \end{aligned}$$

É fácil ver que $\sigma_r \in End(P_R)$ e $\tau_r \in End({}_RQ)$, para cada $r \in R$. Logo as aplicações $\sigma : R \to End({}_SP)$ e $\tau : R \to End(Q_S)$ dadas, respectivamente, por $\sigma(r) = \sigma_r$ e $\tau(r) = \tau_r$ são homomorfismos de anéis.

Vamos mostrar que σ é uma bijeção. Com efeito, se $\sigma(r) = 0$, então $pr = 0$, para todo $p \in P$. Como todo gerador é fiel, temos que $r = 0$. Agora, dado $g \in End({}_SP)$ consideramos $r_0 = \sum_{i=1}^{n} q_i g(p_i)$. Por cálculos similares a Equação (**??**), temos que $g = \sigma_{r_0}$. A demonstração de que τ é um isomorfismo segue de maneira similar. $\square$

Proposição 2.13. *As seguintes afirmações são verdadeiras*

(1) P_R *é projetivo finitamente gerado se, e somente se,* β *é sobrejetora.*

(2) Assuma que P_R *é projetivo finitamente gerado. Então:*

(a) β *é um isomorfismo de* $(S,S)-$*bimódulos;*

(b) $Q \simeq Hom_R(P_R, R_R)$ *como* $(R,S)-$*bimódulos;*

(c) $P \simeq Hom_R({}_RQ, {}_RR)$ *como* $(S,R)-$*bimódulos;*

(d) $S \simeq End(P_R) \simeq End({}_RQ)$ *como anéis.*

Demonstração. (1) Se β é sobrejetiva, então existem $p_1,...,p_n \in P$ e $q_1,...,q_n \in Q$ tais que $1_S = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i\right)$ e, com isso, $p = \left(\sum_{i=1}^{n} p_iq_i\right)p = \sum_{i=1}^{n} p_i(q_ip)$. Pelo Lema da Base Dual (Teorema **??**), P_R é projetivo finitamente gerado. Reciprocamente, suponhamos que P_R seja projetivo finitamente gerado. Então, pelo Lema da Base Dual (Teorema **??**) e a $(PQP)-$associatividade, existem $p_1,...,p_n \in P$ e $q_1,...,q_n \in Q$ tais que $p = \sum_{i=1}^{n} p_i(q_ip) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_iq_i\right)p$. Assim, pela igualdade de funções temos

$$1_S = \sum_{i=1}^{n} p_iq_i = \beta\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \otimes q_i\right).$$

(2) Omitimos os detalhes da demonstração deste item, em virtude da demonstração ser análoga ao da proposição anterior.

(a) Análogo ao item (a) da proposição anterior.

(b) Para cada $p \in P$, definamos

$$\begin{aligned} \lambda_q : P &\longrightarrow R \\ p &\mapsto qp \end{aligned}$$

e $\lambda : Q \to Hom_R(P_R, R_R)$ por $\lambda(q) = \lambda_q$, para todo $q \in Q$. Pela $(QPR)-$associatividade temos que λ está bem definida e segue das $(RQP)-$ e $(QPS)-$ associatividades que λ é um homomorfismo de $(R,S)-$bimódulos. De forma análoga a Equação (**??**) provamos que λ é injetora. Para cada $f \in Hom_R(P_R, R_R)$ tome $q_1 = \sum_{i=1}^{n} f(p_i)q_i$ e de forma similar a Equação (**??**) temos que $\lambda(q_1) = f$.

Com simples adaptações dos itens (c) e (d) da proposição anterior, provamos os itens (c) e (d) desta proposição. $\square$

Definição 2.14. *Dados dois anéis R e S, dizemos que um $(R, S)-$bimódulo M é* ***fielmente balanceado*** *quando as aplicações naturais $R \to End(M_S)$ e $S \to End(_RM)$ são isomorfismos de anéis.*

Com esta terminologia e as Proposições **??** e **??** temos o seguinte resultado.

Corolário 2.15. *Se P é um progerador, então $_SP_R$ e $_RQ_S$ são ambos fielmente balanceados.*

Demonstração. Segue imediatamente das Proposições **??** e **??**. □

Proposição 2.16. *Suponha que P_R seja um progerador. Então $_SP$, $_RQ$ e Q_S são progeradores.*

Demonstração. Suponha P_R um progerador. Vamos mostrar que Q_S é um progerador. De fato, pelas Proposições **??** e **??**, temos que $P \simeq Hom_S(Q_S, S_S)$, $R \simeq End(Q_S)$ e as aplicações α e β são isomorfismos. Novamente pelas Proposições **??** e **??**, aplicadas a Q_S, temos que Q_S é um progerador. As outras afirmações são demonstradas de forma similar. □

Pela Proposição **??** temos que se P_R é um progerador, então o contexto de Morita associado a Q_S é $(S,\ R,\ Q,\ P;\ \beta,\ \alpha)$. Note que todo contexto de Morita associado a um progerador é estrito.

2.4 Teoremas de Morita

Teorema 2.17 (**"Morita I"**)**.** *Sejam P_R um progerador e $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \alpha,\ \beta)$ o contexto de Morita associado a P. Então*

(1) $\square \otimes_R Q : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ e $\square \otimes_S P : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$ são equivalências de categorias, onde $\square \otimes_R Q$ é a equivalência de categoria inversa de $\square \otimes_S P$.

(2) $P \otimes_R \square :\ {}_R\mathcal{M} \to\ {}_S\mathcal{M}$ e $Q \otimes_S \square :\ {}_S\mathcal{M} \to\ {}_R\mathcal{M}$ são equivalências de categorias, onde $Q \otimes_S \square$ é a equivalência de categoria inversa de $P \otimes_R \square$.

Demonstração. Provaremos apenas o item (1), pois o segundo item é demonstrado seguindo os mesmos passos. Então suponha P_R um progerador e considere $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \alpha,\ \beta)$ o contexto de Morita associado a P. Denotaremos $\square \otimes_S P$ por F e $\square \otimes_R Q$ por G.

Seja U um objeto em $\mathcal{M}_R$. Então pelo Teorema **??**, temos que

$$\begin{aligned} \varphi : (U \otimes_R Q) \otimes_S P &\longrightarrow U \otimes_R (Q \otimes_S P) \\ (u \otimes q) \otimes p &\mapsto u \otimes (q \otimes p) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de módulos. Pelas Proposições **??** e **??** temos que as aplicações $Id_U \otimes \alpha$ e

$$\begin{aligned} \psi : U \otimes_R R &\longrightarrow U \\ u \otimes r &\mapsto ur \end{aligned}$$

são isomorfismos de módulos. Desta maneira,

$$F(G(U)) = (U \otimes_R Q) \otimes_S P \simeq U \otimes_R (Q \otimes_S P) \simeq U \otimes_R R \simeq U.$$

Definindo $\tau_U = \psi \circ (Id_U \otimes \alpha) \circ \varphi$, para todo U em $\mathcal{M}_R$, temos que

$$\tau = (\tau_U : FG(U) \to U)_{U \in Obj(\mathcal{M}_R)}$$

é uma família de isomorfismos. Mais ainda, para cada $f \in Hom_R(U_R, U'_R)$ temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} (U \otimes_R Q) \otimes_S P \arrow[r, "\tau_U"] \arrow[d, "FG(f)"'] & U \arrow[d, "f"] \\ (U' \otimes_R Q) \otimes_S P \arrow[r, "\tau_{U'}"] & U' \end{tikzcd}$$

comuta, pois para quaisquer $p \in P$, $q \in Q$ e $u \in U$ temos que:

$$f(\tau_U((u \otimes q) \otimes p)) = f(uqp) = f(u)qp$$

e

$$\tau_{U'}(FG(f)((u \otimes q) \otimes p)) = \tau_{U'}((f(u) \otimes q) \otimes p) = f(u)qp.$$

Assim, $\tau : FG \to 1_{\mathcal{M}_R}$ é um isomorfismo natural.

Seja V um objeto em $\mathcal{M}_S$. Então, Pelo Teorema **??**, temos que

$$\begin{aligned} \varphi' : (V \otimes_S P) \otimes_R Q &\longrightarrow V \otimes_S (P \otimes_R Q) \\ (v \otimes p) \otimes q &\mapsto v \otimes (p \otimes q) \end{aligned}$$

é um isomorfismo de módulos. Pelas Proposições **??** e **??** temos que as aplicações $Id_V \otimes \beta$ e

$$\begin{aligned} \psi' : V \otimes_S S &\longrightarrow V \\ v \otimes s &\mapsto vs \end{aligned}$$

são isomorfismos de módulos, respectivamente. Logo,

$$GF(V) = (V \otimes_S P) \otimes_R Q \simeq V \otimes_S (P \otimes_R Q) \simeq V \otimes_S S \simeq V.$$

Definindo $\sigma_V = \psi' \circ (Id_V \otimes \beta) \circ \varphi'$, para todo V em $\mathcal{M}_S$, temos que

$$\sigma = (\sigma_V : GF(V) \to V)_{V \in Obj(\mathcal{M}_S)}$$

é uma família de isomorfismos. Analogamente, ao que foi feito acima, provamos que $\sigma : GF \to 1_{\mathcal{M}_S}$ é um isomorfismo natural. □

Antes de enunciar o próximo resultado, lembramos que estamos assumindo que nossos funtores são aditivos.

Proposição 2.18. *Sejam R e S anéis Morita equivalentes, via equivalência de categorias $F : \mathcal{M}_R \to \mathcal{M}_S$ e $G : \mathcal{M}_S \to \mathcal{M}_R$, com G a equivalência de categoria inversa de F. Considere $P = G(S_S)$ e $Q = F(R_R)$. Então, $F(X) \simeq Hom_R(P, X)$ como $S-$módulos à direita, para todo $X \in Obj(\mathcal{M}_R)$. Em particular, se $X = R_R$ temos $Q \simeq Hom_R(P, R)$ como $S-$módulos à direita.*

Demonstração. Note que P é naturalmente um $R-$módulo à direita e Q é naturalmente um $S-$módulo à direita. Defina para cada $s \in S$

$$\begin{aligned} \mu_s : S &\to S \\ x &\mapsto sx \end{aligned}$$

Definimos a $S-$ação à esquerda em P por $sp = G\mu_s(p)$.

Agora, para cada $r \in R$ consideramos

$$\begin{aligned} \nu_r : R &\to R \\ x &\mapsto rx \end{aligned}$$

Definimos a $R-$ação à esquerda em Q por $rq = F\nu_r(q)$. Como

$$(rq)s = [F\nu_r(q)]s = F(\nu_r)(qs) = r(qs)$$

e

$$(sp)r = [G\mu_s(p)]r = G\mu_s(pr) = s(pr)$$

temos que P é um $(S,R)-$bimódulo e Q um $(R,S)-$bimódulo.

Sejam $\lambda : 1_{\mathcal{M}_S} \to FG$ e $\tau : 1_{\mathcal{M}_R} \to GF$ isomorfismos naturais tais que os diagramas abaixo comutam

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\tau_X"] \arrow[d, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "GF(f)"] \\ X' \arrow[r, "\tau_{X'}", "(1)"'] & GF(X') \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} Y \arrow[r, "\lambda_Y"] \arrow[d, "g"'] & FG(Y) \arrow[d, "FG(g)"] \\ Y' \arrow[r, "\lambda_{Y'}", "(2)"'] & FG(Y'), \end{tikzcd}$$

para quaisquer $X, X' \in Obj(\mathcal{M}_R)$, $Y, Y' \in Obj(\mathcal{M}_S)$, $f \in Hom_R(X, X')$ e $g \in Hom_S(Y, Y')$. Para cada $X \in Obj(\mathcal{M}_R)$ e cada $x \in FX$ definamos

$$\begin{aligned} \varphi_x : S &\to FX \\ s &\mapsto xs \end{aligned}$$

e $\Phi_X : F(X) \to Hom_R(P, X)$ por $\Phi_X(x) = \tau_X^{-1} \circ G(\varphi_x) \circ (\tau_S^*)^{-1}$, onde $\tau_Y^* = \tau_{GY}^{-1} \circ G(\lambda_Y)$, para todo $Y \in Obj(\mathcal{M}_S)$.

Vamos mostrar que Φ_X é um homomorfismo de $S-$módulos à direita. Para isto, considere $\Psi_X : Hom_R(P, X) \to F(X)$ definida por $\Psi_X(\alpha) = F(\alpha) \circ \lambda_S(1_S)$, para cada $\alpha \in Hom_R(P, X)$. É fácil ver que as aplicações Ψ_X e Φ_X estão bem definidas.

Como $Hom_R(P, X)$ é um $S-$módulo pela $S-$ação $\alpha \cdot s(x) = \alpha(sx)$, para cada $\alpha \in Hom_R(P, X)$, $s \in S$ e $x \in P$, temos que

$$\alpha \cdot s(x) = \alpha(sx) = \alpha(G\mu_s x) = \alpha \circ G\mu_s(x),$$

onde $\mu_s(z) = sz$ e com isso $\alpha \cdot s = \alpha \circ G\mu_s$. Assim,

$$\begin{aligned} \Psi_X(\alpha \cdot s) &= F(\alpha \cdot s) \circ \lambda_S(1_S) \\ &= F(\alpha \circ G\mu_s) \circ \lambda_S(1_S) \\ &= F(\alpha) \circ FG(\mu_s) \circ \lambda_S(1_S) \\ &= F(\alpha) \circ \lambda_S \circ \mu_s(1_S) \\ &= F(\alpha) \circ \lambda_S(1_S s) \\ &= F(\alpha) \circ \lambda_S(1_S)s \\ &= \Psi_X(\alpha)s, \end{aligned}$$

onde a quarta igualdade é valida pela comutatividade do diagrama (2) e a sexta igualdade é valida pois $F(\alpha)$ e λ_S são $S-$homomorfismos. Logo, Ψ_X é um homomorfismo de $S-$módulos. Agora, dado $y_0 = \Psi_X(\alpha)$ temos que $\varphi_{y_0} = F(\alpha) \circ \lambda_S$.

Então $G(\varphi_{y_0}) = GF(\alpha) \circ G(\lambda_S)$ e segue que

$$\begin{aligned} \Phi_X(y_0) &= \tau_X^{-1} \circ GF(\alpha) \circ G(\lambda_S) \circ (\tau_S^*)^{-1} \\ &= \alpha \circ \tau_{G(S)}^{-1} \circ G(\lambda_S) \circ (\tau_S^*)^{-1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

Portanto, $\Phi_X \circ \Psi_X = Id_{Hom_R(P,X)}$ e isto mostra que Φ_X é um isomorfismo de $S-$módulos à direita. Em particular, para $X = R$ o resultado segue. □

O resultado acima foi provado pelo matemático K. Morita em [**?**].

Teorema 2.19 (**"Morita II"**). *Nas hipóteses da Proposição* **??** *temos que:*

(a) P *é um* $(S,R)-$*bimódulos e* Q *um* $(R,S)-$*bimódulo;*

(b) P_R *e* Q_S *são progeradores;*

(c) P *e* Q *são fielmente balanceados, ou seja, satisfazem a Definição* **??***;*

(d) $F \cong Hom_R(P, \square)$ *e* $G \cong Hom_S(Q, \square)$*;*

(e) ${}_SP_R \simeq Hom_S(Q,S) \simeq Hom_R(Q,R)$ *e* ${}_RQ_S \simeq Hom_R(P,R) \simeq Hom_S(P,S)$*, como bimódulos;*

(f) $F \cong \Box \otimes_R Q$ *e* $G \cong \Box \otimes_S P$*.*

Demonstração. (a) Segue da Proposição **??**.

(b) Como R e S são progeradores temos pela Observação **??** que $P = G(S)$ e $Q = F(R)$ são progeradores.

(c) Pela Proposição **??** temos que $Hom_R(P,R) \simeq Q$ como $S-$módulos à esquerda, do item (b) P_R é um progerador e pela Proposição **??** temos que $S \simeq End(P)$.Logo, temos o contexto de Morita $(R,\ S,\ P,\ Q;\ \alpha,\ \beta)$ associado a P. Usando o Corolário **??** concluímos o item c).

(d) Pelo Teorema **??** temos o isomorfismo $\phi : Hom_S(S, F(M)) \to Hom_R(G(S), M)$. Seja $M \in Obj(\mathcal{M}_R)$. Então, para cada $x \in M$ definimos

$$\begin{aligned} \rho_x : S &\to FM \\ s &\mapsto xs \end{aligned}$$

Assim, pelo Lema **??** a aplicação $\rho : F(M) \to Hom_S(S, F(M))$ dada por $\rho(x) = \rho_x$, para todo $x \in M$ é um isomorfismo. Definamos $\tau_M : F(M) \to Hom_R(P,M)$ por $\tau_M := \phi \circ \rho$, temos que τ_M é um isomorfismo, para cada $M \in Obj(\mathcal{M})_{\mathcal{R}}$. Vamos verificar que $\tau : F \to Hom_R(P, \Box)$ dado por $\tau = (\tau_M : FM \to Hom_S(P,M))_{M \in Obj(\mathcal{M}_R)}$ é uma isomorfismo natural. De fato, para qualquer $g \in Hom_R(M, M')$, temos que o diagrama

$$\begin{tikzcd} FM \arrow[r, "\tau_M"] \arrow[d, "F(g)"'] & Hom_R(P,M) \arrow[d, "g_*"] \\ FM' \arrow[r, "\tau_{M'}"] & Hom_R(P,M') \end{tikzcd}$$

comuta, pois, para todo $x \in FM$ temos pela Proposição **??** que

$$\tau_{M'} \circ F(g)(x) = \phi(\rho_{Fg(x)}) \quad \text{e} \quad g_* \circ \tau_M(x) = g\phi(\rho_x) = \phi(Fg \circ \rho_x).$$

Por outro lado, $F(g)\rho_x(s) = F(g)(xs) = [F(g)(x)]s = \rho_{Fg(x)}(s)$, para cada $s \in S$. Assim, $F(g)\rho_x = \rho_{Fg(x)}$ e com isso o diagrama acima comuta. Consequentemente,

$$F \cong Hom_R(P, \Box).$$

De forma análoga, mostramos que $G \cong Hom_S(Q, \Box)$.

(e) Pelo item (d) temos que $F(R) \simeq Hom_R(P, R)$ e $G(S) \simeq Hom_S(Q, S)$ e pelo Teorema **??** temos que

$$Hom_S(Q, Hom_R(Q, Q)) \simeq Hom_R(Q, Hom_S(Q, Q))$$
$$Hom_R(P, Hom_S(P, P)) \simeq Hom_S(P, Hom_R(P, P)).$$

Portanto, usando estes isomorfismos e o item (c) temos que

$$Hom_S(Q, S) \simeq Hom_S(Q, Hom_R({}_RQ, {}_RQ)) \simeq Hom_R(Q, Hom_S(Q_S, Q_S)) \simeq Hom_R(Q, R).$$

Analogamente, $Hom_R(P, R) \simeq Hom_S(P, S)$. Portanto,

$$P \simeq Hom_R(Q, R) \quad \text{e} \quad Q \simeq Hom_S(P, S).$$

Isto conclui o item (d).

(f) Vamos mostrar que $Hom_R(P, \Box) \cong \Box \otimes_R Q$. De fato, sejam $V_S = Q$ e $U_S = Hom_R(P, R)$ como no Teorema **??**. Então, pelo item (d) os módulos U e V são isomorfos. Logo, $Hom_R(P, \Box) \cong Hom_R(Hom_R(Q, R), \Box)$.
Pelo Teorema **??**, temos que $Hom_R(R, \Box) \otimes_R Q \cong Hom(Hom(Q, R), \Box)$ e segue da Proposição **??** e a transitividade da equivalência de funtores temos que $\Box \otimes_S P \cong Hom_S(Q, \Box)$. Portanto, $G \cong \Box \otimes_S P$. Analogamente, $F \cong \Box \otimes_R Q$. □

Corolário 2.20. *Se $\mathcal{M}_R$ e $\mathcal{M}_S$ são categorias equivalentes, então ${}_R\mathcal{M}$ e ${}_S\mathcal{M}$ também são.*

Demonstração. Segue diretamente dos Teoremas de Morita I e II. □

Para o próximo resultado consideramos um contexto de Morita qualquer.

Teorema 2.21 ("Morita III"). *Suponhamos que* $(R,\ S,\ M,\ M';\ \tau,\ \mu)$ *seja um contexto de Morita com* τ *e* μ *sobrejetoras. Então são verdadeiras as afirmações.*

(1) M *é um progerador em* $\mathcal{M}_R$*;*

(2) τ *e* μ *são isomorfismos (de bimódulos);*

(3) $M' \simeq Hom_R(M, R)$*, como* $R-$*módulos à esquerda;*

(4) $S \simeq End(M)$*, como anéis;*

(5) M' *é um progerador em* ${}_R\mathcal{M}$ *e em* $\mathcal{M}_S$*;*

(6) As categorias $\mathcal{M}_R$ *e* $\mathcal{M}_S$ *são equivalentes.*

Demonstração. (1) Como τ e η são sobrejetoras, existem $x_i, z_j \in M$ e $y_i, y'_j \in M'$ tais que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \tau(y_i \otimes x_i) = 1_R$ e $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \eta(z_j \otimes y'_j) = 1_S$. Defina $f : \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} M \to R$ por

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \tau(y_i \otimes m_i),$$

para todo $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i \in \bigoplus_{i=1}^{n} M$. É fácil ver que f é um homomorfismo de $R-$módulos sobrejetor. Desta maneira, pelo Teorema **??** M é um gerador.

Agora, considere $f_j(x) = \tau(y'_j \otimes x)$, para todo $x \in M$ e todo $j = 1, .., m$. O conjunto $X = \{z_j, f_j\}_{j=1}^{m}$ é uma base dual para M. De fato, pela comutatividade do diagrama da Definição **??** temos que

$$x = 1_S x = \sum_{j=1}^{m} \eta(z_j \otimes y'_j)x = \sum_{j=1}^{m} z_j \tau(y'_j \otimes x) = \sum_{j=1}^{m} z_j f_j(x),$$

para cada $x \in M$. Portanto, M é um progerador em $\mathcal{M}_R$.

(2) Basta verificar que τ e η são injetoras. De fato, seja $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{l} w_j \otimes a_j \in Ker(\tau)$, com $w_j \in M'$ e $a_j \in M$. Então, $\displaystyle\sum_{j=1}^{l} \tau(w_j \otimes a_j) = 0$ e desta forma temos que

$$
\begin{aligned}
x = & \sum_{j=1}^{l}(1_R w_j) \otimes a_j \\
= & \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} \tau(y_i \otimes x_i) w_j \otimes a_j \\
= & \sum_{j=1}^{l}\sum_{i=1}^{n} y_i \eta(x_i \otimes w_j) \otimes a_j \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} y_i \otimes \eta(x_i \otimes w_j) a_j \\
= & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l} y_i \otimes x_i \tau(w_j \otimes a_j) \quad = 0.
\end{aligned}
$$

Logo, τ é injetora. Analogamente, η é injetora.

(3) Para cada $x \in M'$, defina

$$
\begin{aligned}
\varphi_x : M & \longrightarrow R \\
m & \mapsto \tau(x \otimes m)
\end{aligned}
$$

É fácil ver que $\varphi_x \in Hom_R(M, R) = M^*$, para cada $x \in M'$. Então, definindo

$$\varphi : M' \to M^*$$

por $\varphi(x) = \varphi_x$, para cada $x \in M'$, temos que φ está bem definida. Como τ é um homomorfismo de $(R, R)-$bimódulos, segue que φ é um homomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Se $x \in Ker(\varphi)$, então $\tau(x \otimes z) = 0$, para todo $z \in M$. Assim, pela comutatividade do diagrama da Definição **??**, temos que

$$x = x1_S = \sum_{j=1}^{m} x\eta(z_j \otimes y'_j) = \sum_{j=1}^{m} \tau(x \otimes z_j) y'_j = 0.$$

Agora, dado $g \in M^*$, tome $x_0 = \sum_{j=1}^{m} g(z_j) y'_j \in M'$. Então, pela comutatividade do diagrama da Definição **??**, temos que

$$\begin{aligned}
\varphi_{x_0}(z) &= \tau(x_0 \otimes z) \\
&= \tau\left(\sum_{j=1}^{m} g(z_j)y'_j \otimes z\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \tau(g(z_j)y'_j \otimes z) \\
&= \sum_{j=1}^{m} g(z_j)\tau(y'_j \otimes z) \\
&= \sum_{j=1}^{m} g(z_j\tau(y'_j \otimes z)) \\
&= \sum_{j=1}^{m} g(\eta(z_j \otimes y'_j)z) \\
&= g\left(\sum_{j=1}^{m} \eta(z_j \otimes y'_j)z\right) = g(1_S z) = g(z),
\end{aligned}$$

para todo $z \in M$. Portanto, $\varphi_{x_0} = g$. Isto mostra que $M' \simeq M^*$ como $R-$módulos à esquerda.

(4) Para cada $s \in S$, defina

$$\begin{aligned}
\rho_s : M &\longrightarrow M \\
m &\mapsto sm
\end{aligned}$$

É fácil ver que $\rho_s \in End(M_R)$, para todo $s \in S$. Definindo $\rho : S \to End(M_R)$ por $\rho(s) = \rho_s$, para cada $s \in S$ e é fácil ver que ρ está bem definida. Como M é um $(S, R)-$bimódulos, temos que ρ é um homomorfismo de anéis.

Se $s \in Ker(\rho)$, então $sm = 0$ para todo $m \in M$. Assim,

$$s = s1_S = \sum_{j=1}^{m} s\eta(z_j \otimes y'_j) = \sum_{j=1}^{m} \eta(sz_j \otimes y'_j) = 0.$$

Logo ρ é injetora. Dado $g \in End(M)$, escolha $s_0 = \sum_{j=1}^{m} \eta(g(z_j) \otimes y'_j) \in S$. Então, segue da comutatividade do diagrama da Definição **??** que

$$\begin{aligned} s_0x &= \sum_{j=1}^{m} \eta(g(z_j)\otimes y'_j)x \\ &= \sum_{j=1}^{m} g(z_j)\tau(y'_j\otimes x) \\ &= \sum_{j=1}^{m} g(z_j\tau(y'_j\otimes x)) \\ &= \sum_{j=1}^{m} g(\eta(z_j\otimes y'_j)x) = g(x). \end{aligned}$$

Portanto ρ é um isomorfismo de anéis.

(5) Segue do item (3) que $M' \simeq M^*$ e usando o contexto de Morita associado a M obtemos das Proposições **??** e **??** que M^* é um progerador e com isso M' o é.

(6) Segue do Teorema Morita I. □

Se U é um $R-$módulo à direita e $S = End(U_R)$, então U é um $(S,R)-$bimódulo. Para cada $f \in Hom_R(U,R)$ e cada $u \in U$ defina

$$\begin{aligned} \Gamma_f(u) : U &\longrightarrow U \\ v &\mapsto f(v)u. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\Gamma_f(u)$ está bem definida. Assim, para cada $f \in Hom_R(U,R)$, podemos definir

$$\begin{aligned} \Gamma_f : U &\longrightarrow S \\ u &\mapsto \Gamma_f(u). \end{aligned}$$

Como

$$\Gamma_f(us)(v) = f(v)(us) = (f(v)u)s = \Gamma_f(u)(v)s,$$

para quaisquer $u, v \in U$, $s \in S$ e $f \in Hom_R(U,R)$, temos que $\Gamma_f \in Hom_S(U,S)$. Assim, a aplicação

$$\begin{aligned} \Gamma : Hom_R(U,R) &\longrightarrow Hom_S(U,S) \\ f &\mapsto \Gamma(f) = \Gamma_f. \end{aligned}$$

está bem definida. Como

$$\Gamma_{fs}(u)(v) = f(sv)u = fs(v)u \quad \text{e} \quad \Gamma_{rf}(u)(v) = r[f(v)u],$$

para todo $u, v \in U$, $s \in S$, $r \in R$ e $f \in Hom_R(U, R)$, temos que

$$\Gamma_{fs}(u) = (fs)u = \Gamma_f(u)s \quad \text{e} \quad \Gamma_{rf}(u) = r[fu] = r\Gamma_f(u),$$

para quaisquer $u \in U$, $s \in S$ e $f \in Hom_R(U, R)$. Logo,

$$\Gamma_{fs} = \Gamma_f s \quad \text{e} \quad \Gamma_{rf} = r\Gamma_f,$$

para todo $f \in Hom_R(U, R)$ e portanto, Γ é um homomorfismo de $(R, S)-$bimódulos.

Analogamente, se $R = End({}_SU)$, então temos o homomorfismo de $(R, S)-$bimódulos $\Gamma' : Hom_S(U, S) \to Hom_R(U, R)$ dada por $\Gamma'_g(u)(v) = ug(v)$, para todos $u, v \in U$ e $g \in Hom_S(U, S)$.

Proposição 2.22. *Com as notações acima, seja U um $(R, S)-$bimódulo. Então são equivalentes as seguintes afirmações:*

a) U é um gerador da categoria ${}_R\mathcal{M}$;

b) U é um $S-$módulo projetivo finitamente gerado e $R \simeq End_S(U)$.

Demonstração. Denotaremos $U^* = Hom_R(U, R)$ e $U' = Hom_S(U, S)$.
$a) \Rightarrow b)$ Note que U é um gerador de ${}_R\mathcal{M}$ se, e somente se, existem $f_i \in U^*$ e $u_i \in U$ tais que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(u_i) = 1_R. \tag{2.3}$$

Pelo Lema da Base Dual (Teorema **??**) temos que U é um $S-$módulo projetivo finitamente gerado se, e somente se, existem $f'_j \in U'$ e $x_j \in U$ tais que

$$\sum_{j=1}^{m} x_j f'_j(x) = x, \tag{2.4}$$

para todo $x \in U$. Escrevendo $g_i = \Gamma_{f_i}$, para todo $i = 1, ..., n$, temos pela igualdade **??** que

$$\sum_{i=1}^{n} u_i g_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{f_i}(v)(u_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(u_i)v = v, \tag{2.5}$$

para todo $v \in U$. Assim, U é um $S-$módulo projetivo finitamente gerado. Além disso, se $t \in End(U_S)$, então pela equação **??**, temos que

$$tv = \sum_{i=1}^{n} tu_i g_i(v) = \sum_{i=1}^{n} \Gamma_{f_i}(v)(tu_i) = \sum_{i=1}^{n} f_i(tu_i)v.$$

Para cada $a \in R$ defina

$$\varphi_a : U \longrightarrow U$$

$$u \mapsto ua.$$

Logo, t é imagem de $a_0 = \sum_{i=1}^{n} f_i(tu_i)$ pelo homomorfismo canônico $\varphi : R \to End(U_S)$ dado por $\varphi(a) = \varphi_a$. Como U é um gerador, temos que U_R é fiel. Portanto, φ é um isomorfismo de anéis.

b) $\Rightarrow$ *a*) Suponhamos que *b*) seja verdadeiro. Consequentemente, $R \simeq End(U_S)$ e segue que Γ' existe.

Escrevendo $f_j = \Gamma'_{f'_j} \in U^*$, para cada $j = 1, ..., m$. temos pela equação **??** que

$$v = \sum_{j=i}^{m} x_j f'_j(v) = \sum_{j=i}^{m} f_j(x_j)v,$$

para todo $v \in U$. Desta forma,$\varphi_b = \varphi_{1_R}$, com $b = \sum_{j=i}^{m} f_j(x_j)$. Como φ é um isomorfismo, temos que $\sum_{j=i}^{m} f_j(x_j) = 1_R$. Segue da igualdade **??** que U é um gerador. □

Um idempotente e em um anel R é dito um **idempotente completo**, quando $ReR = R$.

Exemplo 2.23. *Qualquer $R-$módulo à direita P projetivo finitamente gerado pode ser representado como $e(R^n)$, para algum idempotente adequado e, onde $e \in End(R^n)$. Como $End(R^n)$"$=$"$\mathbb{M}_n(R)$ podemos escrever $e = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$.*

Afirmamos que $tr(P) = \sum Ra_{ij}R$ e $\mathbb{M}_n(tr(P)) = \mathbb{M}_n(R)e\mathbb{M}_n(R)$.

De fato, para mostrar a primeira afirmação basta definir $e : R^n \to R^r$ por $e(x + y) = x$, para cada $x \in P$ e $y \in Q$, pois $P \oplus Q = R^n$ para algum submódulo Q de

R^n. Seja $a_j = e(E_{1j})$ a $j-$ésima coluna de (a_{ij}). Defina

$$\begin{aligned} f_j : P &\longrightarrow R \\ (z_1, ..., z_n) &\mapsto z_j \end{aligned}$$

É fácil ver que $f_j \in Hom_R(P, R) = P^*$. Vamos Mostrar que $\{a_j, f_j\}_{j=1}^n$ é uma base dual para P. Como

$$x = ex = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1n}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} x_j = \sum_{j=1}^n a_j f_j(x),$$

para todo $x = (x_1, ..., x_n)^t \in P$. Provamos assim a afirmação.

Como $\{a_j, f_j\}_{j=1}^n$ é uma base dual para P, temos que $T = tr(P)$ é gerado (como ideal) pelo conjunto $\{f_j(a_j)\}_{j=1}^n$. Notamos que $f_j(a_i) = (a_{ij})$, para todo $i, j = 1, ..., n$. Munido destas informações fica fácil obter a igualdade $tr(P) = \sum Ra_{ij}R$.

Note ainda que $(rE_{ij})e(E_{kl}s) = (ra_{il}s)E_{il}$, para quaisquer $r, s \in R$ e $i, j, l, k = 1, ..., n$. Disto segue que $\mathbb{M}_n(tr(P)) = \mathbb{M}_n(R)e\mathbb{M}_n(R)$.

Proposição 2.24. *Sejam R e S anéis. Então são equivalentes as seguintes afirmações*

1) $R \approx S$;

2) $S \simeq End(P_R)$, para algum progerador P_R de $\mathcal{M}_R$;

3) $S \simeq e\mathbb{M}_n(R)e$, para algum idempotente completo e de $\mathbb{M}_n(R)$.

Demonstração. 1) $\Rightarrow$ 2) Pela demonstração do Teorema de Morita II, temos que $End(P) \simeq End(S) \simeq S$, onde $P = G(S)$. Como S_S é um progerador, o resultado segue.

2) $\Rightarrow$ 3) Suponhamos que $S \simeq End(P)$, para algum progerador de $\mathcal{M}_R$. Em particular, P é um $R-$módulo projetivo finitamente gerado. Assim, podemos identificar P a um somando direto $\overline{P}$ de algum R^n, e escrever $\overline{P} \oplus P' = R$ para algum submódulo P' de R^n. Também podemos identificar $End(R^n)$ com $\mathbb{M}_n(R)$. Para simplificar a demonstração vamos escrever $P = \overline{P}$ e $End(R^n) = \mathbb{M}_n(R)$. Defina $\pi : R^n \to R^n$ por $\pi|_P = Id_P$ e $\pi|_{P'} \equiv 0$.

Desta maneira, $\pi \in End(R^n)$ e $\pi^2 = \pi$. Via identificação, seja $e = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(R)$ a imagem de π. Pelo Exemplo **??**, temos que $tr(P) = \sum Ra_{ij}R$ e $\mathbb{M}_n(R)e\mathbb{M}_n(R)$. Como P é um gerador, temos que $tr(P) = R$ e segue que e é um idempotente completo em $\mathbb{M}_n(R)$.

Agora, definamos $\lambda : End(P) \to eEnd(R^n)e$ por

$$\lambda(f) = \begin{cases} f(x), & se \quad x \in P \\ 0, & se \quad x \in P'. \end{cases}$$

Então, λ é um isomorfismo de anéis. É fácil ver que λ é um monomorfismo de anéis. Dado $g = eg'e \in eEnd(R^n)e$, seja $f = (eg'e)|_P \in End(P)$, então $\lambda(f) = g$. Portanto, λ é um isomorfismo de anéis e portanto, $S \simeq e\mathbb{M}_n(R)e$.

3) $\Rightarrow$ 1) Como $e \in \mathbb{M}_n(R)$ é um idempotente completo, temos pelo Teorema de Morita I que $\mathbb{M}_n(R) \approx e\mathbb{M}_n(R)e$. Pelo Teorema **??** temos que $R \approx \mathbb{M}_n(R)$. Isto encerra a demonstração. □

Corolário 2.25. *Um anel R é Morita equivalente à S se, e somente se, $R \simeq End(P_S)$, onde P_S é um progerador em $\mathcal{M}_S$.*

Demonstração. Segue imediatamente do resultado anterior. □

Embora o Corolário **??** seja apenas uma reformulação da Proposição anterior, ele possui (na forma que foi enunciado) grande importância teórica. Pelo Corolário **??** podemos descrever todos anéis Morita equivalentes a um anel R e para isso, basta descrever todos os progeradores em $\mathcal{M}_R$. O Corolário **??** descreve então toda a classe de Morita equivalência de um anel.

O seguinte corolário tem grande importância na teoria de equivalência de categoria, pois tanto pode ser usado para dar exemplos de anéis que são Morita equivalentes, como também é uma ferramenta poderosa na demonstração de que uma certa propriedade não é Morita invariante.

Corolário 2.26. *Para qualquer anel R, os anéis R e $\mathbb{M}_n(R)$ são Morita equivalentes, para qualquer $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração. Como $\mathbb{M}_n(R) \simeq End(R^n)$ e R^n é um progerador em $\mathcal{M}_R$, segue da Proposição **??** que $R \approx \mathbb{M}_n(R)$. □

Notamos que o Corolário **??** pode ser usado para mostrar que nem toda propriedade é categórica, como por exemplo: o número de geradores de um módulo e a propriedade de um módulo ser livre não são propriedades categóricas. O Corolário **??** também pode ser usado para mostrar que as algumas propriedades não são Morita invariantes, a saber, comutatividade, domínio de integridade ou ser anel de divisão.

CAPÍTULO 3

Skew Anel de Grupo Parcial

Neste capítulo trataremos de "ações parciais" de um grupo G sobre uma álgebra A, esta noção foi definida em [?] e generaliza a definição de "ações globais". A teoria de ações globais é amplamente utilizada na matemática, portanto muito rica. Na Seção 3.1 falamos brevemente sobre ações globais e o "skew anel de grupo global".

Um dos interesses de estudo sobre o skew anel de grupo global é estudar quais condições permitem propriedades do anel R "passar" para o seu "skew". Portanto, este é também um dos objetivos de estudo do skew anel de grupo parcial. O leitor interessado em estudar mais sobre essas condições no caso parcial pode consultar [?].

Os principais objetos desde capítulo são as ações parciais e o "skew anel de grupo parcial". As principais questões abordadas são a associatividade do skew anel de grupo parcial e a existência de "ações envolventes" para uma ação parcial. O principal resultado é o Teorema de Existência e Unicidade de Envolventes, todos este temas foram abordados em [?]. Mas, para alcançarmos tais objetivos serão necessários uma série de definições e resultados.

Neste capítulo $A,\ B,\ A'$ sempre denotarão $K-$álgebras, K um anel comutativo e G um grupo.

3.1 Ações Globais

Começamos esta seção lembrando as definições de $K-$álgebras e homomorfismos de $K-$álgebras. Seja K um anel comutativo, dizemos que um conjunto não vazio A é uma $K-$**álgebra**, quando A for um anel (não necessariamente associativo e não necessariamente com identidade) e $K-$módulo tal que $(ka)b = k(ab) = a(kb)$ para todos $a, b \in A$ e $k \in K$. É fácil ver que todo ideal I de uma $K-$álgebra (com identidade) também é uma $K-$álgebra. Uma aplicação entre duas $K-$álgebras $f : A \to B$ é um **homomorfismo de $K-$álgebras** quando f for um homomorfismo de $K-$módulos e $f(ab) = f(a)f(b)$, para todos $a, b \in A$.

A seguinte definição pode ser encontrada em [**?**].

Seja B uma $K-$álgebra, $Aut(B)$ o grupo dos automorfismos de B e G um grupo com elemento neutro 1_G. Uma **Ação global** de G sobre B é uma aplicação

$$\begin{aligned} \beta : G &\to Aut(B) \\ g &\mapsto \beta_g \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\beta_{1_G} = Id_B$.

(ii) $\beta_g \circ \beta_h(t) = \beta_{gh}(t)$, para quaisquer $g, h \in G$ e qualquer $t \in B$.

O **skew anel de grupo** (global) de uma ação β de G sobre uma $K-$álgebra B, denotado por $B *_\beta G$, é o conjunto de todas as somas formais finitas $\sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g$, onde $a_g \in B$ e δ_g são símbolos, para todo $g \in G$. A adição é definida de maneira usual e a multiplicação é determinada por

$$a\delta_g b\delta_h = a\beta_g(b)\delta_{gh}.$$

Proposição 3.1. *Sejam B uma $K-$álgebra e β uma ação global de um grupo G sobre B. Então $B *_\beta G$ é um anel associativo.*

Demonstração. A demonstração é rotineira. □

Seja β uma ação global de um grupo G sobre uma $K-$álgebra B. Dizemos que um elemento $b \in B$ é um **elemento fixo por** β quando $\beta_g(b) = b$ para todo $g \in G$. Denotamos o conjunto dos elementos fixos de B por β como sendo

$$B^G = \{x \in B \mid \beta_g(x) = x, \ \forall g \in G\}.$$

Definimos a aplicação **traço global** em uma $K-$álgebra B por

$$\begin{aligned} tr_G : B &\longrightarrow B \\ z &\mapsto \sum_{g\in G} \beta_g(z) \end{aligned}$$

onde G é um grupo finito e β uma ação de G sobre B.

Notamos que para cada $g \in G$, $\beta_g\left(\sum_{h\in G} \beta_h(x)\right) = \sum_{h\in G} \beta_{gh}(x) = \sum_{f\in G} \beta_f(x)$. Logo, tr_G está bem definida e $tr_G(B) \subset B^G$.

Como todo anel pode ser visto como uma àlgebra e vice-versa, vamos a partir de agora trabalhar ora com anéis e ora com àlgebras. Com isso, temos que definições acerca de B^G e tr_G são facilmente adaptadas para o caso em que B é um anel. No próximo capítulo, para o caso em que B é um anel, mostraremos que o conjunto B^G é um subanel B e tr_G é um homomorfismo de $(B^G, B^G)-$bimódulo.

3.2 Ações Parciais

Nesta seção generalizamos a noção de ações globais definidas na Seção 3.1, a generalização que apresentamos foi apresentada em [?]. Apresentamos alguns resultados úteis para o restante deste trabalho.

Definição 3.2. *Sejam G um grupo com elemento neutro 1_G e X um conjunto. Uma **ação parcial** α de G sobre X é uma coleção de subconjuntos $D_g \subset X$ e bijeções $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ para cada $g \in G$, que satisfazem:*

(P1) $D_{1_G} = X$ *e* $\alpha_{1_G} = Id_X$*;*

(P2) $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{(gh)^{-1}}$, *para todos* $h,\ g \in G$*;*

(P3) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, *para todo* $x \in \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}})$ *e todos* $h,\ g \in G$.

É comum denotar uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X por $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$.

Observação 3.3. *1. Seja $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial de um grupo G sobre um conjunto X. Para qualquer $h \in G$, $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$. É fácil ver* *que ambas tem mesmos domínios e contra-domínios e a condição* $(P3)$ *implica que* $\alpha_h^{-1} = \alpha_{h^{-1}}$.

2. *Notamos que* α_{gh} *é uma extensão de* $\alpha_g \circ \alpha_h$, *para quaisquer* $g, h \in G$. *Com efeito, denote por* $\mathfrak{D}(\alpha_g \circ \alpha_h)$ *e* $\mathfrak{D}(\alpha_{gh})$ *os domínios das funções* $\alpha_g \circ \alpha_h$ *e* α_{gh}, *respectivamente. Assim,*

$$\mathfrak{D}(\alpha_g \circ \alpha_h) = \{x \in D_h^{-1} \mid \alpha_h(x) \in D_h \cap D_{g^{-1}}\} = \alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{(gh)^{-1}} = \mathfrak{D}(\alpha_{gh}).$$

Segue de $(P3)$ *temos que* α_{gh} *estende* $\alpha_g \circ \alpha_h$.

3. *A condição* $(P2)$ *é equivalente a seguinte condição*

$$\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) = D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}, \tag{3.1}$$

para todos $h,\ g \in G$. *De fato, se* $(P2)$ *é satisfeita, então* $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{(gh)^{-1}}$ *e como* $\alpha_{h^{-1}} : D_h \to D_{h^{-1}}$, *temos que* $\alpha_h^{-1}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{h^{-1}}$. *Asim,*

$$\alpha_{h^{-1}}(D_h \cap D_{g^{-1}}) \subset D_{h^{-1}} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}. \tag{3.2}$$

*Por outro lado, trocando na Equação (**??**) h por h^{-1} e g por gh obtemos que*

$$\alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}}) \subset D_h \cap D_{g^{-1}}.$$

*Portanto a condição (**??**) é satisfeita. Reciprocamente, se a condição (**??**) é satisfeita, então* $(P2)$ *imediatamente satisfeita.*

Com a condição (**??**) podemos reescrever as condições $(P1), (P2)$ e $(P3)$ da Definição **??** da seguinte forma:

(P'1) $D_{1_G} = X$ e $\alpha_{1_G} = Id_X$;

(P'2) $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{gh}$, para todos $h,\ g \in G$;

(P'3) $\alpha_g \circ \alpha_h(x) = \alpha_{gh}(x)$, para todo $x \in D_{h-1} \cap D_{h^{-1}g^{-1}}$ e todos $h,\ g \in G$.

Na Definição **??** não exigimos qualquer estrutura sobre o conjunto X. Porém, quando trabalhamos com ações parciais sobre um conjunto com uma estrutura (topológica, algébrica, etc.), devemos requerer que os subconjuntos D_g tenham estrutura "compatível" e que as bijeções α_g "preservem" esta estrutura. Por exemplo, se X for um espaço topológico, os conjuntos D_g devem ser subespaços topológicos e os $\alpha_g's$ homeomorfismos.

Neste trabalho estudaremos ações parciais de grupos tanto sobre $K-$álgebras quanto sobre anéis, porém como toda álgebra é um anel, convém apenas a seguinte definição.

Definição 3.4. *Sejam A uma $K-$álgebra e G um grupo com elemento neutro 1_G. Uma* ***ação parcial*** *α de G sobre A é uma coleção de ideais D_g de A e isomorfismos de $K-$álgebras $\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ para cada $g \in G$, que satisfazem satisfazendo $(P1), (P2)$ e $(P3)$.*

Exemplo 3.5. *Vamos construir um exemplo de ação parcial. Consideramos um grupo cíclico infinito $G =< g >$ e seja $\mathcal{T}$ a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$, com $n \geq 3$. Denotaremos por $e_{ij} \in \mathbb{M}_n(\mathbb{K})$ as matrizes elementares.*

Sejam os ideais $D_{1_G} = \mathcal{T}$, $D_g = e_{1,n}\mathbb{K} \bigoplus e_{2,n}\mathbb{K}$, $D_{g^{-1}} = e_{1,n-1}\mathbb{K} \bigoplus e_{1,n}\mathbb{K}$ e $D_{g^m} = e_{1,n}\mathbb{K}$, para cada m tal que $|m| > 1$. Definimos para quaisquer $x, y \in \mathbb{K}$

1. *$\alpha_{1_G} = Id_{\mathcal{T}}$;*
2. *$\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g$ por $\alpha_g(xe_{1,n-1} + ye_{1,n}) = xe_{2,n} + ye_{1,n}$ e $\alpha_{g^{-1}} : D_g \to D_{g^{-1}}$ por $\alpha_{g^{-1}}(xe_{1,n} + ye_{2,n}) = xe_{1,n-1} + ye_{1,n}$;*
3. *$\alpha_{g^m} : D_{g^m} \to D_{g^m}$ por $\alpha_{g^m}(xe_{1,n}) = xe_{1,n}$, para cada m tal que $|m| \geq 2$.*

Logo, temos uma ação parcial α de G sobre $\mathcal{T}$.

Definição 3.6. *Uma $K-$álgebra A é dita* ***semiprima*** *se A não possuir um ideal nilpotente não nulo.*

Seja A uma $K-$álgebra unitária. Um ideal I de A possui unidade se, e somente se, I é gerado por algum idempotente central de A. De fato, se I possui unidade 1_I, então é claro que 1_I é idempotente e $I = A1_I$. Como I é um ideal, então $x1_I,\ 1_Ix \in I$ para todo $x \in A$. Logo, $x1_I = 1_I(x1_I) = (1_IIx)1_I = 1_Ixe$ segue que 1_I é central em A. A recíproca é claramente verdadeira.

Daqui em diante (neste capítulo) $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ denotará uma ação como na Definição **??**.

Lema 3.7. *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A. Se para cada $g \in G$, cada D_g possui unidade 1_g, então são verdadeiras as seguintes afirmações:*

(a) $\alpha_g(1_{g^{-1}}1_h) = 1_g 1_{gh}$, *para quaisquer* $g,\ h \in G$.

(b) $\alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})) = \alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) = \alpha_{gh}(x1_{(gh)^{-1}})1_g$, *para todo* $g,\ h \in G$ *e todo* $x \in A$.

Demonstração. (a) Como α é uma ação parcial temos que $\alpha_g(D_{g^{-1}} \cap D_h) = D_g \cap D_{(gh)}$, para todo $g,\ h \in G$. Como $1_g 1_{gh}$ é a unidade de $D_g \cap D_{(gh)}$ e $1_{g^{-1}}1_h$ é a unidade de $D_{g^{-1}} \cap D_h$, temos, pelo fato de que α_g é isomorfismo, a igualdade desejada.

(b) Dados $x \in A$ e $g, h \in G$, temos:

$$\begin{aligned}
\alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})) &= \alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}})\alpha_h(1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})) \\
&= \alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}})1_h 1_{hg^{-1}}) \\
&= \alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
x\alpha_g(\alpha_h(x1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}})) &= \alpha_{gh}(x1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}),\ \textit{pois}\ x \in D_{h^{-1}} \cap D_{(gh)^{-1}} \\
&= \alpha_{gh}(x1_{h^{-1}}1_{(gh)^{-1}}1_{(gh)^{-1}}) \\
&= \alpha_{gh}(x1_{h^{-1}})\alpha_{gh}(1_{(gh)^{-1}}) \\
&= \alpha_{gh}(x1_{h^{-1}})1_g 1_{gh} \\
&= \alpha_{gh}(x1_{h^{-1}})1_g.
\end{aligned}$$

□

Definição 3.8. *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A. O* ***skew anel de grupo parcial*** *$A *_\alpha G$ é o conjunto de todas as somas formais finitas* $\sum_{g \in G} a_g \delta_g$, *onde cada* $a_g \in D_g$.

1. *A adição é definida por:* $\sum_{g\in G} a_g\delta_g + \sum_{g\in G} b_g\delta_g = \sum_{g\in G}(a_g + b_g)\delta_g$;

2. *A multiplicação é definida por:* $a_g\delta_g b_h\delta_h = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh}$ *e é estendida linearmente.*

Na definição acima os símbolos δ_g indicam a "posição" de a_g no somatório. Notamos que $\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h \in D_{g^{-1}} \cap D_h$ e pela condição $(P'2)$ o produto do skew anel de grupo parcial está bem definido.

Note que se uma $K-$álgebra A possui unidade 1_A, então $1_A\delta_{1_G}x\delta_g = x\delta_g$ e $x\delta_g 1_A\delta_{1_G} = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x)1_A)\delta_g = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x))\delta_g = x\delta_g$, para todo $g \in G$ e $x \in D_g$.

Lema 3.9. *O skew anel de grupo parcial $A *_\alpha G$ é um anel (não necessariamente associativo e unitário). Além disso, $A *_\alpha G$ possui estrutura natural de $K-$álgebra. Finalmente, se a álgebra A possui unidade 1_A, então $A *_\alpha G$ possui unidade $1_A\delta_{1_G}$.*

Demonstração. A prova é rotineira. □

Terminamos esta seção identificando a $K-$álgebra A em $A *_\alpha G$. Definamos a aplicação $\theta : A \to A *_\alpha G$ por $\theta(x) = x\delta_{1_G}$, para todo $x \in A$. É fácil ver que θ é um monomorfismo de $K-$álgebras.

3.3 Álgebra dos Multiplicadores

Nesta seção estudaremos como a "(L,R)-associatividade" influencia na questão da associatividade do skew anel de grupo parcial, para tanto serão necessárias algumas definições. Apresentamos também alguns exemplos de skew anéis de grupo parciais que não são associativos. Nesta seção consideramos álgebras não necessariamente com identidade e quando for necessário, seremos explícitos ao enuncia-lo(s).

Sejam A uma $K-$álgebra associativa e I um ideal de A. Dado $x \in A$ considere as aplicações $L_x : I \to I$ e $R_x : I \to I$ dadas por $L_x(a) = xa$ e $R_x(a) = ax$, respectivamente, para todo $a \in I$. As aplicações $L = L_x$ e $R = R_x$ satisfazem as seguintes propriedades, para quaisquer $a,\ b \in A$:

M1) $L(ab) = L(a)b$;

M2) $R(ab) = aR(b)$;

M3) $R(a)b = aL(b)$.

Tais propriedades são satisfeitas devido a associatividade de A.

Definição 3.10. *A* ***álgebra dos multiplicadores*** *de uma $K-$álgebra A é o conjunto $M(A)$ de todos os pares ordenados $(L,\ R)$, onde L e R são homomorfismos de $K-$álgebras de A em A e satisfazem as propriedades $M1)$, $M2)$ e $M3)$. Os homomorfismos L e R são chamados de* ***multiplicador à esquerda*** *e* ***multiplicador à direita****, respectivamente.*

As seguintes operações tornam $M(A)$ uma $K-$álgebra. Para todos $(L,\ R)$, $(L',\ R') \in M(A)$ e $\lambda \in K$, definimos:

1) $\lambda(L,\ R) := (\lambda L,\ \lambda R)$;

2) $(L,\ R) + (L',\ R') := (L + L',\ R + R')$;

3) $(L,\ R)(L',\ R') := (L \circ L',\ R' \circ R)$.

A verificação de que estas operações estão bem definidas e que tornam $M(A)$ uma $K-$álgebra associativa é imediata. Notamos que mesmo quando a álgebra A não possui unidade, a álgebra $M(A)$ possui unidade (Id_A, Id_A).

Seja A uma $K-$álgebra e considere a função $\phi : A \to M(A)$ definida por $\phi(x) = (L_x,\ R_x)$. Como $L_{xy} = L_x \circ L_y$ e $R_{xy} = R_y \circ R_x$, para todo $x,\ y \in A$, temos que ϕ está bem definida e é fácil mostrar que ϕ é um homomorfismo de $K-$álgebras.

Definição 3.11. *Dizemos que uma álgebra A é* ***não degenerada*** *quando a aplicação ϕ é injetora, ou seja, para todo $a \in A$, com $a \neq 0$, existe $b \in A$ tal que $ab \neq 0$ ou $ba \neq 0$.*

Observe que uma $K-$álgebra ser não degenerada está intimamente ligada aos seus anuladores à esquerda e à direita. De fato, temos que

$$\begin{aligned} Ker\phi &= \{x \in A \mid \phi(x) = 0\} \\ &= \{x \in A \mid L_x = R_x = 0\} \\ &= \{x \in A \mid xa = 0 = ax, \forall a \in A\} \\ &= ann^l(A) \cap ann^r(A). \end{aligned}$$

Num caso mais geral, seja I um ideal de uma $K-$álgebra A. A aplicação

$$\begin{aligned} \psi : A &\longrightarrow M(I) \\ x &\mapsto (L_x,\ R_x) \end{aligned}$$

é um homomorfismo de $K-$álgebras. Assim, como foi demonstrado para ϕ, tem-se

$$Ker(\psi) = ann^l_A(I) \cap ann^r_A(I).$$

Sejam A uma álgebra e I um ideal não nulo e unitário de A. Então I é um ideal não degenerado, pois, para qualquer elemento não nulo x de I, temos $0 \neq x = x1_I = 1_I x$.

Proposição 3.12. *Sejam A uma $K-$álgebra e o homomorfismo ϕ usado na Definição* **??**. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(a) $\phi(A)$ é um ideal de $M(A)$.

(b) ϕ é um isomorfismo de $K-$álgebras se, e só se, A é uma álgebra unitária.

Demonstração.

(a) Como $A \neq \emptyset$, tem-se $\phi(A) \neq \emptyset$ e segue que $\phi : A \to M(A)$ é um homomorfismo de $K-$álgebras. Iremos mostrar que $\phi(A)M(A) \subset \phi(A)$ e $M(A)\phi(A) \subset \phi(A)$. De fato,dados $x \in A$ e $(L, R) \in M(A)$, temos que $L_xL = L_{R(x)}$ e $RR_x = R_{R(x)}$, pois

$$L_xL(a) = \quad L_x(L(a)) = xL(a) = R(x)a = L_{R(x)}(a)$$

e

$$RR_x(a) = \quad R(ax) = aR(x) = R_{R(x)}(a),$$

para cada $a \in A$. Logo $(L_x, R_x)(L, R) = (L_{R(x)}, R_{R(x)})$. De forma análoga, obtemos $(L, R)(L_x, R_x) = (L_{L(x)}, R_{L(x)})$. Portanto, $\phi(A)$ é um ideal de $M(A)$.

(b) Suponha ϕ um isomorfismo. Como (Id_A, Id_A) é a unidade de $M(A)$, existe $x \in A$ tal que $\phi(x) = (Id_A, Id_A)$. Assim, $(L_x, R_x) = (Id_A, Id_A)$ e com isso $x = 1_A$.
Reciprocamente, suponha que A seja uma álgebra unitária. É fácil ver que a inversa de ϕ é dada por $\phi^{-1}((L, R)) = L(1_A)$. □

Seja A uma $K-$álgebra associativa (não necessariamente unitária). Dados $(L,\ R),\ (L',\ R') \in M(A)$, estaremos interessados quando a seguinte fórmula seja verdadeira:

$$R' \circ L = L \circ R'. \tag{3.3}$$

Observamos que sendo A associativo, a fórmula acima sempre vale para os multiplicadores L_x e R_y, para todo $x, y \in A$. No entanto, é fácil encontrar exemplos onde a fórmula (**??**) não é valida. Por exemplo, considere $\mathbb{R}^2$ como $\mathbb{R}-$espaço vetorial e defina o produto como sendo o trivial, isto é, $xy = 0$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^2$. Neste caso, qualquer transformação linear é um multiplicador. Porém, as transformações lineares dadas pelas matrizes $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ não satisfazem a igualdade (**??**).

Definição 3.13. *Uma $K-$álgebra A é dita ser $(L, R)-$**associativa** (ou $M(A)-$associativa) se quaisquer dois pares de multiplicadores $(L,\ R), (L',\ R') \in M(A)$ satisfazem a igualdade (**??**), isto é, $R' \circ L = L \circ R'$.*

O leitor dever estar se perguntando o motivo de exigirmos dois pares de multiplicadores na definição acima, se "aparentemente" apenas um par já bastaria para satisfazer a igualdade (**??**). O motivo desta exigência é mais técnica, pois como o leitor constatará, demonstrações em que usamos a $(L, R)-$associatividade se tornariam muito confusas se utilizássemos apenas um par.

Proposição 3.14. *Uma $K-$álgebra A é $(L,\ R)-$associativa, sempre que uma das condições a seguir são satisfeitas:*

(1) A é não degenerada.

(2) A é idempotente.

Demonstração. (1) Suponha A não degenerada. Dados $(L,R),(L',R') \in M(A)$ e $a,b \in A$, temos que $R(L'(a))b = L'(a)L(b) = L'(aL(b)) = L'(R(a)b) = L'(R(a))b$. Assim, $R(L'(a)) - L'(R(a)) \in ann^l(A)$. De forma similar,

$$R(L'(a)) - L'(R(a)) \in ann^r(A).$$

Portanto, se A é não degenerada, então $Ker(\phi) = 0$. Consequentemente, $R(L'(a)) = L'(R(a))$ e $RL' = L'R$.

(2) Suponhamos que A é idempotente. Então, $A^2 = A$. Daí, para cada $a \in A$, existem $x_i, y_i \in A$ tais que $a = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Para quaisquer $x, y \in A$ e $(L,R),(L',R') \in M(A)$, temos

$$R'L(xy) = R'(L(x)y) = L(x)R'(y) = L(xR'(y)) = L(R'(xy)) = LR'(xy),$$

Logo, $R'L(a) = \sum_{i=1}^{n} R'L(x_i y_i) = \sum_{i=1}^{n} LR'(x_i y_i) = LR'(a)$

□

Teorema 3.15. *Seja A uma álgebra unitária. São equivalentes as seguintes afirmações:*

(1) Todo ideal não nulo I de A é não degenerado;

(2) Todo ideal não nulo I de A é idempotente ou não degenerado;

(3) Todo ideal não nulo I de A é não degenerado à direita, isto é, para cada elemento não nulo $a \in I$ tem-se $aI \neq 0$;

(4) Todo ideal não nulo I de A é não degenerado à esquerda (definido de maneira simétrica ao item (3);

(5) A é semiprima.

Neste caso, todo ideal de A é $(L,R)-$associativo.

Demonstração. (1) $\Rightarrow$ (2) É imediato.

(2) $\Rightarrow$ (5) Suponhamos que A não seja semiprima. Então, existe um ideal não nulo I

em A tal que $I^n = 0$, para algum $n \in \mathbb{N}$ (tomamos n sendo o menor com essa propriedade), note que $n \geq 2$ e $I^{n-1} \neq 0$. Como $I^k \subset I^n = 0$ para todo $k \geq n$, obtemos que $I^{2n-2} = 0$. Logo, I^{n-1} é não nulo e não é idempotente e nem um ideal não degenerado, absurdo! Desta forma, concluímos que A é semiprima.

(5) $\Rightarrow$ (3) Seja I um ideal não nulo de A. Suponha que exista um elemento não nulo a em I tal que $aI = 0$. Consideramos o ideal $J := AaA$. Como A possui unidade, temos que $J \neq 0$.

Assim, $J^2 = (AaA)(AaA) = Aa(AAaA) \subset AaIA = 0$. O que contradiz a hipótese de A ser semiprima.

(3) $\Rightarrow$ (1) Seja I um ideal não nulo de A. Então, por hipótese, existe $a \in I - \{0\}$ tal que $aI \neq 0$, isto é, existe $b \in I$ tal que $ab \neq 0$. Assim, I é não degenerado.
As implicações (5) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) são verificadas com argumentos similares aos de cima. □

Considere A e B duas $K-$álgebras tais que existe $\eta : A \to B$ um isomorfismo de $K-$álgebras. Então podemos definir a aplicação $\overline{\eta} : M(A) \to M(B)$ dada por

$$\overline{\eta}(L, R) = (\eta L \eta^{-1}, \eta R \eta^{-1}),$$

para qualquer $(L, R) \in M(A)$. É rotineira a verificação de que $\overline{\eta}$ é um isomorfismo de $K-$álgebras. Em particular, se $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ é uma ação parcial de um grupo G sobre A, então $M(D_{g^{-1}})$ é isomorfo a $M(D_g)$ para todo $g \in G$, pelo isomorfismo $\overline{\alpha_g}$.

Os próximos resultados respondem a questão da associatividade do skew anel de grupo parcial.

Teorema 3.16. *Sejam A uma $K-$álgebra e α uma ação parcial de um grupo G sobre A. Se cada D_g é $(L, R)-$associativo, então $A *_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. Começamos observando que $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se, para quaisquer $f, g, h \in G$, $a \in D_h$, $b \in D_g$ e $c \in D_f$, tem-se:

$$a\delta_h(b\delta_g c\delta_f) = (a\delta_h b\delta_g)c\delta_f. \tag{3.4}$$

Notamos que $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = [\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)\delta_{hg}]\, c\delta_f = \alpha_{hg}(\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{hgf}$. Como $\alpha_{h^{-1}}(a)b \in D_{h^{-1}} \cap D_g$, então $\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in \alpha_h(D_{h^{-1}} \cap D_g) = D_h \cap D_{hg}$ e com isso $\alpha_{(hg)^{-1}}(\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)b) = \alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)$. Note ainda que $\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b) \in D_{g^{-1}} \cap D_{(hg)^{-1}}$, e obtemos, $(a\delta_h b\delta_g)c\delta_f = \alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{hgf}$.

Por outro lado,

$$a\delta_h(b\delta_g c\delta_f) = a\delta_h\left(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\delta_{gf}\right) = \alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\right)\delta_{hgf}.$$

Logo, $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se,

$$\alpha_h(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c))\delta_{hgf} = \alpha_h\left(\alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c)\right)\delta_{hgf}.$$

Como α_h é injetora, a igualdade acima é equivalente a

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(\alpha_{h^{-1}}(a)b)c) = \alpha_{h^{-1}}(a)\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c), \quad \forall a \in D_h,\ b \in D_g \text{ e } c \in D_f. \tag{3.5}$$

Mas para todo $h \in G$, $\alpha_{h^{-1}}$ é um isomorfismo, e podemos “identificar” a com $\alpha_{h^{-1}}(a)$, para todo $a \in D_h$. Logo, a igualdade (**??**) se resume em:

$$\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(ab)c) = a\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(b)c),\ \forall a \in D_{h^{-1}},\ b \in D_g\ e\ c \in D_f \tag{3.6}$$

Como a igualdade (**??**) não depende de f e h, podemos escolher $f = h = 1_G$ e assim $D_h = D_f = A$.

Portanto, $A *_\alpha G$ é associativo se, e somente se, a igualdade (**??**) é satisfeita, para todo $a \in D_{h^{-1}}$ e todo $b, c \in A$. Observe que a igualdade (**??**) pode ser reescrita como:

$$(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})L_a(b) = L_a(\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}})(b) \tag{3.7}$$

para quaisquer $b \in D_g$, $g \in G$ e $a, c \in A$. As aplicações $R_c(w) = wc$ e $L_a(z) = az$ definidas, para todo $w \in D_{g^{-1}}$ e todo $z \in D_g$, são os multiplicadores à direita e à esquerda, respectivamente.

Segue do comentário anterior a este teorema que a aplicação $\alpha_g \circ R_c \circ \alpha_{g^{-1}} : D_g \to D_g$ pertence a $M(D_g)$. Por hipótese, cada ideal D_g é $(L, R)-$associativo. Consequentemente, a igualdade (**??**) é sempre satisfeita e assim concluímos que $A *_\alpha G$ é associativo. $\square$

Corolário 3.17. *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A tal que cada ideal de A é idempotente ou não degenerado, então $A *_\alpha G$ é associativo.*

Demonstração. Pela Proposição **??** cada ideal D_g é $(L, R)-$associativo, temos pelo teorema anterior que $A *_\alpha G$ é associativo. □

Dizemos que uma $K-$álgebra A é **fortemente associativa** se, para qualquer grupo G e qualquer ação parcial α de G sobre A, $A *_\alpha G$ é associativo.

Corolário 3.18. *Se uma $K-$álgebra A é semiprima, então A é fortemente associativa.*

Demonstração. Suponha A uma $K-$álgebra semiprima. Então, pelo Teorema **??** todo ideal não nulo de A é idempotente ou não degenerado. Usando o Corolário **??** temos que $A *_\alpha G$ é associativo. Portanto, a álgebra A é fortemente associativa. □

O skew anel de grupo parcial nem sempre é associativo. Podemos constatar este fato no próximo exemplo.

Exemplo 3.19. *Seja A um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com base $\{1, t, u, v\}$. Defina a multiplicação em A por: $u^2 = v^2 = t^2 = tu = ut = vu = uv = 0$, $tv = vt = u$ e $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$.*

É fácil ver que A é uma $\mathbb{K}-$álgebra associativa. Sejam $G =< g >$ um grupo tal que $g^2 = 1_G$ e I o ideal de A gerado por v. Notamos que I visto como subespaço vetorial de A é gerado por u e v, pois dado $x \in I$ tem-se $x = (a + bt + cv + du)v = av + bu$, com $a, b, c, d \in K$, logo $I \subset< u, v >$. A inclusão contrária é imediata.

Agora, considere os ideais $D_{1_G} = A$, $D_g = I$ e defina a ação parcial α de G sobre A por: $\alpha_{1_G} = Id_A$ e $\alpha_g : I \to I$ dada por $\alpha_g(au + bv) = av + bu$, para todo $a, b \in \mathbb{K}$.

Seja $z = t\delta_{1_G} + u\delta_g \in A *_\alpha G$ e usando a multiplicação definida no skew anel de grupo parcial vemos que $(zz)z = 0$ e $z(zz) = u\delta_g \neq 0$. Logo $A *_\alpha G$ não é associativo.

O próximo resultado fornece uma gama de álgebras que não são fortemente associativas. Para isso, denote por $\mathcal{T} = T(n, \mathbb{K})$ o conjunto das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo $\mathbb{K}$.

Teorema 3.20. *Para todo $n \geq 3$ a $\mathbb{K}-$álgebra $\mathcal{T}$ não é fortemente associativa.*

Demonstração. Basta mostrar que $\mathcal{T} *_\alpha G$ não é associativo para algum grupo G e alguma ação parcial α de G sobre $\mathcal{T}$.

Considere o grupo G e a ação parcial α definidos no Exemplo **??**. Note que

$$(E_{1,1}\delta_{1_G}E_{2,n}\delta_g)E_{n-1,n}\delta_{1_G} = (E_{1,1}E_{2,n}\delta_g)E_{n-1,n}\delta_{1_G} = (0)E_{n-1,n}\delta_{1_G} = 0,$$

e

$$\begin{aligned}
E_{1,1}\delta_{1_G}(E_{2,n}\delta_g E_{n-1,n}\delta_{1_G}) &= E_{1,1}\delta_{1_G}(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(E_{2,n})E_{n-1,n})\delta_g) \\
&= E_{1,1}\delta_{1_G}(\alpha_g(E_{1,n-1}E_{n-1,n})\delta_g) \\
&= E_{1,1}\delta_{1_G}(\alpha_g(E_{1,n})\delta_g) \\
&= E_{1,1}\delta_{1_G}E_{1,n}\delta_g \\
&= E_{1,1}E_{1,n}\delta_g \\
&= E_{1,n}\delta_g \neq 0.
\end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{T} *_\alpha G$ não é associativo. □

3.4 Ações Envolventes

Nesta seção, apresentamos a definição de "ações envolventes" para uma ação parcial. Na matemática teoremas de existência e unicidade são muito importantes, como por exemplo, na Análise existe o Teorema de existência e unicidade para soluções de uma EDO com um valor inicial. Aqui apresentamos o resultado provado em [**?**] e chamamos de Existência e Unicidade de Ações Envolventes. Este Teorema responde e caracteriza quando uma ação parcial possui uma envolvente e é o resultado mais importante desta seção. Uma vez definida o que é uma ação envolvente, estudamos como uma ação parcial possuir uma ação envolvente pode influenciar na associatividade do skew anel de grupo parcial.

Exemplo 3.21. *Dada uma $K-$álgebra A e uma ação global β de um grupo G sobre A. Um ideal I de A é dito $\beta-$**invariante** quando $\beta_g(I) = I$, para todo $g \in G$. Neste caso, a ação β restrita ao ideal I define uma ação global de G sobre I.*

Exemplo 3.22. *Considere uma $K-$álgebra A e uma ação global β de um grupo G sobre A. Para cada ideal I de A e cada $g \in G$ podemos definir o ideal $D_g = I \cap \beta_g(I)$. É claro que $\beta_g(D_{g^{-1}}) = D_g$, para todo $g \in G$. Assim, $\alpha = \{\beta_g|_{D_{g^{-1}}} : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ define uma ação parcial de G sobre I. Esta ação parcial é chamada **restrição** de β ao ideal I.*

Assim, dada uma ação global, sempre é possível construir uma ação parcial. Nesta seção, estaremos interessados em estudar a "recíproca", isto é, dada uma ação parcial α quando é possível obter uma ação global tal que sua restrição coincida com α. Para tanto, definiremos objetos e daremos uma série de resultados a fim de responder esta questão.

Seja β uma ação global de um grupo G sobre uma $K-$álgebra B. Considere B_1 o ideal de B gerado por $\bigcup_{g \in G} \beta_g(I)$, para algum ideal I de B. Dizemos que a restrição de uma ação global é uma **restrição admissível** quando o ideal B_1 definido acima for igual a B.

Definição 3.23. *Dizemos que uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A é **equivalente** a uma ação parcial $\alpha' = \{\alpha'_g : D'_{g^{-1}} \to D'_g \mid g \in G\}$ de G sobre uma $K-$álgebra A' se existir um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to A'$ tal que para cada g em G tem-se:*

a) $\varphi(D_g) = D'_g$, *para todo* $g \in G$;

b) $\alpha'_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x)$, *para todo* $g \in G$ *e todo* $x \in D_{g^{-1}}$.

Quando duas ações parciais α e α' forem equivalentes denotaremos por $\alpha \sim \alpha'$. Note que a definição de ações parciais equivalentes define uma relação de equivalência.

Definição 3.24. *Uma ação global β de um grupo G em uma $K-$álgebra B é chamada uma **ação envolvente** (ou globalização) para uma ação α de G sobre $K-$álgebra A se a restrição admissível de β a um ideal de B é equivalente a α.*

Observação 3.25. *Em outras palavras, uma ação global β de um grupo G sobre uma $K-$álgebra B é uma ação envolvente de uma ação parcial α de um grupo G sobre uma $K-$álgebra A se existe um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to I$, onde I é um ideal de B, tal que:*

(I) $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$*, para todo* $g \in G$*;*

(II) $\varphi \circ \alpha_g(x) = \beta_g \circ \varphi(x)$*, para cada* $x \in D_{g^{-1}}$ *e todo* $g \in G$*;*

(III) B *é igual a subálgebra gerada por* $\bigcup\limits_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$*, isto é,* $B = \sum\limits_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$*.*

Quando nos referimos a uma ação envolvente β de uma ação parcial α é comum denotar a ação envolvente por (B, β) e a ação parcial por (A, α), a fim de exibir as álgebras B e A.

O próximo resultado começa a desenhar a questão da associatividade do skew anel de grupo parcial.

Teorema 3.26. *Seja* β *uma ação global de um grupo* G *em uma* $K-$*álgebra* B*. Se* β *é uma envolvente para uma ação parcial* α *de* G *sobre uma* $K-$*álgebra* A*, então* $A *_\alpha G$ *possui uma cópia em* $B *_\beta G$*. Em particular,* $A *_\alpha G$ *é associativo.*

Demonstração. Como $(B,\ \beta)$ é uma ação envolvente para $(A,\ \alpha)$, temos que existe um ideal I de B e um isomorfismo de $K-$álgebras $\varphi : A \to I$ tal que α é equivalente a restrição admissível α' de β ao ideal I. Defina $\psi : A *_\alpha G \to T *_\beta G$ por $\psi(x) = \sum\limits_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g$, para cada $x = \sum\limits_{g\in G} a_g\delta_g \in A *_\alpha G$.

Vamos mostrar que ψ é um monomorfismo de álgebras. De fato, pela multiplicação no skew anel de grupo parcial e pela propriedade (II) acima temos que

$$\begin{aligned}
\psi(a_g\delta_g b_h\delta_h) = &\quad \varphi(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} &&= \varphi \circ \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} \\
= &\quad \beta_g \circ \varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h)\delta_{gh} &&= \beta_g(\varphi(\alpha_{g^{-1}}(a_g)b_h))\delta_{gh} \\
= &\quad \beta_g(\varphi \circ \alpha_{g^{-1}}(a_g)\varphi(b_h))\delta_{gh} &&= \beta_g(\beta_{g^{-1}} \circ \varphi(a_g)\varphi(b_h)\delta_{gh}) \\
= &\quad \varphi(a_g)\delta_g\varphi(b_h)\delta_h &&= \psi(a_g\delta_g)\psi(b_h\delta_h).
\end{aligned}$$

Afirmamos que $\varphi(1_R)\delta_{1_G}$ é a identidade de $\psi(A *_\alpha G)$. Dado $x = \sum\limits_{g\in G} \varphi(a_g)\delta_g \in Im(\psi)$, observamos que $\varphi(a_g) \in \varphi(D_{g^{-1}}) = \varphi(A) \cap \beta_{g^{-1}}(\varphi(A))$.

Assim, para todo $g \in G$, $\varphi(a_g) = \beta_g(\varphi(b_g))$, para algum $b_g \in A$ e segue que

$$\begin{aligned} x[\varphi(1_A)\delta_{1_G}] = & \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g\varphi(1_A)\delta_{1_G} & = \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\beta_g(\varphi(1_A))\delta_g \\ = & \sum_{g\in G}\beta_g(\varphi(b_g))\beta_g(\varphi(1_A))\delta_g & = \sum_{g\in G}\beta_g(\varphi(b_g))\delta_g \\ = & \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g & = x. \end{aligned}$$

Analogamente, $\varphi(1_R)\delta_{1_G}x = x$. Logo, ψ é um homomorfismo de anéis.

Vamos verificar que ψ é injetora. Com efeito, seja $x = \sum_{g\in G} a_g\delta_g \in Ker(\psi)$, logo $\psi(x) = 0$, e portanto $0 = \sum_{g\in G}\varphi(a_g)\delta_g$. Como φ é um isomorfismo e $B *_\beta G = \bigoplus_{g\in G}\varphi(A)\cap\beta_g(\varphi(A))\delta_g$ temos que $a_g = 0$, para todo $g \in G$. Consequentemente, $x = 0$ e $Ker(\psi) = 0$.

Segue da Proposição **??** que $B *_\beta G$ é associativo, logo $A *_\alpha G$ o é. □

Lema 3.27. *Se uma $K-$álgebra A é uma soma finita de ideais em que cada ideal é uma $K-$álgebra unitária, então A possui unidade.*

Demonstração. Seja n o número de ideais tais que $A = \sum_{i=1}^{n} J_i$. Vamos mostrar por indução sobre n que o lema é verdadeiro. Se $n = 1$ é imediato. Vamos mostrar para o caso em que $A = I + J$, com I e J ideais unitários de A. Sejam 1_I e 1_J as unidades de I e J, respectivamente.

Agora iremos constatar que $1_A = 1_I + 1_J - 1_I1_J$. Dado $a \in A$, $a = x + y$ para algum $x \in I$ e $y \in J$, temos

$$\begin{aligned} a(1_I + 1_J - 1_I1_J) &= (x+y)(1_I + 1_J - 1_I1_J) \\ &= x1_I + x1_J - x1_I1_J + y1_I + y1_J - y1_I1_J \\ &= x + y + x1_J - x1_J + y1_I - y1_I \\ &= x + y \\ &= a, \end{aligned}$$

analogamente $(1_I + 1_J - 1_I1_J)a = a$. Agora, suponha que seja válido para $k \leq n-1$. Verificaremos que também é valido para n.

Se $A = \sum_{i=1}^{n} J_i$, então $A = S_{n-1} + J_n$, onde $S_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} J_i$. Por hipótese de indução S_{n-1} possui unidade $1_{S_{n-1}}$. O restante da demonstração segue do caso $n = 2$. $\square$

Terminamos esta seção com uma resposta definitiva sobre a questão da existência de uma ação envolvente.

Proposição 3.28. *Seja A uma álgebra unitária. Se uma ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ de um grupo G em A admite uma envolvente (B, β), então cada D_g é uma álgebra unitária.*

Demonstração. Seja (B, β) uma envolvente de (A, α). Então existe um isomorfismo de $K-$álgebras $\varphi : A \to I$, para algum ideal I de B. Vamos verificar que $\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$ é a unidade de $\varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$. Como $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para cada $g \in G$, temos para cada $y \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ que $y = \varphi(a) = \beta_g(\varphi(b))$, para algum $a, b \in A$. Logo,

$$y\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A)) = \varphi(a)\beta_g(\varphi(1_A)) = \beta_g(\varphi(b))\beta_g(\varphi(1_A)) = \beta_g(\varphi(b)\varphi(1_A)) = y$$

$$\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))y = \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))\beta_g(\varphi(b)) = \varphi(1_A)\beta_g(\varphi(b)) = \varphi(1_A)\varphi(a) = y.$$

Portanto, $\varphi(1_A)\beta_g(\varphi(1_A))$ é a unidade de $\varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$. Como φ é um isomorfismo, o resultado segue. $\square$

Proposição 3.29. *Sejam A uma $K-$álgebra unitária e α uma ação parcial de um grupo G sobre A. Se cada D_g é uma álgebra unitária, então α admite uma ação envolvente β.*

Demonstração. Suponha que D_g possui unidade 1_g, para cada $g \in G$. É claro que cada 1_g está no centro de A, logo $D_g = 1_g A$.

É fácil ver que o conjunto $\mathcal{F} = \{f : G \to A \mid f \text{ é função}\}$ é uma $K-$álgebra com as operações: $(f + f')(x) = f(h) + f'(x)$, $(ff')(x) = f(x)f'(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, para quaisquer $f, f' \in \mathcal{F}$, $\lambda \in K$ e $x \in G$. Para cada $x \in G$, $1_{\mathcal{F}}(x) = 1_A$ é a identidade de $\mathcal{F}$.

Para cada $g \in G$, defina $\beta_g : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ por $\beta_g(f)(z) = f(g^{-1}z)$, para todo $z \in G$ e $f \in \mathcal{F}$. Para cada $f, f_1 \in \mathcal{F}$, $k \in K$ e $z \in G$ temos que

$$\beta_g(f + f_1)(z) = (f + f_1)(g^{-1}z) = f(g^{-1}z) + f_1(g^{-1}z) = \beta_g(f)(z) + \beta_g(f_1)(z)$$

$$\beta_g(ff_1)(z) = (ff_1)(g^{-1}z) = f(g^{-1}z)f_1(g^{-1}z) = \beta_g(f)(z)\beta_g(f_1)(z)$$

$$\beta_g(1_{\mathcal{F}})(z) = 1_{\mathcal{F}}(g^{-1}z) = 1_A = 1_{\mathcal{F}}(z)$$

$$\beta_g(kf)(z) = kf(g^{-1}z) = k\beta_g(f_1)(z).$$

Como $\beta_g^{-1} = \beta_{g^{-1}}$, para qualquer $g \in G$, temos que a função $\beta : G \to Aut_K(\mathcal{F})$ dada por $\beta(g) = \beta_g$, para todo $g \in G$, está bem definida.

Agora, mostraremos que β define uma ação global de G sobre $\mathcal{F}$. Basta ver que para quaisquer $g, g_1 \in G$ tem-se $\beta_{gg_1} = \beta_g \circ \beta_{g_1}$. Como para todo $f \in \mathcal{F}$ e todo $z \in G$

$$\beta_{gg_1}(f)(z) = f(g_1^{-1}g^{-1}z) = \beta_{g_1}(f)(g^{-1}z) = \beta_g \circ \beta_{g_1}(f)(z).$$

Defina $\varphi : A \to \mathcal{F}$ por $\varphi(a) : G \to A$, onde $\varphi(a)(g) = \alpha_{g^{-1}}(a1_g)$ para cada $a \in A$ e cada $g \in G$. Assim como mostramos que β está bem definida mostra-se que φ está. Vamos mostrar que φ é um monomorfismo de $K-$álgebras. De fato, para quaisquer $a, b \in A$, $k \in K$ e $g \in G$ temos que

$$\begin{aligned}
\varphi(a+b)(g) &= \alpha_{g^{-1}}(a1_g + b1_g) &&= \alpha_{g^{-1}}(a1_g) + \alpha_{g^{-1}}(b1_g) = [\varphi(a) + \varphi(b)](g)\\
\varphi(ab)(g) &= \alpha_{g^{-1}}(a1_g b1_g) &&= \alpha_{g^{-1}}(a1_g)\alpha_{g^{-1}}(b1_g) = [\varphi(a)\varphi(b)](g)\\
\varphi(ka)(g) &= \alpha_{g^{-1}}(ka1_g) &&= k\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = [k\varphi(a)](g).
\end{aligned}$$

Se $\varphi(a) = 0$, para algum $a \in A$, então $\alpha_{g^{-1}}(a1_g) = 0$, para todo $g \in G$. Logo, $a = 0$ e portanto $\varphi : A \to \varphi(A)$ é um isomorfismo de $k-$álgebras, com $1_{\varphi(A)} = \varphi(1_A)$.

Agora, considere a subálgebra B de $\mathcal{F}$ gerada por $\bigcup_{g\in G} \beta_g(\varphi(A))$. Vamos mostrar que a restrição de β a B é uma envolvente para α. Para simplificar a notação, denotaremos a restrição de β a B por β. Vamos verificar as condições (I), (II) e (III) acima.

(I) $\beta_g \circ \varphi(x) = \varphi \circ \alpha_g(x)$, para todo $x \in D_{g^{-1}}$ e $g \in G$.

Com efeito, para todo $h \in G$, $\beta_g \circ \varphi(x)(h) = \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h})$. Pelo Lema **??** temos que

$$\varphi \circ \alpha_g(x)(h) = \alpha_h^{-1}(\alpha_g(x)1_h) = \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h}),$$

para todo $g, h \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$.

(II) $\varphi(D_g) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para cada $g \in G$.

A inclusão $\varphi(D_g) \supseteq \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$ é imediata. Dado $y \in \varphi(D_g)$ temos que $y = \varphi(a)$, para algum $a \in D_g \subset A$. Escrevendo $b = \alpha_{g^{-1}}(a)$, temos pelo Lema **??** que para cada $h \in G$,

$$\begin{aligned}
\beta_g(\varphi(b))(h) &= \varphi(b)(g^{-1}h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(b1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(\alpha_{g^{-1}}(a)1_{g^{-1}h}) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a\alpha_g(1_{g^{-1}}1_{g^{-1}h})) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a1_g1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(a1_h) \\
&= \varphi(a)(h).
\end{aligned}$$

Portanto, $\beta_g(\varphi(b)) = \varphi(a)$ e consequentemente $y \in \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$. Isto mostra a igualdade desejada.

A condição (III) é satisfeita por construção.

Resta mostrar que $\varphi(A)$ é um ideal de B. Como φ é um homomorfismo de $K-$álgebras temos que $\varphi(A)$ é uma subálgebra de B e portanto basta mostrar que para todo $y = \varphi(a') \in \varphi(A)$ e $z = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(x_i)) \in B$ tem-se $yz, zy \in \varphi(A)$. Para isso, é suficiente mostrar que $\varphi(a')\beta_g(\varphi(x)), \beta_g(\varphi(x))\varphi(a') \in \varphi(A)$, para cada $a', x \in A$. Para cada $h \in G$

$$\begin{aligned}
\beta_g(\varphi(x))\varphi(a')(h) &= [\beta_g(\varphi(x))(h)][\varphi(a')(h)] \\
&= [\alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h})][\alpha_{h^{-1}}(a'1_h)] \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h})1_{h^{-1}g}1_{h^{-1}}\alpha_{h^{-1}}(a'1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h})\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(a'1_h) \quad \text{(pelo Lema ??)} \\
&= \alpha_{h^{-1}g}(x1_{g^{-1}h}1_{g^{-1}})\alpha_{h^{-1}}(a'1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x1_{g^{-1}})1_h)\alpha_{h^{-1}}(a'1_h) \\
&= \alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(x1_{g^{-1}})a'1_h) \\
&= \varphi(\alpha_g(x1_{g^{-1}})a')(h).
\end{aligned}$$

Logo, $\beta_g(\varphi(x))\varphi(a') = \varphi(\alpha_g(x1_{g^{-1}})a')$. Analogamente,

$$\varphi(a')\beta_g(\varphi(x)) = \varphi(a'\alpha_g(x1_{g^{-1}})).$$

Isto conclui a demonstração. □

Teorema 3.30 (M. Dokuchaev; R. Exel [**Existência e Unicidade de Envolventes**]). *Seja A uma álgebra unitária. Então uma ação parcial α de um grupo G em A admite uma envolvente β se, e somente se, cada D_g ($g \in G$) é uma álgebra unitária. Além disso, se β existir, então ela é única a menos de equivalência.*

Demonstração. Existência: Segue imediatamente das Proposições **??** e **??**.

Unicidade: Sejam (B, β) e (B', β') envolventes para (A, α). Sejam β_1 a restrição de β ao ideal $\varphi(A)$ e β_1' a restrição de β' ao ideal $\varphi'(A)$, onde $\varphi : A \to B$ e $\varphi' : A \to B'$ são os monomorfismos de $K-$álgebras provenientes da definição de ação envolvente. Denotaremos β_1 e β_1' por β e β'. Segue da Observação **??** que

$$B = \sum_{g \in G} \beta_g(\varphi(A)) \quad \text{e} \quad B' = \sum_{g \in G} \beta_g'(\varphi'(A))$$

Defina $\phi : B' \to B$ por

$$\phi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}'(\varphi'(a_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)),$$

para todo $a_i \in A$. Vamos mostrar que ϕ está bem definida, isto é, se $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}'(\varphi'(a_i)) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} \beta_g(\varphi(a_i)) = 0$.

Com efeito, se $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}'(\varphi'(a_i)) = 0$, então $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}'(\varphi'(a_i))\beta_h'(\varphi'(a)) = 0$, para quaisquer $a \in A$ e $h \in G$. Aplicando $\beta_{h^{-1}}'$ à última igualdade temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{h^{-1}g_i}'(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = 0.$$

Como $\varphi'(A)$ é um ideal de B' temos que $\beta_{h^{-1}g_i}'(\varphi'(a_i))\varphi'(a) \in \varphi'(D_{h^{-1}g_i})$.

Além disso, $\varphi'(1_{h^{-1}g_i})$ é a unidade de $\varphi'(D_{h^{-1}g_i})$. Assim,

$$\begin{aligned}
\beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) &= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(1_{h^{-1}g_i})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\beta_{h^{-1}g_i} \circ \varphi'(1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i 1_{g_i^{-1}h}))\varphi'(a) \\
&= \varphi' \circ \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})\varphi'(a) \\
&= \varphi'(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a).
\end{aligned}$$

Analogamente, $\beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a) = \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a)$.

Então

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \beta'_{h^{-1}g_i}(\varphi'(a_i))\varphi'(a) = \varphi'\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a\right).$$

Como φ' é injetora, temos que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a = 0$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{h^{-1}g_i}(\varphi(a_i))\varphi(a) = \sum_{i=1}^{n} \varphi(\alpha_{h^{-1}g_i}(a_i 1_{g_i^{-1}h})a) = 0,$$

logo aplicando β_h na última igualdade obtemos que, para todo $a \in A$ e $h \in G$,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\beta_h(\varphi(a)) = 0. \tag{3.8}$$

Seja $\overline{B}$ a subálgebra de B gerada por $\bigcup_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(A))$. Desta maneira, $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) \in \overline{B}$ e pelo Lema **??** $\overline{B}$ possui unidade. Portanto, segue do fato de $\overline{B}$ possuir unidade e da igualdade (**??**) que $\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(\varphi(a_i)) = 0$ e assim ϕ está bem definida.

Agora, defina $\phi' : B \to B'$ por $\phi\left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{g_i}(\varphi(a_i))\right) = \sum_{i=1}^{m} \beta'_{g_i}(\varphi'(a_i))$. Seguindo os mesmos passos para mostrar que ϕ está bem definida, mostramos que ϕ' está bem definida. A verificação de que ϕ e ϕ' são mutuamente inversas é imediata.

Vamos mostrar que ϕ é um homomorfismo de $K-$álgebras. A verificação das seguintes igualdades é imediata: $\phi(b + b') = \phi(b) + \phi(b')$ e $\phi(kb) = k\phi(b)$, para todo $b, b' \in B'$ e $k \in K$. Vamos mostrar que $\phi(bb') = \phi(b)\phi(b')$, para todo $b, b' \in B'$. De fato, como $A_1 := \varphi(A)$ é um ideal de B e $A_2 := \varphi'(A)$ um ideal de B', temos

$$\phi(\beta'_g(x)\beta'_h(y)) = \beta_g(x)\beta_h(y)$$

e que, para todo $x, y \in A_1$ e $l \in G$,

$$x\beta_l(y) = 1_l x\beta_l(y) = \beta_l(\beta_{l^{-1}}(1_l x)y) = \beta_l(\alpha_{l^{-1}}(1_l x)y).$$

Desta maneira

$$\beta_g(x)\beta_h(y) = \beta_g(x\beta_{g^{-1}h}(y)) = \beta_g(\beta_{g^{-1}h}(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}x)y)) = \beta_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{g^{-1}h}x)y).$$

Analogamente, $\beta'_g(x)\beta'_h(y) = \beta'_h(\alpha_{h^{-1}g}(1_{h^{-1}g}x')y')$, para quaisquer $x', y' \in A_2$ e $g, h \in G$. Isto mostra que ϕ isomorfismo de $K-$álgebras.

Vamos verificar as condições da Definição **??**.

a) $\phi(\varphi'(A) \cap \beta'_g(\varphi'(A))) = \varphi(A) \cap \beta_g(\varphi(A))$, para todo $g \in G$.

   Como $\phi(\varphi'(A)) = \varphi(A)$, $\phi(\beta'_g(\varphi'(A))) = \beta_g(\varphi(A))$ e ϕ é injetora temos a igualdade desejada.

b) $\phi \circ \beta'_g = \beta_g \circ \phi$ em $\varphi(A) \cap \beta_{g^{-1}}(\varphi(A))$.

   Para cada $x \in \phi(\varphi'(A) \cap \beta'_{g^{-1}}(\varphi'(A))$, temos que $x = \beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))$, para algum $a \in A$. Assim,

$$\phi \circ \beta'_g(x) = \phi \circ \beta'_g(\beta'_{g^{-1}}(\varphi'(a))) = \phi(\varphi'(a)) = \varphi(a) = \beta_g(\beta_{g^{-1}}(\varphi(a)) = \beta_g \circ \phi(x).$$

□

O próximo exemplo se refere a uma ação parcial de um grupo finito sobre um anel com identidade que não admite uma ação envolvente.

Exemplo 3.31. *Um exemplo de uma ação parcial que não possui envolvente. Seja $K = \mathbb{Z}$ e considere $R = K \times K$. Note que $R = Ke_1 \oplus Ke_2$ com $e_1 = (1, 0)$ $e_2 = (0, 1)$ possui unidade $(1, 1)$. Sejam G um grupo cíclico de ordem 3 gerado por g e os ideais $D_1 = R$, $D_g = 0 \times 9\mathbb{Z}$ e $D_{g^2} = 9\mathbb{Z} \times 0$. Definindo $\alpha_1 = Id_R$ e*

1. *$\alpha_g : D_{g^2} \to D_g$ por $\alpha_g(0, 9x) = (9x, 0)$ para todo $x \in K$,*

2. $\alpha_{g^2} : D_g \to D_{g^2}$ *por* $\alpha_{g^2}(9y, 0) = (0, 9y)$ *para todo* $y \in K$*.*

É fácil ver que isto define uma ação parcial α *do grupo* G *sobre* R*. Como o ideal* D_g *não possui unidade, segue que* α *não possui ação envolvente.*

Seja R um anel. Dizemos que dois idempotentes $x, y \in R$ são **idempotentes ortogonais** quando $yx = xy = 0$.

Exemplo 3.32. *Seja* K *um anel comutativo e considere o anel* $R = Ke_1 \oplus Ke_2 \oplus Ke_3$ *onde* e_1, e_2 *e* e_3 *são idempotentes ortogonais não nulos com soma igual a um. Seja* $G = \{1, g, g^2, g^3\}$ *um grupo gerado por* g*. Defina os ideais* $D_1 = R$*,* $D_g = Ke_1 \oplus Ke_2$*,* $D_{g^2} = Ke_1 \oplus Ke_3$ *e* $D_{g^3} = Ke_2 \oplus Ke_3$ *e os isomorfismos* $\alpha_1 = Id_R$ *e*

1. $\alpha_g : D_{g^2} \to D_g$ *dada por* $\alpha_g(e_1) = e_2$ *e* $\alpha_g(e_3) = e_1$*;*

2. $\alpha_{g^2} : D_g \to D_{g^2}$ *dada por* $\alpha_{g^2}(e_2) = e_1$ *e* $\alpha_{g^2}(e_1) = e_3$*;*

3. $\alpha_{g^3} : D_{g^3} \to D_{g^3}$ *dada por* $\alpha_g(e_2) = e_3$ *e* $\alpha_g(e_3) = e_2$*.*

É rotineiro verificar que isto define uma ação parcial α *do grupo* G *sobre* R*. Como* R *e cada ideal definido acima possui unidade, temos pelo Teorema* **??** *que* α *possui uma ação envolvente.*

Capítulo 4

Contexto de Morita e Ações Parciais

Neste capítulo estudaremos um pouco sobre extensões de Galois para anel, onde seguimos a definição dada em [?]. Veremos no Teorema **??** (resultado principal deste trabalho) como um anel R ser uma "extensão de Galois parcial" de um subanel K pode influenciar na questão dos anéis K e $R \ast_\alpha G$ sejam Morita equivalentes. Para tanto, definiremos as extensões de Galois parciais e construiremos um contexto de Morita para os anéis R^α e $R\ast_\alpha G$. A construção do contexto de Morita que nos referimos anteriormente foi feita em [?].

Salientamos que o nome extensões de Galois parciais é mais uma "homenagem" do que uma generalização da Teoria de Galois que conhecemos. Ainda neste capítulo definiremos "elementos invariantes" por uma ação parcial. Porém, este nome é dado apenas para seguir o caso global.

4.1 Aplicação Traço e Subanéis Fixos

Nesta seção assumiremos que cada $K-$álgebra R é associativa e possui unidade (na maioria das vezes nos referiremos a R apenas como anel). Em toda esta seção G será um grupo finito e $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ uma ação parcial de G sobre R com envolvente (T, β). Desta forma, cada ideal D_g possui unidade 1_g. Começaremos definindo dois subanéis importantes para o restante deste trabalho. Como assumiremos que α possui uma envolvente (T, β), poderemos identificar R com um ideal de T e por este motivo, de agora em diante, assumiremos que R é um ideal de T.

Com a identificação acima, podemos reescrever a Observação **??** da seguinte forma:

(I) $D_g = R \cap \beta_g(R)$, para todo $g \in G$;

(II) $\alpha_g(x) = \beta_g(x)$, para cada $x \in D_{g^{-1}}$ e todo $g \in G$;

(III) T é igual ao subanel gerado por $\bigcup_{g\in G} \beta_g(R)$, isto é, $T = \sum_{g\in G} \beta_g(R)$.

É fácil ver que $1_g = 1_R\beta_g(1_R)$ para todo $g \in G$.

Nesta seção usaremos argumentos similares ao utilizados em [?] e [?].

Seja β uma ação global de um grupo G (finito) sobre uma anel T. Lembramos a seguir as definições do conjunto dos elementos fixos de T por β e a definição da aplicação tr_G dadas no capítulo anterior.

$$T^G = \{x \in T \mid \beta_g(x) = x,\ \forall g \in G\}$$

e

$$\begin{aligned} tr_G : T &\longrightarrow T \\ z &\mapsto \sum_{g\in G} \beta_g(z). \end{aligned}$$

Embora para definir o conjunto T^G não seja necessário exigir que G seja finito, fazemos tal exigência aqui, motivados por esta condição ser necessária para o restante deste capítulo. Inspirados no caso global, "generalizamos" a seguir a definição do conjunto T^G e a definição da aplicação tr_G.

Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra R. Dizemos que um elemento $r \in R$ é um **elemento invariante** por α (ou $\alpha-$invariante) se $\alpha_g(r1_{g^{-1}}) = r1_g$, para todo $g \in G$. Denotamos o conjunto do elementos invariantes de R pela ação parcial α por

$$R^\alpha = \{x \in R \mid \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x1_g,\ \forall g \in G\}.$$

Definimos a aplicação **traço parcial** por

$$\begin{aligned} tr_\alpha : R &\longrightarrow R \\ x &\mapsto \sum_{g\in G} \alpha_g(x1_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Note que, para cada $g \in G$, $tr_\alpha(R) \subset R^\alpha$. Com efeito, temos pelo Lema **??** que

$$\begin{aligned}
\alpha_g(tr_\alpha(y)1_{g^{-1}}) &= \alpha_g\left(\sum_{h\in G}\alpha_h(y1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}\right)\\
&= \sum_{h\in G}\alpha_g(\alpha_h(y1_{h^{-1}})1_{g^{-1}})\\
&= \sum_{h\in G}\alpha_{gh}(y1_{(gh)^{-1}})1_g\\
&= \sum_{f\in G}\alpha_f(y1_{f^{-1}})1_g \qquad = tr_\alpha(y)1_g,
\end{aligned}$$

para todo $y \in R$. Logo, $tr_\alpha(R) \subset R^\alpha$.

A justificativa do lema abaixo segue passos simples e portanto omitimos sua demonstração.

Lema 4.1. *Os conjuntos R^α e T^G são subanéis de R e T, respectivamente.*

Observação 4.2. *Seja (T,β) uma ação envolvente para a ação parcial (R,α). Como T é gerado por $\bigcup_{g\in G}\beta_g(R)$, temos que $T = \sum_{g\in G}\beta_g(R)$. Escrevendo $G = \{g_1 = 1_G, g_2, ..., g_n\}$, segue do fato de que cada $\beta_{g_i}(R)$ possui unidade e do Lema* **??** *que T possui unidade . Observe que se $n = 2$, então $1_T = 1_R + \beta_{g_2}(1_R) - 1_R\beta_{g_2}(1_R)$.*

Se $n = 3$, então

$$\begin{aligned}
1_T &= 1_{S_2} + \beta_{g_3}(1_R) - 1_{S_2}\beta_{g_3}(1_R)\\
&= 1_R + \beta_{g_2}(1_R) - 1_R\beta_{g_2}(1_R) + \beta_{g_3}(1_R) - (1_R + \beta_{g_2}(1_R) - 1_R\beta_{g_2}(1_R))\beta_{g_3}(1_R)\\
&= 1_R + \beta_{g_2}(1_R) + \beta_{g_3}(1_R) - 1_R\beta_{g_2}(1_R) - 1_R\beta_{g_3}(1_R) - \beta_{g_2}(1_R)\beta_{g_3}(1_R)\\
&\quad +1_R\beta_{g_2}(1_R)\beta_{g_3}(1_R),
\end{aligned}$$

onde $S_2 = \sum_{i=1}^{2}\beta_{g_i}(R)$.

De modo mais geral, temos

$$1_T = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i_1<\cdots<i_l}(-1)^{l+1}\beta_{g_{i_1}}(1_R)\cdots\beta_{g_{i_l}}(1_R).$$

Agora, considere os elementos:

$e_1 = 1_R$, $e_2 = (1_T - 1_R)\beta_{g_2}(1_R), e_3 = (1_T - 1_R)(1_T - \beta_{g_2}(1_R))\beta_{g_3}(1_R), ...,$ $e_j = (1_T - 1_R)\cdots(1_T - \beta_{g_{j-1}}(1_R))\beta_{g_j}(1_R)$, para todo $j = 2, ..., n$.

Se $i < j$*, então* $e_i = (1_T - 1_R)\cdots(1_T - \beta_{g_{i-1}}(1_R))\beta_{g_i}(1_R)$ *e* $e_j = (1_T - 1_R)\cdots(1_T - \beta_{g_{i-1}}(1_R))\cdots(1_T - \beta_{g_{j-1}}(1_R))\beta_{g_j}(1_R)$*. Como* $\beta_{g_i}(1_R)$ *é um idempotente central em* T *e* $\beta_{g_i}(1_R)(1_T - \beta_{g_{i-1}}(1_R)) = 0$*, temos que* $e_ie_j = 0$*.*

Como para todo $j = 1, ..., n$

$$(1_T - \beta_{g_j}(1_R))^2 = 1_T - \beta_{g_j}(1_R) - \beta_{g_j}(1_R) + \beta_{g_j}(1_R)^2 = 1_T - \beta_{g_j}(1_R),$$

temos que e_j *é idempotente para todo* $j = 1, ..., n$*. Assim, o conjunto* $\{e_1, ..., e_n\}$ *é um conjunto de idempotentes centrais dois à dois ortogonais em* T*. Notamos que* $e_j = \theta_j\beta_{g_j}(1_R)$*, com* $\theta_j = (1_T - 1_R)\cdots(1_T - \beta_{g_{j-1}}(1_R))$*, para todo* $j = 2, ..., n$ *e que* $\theta_j = \theta_{j-1} - e_{j-1}$ *para todo* $j = 2, ..., n$*.*

Vamos mostrar por indução sobre n*, que* $1_T = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i$*.*

Se $n = 1$ *é imediato. Suponha que seja válido para todo* $k \leq n-1$*, isto é, se* $S_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_{g_i}(R)$ *então* $1_{S_k} = \bigoplus_{i=1}^{k} e_i$*. Vamos verificar que é válido para* n*.*

Notamos que para todo $j = 2, ..., n$*,* $e_j = (1_T - 1_{S_{j-1}})\beta_{g_j}(1_R)$ *onde* $S_{j-1} = \sum_{k=1}^{j-1} \beta_{g_k}(R)$*. Verificamos este fato por indução sobre* n*. Para* $n = 2$ *é claramente satisfeito. Supondo válido para todo* $k \leq n-1$*, vamos mostrar válido para* n*. Como*

$$\begin{aligned}
e_n &= \theta_{n-1}\beta_{g_n}(1_R) \\
&= (\theta_{n-1} - \theta_{n-1}\beta_{g_{n-1}}(1_R))\beta_{g_n}(1_R) \\
&= (\theta_{n-1} - e_{n-1})\beta_{g_n}(1_R) \\
&= (\theta_{n-2} - \theta_{n-2}\beta_{g_{n-2}}(1_R) - e_{n-1})\beta_{g_n}(1_R) \\
&= (\theta_{n-2} - e_{n-2} - e_{n-1})\beta_{g_n}(1_R) \\
&\vdots \\
&= (1_T - \sum_{i=1}^{n-1} e_i)\beta_{g_n}(1_R) \quad \textit{pela hipótese de indução} \\
&= (1_T - 1_{S_{n-1}})\beta_{g_n}(1_R),
\end{aligned}$$

a nossa afirmação segue.

Pela demonstração do Lema **??** *temos que* $1_T = 1_{S_{n-1}} - \beta_n(1_R) - \beta_n(1_R)1_{S_{n-1}}$*,* *onde* $S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{g_k}(R)$. *Logo,*

$$\begin{aligned} 1_T &= 1_{S_{n-1}} - \beta_n(1_R) - \beta_n(1_R)1_{S_{n-1}} \\ &= 1_{S_{n-1}} + (1_T - 1_{S_{n-1}})\beta_n(1_R) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n-1} e_i + (1_T - 1_{S_{n-1}})\beta_n(1_R) \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n-1} e_i + e_n \\ &= \bigoplus_{i=1}^{n} e_i. \end{aligned}$$

Portanto, $1_T = \bigoplus_{i=1}^{n} e_i$.

Agora, para cada $x \in T$, *podemos definir a aplicação* $\Psi : T \to T$ *por*

$$\Psi(x) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1 < \cdots < i_l} (-1)^{l+1} \beta_{g_{i_1}}(1_R) \cdots \beta_{g_{i_l}}(1_R)\beta_{g_{i_l}}(x).$$

A aplicação Ψ é claramente um $(T^G, T^G)-$homomorfismo de módulos e $\Psi(1_R) = 1_T$. Por um processo de indução análogo ao de cima mostramos que $\Psi(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{g_j}(x)e_j$.

Lema 4.3. *Seja α uma ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra R com envolvente (T, β). Então*

(a) $tr_G : T \to T^G$ e $tr_\alpha : R \to R^\alpha$ são homomorfismos de $(T^G, T^G)-$ bimódulo e $(R^\alpha, R^\alpha)-$bimódulo, respectivamente.

(b) $tr_\alpha(x) = tr_G(x)1_R$, para cada $x \in R$.

(c) $tr_G(T) = tr_G(R)$.

Demonstração. (a) Como α_g e β_g são homomorfismos de $K-$álgebras, para todo $g \in G$, segue imediatamente que $tr_G(x + ky) = tr_G(x) + ktr_G(y)$ e $tr_\alpha(a + kb) = tr_\alpha(a) + ktr_\alpha(b)$, para quaisquer $x, y \in T$, $a, b \in R$ e $k \in K$. desde que $\alpha_g(z1_{g^{-1}}) = z1_g$ e $\beta_g(w) = w$, para quaisquer $z \in R^\alpha$, $w \in T^G$ e $g \in G$, temos que $tr_G(xw) = tr_G(x)w$, $tr_G(wx) = wtr_G(x)$, $tr_\alpha(zy) = ztr_\alpha(y)$ e $tr_\alpha(yz) = tr_\alpha(y)z$, para todos $x \in T$, $y \in R$, $z \in R^\alpha$ e $w \in T^G$ e isto mostra o item (a).

(b) Como β é uma envolvente para α temos que para todo $x \in R$

$$tr_\alpha(x) = \sum_{g\in G} \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} \beta_g(x1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} \beta_g(x)\beta_g(1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G} \beta_g(x)1_g1_R = tr_G(x)1_R,$$

onde a última igualdade segue de $\beta_g(x)1_R \in \beta_g(R) \cap R = D_g$.

(c) Dado $y \in tr_G(T)$, existe $x \in T$ tal que $y = tr_G(x)$. Como T é gerado por $\bigcup_{g\in G} \beta_G(R)$ temos que $x = \sum_{i=1}^{k} \beta_{g_i}(r_i)$, com $r_1, ..., r_k \in R$. Assim,

$$\begin{aligned} tr_G(x) &= \sum_{h\in G} \beta_h(x) \\ &= \sum_{h\in G}\sum_{i=1}^{k} \beta_h(\beta_{g_i}(r_i)) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{h\in G} \beta_{hg_i}(r_i)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{f\in G} \beta_f((r_i)) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (tr_G(r_i)) \in tr_G(R). \end{aligned}$$

Logo, $tr_G(T) \subset tr_G(R)$. Como a inclusão contrária é imediata temos a igualdade. □

Proposição 4.4. *tr_G é sobrejetora se, e somente se, tr_α o é.*

Demonstração. Pelo item (a) do Lema **??** é suficiente mostrar que $1_T \in tr_G(T)$ e $1_R \in tr_\alpha(R)$. Suponhamos que tr_G seja sobrejetora. Então existe $c \in T$ tal que $1_T = tr_G(c)$. Segue do Lema **??** (c) que existe $d \in R$ tal que $tr_G(c) = tr_G(d)$ e com isso, pelo **??** (b)

$$1_R = 1_T 1_R = tr_G(d)1_R = tr_\alpha(d) \in tr_\alpha(R).$$

Por outro lado, se tr_α é sobrejetora, existe $d' \in R$ tal que $1_R = tr_\alpha(d')$. Disso e do Lema **??** (b) $1_R = tr_G(d')1_R$. Usando a aplicação Ψ definida na Observação **??** temos que $\Psi(1_R) = 1_T$ e temos que

$$1_T = \Psi(1_R) = \Psi(tr_G(d')1_R) = \Psi(1_R)tr_G(d') = tr_G(d') \in tr_G(T).$$

□

Lema 4.5. *São verdadeiras as seguintes afirmações:*

(i) Se $tr_\alpha(1_R)$ é invertível em R, então existe $c \in R^\alpha$ tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$;

(ii) $tr_\alpha(x) = tr_\alpha(\alpha_g(x))$, para todo $g \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$.

Demonstração. (i) Escreva $b = tr_\alpha(1_R)$ e por hipótese, $b^{-1} \in R$ e $bb^{-1} = 1_R$. Seja $c = b^{-1}$. Então, para cada $g \in G$, $\alpha_g(cb1_{g^{-1}}) = \alpha_g(1_R 1_{g^{-1}}) = 1_g$, logo $\alpha_g(c1_{g^{-1}})\alpha_g(b1_{g^{-1}}) = 1_g$. Como $\alpha_g(b1_{g^{-1}}) = b1_g$, para todo $g \in G$, temos que $\alpha_g(c1_{g^{-1}})b = 1_g$, ou seja, $\alpha_g(c1_{g^{-1}}) = b^{-1}1_g = c1_g$. Logo, $c \in R^\alpha$ e portanto, $tr_\alpha(c) = ctr_\alpha(1_R) = cb = 1_R$.

(ii) Para cada $g \in G$ e $x \in D_{g^{-1}}$ temos que

$$\begin{aligned}
tr_\alpha(\alpha_g(x)) &= \sum_{h \in G} \alpha_h(\alpha_g(x1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}) \\
&= \sum_{h \in G} \alpha_{hg}(x1_{g^{-1}h^{-1}})1_h \text{ pelo Lema ??(b)} \\
&= \sum_{u \in G} \alpha_u(x1_{u^{-1}})1_{ug^{-1}} \\
&= \sum_{u \in G} \alpha_u(x1_{u^{-1}})1_u 1_{ug^{-1}} \\
&= \sum_{u \in G} \alpha_u(x1_{u^{-1}})\alpha_u(1_{u^{-1}}1_{g^{-1}}) \text{ pelo Lema ??(a)} \\
&= \sum_{u \in G} \alpha_u(x1_{u^{-1}}) \\
&= tr_\alpha(x).
\end{aligned}$$

□

A demonstração do próximo resultado foi inspirada no , Ψ denota a aplicação definida na Observação **??**.

Teorema 4.6. *Seja α uma ação parcial de um grupo finito G sobre uma $K-$álgebra R com envolvente (T, β). Então a restrição da aplicação Ψ ao subanel R^α é um isomorfismo entre R^α e T^G. Em particular, $T^G 1_R = R^\alpha$.*

Demonstração. Escrevendo $G = \{g_1 = 1_G, g_2, \ldots, g_n\}$, segue da Observação **??** que $\Psi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(x)e_i$, para todo $x \in T$. Denotaremos sua restrição ao conjunto R^α também por Ψ. Como os elementos $e_i's$ são idempotentes ortogonais, temos que

$$\Psi(xy) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(xy)e_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(x)\beta_{g_i}(y)e_i = \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_{g_k}(x)e_k\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{g_j}(y)e_j\right) = \Psi(x)\Psi(y),$$

para todo $x, y \in R^\alpha$. Logo, Ψ é um homomorfismo de anéis.

Notamos que

$$\beta_f(y)1_R = \beta_f(y)\beta_f(1_R)1_R = \beta_f(y)1_f = \alpha_f(y1_{f^{-1}}) = y1_f = y\beta_f(1_R), \tag{4.1}$$

para todo $y \in R^\alpha$ e $f \in G$. Tomando $f = h^{-1}g$ na igualdade (**??**) obtemos que

$$\beta_g(x)\beta_h(1_R) = \beta_g(1_R)\beta_h(x), \tag{4.2}$$

para todo $h, g \in G$ e todo $x \in R^\alpha$.

Agora, consideramos um conjunto $\{i_1, \ldots, i_k\} \subset \{1, \ldots, n\}$, com $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. Aplicando β_g em cada elemento da sequência $(\beta_{g_{i_1}}(1_R), \ldots, \beta_{g_{k-1}}(1_R), \beta_{g_{i_k}}(x))$, para qualquer $g \in G$ e $x \in R^\alpha$, obtemos uma nova sequência de tamanho k e índices $j_1, \ldots, j_k$ no conjunto $\{1, \ldots, n\}$. Reordenando esta sequência de forma crescente (e usando a igualdade **??** caso seja necessário para manter β aplicado em x com "maior" índice) obtemos a sequência $(\beta_{g_{u_1}}(1_R), \ldots, \beta_{g_{u-1}}(1_R), \beta_{g_u}(x))$ com $1 \leq u_1 < \cdots < u_k \leq n$. Assim, segue das contas feitas acima que

$$\begin{aligned}
\beta_g(\Psi(x)) &= \beta_g\left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_l} (-1)^{l+1}\beta_{g_{i_1}}(1_R)\cdots\beta_{g_{i_l}}(1_R)\beta_{g_{i_l}}(x)\right) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{i_1<\cdots<i_l} (-1)^{l+1}\beta_g(\beta_{g_{i_1}}(1_R)\cdots\beta_{g_{i_l}}(1_R)\beta_{g_{i_l}}(x)) \\
&= \sum_{l=1}^{n} \sum_{u_1<\cdots<u_l} (-1)^{l+1}\beta_{g_{u_1}}(1_R)\cdots\beta_{g_{u_l}}(1_R)\beta_{g_{u_l}}(x) \\
&= \Psi(x)
\end{aligned}$$

para todo $x \in R^\alpha$ e $g \in G$. Consequentemente $\Psi(R^\alpha) \subset T^G$. Definindo

$$\Phi : T^G \to R^\alpha$$

$$x \mapsto x1_R$$

temos pela igualdade (**??**) que $\Phi(T^G) = T^G 1_R \subset R^\alpha$,

$$\alpha_g(x1_R1_{g^{-1}}) = \beta_g(x1_R1_{g^{-1}}) = x\beta_g(1_{g^{-1}}) = x1_R1_g,$$

para todo $x \in T^G$ e $g \in G$. Portanto, Φ está bem definida e é rotineira a verificação de que Φ é um homomorfismo de anéis.

Para cada $x \in T^G$ e $y \in R^\alpha$ temos que

$$\Psi \circ \Phi(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(x1_R)e_i = x\sum_{i=1}^{n} \beta_{g_i}(1_R)e_i = x\Psi(1_R) = x$$

e $\Phi \circ \Psi(y) = \Psi(y)1_R = y\Psi(1_R) = y1_T = y$. Assim, T^G e R^α são isomorfos.

Vamos mostrar a última afirmação. De fato, pela demonstração acima temos a inclusão $T^G 1_R \subset R^\alpha$. Dado $x \in R^\alpha$ tem-se pela igualdade (**??**) que $x = 1_T x = \Psi(1_R)x = \Psi(x)1_R \in T^G 1_R$. Logo, $T^G 1_R = R^\alpha$. $\square$

4.2 Extensões de Galois Parciais

O foco principal desta seção é definir extensão de Galois parcial para um anel e apresentar condições para que um anel seja ou não uma extensão deste tipo. O Teorema **??** é o principal resultado desta seção, onde apresentamos condições necessárias e suficientes para que uma extensão de anéis seja uma extensão parcial de Galois. Nesta seção G denotará sempre um grupo finito e assumimos que toda ação parcial $\alpha = \{\alpha_g : D_{g^{-1}} \to D_g \mid g \in G\}$ possui uma ação envolvente.

Sejam T um anel, B um subanel de T, G um grupo finito e β uma ação (global) via $B-$automorfismos de G sobre T. Dizemos que T é uma **extensão de Galois de** B se:

i) $B = T^G$;

ii) Existem $x_i,\ y_i \in T$, com $i = 1, \dots, n$, satisfazendo:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\beta_g(y_i) = \begin{cases} 1_T, & se\ g = 1_G \\ 0, & se\ g \neq 1_G. \end{cases}$$

Os elementos x_i, y_i são chamados **coordenadas de Galois de** T. Agora, consideramos α uma ação parcial de um grupo G em uma $K-$álgebra R.

Definição 4.7. *Uma $K-$álgebra R é dita ser uma* ***extensão de Galois parcial*** *(ou extensão $\alpha-$parcial de Galois) de uma subálgebra A de R se:*

i) $A = R^{\alpha}$*;*

ii) Existem $x_i,\ y_i \in R$*, com* $i = 1, \ldots, n$*, satisfazendo*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}}) = \begin{cases} 1_R, & se\ g = 1_G \\ 0, & se\ g \neq 1_G. \end{cases}$$

Os elementos $x_i,\ y_i$ *são chamados* ***coordenadas de Galois parciais de*** R*.*

Sejam β uma ação (global) de um grupo G sobre um anel T e $e \in T$ um idempotente central. Pelo Exemplo **??**, β induz uma ação parcial α de G sobre o ideal $R = eT$ de T. O próximo resultado dá uma condição suficiente para que $R = eT$ seja uma $\alpha-$extensão parcial de Galois de R^{α}.

Proposição 4.8. *Com as notações acima, se* T *é uma extensão de Galois de* T^G*, então* R *é uma extensão* $\alpha-$*parcial de Galois de* R^{α}*.*

Demonstração. Sejam $x_i, y_i \in T$ com $i = 1, \ldots, n$ coordenadas de Galois de T sobre T^G. É suficiente mostrar que $ex_i, ey_i \in R$ são coordenadas de Galois parciais de R sobre R^{α}. Como $1_R = e$, $\sum_{i=1}^{n} ex_i ey_i = e\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = e1_T = e$ e

$$\sum_{i=1}^{n} ex_i \alpha_g(ey_i 1_{g^{-1}}) = e\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\right]\alpha_g(e1_{g^{-1}}) = e\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \beta_g(y_i 1_{g^{-1}})\right]\beta_g(e1_{g^{-1}}) = 0,$$

para cada $1_G \neq g \in G$, temos o resultado. □

Para a demonstração do próximo teorema consideramos os idempotentes ortogonais centrais e a aplicação Ψ definidos na Observação **??**.

Teorema 4.9. *Sejam* α *uma ação parcial de um grupo* G *sobre uma* $K-$*álgebra* R*,* (T, β) *uma ação envolvente para* α *e considere os anéis fixos* R^{α} *e* T^G*. São equivalentes as afirmações:*

(a) T *é uma extensão de Galois de* T^G*;*

(b) R *é uma extensão* $\alpha-$*parcial de Galois de* R^{α}*.*

Demonstração. Pela Proposição **??** basta mostrar que (b) implica (a).

Suponhamos que R seja uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α, com $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$ as coordenadas de Galois parciais de R sobre R^α. Escrevendo $G = \{g_1 = e, g_2, ..., g_n\}$, consideramos os elementos $a_{ij} = \beta_{g_j}(x_i)e_j$ e $b_{ij} = \beta_{g_j}(y_i)e_j$, para todo $i = 1, ..., m$ e $j = 1, ..., n$, onde $e_i's$ são os idempotentes centrais usados na Observação **??**. Então,

$$\begin{aligned}
\sum_j \sum_i a_{ij} b_{ij} &= \sum_j \sum_i \beta_{g_j}(x_i)\beta_{g_j}(y_i)e_j \\
&= \sum_j \sum_i \beta_{g_j}(x_i y_i)e_j \\
&= \sum_j \beta_{g_j}\left(\sum_i x_i y_i\right) e_j \\
&= \sum_j \beta_{g_j}(1_R)e_j \\
&= \Psi(1_R) \\
&= 1_T.
\end{aligned}$$

Para simplificar o restante da demonstração, definimos $\theta_j = (1_T - 1_R)\cdots(1_T - \beta_{g_{j-1}}(1_R))$ e $g_{jl} := g_j^{-1} g_l g_j$, para todo $j, l = 2, ..., n$. Então, $\beta_{g_{jl}} = \beta_{g_j^{-1} g_l g_j} = \beta_{g_j}^{-1} \circ \beta_{g_l} \circ \beta_{g_j}$ e $e_j = \theta_j \beta_{g_j}(1_R)$. Assim, para cada $g_l \neq 1_G$, temos que

$$\begin{aligned}
\sum_j \sum_i a_{ij} \beta_{g_l}(b_{ij}) &= \sum_j \sum_i \beta_{g_j}(x_i)e_j \beta_{g_l}(\beta_{g_j}(y_i)e_j) \\
&= \sum_j \sum_i \beta_{g_j}(x_i)\beta_{g_l}(\beta_{g_j}(y_i))\beta_{g_l}(e_j)e_j \\
&= \sum_j \sum_i \beta_{g_j}(x_i)\beta_{g_l}(\beta_{g_j}(y_i)\beta_{g_j}(1_R))\beta_{g_l}(e_j)e_j \\
&= \sum_j \left[\beta_{g_j}\left(\sum_i x_i \beta_{g_{jl}}(y_i)1_R\right) \theta_j \beta_{g_l}(e_j)\right] \\
&= \sum_j \left[\beta_{g_j}\left(\sum_i x_i \alpha_{g_{jl}}(y_i 1_{g_{jl}^{-1}})\right) \theta_j \beta_{g_l}(e_j)\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

pois $\alpha_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_g(a1_{g^{-1}}) = \beta_g(a)\beta_g(1_{g^{-1}}) = \beta_g(a)1_R$, para todo $a \in R$. Isto conclui a demonstração. $\square$

Para provar o principal resultado desta seção precisamos da definição de módulos "projetivos fieis" e de um resultado sobre tais módulos.

Definição 4.10. *Um $R-$módulo à esquerda projetivo P é dito* ***projetivo fiel*** *se $IP \neq P$, para todo ideal I de R.*

Teorema 4.11. *Sejam $R \subset T$ anéis, com T um $R-$módulo à esquerda projetivo fiel. Então R é um somando direto de T.*

Demonstração. Ver Proposição 2.11.29 na página 279 de [?]. □

Agora, faremos algumas construções a fim de enunciar o próximo teorema. Sejam R um anel, α uma ação parcial de um grupo G sobre a $K-$álgebra R ($K \subset Z(R)$) e $S = R *_\alpha G$ o skew anel de grupo parcial. Note que S é um $R-$módulo à esquerda, pois R é um subanel de S e S é associativo, uma vez que estamos assumindo que toda ação parcial possui uma envolvente.

Para cada $x = \sum\limits_{g \in G} a_g \delta_g \in S$, considere a aplicação

$$\begin{aligned} \Lambda_x : R &\to R \\ z &\mapsto \sum_{g \in G} a_g \alpha_g (z 1_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

Com isso, podemos definir a aplicação $\Lambda : R *_\alpha G \to End(_K R)$ dada por $\Lambda(x) = \Lambda_x$, para todo $x \in S$.

Como $\Lambda(r(a_g\delta_g)) = \Lambda(r\delta_{1_G} a_g \delta_g) = \Lambda((ra_g)\delta_g)$, para todo $r \in R$, $a_g \in D_g$ e $g \in G$, temos que

$$\Lambda(r(a_g\delta_g))(z) = \Lambda((ra_g)\delta_g)(z) = ra_g\alpha_g(z1_{g^{-1}}) = r[a_g\alpha_g(z1_{g^{-1}})] = [r\Lambda(a_g\delta_g)](z),$$

para todo $z \in R$. A verificação dos demais axiomas de homomorfismo são verificados imediatamente. Logo, Λ é um homomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

A demonstração de que a aplicação Λ é um homomorfismo de $K-$álgebras é imediata uma vez que a seguinte igualdade $\Lambda(a_g\delta_g b_h\delta_h) = \Lambda(a_g\delta_g) \circ \Lambda(b_h\delta_h)$, para todos $g, h \in G$, é satisfeita.

De fato, para quaisquer $g, h \in G$ e $z \in R$

$$\begin{aligned}
\Lambda(a_g\delta_g b_h\delta_h)(z) &= \Lambda(a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\delta_{gh})(z) \\
&= a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\alpha_{gh}(z1_{h^{-1}g^{-1}}) \\
&= a_g\alpha_g(b_h1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(z1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) \\
&= a_g\alpha_g(b_h\alpha_h(z1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) \\
&= \Lambda(a_g\delta_g)(b_h\alpha_h(z1_{h^{-1}})) \\
&= \Lambda(a_g\delta_g)(\Lambda(b_h\delta_h)(z)).
\end{aligned}$$

Seguindo a notação acima, dado um $R *_\alpha G-$módulo à esquerda M, definimos o conjuntos dos elementos de M invariantes por α como sendo

$$M^G = \{m \in M \mid (1_g\delta_g)m = 1_g m, \ \forall g \in G\}.$$

Como R pode ser mergulhado em $R *_\alpha G$, temos que M é também um $R-$módulo à esquerda. Observamos que M^G pode ser visto como $K-$módulo.

A $K-$álgebra R pode ser considerada um $R *_\alpha G-$módulo à esquerda via Λ, isto é, $(a_g\delta_g)r = \Lambda(a_g\delta_g)(r) = a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}})$, para todo $r \in R$. Sendo assim, o conjunto dos elementos invariante definido acima $R^G = \{x \in R \mid \alpha_g(x1_{g^{-1}}) = 1_g x, \ \forall g \in G\}$ coincide com o subanel R^α definido no início deste capítulo, no caso em que $M = R$.

Com as observações e definições anteriores, podemos enunciar e provar o seguinte resultado.

Teorema 4.12 (A. Paques; M. Dokuchaev; M. Ferrero)**.** *Seja α uma ação parcial de um grupo finito G em uma $K-$álgebra R. São equivalente as afirmações:*

(a) R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de K;

(b) R é um $K-$módulo projetivo finitamente gerado e $\Lambda : R *_\alpha G \to End_K(R)$ é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda e um isomorfismo de $K-$álgebras;

(c) R é um $K-$módulo projetivo finitamente gerado e para todo $R *_\alpha G-$módulo à esquerda M a aplicação $\mu : R \otimes_K M^G \to M$, dada por $\mu(r \otimes m) = rm$, para todo $m \in M$ e $r \in R$, é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda;

(d) R é um $K-$módulo projetivo finitamente gerado e $\psi : R \otimes R \to \prod_{g\in G} D_g$, dado por $\psi(x \otimes y) = (x\alpha_g(y1_{g^{-1}}))_{g\in G}$, para quaisquer $x, y \in R$, é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Demonstração. $(a) \Rightarrow (b)$ Suponha R uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de K, então $K = R^\alpha$ e existem as coordenadas de Galois parciais de R sobre R^α $x_i, y_i \in R$, com $i = 1, ..., n$. Defina, para cada $i = 1, ..., n$, $f_i(x) = tr_\alpha(y_i x)$, para todo $x \in R$. Pelo Lema **??** $f_i \in Hom_{R^\alpha}(R, R^\alpha)$, para todo $i = 1, ..., n$. Note que para cada $x \in R$ temos que

$$\sum_{i=1}^{n} x_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i\alpha_g(y_i x 1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\right]\alpha_g(x1_{g^{-1}}) = x, \tag{4.3}$$

onde última igualdade é válida pois x_i e y_i são coordenadas de Galois parciais de R sobre R^α. Assim, pelo Lema da Base Dual (Teorema **??**) R é um $K-$módulo projetivo finitamente gerado.

Resta mostrar que Λ é um isomorfismo. De fato, Λ é sobrejetora, dado $h \in End_K(R)$ escolhemos $w = \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\delta_g \in R *_\alpha G$,. Então, pela igualdade (**??**) e pelo fato de $tr_\alpha(R) \subset R^\alpha$ obtemos, para todo $x \in R$, que

$$\begin{aligned}
\Lambda(w)(x) &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\alpha_g(y_i 1_{g^{-1}})\alpha_g(x1_{g^{-1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(h(x_i)\left[\sum_{g\in G}\alpha_g(y_i x 1_{g^{-1}})\right]\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} h(x_i) tr_\alpha(y_i x) \\
&= h(\sum_{i=1}^{n} x_i tr_\alpha(y_i x)) = h(x).
\end{aligned}$$

Isso mostra que Λ é sobrejetora.

Agora, seja $v = \sum_{h\in G} x_h\delta_h \in Ker(\Lambda)$. Então, $\Lambda(v)(x_i) = 0$, para todo $i, ..., n$. Pelo Lema **??** e o fato de que x_i e y_i são coordenadas de Galois parciais de R sobre R^α, temos que

$$\begin{aligned}
0 &= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n}\Lambda(v)(x_i)\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h\in G}x_h\alpha_h(x_i1_{g^{-1}})\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}x_h\alpha_h\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_{h^{-1}}(\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})1_h)\right)\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{h\in G}x_h\alpha_h\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\alpha_{h^{-1}g}((y_i1_{g^{-1}h})1_{g^{-1}})\right)\delta_g \\
&= \sum_{h\in G}x_h\delta_h = v.
\end{aligned}$$

Portanto, Λ é um isomorfismo.

$(b) \Rightarrow (c)$ Seja M um $R *_\alpha G-$módulo à esquerda. Então, como R é um $K-$módulo projetivo finitamente gerado, segue do Lema da Base Dual (Teorema **??**) que existem $x_i \in R$ e $f_i \in Hom_K(R,K)$, com $i = 1,...,l$, tais que $\sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x) = x$, para todo $x \in R$.

Como Λ é um isomorfismo e cada f_i pode ser visto como um elemento de $Hom_K(R,R)$, podemos escrever $a_i = \Lambda^{-1}(f_i) \in R *_\alpha G$, para todo $i = 1,...,l$. Note que:

(1) $a_i m \in M^G$, para todo $m \in M$ e $i = i,...,l$. De fato, para todos $x \in R$, $g \in G$ e $i = 1,...,l$, temos

$$\begin{aligned}
\Lambda(1_g\delta_g a_i)(x) &= \Lambda(1_g\delta_g)\left(\Lambda(a_i)(x)\right) \\
&= \Lambda(1_g\delta_g)(f_i(x)) \\
&= \alpha_g(f_i(x)1_{g^{-1}}) \\
&= f_i(x)\alpha_g(1_{g^{-1}}), \text{ pois } f_i(x) \in K \\
&= f_i(x)1_g \\
&= 1_g f_i(x) \\
&= 1_g\Lambda(a_i)(x) \\
&= \Lambda(1_g a_i)(x).
\end{aligned}$$

Logo, $1_g\delta_g a_i = 1_g a_i$ e portanto $1_g\delta_g a_i m = 1_g a_i m$, para todo $m \in M$ e $i = i,...,l$. Assim, a afirmação (1) segue.

(2) $\sum_{i=1}^{l} x_i a_i = 1_R\delta_{1_G}$. Com efeito, para cada $x \in R$ temos que

$$\Lambda\left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_i\right)(x) = \sum_{i=1}^{l} x_i\Lambda(a_i)(x) = \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(x) = x = \alpha_{1_G}(x1_G) = \Lambda(1_R\delta_{1_G})(x).$$

Como Λ é um isomorfismo, a igualdade segue.

(3) $w(xm) = \Lambda(w)(x)m$, para todos $m \in M$, $x \in R$ e $w = \sum_{g\in G} y_g\delta_g \in R *_\alpha G$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
w(xm) &= (w(x\delta_{1_G}))m \\
&= \left(\sum_{g\in G} y_g\delta_g x\delta_{1_G}\right) m \\
&= \left(\sum_{g\in G} \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(y_g)x1_{g^{-1}})\delta_g\right) m \\
&= \sum_{g\in G} y_g\alpha_g(x1_{g^{-1}})1_g\delta_g m \\
&= \left(\sum_{g\in G} y_g\alpha_g(x1_{g^{-1}})\right) m \\
&= \Lambda(w)(x)m.
\end{aligned}$$

Por (1) a aplicação

$$\begin{aligned}
\nu : M &\to R \otimes M^G \\
m &\mapsto \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes a_i m
\end{aligned}$$

está bem definida. É fácil ver que $\nu(m + m') = \nu(m) + \nu(m')$, para todos $m, m' \in M$. Vamos mostrar que μ é uma bijeção; e para isto, mostraremos que ν é sua inversa (apenas como função). Como ν "preserva" somas, basta mostrar que $\nu \circ \mu = Id_{R\otimes M^G}$ nos tensores elementares. De fato, para quaisquer $r \in R$, $m \in M$ e $m' \in M^G$

$$\begin{aligned}
\nu \circ \mu(r \otimes m') &= \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes a_i(rm') \\
&= \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes \Lambda(a_i)(r)m', \text{ por (3)} \\
&= \sum_{i=1}^{l} x_i \otimes f_i(r)m' \\
&= \sum_{i=1}^{l} x_i f_i(r) \otimes m' \quad = r \otimes m'
\end{aligned}$$

e por (2) temos que

$$\mu \circ \nu(m) = \mu\left(\sum_{i=1}^{l} x_i \otimes a_i m\right) = \sum_{i=1}^{l} x_i a_i m = \left(\sum_{i=1}^{l} x_i a_i\right) m = (1_R \delta_{1_G}) m = m.$$

Portanto, μ é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

$(c) \Rightarrow (d)$ Seja $\mathcal{F} = \{f : G \to R \mid f$ função e $f(g) \in D_g, \forall g \in G\}$. É fácil ver que $\mathcal{F}$ é não vazio e que é um $R-$módulo à esquerda com as operações: $(f + f')(g) = f(g) + f'(g)$ e $[rf](g) = rf(g)$, para quaisquer $f, f' \in \mathcal{F}$, $r \in R$ e $g \in G$. É indubitável que a aplicação

$$\begin{aligned} \lambda : \mathcal{F} &\to \textstyle\prod_{g \in G} D_g \\ f &\mapsto (f(g))_{g \in G} \end{aligned}$$

é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Note que $\mathcal{F}$ também possui estrutura de $R *_\alpha G-$módulo à esquerda definindo a seguinte $R *_\alpha G-$ação em $\mathcal{F}$ (que se estende linearmente): $[(x_g\delta_g)f](h) = x_g\alpha_g(f(g^{-1}h)1_{g^{-1}})$, para todo $f \in \mathcal{F}$ e todos $g, h \in G$, $x_g \in D_g$. Como as outras propriedades de módulo são de fácil verificação, mostraremos somente que $(ww')f = w(w'f)$, para todos $f \in \mathcal{F}$ e $w, w' \in R *_\alpha G$. De fato, para todo $z \in G$

$$\begin{aligned} [(x_g\delta_g x_h\delta_h)f](z) &= [\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x_g)x_h)\delta_{gh}f](z) \\ &= x_g\alpha_g(x_h 1_{g^{-1}})\alpha_{gh}(f(h^{-1}g^{-1}z)1_{h^{-1}g^{-1}}) \\ &= x_g\alpha_g(x_h 1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(f(h^{-1}g^{-1}z)1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}), \text{ Pelo Lema } \mathbf{??} \\ &= x_g\alpha_g(x_h\alpha_h(f(h^{-1}g^{-1}z)1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) \\ &= (x_g\delta_g)(x_h\alpha_h(f(h^{-1}z)1_{h^{-1}})) \\ &= [(x_g\delta_g)(x_h\delta_h)f](z). \end{aligned}$$

Assim, $[(x_g\delta_g x_h\delta_h)f] = [(x_g\delta_g)(x_h\delta_h)f]$, para todos $g, h \in G$ e $f \in \mathcal{F}$.

Segue por hipótese que $R \otimes \mathcal{F}^G$ e $\mathcal{F}$ são isomorfos como $R-$módulos à esquerda por μ. Além disso, λ define um isomorfismo entre $\mathcal{F}$ e $\prod\limits_{g \in G} D_g$. Desta maneira, $\overline{\mu}(x \otimes f) : R \otimes \mathcal{F}^G \to \prod\limits_{g \in G} D_g$ dada por $\overline{\mu} = \lambda \circ \mu(x \otimes f) = (xf(g))_{g \in G}$, para todos $x \in R$ e $f \in \mathcal{F}$, é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

Vamos mostrar que $R \simeq \mathcal{F}^G$ como $K-$módulos. Defina para cada $x \in R$

$$\begin{aligned} \upsilon_x : G &\to R \\ g &\mapsto \alpha_g(x1_{g^{-1}}). \end{aligned}$$

É fácil ver que cada υ_x é uma função. Temos pelo Lema **??** que para cada $g, h \in G$ e cada $x \in R$

$$((1_g\delta_g)\upsilon_x)(h) = \alpha_g(\upsilon_x(g^{-1}h)1_{g^{-1}}) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}h}(x1)1_{h^{-1}g}) = \alpha_h(x1_{g^{-1}})1_g = 1_g\upsilon_x(h).$$

Isto mostra que $(1_g\delta_g)\upsilon_x = 1_g\upsilon_x$ e segue que $\upsilon_x \in \mathcal{F}^G$, para todo $x \in R$ e $g \in G$. Logo, a aplicação $\upsilon : R \to \mathcal{F}^G$ dada por $\upsilon(x) = \upsilon_x$, para todo $x \in R$, está bem definida.

Vamos verificar que υ é um isomorfismo de $K-$módulos. É fácil ver que υ é um monomorfismo de $R-$módulos à esquerda. Dado $f \in \mathcal{F}^G$, temos que $1_g f(h) = \alpha_g(f(g^{-1}h)1_{g^{-1}})$, para todo $g, h \in G$. Em particular, para $g = h$ temos que $f(g) = 1_g f(g) = \alpha_g(f(1_G)1_{g^{-1}})$ e desta forma $f = \upsilon(f(1_G))$.

Notamos que $\psi = \upsilon \circ \overline{\mu}$. Como υ e $\overline{\mu}$ são isomorfismos temos que ψ é um isomorfismo de $R-$módulos à esquerda.

$(d) \Rightarrow (a)$ Iremos mostrar que $R^\alpha = K$. De fato, a inclusão $K \subset R^\alpha$ é imediata. Notamos que para cada $x \in R^\alpha$, tem-se $\psi(x \otimes 1_R) = (x\alpha_g(1_{g^{-1}}))_{g\in G} = (x1_g)_{g\in G} = (1_R\alpha_g(x1_{g^{-1}}))_{g\in G} = \psi(1_R \otimes x)$, logo $x \otimes 1_R = 1_R \otimes x$. Como R é um $K-$módulo projetivo fiel, obtemos do Teorema **??** que K é um somando direto de R e assim existe um $K-$submódulo M de R tal que $R = K \oplus M$. Observamos que $R \otimes R = (K \otimes K) \oplus (K \otimes M) \oplus (M \otimes K) \oplus (M \otimes M)$. Dado $z \in R^\alpha$ temos que $z = k + m$, para algum $k \in K$ e $m \in M$. Pelo fato que $z \otimes 1_R = 1_R \otimes z$ temos que $m \otimes 1_R = 1_R \otimes m \in (M \otimes K) \cap (K \otimes M) = 0$. Logo, $m \otimes 1_R = 0$ e segue que $0 = \psi(m \otimes 1_R) = (m1_g)_{g\in G}$, para todo $g \in G$. Em particular, para $g = 1_G$, $m = 0$ e $z = k$, mostrando a igualdade desejada.

Observamos que a menos de reordenação, podemos considerar que a primeira parcela do produtório $\prod_{g\in G} D_g$ é D_{1_G}. Considere $(1_R, 0, ..., 0) \in \prod\limits_{g\in G} D_g$. Como ψ é um isomorfismo, existe $w_0 = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i \in R \otimes R$ tal que $\psi(w_0) = (1_R, 0, ..., 0)$, segue que

$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_g(b_i 1_{g^{-1}}) = 0$, para cada $g \neq 1_G$. □

4.3 Um Contexto de Morita para R^α e $R *_\alpha G$

Seja α uma ação parcial de um grupo finito G sobre uma anel R com envolvente (T, β). Nosso intuito nesta seção é construir um contexto de Morita entre R^α e $R *_\alpha G$, isto é, uma sêxtupla $(R^\alpha, S = R *_\alpha G, V, W, \Gamma, \Gamma')$, onde $V = R$, visto como $(R^\alpha, S)-$bimódulo, $W = R$, visto como $(S, R^\alpha)-$bimódulo, $\Gamma : V \otimes_S W \to R^\alpha$ e $\Gamma' : W \otimes_{R^\alpha} V \to S$.

Assumiremos a partir desta seção que todo grupo G é finito e que toda ação parcial α de um grupo G sobre um anel R admite ação envolvente (T, β). Com isso, temos que o anel $R *_\alpha G$ é um anel associativo com identidade. Note que R^α é um anel associativo com identidade, pois é um subanel de R. Denotaremos o anel $R *_\alpha G$ por S.

Nosso desafio é construir estruturas de bimódulos adequadas em R e definir as aplicações Γ e Γ' de forma a obter o contexto de Morita acima citado.

Note que R possui naturalmente estrutura de $(R^\alpha, R^\alpha)-$bimódulo via multiplicação de R. Construímos uma estrutura de $(S, R^\alpha)-$bimódulo em R definindo a $S-$ação à esquerda em R por: $(a\delta_g)r = a\alpha_g(r1_{g^{-1}})$, para todo $g \in G$, $a \in D_g$ e $r \in R$. É fácil ver que esta ação está bem definida. Para quaisquer $g, h \in G$, $a_g \in D_g$, $a_h \in D_h$ e $r \in R$ temos que

$$\begin{aligned}
(a_g\delta_g a_h\delta_h)r &= [a_g\alpha_g(a_h 1_{g^{-1}})\delta_{gh}]r \\
&= a_g\alpha_g(a_h 1_{g^{-1}})\alpha_{gh}(r1_{h^{-1}g^{-1}})1_g \\
&= a_g\alpha_g(a_h 1_{g^{-1}})\alpha_g(\alpha_h(r1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}), \text{ pelo Lema } \mathbf{??} \\
&= a_g\alpha_g(a_h\alpha_h(r1_{h^{-1}})1_{g^{-1}}) \\
&= [a_g\delta_g](a_h\alpha_h(r1_{h^{-1}})) \\
&= a_g\delta_g([a_h\delta_h]r).
\end{aligned}$$

Os demais axiomas de módulos são facilmente verificados. Logo, R possui estrutura de $S-$módulos à esquerda. Além disso, $a_g\delta_g[rx] = a_g\alpha_g(rx1_{g^{-1}}) = a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}})x = [a_g\delta_g r]x$, para todo $x \in R^\alpha$. Portanto, R é um $(S, R^\alpha)-$bimódulo.

Analogamente, R possui estrutura de $(R^\alpha, S)-$bimódulo definindo a $S-$ação à direita em R por: $r(a_g\delta_g) = \alpha_{g^{-1}}(ra_g)$, para quaisquer $r \in R$, $a_g \in D_g$ e $g \in G$.

Agora definimos as aplicações Γ e Γ', respectivamente, por:

$$\Gamma(x \otimes y) = tr_\alpha(xy) = \sum_{g \in G} \alpha_g(xy1_{g^{-1}}) \qquad \text{e} \qquad \Gamma'(x \otimes y) = \sum_{g \in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g,$$

para todos $x, y \in R$.

Proposição 4.13. *As aplicações Γ e Γ' dadas acima estão bem definidas e são homomorfismos de $(R^\alpha, R^\alpha)-$bimódulo e $(S, S)-$bimódulo, respectivamente.*

Demonstração. Considere a aplicação

$$\begin{aligned} F : V \times W &\to R^\alpha \\ (x, y) &\mapsto tr_\alpha(xy). \end{aligned}$$

Note que para quaisquer $x, y \in R$, $a \in D_g$ e $g \in G$

$$x(a\delta_g y) = x[a\alpha_g(y1_{g^{-1}})] = xa\alpha_g(y1_{g^{-1}}) = \alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(xa)y) = (xa\delta_g)y. \tag{4.4}$$

Segue da igualdade (**??**) e do Lema **??** (ii) que para quaisquer $x, y \in R$, $a \in D_g$ e $g \in G$

$$\begin{aligned} F(x, a\delta_g y) &= tr_\alpha(x(a\delta_g y)) \\ &= tr_\alpha((xa\delta_g)y) \\ &= tr_\alpha(\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(xa)y)) \\ &= tr_\alpha(\alpha_{g^{-1}}(xa)y) \\ &= F(xa\delta_g, y). \end{aligned}$$

Das propriedades da aplicação traço parcial temos que F é linear nas duas variáveis. Portanto, F é $S-$balanceada e pela propriedade universal temos que a aplicação Γ existe. Analogamente, provamos que Γ' existe e está bem definida.

Agora, dados $x, y \in R$ e $r \in R^\alpha$, observamos que

$$r\Gamma(x \otimes y) = \sum_{g \in G} r\alpha_g(xy1_{g^{-1}}) = \sum_{g \in G} \alpha_g(rxy1_{g^{-1}}) = \sum_{g \in G} \alpha_g((rx)y1_{g^{-1}}) = \Gamma(rx \otimes y).$$

De forma similar, $\Gamma(x \otimes yr) = \Gamma(x \otimes y)r$. Assim, Γ é um $(R^\alpha, R^\alpha)-$homomorfismo.

Dados $x, y \in R$ e $a \in D_h$ temos

$$\begin{aligned}
a\delta_h\Gamma'(x \otimes y) &= \sum_{g\in G}[a\delta_h x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g] \\
&= \sum_{g\in G}\alpha_h(\alpha_{h^{-1}}(a)x\alpha_g(y1_{g^{-1}}))\delta_{hg} \\
&= \sum_{g\in G}a\alpha_h(x\alpha_g(y1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})\delta_{hg} \\
&= \sum_{g\in G}a\alpha_h(x1_{h^{-1}})\alpha_h(\alpha_g(y1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})\delta_{hg} \\
&= \sum_{g\in G}[a\alpha_h(x1_{h^{-1}})]\alpha_{hg}(y1_{(hg)^{-1}})\delta_{hg}, \text{ pelo Lema ??} \\
&= \sum_{\tau\in G}\quad [a\alpha_h(x1_{h^{-1}})]\ \alpha_\tau(y1_{\tau^{-1}})\ \delta_\tau \\
&= \Gamma'([a\delta_h]x \otimes y)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\Gamma'(x \otimes y)a\delta_h &= \sum_{g\in G}x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g a\delta_h \\
&= \sum_{g\in G}\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x\alpha_g(y1_{g^{-1}}))a)\delta_{gh} \\
&= \sum_{g\in G}\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(x1_g)ya1_{g^{-1}})\delta_{gh} \\
&= \sum_{g\in G}x\alpha_g(ya1_{g^{-1}})\delta_{gh} \\
&= \sum_{u\in G}x\alpha_{uh^{-1}}(ya1_{hu^{-1}})1_u\delta_u, \text{ onde } u = gh \\
&= \sum_{u\in G}x\alpha_u(\alpha_{h^{-1}}(ya1_h)1_{u^{-1}})\delta_u, \text{ pelo Lema ??} \\
&= \Gamma'(x \otimes \alpha_{h^{-1}}(ya)) \\
&= \Gamma'(x \otimes ya\delta_h)).
\end{aligned}$$

Portanto, Γ' é um $(S, S)-$homomorfismo. □

Observação 4.14. *Note que pela demonstração da proposição anterior, $\Gamma(V \otimes_S W)$ é um ideal de R^α e $\Gamma'(W \otimes_{R^\alpha} V)$ é um ideal de S.*

Observe que, dados $x, y, z \in R$, temos pelas $S-$ações à esquerda e à direita em R definidas no início desta seção que:

$$\begin{aligned} x\Gamma'(y\otimes z) &= \sum_{g\in G} xy\alpha_g(z1_{g^{-1}})\delta_g, \text{ pela definição de } \Gamma' \\ &= \sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(xy\alpha_g(z1_{g^{-1}})), \text{ pela } S\text{−ação em } R \\ &= \left(\sum_{g\in G} \alpha_{g^{-1}}(xy1_{g^{-1}})\right) z \\ &= \Gamma(x\otimes y)z \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \Gamma'(x\otimes y)z &= \sum_{g\in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\delta_g z, \text{ pela definição de } \Gamma' \\ &= \sum_{g\in G} x\alpha_g(y1_{g^{-1}})\alpha_g(z1_{g^{-1}}), \text{ pela } S\text{−ação em } R \\ &= x\left(\sum_{g\in G} \alpha_g(yz1_{g^{-1}})\right) \\ &= x\Gamma(y\otimes z). \end{aligned}$$

Isto demonstra o próximo resultado.

Proposição 4.15. *$x\Gamma'(y\otimes z) = \Gamma(x\otimes y)z$ e $\Gamma'(x\otimes y)z = x\Gamma(y\otimes z)$, para todos $x, y, z \in R$.*

Considere os homomorfismos naturais:

$\psi_1 : V \otimes_S S \to V$, dada por $\psi_1(v\otimes s) = vs$ para quaisquer $s \in S$ e $v \in V$;

$\psi_2 : R^\alpha \otimes_{R^\alpha} V \to V$, definida por $\psi_2(r\otimes v) = rv$, para quaisquer $r \in R^\alpha$ e $v \in V$;

$\psi_1' : W \otimes_{R^\alpha} R^\alpha \to W$, definida por $\psi_1'(w\otimes r) = wr$, para quaisquer $r \in R^\alpha$ e $w \in W$;

$\psi_2' : S \otimes_S W \to W$, dada por $\psi_2'(s\otimes w) = sw$, para quaisquer $s \in S$ e $w \in W$.

Uma consequência imediata dos resultados acima é o seguinte teorema.

Teorema 4.16. *A sêxtupla $(R^\alpha,\ S = R*_\alpha G,\ V,\ W,\ \Gamma,\ \Gamma')$ é um contexto de Morita.*

Demonstração. Basta mostrar que os diagramas comutam

$$\begin{tikzcd} V\otimes_S W\otimes_{R^\alpha} V \arrow[r, "\Gamma\otimes Id_V"] \arrow[d, "Id_V\otimes\Gamma'"'] & R^\alpha\otimes_{R^\alpha} V \arrow[d, "\psi_2"] \\ V\otimes_S S \arrow[r, "\psi_1"] & V \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} W\otimes_{R^\alpha} V\otimes_S W \arrow[r, "\Gamma'\otimes Id_W"] \arrow[d, "Id_W\otimes\Gamma"'] & S\otimes_S W \arrow[d, "\psi_2'"] \\ W\otimes_{R^\alpha} R^\alpha \arrow[r, "\psi_1'"] & W. \end{tikzcd}$$

De fato, para cada $v \otimes w \otimes v' \in V \otimes W \otimes V$ e cada $w \otimes v \otimes w' \in W \otimes V \otimes W$, temos:

1. $\psi_1 \circ Id_V \otimes \Gamma'(v \otimes w \otimes v') = \psi_1(v \otimes \Gamma'(w \otimes v')) = v\Gamma'(w \otimes v') = \Gamma(v \otimes w)v'$.

2. $\psi_2 \circ \Gamma \otimes Id_V(v \otimes w \otimes v') = \psi_2(\Gamma(v \otimes w) \otimes v') = \Gamma(v \otimes w)v'$.

3. $\psi_1' \circ Id_W \otimes \Gamma(w \otimes v \otimes w') = \psi_1'(w \otimes \Gamma(v \otimes w')) = w\Gamma(v \otimes w') = \Gamma'(w \otimes v)w'$.

4. $\psi_2' \circ \Gamma' \otimes Id_W(w \otimes v \otimes w') = \psi_2'(\Gamma'(w \otimes v) \otimes w') = \Gamma'(w \otimes v)w'$.

Os itens de um a quatro mostram que os diagramas comutam nos tensores elementares, todavia, as aplicações em questão preservam somas, logo temos o resultado. □

4.4 Ações Parciais: Equivalência de Morita

Estamos interessados nesta seção em explorar o contexto de Morita que construímos na seção anterior, a fim que estudarmos condições para que os anéis R^α e $R *_\alpha G$ sejam Morita equivalentes. Estas condições são apresentadas no teorema principal deste capítulo e dissertação. Portanto, assumiremos que todo grupo G é finito e que toda ação parcial α de um grupo G sobre um anel R admite ação envolvente.

Nesta seção usaremos argumentos similares ao utilizados em [?] e [?].

Definição 4.17. *Usando as notações da seção anterior, para cada $x \in W$ definimos o conjunto $x^\perp = \{y \in V \mid \Gamma'(x \otimes y) = 0\}$. Analogamente, para cada $y \in V$ definimos $y^\perp = \{x \in W \mid \Gamma'(x \otimes y) = 0\}$.*

Sejam R uma $K-$álgebra e α uma ação parcial de um grupo G sobre R. Um ideal à direita (à esquerda) I de R é dito ser $\alpha-$**invariante**, se $\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) \subset I \cap D_g$, para todo $g \in G$, ou equivalentemente, $\alpha_g(I \cap D_{g^{-1}}) = I \cap D_g$, para todo $g \in G$.

Lema 4.18. *Se $x \in W$, então $x^\perp$ é um ideal à direita de R, $\alpha-$invariante e está contido em $ann_R^d(x) = \{r \in R \mid xr = 0\}$. Analogamente, se $y \in V$, então $y^\perp$ é um ideal à esquerda de R, $\alpha-$invariante e está contido em $ann_R^e(y) = \{r \in R \mid ry = 0\}$.*

Demonstração. É fácil ver que os conjuntos $x^\perp$ e $y^\perp$ são ideais à direita e à esquerda, respectivamente.

Vamos mostrar que $x^\perp$ é $\alpha-$invariante. Com efeito, dado $w \in x^\perp$, seja $z_g = \alpha_g(w1_{g^{-1}})$ para cada $g \in G$. Como

$$\Gamma'(x \otimes z_g) = \Gamma'(x \otimes \alpha_g(w1_{g^{-1}})) = \Gamma'(x \otimes (w1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}})) = \Gamma'(x \otimes w)1_{g^{-1}}\delta_{g^{-1}} = 0,$$

temos que $z_g \in x^\perp$.

Para finalizar, vamos mostrar $x^\perp \subset ann^d_R(x)$. Como $0 = \Gamma'(x \otimes z) = \sum_{g\in G} x\alpha_g(z1_{g^{-1}})\delta_g$, para cada $z \in x^\perp$, temos em particular, que $xz = x\alpha_{1_G}(z1_{1_G})\delta_{1_G} = 0$ e portanto $z \in ann^d_R(x)$. A demonstração acerca de $y^\perp$ é análoga. $\square$

Sejam $G_1,\ G_2$ e G_3 são grupos abelianos (aditivos, não necessariamente finitos). Uma aplicação bilinear $F : G_1 \times G_2 \to G_3$ é dita **não degenerada** se, para todos $0 \neq a \in G_1$ e $0 \neq b \in G_2$, tem-se $F(a, G_2) \neq 0$ e $F(G_1, b) \neq 0$.

Lema 4.19. *Γ é não degenerada se, e somente se, Γ' o é.*

Demonstração. Provaremos somente uma implicação do lema, pois a outra é análoga. Suponha que Γ é não degenerada. Logo, para todo $0 \neq a \in V$ e $0 \neq b \in W$ tem-se $\Gamma(a \otimes w) \neq 0$ e $\Gamma(v \otimes b) \neq 0$, para algum $w \in W$ e $v \in V$. Pela Proposição **??** temos que $0 \neq \Gamma(a \otimes w) = 1_R\Gamma(a \otimes w) = \Gamma'(1_R \otimes a)w$ e $0 \neq \Gamma(v \otimes b) = \Gamma(v \otimes b)1_R = v\Gamma'(b \otimes 1_R)$. Portanto, $\Gamma'(W \otimes a) \neq 0$ e $\Gamma'(b \otimes V) \neq 0$. $\square$

Proposição 4.20. *As aplicações Γ e Γ' são não degeneradas.*

Demonstração. Pelo Lema **??**, basta mostrar que Γ' é não degenerada. Seja $x \in R - \{0\}$ qualquer. Como R tem unidade, temos que $ann^d_R(x) \neq R$ e segue do Lema **??** que $x^\perp \subset ann^d_R(x)$. Logo, existe $y \in V(= R)$ tal que $y \notin x^\perp$. Assim, $\Gamma'(x \otimes y) \neq 0$ e consequentemente $\Gamma'(x \otimes V) \neq 0$. Analogamente, $\Gamma'(W \otimes x') \neq 0$ para todo $x' \in R$ não nulo. Portanto, Γ' é não degenerada. $\square$

Sejam α um ação parcial de um grupo G sobre uma $K-$álgebra R e $S = R*_\alpha G$. Considere R^α com a multiplicação oposta de R, isto é, para cada $x, y \in R^\alpha$ o produto de x por y é definido por: $x \odot y = yx$.

Considere R^α com o produto acima e defina para cada $r \in R^\alpha$ a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_r : R &\to R \\ x &\mapsto xr. \end{aligned}$$

Lema 4.21. *Com as notações anteriores a aplicação $\phi : R^\alpha \to End_S(R)$ definida por $\phi(r) := \phi_r$, para todo $r \in R^\alpha$ é um isomorfismo de anéis.*

Demonstração. Vamos mostrar que ϕ_r é um $S-$homomorfismo, para cada $r \in R^\alpha$. Dados quaisquer $x, y \in R$ e $a_g\delta_g \in S$ temos que

- $\phi_r(x + y) = (x + y)r = xr + yr = \phi_r(x) + \phi_r(y)$;
- $\phi_r(a_g\delta_g x) = (a_g\alpha_g(x1_{g^{-1}}))r = a_g\alpha_g(xr1_{g^{-1}}) = a_g\delta_g(\phi_r(x))$.

Logo, $\phi_r \in End_S(R)$ e portanto ϕ está bem definida.

Como $\phi_{r\odot r'}(x) = x(r'r) = (xr')r = \phi_r(xr') = \phi_r \circ \phi_{r'}(x)$, para todos $r, r' \in R^\alpha$ e $x \in R$, temos que ϕ é um homomorfismo de anéis.

Vamos mostrar que ϕ é um isomorfismo de anéis. Como R possui unidade, segue facilmente que ϕ é injetora.

Dado $f \in End_S(R)$, temos que $f(x) = f(x\delta_{1_G}) = xf(1_R)$, para todo $x \in R$, e observando que

$$\alpha_g(f(1_R)1_{g^{-1}}) = 1_g\delta_g f(1_R) = f(1_g\delta_g 1_R) = f(1_g) = 1_g f(1_R),$$

para todo $g \in G$, obtemos que $f(1_R) \in R^\alpha$. Portanto, $\phi(f(1_R)) = f$ e consequentemente, ϕ é um isomorfismo de anéis. □

Teorema 4.22 (J. Guzmán- J. Lazzarin)**.** *As seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α;

(2) R é um $R^\alpha-$módulo à direita projetivo finitamente gerado e $\varphi : S \to End(R_{R^\alpha})$, definida por $\varphi(a\delta_g)(x) = a\alpha_g(x1_{g^{-1}})$, é um isomorfismo de anéis;

(3) $RtR = S$, com $t = \sum_{h\in G} 1_h\delta_h$;

(4) A aplicação Γ' é sobrejetora;

(5) R é um gerador para ${}_S\mathcal{M}$.

Além disso, se uma das afirmações acima for satisfeita, então as seguintes afirmações adicionais são equivalentes:

(6) $R^\alpha = tr_\alpha(R)$;

(7) R é um gerador para $\mathcal{M}_{R^\alpha}$;

(8) O contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R *_\alpha G,\ V,\ W,\ \Gamma,\ \Gamma')$ é estrito.

Demonstração. (1) $\Leftrightarrow$ (2) Segue do Teorema **??**.

(1) $\Leftrightarrow$ (3) Seja $t = \sum_{h\in G} 1_h\delta_h$. Note que $RtR = S$ se, e somente se, existem $x_i, y_i \in R$ com $i = 1, ..., n$ tais que $\sum_{i=1}^{n} x_ity_i = 1_S$. Afirmamos que $\sum_{i=1}^{n} x_ity_i = 1_S$ se, e só se, $\{x_i,\ y_i\}_{i=1}^n$ são coordenadas de Galois parciais de R sobre R^α. De fato, como $1_S = 1_R\delta_{1_G}$ e $S = \bigoplus_{g\in G} D_g\delta_g$ temos que

$$\begin{aligned}
1_R\delta_{1_G} &= \sum_{i=1}^{n} x_ity_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i(1_g\delta_g)y_i \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i(1_g\delta_g y_i\delta_{1_G}) \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x_i\alpha_g(\alpha_{g^{-1}}(1_g)y_i)\delta_g \\
&= \sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}})\delta_g.
\end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{i=1}^{n} x_iy_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_g(y_i1_{g^{-1}}) = 0$, para $g \neq 1_G$. Logo, a afirmação segue.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) Como $\Gamma'(W \otimes V)$ é um ideal de S temos que: Γ' é um aplicação sobrejetora se, e somente se, existem $n \in \mathbb{N}$ e $x'_i,\ y'_i \in R$, com $i = 1, ..., n$, tais que

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x'_i\alpha_g(y'_i1_{g^{-1}})\delta_g = \Gamma'(\sum_{i=1}^{n} x'_i \otimes y'_i) = 1_S$$

se, e somente se,

$$\sum_{g\in G}\sum_{i=1}^{n} x'_i\alpha_g(y'_i 1_{g^{-1}})\delta_g = 1_R\delta_{1_G}. \tag{4.5}$$

Como $S = \bigoplus_{g\in G} D_g$, temos que (**??**) é equivalente a $\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n}\sum_{g\in G} x'_i\alpha_g(y'_i 1_{g^{-1}})\delta_g = 0$, para todo $g \neq 1_G$. Portanto, $\sum_{i=1}^{n} x'_i y'_i = 1_R$ e $\sum_{i=1}^{n} x'_i\alpha_g(y'_i 1_{g^{-1}}) = 0$, quando $g \neq 1_G$. Assim, Γ é sobrejetora se, e só se, R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α.

(2) $\Leftrightarrow$ (5) Pelo Lema **??** temos que $R^\alpha \simeq End_S(R)$ e tomando na Proposição **??** U igual a W ($W = R$ visto como $(S, R^\alpha)-$bimódulo) temos a equivalência desejada.

Além disso, assumindo uma das condições. Vamos mostrar que as condições (6), (7) e (8) são equivalentes:

(6) $\Leftrightarrow$ (7) Se $tr_\alpha(R) = R^\alpha$, então tr_α é sobrejetora. Pelo Lema **??** temos a inclusão $tr_\alpha(R) \subset tr(R)$. Assim, $tr(R) = R^\alpha$ e pelo Teorema **??** temos que R é um gerador da categoria $\mathcal{M}_{R^\alpha}$.

Reciprocamente, suponha que R é um gerador da categoria $\mathcal{M}_{R^\alpha}$. Segue do Teorema **??** que $tr(R) = R^\alpha$. Dado $f \in Hom_{R^\alpha}(R, R^\alpha)$, obtemos pelo item (2) acima que existe $y = \sum_{g\in G} a_g\delta_g \in S$ tal que $\varphi(y) = f$. Assim, para cada $r \in R$ temos que $\varphi(y)(r) = \sum_{g\in G} a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}}) \in R^\alpha$. Disto e do Lema **??** temos que para cada $h \in G$,

$$\begin{aligned}
\sum_{g\in G} a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}})1_h &= \alpha_h\left(\sum_{g\in G} a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}}\right)\\
&= \sum_{g\in G} \alpha_h(a_g 1_{h^{-1}})\alpha_h(\alpha_g(r1_{g^{-1}})1_{h^{-1}})\\
&= \sum_{g\in G} \alpha_h(a_g 1_{h^{-1}})\alpha_{hg}(r1_{g^{-1}h^{-1}})\\
&= \sum_{f\in G} \alpha_h(a_{h^{-1}f} 1_{h^{-1}})\alpha_f(r1_{f^{-1}}).
\end{aligned}$$

Logo, $\varphi(\sum_{g\in G} a_g 1_h\delta_g)(r) = \sum_{g\in G} a_g\alpha_g(r1_{g^{-1}})1_h = \varphi\left(\sum_{g\in G}\alpha_h(a_{h^{-1}g}1_{h^{-1}})\delta_g\right)(r)$, para todos $r \in R$ e $h \in G$. Como φ é um isomorfismo concluímos que $\sum_{g\in G}\alpha_h(a_{h^{-1}g}1_{h^{-1}})\delta_g = \sum_{g\in G}(a_g 1_h)\delta_g$ e assim $\alpha_h(a_{h^{-1}g}1_{h^{-1}}) = a_g 1_h$, para todos $g, h \in G$. Em particular, para

$g = h$ obtemos que $\alpha_g(a_{1_G}1_{g^{-1}}) = a_g$. Portanto,

$$f(r) = \varphi(y)(r) = \sum_{g\in G}\alpha_g(a_{1_G}1_{g^{-1}})\alpha_g(r1_{g^{-1}}) = \sum_{g\in G}\alpha_g(a_{1_G}r1_{g^{-1}}) = tr_\alpha(a_{1_G}r),$$

para todo $r \in R$. Consequentemente, $f(R) \subset tr_\alpha(R)$ e

$$R^\alpha = tr(R) \subset tr_\alpha(R) = R^\alpha.$$

(7) $\Leftrightarrow$ (8) Suponha que R seja um gerador para $\mathcal{M}_{R^\alpha}$. Como (7) é equivalente a (6) temos que Γ é sobrejetora, e por (4) Γ' também o é. Segue do Teorema **??** que Γ e Γ' são isomorfismos.

Reciprocamente, suponha que o contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R*_\alpha G,\ V,\ W,\ \Gamma,\ \Gamma')$ seja estrito. Então Γ e Γ' são isomorfismos. Como Γ é sobrejetora temos que

$$R^\alpha = \Gamma(W \otimes V) \subset tr_\alpha(R).$$

Portanto, $tr_\alpha(R) = R^\alpha$. $\square$

Finalizamos este capítulo com algumas consequências do Teorema **??**.

Proposição 4.23. *Sejam R um anel e α uma ação parcial de um grupo G sobre R com envolvente (T, β). Se $|G|1_R$ é invertível em R, então $|G|1_T$ é invertível em T.*

Demonstração. Ver Proposição 1.22 na página 5254 de [**?**]. $\square$

Corolário 4.24. *Suponha que pelo menos um dos elementos $tr_\alpha(1_R)$ e $|G|1_R$ seja invertível em R. Então R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α se, e somente se, o contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R *_\alpha G,\ V,\ W;\ \Gamma,\ \Gamma')$ é estrito.*

Demonstração. Suponha que o contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R *_\alpha G,\ V,\ W;\ \Gamma,\ \Gamma')$ seja estrito. Então as aplicações Γ e Γ' são sobrejetoras e portanto vale o item 4. do Teorema **??**. Assim, R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α.

Reciprocamente, suponha que R seja uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α. Assuma que $|G|1_R$ seja invertível em R. Como (R, α) possui envolvente (T, β) e $|G|1_T = tr_G(1_T)$, temos que $u := |G|1_T \in T^G$ e é invertível em T pela Proposição **??**. Vamos mostrar que u é invertível em T^G. De fato, existe $x \in T$ tal que $xu = ux = 1_T$, logo

$u\beta_g(x) = \beta_g(ux) = \beta_g(1_T) = 1_T$ e $\beta_g(x)u = 1_T$, para todo $g \in G$. Logo, para todo $g \in G$, $\beta_g(x) = x$ e portanto $T^G = uT^G \subset tr_G(T)$. Assim, tr_G é sobrejetora e pela Proposição **??** tr_α é sobrejetora. Pelo Teorema **??** o contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R *_\alpha G,\ V,\ W;\ \Gamma,\ \Gamma')$ é estrito.

Agora, assuma que $tr_\alpha(1_R)$ seja invertível em R. Então pelo Lema **??**, existe $c \in R$ tal que $tr_\alpha(c) = 1_R$, logo tr_α é sobrejetora. Assim, pelo Teorema **??** o contexto de Morita $(R^\alpha,\ S = R *_\alpha G,\ V,\ W;\ \Gamma,\ \Gamma')$ é estrito. □

Terminamos este trabalho com um resultado apresentado por [**?**], que dá condições para que os anéis R^α e $R *_\alpha G$ sejam Morita equivalentes. Omitimos sua demonstração pois requer resultados que fogem do escopo deste trabalho.

Proposição 4.25. *Assuma que R_S (ou ${}_SR$) seja um módulo fiel, com $S = R *_\alpha G$. Se R é semiprimo e pelo menos um dos elementos $tr_\alpha(1_R)$ e $|G|1_R$ for invertível em R, então R é uma extensão $\alpha-$parcial de Galois de R^α. Em particular, $R^\alpha \approx R *_\alpha G$.*

Exemplo 4.26. *Seja R um anel comutativo e escreva $S = Re_1 \oplus Re_2 \oplus Re_3$, onde e_1, e_2 e e_3 são idempotentes ortogonais não nulos com soma um. Considere um grupo cíclico $G = \{1, g, g^2, g^3\}$ de ordem 4 gerado por g, e os ideais $D_1 = S$, $D_g = Re_1 \oplus Re_2$, $D_{g^2} = Re_1 \oplus Re_3$ e $D_{g^3} = Re_2 \oplus Re_3$. Defina os isomorfismos*

- *$\alpha_g : D_{g^3} \to D_g$ por $\alpha_g(e_2) = e_1$ e $\alpha_g(e_3) = e_2$;*
- *$\alpha_{g^2} : D_{g^2} \to D_{g^2}$ por $\alpha_{g^2}(e_1) = e_3$ e $\alpha_{g^2}(e_3) = e_1$;*
- *$\alpha_{g^3} : D_g \to D_{g^3}$ por $\alpha_{g^3}(e_1) = e_2$ e $\alpha_{g^3}(e_2) = e_3$.*

É fácil ver que isto define um ação parcial α do grupo G sobre S. Segue imediatamente da forma como α foi definida que $R = S^\alpha$ e que $x_i = y_i = e_i$ com $i = 1, 2, 3$, são coordenadas de Galois parciais de S sobre R. Logo, S satisfaz todas as 5 primeiras condições do Teorema **??**.

Bibliografia

[1] Amitsur, S. A.; **Rings of quotients and Morita contexts**, Journal of Algebra, 17 (1971), 273-298.

[2] Anderson, F.W.; Fuller, K.R. **Rings and Categories of Modules**. Graduate Texts in Mathematics. 2 ed. New York. Springer, 1928.

[3] Bagio, D., Lazzarin, J., Paques, A.; **Crossed products by twisted partial actions: separability, semisimplicity and Frobenius properties**, Comm. Algebra, 38 (2010), p. 496–508.

[4] Bemm, L.; **Ações Parciais de Grupos Sobre Anéis Semiprimos**, Tese de Doutorado (UFRGS), 2011.

[5] Conrad, K.; **Tensor products**. Disponível em: http://www.math.uconn.edu/ kconrad/blurbs/linmultialg/tensorprod.pdf, último acesso em 23/04/2017.

[6] Cohen, M.; **A Morita context related to finite automorphism groups of rings**, Pacific Journal of Mathematics vol. 98, n. 1 (1982), p. 37-54.

[7] Dokuchaev, M., Exel, R.; **Associativity of crossed produtcs by partial actions, enveloping actions and partial representations**. Trans. Amer. Math. Soc., 357 (2005), p. 1931-1952.

[8] Dokuchaev, M., Ferrero, M., Paques, A.; **Partial actions and Galois theory**; J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), p. 77-87.

[9] Dokuchaev, M., Ferrero, M., Paques, A.;**Partial Galois theory of commutative ring**, J. Pure Appl. Algebra 208 (2007), p. 77–87.

[10] Ferrero, M., Lazzarin, J.; **Partial actions and partial skew group rings**, J. Algebra 319 (2008), p. 5247-5264.

[11] Guzmán, J. A., Ferrero, M., Lazzarin, J.; **Partial actions and partial fixed rings**, Comm. Algebra, 38:6 (2010), p. 2079-2091.

[12] Guzmán, J. A., Lazzarin, J.; **A Morita context related to finite groups acting partially on a ring**, Journal "Algebra and Discrete Mathematics", n. 3 (2009), p. 49 – 60.

[13] Hungerford, T.W.;**Algebra**, New York: Springer-Verlag, 1996.

[14] Lam, T.Y.; **Lectures on modules and rings**. Graduate Texts in Mathematics, Springer, 1998.

[15] Lam, T.Y.; **A First course in noncommutative rings**, New York: Springer-Verlag, 1991.

[16] Molina, M. S.; **Algebras of quotients of Lie Algebras**. Journal of Pure and Applied Algebra 188 (2004), p. 175 – 188.

[17] Morita, K.; **Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition**, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku 6 (1958), p. 83-142.

[18] Montgomery, S.; **Fixed Rings of Finite Automorphism Groups of Associative Rings**; Lect. Notes in Math. 818, Springer, 1980.

[19] Polcino, F. C. **Anéis e Módulos**; São Paulo. USP, 1972.

[20] Rotman, J. J.; **An Introduction to Homological Algebra**. Pure and Applied Mathematics, Springer, 1979.

[21] Rowen, L.H.; **Ring Theory**, vol. 1, London: Academy Press INC., 1988.

Índice