CONTROLABILIDADE EXATA NA FRONTEIRA DE UMA EQUAÇÃO INTEGRO-DIFERENCIAL DE SEGUNDA

Gilson Tumelero

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - Pr

2006

Controlabilidade Exata Na Fronteira De Uma Equação Integro-Diferencial De Segunda Ordem

Gilson Tumelero

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-Pr, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM ....
(Orientador)

Prof. Valéria Neves Domingos Cavalcanti - UEM ....

Prof. Silvano Dias Bezerra de Menezes - UFPA ....

Maringá

Março, 2006

A memória de meu pai.

Agradecimentos

Primeiramente agradecer a Deus, pela oportunidade e pela força para a realização deste trabalho.

Ao professor Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, pela orientação e por compartilhar conosco a sabedoria de um verdadeiro mestre.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica.

A Capes, pelo apoio financeiro.

A todos os meus amigos, que juntos compartilhamos alegrias e tristeza. De forma especial aos amigos da turma anterior pelo apoio e incentivo nas horas difíceis.

Aos professores e amigos Santos Richard Wieller Sangüino Bejarano, Christian José Quintana Pinedo e Fredy Maglório Sobrado Suárez, pelos incentivos e pelos valiosos conselhos.

A minha família, que sempre me apoiou e encorajou a realizar esta tarefa. De modo especial ao meu Pai e minha Mãe pelo exemplo de vida e retidão de caráter.

A Marieli, companheira muito especial e de todas as horas. Também a seus pais e sua irmã pela forma carinhosa e respeitosa com que nos tratam.

Resumo

Neste trabalho estudamos a controlabilidade exata e local na fronteira para uma equação Integro-Diferencial de segunda ordem. O resultado é obtido pelo método HUM (Hilbert Uniquess Method), o qual foi introduzido por Lions.

Abstract

In this work we study the boundary exact and local controllability for a second-order integro-diferential equation. The result is obtained using the HUM method (Hilbert Uniquess Method), which was introduced by Lions.

Sumário

Introdução

São muitos os campos da ciência e tecnologia onde se aplica a teoria de controle. Em alguns casos é possível resolver o problema, mediante a avanços tecnológicos que permitam a implementação de controles mais eficientes. Este é o caso, por exemplo, do controle molecular mediante a tecnologia laser. No entanto, esta e muitas outras aplicações necessitam de avanços teóricos. A seguir mencionaremos alguns exemplos e os problemas teóricos que eles envolvem.

· **Grandes estruturas espaciais:** É freqüente escutar que o desprendimento de algum objeto de uma antena ou telescópio no espaço, ocasiona problemas técnicos, causando algumas falhas ou até mesmo inutilizando completamente a estrutura. Estas estruturas se caracterizam por conter componentes flexíveis de grande tamanho, uma conexão numerosa de componentes e o acoplamento de componentes rígidas e flexíveis. O problema de estabilizar estas estruturas de modo que se mantenham orientadas na direção adequada, sem deformar-se em excesso, é complexo.

Apesar dos importantes avanços obtidos na segunda metade do século XX no controle tanto de sistemas de dimensão finita ou infinita, o desenvolvimento de técnicas de controle e robustez para estas estruturas é um problema importante e que necessita em particular de significantes avanços matemáticos.

· **Robótica:** É uma das áreas da tecnologia que apresenta os desafios mais estimulantes para os próximos anos. Por exemplo, é de fundamental importância elaborar métodos eficientes para o desenvolvimento de visão artificial. Mas a teoria de controle está bem no centro deste campo.

O desenvolvimento da robótica depende fundamentalmente da eficiência e robustez dos algoritmos computacionais para o controle dos robôs. Não é difícil imaginar a complexidade do processo de controle que faz com que um robô caminhe de maneira estável, ou que faça com que ele consiga pegar objetos com suas mãos.

· **Sistemas energéticos e redes informáticas:** Já é evidente que o planeta apresenta uma tendência irreversível a globalização. Isto acontece em muitos segmentos: o tráfego aéreo, os sistemas de geração e distribuição de energia, as redes de informática. Isto faz com que muitas vezes tenha-se que tomar decisões em âmbitos mais concretos (geograficamente falando, por exemplo), com poucas informações do que ocorre em outras, mas tendo consciência de que estes podem influenciar. Daí a necessidade de criar métodos técnicos de controle para grandes sistemas integrados.

· **Controle de Combustão:** Trata-se de um tema relevante na indústria aeronáutica e aeroespacial em que se faz imprescindível o controle das instabilidades da combustão, a qual vem acompanhada de perturbações acústicas consideráveis. No que foi feito deu-se ênfase aos aspectos do "desenho", modificando a geometria do sistema para interferir na interação combustão-acústico, incorporando elementos dissipativos. O controle ativo da combustão mediante a mecanismos térmicos e acústicos, é um tema que encontra-se praticamente inexplorado.

· **Controle de fluidos:** A interação entre o controle e a dinâmica de fluidos, neste momento é muito intensa. Trata-se de um problema relevante na aeronáutica uma vez que a dinâmica estrutural do avião (suas asas, por exemplo) está ligada ao fluxo de ar a sua volta. É certo também que nos aviões convencionais, se pode ignorar este acoplamento. É muito provável que os aviões do futuro tenham que incorporar mecanismos de controle para evitar o aparecimento de turbulências em volta das asas. De um ponto de vista matemático está quase tudo por fazer, tanto no que diz respeito à modelagem quanto ao controle e aos aspectos computacionais.

· **Controle de Plasma:** A obtenção de reações de fusão controladas é um dos maiores desafios para resolver os problemas energéticos do planeta.

Na atualidade, uma das vias mais promissoras é a das "Tokomaks ": Máquinas em que se confina o plasma mediante a mecanismos eletromagnéticos. O problema fundamental é manter o plasma, de alta densidade, a uma temperatura muita e-levada e na configuração desejada durante intervalos de tempo prolongados apesar de suas instabilidades. Isto se dá através de sensores, mediante aos quais se obtém informações necessárias para efetuar trocas rápidas e preciosas das correntes que compensarão as perturbações do plasma. Todavia há muito a fazer neste terreno do ponto de vista matemático. Existem também problemas de identificação importantes nas "Tokomaks", o que dificulta as medições. Trata-se, pois de um campo que apresenta grandes desafios para a teoria matemática dos controles e os problemas inversos.

Também poderíamos citar aplicações como na "Investigação biomédica", "hidrologia", "Extração de Recursos naturais", etc. Estas aplicações justificam a necessidade e motivam os estudos sobre a teoria da controle.

Com estas motivações discutimos neste trabalho a controlabilidade do problema para uma equação integro-diferencial de segunda ordem da seguinte forma:

$$\begin{aligned} u_{tt}(x,t) - a(t)\Delta u(x,t) + b(t)u_t(x,t) + c(t)u(x,t) \\ -\Delta \int_0^t Q(t,\sigma)u(x,\sigma)d\sigma = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,T). \end{aligned} \tag{1}$$

$$u = g \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0,T). \tag{2}$$

$$u(x,0) = 0,\ u_t(x,0) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \tag{3}$$

onde Ω é um aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$, com fronteira bem regular.

A questão da controlabilidade exata é posta como segue. Dado um par de funções $\{u_0, u_1\}$ definidas em Ω, existe um controle limitado g que pode levar a solução de

(1) - (3) para o estado final

$$u(x,T) = u_0(x), \quad u_t(x,T) = u_1(x) \quad \text{em} \quad \Omega? \tag{4}$$

O propósito deste trabalho é responder de forma afirmativa a presente questão sem nenhuma condição sobre a memória do núcleo $Q(t,\sigma)$; (ver teorema 2.1 abaixo.)

Primeiramente recordemos alguns resultados importantes provenientes de problemas análogos. O problema da controlabilidade para a equação de uma placa com uma memória foi primeiro resolvido por Leugering [13]. Seu principal instrumento foi a análise harmônica sob hipótese de que o espaço domínio é um retângulo e que a memória do núcleo é uma forma de convolução.

Para uma equação similar em um domínio geral, Lagnese e Lions [10] provaram a controlabilidade por um método diferente. Seu argumento é válido para uma memória do núcleo envolvendo um tipo de convolução, mas sob as hipóteses de que o tamanho do núcleo é suficientemente pequeno.

Lasiecka [11] também obteve um resultado similar por um método do operador direto com a memória do núcleo mais geral, que depende de ambas variáveis, de tempo e de espaço.

A hipótese em comum é que o tamanho de $Q(t,\sigma)$ em (1) é suficientemente pequeno. Agora assumimos que a memória do núcleo é independente das variáveis do espaço em contraste com [11].

Por virtude desta hipótese, podemos empregar um argumento diferente, baseado em um tipo novo da propriedade de continuação única, a qual é provada por adaptação da idéia de Bardos, Lebeau e Rauch [1].

Este trabalho é uma exposição didática de [8] e é apresentado como segue:

- No capítulo 1, consideraremos alguns resultados que nos servem como base para o desenvolvimento do trabalho;

- No capítulo 2, verificaremos a existência e unicidade da solução por transposição de uma equação integro-diferencial de segunda ordem com condições de fronteira. Mas para isto precisaremos fazer um estudo sobre o problema homogêneo associado a esta equação;

- No capítulo 3, demonstraremos a desigualdade inversa para uma equação integro-diferencial de segunda ordem com condições de fronteira a qual será usada para provarmos a controlabilidade exata para um sistema equivalente ao problema original. Também faremos a controlabilidade para este sistema equivalente e, conseqüentemente, obteremos o resultado para o problema original. Para atingir este objetivo usaremos o método HUM (Hilbert Uniqueness Method).

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, colocaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuirem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre K, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u

ou v se anula sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora, tal conceito de derivada ter sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. a derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase* *sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu.$$

Demonstração: Ver [19].

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \text{ } para\ p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Young) - *Sejam $1 < p\,,q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.3 (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e f, g em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [19].

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder) - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [3].

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.5 (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções, tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, onde $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ e $\dfrac{1}{p} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.6 (Desigualdade de Interpolação) - *Se $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$ então $u \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ verifica $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [21].

Além dos resultados acima, temos que:

i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

iv) Se Ω é limitado se $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ então $L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$, onde "$\hookrightarrow$"denota que a identidade é uma injeção contínua;

v) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.7 (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))^{'}$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.8 *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))^{'}$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \ e \ \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [3].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Proposição 1.9 (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω. *Onde* T_u *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [20].

Desta proposição tem-se que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.10 *Seja* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, *tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$, *então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}^{'}(\Omega)$.

Demonstração: Ver [20].

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação: Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços quais trabalharemos vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim_{\|x\| \to \infty} p(x) D^\alpha \varphi(x) = 0$, para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente descrescente no infinito, $S^{'}$ o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x, y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S^{'};\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left(H^s(\mathbb{R}^n)\right)^{'}$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_\Omega \end{array}$$

que leva u na sua restrição a Ω. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{ v|_\Omega;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n) \}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = \left(H_0^s(\Omega)\right)^{'} \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

Teorema 1.11 (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\ \text{se } m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [18].

Teorema 1.12 *Assuma que* Ω *é aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$*. Seja* $s \in \mathbb{R}$*. Então para cada* $\varepsilon > 0$ *a injeção*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração: Ver [16].

Proposição 1.13 *Sejam* Ω *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$*, de classe* C^m*, com fronteira limitada e* m *um inteiro tal que* $m \geq 1$*; e* $1 \leq p < \infty$*. Então temos as segintes imersões contínuas:*

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*, onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$*,*

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$*,* $\forall\, q \in [p, +\infty[$*,*

se $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.14 (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja* Ω *um subconjunto aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$*,* Ω *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq \infty$*. Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$*,* $\forall\, q \in [1, p^*]$*, onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$*,*

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$*,* $\forall\, q \in [1, +\infty[$*,*

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$*.*

Demonstração: Ver [5].

Notação: $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \mapsto X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se:

i) $\exists K$ compacto de $(0,T)$ tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em K, $\forall \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em X.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;X)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach (das classes) de funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ fortemente mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Quando $p = 2$ e X um espaço de Hilbert então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno $(u,v) = \displaystyle\int_0^T (u(t), v(t))_X dt$.

Representaremos por $W^{k,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X) / u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq k\}$$

($u^{(j)}$ derivada j-ésima no sentido das distribuições vetoriais). Com norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{1/p},$$

ou a norma equivalente,

$$\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^p_{L^p(0,T;X)}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert o espaço $W^{k,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^k(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

e norma

$$\|u\|_{H^k(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{1/2}.$$

Quando $k = 0$, $H^k(0,T;X)$ identifica-se ao $L^2(0,T;X)$.

Por $H^k_0(0,T;X)$ representaremos o fecho em $H^k(0,T;X)$ de $\mathcal{D}(0,T;X)$. Demonstra-se que o espaço $H^k_0(0,T;X)$ é o espaço de Hilbert,

$$H^k_0(0,T;X) = \{u \in H^k(0,T;X); u^{(j)}(0) = u^{(j)}(T) = 0,\ 0 \leq j \leq k-1\}.$$

O dual topológico de $H^k_0(0,T;X)$ será representado por $H^{-k}(0,T;X)$.

Assim, identificando $L^2(0,T;X)$ com o seu dual $(L^2(0,T;X))^{'}$, via teorema de Riesz, obtemos então

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H^1_0(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}^{'}(0,T;X)$$

onde

$$H^{-1}(0,T;X) = \left(H^{-1}(0,T;X)\right)^{'}.$$

Proposição 1.15 *Seja $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle \xi)_X,\ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T),\ \forall\, \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [22].

Baseado na proposição anterior, identificamos f com u'. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

Proposição 1.16 *A aplicação*

$$u \in L^2(0,T;X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [22].

1.1.5 Funções Escalarmente Contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x \rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall\, x \in X'$, onde X' é dual de X. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}$.

Observação: Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.

Lema 1.17 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração: Ver [17].

1.2 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do R^n com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ.

Proposição 1.18 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}\Gamma} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [21].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.18 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.19 *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [21].

Consideremos, agora, Ω uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_{\Gamma}$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u \; u|_{\Gamma}$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.20 *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.

Demonstração: Ver [21].

Além desses resultados, considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos produtos internos $(u, v)_0 = (u, v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)};\ \forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $(u, v)_0 = (u, v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)};\forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.21 *A aplicação linear $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) \ &\to\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u \ &\mapsto\ \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação γ acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.

Demonstração: Ver [6].

Proposição 1.22 *A aplicação linear $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\big|_\Gamma$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \ \to\ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [6].

1.3 Resultados Auxiliares

Assumindo que $X \subset B \subset Y$, espaços de Banach tal que a imersão de X em B seja compacta, temos:

Corolário 1.23 *Seja F limitado em $L^p(0, T; X)$, onde $1 \leqslant p < \infty$ e $\frac{\partial F}{\partial t} = \{\frac{\partial f}{\partial f} : f \in F\}$ é limitado em $L^1(0, T; Y)$. Então F é relativamente compacto em $L^p(0, T; B)$.*

Seja F limitado em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ limitada em $L^r(0,T;Y)$ onde $r>1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Demonstração: Ver [27]

Lema 1.24 *Seja $m \in L^1(0,T;R)$ tal que $m \geqslant 0$ quase sempre em $(0,T)$ e $b \geqslant 0$ constante real. Suponhamos $h \in L^\infty(0,T)$; $h \geqslant 0$ sobre $(0,T)$ verificando a desigualdade*

$$\frac{1}{2}h^2(t) \leqslant 2b^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds$$

para todo $t \in]0,T[$. Então:

$$h(t) \leqslant 2b + 2\int_0^t m(s)ds.$$

Demonstração: Ver [4].

Proposição 1.25 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E', então verifica-se:*

i) *$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, x \in E$;*

ii) *Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E';*

iii) *Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.*

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.26 *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$uma seqüência limitada em E, então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.27 *Seja E um espaço de Banach separável e seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$uma seqüência limitada em E', então, existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [3].

Proposição 1.28 *Se $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então $u_m \rightharpoonup u$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.*

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.29 (Lax-Milgram) *Seja $a(u,v)$ uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle \ \forall v \in H.$$

Demonstração: Ver [3].

Teorema 1.30 (Riez) *Seja E um espaço vetorial normado tal que B_E é compacta ($B_E = \{x \in E; \|x\|_E \leqslant 1\}$). Então E tem dimensão finita.*

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.31 (Lema de Gronwall) - *Sejam $f \in L^\infty(0,T)$ e $z \in L^1(0,T)$, tais que $z(t) > 0$, $f(t) \geq 0$ e $c \geq 0$ uma constante. Se*

$$f(t) \leqslant c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall\, t \in [0,T],$$

então temos

$$f(t) \leqslant c e^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [18].

Proposição 1.32 (Aubin-Lions) - *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0, B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$. Munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

W é um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [12].

Proposição 1.33 (Lions) - *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes a $L^q(\Omega \times (0,T))$ e $1 < q < \infty$. Se*

i) *$u_\nu \to u$ quase sempre em $\Omega \times (0,T)$;*

ii) *$\|u_\nu\|_{L^q(\Omega\times(0,T))} \leqslant c,\ \forall\, \nu \in \mathbb{N}$,*

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(\Omega \times (0,T))$.

Demonstração: Ver [12].

Proposição 1.34 (Fórmula de Green) - *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Se $u, v \in H^1(\Omega)$, então para $1 \leqslant i \leqslant n$ temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ e ν denota o vetor normal unitário exterior a Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ e $v \in H^1(\Omega)$, temos que

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [6].

Lema 1.35 *Sejam V e H espaços de Banach, tal que $V \hookrightarrow H$. Se $u \in L^1(0,T;V)$ e $u' \in L^1(0,T;H)$, então $u \in C([0,T];H)$.*

Demonstração: Ver [25].

Consideremos o seguinte problema de fronteira com valor inicial.

$$v_{tt} - \Delta v = h \ \text{ em } \ \Omega \times (0,T) \tag{1.1}$$

$$v = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega \times (0,T) \tag{1.2}$$

$$v(0) = v_0 \quad v_t(0) = v_1 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{1.3}$$

Os seguintes fatos são conhecidos:

Lema 1.36 *Para $\{v_0, v_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e $h \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ existe uma única solução v de (1.1)-(1.3) em $C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Além disso temos que*

$$\begin{aligned} &\|v\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} + \|v_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \\ &\leqslant M(\|v_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega)} + \|h\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}) \end{aligned} \tag{1.4}$$

onde $\frac{\partial}{\partial \nu}$ denota a derivada normal exterior sobre a $\partial\Omega$ e M é uma constante positiva independente de v_0, v_1 e h.

Demonstração: Ver [15]

Lema 1.37 *Seja $h = 0$ e seja T maior que o diâmetro de Ω. Então, para $\{v_0, v_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, temos*

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \geqslant M(\|v_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{1.5}$$

para uma constante M positiva e independente de v_0 e v_1.

Demonstração: Ver [15]

Capítulo 2

Existência e Unicidade de Solução Para Uma Equação Integro-Diferencial de Segunda Ordem Com Condições de Fronteira

A fim de respondermos a questão da controlabilidade deixada na introdução, assumimos que

$$a(t) \in C^2([0,\infty)) \quad \text{e} \quad a(t) \geq a_0 \tag{2.1}$$

para todo t e para alguma constante positiva a_0,

$$b(t) \in C([0,\infty)) \tag{2.2}$$

$$c(t) \in C([0,\infty)) \tag{2.3}$$

$$Q(\sigma,t) \in C^2([0,\infty)\times[0,\infty)). \tag{2.4}$$

Então temos o seguinte:

Teorema 2.1 *Suponha que exista um* $T > T_0$. *Então para dados* $\{u_0,u_1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$ *existe um controle* $g \in L^2(\partial\Omega\times(0,T))$ *tal que a solução de (1)-(3) satisfaz (4).*

Fazendo uma mudança de variáveis com as seguintes considerações:

$$p(t) = \int_0^t (a(\sigma))^{1/2} d\sigma \quad \text{para} \quad t \geqslant 0 \tag{2.5}$$

$$s = p(t) \tag{2.6}$$

$$v(x,s) = u(x, q(s)) \tag{2.7}$$

onde $q(\cdot)$ é o inverso de $p(\cdot)$, isto é $t = q(s)$.

Observações:

i) Sendo $v(x,s) = u(x,q(s))$ o que é equivalente a $v(x,s) = u(x,t)$, de onde resulta que $u_{tt}(x,t) = v_{ss}(x,s)[p'(t)]^2 + v_s(x,s)p''(t)$.

ii) Também $\Delta u(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x,t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x,s) = \Delta v(x,s)$

iii) Fazendo $\sigma = q(\xi)$. Então $d\sigma = \frac{d}{d\xi} q(\xi) d(\xi)$ e lembrando que $0 \leqslant \sigma \leqslant t$, concluímos que $0 \leqslant \xi \leqslant s$.

Agora substituindo em $-\Delta \int_0^t Q(t,\sigma) u(x,\sigma) d\sigma$, obtemos:

$$-\Delta \int_0^s Q(q(s), q(\xi)) \frac{d}{d\xi} q(\xi) d(\xi) v(x,\xi) d\xi.$$

Das observações, substituindo em (1) resulta:

$$v_{ss}(x,s)[p'(t)]^2 + v_s(x,s)p''(t) - a(t) \vartriangle v(x,s) + b(t) v_s(x,s) p'(t)$$

$$+ c(t) v(x,s) - \vartriangle \int_0^s Q(t, q(\xi)) \frac{d}{d\xi} q(\xi) v(x,\xi) d\xi = 0.$$

Multiplicando-se esta por $[a(t)]^{-1}$ e considerando (2.5) obtemos:

$$v_{ss}(x,s) - \vartriangle v(x,s) + [a(t)]^{-1}\{p''(t) + b(t)p'(t)\} v_s(x,s) + [a(t)]^{-1} c(t) v(x,s)$$

$$- \vartriangle \int_0^s [a(t)]^{-1} Q(s, q(\xi)) \frac{d}{d\xi} q(\xi) v(x,\xi) d\xi = 0 \tag{2.8}$$

Das considerações (2.1) - (2.4) podemos reescrever (2.8) da seguinte forma:

$$v_{ss}(x,s) - \Delta v(x,s) + b_1(s)v_s(x,s) + b_2(s)v(x,s)$$
$$-\Delta \int_0^s Q_1(s,\xi)v(x,\xi)d\xi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0,p(T)). \tag{2.9}$$

Com $b_1(s) \in C^1([0,\infty))$, $b_2(s) \in C([0,\infty))$ e $Q_1(s,\xi) \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty))$.

Consideremos

$$w(x,s) = v(x,s)exp(\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma). \tag{2.10}$$

Observações:

iv) $w_s(x,s) = v_s(x,s)exp(\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma) + \frac{1}{2}b_1(s)w(x,s)$, implicando que

$v_s(x,s) = w_s(x,s)(exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)) - \frac{1}{2}b_1(s)w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$

v) Lembrando que $w_{ss}(x,s) = \frac{\partial}{\partial s}w_s(x,s)$ e usando (**iv**) concluimos que

$v_{ss}(x,s) = w_{ss}(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma) - w_s(x,s)b_1(s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$

$+ [\frac{1}{4}b_1^2(s) - \frac{1}{2}b_1'(s)]w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$.

vi) Note que $\Delta w(x,s) = \Delta v(x,s)exp(\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$, isto é,

$\Delta v(x,s) = \Delta w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$.

Agora substituindo (2.10) e os resultados obtidos em **(iv)-(vi)** em (2.9) obtemos:

$$w_{ss}(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma) - w_s(x,s)b_1(s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$$
$$+[\frac{1}{4}b_1^2(s) - \frac{1}{2}b_1'(s)]w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$$
$$-\Delta w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma) + b_1(s)[w_s(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$$
$$-\frac{1}{2}w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)] + b_2(s)w(x,s)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)$$
$$-\Delta \int_0^s Q_1(a,\xi)w(x,\xi)exp(-\int_0^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma)d\xi = 0$$

em $\Omega \times (0,p(T))$ ou equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
&w_{ss}(x,s) - \Delta w(x,s) + \{-\frac{1}{4}b_1^2(s) - \frac{1}{2}b_1'(s) + b_2(s)\}w(x,s) \\
&-\Delta \int_0^s Q_1(s,\xi)w(x,\xi)exp(\int_\xi^s \frac{1}{2}b_1(\sigma)d\sigma) = 0 \text{ em } \Omega \times (0,p(T)) \qquad (2.11)
\end{aligned}
$$

a qual reescrevemos como:

$$
w_{ss}(x,s) - \Delta w(x,s) + b_3(s)w(x,s) - \Delta \int_0^s Q_2(s,\xi)w(x,\xi)d\xi = 0 \text{ em } \Omega \times (0,p(T)),
$$

onde de (2.1)-(2.4) temos:

$$
b_3(s) \in C([0,\infty)) \qquad (2.12)
$$

$$
Q_2(s,\xi) \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty)). \qquad (2.13)
$$

Diante das mudanças feitas acima, passamos a analisar a solução por transposição para o seguinte problema:

$$
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \alpha(t)u(x,t) - \Delta \int_0^t Q(t,\sigma)u(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \qquad (2.14)
$$

$$
u = g \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \qquad (2.15)
$$

$$
u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0 \text{ em } \Omega \qquad (2.16)
$$

onde nós assumimos que:

$$
\alpha(t) \in C([0,\infty)) \qquad (2.17)
$$

$$
Q(t,\sigma) \in C^2([0,\infty) \times [0,\infty)). \qquad (2.18)
$$

Vamos mostrar que esta solução existe e é única. Com este objetivo, primeiramente vamos considerar o problema homogêneo. Em seguida, provaremos que tal problema tem solução forte e solução fraca. Feito isso, vamos definir solução por tansposição para o problema acima.

Consideremos o seguinte problema homogêneo:

$$\phi_{tt} - \Delta\phi + \alpha(t)\phi - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma = f \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{2.19}$$

$$\phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.20}$$

$$\phi(T) = \phi_0 \quad \text{e} \quad \phi_t(T) = \phi_1 \text{ em } \Omega, \tag{2.21}$$

o qual fazendo uma reversão do tempo e a seguinte mudança de variáveis:

$$\psi(t) = \phi(T-t),$$

$$h(t) = f(T-t),$$

$$\widehat{\alpha}(t) = \alpha(T-t),$$

$$\widehat{Q}(\tau,t) \text{ é determinado por } Q(\sigma,t), \text{ tomando } \tau = T-t,$$

então o problema acima é equivalente a:

$$\psi_{tt} - \Delta\psi + \widehat{\alpha}(t)\psi - \Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(x,\tau)d\tau = h \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{2.22}$$

$$\psi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.23}$$

$$\psi(0) = \psi_0 \quad \text{e} \quad \psi_t(0) = \psi_1 \text{ em } \Omega, \tag{2.24}$$

onde $\psi(0) = \psi_0 = \phi_0$ e $\psi_t(0) = \psi_1 = -\phi_1$.

2.1 Solução Forte e Solução Fraca

Nesta seção demonstraremos a existência e unicidade de soluções para o problema (2.22)-(2.24) com dados fortes e fracos e, conseqüentemente, para o problema (2.19)-(2.21). Para isso utilizaremos o método de Faedo-Galerkin.

Notação: No que segue " $'$ "denotará a derivada da função em relação variável t.

Temos os seguintes resultados:

Teorema 2.2 *(Existência e Unicidade): Se* $\psi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$*,* $\psi^1 \in H_0^1(\Omega)$ *e* $h \in C([0,T]; H_0^1(\Omega))$ *então existe uma única* $\psi : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$*, tal que:*

$$\begin{aligned}
\psi &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) && (2.25)\\
\psi' &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) && (2.26)\\
\psi'' &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) && (2.27)\\
\psi'' &- \Delta\psi + \widehat{\alpha}(t)\psi - \Delta \int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(x,\tau)d\tau = h \text{ q.s. em } \Omega \times (0,T) && (2.28)\\
\psi^0 &= \psi(0) \ \ e \ \ \psi^1 = \psi'(0). && (2.29)
\end{aligned}$$

Demonstração: Seja (w_ν) uma base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ constituída pelas autofunções do operador $-\Delta$, soluções do problema de Dirichelt

$$\begin{aligned}
\Delta w_j &= \lambda_j w_j \text{ em } \Omega\\
w_j &= 0 \text{ sobre } \partial\Omega
\end{aligned}$$

onde os λ_j's satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots \lambda_j \leqslant \ldots$$

e $\lambda_j \to \infty$ quando $j \to \infty$.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotemos por V_m um subespaço gerado pelos m primeiros vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$.

Definamos $\psi_m = \sum_{j=1}^{m} g_{jm} w_j$ como solução do problema aproximado:

$$(\psi_m''(t), w_j) + ((\psi_m(t), w_j)) + (\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t), w_j) + \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau), w_j))d\tau = (h(t), w_j). \tag{2.30}$$

$$\psi_m(0) = \psi_m^0 \to \psi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \tag{2.31}$$

$$\psi_m'(0) = \psi_m^1 \to \psi^1 \text{ em } H_0^1(\Omega) \tag{2.32}$$

A existência de solução local de $[0, t_m]$ é garantida pela teoria das equações diferenciais ordinárias.

2.1.1 Estimativas a Priori

Estimativa I

Multiplicando-se (2.30) por g'_{jm} e somando em j de 1 até m obtemos:

$$(\psi''_m(t),\psi'_m(t)) + ((\psi_m(t),\psi'_m(t))) + (\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t),\psi'_m(t)) + \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau),\psi'_m(t)))d\tau$$

$$= \quad (h(t),\psi'_m(t))$$

o que implica,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2 &= (h(t),\psi'_m(t)) - (\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t),\psi'_m(t))\\ &- \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau),\psi'_m(t)))d\tau,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\psi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2 &= 2(h(t),\psi'_m(t)) - 2(\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t),\psi'_m(t))\\ &- 2\int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau),\psi'_m(t)))d\tau. \qquad (2.33)\end{aligned}$$

Fazendo $M_1(t) = \int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau)d\tau$. Temos que $M_1(0) = 0$ e que

$$M'_1(t) = \frac{\partial M_1}{\partial t}(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau) + \widehat{Q}(t,t)\psi_m(t).$$

Então

$$\frac{d}{dt}((M_1(t),\psi_m(t))) = ((M'_1(t),\psi_m(t))) + ((M_1(t),\psi'_m(t))).$$

Agora substituindo em (2.33) temos:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}|\psi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2 &= 2(h(t),\psi'_m(t)) - 2(\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t),\psi'_m(t))\\ &- 2[\frac{d}{dt}((M_1(t),\psi_m(t))) - ((M'_1(t),\psi_m(t)))]. \quad (2.34)\end{aligned}$$

Integrando (2.34) de 0 a t:

$$
\begin{aligned}
|\psi_m'(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 &= |\psi_m'(0)|^2 + \|\psi_m(0)\|^2 + 2\int_0^t (h(s), \psi_m'(s))ds \\
&- 2\int_0^t (\widehat{\alpha}(s)\psi_m(s), \psi_m'(s))ds - 2((\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau)d\tau, \psi_m(t)))) \\
&+ \int_0^t ((\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\widehat{Q}(\tau,s)\psi_m(\tau)d\tau, \psi_m(s)))ds \\
&+ 2\int_0^t ((\widehat{Q}(s,s)\psi_m(s), \psi_m(s)))ds.
\end{aligned}
$$

Levando-se em conta as hipóteses assumidas por $\alpha(t)$ e por $Q(\sigma,t)$, o fato de $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$, (2.31) e (2.32), majoramos a equação acima de forma a obtermos a seguinte desigualdade:

$$
\begin{aligned}
|\psi_m'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_m(t)\|^2 &\leqslant 2\|h\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + |\psi_m'(0)|^2 + \|\psi_m(0)\|^2 \\
&+ c\int_0^t [|\psi_m'(s)|^2 + \|\psi_m(s)\|^2]ds,
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

onde c é uma constante positiva.

Agora da hipótese sobre h, (2.31), (2.32) obtemos de (2.35):

$$
|\psi_m'(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 \leqslant 2c + 2c\int_0^t [|\psi_m'(s)|^2 + \|\psi_m(s)\|^2]ds, \tag{2.36}
$$

de onde pelo Lema de Gronwall concluímos que existe uma constante c' tal que

$$
|\psi_m'(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 \leqslant c', \ \forall t \in [0,t_m], \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.37}
$$

O que nos permite estender ψ_m a todo intervalo $[0,T]$. Além disso

$$
(\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.38}
$$

$$
(\psi_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.39}
$$

Estimativa II

Em (2.30) multiplicando-se por g_{jm}' e λ_j e somando em j de 1 a m temos:

$$
\begin{aligned}
&(\psi_m''(t), -\Delta\psi_m'(t)) + ((\psi_m(t), -\Delta\psi_m'(t))) \\
&+(\widehat{\alpha}(t)\psi_m(t), -\Delta\psi_m'(t)) + \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau), -\Delta\psi_m'(t)))d\tau = (h(t), -\Delta\psi_m'(t)),
\end{aligned}
$$

ou, equivalentemente,

$$
\begin{aligned}
&((\psi_m''(t),\psi_m'(t))) + (\Delta\psi_m(t),\Delta\psi_m'(t)) + \widehat{\alpha}(t)((\psi_m(t),\psi_m'(t)))\\
&+\int_0^t (\widehat{Q}(\tau,t)\Delta\psi_m(\tau),\Delta\psi_m'(t))d\tau \;=\; ((h(t),\psi_m'(t))) \qquad (2.40)
\end{aligned}
$$

o que implica que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}|\Delta\psi_m(t)|^2 &= 2((h(t),\psi_m'(t))) - 2\widehat{\alpha}(t)((\psi_m(t),\psi_m'(t)))\\
&- 2\int_0^t (\widehat{Q}(\tau,t)\Delta\psi_m(\tau),\Delta\psi_m'(t))d\tau. \qquad (2.41)
\end{aligned}
$$

Fazendo $M_2(t) = \int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\Delta\psi_m(\tau)d\tau$. Observemos que $M_2(0) = 0$ e que,

$$
M_2'(t) = \frac{\partial M_2}{\partial t}(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\widehat{Q}(\tau,t)\Delta\psi_m(\tau)d\tau + \widehat{Q}(t,t)\Delta\psi_m(t).
$$

Então

$$
\frac{d}{dt}(M_2(t),\Delta\psi_m(t)) = (M_2'(t),\Delta\psi_m(t)) + (M_2(t),\Delta\psi_m'(t)).
$$

Agora substituindo em (2.41) resulta:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\|\psi_m'(t)\|^2 + \frac{d}{dt}|\Delta\psi_m(t)|^2 &= 2((h(t),\psi_m'(t))) - 2\widehat{\alpha}(t)((\psi_m(t),\psi_m'(t)))\\
&- 2\frac{d}{dt}(M_2(t),\Delta\psi_m(t)) + 2(M_2'(t),\Delta\psi_m(t))
\end{aligned}
$$

a qual integrando de 0 a t obtemos:

$$
\begin{aligned}
\|\psi_m'(t)\|^2 + |\Delta\psi_m(t)|^2 &= \|\psi_m'(0)\|^2 + |\Delta\psi_m(0)|^2 + 2\int_0^t ((h(s),\psi_m'(s)))ds\\
&- 2\int_0^t \widehat{\alpha}(s)((\psi_m(s),\psi_m'(s)))ds - \int_0^t 2\frac{d}{ds}((M_2(s),\Delta\psi_m(s)))ds\\
&+ 2\int_0^T (M_2'(s),\Delta\psi_m(s))ds.
\end{aligned}
$$

Agora pelas hipóteses feitas em (2.17), (2.18),(2.31),(2.32) e da estimativa I, majoramos a igualdade acima de modo a obtermos a seguinte desigualdade:

$$
\|\psi_m'(t)\|^2 + |\Delta\psi_m(t)|^2 \leqslant 2c + 2c\int_0^t [\|\psi_m'(s)\|^2 + |\Delta\psi_m(s)|^2]ds.
$$

Logo, pelo Lema de Gronwall, concluímos que existe uma constante positiva c' tal que:

$$\|\psi'_m(t)\|^2 + |\Delta\psi_m(t)|^2 \leqslant c' \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.42}$$

Portanto,

$$\psi'_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.43}$$

$$\Delta\psi_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.44}$$

Estimativa III

Agora voltando a (2.30) e multiplicando-a por g''_{jm} e somando em j de 1 até m obtemos:

$$\begin{aligned}(\psi''_m(t),\psi''_m(t)) + ((\psi_m(t),\psi''_m(t))) + \widehat{\alpha}(t)(\psi_m(t),\psi''_m(t))& \\ + \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_m(\tau),\psi''_m(t)))d\tau &= (h(t),\psi''_m(t)),\end{aligned}$$

de onde chegamos à:

$$\begin{aligned}|\psi''_m(t)|^2 &\leqslant |\Delta\psi_m(t)||\psi''_m(t)| + |\widehat{\alpha}(t)||\psi_m(t)||\psi''_m(t)| \\ &+ |\psi''_m(t)|\int_0^t |\widehat{Q}(\tau,t)||\Delta\psi_m(t)|d\tau + |h(t)||\psi''_m(t)|.\end{aligned}$$

Mas, então, como conseqüência de (2.17), (2.18), (2.38), (2.39), (2.43) e (2.44) obtemos que existe uma constante c positiva tal que

$$|\psi''_m(t)| \leqslant c \quad \forall t \in [0,T]. \tag{2.45}$$

Logo

$$\psi''_m \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.46}$$

Assim das estimativas feitas em (2.38), (2.43) e (2.46) podemos extrair uma subseqüência $(\psi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\psi_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \tag{2.47}$$

$$\psi'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.48}$$

$$\psi''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.49}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\mu > j$ em (2.30) e consideremos a seqüência ψ_μ como solução aproximada do problema (2.30)-(2.32). Multiplicando (2.30) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando no intervalo $[0,T]$, resulta em

$$\int_0^T (\psi_\mu''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi_\mu(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t), w_j)\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau), w_j))d\tau dt = \int_0^T (h(t), w_j)\theta(t)dt. \qquad (2.50)$$

Levando-se em conta as convergências obtidas em (2.47)-(2.49), podemos passar o limite, quando $\mu \to \infty$ em (2.50) e obtendo assim

$$\int_0^T (\psi''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi(t), w_j)\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau), w_j))\theta(t)d\tau dt = \int_0^T (h(t), w_j)\theta(t)dt. \qquad (2.51)$$

De (2.51) e como $(w_j)_{j\in\mathbb{N}}$ é um sistema completo de $H_0^1(\Omega)$ temos:

$$\int_0^T (\psi''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi(t), v)\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau), v))\theta(t)d\tau dt = \int_0^T (h(t), v)\theta(t)dt,$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Da igualdade anterior e após cálculos diretos temos:

$$\psi'' - \Delta\psi + \widehat{\alpha}(t)\psi - \Delta \int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = h(t)$$

em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, provando (2.28).

As condições iniciais (2.29) são verificadas de maneira usual e a unicidade é provada usando o método da energia. Assim concluímos a demonstração do teorema 2.2. $\square$

A função ψ obtida pelo teorema 2.2 é chamada solução forte do problema homogêneo (2.22)-(2.24).

Teorema 2.3 *Sejam:*

$$\psi^0 \in H_0^1(\Omega), \ \ \psi^1 \in L^2(\Omega) \ \ e \ \ h \in L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.52}$$

Então existe uma única função $\psi : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as condições:*

$$\psi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \tag{2.53}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi'(t),v)+((\psi(t),v))+(\widehat{\alpha}(t)\psi(t),v)+((\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau)d\tau,v)) = (h(t),v), \tag{2.54}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$ *e para toda* $v \in H_0^1(\Omega)$*;*

$$\psi'' - \Delta\psi + \widehat{\alpha}(t)\psi - \Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = h \tag{2.55}$$

em $L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$*;*

$$\psi(0) = \psi^0 \ \ \ \psi'(0) = \psi^1, \tag{2.56}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\psi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi(t)\|^2 \ &= \ \int_0^t (h(s),\psi'(s))ds - \int_0^t (\widehat{\alpha}(s)\psi(s),\psi'(s))ds \\ &- \ ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi(\tau)d\tau,\psi(t))) \\ &+ \ \int_0^t ((\int_0^s \frac{\partial}{\partial s}\widehat{Q}(\tau,s)\psi(\tau)d\tau,(s)))ds, \end{aligned} \tag{2.57}$$

$$|\psi'(t)|^2 + \|\psi(t)\|^2 \ \leqslant \ [|\psi^1|^2 + \|\psi^0\|^2 + (\int_0^t |h(s)ds)^2]ce^{4cT}, \forall t \in [0,T] \tag{2.58}$$

onde c é uma constante positiva.

Demonstração: Como $[H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times C([0,T];H_0^1(\Omega))$ é denso em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$, existe uma seqüência $\{\psi_\mu^0, \psi_\mu^1, h_\mu\} \in [H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_0^1(\Omega) \times C([0,T];H_0^1(\Omega))$ tal que

$$\{\psi_\mu^0, \psi_\mu^1, h_\mu\} \to \{\psi^0, \psi^1, h\} \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.59}$$

Aplicando o teorema 2.2 temos que existe uma única solução forte para cada $\mu \in \mathbb{N}$, $\psi_\mu : \Omega \times (0,T) \to \mathbb{R}$, tal que:

$$\psi_\mu \ \in \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.60}$$

$$\psi_\mu' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.61}$$

$$\psi_\mu'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.62}$$

$$\psi_\mu'' - \Delta\psi_\mu + \widehat{\alpha}(t)\psi_\mu - \Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(x,\tau)d\tau = h_\mu \text{ q.s. em } \Omega\times(0,T) \tag{2.63}$$

$$\psi_\mu^0 = \psi_\mu(0) \text{ e } \psi_\mu^1 = \psi_\mu'(0). \tag{2.64}$$

De (2.60), (2.61) e o lema 1.35 temos que $\psi_\mu \in C([0,T];H_0^1(\Omega))$.

De (2.61), (2.62) e o lema 1.35 temos que $\psi_\mu' \in C([0,T];L^2(\Omega))$ e, portanto,

$$\psi_\mu \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)).$$

Multiplicando-se (2.63) por ψ_μ' e integrando em Ω:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi_\mu''(t)\psi_\mu'(t)dx + \int_\Omega -\Delta\psi_\mu(t)\psi_\mu'(t)dx \\ + \int_\Omega \widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t)\psi_\mu'(t)dx \\ + \int_\Omega \psi_\mu'(t)(-\Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau)d\tau)dx &= \int_\Omega h_\mu(t)\psi_\mu'(t)dx\end{aligned}$$

o que implica (usando o teorema de Green) que:

$$\begin{aligned}(\psi_\mu''(t),\psi_\mu'(t)) + ((\psi_\mu(t),\psi_\mu'(t))) \\ + (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t),\psi_\mu'(t)) \\ + \int_0^t ((\widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau),\psi_\mu'(t)))d\tau &= (h_\mu(t),\psi_\mu'(t)).\end{aligned} \tag{2.65}$$

Fazendo $M_3(t) = \int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau)d\tau$. Temos que $M_3(0)=0$ e que

$$M_3'(t) = \frac{\partial M_3}{\partial t}(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau) + \widehat{Q}(t,t)\psi_\mu(t).$$

Então

$$\frac{d}{dt}((M_3(t),\psi_\mu(t))) = ((M_3'(t),\psi_\mu(t))) + ((M_3(t),\psi_\mu'(t))) \tag{2.66}$$

e assim, substituindo (2.66) em (2.65) obtemos:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi_\mu(t)\|^2 &= (h_\mu(t), \psi'_\mu(t)) - (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t), \psi'_\mu(t)) \\
&- \frac{d}{dt}((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi_\mu(\tau)d\tau, \psi_\mu(t))) \\
&+ ((\int_0^t \frac{\partial}{\partial t}\widehat{Q}(\tau, t)\psi_\mu(\tau)d\tau, \psi_\mu(t))) \\
&+ ((\widehat{Q}(t,t)\psi_\mu(t), \psi_\mu(t))). \qquad (2.67)
\end{aligned}
$$

Integrando (2.67) de 0 a t:

$$
\frac{1}{2}|\psi'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu(t)\|^2 = \frac{1}{2}|\psi'_\mu(0)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu(0)\|^2
$$
$$
+ \int_0^t (h_\mu(s), \psi'_\mu(s))ds - \int_0^t (\widehat{\alpha}(s)\psi_\mu(s), \psi'_\mu(s))
$$
$$
-((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi_\mu(\tau)d\tau, \psi_\mu(t))) + \int_0^t ((\int_0^t \frac{\partial}{\partial s}\widehat{Q}(\tau, s)\psi_\mu(\tau)d\tau, \psi_\mu(s)))ds
$$
$$
+ \int_0^t ((\widehat{Q}(s,s)\psi_\mu(s), \psi_\mu(s)))ds. \qquad (2.68)
$$

Partindo de (2.68) levando em conta as hipóteses (2.17), (2.18) e utilizando a desigualdade de Hölder obtemos o seguinte:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\psi'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu(t)\|^2 &\leqslant 2\{\frac{1}{2}|\psi'_\mu(0)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu(0)\|^2\} \\
&+ 2\int_0^t |h_\mu(s)|_{L^2(\Omega)}\sqrt{|\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2}ds \\
&+ 2c\int_0^t \{|\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2\}ds. \qquad (2.69)
\end{aligned}
$$

Definindo

$$
\begin{aligned}
g^2(t) &= |\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2 \\
b^2 &= |\psi'_\mu(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(0)\|^2 \\
m(t) &= |h_\mu(t)| + cg(t).
\end{aligned}
$$

Então pelo Lema 1.24 resulta que

$$
\begin{aligned}
\sqrt{|\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2} &= \sqrt{2}\sqrt{|\psi'_\mu(0)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(0)\|^2} + 2\int_0^T |h_\mu(s)|ds \\
&+ 2c\int_0^t \sqrt{|\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2}ds. \qquad (2.70)
\end{aligned}
$$

Logo aplicando a desigualdade de Gronwall e elevando ao quadrado obtemos:

$$|\psi'_\mu(s)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(s)\|^2 \leqslant [|\psi^1_\mu|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi^0_\mu\|^2 + (\int_0^t |h_\mu(s)|ds)^2]e^{4cT}. \quad (2.71)$$

Agora, para cada $\sigma \in \mathbb{N}$, temos de acordo com o teorema (2.2) que:

$$\psi''_\sigma - \Delta\psi_\sigma + \widehat{\alpha}(t)\psi_\sigma - \Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\sigma(\tau)d\tau = h_\sigma \text{ q.s. em } \Omega\times(0,T) \quad (2.72)$$

$$\psi^0_\sigma = \psi_\sigma(0) \text{ e } \psi^1_\sigma = \psi'_\sigma(0), \quad (2.73)$$

portanto subtraindo (2.72) e (2.73) de (2.63) e (2.64), respectivamente, resulta em:

$$(\psi_\mu - \psi_\sigma)'' - (\Delta\psi_\mu - \Delta\psi_\sigma) + \widehat{\alpha}(t)(\psi_\mu - \psi_\sigma) - \Delta\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)(\psi_\mu(\tau) - \psi_\sigma(\tau))d\tau = (h_\mu - h_\sigma) \quad (2.74)$$

$$(\psi_\mu(t) - \psi_\sigma(t))(0) = \psi^0_\mu - \psi^0_\sigma \quad (\psi'_\mu(t) - \psi'_\sigma(t))(0) = \psi^1_\mu - \psi^1_\sigma. \quad (2.75)$$

De maneira análoga a usada para obtermos (2.71) para o problema (2.74)-(2.75) concluímos que:

$$|\psi'_\mu(t) - \psi'_\sigma(t)|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi_\mu(t) - \psi_\sigma(t)\|^2 \leqslant [|\psi^1_\mu - \psi^1_\sigma|^2_{L^2(\Omega)} + \|\psi^0_\mu - \psi^0_\sigma\|^2 + (\int_0^t |h_\mu(s) - h_\sigma(s)|ds)^2]e^{4cT} \quad (2.76)$$

logo tomando o limite em (2.76) e considerando (2.59) determinamos ψ tal que:

$$\psi_\mu \rightarrow \psi \text{ em } C([0,T];H^1_0(\Omega)) \quad (2.77)$$

$$\psi'_\mu \rightarrow \psi' \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)). \quad (2.78)$$

Compondo-se (2.63) com $v \in H^1_0(\Omega)$ chegamos a:

$$(\psi''_\mu, v) + ((\psi_\mu, v)) + (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu, v) + ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau)d\tau), v) = (h_\mu, v). \quad (2.79)$$

Multiplicando-se (2.79) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 a T,

$$\int_0^T (\psi''_\mu(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi_\mu(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau,t)\psi_\mu(\tau)d\tau, v))\theta(t)dt = \int_0^T (h_\mu(t), v)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes a primeira integral acima resulta que:

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\psi_\mu'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\psi_\mu(t), v))\theta(t)dt \\
+ \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi_\mu(t), v)\theta(t)dt \\
+ \int_0^T ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi_\mu(\tau)d\tau, v))\theta(t)dt &= \int_0^T (h_\mu(t), v)\theta(t)dt. \quad (2.80)
\end{aligned}$$

Assim tomando o limite em (2.80) quando $\mu \to \infty$ e lembrando de (2.77), (2.78) e (2.59) concluímos,

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (\psi'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), v))\theta(t)dt \\
+ \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi(t), v)\theta(t)dt \\
+ \int_0^T ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi(\tau)d\tau, v))\theta(t)dt &= \int_0^T (h(t), v)\theta(t)dt \quad (2.81)
\end{aligned}$$

na qual aplicando a definição de derivada das distribuições na primeira integral acima obtém-se:

$$\begin{aligned}
\int_0^T \frac{d}{dt}(\psi'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), v))\theta(t)dt \\
+ \int_0^T (\widehat{\alpha}(t)\psi(t), v)\theta(t)dt \\
+ \int_0^T ((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi(\tau)d\tau, v))\theta(t)dt &= \int_0^T (h(t), v)\theta(t)dt. \quad (2.82)
\end{aligned}$$

De (2.77), (2.78) e (2.82) obtemos uma função $\psi : \Omega \times (0, T) \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\psi \in C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega)) \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(\psi'(t), v) + ((\psi(t), v)) + (\widehat{\alpha}(t)\psi(t), v) \\
+((\int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi(\tau)d\tau, v)) &= (h(t), v) \quad (2.84)
\end{aligned}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$ para toda $v \in H_0^1(\Omega)$. Além disso

$$\psi'' - \Delta\psi + \widehat{\alpha}(t)\psi - \Delta \int_0^t \widehat{Q}(\tau, t)\psi(\tau)d\tau = h \text{ em } L^1(0, T; H^{-1}(\Omega)). \quad (2.85)$$

Para provar (2.57) e (2.58), tomamos o limite quando $\mu \to \infty$ e usamos as convergências (2.77) e (2.78) em (2.68) e (2.71), respectivamente.

As condições iniciais verifica-se de maneira usual e a unicidade é provada usando o método dado por Visik, M.I. - Ladyzenskaja, O.A. [28]. Assim fica provado o teorema 2.3. $\square$

A função ψ obtida pelo teorema 2.3 é chamada solução fraca do problema homogêneo (2.22)-(2.24).

2.2 Solução por Transposição

Nesta seção estamos interessados na solução por transposição do problema (2.14)-(2.16). Iniciaremos com a definição de solução por transposição do problema citado e também verificaremos a existência e unicidade de tal solução.

Definição 2.4 *Dada* $g \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ *uma função* $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ *é chamada solução por transposição de (2.14)-(2.16) se*

$$\int_0^T \int_\Omega uh dx dt = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \nu} dx dt \tag{2.86}$$

para toda $h \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$, *onde*

$$v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma \tag{2.87}$$

e ϕ *é solução forte de*

$$\phi_{tt} - \Delta\phi + \alpha(t)\phi - \Delta \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma = h \;\; em \;\; \Omega \times (0,T), \tag{2.88}$$

$$\phi = 0 \;\; sobre \;\; \partial\Omega \times (0,T), \tag{2.89}$$

$$\phi(T) = 0, \quad \phi_t(T) = 0 \;\; em \;\; \Omega. \tag{2.90}$$

Observações:

i) A solução forte para o problema (2.88)-(2.90) é garantida pelo teorema 2.2.

ii) Note que $\gamma_1 v = \dfrac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(0,T;H^{1/2}(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\partial\Omega)) = L^2(\partial\Omega\times(0,T))$.

Seja $g \in H_0^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$. Então existe $\widehat{g} \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que $\gamma_0\widehat{g} = g$.

Agora tomando $z = u - \widehat{g}$ com $\widehat{g}$ fixa. Então:

- $z_{tt} = u_{tt} - \widehat{g}_{tt}$
- $\Delta z = \Delta u - \Delta\widehat{g}$
- $\alpha(t)z = \alpha(t)u - \alpha(t)\widehat{g}$
- $-\Delta\int_0^t Q(t,\sigma)z(x,\sigma)d\sigma = -\Delta\int_0^t Q(t,\sigma)u(x,\sigma)d\sigma + \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)\widehat{g}(x,\sigma)d\sigma.$

Notemos que

$$\gamma_0 z = \gamma_0 u - \gamma_0\widehat{g} = g - g = 0$$

$$z(0) = u(0) - \widehat{g}(0) = 0$$

$$z_t(0) = u_t(0) - \widehat{g}_t(0) = 0.$$

Por outro lado, substituindo $u = z + \widehat{g}$ em (2.14) chegamos a:

$$z_{tt} + \widehat{g}_{tt} - \Delta(z+\widehat{g}) + \alpha(t)(z+\widehat{g}) - \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)(z(\sigma)+\widehat{g}(\sigma))d\sigma = 0,$$

ou seja,

$$z_{tt} - \Delta z + \alpha(t)z - \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)z(\sigma)d\sigma$$

$$= \widehat{g}_{tt} + \Delta\widehat{g} - \alpha(t)\widehat{g} + \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)\widehat{g}(\sigma)d\sigma \ \text{ em } \ \Omega\times(0,T), \tag{2.91}$$

$$z = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.92}$$

$$z(0) = 0, \quad z_t(0) = 0 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2.93}$$

Note que o lado direito da igualdade (2.91) é uma função de $L^2(0,T;L^2(\Omega))$. Assim pelo teorema 2.3 temos que

$$z \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

e do fato de $\widehat{g}$ pertencer a $H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ temos que

$$\widehat{g} \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^2(\Omega))$$

e portanto

$$u \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

donde

$$\gamma_0 u = \gamma_0 z + \gamma_0 \widehat{g} = 0 + g = g \tag{2.94}$$

$$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0. \tag{2.95}$$

Também pelo teorema 2.3

$$\frac{d}{dt}((z+\widehat{g})_t, w) + (((z+\widehat{g}), w)) + (\alpha(t)(z+\widehat{g}), w) + ((\int_0^t Q(\sigma,t)(z+\widehat{g})(\sigma)d\sigma, w)) = 0 \tag{2.96}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$ e para toda w em $H_0^1(\Omega)$ de onde resulta que

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(t)u - \Delta \int_0^t Q(t,\sigma)u(\sigma) = 0 \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.97}$$

Portanto u é solução fraca de (2.14)-(2.16) e é única (como z é única e fixamos $\widehat{g}$ então u é única).

Agora demonstraremos que u é solução por transposição de (2.14)-(2.16) no sentido da definição 2.4.

De fato, seja $h \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$ e o problema

$$\phi_{tt} - \Delta\phi + \alpha(t)\phi - \Delta \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma = h \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{2.98}$$

$$\phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{2.99}$$

$$\phi(T) = 0, \quad \phi_t(T) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{2.100}$$

Sabemos pelo teorema 2.2 que o problema (2.98)-(2.100) tem solução forte. E da sua regularidade resulta que (multiplicando 2.14 por ϕ e integrando em $\Omega \times (0,T)$):

$$\int_0^T \int_\Omega u(x,t)h(x,t) = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g(x,t)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x,t)dxdt \tag{2.101}$$

onde v é dada por $v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma$, provando assim que dado $g \in H_0^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$ existe uma u solução por transposição para o problema (2.14)-(2.16) com

$$u \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.102}$$

Como consequência disto temos o seguinte lema.

Lema 2.5 *Seja u uma solução de (2.14)-(2.16) com $g \in H_0^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$ então,*

$$\|u\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u_t\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leqslant M\|g\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))}. \tag{2.103}$$

Demonstração: Fixemos $0 < s \leqslant T$ e seja ϕ uma solução para o seguinte problema homogêneo:

$$\phi_{tt} - \Delta\phi + \alpha(t)\phi - \Delta\int_t^s Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma = 0 \ \text{ em } \ \Omega\times(0,T), \tag{2.104}$$

$$\phi = 0 \ \text{ sobre } \ \partial\Omega\times(0,T), \tag{2.105}$$

$$\phi(s) = \phi_0, \quad \phi_t(s) = \phi_1 \ \text{ em } \ \Omega. \tag{2.106}$$

onde ϕ_0 e ϕ_1 pertencem a $\mathcal{D}(\Omega)$ (este problema tem solução conforme o teorema (2.2)).

Da equação $v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^s Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma$ podemos obter (ver [9]):

$$\phi(x,t) = v(x,t) + \int_t^s R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma \tag{2.107}$$

onde $R(\sigma,t)$ é determinado por $Q(\sigma,t)$ e $R(\sigma,t) \in C^2([0,\infty)\times[0,\infty))$.

Agora de (2.107) e fazendo $\phi(x,t) = v(x,t) - \int_s^t R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma$ obtemos:

- $\phi_t(x,t) = v_t(x,t) + \int_t^s R_t(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma - R(t,t)v(x,t)$

- $\phi_{tt}(x,t) = v_{tt}(x,t) + \int_t^s R_{tt}(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma - 2R_t(t,t)v(x,t) - R_\sigma(t,t)v(x,t) - R(t,t)v_t(x,t)$

- $\Delta\phi(x,t) = \Delta v(x,t) + \Delta \int_t^s R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma$

- $\alpha(t)\phi(x,t) = \alpha(t)v(x,t) + \int_t^s \alpha(t)R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma.$

Então substituindo em (2.104) obtem-se

$$v_{tt}(x,t) - \Delta v(x,t) - R_{tt}v_t(x,t) + [\alpha(t) - 2R_t(t,t) - R_\sigma(t,t)]v(x,t)$$

$$+ \int_t^s \alpha(t)R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma - \int_t^s R_{tt}(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma = 0, \tag{2.108}$$

$$v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,s), \tag{2.109}$$

$$v_0 = v(x,s) = \phi(x,s) = \phi_0 \quad v_1 = v_t(x,s) = \phi_1 - Q(s,s)\phi_0. \tag{2.110}$$

Usando o método de Faedo-Galerkin obtemos que o problema (2.108)-(2.110) tem solução v na classe

$$v \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)),$$

e satisfaz

$$\|v\|_{C([0,s];H_0^1(\Omega))} + \|v_t\|_{C([0,s];L^2(\Omega))} \leqslant M(\|v_0\|_{H_0^1(\Omega)} + \|v_1\|_{L^2(\Omega)}), \tag{2.111}$$

onde M é uma constante dependente de T, porém independente de v_0, v_1 e $s \in (0,T]$.

Reescrevendo (2.108) como

$$v_{tt}(x,t) - \Delta v(x,t) = h(x,t) \text{ em } \Omega \times (0,s) \tag{2.112}$$

onde $h(x,t) = R_{tt}v_t(x,t) - [\alpha(t) - 2R_t(t,t) - R_\sigma(t,t)]v(x,t) - \int_t^s \alpha(t)R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma + \int_t^s R_{tt}(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma$. Note que $h \in L^1(0,T; L^2(\Omega))$.

Então do Lema 1.36 (com o intervalo [0,s]) e da desigualdade (2.111) obtemos

$$\int_0^s \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant M(\|v_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|v_1\|^2_{L^2(\Omega)})$$

e, por (2.110), temos

$$\int_0^s \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant M(\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{2.113}$$

onde M é independente de ϕ_0, ϕ_1 e de $s \in (0,T]$.

Por outro lado, multiplicando-se (2.104) por u e integrando em $\Omega\times(0,s)$ obtemos;

$$(\phi_1, u(s)) - \langle \phi_0, u_t(s)\rangle = \int_0^s \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \nu} dxdt. \tag{2.114}$$

Então, como $g \in H_0^2(0,s;H^{3/2}(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,s;L^2(\partial\Omega))$, $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(0,s;H^{1/2}(\partial\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,s;L^2(\partial\Omega))$, tomando $\phi_0 = 0$ em (2.114) e usando a desigualdade de Hölder e (2.113) resulta

$$|(\phi_1, u(s))| \leqslant M\|g\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,s))}\|\phi_1\|$$

e portanto

$$\|u(s)\|_{L^2(\Omega)} \leqslant M\|g\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,s))} \tag{2.115}$$

onde M é independente de ϕ_1, g e para todo $0 \leqslant s \leqslant T$.

Analogamente tomando $\phi_1 = 0$ em (2.114) obtemos:

$$\|u_t(s)\|_{H^{-1}(\Omega)} \leqslant M\|g\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,s))}. \tag{2.116}$$

Agora somando (2.115) com (2.116) obtemos o lema. □

De posse destes resultados podemos provar o seguinte:

Lema 2.6 *Dada $g \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$, existe uma única solução de (2.14)-(2.16) no sentido da definição 2.4.*

Demonstração: Como $g \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ existe uma sequência g^m em $H_0^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$ tal que g^m converge forte para g em $L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ (pois $H_0^2(0,T;H^{3/2}(\partial\Omega))$ é denso em $L^2(\partial\Omega \times (0,T))$). Logo, g^m é uma seqüência de Cauchy em $L^2(\partial\Omega \times (0,T))$. Mas do exposto acima temos que para cada g^m existe u^m solução de (2.14)-(2.16), isto é, u^m pertence $C([0,T];H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Portanto, para cada g^m e g^n existem u^m e u^n satisfazendo (pelo lema 2.5):

$$\|u^m - u^n\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|u_t^m - u_t^n\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leqslant M\|g^m - g^n\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))}. \tag{2.117}$$

No limite quando $m, n \to \infty$ em (2.117) temos que existe uma função $u \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ tal que $u^m \to u$.

Notemos que u é uma solução por transposição de (2.14)-(2.16).
De fato, u^m satisfaz

$$\int_0^T \int_\Omega u^m h dx dt = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g^m \frac{\partial v}{\partial \nu} dx dt \tag{2.118}$$

onde tomando limite quando $m \to \infty$, e usando a convergência acima, resulta que

$$\int_0^T \int_\Omega u h dx dt = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \nu} dx dt,$$

o que prova o desejado.

A unicidade:

Suponhamos u, w soluções por transposição do problema (2.14)-(2.16). Então u, w satisfazem:

$$\int_0^T \int_\Omega u h dx dt = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \nu} dx dt \tag{2.119}$$

$$\int_0^T \int_\Omega w h dx dt = -\int_0^T \int_{\partial\Omega} g \frac{\partial v}{\partial \nu} dx dt. \tag{2.120}$$

Logo subtraindo (2.120) de (2.119) obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega (u - w) h dx dt = 0 \ \forall \ h \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$$

e pelo lema de Du Boys Raymund temos que $u - w = 0$, ou seja, $u = w$.

□

Capítulo 3

A Desigualdade Inversa e a Controlabildade Exata De Uma Equação Integro-Diferencial De Segunda Ordem

Neste capítulo mostraremos a desigualdade inversa, a qual será usada para provar a controlabilidade exata para o problema (2.14)-(2.16), a qual também será feita.

3.1 A Desigualdade Inversa

Nesta seção apresentamos uma propriedade de regularidade da solução. Seja

$$w(x,t) = v(x,t)\exp(\frac{1}{2}\int_t^T R(\sigma,\sigma)d\sigma) \tag{3.1}$$

onde v é definida por $v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma$ em termos de ϕ, a qual satisfaz (2.19) com $f \equiv 0$.

Então, de (2.112) com $s = T$ e derivando (3.1) resulta:

$$w_{tt} - \Delta w + \gamma(t)w + \int_t^T G(\sigma,t)w(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \tag{3.2}$$

onde $\gamma(t)$ e $G(\sigma,t)$ são expressas em termos de $\alpha(t)$ e $R(\sigma,t)$, e

$$\gamma(t) \in C([0,\infty)) \tag{3.3}$$

$$G(\sigma,t) \in C([0,\infty) \times [0,\infty)). \tag{3.4}$$

Lema 3.1 *Seja T maior que o diâmetro de Ω e seja Ω_0 um subconjunto aberto de Ω tal que $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$. Suponha que $w \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz (3.2) no sentido das distribuições em $\Omega \times (0,T)$. Se $w = 0$ em $(\Omega \backslash \Omega_0) \times (0,T)$, então $w \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$.*

Demonstração: Por hipótese temos que $w = 0$ em $(\Omega\backslash\Omega_0) \times (0,T)$, ou seja, $w(x,t) = 0$ se $(x,t) \in (\Omega\backslash\Omega_0)\times(0,T)$. Tomando $Q_0 = (\,\Omega\times(0,T)\,)\backslash\overline{(\,\Omega_0 \times (0,T)\,)}^{\,\Omega\times(0,T)}$, temos que Q_0 é um aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ e que w se anula em Q_0. De fato,

$$
\begin{aligned}
(x,t) \in Q_0 \;&\Leftrightarrow\; (x,t) \in \Omega \times (0,T) \text{ e } (x,t) \notin \overline{\Omega_0 \times (0,T)}^{\,\Omega\times(0,T)} \\
&\Rightarrow\; (x,t) \in \Omega \times (0,T) \text{ e } (x,t) \notin \Omega_0 \times (0,T) \\
&\Rightarrow\; (x,t) \in (\Omega\backslash\Omega_0) \times (0,T)
\end{aligned}
$$

ou seja, $w(x,t) = 0 \;\forall\, (x,t) \in Q_0$.

Consideremos $\mathcal{O}_w$ o maior aberto do $\mathbb{R}^{n+1}$ contido em $\Omega\times(0,T)$ onde w se anula. Logo, $Q_0 \subset \mathcal{O}_w$, isto é,

$$
(\Omega\backslash\Omega_0) \times (0,T) \setminus \overline{\Omega_0 \times (0,T)}^{\,\Omega\times(0,T)} \subset \mathcal{O}_w.
$$

Tomando o complementar em $\Omega \times (0,T)$ em ambos os lados da inclusão acima, obtemos que

$$
\begin{aligned}
(\Omega \times (0,T)) \setminus \mathcal{O}_w \;&\subset\; \overline{\Omega_0 \times (0,T)}^{\,\Omega\times(0,T)} \\
&=\; \overline{\Omega_0 \times (0,T)} \,\cap\, \Omega \times (0,T) \\
&=\; \overline{\Omega}_0 \times (0,T) \,\cap\, \Omega \times (0,T),
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
supp\; w \subset \overline{\Omega}_0 \times (0,T).
$$

Pondo $w^\varepsilon = \rho_\varepsilon * \widetilde{w}$, onde ρ_ε é uma sucessão regularizante em $\mathbb{R}^n$ e

$$
\widetilde{w}(x,t) = \begin{cases} w(x,t) & \text{se } (x,t) \in \Omega \times [0,T] \\ 0 & \text{se } (x,t) \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega) \times [0,T], \end{cases}
$$

então

$$\begin{aligned} supp\ w^\varepsilon &\subset supp\ \rho_\varepsilon + supp\ \widetilde{w} \\ &\subset (B_\varepsilon(0) + \overline{\Omega}_0) \times [0,T] \\ &\subset \Omega \times [0,T] \end{aligned}$$

para um ε suficientemente pequeno, ou seja, w^ε tem suporte compacto em $\Omega \times [0,T]$.

Agora como $w(t) \in L^2(\Omega)$ temos que $\widetilde{w}(t) \in L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e assim, $w^\varepsilon(t) = (\rho_\varepsilon * \widetilde{w})(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (conforme [3], pg 69) e como $w^\varepsilon(t)$ tem suporte compacto em Ω, temos que $w^\varepsilon(t) \in C_0^\infty(\Omega)$, o qual está imerso em $H_0^2(\Omega)$. Além disso, $w^\varepsilon \in C^1([0,T]; H_0^2(\Omega))$.

Agora escrevendo

$$w^\varepsilon = \psi^\varepsilon + \xi^\varepsilon \tag{3.5}$$

onde $\psi^\varepsilon \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, a qual é uma solução de

$$\psi_{tt}^\varepsilon - \Delta\psi^\varepsilon = -\gamma(t)w^\varepsilon - \int_t^T G(\sigma,t)w^\varepsilon(x,\sigma)d\sigma \text{ em } \Omega \times (0,T) \tag{3.6}$$

$$\psi^\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{3.7}$$

$$\psi^\varepsilon(T) = 0, \quad \psi_t^\varepsilon(T) = 0 \text{ em } \Omega \tag{3.8}$$

e $\xi^\varepsilon \in C([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$, a qual é uma solução de

$$\xi_{tt}^\varepsilon - \Delta\xi^\varepsilon = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \tag{3.9}$$

$$\xi^\varepsilon = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{3.10}$$

$$\xi^\varepsilon(T) = w^\varepsilon(T), \quad \xi_t^\varepsilon(T) = w_t^\varepsilon(T) \text{ em } \Omega. \tag{3.11}$$

Fazendo uma reversão de tempo e usando o Lema 1.36, (3.3) e (3.4) obtemos

$$\|\psi^\varepsilon\|^2_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} + \|\psi_t^\varepsilon\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial\nu}\right)^2 dxdt \leqslant M\|w^\varepsilon\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}.$$

Por outro lado temos que $\|w^\varepsilon\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant c\|w\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}$, onde $c > 0$. Então,

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} \leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))},$$

$$\|\psi^\varepsilon_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}.$$

Portanto,

$$\|\psi^\varepsilon\|_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} + \|\psi^\varepsilon_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \tag{3.12}$$

e, também,

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant M\|w\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))} \tag{3.13}$$

para uma constante M independente de ε e w. Sendo *supp* $w^\varepsilon \subset \Omega \times [0,T]$, temos que

$$0 = \frac{\partial w^\varepsilon}{\partial \nu} = \frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \nu} + \frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T),$$

ou seja,

$$\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \nu} = -\frac{\partial \xi^\varepsilon}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T). \tag{3.14}$$

Logo combinando o lema 1.37 com (3.13), resulta que

$$M(\|w^\varepsilon(T)\|_{H^1_0(\Omega)} + \|w^\varepsilon_t(T)\|_{L^2(\Omega)}) \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi^\varepsilon}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant M\|w\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}$$

isto é,

$$M(\|w^\varepsilon(T)\|_{H^1_0(\Omega)} + \|w^\varepsilon_t(T)\|_{L^2(\Omega)}) \leqslant M\|w\|^2_{C([0,T];L^2(\Omega))}. \tag{3.15}$$

Agora segue conforme (2.58) e de (3.15) resulta

$$\begin{aligned}\|w^\varepsilon\|_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} + \|w^\varepsilon_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} &\leqslant \|w^\varepsilon(T)\|_{H^1_0(\Omega)} + \|w^\varepsilon_t(T)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}\end{aligned}$$

o que implica que

$$\|w^\varepsilon\|_{C([0,T];H^1_0(\Omega))} + \|w^\varepsilon_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}. \tag{3.16}$$

Obtemos resultados análogos se tomarmos ε_1 suficientemente pequeno e $w^{\varepsilon_1} = \rho_{\varepsilon_1} * \widetilde{w}$. Assim $w^{\varepsilon} - w^{\varepsilon_1}$ satisfaz (3.2) e também que

$$\|w^{\varepsilon} - w^{\varepsilon_1}\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} + \|w_t^{\varepsilon} - w_t^{\varepsilon_1}\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|w - w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}$$

o que implica que (w^{ε}) e (w_t^{ε}) são sucessões de Cauchy.

Portanto w^{ε} converge para $\chi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$. Por outro lado temos que $w^{\varepsilon} = \rho_{\varepsilon} * \widetilde{w}$ converge para $w \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T))$ e sua derivada para w_t em $\mathcal{D}'(\Omega \times (0,T))$. Logo pela unicidade do limite temos que $w = \chi$.

Além disso tomando limite em (3.16) e levando-se em conta as convergências obtidas acima concluímos

$$\|w\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega))} + \|w_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|w\|_{C([0,T];L^2(\Omega))}. \tag{3.17}$$

□

Lema 3.2 *Seja T maior que o diâmetro de Ω e seja $w \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$ uma solução de (3.2) em $\Omega \times (0,T)$ tal que $\dfrac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$. Então $w = 0$ em $\Omega \times (0,T)$.*

Demonstração: Seja Ω_1 um subconjunto aberto e limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira regular tal que $\overline{\Omega} \subset \Omega_1$ e seja $T >$ diâmetro $\Omega_1 >$ diâmetro de Ω. Podemos estender w para $\Omega_1 \times (0,T)$ tal que $w(x,t) = 0$ para $(x,t) \in (\Omega_1 \setminus \Omega) \times (0,T)$, que ainda denotamos por w. Sendo $w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0$ sobre $\partial\Omega \times (0,T)$, w pertence a $C([0,T];H_0^1(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1))$, e satisfaz

$$w_{tt} - \Delta w + \gamma(t)w + \int_t^T G(\sigma,t)w(x,\sigma)d\sigma = 0 \tag{3.18}$$

no sentido das distribuições em $\Omega_1 \times (0,T)$.

Seja $\Im$ o conjunto dos $w \in C([0,T];H_0^1(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1))$ tal que w é uma solução de (3.18) em $\Omega_1 \times (0,T)$ e $w = 0$ em $(\Omega_1 \setminus \Omega) \times (0,T)$. Observemos que $\Im$

munido com a norma de $C([0,T];H_0^1(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1))$ a qual denotaremos por $\|\cdot\|_{\Im}$ é um espaço de Banach.

Vamos mostrar que $\Im$ tem dimensão finita. De fato, basta mostrar que

$$\mathcal{H} = \{w \in \Im; \|w\|_{\Im} \leqslant 1\}. \tag{3.19}$$

é compacto em $\Im$.

Para isto, tomemos $w \in \mathcal{H}$ e seja

$$\eta_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.20}$$

Como $w \in C([0,T];H_0^1(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1))$, implicando que $\eta_i = \frac{\partial w}{\partial x_i} \in C([0,T];L^2(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega_1))$, e assim podemos aplicar o lema 3.1 para cada η_i, de onde obtemos $\eta_i \in \Im$. Por (3.17) para η_i obtemos:

$$\|\eta_i\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega_1))} + \|\eta_i'\|_{C([0,T];L^2(\Omega_1))} \leqslant M\|\eta_i\|_{C([0,T];L^2(\Omega_1))}$$

de onde segue que

$$\|\eta_i\|_{\Im} \leqslant M \left\| \frac{\partial w}{\partial x_i} \right\|_{C([0,T];L^2(\Omega_1))}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
\|\eta_i\|_{\Im} &\leqslant M\|w\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega_1))} \\
&\leqslant M[\|w\|_{C([0,T];H_0^1(\Omega_1))} + \|w_t\|_{C([0,T];L^2(\Omega_1))}] \\
&\leqslant M\|w\|_{\Im} \\
&\leqslant M
\end{aligned}$$

pois $w \in \mathcal{H}$ e onde M é uma constante positiva independente de w.

Assim segue que $\mathcal{H}$ é limitado em $C([0,T];H_0^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1))$, e portanto de (3.18) temos que $\mathcal{H}$ é limitado em $C^2([0,T];L^2(\Omega_1))$. Assim $\mathcal{H}$ é limitado em $C([0,T];H_0^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1)) \cap C^2([0,T];L^2(\Omega_1))$.

De $\mathcal{H}$ ser limitado em

$$C([0,T];H_0^1(\Omega_1) \cap H^2(\Omega_1)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega_1)) \cap C^2([0,T];L^2(\Omega_1)),$$

usando o corolário 1.23, concluímos que $\mathcal{H}$ é compacto em $\Im$.

Agora como $\Im$ tem dimensão finita e $\frac{\partial}{\partial x_1}$ é um operador linear de $\Im$ em $\Im$, existe um $N \geqslant 1$ tal que

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^N w + \alpha_1 \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{N-1} w + \cdots + \alpha_{N-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right) w + \alpha_N w = 0, \tag{3.21}$$

para algumas constantes $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N$; (conforme [7] pg. 191).

Vamos mostrar que $w = 0$ em $\Omega_1 \times (0,T)$. Com efeito, para isto usamos a seguinte notação

$$y = x_1 \in \mathbb{R} \tag{3.22}$$

$$z = (x_2, x_3, x_4, \cdots x_n, t) \in \mathbb{R}^n \tag{3.23}$$

tal que $(x,t) = (y,z)$. Agora escolhemos algum $(y_0, z_0) \in \overline{\Omega} \times (0,T)$. Então existe um y_1 tal que $(y_1, z_0) \in (\Omega_1 \backslash \overline{\Omega}) \times (0,T)$ e um segmento de reta unindo (y_1, z_0) e (y_0, z_0) contido em $\Omega_1 \times (0,T)$. Também existem números positivos δ_1 e δ_2 tais que o cilindro $I_{\delta_1} \times B_{\delta_2}$ esteja contido em $\Omega_1 \times (0,T)$, onde $I_{\delta_1} = (y_1 - \delta_1, y_0 + \delta_1)$ e $B_{\delta_2} = \{z \in \mathbb{R}^n : |z - z_0| < \delta_2\}$. Podemos ainda requerer que o cilindro $[y_1 - \delta_1, y_1] \times B_{\delta_2}$ esteja contido em $(\Omega_1 \backslash \overline{\Omega}) \times (0,T)$. Tomando $\phi \in C_0^\infty(B_{\delta_2})$ e fazendo

$$\xi(y) = \int_{B_{\delta_2}} w\phi dz. \tag{3.24}$$

Então, $\xi(y) \in L^2(I_{\delta_1})$. De fato:

$$\begin{aligned} |\xi(y)|^2 &= |\int_{B_{\delta_2}} w(y,z)\phi(z)dz|^2 \\ &= |(w(y), \phi)_{L^2(B_{\delta_2})}|^2 \\ &\leqslant \|w(y)\|^2_{L^2(B_{\delta_2})} \|\phi\|^2_{L^2(B_{\delta_2})}. \end{aligned}$$

Agora integrando em I_{δ_1} obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{I_{\delta_1}} |\xi(y)|^2 dy &\leqslant k \int_{I_{\delta_1}} \|w(y)\|^2_{L^2(B_{\delta_2})} dy \\
&= k \int_{I_{\delta_1}} \int_{B_{\delta_2}} |w(y,z)|^2 dz dy \\
&\leqslant \int_0^T \int_{\Omega_1} |w(y,z)|^2 dz dy \\
&= k\|w\|^2_{L^2(\Omega \times (0,T))}
\end{aligned}$$

provando o desejado. Temos também

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^N \xi + \alpha_1 \left(\frac{d}{dy}\right)^{N-1} \xi + \ldots + \alpha_N \xi = 0 \tag{3.25}$$

no sentido das distribuições em I_{δ_1}. De fato, seja $\theta \in \mathcal{D}(I_{\delta_1})$. Então,usando Fubini e a definição de distribuição, obtemos a seguinte igualdade,

$$\langle \left(\frac{d}{dy}\right)^N \xi + \alpha_1 \left(\frac{d}{dy}\right)^{N-1} \xi + \ldots + \alpha_N \xi, \theta \rangle$$

$$= \langle \left(\frac{d}{dy}\right)^N w + \alpha_1 \left(\frac{d}{dy}\right)^{N-1} w + \ldots + \alpha_N w,\, \phi\theta \rangle.$$

Desta igualdade e de (3.21) resulta que

$$\left(\frac{d}{dy}\right)^N \xi + \alpha_1 \left(\frac{d}{dy}\right)^{N-1} \xi + \ldots + \alpha_N \xi = 0,$$

no sentido das distribuições em I_{δ_1}.

Como a equação diferencial linear de ordem n dada por (3.25) tem coeficientes constantes então $\xi \in C^\infty(I_{\delta_1})$.

Observemos o seguinte:

$$|\xi(y)| = |\int_{B_{\delta_2}} w(x,z)\phi(z) dz|,$$

então

$$\int_{y_1-\delta_1}^{y_1} |\xi(y)| dy \leqslant \int_{y_1-\delta_1}^{y_1} \int_{B_{\delta_2}} |w(x,z)||\phi(z)| dz dy = 0,$$

pois $w = 0$ em $(\Omega_1 \setminus \Omega) \times (0,T)$. Então

$$\int_{y_1-\delta_1}^{y_1} |\xi(y)|dy \leqslant 0$$

o que implica

$$\xi = 0 \text{ em } (y_1 - \delta_1, y_1)$$

pois ξ é contínua e $|\xi| \geqslant 0$.

Por (3.25) e tomando $y_1^* \in (y_1 - \delta_1, y_1)$ temos que

$$\xi(y_1^*) = 0, \left(\frac{d}{dy}\right)\xi(y_1^*) = 0, \ldots, \left(\frac{d}{dy}\right)^{N-1}\xi(y_1^*) = 0.$$

Então conforme ([2] pg 142), existe uma única solução com tais dados. Mas note que a função nula satisfaz (3.25) e tais dados. Logo $\xi = 0$ em I_{δ_1}. Então

$$\xi(y) = \int_{B_{\delta_2}} w(y,z)\phi(z)dz$$

tomando $\theta \in C_0^\infty(I_{\delta_1})$ e $A = I_{\delta_1} \times B_{\delta_2}$ temos

$$\int_{I_{\delta_1}} \xi(y)\theta(y)dy = \int_A w(y,z)\phi(z)\theta(y)dzdy,$$

desta igualdade, do fato de que $\xi = 0$ em I_{δ_1} e por argumentos de densidade resulta,

$$0 = \int_A w(y,z)\psi(y,z)dzdy \quad \forall\, \psi \in C_0^\infty(A)$$

o que implica que

$$w(y,z) = 0 \text{ em } I_{\delta_1} \times B_{\delta_2}.$$

Logo $w = 0$ em $\Omega_1 \times (0,T)$. □

Lema 3.3 *Seja T maior que o diâmetro de Ω. Para $\{\phi_0, \phi_1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e seja $\phi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ a única solução de (2.19)-(2.21) com $f = 0$ em (2.19). Então $\frac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ e*

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \geqslant M(\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}) \tag{3.26}$$

onde M é uma constante positiva independente de ϕ_0, ϕ_1 e v é dada por

$$v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma.$$

Demonstração: Lembremos que

- $w_0 = w(T), \;\; w_1 = w_t(T)$
- $w(x,t) = v(x,t)\exp(\frac{1}{2}\int_t^T Q(\sigma,t)d\sigma)$
- $v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma$
- $\phi(x,t) = v(x,t) + \int_t^T R(\sigma,t)v(x,\sigma)d\sigma.$

Da definição de w e R temos:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 \exp(\int_t^T R(\sigma,t)d\sigma)$$

e

$$\left|\int_t^T R(\sigma,t)d\sigma\right| \leqslant \int_t^T |R(\sigma,t)|d\sigma \leqslant T\|R\|$$

Destas duas expressões e integrando a primeira sobre $\partial\Omega \times (0,T)$ obtemos

$$e^{-T\|R\|}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant e^{T\|R\|}\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt,$$

ou seja,

$$c_1\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant \int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant c_2\int_0^T\int_{\partial\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt. \quad (3.27)$$

Por outro lado temos

$$w(T) = v(T) = \phi_0$$

$$w_t(x,t) = v_t(x,t)\exp(\frac{1}{2}\int_t^T R(\sigma,t)d\sigma) - \frac{1}{2}v(x,t)\exp(\frac{1}{2}\int_t^T R(\sigma,t)d\sigma)R(t,t)$$

implicando que

$$w_t(T) = v_t(T) - \frac{1}{2}\phi_0 R(T,T).$$

Agora derivando ϕ em relação a t obtemos,

$$\phi_1 = \phi_t(T) = v_t(T) - R(T,T)v(T) = v_t(T) - R(T,T)\phi_0,$$

isto é,

$$v_t(T) = \phi_1 + R(T,T)\phi_0.$$

Resulta então que

$$w_t(T) = \phi_1 + \frac{1}{2}\phi_0 R(T,T) \Leftrightarrow w_t(T) = \phi_1 + \frac{1}{2}R(T,T)w(T)$$

$$w(T) = \phi_0 \Leftrightarrow \phi_1 = w_t(T) - \frac{1}{2}R(T,T)w(T).$$

Afirmação: Existem constantes k_1, k_2 positivas tais que

$$k_1[\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}] \leqslant \|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant k_2[\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}].$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}
\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} &= \|w(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_t(T) - \frac{1}{2}R(T,T)w(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&= |w(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)} - R(T,T)(w_t(T), w(T))_{L^2(\Omega)}\\
&+ \frac{1}{4}|R(T,T)|^2\|w(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&\leqslant \|w(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)}\\
&+ c\|w_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)}|R(T,T)|\|w(T)\|_{H_0^1(\Omega)}\\
&+ \frac{c^2}{2}|R(T,T)|^2\|w(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\\
&\leqslant k_2[\|w(T)\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)}]\\
&= k_2[\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)} \leqslant k_2[\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}].$$

Analogamente, prova-se

$$k_1[\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}] \leqslant \|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)},$$

ou seja, as normas são equivalentes. Desta forma demonstrar (3.26) é equivalente a provar a seguinte desigualdade:

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \geqslant M(\|w_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|w_1\|^2_{L^2(\Omega)}). \tag{3.28}$$

Assumiremos que (3.28) é falso.

Então existe uma sucessão (w^m) de soluções do seguinte problema:

$$w_{tt}^m - \Delta w^m + \gamma(t)w^m + \int_t^T G(\sigma,t)w^m(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.29}$$

$$w^m = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.30}$$

$$w^m(T) = w_0^m, \quad w_t^m(T) = w_1^m \text{ em } \Omega, \tag{3.31}$$

com dados iniciais $\{w_0^m, w_1^m\} \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\|w_0^m\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|w_1^m\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \text{ para todo } m \in \mathbb{N} \tag{3.32}$$

e

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w^m}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \to 0 \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.33}$$

(ver[18]).

De (3.32) temos que

$$(w_0^m, w_1^m) \rightharpoonup (w_0^\infty, w_1^\infty) \text{ em } H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.34}$$

Analogamente a (2.58) obtemos que

$$|w_t^m(t)|^2 + \|w^m(t)\|^2 \leqslant M[|w_1^m|^2 + \|w_0^m\|^2] \;\; \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.35}$$

Agora de (3.32) e de (3.35), resulta

$$(w^m, w_t^m) \overset{*}{\rightharpoonup} (w^\infty, w_t^\infty) \text{ em } L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)) \times L^\infty(0,T; L^2(\Omega)) \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.36}$$

De (3.36) e (3.34), podemos tomar o limite no problema (3.29)-(3.31), obtendo que w^∞ é uma solução fraca de

$$w_{tt}^\infty - \Delta w^\infty + \gamma(t)w^\infty + \int_t^T G(\sigma,t)w^\infty(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.37}$$

$$w^\infty = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.38}$$

$$w^\infty(T) = w_0^\infty, \quad w_t^\infty(T) = w_1^\infty \text{ em } \Omega. \tag{3.39}$$

De (3.33) e do fato que,

$$0 \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w^m}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \leqslant \lim_{m\to\infty} inf \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial w^m}{\partial \nu}\right)^2 dxdt = 0,$$

segue que $\frac{\partial w^\infty}{\partial \nu} = 0$ em $\partial\Omega \times (0,T)$. Então aplicando o lema 3.2 concluímos que $w^\infty = 0$.

Fazendo uma decomposição da solução do problema (3.29)-(3.31) em

$$w^m = \psi^m + \zeta^m, \tag{3.40}$$

onde $\psi^m \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ com $\frac{\partial \psi}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$, uma solução de

$$\psi_{tt}^m - \Delta\psi^m = -\gamma(t)w^m - \int_t^T G(\sigma,t)w^m(x,\sigma)d\sigma \text{ em } \Omega \times (0,T) \tag{3.41}$$

$$\psi^m = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.42}$$

$$\psi^m(T) = 0, \quad \psi_t^m(T) = 0 \text{ em } \Omega, \tag{3.43}$$

e $\zeta^m \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))$ com $\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$, uma uma solução de

$$\zeta_{tt}^m - \Delta\zeta^m = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.44}$$

$$\zeta^m = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.45}$$

$$\zeta^m(T) = w^m(T), \quad \zeta_t^m(T) = w_t^m(T) \text{ em } \Omega. \tag{3.46}$$

De (3.36) e pelo teorema 1.32 temos que

$$w^m \to 0 \text{ em } L^1(0,T; L^2(\Omega)), \tag{3.47}$$

de onde segue pelo lema 1.36 (com o tempo reverso) que

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \psi^m}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \to 0, \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.48}$$

Agora de (3.33), (3.40) e (3.48) concluímos que

$$\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial \zeta^m}{\partial \nu}\right)^2 dxdt \to 0, \text{ quando } m \to \infty. \tag{3.49}$$

Assim pelo lema 1.37, temos

$$\|w^m(T)\|^2_{H^1_0(\Omega)} + \|w^m_t(T)\|^2_{L^2(\Omega)} \to 0 \text{ quando } m \to \infty, \tag{3.50}$$

o que contradiz (3.32), completando assim a demonstração. $\square$

3.2 A Controlabilidade Exata

Nesta seção iremos analisar a controlabilidade exata para o problema (2.14)-(2.16), ou seja para:

$$u_{tt} - \Delta u + \alpha(t)u - \Delta \int_0^t Q(t,\sigma)u(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.51}$$

$$u = g \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.52}$$

$$u(0) = 0, \quad u_t(0) = 0 \text{ em } \Omega, \tag{3.53}$$

onde $\alpha(t)$ e $Q(t,\sigma)$ satisfazem (2.17) e (2.18) respectivamente, a qual será dada pelo seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Seja T maior que o diâmetro de Ω. Então para dado $\{u_0, u_1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $g \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ que pode levar a solução de (2.14)-(2.16) ao estado final*

$$u(T) = u_0, \quad u_t(T) = u_1 \text{ em } \Omega. \tag{3.54}$$

Seja $\{\phi_0, \phi_1\}$ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e consideremos o problema dual

$$\phi_{tt} - \Delta\phi + \alpha(t)\phi - \Delta \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.55}$$

$$\phi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.56}$$

$$\phi(T) = \phi_0 \quad \text{e} \quad \phi_t(T) = \phi_1 \text{ em } \Omega. \tag{3.57}$$

Conforme provado no teorema 2.2, o problema (3.55)-(3.57) admite uma única solução ϕ na classe

$$\phi \in C([0,T]; H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^1_0(\Omega)), \tag{3.58}$$

e também temos que

$$\frac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T)), \tag{3.59}$$

onde v é definida por $v(x,t) = \phi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\phi(x,\sigma)$

Consideremos o seguinte problema:

$$\psi_{tt} - \Delta\psi + \alpha(t)\psi - \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)\psi(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T), \tag{3.60}$$

$$\psi = \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.61}$$

$$\psi(0) = 0, \quad \psi_t(0) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.62}$$

Obtemos pelo lema 2.6 que o problema (3.60)-(3.62) admite uma única solução por transposição ψ, na classe

$$\psi \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)).$$

Em virtude da regularidade da ψ e da unicidade das soluções dos problemas (3.55)-(3.57) e (3.60)-(3.62) definimos:

$$\begin{array}{rcl} \Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \{\phi_0, \phi_1\} & \mapsto & \{-\psi_t(T), \psi(T)\} \end{array} \tag{3.63}$$

No que segue desenvolveremos um raciocínio que nos permitirá obter uma relação entre a aplicação Λ definida acima e a derivada normal $\frac{\partial v}{\partial \nu}$.

Como $H_0^2(0,T; H^{3/2}(\partial\Omega))$ é denso em $L^2(0,T; L^2(\partial\Omega)) = L^2(\partial\Omega \times (0,T))$ e $\frac{\partial v}{\partial \nu} \in L^2(\partial\Omega \times (0,T))$, existe uma $(v_\mu) \subset H_0^2(0,T; H^{3/2}(\partial\Omega))$, tal que

$$v_\mu \to \frac{\partial v}{\partial \nu} \text{ em } L^2(\partial\Omega \times (0,T)). \tag{3.64}$$

Consideremos a seguinte seqüência de problemas

$$\psi^\mu_{tt} - \Delta\psi^\mu + \alpha(t)\psi^\mu - \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)\psi^\mu(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0,T) \tag{3.65}$$

$$\psi^\mu = v^\mu \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T) \tag{3.66}$$

$$\psi^\mu(0) = 0, \quad \psi^\mu_t(0) = 0 \text{ em } \Omega. \tag{3.67}$$

Resulta de forma análoga utilizada na obtenção de (2.96) e (2.97) que (3.65)-(3.67) admite uma solução fraca na classe

$$\psi^\mu \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{3.68}$$

verificando

$$\psi^\mu_{tt} - \Delta\psi^\mu + \alpha(t)\psi^\mu - \Delta\int_0^t Q(t,\sigma)\psi^\mu(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)), \tag{3.69}$$

mais ainda, para cada μ, ψ^μ solução fraca para (3.65)-(3.67) e $(\psi^\mu - \psi)$ é solução por transposição de

$$(\psi^\mu-\psi)_{tt} - \Delta(\psi^\mu-\psi) + \alpha(t)(\psi^\mu-\psi) - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)(\psi^\mu-\psi)(x,\sigma)d\sigma = 0 \tag{3.70}$$

em $\Omega\times(0,T)$,

$$\psi^\mu - \psi = v^\mu - \frac{\partial v}{\partial\nu} \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.71}$$

$$(\psi^\mu-\psi)(0) = 0, \quad (\psi^\mu-\psi)_t(0) = 0. \tag{3.72}$$

Conforme o lema 2.5, aplicado ao problema (3.70)-(3.72), vem que

$$\|\psi^\mu - \psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leqslant M\|v^\mu - \frac{\partial v}{\partial\nu}\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))}, \tag{3.73}$$

e

$$\|\psi^\mu_t - \psi_t\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leqslant M\|v^\mu - \frac{\partial v}{\partial\nu}\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))}. \tag{3.74}$$

Então de (3.73) e (3.74) e da convergencia dada em (3.64) resulta que

$$\psi^\mu \to \psi \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)), \tag{3.75}$$

$$\psi^\mu_t \to \psi_t \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{3.76}$$

Por outro lado, dados ξ_0 e ξ_1 em $\mathcal{D}(\Omega)$, existe uma única solução ξ de (3.55)-(3.57) na classe (3.58) com dados iniciais $\{\xi_0,\xi_1\}$. Compondo-se a equação (3.69) com ξ, resulta

$$\begin{aligned}\int_0^T\langle\psi^\mu_{tt}(t),\xi(t)\rangle dt - \int_0^T\langle\Delta\psi^\mu(t),\xi(t)\rangle dt + \int_0^T\langle\alpha(t)\psi^\mu(t),\xi(t)\rangle dt&\\ + \int_0^T\langle -\Delta\int_t^T Q(t,\sigma)\psi^\mu(x,\sigma)d\sigma,\xi(t)\rangle dt &= 0,\end{aligned}$$

donde obtemos que (usando teorema de Green e integrando por partes)

$$-\langle \psi_t^\mu(T), \xi(T)\rangle + \langle \psi^\mu(T), \xi_t(T)\rangle - \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^\mu \frac{\partial z}{\partial \nu} dxdt \;=\; 0$$

onde $z(x,t) = \xi(x,t) + \int_t^T Q(\sigma,t)\xi(x,\sigma)dxdt$, isto é,

$$-\langle \psi_t^\mu(T), \xi(T)\rangle + \langle \psi^\mu(T), \xi_t(T)\rangle \;=\; \int_0^T \int_{\partial\Omega} v^\mu \frac{\partial z}{\partial \nu} dxdt. \tag{3.77}$$

Assim tomando o limite em (3.77) quando $\mu \to \infty$ e levando-se em conta as convergências dadas em (3.75) e (3.76) resulta que

$$-\langle \psi_t(T), \xi(T)\rangle + \langle \psi(T), \xi_t(T)\rangle \;=\; \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) dxdt, \tag{3.78}$$

onde ξ é a única solução de (3.55)-(3.57) com dados $\{\xi_0, \xi_1\}$ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e ϕ a única solução de (3.55)-(3.57) com dados $\{\phi_0, \phi_1\}$ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$.

Note que (3.73) pode ser reescrita como

$$\langle \{-\psi_t(T), \psi(T)\}, \{\xi(T), \xi_t(T)\}\rangle \;=\; \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) dxdt,$$

ou ainda de (3.63)

$$\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}\rangle \;=\; \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) dxdt. \tag{3.79}$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} (\cdot,\cdot)_* : & (\mathcal{D}(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \{\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}\} & \mapsto & \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \nu}\frac{\partial z}{\partial \nu}\right) dxdt. \end{array} \tag{3.80}$$

Provaremos que a aplicação acima, define um produto interno de $(\mathcal{D}(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2$. É claro que $(\cdot,\cdot)_*$ é uma aplicação linear e positiva, restando assim provar que é estritamente positiva. Mais precisamente

$$(\{\phi_0, \phi_1\}, \{\phi_0, \phi_1\})_* = 0 \Leftrightarrow \phi_0 = \phi_1 = 0.$$

Com efeito, a recíproca é trivial. Provaremos a implicação. Suponhamos que

$$(\{\phi_0, \phi_1\}, \{\phi_0, \phi_1\})_* = \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 dxdt = 0.$$

Usando o lema 3.3 obtemos que

$$0 \leqslant M[\|\phi^0\|^2 + \|\phi^1\|^2] \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 dxdt,$$

então $\phi^0 = \phi^1 = 0$.

Do exposto acima, resulta que a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_* : & (\mathcal{D}(\Omega))^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & \{\phi_0, \phi_1\} & \mapsto & \left(\displaystyle\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu}\right)^2 dxdt\right)^{1/2} \end{array} \tag{3.81}$$

define uma norma em $(\mathcal{D}(\Omega))^2$. Consideremos F o espaço de Hilbert obtido completando-se $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ com a norma $\|\cdot\|_*$, isto é,

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_*}. \tag{3.82}$$

Contudo, de (2.113) e do lema 3.3, existem constantes $c_1, c_2 > 0$ tais que

$$c_1[\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}] \leqslant \int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 dxdt \leqslant c_2[\|\phi_0\|^2_{H_0^1(\Omega)} + \|\phi_1\|^2_{L^2(\Omega)}], \tag{3.83}$$

isto é,

$$c_1'\|\{\phi_0, \phi_1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leqslant \left(\int_0^T \int_{\partial\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 dxdt\right)^{1/2} \leqslant c_2'\|\{\phi_0, \phi_1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{3.84}$$

Desta forma resulta de (3.81) e (3.84) que a norma $\|\cdot\|_*$ é equivalente a norma $\|\{\cdot,\cdot\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ em $\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$. Conseqüentemente de (3.82) obtemos

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_*} = \overline{\mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}} = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega). \tag{3.85}$$

Munindo-se $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ da topologia dada pela norma $\|\cdot\|_*$, provaremos que o operador Λ dado em (3.63), que é claramente linear, é contínuo. Com efeito, de (3.79) e (3.80) obtemos:

$$|\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}\rangle| \leqslant \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_* \|\{\xi_0, \xi_1\}\|_*,$$

para todo $\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2$. Pela densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ em F segue que

$$|\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\eta_0, \eta_1\}\rangle| \leqslant \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_* \|\{\eta_0, \eta_1\}\|_* \tag{3.86}$$

para todo $\{\phi_0, \phi_1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2$, $\{\eta_0, \eta_1\} \in F$, o que implica que

$$|\Lambda\{\phi_0, \phi_1\}| \leqslant \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_* \ \forall \ \{\phi_0, \phi_1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2,$$

o que prova a continuidade de Λ. Agora, como $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ é denso em F, podemos estender Λ, de maneira única, a um operador linear e contínuo, o qual denotaremos pela mesma letra:

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & F & \rightarrow & F' \\ & \{\eta_0, \eta_1\} & \mapsto & \lim\limits_{\mu \to \infty} \{\eta_0^\mu, \eta_1^\mu\} \end{array} \tag{3.87}$$

onde $(\{\eta_0^\mu, \eta_1^\mu\})_{\mu \in \mathbb{N}} \subset (\mathcal{D}(\Omega))^2$ tal que

$$\|\{\eta_0^\mu, \eta_1^\mu\} - \{\eta_0, \eta_1\}\|_* \rightarrow 0 \text{ quando } \mu \rightarrow \infty.$$

Notemos que a definição acima independe da seqüência $\{\eta_0^\mu, \eta_1^\mu\}$ que aproxima $\{\eta_0, \eta_1\}$.

Provaremos a seguir que:

$$\Lambda\{\eta_0, \eta_1\} = \{-\psi_t(T), \psi(T)\}, \ \forall \{\eta_0, \eta_1\} \in F \tag{3.88}$$

onde ψ é solução por transposição de

$$\psi_{tt} - \Delta\psi + \alpha(t)\psi - \Delta \int_t^T Q(\sigma, t)\psi(x, \sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega \times (0, T), \tag{3.89}$$

$$\psi = \frac{\partial r}{\partial \nu} \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, T), \tag{3.90}$$

$$\psi(0) = \psi_t(0) = 0 \text{ em } \Omega, \tag{3.91}$$

η é solução fraca de

$$\eta_{tt} - \Delta\eta + \alpha(t)\eta - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)\eta(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{3.92}$$

$$\eta = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.93}$$

$$\eta(T) = \eta_0,\ \eta_t(T) = \eta_1 \text{ em } \Omega \tag{3.94}$$

e

$$r(x,t) = \eta(x,t) + \int_t \eta(x,\sigma)Q(\sigma,t)d\sigma.$$

Com efeito, seja $\{\eta_0,\eta_1\}\in F$ e consideremos $(\{\eta_0^\mu,\eta_1^\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}}\subset(\mathcal{D}(\Omega))^2$ tal que

$$\{\eta_\mu^0,\eta_\mu^1\}\to\{\eta^0,\eta^1\} \text{ em } F. \tag{3.95}$$

Temos de (3.63) e (3.87) que

$$\Lambda\{\eta_0,\eta_1\} = \lim_{\mu\to\infty}\Lambda\{\eta_0^\mu,\eta_1^\mu\} = \lim_{\mu\to\infty}\{-\psi_t^\mu(T),\psi^\mu(T)\} \tag{3.96}$$

onde, para cada $\mu\in\mathbb{N}$, ψ_μ é a única solução por transposição do problema

$$\psi_{tt}^\mu - \Delta\psi^\mu + \alpha(t)\psi^\mu - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)\psi^\mu(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{3.97}$$

$$\psi^\mu = \frac{\partial r^\mu}{\partial\nu} \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.98}$$

$$\psi^\mu(0) = \psi_t^\mu(0) = 0 \text{ em } \Omega \tag{3.99}$$

e η^μ é a única solução fraca de

$$\eta_{tt}^\mu - \Delta\eta^\mu + \alpha(t)\eta^\mu - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)\eta^\mu(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{3.100}$$

$$\eta^\mu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\times(0,T), \tag{3.101}$$

$$\eta^\mu(T) = \eta_0^\mu, \quad \eta_t^\mu(T) = \eta_1^\mu \text{ em } \Omega. \tag{3.102}$$

Resulta daí que $(\psi^\mu-\psi)$ é a única solução por transposição de

$$(\psi^\mu-\psi)_{tt} - \Delta(\psi^\mu-\psi) + \alpha(t)(\psi^\mu-\psi) - \Delta\int_t^T Q(\sigma,t)(\psi^\mu-\psi)(x,\sigma)d\sigma = 0 \tag{3.103}$$

em $\Omega \times (0,T)$,

$$(\psi^\mu - \psi) = \left(\frac{\partial r^\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial r}{\partial \nu}\right) \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.104}$$

$$(\psi^\mu - \psi)(0) = (\psi^\mu - \psi)_t(0) = 0 \text{ em } \Omega \tag{3.105}$$

onde $(\eta^\mu - \eta)$ é a única solução fraca de:

$$(\eta^\mu-\eta)_{tt}-\Delta(\eta^\mu-\eta)+\alpha(t)(\eta^\mu-\eta)-\Delta\int_t^T Q(\sigma,t)(\eta^\mu-\eta)(x,\sigma)d\sigma = 0 \text{ em } \Omega\times(0,T), \tag{3.106}$$

$$(\eta^\mu - \eta) = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0,T), \tag{3.107}$$

$$(\eta^\mu - \eta)(T) = \eta_0^\mu - \eta_0,\ (\eta^\mu - \eta)_t(T) = \eta_1^\mu - \eta_1 \text{ em } \Omega \tag{3.108}$$

Agora conforme o lema 2.5 temos

$$\begin{aligned} &\|\psi^\mu - \psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|\psi_t^\mu - \psi_t\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \\ &\leqslant M\|\frac{\partial r_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial r}{\partial \nu}\|_{L^2(\partial\Omega\times(0,T))} \\ &= M\|\{\eta_0^\mu - \eta_0, \eta_1^\mu - \eta_1\}\|_* \end{aligned} \tag{3.109}$$

Da desigualdade acima e de (3.95), obtemos que

$$\psi^\mu \to \psi \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)) \tag{3.110}$$

$$\psi_t^\mu \to \psi_t \text{ em} C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{3.111}$$

De (3.96), (3.110) e (3.111) segue o desejado em (3.88).

Definamos

$$b(\{\phi_0,\phi_1\},\{\xi_0,\xi_1\}) = \langle \Lambda\{\phi_0,\phi_1\},\{\xi_0,\xi_1\}\rangle \tag{3.112}$$

para todo $\{\phi_0,\phi_1\},\{\xi_0,\xi_1\} \in F$, que é claramente uma forma bilinear. Provaremos, a seguir, que $b(\cdot,\cdot)$ é contínua e coerciva. De fato, sejam $\{\phi_0,\phi_1\},\{\xi_0,\xi_1\} \in F$ e $(\{\phi_0^\mu,\phi_1^\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}}, (\{\xi_0^\mu,\xi_1^\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}}, \subset (\mathcal{D}(\Omega))^2$ tais que

$$\{\phi_0^\mu,\phi_1^\mu\} \to \{\phi_0,\phi_1\} \text{ e } \{\xi_0^\mu,\xi_1^\mu\} \to \{\xi_0,\xi_1\} \text{ em } F.$$

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$ de (3.86) vem que

$$|\langle \Lambda\{\phi_0^\mu, \phi_1^\mu\}, \{\xi_0^\mu, \xi_1^\mu\}\rangle| \leqslant \|\{\phi_0^\mu, \phi_1^\mu\}\|_* \|\{\xi_0^\mu, \xi_1^\mu\}\|_*.$$

Tomando-se o limite na desigualdade acima quando $\mu \to \infty$ decorre que

$$|\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}\rangle| \leqslant \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_* \|\{\xi_0, \xi_1\}\|_*.$$

o que prova a continuidade de $b(\cdot, \cdot)$.

Para provarmos a coercividade da mesma, notemos que de (3.79) e (3.81), para cada $\mu \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$$\langle \Lambda\{\phi_0^\mu, \phi_1^\mu\}, \{\phi_0^\mu, \phi_1^\mu\}\rangle = \|\{\phi_0^\mu, \phi_1^\mu\}\|_*^2,$$

de onde tomando o limite quando $\mu \to \infty$ obtemos

$$\langle \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}, \{\phi_0, \phi_1\}\rangle = \|\{\phi_0, \phi_1\}\|_*^2,$$

o que prova a coecividade de $b(\cdot, \cdot)$.

Desta forma, pelo teorema de Lax-Milgran, dado $\{y_0, y_1\}$ em F', existem únicos $\{\phi^0, \phi^1\}$ em F tal que:

$$\langle \{y_0, y_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}\rangle = b(\{\phi_0, \phi_1\}, \{\xi_0, \xi_1\}),\ \forall \{\xi_0, \xi_1\} \in F,$$

ou seja Λ é um isomorfismo de F em F'. O que implica em função da definição de $b(\cdot, \cdot)$ dada em (3.112) que:

"Dada $\{y_0, y_1\} \in F', \exists! \{\phi_0, \phi_1\} \in F$ tal que

$$\{y_0, y_1\} = \Lambda\{\phi_0, \phi_1\}\text{''} \tag{3.113}$$

ou ainda em virtude de (3.88) concluímos que

"Dado $\{y_0, y_1\} \in F', \exists! \{\phi_0, \phi_1\} \in F$ tal que

$$y_0 = -\psi_t(T) \ \text{ e } \ y_1 = \psi(T)\text{''} \tag{3.114}$$

onde ψ é a única solução, por transposição, de (3.60)-(3.62) e ϕ é a única solução fraca de (3.55)-(3.57) com dados ϕ_0 e ϕ_1.

Lembremos que:

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ e } F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

assim, elegendo-se:

$$H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$$

então dado

$$\{u_0, u_1\} \in H \tag{3.115}$$

tem-se que o par $\{y_0, y_1\} = \{-u_1, u_0\}$ e de (3.114) resulta que existem únicos $\{\phi_0, \phi_1\}$ em F tal que

$$y_0 = -u_1 \;\text{ e }\; y_1 = u_0, \tag{3.116}$$

ou seja,

$$\psi_t(T) = u_1 \;\text{ e }\; \psi(T) = u_0,$$

onde ψ é a única solução por transposição de (3.60)-(3.62) e ϕ é a única solução fraca de (3.55)-(3.57) com dados ϕ_0 e ϕ_1.

Considerando-se $g = \dfrac{\partial v}{\partial \nu}$ em $\partial\Omega \times (0, T)$ no problema (3.51)-(3.53) sujeito aos dados iniciais conforme em (3.115) temos que tal problema possui única solução por transposição u (conforme lema 2.6). Observemos que como ψ é solução por transposição de (3.60)-(3.62) e de (3.116), resulta que ψ é também solução por transposição de (3.51)-(3.53). Logo, pela unicidade da solução temos que $u = \psi$ e conseqüentemente

$$u(T) = u_0, \;\; u_t(T) = u_1,$$

o que mostra o teorema 3.4.

Frente a mudança de variáveis feitas no inicio do capítulo 2 percebemos que o teorema 3.4 implica no teorema 2.1. Obtemos, desta forma a controlabilidade para o sistema (1)-(3), concuíndo assim nosso trabalho.

Bibliografia

[1] BARDOS, C., LEBEAU, G., RAUCH, J.: **Contrôle et Stabilisation Dans les Problèmes Hyperboliques, in Contrôlabilité Exacte Perturbations et Stabilisation de Systtèmes Distribés**. Tome 1, Appendice 2, J.L¿ Lions, ed, Masson, Paris, 1988.

[2] BOYCE, W.E., DIPRIMA,R.C.: **Elemetary Differential Equations And Boundary Value Problems**. John Wiley & Sonns,Inc, New York, 1997.

[3] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[4] BRÉZIS, H.: **Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert**. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[5] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[6] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[7] HOFFMAN, K., KUNZE, R.: **Linear Algebra**. Prentice-Hall,Englewood Cliffs, 1997.

[8] KIM, J. U.: **Control of a Second-Order Integro-Diferential Equation**. SIAM J. Control And Optimization, vol 31, 1993, pp 101-110.

[9] KREYSZIG, E.: **Introductory Funcional Analysis With Applications**. John Wiley & Sonns, New York, 1989.

[10] LAGNESE, J., LIONS, J. L.: **Modelling, Analysis and Control of Thin Plates**. Masson, Paris, 1988.

[11] LASIECKA, I.: **Controllability of a Viscoelastic Kirchkoff Plate**. Internat. Ser. Numer. Math., 91, 1989, pp 237-247.

[12] LASIECKA, I., TATARU, D.: **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Lecture Notes in Pure and Applied Maths, 142, Dekker, New York, 1993.

[13] LEUGERING, G.: **Exact Boundary Controllability of an Integrodifferential Equation**. Appl. Math. Optim.,15, 1987, pp 223-250.

[14] LIMA, E. L.: **Curso de Análise**;Volume II, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1981.

[15] LIONS, J. L.: **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[16] LIONS, J.L., MAGENES. E.: **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications.**, Vol. I. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[17] LIONS, J. L., MAGENES, E.: **Problèmes aux Limites non Homogènes, Applications**. Dunod, Paris, 1968, Vol 1.

[18] MEDEIROS, L. A.: **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[19] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[20] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos e Metodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[21] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[22] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro.

[23] NATALI, F.M.A.: **Existência e Comportamento Assintóticode Soluções Globais Para Um Sistema de Evolução Com Dissipação Localizada**. Departamento de Matemática - UEM, Maringá, 2004.

[24] PALOMINO, J.A.S.: **Controlabilidade Exata da Equação de Ondas com Coeficientes Variáveis**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[25] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Itrodution à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[26] RODRIGUEZ, P.H.R.: **Itroducción a la Teoria de las Distribuciones**. Textos e Métodos Matemáticos 6, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1974.

[27] SIMON, J.: **Compact Sets in the Space $\mathbf{L^p(0, T; B)}$**. (Annali di Matematica pura ed aplicata,(IV) Vol. CXLVI, 1987, pp.65-96).

[28] VISIK, M.I. & LADYZHENSKAJA, O.A. : **On a bondary value problem for partial differential equations and certain class of operator equations**. A.M.S. translations, Series 2, Vol.1, 1958.

[29] TEMAN, R.: **Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis**. North Holland, Amsterdan, 1979.

[30] ZEIDLER, E.: **Nolinear Functional Analysis and its Application II/A**. Spriger-Verlag, New York, 1990.

[31] ZEIDLER, E.: **Nolinear Functional Analysis and its Application II/B**. Spriger-Verlag, New York, 1990.