UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIENCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE POS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

Ginnara Mexia Souto

Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas

Maringá-PR
2013

Ginnara Mexia Souto

Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matematica.

Orientadora: Profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes

Maringá-PR
2013

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
(Biblioteca Central - UEM, Maringá – PR., Brasil)

Souto, Ginnara Mexia
S728e Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas / Ginnara Mexia Souto. -- Maringá, 2013.
115 f. : il.

Orientador: Prof.a Dr.a Luciene Parron Gimenes Arantes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática, 2013.

1. Equações diferenciais impulsivas. 2. Equações diferenciais funcionais. 3. Equações diferenciais ordinárias generalizadas. I. Arantes, Luciene Parron Gimenes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências Exatas. Departamento de Matemática. Programa de Pós-Graduação em Matemática. III. Título.

CDD 21.ed. 515.35
ECSL-00670

Ginnara Mexia Souto

Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos via equações diferenciais ordinárias generalizadas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matematica pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes - UEM
(Orientadora)

Dr. Everaldo de Mello Bonotto - USP/ICMC

Dr. Doherty Andrade - UEM

Maringá-PR
2013

A minha mãe Gina
(*in memoriam*).

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus, pois sem ele nada seria possível.

A minha família por todo amor e carinho. Aos meus tios, que incentivaram e ajudaram quando mais precisei. Gostaria de agradecer a minha madrinha, Maria de Fátima Silva, que é fundamental na minha vida, cuidando e amando como se eu fosse uma filha. Em especial, dedico este trabalho à minha mãe, Gina Heitor Mexia, que me ensinou a ser quem sou, que sempre me fez pensar no futuro e em como é importante lutar, mas que infelizmente não está mais entre nós para ver esta conquista.

Aos meus amigos de mestrado por terem apoiado e ajudado em vários momentos. Em especial aos amigos Evandro, Tatiana e José Henrique.

Aos professores desde o ensino básico até o mestrado. Ao prof. Dr. Doherty Andrade, pela inclusão nos projetos de iniciação científica durante a graduação. Em geral, a todos os professores do departamento de matemática da UEM, por participarem diretamente ou indiretamente da minha formação.

Sou muito grata à minha Orientadora, profa. Dra. Luciene Parron Gimenes Arantes, pela valiosa contribuição acadêmica, pelo apoio e incentivo desde a graduação. Bem como, pela paciência e dedicação na realização desde trabalho. Muito obrigada!

Por fim, agradeço ao CNPq, pelo apoio financeiro, sem o qual seria impossível dedicar-se integralmente aos estudos.

Resumo

O objetivo deste trabalho é investigar resultados fundamentais e algumas propriedades qualitativas de soluções de Equações Diferenciais Funcionais com Retardo e Impulsos (EDFRIs) em tempos pré-fixados através da teoria e Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOGs). Nossos principais resultados são sobre a dependência contínua com respeito aos dados iniciais e a estabilidade de soluções para uma certa classe de EDFRIs em tempos pré-fixados. A fim de obtermos tais resultados, estudamos a correspondência biunívoca entre EDFRIs e uma determinada classe de EDOGs.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Impulsivas. Equações Diferenciais Funcionais. Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas.

Abstract

The purpose of this work is to investigate fundamental results and some qualitive properties of solutions of Retarded Functional Differential Equations with pre-assigned moments of impulsive effects (IRFDEs) using the theory of Generalized Ordinary Differential Equations (GODEs). Our main results concern continuous dependence on parameteres, uniform stability and uniform asymptotic stability of the solutions of a certain classs of IRFDEs. In order of obtain such results, we study the equivalence between IRFDEs and certain class of GODEs.

Keywords: Impulsive Differential Equations. Functional Differential Equations. Generalized Ordinary Differential Equations

Sumário

Introdução

A teoria das Equações Diferenciais Funcionais com Retardamento (EDFRs) é um ramo das Equações Diferenciais Funcionais. Uma das razões do nosso interesse em EDFRs é por elas se constituírem de exemplos em sistemas dinâmicos de dimensão infinita, apresentando dinâmica complexa.

Do ponto de vista das aplicações, o interesse em EDFRs surge em muitos sistemas físicos, biológicos, químicos, entre outros, os quais envolvem mecanismos que são governados pelo princípio de causalidade, ou seja, as causas do estado presente do sistema se distribuem ao longo de uma história passada, incorporadas em retardos. Isto pode ser notado na regulagem de funções fisiológicas: o tempo requerido para uma célula amadurecer; o tempo para um impulso nervoso viajar ao longo de um axônio e cruzar a sinapse; o tempo para que os hormônios viajem de seus lugares de produção para os órgãos a que são destinados por difusão e/ou passagem através da circulação; tempo de gestação ou incubação, etc. Há aplicações também em sistemas na teoria de controle, sujeitos aos atrasos causados pelo tempo de processamento, ou por atrasos na localização, onde há possíveis discrepâncias entre a posição esperada de um objeto obtida através de radar, sensores, satélite etc., e a posição real; transmissão e comunicação, devido ao atraso na linha de comunicação e seus possíveis efeitos em mecanismos que dependam de forma vital da estabilidade da comunicação; transporte de substâncias, como em motores ou reatores, assim como outros sistemas físicos ou químicos.

Paralelamente ao estudo das EDFRs, estamos interessados nos efeitos impulsivos sobre a dinâmica de diversos modelos. Os impulsos representam variações do estado em lapsos de tempo tão pequenos que podem ser considerados instantâneos. Estas variações correspondem às descontinuidades de primeira espécie das soluções ou de suas derivadas. Problemas que envolvem impulsos apresentam grande semelhança com problemas de controle.

Na investigação de propriedades de soluções de Equações Diferenciais Funcionais com retardamento e sujeitas à ação impulsiva (EDFRIs), as técnicas clássicas aplicadas em equações sem impulsos devem ser adaptadas a fim de levar-se em consideração os efeitos impulsivos.

Voltaremos nossa atenção às EDFRIs, onde os impulsos são considerados em tempos pré-fixados, isto é, os instantes de impulsos são conhecidos de antemão, e cujas aplicações se dão, especialmente, nas áreas farmacocinética, tecnologia química, medicina, entre outras. Isto posto, devido a estas propriedades das EDFRIs, consideramos muito importante o desenvolvimento de tal teoria e suas aplicações.

Neste trabalho, para investigarmos as propriedades das EDFRIs, estudamos a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOGs). A teoria de EDOGs desenvolvida por Š. Schwabik em [35] foi adaptada para funções que assumem valores em um espaço de Banach. Utilizamos a correspondência biunívoca que existe entre certa classe de EDFRIs e uma classe de EDOGs para o estudo dependência contínua e estabilidade. Para isto, utilizamos os resultados de M. Federson e Š. Schwabik descritos em [10] e [12].

Desenvolvemos este trabalho de forma que o leitor possa ler esta dissertação, com poucas incursões para literaturas adicionais. Apresentaremos as teorias básicas de EDFRIs e de EDOGs, os pilares do nosso trabalho.

No primeiro capítulo, trazemos uma breve descrição do ambiente, ou seja, dos espaços e suas peculiaridades. Fazemos, também, uma breve abordagem da teoria das EDFRs, trazendo definições básicas e resultados essenciais para este trabalho.

No capítulo seguinte, apresentamos a noção de sistema impulsivo e descrevemos uma classe de EDFRIs para a qual estabelecemos a existência e unicidade de soluções das EDFRIs.

No terceiro capítulo, faremos um estudo minucioso sobre a integração de Kurzweil, revelando aspectos que deixam evidente a importância desta teoria de integração e as suas vantagens com respeito às outras integrais. Destacamos, principalmente, os Teoremas de Convergência. Na sequência abordamos a teoria das EDOGs, garantindo a existência e unicidade de soluções para certa classe de EDOGs, como base em [35].

O quarto capítulo possui extrema importância, pois tratará da correspondência biunívoca que entre uma classe de EDFRIs e uma de EDOGs, tendo como referência [10].

No próximo capítulo, estudamos a dependência contínua com respeito aos dados iniciais para as EDOGs e a transportamos através desta correspondência para as EDFRIs, obtida em [10]. No último capítulo, a correspondência das equações, permitiu que abordássemos a estabilidade de soluções para EDOGs e, assim, transferir os resultados para às EDFRIs. Tendo como base [5] e, principalmente, [12].

CAPÍTULO

1

Preliminares

Neste capítulo, para facilitar o desenvolvimento deste trabalho, fixamos notações, definições e resultados básicos. Fazemos uma breve descrição sobre as Equações Diferencias Funcionais Retardadas (EDFRs). As principais referências são [13, 20, 21, 23] e [33].

1.1 Notações e resultados básicos

Salvo menção implícita ao contrário, as seguintes convenções e notações serão usadas ao longo deste trabalho. Os símbolos $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^+$ e $\mathbb{N}$ denotarão o conjunto dos números reais, dos números reais não-negativos e dos números inteiros não-negativos, respectivamente. Quando não houver ambiguidade, denotaremos o espaço de Banach sobre o corpo $\mathbb{R}$ por X e sua norma por $\|.\|$.

Sejam a, b números reais distintos e $D \subseteq X$. Dada uma função $\psi : [a,b] \to D$, usamos a notação $\psi(t^+) = \lim\limits_{s \to t^+} \psi(s)$ e $\psi(t^-) = \lim\limits_{s \to t^-} \psi(s)$ para indicarmos os limites laterais à direita e à esquerda de ψ em t, respectivamente, quando existirem.

Neste trabalho, utilizamos frequentemente certos espaços vetoriais. A fim de conhecê-los melhor, precisamos de algumas definições.

Definição 1.1.1. *Dizemos que $\psi : [a,b] \to D$ é uma* função regrada*, se existem os limites laterais à direita e à esquerda de t em $[a,b)$ e $(a,b]$, respectivamente.*

O espaço formado pelas funções regradas de $[a,b]$ em D é denotado por $G([a,b],D)$.

Denotamos por $PC([a,b],D)$ o espaço formado pelas funções $\psi : [a,b] \to D$ regradas e contínuas à esquerda em $(a,b]$. Por $PC([a,\infty),D)$ denotamos o espaço das funções $\psi : [a,\infty) \to D$ tais que, para todo $c > a$, a restrição $\psi|_{[a,c]} \in PC([a,c],D)$.

O espaço $PC([a,b],D)$ munido da norma do supremo $\|\cdot\|_\infty$, donde

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{a\leq\theta\leq b} \|\varphi(\theta)\|, \quad \varphi \in PC([a,b],D),$$

é um espaço de Banach. Quando não houver ambiguidade com respeito à norma, simplesmente, usamos $\|\cdot\|$. Em $PC([a,\infty),D)$ consideramos a topologia da convergência uniforme localmente, isto é, em cada subconjunto compacto de $[a,\infty)$.

Definição 1.1.2. *Seja $f : [a,b] \to D$ uma função. A* variação *de f em $[a,b]$ é dada pelo valor*

$$Var_a^b f = \sup\left\{ \sum_{i=1}^{m} \|f(s_i) - f(s_{i-1})\|; a = s_0 < s_1 < ... < s_m = b, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dizemos que f é de variação limitada em $[a,b]$, se existir alguma constante $C > 0$ tal que $Var_a^b f < C$.

Denotamos por $BV([a,b],D)$ o espaço formado pelas funções $\psi : [a,b] \to D$ de variação limitada em $[a,b]$. Considemos nesse espaço a norma $\|.\|_{BV}$, dada por

$$\|f\|_{BV} = \|f(a)\| + Var_a^b f, \quad \text{para } f \in BV([a,b],D).$$

O espaço $BV([a,b],D)$ munido da norma $\|.\|_{BV}$ é um espaço de Banach (veja [8]).

Definição 1.1.3. *Dizemos que $\varphi : [a,b] \to X$ é uma* função escada finita*, se existe uma partição $a = s_0 < s_1 < ... < s_k = b$ de $[a,b]$, tal que $\varphi(s) = c_j$, para $s \in (s_{j-1}, s_j)$, onde $c_j \in X$, para $j = 1,2,...,k$.*

Definição 1.1.4. *Seja I um subintervalo de $[a,b]$. A* função característica *de I é definida por*

$$\chi_I(t) = \begin{cases} 1, & t \in I, \\ 0, & t \notin I. \end{cases}$$

Definição 1.1.5. *Para cada $T \in (a,+\infty)$. A* função de Heaviside *contínua à esquerda concentrada em T é definida por*

$$H_T(t) = \begin{cases} 0, & t \in [a,T], \\ 1, & t \in (T,+\infty). \end{cases}$$

Evidentemente, função de Heaviside e função característica são funções escadas. Também, soma finita de função escada é uma função escada. Os próximos resultados são básicos e dizem à respeito aos espaços de funções definidos acima, para mais detalhes veja [13] e [21]. Primeiramente, veremos que toda função regrada pode ser aproximada por uma função escada finita.

Teorema 1.1.1. *Toda função em $G([a,b],D)$ pode ser uniformemente aproximada por uma função escada finita.*

Demonstração: Seja $f : [a, b] \to D$ uma função regrada. Então, dado $\epsilon > 0$, para cada $s \in [a, b]$, existe $\delta_s > 0$ tal que

$$\|f(u) - f(v)\| < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $u, v \in (s - \delta_s, s) \cap [a, b]$ ou $u, v \in (s, s + \delta_s) \cap [a, b]$. Como os intervalos

$$\{(t - \delta_t, t + \delta_t) : t \in [a, b]\}$$

formam uma cobertura aberta de $[a, b]$, podemos extrair uma subcobertura finita

$$\{(s_i - \delta_{s_i}, s_i + \delta_{s_i}) : i = 1, \ldots, m\}$$

tal que

$$\|f(u) - f(v)\| < \frac{\epsilon}{2},$$

sempre que $u, v \in (s_i - \delta_{s_i}, s_i) \cap [a, b]$ ou $u, v \in (s_i, s_i + \delta_{s_i}) \cap [a, b]$.

Seja $d : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{|d|} = b$ uma divisão de $[a, b]$, onde

$$t_{2i} = s_i \quad \text{e} \quad t_{2i-1} \in (s_i - \delta_{s_i}, s_{i-1} + \delta_{i-1}), \quad \text{para } i = 1, 2, ..., |d| - 1,$$

ou seja, $(t_{2i-1}, t_{2i}) \subset [s_i - \delta_{s_i}, s_i]$ e $(t_{2i}, t_{2i+1}) \subset [s_i, s_i + \delta_{s_i})$, para $i = 1, ..., |d| - 1$. Escolhemos $\tau_i \in (t_{i-1}, t_i)$, para $i = 1, ..., |d|$, e definimos a função escada $\psi : [a, b] \to D$, pondo

$$\psi = \sum_{i=1}^{|d|} f(\tau_i) \chi_{(t_{i-1}, t_i)} + \sum_{j=1}^{|d|} f(t_j) \chi_{\{t_j\}}.$$

Logo,

$$\|f - \psi\|_{G([a,b],X)} = \sup_{s \in [a,b]} \{\|f(s) - \psi(s)\|\} = \sup_{i=1,\ldots,|d|} \{\|f(s) - \psi(\tau_i)\| : s \in (t_{i-1}, t_i)\} < \epsilon,$$

obtendo o desejado. ■

Teorema 1.1.2. *Toda função em $BV([a, b], D)$ é regrada.*

Demonstração: Seja $f \in BV([a, b], D)$. É suficiente mostrarmos que existe o limite lateral à direita de f, para todo $t \in [a, b)$. Tomemos $\{t_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ uma sequência não-crescente em $(t, b]$ convergindo para t. Então,

$$\sum_{i=1}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq Var_a^b f,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Então,

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \leq Var_a^b f.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|f(t_k) - f(t_m)\| \leq \sum_{i=m}^{k} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| < \epsilon, \quad \forall\ k \geq m \geq N_0,$$

ou seja, a sequência $\{f(t_m)\}_{m \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy em X. Portanto, existe o $\lim_{s \to t^+} f(t)$, para todo $t \in [a, b)$.
■

1.2 Noções básicas de EDFRs

Em geral, assumimos que um sistema é governado pelo princípio da causalidade, isto é, o estado futuro do sistema é governado somente pelo presente, sendo independente do passado. Quando assumimos que o sistema é governado por uma equação envolvendo o estado e a taxa de variação deste estado, estamos considerando as equações diferenciais ordinárias ou parciais. Entretanto, em um exame minucioso deste sistema, torna-se evidente que o princípio da causalidade é apenas uma aproximação da situação real e um modelo mais detalhista dependeria, também, de algum estado passado. Além disso, pela natureza de alguns problemas não faz sentido que não se considere o passado. Por exemplo, modelos predador-presa e viscoelasticidade. Isto é conhecido há muitos anos, no entanto a teoria para tais sistemas tem sido desenvolvida recentemente. Este é o ramo das Equações Diferenciais Funcionais (EDFs), para mais detalhes, veja [20].

O tipo mais simples de dependência do passado nas EDFs são as Equações Diferenciais Funcionais Retardadas (EDFRs), por exemplo, a equação diferencial funcional retardada linear

$$y'(t) = Ay(t) + By(t-r), \tag{1.1}$$

onde A, B e $r > 0$ são constantes. A primeira pergunta que podemos fazer é sobre o problema de valor inicial para a equação (1.1), ou melhor, qual é o mínimo de informações que devemos ter para que (1.1) defina uma função $y(t)$ para $t \geq 0$? Refletindo, chega-se a conclusão de que uma função deve ser especificada em $[-r, 0]$ e, naturalmente, tomamos o estado em um instante t como sendo a história da solução em $[t-r, t]$. Somos motivados a investigar a equação (1.1) como um sistema dinâmico em um espaço de funções definidas em $[-r, 0]$. A seguir, apresentaremos de forma breve a teoria básica das EDFRs.

Dados $r, A > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}$. Para cada $y \in PC([t_0 - r, t_0 + A), \mathbb{R}^n)$ e $t \in [t_0, t_0 + A)$, definimos $y_t \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ por

$$y_t(\theta) = y(t+\theta), \quad -r \leq \theta \leq 0.$$

Definição 1.2.1. *Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R} \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n))$ um aberto e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n)$ uma função. Dizemos que*

$$y'(t) = f(t, y_t), \qquad \left(y' = \frac{dy}{dt}\right), \tag{1.2}$$

é uma Equação Diferencial Funcional Retardada sobre Ω.

A seguir, definiremos o conceito de solução da equação (1.2).

Definição 1.2.2. *Uma solução de* (1.2) *é uma função $y \in PC([t_0 - r, t_0 + A))$, onde $t_0 \in \mathbb{R}$ e $A > 0$, tal que $(t, y_t) \in \Omega$ e $y(t)$ satisfaz a equação* (1.2)*, para $t \in [t_0, t_0 + A)$.*

Dados $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\varphi \in PC([-r, 0])$, dizemos que $y(t; t_0, \varphi)$ é uma solução da equação (1.2) com valor inicial φ em t_0, se existe $A > 0$ tal que $y(t; t_0, \varphi)$ é uma solução da equação (1.2) sobre $[t_0 - r, t_0 + A)$ e $y_{t_0}(t; t_0, \varphi) = \varphi$.

Lema 1.2.1. *Se $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, então encontrar uma solução de* (1.2)*, com valor inicial φ em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, é equivalente a resolver a equação integral*

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, ds, & t \in (t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Observação 1.2.1. Podemos observar, nesse tipo de equação, que a determinação da solução y de (1.2) depende não apenas do conhecimento da mesma em um instante t_0, como no caso de uma EDO, mas sim do conhecimento da solução em um instante anterior a t_0. É preciso conhecer um certo passado da solução anterior ao instante t_0, no exemplo seguinte podemos observar tal comportamento.

Exemplo 1.2.1. Consideremos a equação diferencial funcional com retardo discreto

$$\begin{cases} y'(t) = g(t, y(t-1)), & \text{se } \ t > 1 \\ y(t) = \phi(t), \quad \text{se } \ t \in [0,1]. \end{cases} \tag{1.3}$$

Suponhamos que $g : \Omega \to \mathbb{R}^n$ e $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ sejam contínuas. Para $t \in [1,2]$, a solução que denotaremos por $y_1(t)$ satisfaz

$$\begin{cases} y_1'(t) = g(t, y_1(t-1)) = g(t, \phi(t-1)), & \text{se } \ t \in [1,2] \\ y_1(1) = \phi. \end{cases} \tag{1.4}$$

Assim, pelo Lema 1.2.1,

$$y_1(t) = \phi(1) + \int_1^t g(s, \phi(s-1))ds \quad \text{para } \ t \in [1,2].$$

Se conhecemos a solução de (1.3) em $[n-1, n]$, a qual denotaremos por $y_{n-1}(t)$, a solução de (1.3) em $[n, n+1]$ satisfará

$$\begin{cases} y_n'(t) = g(t, y_n(t-1)) = g(t, y_{n-1}(t-1)), & \text{se } \ t \in [n, n+1] \\ y_n(n) = y_{n-1}(n), \end{cases} \tag{1.5}$$

ou seja, pelo Lema 1.2.1,

$$y_n(t) = \phi(1) + \int_1^t g(s, y_{n-1}(s-1))ds, \quad \text{para } \ t \in [n, n+1].$$

Portanto, a solução de (1.3) fica determinada para $t \geq 0$ e satisfaz $y(t) = y_i(t)$ se $t \in [i, i+1]$.

Para mais detalhes sobre as EDFRs, por exemplo sobre os resultados de existência e unicidade de solução local de (1.2), veja [20].

CAPÍTULO

2

Equações Diferencias Funcionais com Retardamento e Impulsos

Primeiramente, descrevemos os sistemas de Equações Diferencias Funcionais com Retardamento e Impulsos (EDFRIs) de modo geral. Nosso objetivo é estabelecer a existência e unicidade de solução para uma classe de EDFRIs com impulsos em tempos pré-fixados. As referências deste capítulo serão [14, 18] e [38].

2.1 Descrição dos sistemas impulsivos

Seja Ω o espaço formado de todos os estados de movimentos de algum processo de evolução, ou seja, um espaço de fase. Denotamos por P_t o ponto de mapeamento do processo de evolução no instante t. Assumimos que esse processo é determinado por n parâmetros. Então, o ponto de mapeamento pode ser interpretado como sendo um ponto (x, t) no espaço $\mathbb{R}^{n+1}$, sendo $\Omega = \mathbb{R}^n$. Dizemos que o conjunto $\Omega \times \mathbb{R}$ é o espaço de fase estendido nesse processo de evolução.

Um sistema impulsivo pode ser representado da seguinte maneira. Considera-se

(i) uma EDFR da forma

$$y'(t) = f(t, y_t), \tag{2.1}$$

onde $t_0 \in \mathbb{R}$ e $f : [t_0, \infty) \times D \to \mathbb{R}^n$, com $D = \{\varphi : [-r, 0] \to \mathbb{R}^n, r > 0\}$;

(ii) subconjuntos $N_t, M_t \subset \Omega \times \mathbb{R}$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$;

(iii) um operador $A_t : M_t \to N_t$, para cada $t \in \mathbb{R}_+$.

Descreveremos, a seguir, o comportamento do processo de evolução do sistema impulsivo **(i)**, **(ii)** e **(iii)** acima.

Sejam $\phi \in D$, $y_{t_0} = \phi$ e $y(t_0) = \phi(0)$. Consideremos uma solução $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ da equação diferencial (2.1) com a condição inicial $y_{t_0} = \phi$ e $y_{t_0}(t_0) = \phi(0)$. O ponto de mapeamento P_t em $\mathbb{R} \times \Omega$ inicia o seu movimento em $(t_0, y(t_0))$ e move-se ao longo da curva $\{(t, y(t)); t > t_0\}$ até o instante $t_1 > t_0$, no qual o ponto P_t encontra o conjunto M_t. Em t_1, o operador A_{t_1} transfere o ponto P_t da posição $P_{t_1} = (t_1, y(t_1))$ para $P_{t_1^+} = (t_1, y_1^+) \in (t_1, N_{t_1})$, onde $y_1^+ = A_{t_1} y(t_1) \in N_{t_1^+}$. O ponto P_t continuará percorrendo a curva $\{(t, z(t)); t > t_0\}$ descrita pela solução $z(t)$ de (2.1) com condição inicial $z(t) = y(t)$, para $t_1 - r \leq t \leq t_1$ e $z(t_1) = y_1^+$, até encontrar novamente o conjunto M_{t_2}, e o processo continua ao longo da solução de (2.1), caso esta exista, repetindo o procedimento descrito acima.

A curva descrita acima por P_t é chamada curva integral e a função que define esta curva é uma solução da EDFRI.

Uma solução do sistema diferencial impulsivo pode ser:

(a) uma função contínua, se a solução da EDFRI for contínua e a curva integral não interceptar o conjunto M_t, ou se ela atingir M_t somente nos pontos fixos do operador A_t;

(b) uma função contínua por partes, tendo um número finito de descontinuidades de primeira espécie, se a solução da EDFRI for contínua por partes e a curva integral encontrar o conjunto $M(t)$ em um número finito de pontos que não sejam pontos fixos do operador A_t;

(c) uma função contínua por partes, tendo uma quantidade enumerável de descontinuidades de primeira espécie se a curva integral encontrar o conjunto M_t em uma quantidade enumerável de pontos que não são pontos fixos de A_t.

Os instantes $t = t_k$, $k = 1, 2, ...$, nos quais a curva integral encontra o conjunto M_t, são chamados de momentos de impulsos. Iremos supor que toda solução y de (2.1) é contínua à esquerda em t_k, para $k = 1, 2, ...$, isto é, $y(t_k^-) = y(t_k)$.

Descreveremos detalhadamente o sistema de EDFRIs em tempos pré-fixados. Abordaremos neste trabalho resultados fundamentais e certas propriedades qualitativas destas EDFRIs.

No *sistema com impulso em tempo pré-fixado*, M_t representa uma sequência de tempos $t = t_k$, onde $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. O operador A_{t_k}, para $k = 1, 2, ...$, é dada por

$$x \mapsto A(t_k)(x) = x + I_k(x),$$

onde $I_k : \Omega \to \Omega$. Definimos o conjunto $N_{t_k} = A_{t_k} M_{t_k}$, $k = 1, 2, ...$ Assim, podemos caracterizar o modelo matemático para o sistema diferencial impulsivo em que cada impulso ocorre em tempos fixados da seguinte maneira:

$$\begin{cases} y' = f(t, y_t), & t \neq t_k; \\ \Delta y = I_k(y), & t = t_k, k = 1, 2, ..., \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\Delta y(t_k) = y(t_k^+) - y(t_k)$, $k = 1, 2, ...$ Assumimos $t_0 < t_1 < t_2 < ... < t_k < t_{k+1} < ...$ e $t_k \to +\infty$, quando $k \to +\infty$.

Seja $\phi \in D$, denotamos por $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ a solução do sistema (2.2), satisfazendo a condição inicial:

$$\begin{cases} y(t; t_0, \phi) = \phi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0]; \\ y(t_0^+; t_0, \phi) = \phi(0). \end{cases} \tag{2.3}$$

Uma solução $y(t) = y(t; t_0, \phi)$ de (2.2) satisfazendo (2.3) é caracterizada da seguinte forma:

(i) quando $t \in [t_0 - r, t_0]$, a solução $y(t)$ satisfaz a condição inicial (2.3);

(ii) para $t \in (t_0, t_1]$, a solução $y(t)$ coincide com a solução do problema

$$\begin{cases} y' = f(t, y_t), \quad t > t_0 \\ y_{t_0} = \phi(s) \quad -r \leq s \leq 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

No instante $t = t_1$, o ponto de mapeamento $(t, y(t; t_0, \phi))$ salta do ponto $(t_1, y(t_1; t_0, \phi))$ para $(t_1, y(t_1; t_0, \phi) + I_1(y(t_1; t_0, \phi)))$;

(iii) para $t \in (t_1, t_2]$, a solução $y(t)$ coincide com a solução de

$$\begin{cases} z' = f(t, z_t), \quad t > t_1; \\ z_{t_1} = \phi_1, \quad \phi_1 \in D, \end{cases} \tag{2.5}$$

onde

$$\phi_1(t-1) = \begin{cases} \phi(t - t_0), \quad t \in [t_0 - r, t_0] \cap [t_1 - r, t_1]; \\ y(t; t_0, \phi), \quad t \in (t_0, t_1) \cap [t_1 - r, t_1]; \\ y(t_1; t_0, \phi) + I_1(y(t_1; t_0, \phi_0)) \quad t = t_1. \end{cases} \tag{2.6}$$

No instante $t = t_2$ o ponto de mapeamento $(t, y(t; t_1, \phi_1))$ salta novamente. O processo continua ao longo da solução de (2.1), caso esta exista, repetindo o procedimento descrito acima.

Os efeitos impulsivos aplicados, até mesmo em EDOs, afetam o comportamento das soluções das mesmas. Os exemplos a seguir mostram que a continuação e a continuidade das soluções de EDOs podem ser afetadas pela ação impulsiva.

Exemplo 2.1.1. Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x' = 0, \qquad t \neq k, \\ \Delta x = \dfrac{1}{x-1}, \qquad t = k, \qquad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{2.7}$$

A solução $x(t)$ da equação diferencial ordinária $x' = 0$ existe para todo t. Mas a solução do sistema (2.7), com condição inicial $x(0) = 1$, está definida apenas para $0 \leq t \leq 1$, já que a função $I_k(x) = \dfrac{1}{x-1}$ não está definida para $x = 1$.

Exemplo 2.1.2. Consideremos a equação diferencial impulsiva

$$\begin{cases} x' = 1 + x^2, & t \neq \dfrac{k\pi}{4}, \\ \Delta x = -1, & t = \dfrac{k\pi}{4}, \quad k = 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{2.8}$$

Neste caso, a solução $x(t)$ da equação diferencial ordinária $x' = 1 + x^2$ com condição inicial $x(0) = 0$ é contínua no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right)$. No entanto, a solução do problema impulsivo (2.8) com a mesma condição inicial é dada por

$$x(t) = \operatorname{tg}\left(t - \frac{k\pi}{4}\right), \qquad t \in \left(\frac{k\pi}{4}, \frac{(k+1)\pi}{4}\right].$$

Esta solução é periódica de período $\dfrac{\pi}{4}$ e tem descontinuidades de primeira espécie em $t = \dfrac{k\pi}{4}$, $k = 1, 2, \ldots$. A figura abaixo ilustra este fato.

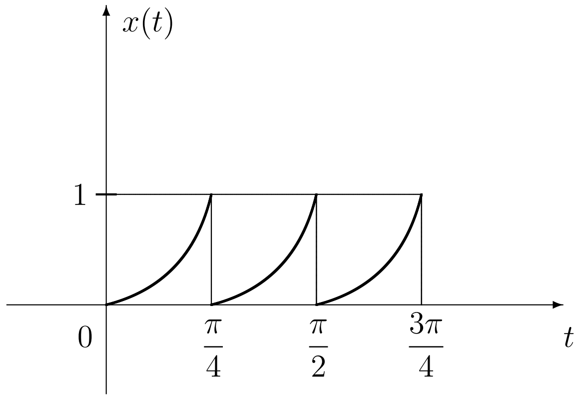

Figura 2.1: Curva integral do sistema impulsivo (2.8), com condição inicial $x(0) = 0$.

2.2 EDFRs com impulsos pré-fixados

Sejam $J \subset \mathbb{R}^+$ um intervalo da forma $[a, b)$, com $0 \leq a < b \leq \infty$, e $D \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Consideremos o sistema impulsivo

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y_t), & t \geq t_0, \ \ t \neq t_k; \\ \Delta y(t) = I_k(y(t_k)), & k = 1, 2, ...; \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{2.9}$$

onde $t_0 \in J$, $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $f : J \times PC([-r, 0], D) \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ...$ Vamos considerar, também, a sequência $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ com $\lim\limits_{k \to +\infty} t_k = +\infty$ e os operadores de impulsos satisfazendo $\psi(0) + I_k(\psi(t_k)) \in D$, para todo $(t_k, \psi) \in J \times PC([-r, 0], D)$ com $\psi(0^-) = \psi(0)$ e $k \in \mathbb{N}$.

Definição 2.2.1. *Seja $[t_0, t_0+\alpha] \subset J$, com $\alpha > 0$. Uma solução do problema impulsivo* (2.9) *em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ é uma função $y \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$ que satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) $y(t)$ é contínua quase sempre em $[t_0, t_0+\alpha]$ e os limites laterais $y(t_k^-)$ e $y(t_k^+)$ existem e $y(t)$ é contínua à esquerda em $t_k \in [t_0, t_0+\alpha]$, $k = 1, 2, \ldots$;

(b) $y(t)$ satisfaz a primeira equação de (2.9)*, para todo $t \in [t_0, t_0+\alpha]$;*

(c) $y(t_k)$, com $t_k \leq t_0 + \alpha$, satisfaz a segunda equação de (2.9)*, para $k \in \mathbb{N}$.*

Denotamos por $y(t) = y(t; t_0, \phi)$, ou simplesmente $y = y(t_0, \phi)$, uma solução de (2.9).

Observemos que a solução $y(t)$ coincide com $\phi(t - t_0)$, para $t_0 - r \leq t \leq t_0$. Assim, uma solução $y(t)$ de (2.9) existindo em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e sofrendo efeitos de impulsos nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^m$, onde $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_m \leq t_0 + \alpha$, pode ser descrita por

$$y(t) = \begin{cases} y(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1]; \\ y(t; t_k, y_{t_k}), & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \ldots, m-1; \\ y(t; t_m, y_{t_m}), & t \in (t_m, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{2.10}$$

Agora, se uma solução $y(t)$ existe sobre o intervalo $[t_0 - r, \infty)$, então $y(t)$ sofre infinitos impulsos nos instantes $\{t_k\}_{k=1}^\infty$, onde $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$ e $\lim_{k \to \infty} t_k = \infty$, isto é, os instantes de impulsos não se acumulam. Neste caso, podemos expressar a solução de (2.9) da seguinte maneira

$$y(t) = \begin{cases} y(t; t_0, \phi), & t \in [t_0 - r, t_1]; \\ y(t; t_k, y_{t_k}), & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases}$$

isto é, para cada $k \in \mathbb{N}$, $y(t; t_k, y_{t_k})$ representa uma solução de (2.9) com $t \in [t_k, t_{k+1})$, onde t_k denota o instante inicial e y_{t_k} representa a função inicial.

O lema a seguir nos fornece uma formulação integral de uma solução de (2.9) utilizando a função de Heaviside dada na Definição 1.1.5.

Lema 2.2.1. *Suponhamos que a função $t \mapsto f(y_t, t)$ é localmente Lebesgue integrável em $t \in [t_0, +\infty)$. Então $y \in PC([t_0 - r, t_0 + \alpha], D)$, onde $\alpha > 0$ e $[t_0 - r, t_0 + \alpha] \subset J$, é uma solução de* (2.9) *se e, somente se,*

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, ds, & t \in (t_0, t_1]; \\ y(t_k^-) + I(t_k, y_{t_k^-}) + \displaystyle\int_{t_k}^{t} f(s, y_s)\, ds, & t \in (t_k, t_{k+1}], \quad k = 1, 2, \cdots, m-1; \\ y(t_m^-) + I(t_m, y_{t_m^-}) + \displaystyle\int_{t_m}^{t} f(s, y_s)\, ds, & t \in (t_m, t_0 + \alpha] \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t-t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(t_k, y_{t_k}) H_{t_k}(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases}$$

Demonstração: Para a demonstração basta substituir a equação em (2.10) na equação integral presente no Lema 1.2.1.

2.3 Existência e unicidade de soluções

Reconhecendo a impossibilidade de resolver a maior parte das EDFRIs explicitamente, põe-se em questão saber se o problema estudado admite solução única, chegando, assim aos teoremas de existência e unicidade de solução. Com este intuito, consideraremos a EDFRI em tempos pré-fixados

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0; \\ \Delta y\,(t) = I_k\,(y\,(t))\,, & t = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{2.11}$$

onde $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $f : [t_0, +\infty) \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, e

$$\Delta y(t) = y(t+) - y(t-) = y(t+) - y(t),$$

para quaisquer $y \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $t \geq t_0$.

Vamos supor que $f : PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \times [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do tipo Carathéodory:

(**A**) para cada $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, a função $t \mapsto f\,(t, \psi)$ é localmente Lebesgue integrável em $t \in [t_0, +\infty)$;

(**B**) existe uma função positiva localmente Lebesgue integrável $M : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f\,(s, \psi)\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M\,(s)\, ds;$$

(**C**) existe uma função positiva localmente Lebesgue integrável $L : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $\psi, \varphi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, +\infty)$,

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} [f\,(s, \psi) - f\,(s, \varphi)]\, ds \right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L\,(s)\, \|\psi - \varphi\|\, ds.$$

Os operadores de impulso $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, satisfazem as condições do tipo Lipschitz, isto é:

(A') existe uma constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, e todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

(B') existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$, e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|.$$

O próximo lema garante que toda solução de (2.11) é de variação limitada em $[t_0, t_0 + \sigma]$, com $\sigma > 0$.

Lema 2.3.1. *Suponhamos que as condições (**A**), (**B**), (**C**), (**A'**) e (**B'**) estejam satisfeitas. Se $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$, $\sigma > 0$, é uma solução de* (2.11)*, então a função $\overline{y} : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ tal que, $\overline{y}(t) = y(t)$ para $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, pertence a $BV([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$. Isto é, a restrição de y em $[t_0, t_0 + \sigma]$ é de variação limitada.*

Demonstração: Queremos mostrar que $Var_{t_0}^{t_0+\sigma}\overline{y} < +\infty$. De (**B**), (**C**), (**A'**) e (**B'**), definimos

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} [M(s) + L(s)]ds + \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=0}^{+\infty} H_{t_k}(t), \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + \sigma]. \tag{2.12}$$

Claramente, h é uma função não-decrescente e contínua à esquerda, logo $h \in BV([t_0, t_0 + \sigma], \mathbb{R})$.

Pelo Lema 2.2.1 e por (**B**) e (**A'**), para toda divisão $D := \{t_0 = s_1 < s_2 < \ldots < s_l = t_0 + \sigma\}$ de $[t_0, t_0 + \sigma]$, temos

$$\begin{aligned}
|\overline{y}(s_i) - \overline{y}(s_i - 1)| &= \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds + \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(y(t_k))[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] \right| \\
&\leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} M(s)ds + K_1 \sum_{k=1}^{+\infty} [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] \\
&\leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} [M(s) + L(s)]ds + \max\{K_1, K_2\} \sum_{k=0}^{+\infty} |H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})| \\
&= h(s_i) - h(s_{i-1}),
\end{aligned}$$

para todo $i = 1, 2, ..., l$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{l} |\overline{y}(s_i) - \overline{y}(s_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{l} [h(s_i) - h(s_{i-1})] = h(t_0 + \sigma) - h(t_0) = Var_{t_0}^{t_0+\sigma} h.$$

Consequentemente, obtemos $Var_{t_0}^{t_0+\sigma}\overline{y} \leq Var_{t_0}^{t_0+\sigma} h < +\infty$. ■

O próximo resultado garante a existência e unicidade de soluções para EDFRI em (2.11). Para tanto, usamos o Teorema do Ponto Fixo de Banach (veja, por exemplo, [22]) no decorrer da demonstração.

Teorema 2.3.1. *Consideremos o problema de valor inicial* (2.11). *Suponhamos que as condições* (***A***), (***B***), (***C***), (***A'***) *e* (***B'***) *estejam satisfeitas. Então, existe* $\Delta > 0$ *tal que,* $y : [t_0 - r, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$ *é a única solução de* (2.11) *satisfazendo* $y_{t_0} = \phi$.

Demonstração: Pelo Lema 2.2.1, encontrar uma solução de (2.11) definida em $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, para algum $\alpha > 0$, é equivalente a resolver a equação integral

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0], \\ \phi(0) + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)\, ds + \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(t_k, y_{t_k}) H_{t_k}(t), & t \in (t_0, t_0 + \alpha]. \end{cases} \tag{2.13}$$

Além disso, como $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ foi dada, resta resolvermos (2.13) para $t \geq t_0$.

Consideremos a função h definida em (2.12). Sabendo que h é não-decrescente e contínua à esquerda, então dividiremos esta demonstração em duas: quando t_0 for ponto de continuidade de h e quando não for.

Suponhamos que h é contínua em t_0, então existe $\Delta > 0$, tal que $h(t_0 + \Delta) - h(t_0) < \dfrac{1}{4}$ e, também, temos $I_0(y(t_0)) = 0$.

Observemos que, se y for solução de (2.11) em $[t_0 - r, t_0 + \Delta]$, pelo Lema 2.3.1, a restrição de y ao intervalo $[t_0, t_0 + \Delta]$ é de variação limitada. Consequentemente é natural considerarmos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{z \in \mathrm{BV}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n);\ \ \|z(t) - \phi(0)\| \leq |h(t) - h(t_0)|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}.$$

Mostraremos que $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach, ou melhor, que $\mathcal{A}$ é fechado em $\mathrm{BV}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$.

Seja $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathcal{A}$ tal que, $z_n \to z^*$ em $\mathrm{BV}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n)$. Como

$$\|z_n - z^*\|_{BV} = \|z_n(t_0) - z^*(t_0)\| + \mathrm{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(z_n - z^*) \quad \text{e} \quad \|z_n(t) - z^*(t)\| \leq \|z_n - z^*\|_{BV},$$

para qualquer $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, segue que $z_n \to z^*$ uniformemente. Portanto, dado $\eta > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|z^*(t) - \phi(0)\| \leq \|z^*(t) - z_n(t)\| + \|z_n(t) - \phi(0)\| < \eta + |h(t) - h(t_0)|, \quad \forall n \geq n_0.$$

Assim, $\|z^*(t) - \widetilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)|$, para todo $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$, donde $\widetilde{x} \in \mathcal{A}$. Logo, $\mathcal{A}$ é fechado.

Para $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z \in \mathcal{A}$, definimos

$$Tz(s) = \phi(0) + \int_{t_0}^{s} f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(z(t_k) H_{t_k}(s). \tag{2.14}$$

Pela condição (**A**), o operador T está bem definido. A seguir, mostraremos que $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Para $z \in \mathcal{A}$, temos

$$\begin{aligned} |Tz(s) - \phi(0)| &= \left| \int_{t_0}^{s} f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(z(t_k)) H_{t_k}(s) \right| \\ &\leq h(s) - h(t_0), \end{aligned}$$

para todo $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$. Além disso, para $z \in \mathcal{A}$ e $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$ com $s_1 \leq s_2$, temos

$$\begin{aligned} |Tz(s_2) - Tz(s_1)| &= |Tz(s_2) - \phi(0)| + |Tz(s_1) - \phi(0)| \\ &\leq h(s_2) - h(t_0) - [h(s_1) - h(t_0)] = h(s_2) - h(s_1), \end{aligned}$$

ou seja, $Var_{t_0}^{t_0+\Delta} Tz \leq Var_{t_0}^{t_0+\Delta} h$. Implicando em $Tz \in \mathcal{A}$.

Para concluirmos, devemos mostrar que T é uma contração. Sejam $t_0 \leq s_1 \leq s_2 \leq t_0 + \Delta$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$. Usando (**B**), (**C**), (**A'**) e (**B'**), temos

$$\begin{aligned} & |(Tz_2 - Tz_1)(s_2) - (Tz_2 - Tz_1)(s_1)| = \\ = & \left| \int_{s_1}^{s_2} [f(\tau, (z_2)_\tau) - f(\tau, (z_1)_\tau)] d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} [I_k(z_2(t_k)) - I_k(z_2(t_k))][H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)] \right| \\ \leq & \int_{s_1}^{s_2} L(s) |(z_2)_\tau - (z_1)_\tau| d\tau + K_2 \sum_{k=1}^{+\infty} |z_2(t_k) - z_2(t_k)| |H_{t_k}(s_2) - H_{t_k}(s_1)| \\ \leq & \|z_2 - z_1\|_{BV} [h(s_2) - h(s_1)]. \end{aligned}$$

Logo,

$$Var_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \|z_2 - z_2\|_{BV} Var_{t_0}^{t_0+\Delta} h = \|z_2 - z_2\|_{BV} [h(t_0 + \Delta) - h(t_0)] < \frac{1}{4} \|z_2 - z_2\|_{BV}.$$

Então,

$$\|Tz_2 - Tz_1\|_{BV} \leq 2 Var_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \leq \frac{1}{2} \|z_2 - z_2\|_{BV}.$$

Portanto, T é uma contração. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $z \in \mathcal{A}$ tal que $Tz = z$. Consequentemente, a função

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ z(t), & t \in [t_0, t_0 + \Delta] \end{cases} \tag{2.15}$$

é a única solução de (2.11).

Agora, suponhamos que h não é contínua em t_0. Definimos

$$\overline{h}(t) = \begin{cases} h(t), & t = t_0; \\ h(t) - [h(t_0^+) - h(t_0)], & t > t_0. \end{cases} \tag{2.16}$$

Então, $\overline{h}$ é contínua em t_0 e, assim, existe $\Delta > 0$, tal que $[\overline{h}(t_0 + \Delta) - \overline{h}(t_0)] < \frac{1}{4}$.

Consideremos o operador $\overline{I}_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, tal que

$$\overline{I_0}(x(t)) = \begin{cases} I_0(x(t)), & t = t_0; \\ I_0(x(t)) - [I_0(x(t_0^+)) - I_0(x(t_0))], & t > t_0, \end{cases} \tag{2.17}$$

para toda função $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$. Consideremos, também, o sistema

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0, \\ \Delta y(t) = I_k(y(t)), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \\ \Delta y(t) = \overline{I_0}(y(t)), & t = t_0, \\ y_{t_0} = \overline{\phi}, \end{cases} \tag{2.18}$$

onde

$$\overline{\phi}(t) = \begin{cases} \phi(\theta), & \theta \in [-r, 0); \\ \phi(0) + \overline{I_0}(\phi(0)), & \theta = 0. \end{cases} \tag{2.19}$$

Definimos,

$$\overline{\mathcal{A}} = \{z \in \mathrm{BV}([t_0, t_0 + \Delta], \mathbb{R}^n); \quad \|z(t) - \overline{\phi}(0)\| \leq |\overline{h}(t) - \overline{h}(t_0)|, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + \Delta]\}.$$

Como fizemos anteriormente, provamos que $\overline{\mathcal{A}}$ é um espaço de Banach. Consideremos o operador

$$\overline{T}z(s) = \phi(0) + \overline{I_0}(\phi(0)) + \int_{t_0}^{s} f(\tau, z_\tau) d\tau + \sum_{k=1}^{+\infty} I_k(z(t_k)) H_{t_k}(s). \tag{2.20}$$

Como no caso anterior, $\overline{T}$ possui um único ponto fixo $z \in \overline{\mathcal{A}}$. Portanto, $y : [t_0 - r, t_0 + \Delta] \to \mathbb{R}^n$, dada por

$$y(t) = \begin{cases} \phi(t - t_0), & t \in [t_0 - r, t_0]; \\ z(t), & t \in [t_0, t_0 + \Delta] \end{cases} \tag{2.21}$$

é a única solução de (2.11) que satisfaz $y_{t_0} = \phi$. ■

CAPÍTULO

3

Equação Diferencial Ordinária Generalizada

Dividiremos o estudo das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOGs), em duas seções. Abordaremos, primeiramente, a integração de Kurzweil e na sequência a teoria fundamental das EDOGs.

Na primeira seção, vamos apresentar a definição original da integral de Kurzweil que é essencial para a definição da EDO em um sentido mais amplo e que generaliza as equações diferenciais no sentido de Carathéodory. Dividiremos o nosso estudo em quatro subseções. Na primeira subseção, apresentaremos a definição de integral de Kurzweil. Na seguinte, comentaremos sobre a integral de Henstock-Kurzweil e provaremos o Teorema Fundamental do Cálculo. Na terceira subseção, destacaremos as propriedades fundamentais das integrais de Kurzweil e alguns resultados que serão importantes no decorrer deste trabalho. Por fim, investigaremos resultados de convergência. A principal referência desta seção é [35].

Na segunda seção, introduziremos algumas definições e apresentaremos resultados importantes sobre as EDOGs que serão de grande valia ao longo do trabalho. Dividiremos em duas subseções. Na primeira delas, as EDOGs são definidas a partir da integral de Kurzweil. Na seguinte, analisaremos a existência e a unicidade de soluções para uma classe de EDOGs. As principais referências serão [2, 10, 18] e [35].

Neste capítulo, trabalharemos com funções assumindo valores em um espaço de Banach, por isso adaptamos, de modo à generalizar, os resultados em [35]. A principal adaptação será a formulação de um Teorema de Convergência para integral de Kuzweil. Essa abordagem é necessária para obtermos a correspondência entre uma classe de EDOGs e uma classe de EDFRIs cujas funções assumem valores em $\mathbb{R}^n$.

3.1 Integral de Kurzweil

A integral de Riemann ou R-integral, definida em 1854 por Bernhard Riemann, é uma ferramenta clássica usada na resolução de muitos problemas matemáticos até hoje. No final do século XIX, matemáticos constataram algumas desvantagens ao se trabalhar com a integral de Riemann ou, simplesmente, a R-integral. Por exemplo, uma função não-limitada em $[a, b]$ não é R-integrável, ou ainda, no Teorema Fundamental do Cálculo faz-se necessário a continuidade de uma função para que sua derivada seja R-integrável.

Em 1902, Henri Léon Lebesgue generalizou o conceito de integral de Riemann de modo que a integral de Lebesgue ou, simplesmente, a L-integral, apresentasse diversas vantagens em relação à integral de Riemann, sobretudo em relação aos cálculos envolvendo limites. Não existem versões dos Teoremas da Convergência Monótona e Dominada e do Lema de Fatou usando integral de Riemann. Por outro lado, o Teorema Fundamental do Cálculo para integral de Lebesgue, garante que a derivada de uma função é L-integrável se ela for absolutamente contínua.

Portanto, é natural nos perguntarmos se é possível construir um conceito de integral onde toda derivada de uma função é integrável. Arnaud Denjoy, em 1912, obteve um processo de integração chamado de integral de Denjoy ou D-integral, generalizando, assim, o conceito de integrabilidade de Lebesgue e resolvendo o problema de reconstrução de tal função por meio de sua derivada. Simultaneamente, Oskar Perron, em 1914, explorou um método diferente para o mesmo problema e o usou no estudo de equações diferenciais. Surpreendentemente o processo de Perron é equivalente ao de Denjoy e mais simples (veja [19]) . Por outro lado, as definições de Riemann, Lebesgue, Denjoy e Perron possuem pouco em comum.

Em 1957, Jaroslav Kurzweil investigou um processo de integração baseado nas ideias de Riemann e obteve a integral de Kurzweil ou integral de Riemannn Generalizada que consiste na definição de integral para funções de duas variáveis. O processo dado por Kurzweil, em [25] e nos artigos subsequentes [26, 27, 28], mostra que o novo tratamento das integrais surgiu a partir das dificuldades presentes na teoria das equações diferenciais ordinárias. Em particular, o principal motivo de se introduzir integrais deste tipo à teoria das EDOs no lugar das integrais de Riemann e de Lebesgue foi a presença de forças externas que oscilam bastante, por exemplo, EDOs que envolvem funções descontínuas ou as que não são de variação limitada. Independentemente, Ralph Henstock, em 1961, também trabalhou com a definição de integral como a de Kurzweil para funções de uma variável (ver [19, 24, 30, 39]). A integral de Kurzweil, engloba este conceito e, por este motivo, alguns autores a chamam de integral de Henstock-Kurzweil ou HK-integral.

A ideia presente na definição de integral de Kurzweil de uma função $U : [a, b] \times [a, b] \to X$ é particionarmos o intervalo $[a, b]$ de forma que as peculiaridades da função sejam levadas em consideração. A integral, por sua vez, é aproximada por somas de Riemann e os subintervalos da partição de $[a, b]$ devem se adaptar para diminuir a influência das parcelas na soma de Riemann que sejam desproporcionais.

3.1.1 Definição de integral

Relembramos que X representa um espaço de Banach com norma $\|.\|$.

Definição 3.1.1. *Seja* $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

(i) *Uma divisão* $\mathfrak{D} = \{J_1, J_2, ..., J_k\}$ *de* $[a, b]$ *é uma coleção finita de subintervalos compactos* J_i *de* $[a, b]$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \in \mathbb{N}$, *tais que* $[a, b] = \bigcup_{i=1}^{k} J_i$ *e* $\mathrm{int}(J_i) \cap \mathrm{int}(J_j) = \emptyset$ *sempre que* $i \neq j$*;*

(ii) *Um intervalo marcado é um par* (τ, J) *que consiste de um ponto* $\tau \in \mathbb{R}$ *e um intervalo* J *em* $\mathbb{R}$*. Dizemos que* τ *é uma marca de* J*;*

(iii) *Uma divisão marcada ou uma partição de* $[a, b]$ *é uma coleção finita* $D = \{(\tau_i, J_i), i = 1, 2, ...k\}$*, onde* $\mathfrak{D} = \{J_1, J_2, ..., J_k\}$ *é uma divisão de* $[a, b]$ *e* $\tau_i \in J_i$ *para cada* $i = 1, 2, ..., k$*;*

(iv) *Um calibre em* $[a, b]$ *é qualquer função* $\delta : [a, b] \to (0, +\infty)$*;*

(v) *Seja* δ *um calibre em* $[a, b]$*. Uma divisão marcada ou partição* D *é dita* δ*-fina se, para todo* $i = 1, 2, ..., k$*, tem-se* $J_i \subset [\tau_i - \delta(\tau_i), \tau_i + \delta(\tau_i)]$*.*

No exemplo seguinte, dado um calibre δ e uma divisão de $[0, 1]$, constatamos que nem toda marca tornará a divisão marcada δ-fina.

Exemplo 3.1.1. Consideremos a função calibre $\delta : [0, 1] \to (0, +\infty)$ dada por

$$\delta(t) = \begin{cases} t, & \text{se } 0 < t \leq 1 \\ \frac{1}{2}, & \text{se } t = 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

Seja $\mathfrak{D} = \{[0, \frac{1}{3}], [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, 1]\}$ uma divisão de $[0, 1]$.

A divisão marcada $D_1 = \{(0, [0, \frac{1}{3}]), (\frac{1}{2}, [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]), (1, [\frac{1}{2}, 1])\}$ é δ-fina. Mas nem toda divisão marcada será δ-fina, por exemplo, a divisão marcada $D_2 = \{(\frac{1}{10}, [0, \frac{1}{3}]), (\frac{1}{2}, [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}]), (1, [\frac{1}{2}, 1])\}$ não é δ-fina, pois $[0, \frac{1}{3}] \not\subseteq [\frac{1}{10} - \delta(\frac{1}{10}), \frac{1}{10} + \delta(\frac{1}{10})] = [0, \frac{1}{5}]$.

Destacamos que apenas na divisão marcada D os intervalos J_i são os elementos fundamentais e a marca é qualquer ponto de J_i, mas em uma divisão marcada δ-fina D os elementos fundamentais são as marcas e os intervalos que devem-se "adaptar" para satisfazer a Definição 3.1.1. Agora nos perguntamos se dado qualquer calibre δ de $[a, b]$, é sempre possível obter uma divisão marcada δ-fina de $[a, b]$? A resposta é afirmativa e segue do próximo resultado conhecido como Lema de Cousin.

Lema 3.1.1. *[Cousin] Se* δ *é um calibre em* $[a, b]$*, então existe uma divisão marcada* δ*-fina em* $[a, b]$*.*

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que não exista uma divisão marcada δ-fina em $[a,b]$. Seja $\{[a,\frac{a+b}{2}],[\frac{a+b}{2},b]\}$ uma divisão de $[a,b]$, implicando em um desses subintervalos não possuir uma divisão marcada δ-fina, o qual denotaremos por $[a_1,b_1]$.

Fazendo este processo, por indução, construímos uma sequência de subintervalos $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, ... de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$, satisfazendo, para todo $n \in \mathbb{N}$, as seguintes condições:

(i) $[a_n,b_n] \supset [a_{n+1},b_{n+1}]$;

(ii) não há uma divisão marcada em $[a_n,b_n]$;

(iii) $b_n - a_n = \dfrac{b-a}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixados (veja, por exemplo, [31]), segue $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n] = \{c\}$, para algum $c \in [a,b]$. Porém, do item (iii), existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$[a_{n_0},b_{n_0}] \subset [c-\delta(c),c+\delta(c)].$$

Isto implica que $\{(c,[a_{n_0},b_{n_0}])\}$ é uma divisão marcada δ-fina de $[a_{n_0},b_{n_0}]$, contradizendo o item (ii), concluindo a prova deste lema. ■

Seja $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ uma função. Usaremos a seguinte notação

$$S(U,D) = \sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})]$$

para a soma de Riemman correspondente à função U e à divisão marcada D de $[a,b]$.

Nossa proposta, neste trabalho, será considerar uma situação específica que surgiu a partir das equações diferenciais ordinárias apontada pelo matemático tcheco Jaroslav Kurzweil em seu artigo em 1957 ([25]). A seguir, formalizamos a definição de integral no sentido de Kurzweil.

Definição 3.1.2. *Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é Kurzweil integrável, ou simplismente K-integrável, se existe um elemento $I \in X$ e, para todo $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$, tal que*

$$\|S(U,D) - I\| = \left\|\sum_{j=1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - I\right\| < \epsilon,$$

para toda divisão marcada δ-fina $D = \{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]), i = 1,...,k\}$ de $[a,b]$.

Na Definição 3.1.2, em virtude do Lema de Cousin (Lema 3.1.1), dado um calibre δ em $[a,b]$, sempre garantimos a existência de uma divisão marcada δ-fina deste intervalo.

Chamaremos $I \in X$ de integral de Kurzweil ou K-integral de U sobre o intervalo $[a,b]$ e denotaremos esta integral por $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t)$. Esta é apenas uma notação simbólica e a letra D não possui relação nenhuma com a diferencial de U.

Seja $\mathcal{K}([a,b],X)$ o conjunto de todas as funções $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ que são integráveis em $[a,b]$, no sentido de Kurzweil.

Para constatarmos que a Definição 3.1.2 está bem posta, mostraremos a unicidade da integral.

Teorema 3.1.1. *Se $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$, então $\int_a^b DU(\tau,t)$ é única.*

Demonstração: Sejam I_1 e I_2 valores da integral de Kurzweil de U em $[a,b]$. Dado $\epsilon > 0$, existem calibres δ_1 e δ_2 em $[a,b]$, tais que

$$\|S(U,D_1) - I_1\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|S(U,D_2) - I_2\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para todas divisões marcadas δ_1-fina D_1 e δ_2-fina D_2, respectivamente.

Definimos o calibre δ em $[a,b]$, por $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$, para todo $x \in [a,b]$. Pelo Lema de Cousin (Lema 3.1.1), existe uma divisão marcada δ-fina D, que pela escolha de δ, é também δ_1 e δ_2 finas. Consequentemente,

$$\|I_1 - I_2\| \leq \|S(U,D) - I_1\| + \|S(U,D) - I_2\| < \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $I_1 = I_2$. ■

Como no caso das integrais de Riemann, as integrais de Kurzweil também são caracterizadas pelo Critério de Cauchy. Este critério será fundamental na demonstração dos resultados seguintes.

Teorema 3.1.2. *[Critério de Cauchy] Uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$ é Kurzweil integrável em $[a,b]$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$, tal que*

$$\|S(U,D_1) - S(U,D_2)\| < \epsilon, \tag{3.2}$$

para quaisquer divisões marcadas δ-finas D_1 e D_2.

Demonstração: Se supormos que $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ o resultado será imediado. Reciprocamente, para cada calibre δ em $[a,b]$, definimos o conjunto

$$\sum_{\delta} = \{S(U,D); D \text{ é uma divisão marcada } \delta - \text{fina de } [a,b]\}.$$

Pela definição acima, é evidente que se $\delta_1 \leq \delta_2$, temos que uma divisão marcada δ_1-fina será δ_2-fina, o que implica em $\sum_{\delta_1} \subset \sum_{\delta_2}$. Além disso, de (3.2), escolhendo δ um calibre correspondente a este $\epsilon > 0$, temos

$$\operatorname{diam} \sum_{\delta} \leq \epsilon. \tag{3.3}$$

Agora, sejam $(\epsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência, com $\epsilon_n \to 0$ e os calibres correspondentes δ_n satisfazendo $\delta_{n+1} \leq \delta_n$. Portanto, os conjuntos $\sum_{\delta_n}$, $n \in \mathbb{N}$, formam uma sequência decrescente de subconjuntos de X com $\operatorname{diam} \sum_{\delta_n} \to 0$, sempre que $n \to +\infty$. Como X é um espaço de Banach, existe um único

$I \in X$ que é aderente a todos os subconjuntos $\sum_{\delta_n}$. Desta forma, resta provar que $\int_a^b DU(\tau,t) = I$. De fato, dado $\epsilon > 0$ acima, tomamos uma sequência $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ com $\epsilon_n < \epsilon$ e cada calibre δ correspondente. Então, para toda divisão marcada δ-fina D de $[a,b]$, temos $S(U,D) \in \sum_{\delta}$. Portanto, por (3.3), temos o desejado. ■

3.1.2 Integral de Henstock-Kurzweil

A definição usual de integral de Henstock-Kurzweil e os principais resultados podem ser encontrados em [19, 24, 39].

Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função e $D = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1,...,k\}$ uma divisão de $[a,b]$. Se $U : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $U(\tau,t) = f(\tau)\cdot t$, com $\tau, t \in [a,b]$, então

$$S(U,D) = \sum_{i=1}^{k}[U(\tau_i,\alpha_i) - U(\tau_i,\alpha_{i-1})] = \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}]$$

representa a clássica soma Rimanniana para a função f e a partição D de $[a,b]$. Podemos na Definição 3.1.2 da integral de Kurzweil usar a função U acima. Desta forma, obteremos o conceito conhecido na literatura como integral de Henstock-Kurzweil ou HK-integral para uma função f definida em $[a,b]$ e denotada por $(HK)\int_a^b f(s)ds$, (veja [39]), ou seja, a teoria da integral de Kurzweil engloba a Henstock-Kurzweil.

Observamos que para as integrais de Riemann, as partições são escolhidas independentemente da função f. Assim, esta definição não leva em consideração as particularidades da função envolvida. Observemos que toda função Riemann integrável é Henstock-Kurzweil integrável, basta tomarmos na Definição 3.1.2 a função calibre como sendo uma constante δ proveniente do $\epsilon > 0$ dado. Porém, a recíproca não é verdadeira, vejamos o exemplo a seguir.

Exemplo 3.1.2. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de Dirichlet, i.e.,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Sabemos que a função de Dirichlet não é Riemann integrável (veja [31]). Mostraremos que

$$\text{(KH)}\int_a^b f(s)ds = 0.$$

Sejam $\epsilon > 0$ e $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma enumeração dos números racionais em $\mathbb{Q} \cap [0,1]$. Definimos o calibre δ em $[a,b]$ por

$$\delta(t) = \begin{cases} \dfrac{\epsilon}{2^{n+1}}, & \text{se } t = r_n, \ \forall n \ \in \mathbb{N}; \\ 1, & \text{se } t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases} \tag{3.5}$$

Seja $D = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, 2, ..., k\}$ uma divisão marcada δ-fina de $[0, 1]$. Então,

$$\begin{aligned}
|S(f, D) - 0| &= |S(f, D)| = \left| \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}] \right| \\
&\leq \left| \sum_{\substack{i=1 \\ \tau_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}] \right| + \left| \sum_{\substack{i=1, \\ \tau_i \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}}}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}] \right| \\
&= \left| \sum_{\substack{i=1 \\ \tau_i \in \mathbb{Q} \cap [0,1]}}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}] \right| < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^k} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, temos que a função f é HK-integrável e $(\mathrm{HK}) \displaystyle\int_0^1 f(s)ds = 0$.

Vejamos no próximo exemplo, extraído de [1], que as funções ilimitadas, também, podem ser HK-integráveis.

Exemplo 3.1.3. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (-1)^n n, & \text{se } x \in [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}] \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{3.6}$$

Mostraremos que f é KH-integrável e

$$(KH) \int_0^1 f(s)ds = \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{i+1}.$$

De fato, seja $\epsilon > 0$ dado, para $k > 0$ suficientemente grande, definimos o calibre δ de $[0, 1]$, pondo

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\{\frac{1}{n} - t, t - \frac{1}{n+1}\}, & \text{se } t \in (\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}), \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ k^{-n}, & \text{se } t = \frac{1}{n} \in [0, 1], \ \forall n \in \mathbb{N}; \\ \epsilon, & \text{se } t = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Seja $D = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, 2, ..., k\}$ uma divisão marcada δ-fina de $[0, 1]$. Então,

$$\begin{aligned}
\left| S(f, D) - \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{i+1} \right| &= \left| \sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[\alpha_i - \alpha_{i-1}] - \sum_{i=1}^{+\infty} (-1)^i \frac{1}{i+1} \right| \\
&\leq 2\epsilon + 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{k^i} \leq 2\epsilon + \frac{2}{k-1}.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é dado arbitrariamente e $k > 0$ é escolhido suficientemente grande, obtemos o desejado.

Um dos objetivos, segundo Henstock, era construir uma teoria de integração, a fim de que fosse possível garantir a reconstrução de uma função por meio de suas derivadas, ou seja, uma versão do Teorema Fundamental do Cálculo que não exigisse mais hipóteses sobre a primitiva de uma função. No próximo teorema temos o desejado.

Teorema 3.1.3. *[Teorema fundamental do Cálculo] Seja $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f, isto é, existe uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = F'(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Então, f é KH-integrável e* (KH) $\displaystyle\int_a^b f(s)ds = F(b) - F(a)$.

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. A ideia é construir um calibre δ em $[a, b]$, tal que, para toda divisão marcada δ-fina $D = \{(\tau_i, [t_{i-1}, t_i]), i = 1, 2, ..., k\}$, tenhamos

$$\left|\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[t_i - t_{i-1}] - (F(b) - F(a))\right| < \epsilon(b - a).$$

Por hipótese, $F'(\tau) = f(\tau)$, para todo $\tau \in [a, b]$. Logo, para cada $\tau \in [a, b]$, existe uma constante $\delta(\tau) = \delta(\tau, \epsilon) > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |F(r) - F(\tau) - f(\tau)(r - \tau)| &< \epsilon|r - \tau|; \\ |F(\tau) - F(s) - f(\tau)(\tau - s)| &< \epsilon|s - \tau|, \end{aligned}$$

sempre que $\tau - \delta(\tau) < s < \tau < r < \tau + \delta(\tau)$. Portanto,

$$|F(r) - F(s) - f(\tau)(r - s)| < \epsilon|r - s|,$$

supondo $\tau - \delta(\tau) < s \leq \tau \leq r < \tau + \delta(\tau)$.

A função acima $\delta : \tau \in [a, b] \to \delta(\tau) \in \mathbb{R}$ é o calibre que procuramos. De fato, seja D uma divisão marcada δ-fina, então

$$\begin{aligned} \left|\sum_{i=1}^{k} f(\tau_i)[t_i - t_{i-1}] - (F(b) - F(a))\right| &= \left|\sum_{i=1}^{k}[f(\tau_i)(t_i - t_{i-1}) - (F(t_i) - F(t_{i-1}))]\right| \\ &< \sum_{i=1}^{k} \epsilon(t_i - t_{i-1}) = \epsilon(b - a). \end{aligned}$$

Portanto, a função f é HK-integrável. ■

É natural questionarmos a relação entre a integral de Henstock-Kurzweil e a de Lebesgue. Sabemos que a integral de Lebesgue é uma integral absoluta, enquanto que a de Henstock-Kurzweil é uma integral condicional, ou seja, possui funções integráveis que não são absolutamente integráveis. Por isso, daremos um exemplo de uma função que não é L-integrável mas, pelo Teorema 3.1.3, será HK-integrável.

Exemplo 3.1.4. Consideremos a função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & \text{para } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{3.8}$$

A função f é diferenciável com

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) + \dfrac{2\pi}{x}\text{sen}\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right), & \text{para } 0 < x \leq 1; \\ 0, & \text{para } x = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

É imediato do Teorema 3.1.3 que a derivada f' é HK-integrável em $[0,1]$. Vamos mostrar que f' não é Lebesgue integrável em $[0,1]$.

Para $a, b \in \mathbb{R}$ com $0 < a < b < 1$, a função f' é contínua em $[a,b]$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, f' é R-integrável e satisfaz

$$(\mathrm{R})\int_a^b f'(x)dx = b^2\cos\left(\frac{\pi}{b^2}\right) - a^2\cos\left(\frac{\pi}{a^2}\right).$$

Consideremos $a_k = \sqrt{\dfrac{2}{4k+1}}$ e $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$, $k \in \mathbb{N}$. Então

$$(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k} f'(x)dx = b_k^2\cos\left(\frac{\pi}{b_k^2}\right) - a_k^2\cos\left(\frac{\pi}{a_k^2}\right) = \frac{1}{2k}.$$

Observemos que $\{[a_i, b_i]_{i\in\mathbb{N}}\}$ forma uma família de intervalos dois à dois disjuntos e $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty}[a_k, b_k] \subset [0,1]$ e

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k}|f'(x)|dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{2k} = +\infty.$$

Assim, a função $|f'|$ não é L-integrável, pois, caso contrário,

$$(\mathrm{L})\int_0^1 |f'(x)|dx \geq \sum_{k=1}^{+\infty}(\mathrm{R})\int_{a_k}^{b_k}|f'(x)|dx.$$

Portanto, f' não é absolutamente integrável em $[0,1]$, o que implica que f' não é Lebesgue integrável.

3.1.3 Propriedades da integral de Kurzweil

Até o fim deste capítulo, diremos que uma função é integrável nos referindo a integral no sentido de Kurzweil, a menos que seja necessário faremos distinção. A seguir, vamos apresentar teoremas que tratam de algumas propriedades fundamentais desta integral e que serão utilizadas ao longo do nosso trabalho.

O primeiro teorema que apresentamos é sobre a linearidade da integral de Kurzweil.

Teorema 3.1.4. *Sejam $U, V \in \mathcal{K}([a,b], X)$ e $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Então $c_1U + c_2V \in \mathcal{K}([a,b], X)$ e*

$$\int_a^b D[c_1U(\tau,t) + c_2V(\tau,t)] = c_1\int_a^b DU(\tau,t) + c_2\int_a^b DV(\tau,t).$$

Demonstração: Sejam $D = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, ..., k\}$ uma divisão marcada arbitrária de $[a, b]$ e $S(U, D)$ e $S(V, D)$ as somas de Riemann das funções U e V, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} S(c_1U + c_2V, D) &= \sum_{i=1}^{k}[(c_1U + c_2V)(\tau_i, \alpha_i) - (c_1U + c_2V)(\tau_i, \alpha_{i-1})] \\ &= \sum_{i=1}^{k}[c_1U(\tau_i, \alpha_i) + c_2V(\tau_i, \alpha_i) - c_1U(\tau_i, \alpha_{i-1}) + c_2V(\tau_i, \alpha_{i-1})] \\ &= c_1\sum_{i=1}^{k}[U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})] + c_2\sum_{i=1}^{k}[V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1})] \\ &= c_1S(U, D) + c_2S(V, D), \end{aligned}$$

donde segue imediatamente o resultado. ■

A seguir, estabelecemos um teorema que é uma consequência do Teorema 3.1.2 e trata da integrabilidade de uma função em subintervalos de $[a, b]$.

Teorema 3.1.5. *Seja* $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$*. Então, para todo subintervalo* $[c, d] \subset [a, b]$*, temos* $U \in \mathcal{K}([c, d], X)$.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, pelo Teorema 3.1.2, existe um calibre δ em $[a, b]$ tal que

$$\|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| < \epsilon,$$

para quaisquer partições δ-finas D_1 e D_2 de $[a, b]$.

Sejam $\widetilde{D_1}$ e $\widetilde{D_2}$ quaisquer partições δ-fina de $[c, d]$ e, suponhamos $a < c < d < b$. Pelo Lema 3.1.1 existem partições δ-finas de $[a, c]$ e $[d, b]$ denotadas por D_L e D_R, respectivamente. Unindo as partições $D_L, \widetilde{D_1}$ e D_R obtemos uma partição δ-fina D_1 de $[a, b]$. Analogamente, a união de $D_L, \widetilde{D_2}$ e D_R nos fornece uma outra partição δ-fina D_2 de $[a, b]$. Assim,

$$\begin{aligned} \|S(U, \widetilde{D_1}) - S(U, \widetilde{D_2})\| &= \|S(U, \widetilde{D_1}) \pm S(U, D_L) \pm S(U, D_R) - S(U, \widetilde{D_2})\| \\ &= \|S(U, D_1) - S(U, D_2)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.2, $U \in \mathcal{K}([c, d], X)$. ■

Teorema 3.1.6. *Se* $c \in (a, b)$ *e* $U : [a, b] \times [a, b] \to X$ *é tal que* $U \in \mathcal{K}([a, c], X) \cap \mathcal{K}([c, b], X)$*, então* $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ *e*

$$\int_a^b DU(\tau, t) = \int_a^c DU(\tau, t) + \int_c^b DU(\tau, t). \tag{3.10}$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Escolhemos calibres δ_1 e δ_2 de $[a, c]$ e $[c, b]$, respectivamente, correspondentes a ϵ nas definições de $I_1 = \int_a^c DU(\tau, t)$ e $I_2 = \int_c^b DU(\tau, t)$. Definimos a função calibre auxiliar $\widetilde{\delta}$ por

$$\widetilde{\delta}(\tau) = \begin{cases} \delta_1(\tau), & \text{para } \tau \in [a, c) \\ \min\{\delta_1(\tau), \delta_2(\tau)\}, & \text{para } \tau = c \\ \delta_2(\tau), & \text{para } \tau \in (c, b]. \end{cases} \tag{3.11}$$

Escolhemos a função calibre δ em $[a,b]$, satisfazendo $\delta(\tau) < \min\{\widetilde{\delta}(\tau), |\tau - c|\}$ sempre que $\tau \neq c$ e $\delta(c) = \widetilde{\delta}(c)$. Pelo Lema 3.1.1, existe uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$, digamos, $D = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_1]), i = 1, ...k\}$. Então, $c \in [\alpha_{m-1}, \alpha_m]$, para algum índice m. Suponhamos, por contradição, que $\tau_m \neq c$. Da definição de δ e do fato de D ser δ-fina, temos

$$|\tau_m - c| \leq \delta(\tau_m) < |\tau_m - c|.$$

Portanto, $\tau_m = c$.

Pela definição de soma de Riemann, segue que

$$\begin{aligned}
S(U,D) &= \sum_{j=1}^{m-1}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] + [U(c,\alpha_m) - U(c,\alpha_{m-1})] \\
&+ \sum_{j=m+1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] \\
&= \sum_{j=1}^{m-1}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] + [U(c,\alpha_m) - U(c,\alpha_{m-1})] + [U(c,c) - U(c,\alpha_{m-1})] \\
&- [U(c,c) - U(c,\alpha_{m-1})] + \sum_{j=m+1}^{k}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] \\
&= S(U,D_1) + S(U,D_2),
\end{aligned}$$

onde $D_1 = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]), i = 1, ..., m\}$ é uma divisão marcada δ_1-fina de $[a,c]$ e $D_2 = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_1]), i = m+1, ..., k\}$ é uma divisão marcada δ_2-fina de $[c,b]$. Devido à escolha do calibre δ, as divisões marcadas D_1 e D_2 também são δ-finas de $[a,c]$ e $[c,b]$, respectivamente. Portanto, para a divisão marcada δ-fina $D = D_1 \cup D_2$ de $[a,b]$, temos a seguinte relação

$$\begin{aligned}
\|S(U,D) - (I_1 + I_2)\| &= \|S(U,D_1) + S(U,D_2) - I_1 - I_2\| \\
&\leq \|S(U,D_1) - I_1\| + \|S(U,D_2) - I_2\| < 2\epsilon.
\end{aligned}$$

Por definição, a integral $\int_a^b DU(\tau,t)$ existe e também vale a igualdade (3.10). ■

O próximo resultado é conhecido como Lema de Saks-Henstock. A versão original foi dada por Stanislaw Saks e a formulação para a integral de Kurzweil é devido a Ralph Henstock. O lema nos diz que para os mesmos valores de ϵ e δ da definição de integral sobre o intervalo $[a,b]$, estimamos por ϵ o somatório da diferença entre a soma de Riemann e a integral em cada subintervalo da divisão marcada δ-fina de $[a,b]$. Aplicaremos o Lema de Saks-Henstock no estudo sobre integrais impróprias e no teorema de convergência.

Lema 3.1.2. *[Saks-Henstock] Seja $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$. Se dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ em $[a,b]$ tal que $\{a \leq \beta_1 \leq \xi_1 \leq \lambda_1 ... \leq \beta_m \leq \xi_m \leq \lambda_m \leq b\}$ representa um sistema δ-fino, isto é*

$$\xi_j \in [\beta_j, \lambda_j] \subset [\xi_j - \delta(\xi_j), \xi_j + \delta(\xi_j)], \quad \forall j = 1, ..., m,$$

então

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} \Big[U(\xi_j, \lambda_j) - U(\xi_j, \beta_j) - \int_{\beta_j}^{\lambda_j} DU(\tau,t) \Big] \Big\| < \epsilon. \tag{3.12}$$

Demonstração: Por hipótese $\beta_j \leq \lambda_j$, para todo $j = 1, ..., m$, mas podemos supor, sem perda de generalidade, que $\beta_j < \lambda_j$, para todo $j = 1, ..., m$. Denotamos por $\lambda_0 = a$ e $\beta_{m+1} = b$.

Se $\lambda_j < \beta_{j+1}$, para $j = 1, ..., m$, então a hipótese de $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ juntamente com Teorema 3.1.4 implicam que $U \in \mathcal{K}([\lambda_j, \beta_{j+1}], X)$. Logo, dado $\eta > 0$, existe um calibre δ_j em $[\lambda_j, \beta_{j+1}]$ tal que $\delta_j(\tau) < \delta(\tau)$, para todo $\tau \in [\lambda_j, \beta_{j+1}]$ e, para toda divisão marcada D^j δ_j-fina, temos

$$\|S(U, D^j) - \int_{\lambda_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t)\| < \frac{\eta}{m+1}.$$

Evidentemente, se $\lambda_j = \beta_j$, para algum $j = 1, ..., k$, então $S(U, D^j) = 0$. Como $\bigcup_{j=1}^{m} D^j \cup \{(\xi_j, [\beta_j, \lambda_j]), j = 1, ..., m\}$ é uma divisão marcada δ-fina de $[a, b]$, temos

$$\Big\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \lambda_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t)\Big\| < \epsilon.$$

Como

$$\int_a^b DU(\tau, t) = \sum_{j=1}^{m} \int_{\beta_j}^{\lambda_j} DU(\tau, t) + \sum_{j=0}^{m} \int_{\lambda_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
& \Big\| \sum_{j=1}^{m} \Big[U(\xi_j, \lambda_j) - U(\xi_j, \beta_j) - \int_{\beta_j}^{\lambda_j} DU(\tau, t)\Big]\Big\| \\
\leq & \Big\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \lambda_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} \int_{\lambda_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t) - \int_a^b DU(\tau, t)\Big\| \\
\leq & \Big\| \sum_{j=1}^{m} [U(\xi_j, \lambda_j) - U(\xi_j, \beta_j)] + \sum_{j=1}^{m} S(U, D^j) - \int_a^b DU(\tau, t)\Big\| \\
+ & \Big\| \sum_{j=1}^{m} S(U, D^j) + \sum_{j=1}^{m} \int_{\lambda_j}^{\beta_{j+1}} DU(\tau, t)\Big\| < \epsilon + (m+1)\frac{\eta}{m+1} = \epsilon + \eta.
\end{aligned}$$

Assim, da arbitrariedade de $\eta > 0$, a desigualdade (3.12) está satisfeita e o lema está provado. ■

O próximo resultado nos diz que a integral de Kurzweil contém suas extensões de Cauchy (as integrais impróprias).

Teorema 3.1.7. *[Hake] Se $U : [a, b] \times [a, b] \to X$ for uma função tal que, para todo $c \in [a, b)$, $U \in \mathcal{K}([a, c], X)$ e*

$$\lim_{c \to b^-} \Big[\int_a^c DU(\tau, t) - U(b, c) - U(b, b)\Big] = I \in X \tag{3.13}$$

existe, então $U \in \mathcal{K}([a, b], X)$ e

$$\int_a^b DU(\tau, t) = I. \tag{3.14}$$

Analogamente, se $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ *for uma função tal que, para todo* $c \in (a,b]$, $U \in \mathcal{K}([c,b],X)$ *e*

$$\lim_{c\to a^+}\Big[\int_c^b DU(\tau,t) - U(a,c) - U(a,a)\Big] = I \in X \tag{3.15}$$

existe, então $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ *e*

$$\int_a^b DU(\tau,t) = I. \tag{3.16}$$

Demonstração: Demostraremos apenas a igualdade em (3.14), a segunda segue de forma análoga.

Seja $\epsilon > 0$ dado, pela relação (3.13), existe $\overline{b} \in [a,b)$ tal que

$$\Big\|\int_a^c DU(\tau,t) - U(b,c) - U(b,b) - I\Big\| < \epsilon, \tag{3.17}$$

para todo $c \in [\overline{b}, b)$.

Seja $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente em $[a,b)$ com $c_0 = a$ e $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = b$. Por hipótese, $U \in \mathcal{K}([a,c_p],X)$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Logo, para cada $p \in \mathbb{N}$, temos um calibre $\delta_p = \delta_p(\epsilon)$ e se D^p for uma divisão marcada δ_p-fina, vale

$$\Big\|S(U,D^p) - \int_a^{c_p} DU(\tau,t)\Big\| < \frac{\epsilon}{2^{p+1}}.$$

Para todo $\tau \in [a,b)$, existe $p = p(\tau) = 1,2,...$ tal que $\tau \in [c_{p-1}, c_p)$. Seja $\widehat{\delta}$ um calibre em $[a,b]$ tal que $0 < \widehat{\delta}(\tau) < \delta_p(\tau)$ com $[\tau - \widehat{\delta}(\tau), \tau + \widehat{\delta}(\tau)] \cap [a,b) \subset [a,c_p)$, $p = 1,2,....$ Pelo Lema 3.1.1, existe uma divisão marcada $\widehat{\delta}$-fina $\widehat{D} := \{(\tau_i, [\alpha_{i-1},\alpha_i]), i = 1,2,...,k\}$ de $[a,b]$. Se $p = p(\tau_j)$, então $[\alpha_{j-1},\alpha_j] \subset (\tau_j - \widehat{\delta}(\tau), \tau_j + \widehat{\delta}(\tau)) \subset (\tau - \delta_p(\tau), \tau + \delta_p(\tau))$.

Seja

$$\sum_{\substack{j=1\\ p=p(\tau_j)}}^{k-1}\Big[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t)\Big]$$

a parcela da soma correspondente as marcas τ_j tais que $\tau_j \in [c_{p-1}, c_p)$, $j = 1, ...k$.

Pelo Lema 3.1.2, obtemos

$$\Big\|\sum_{\substack{j=1\\ p=p(\tau_j)}}^{k-1}\Big[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t)\Big]\Big\| < \frac{\epsilon}{2^{p+1}}$$

e, consequentemente, temos

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{j=1}^{k-1}[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1})] - \int_a^c DU(\tau,t)\Big\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{k-1}\Big[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t)\Big]\Big\|\\ &\leq \sum_{p=1}^{\infty}\Big\|\sum_{\substack{j=1\\ p(\tau_j)=p}}\Big[U(\tau_j,\alpha_j) - U(\tau_j,\alpha_{j-1}) - \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} DU(\tau,t)\Big]\Big\| \leq \sum_{p=1}^{\infty}\frac{\epsilon}{2^{p+1}} = \epsilon.\end{aligned}$$

Definiremos um calibre δ no intervalo $[a,b]$ da maneira seguinte. Para $\tau\in[a,b)$ tomemos $0<\delta(\tau)<\min\{b-\tau,\widehat{\delta}(\tau)\}$ e $0<\delta(\tau)<b-\bar{b}$. Então existe $D:=\{(\tau_i,[\alpha_{i-1},\alpha_i]);i=1,...,k\}$ uma divisão marcada δ-fina, tal que $\tau_k=\alpha_k=b$ e $\alpha_{k-1}\in(\bar{b},b)$. Usando (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}\|S(U,D)-I\| &= \Big\|\sum_{j=1}^{k-1}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]+U(\tau_k,\alpha_k)-U(\tau_k,\alpha_{k-1})-I\Big\| \\ &\leq \Big\|\sum_{j=1}^{k-1}[U(\tau_j,\alpha_j)-U(\tau_j,\alpha_{j-1})]-\int_a^{\alpha_k}DU(\tau,t)\Big\| \\ &+ \Big\|\int_a^{\alpha_k}DU(\tau,t)+U(b,b)-U(b,\alpha_{k-1})-I\Big\| \\ &< \epsilon+\Big\|\int_a^{\alpha_k}DU(\tau,t)+U(b,b)-U(b,\alpha_{k-1})-I\Big\|.\end{aligned}$$

Como $\alpha_{k-1}\in(\bar{b},b)$ e $\widehat{D}$ é uma partição $\widehat{\delta}$-fina de $[a,\alpha_{k-1}]$, o segundo termo do lado direito da última desigualdade acima pode ser estimado por ϵ, como foi mostrado anteriormente. Desta forma,

$$\|S(U,D)-I\|<2\epsilon,$$

para toda divisão marcada δ-fina D. Logo, $\displaystyle\int_a^b DU(\tau,t)=I.$

Segue de forma análoga a outra parte da prova deste teorema. ■

Observamos, novamente, que todos os resultados acima valem para integral de Henstock-Kurzweil, basta aplicarmos, para cada $f:[a,b]\to X$, a função $U(\tau,t)=f(\tau)t$. No exemplo seguinte, usamos o Teorema 3.1.7, para garantir a existência da integral de uma função.

Exemplo 3.1.5. Consideremos a função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, na qual

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(-1)^k}{x}, & \text{para } \frac{1}{k+1}<x\leq\frac{1}{k};\\ 0, & \text{se } x=0.\end{cases} \tag{3.18}$$

A função $\ln(x)$, para $x>0$, é a primitiva da função $\dfrac{1}{x}$. Assim, pelo Teorema 3.1.3, para todo $k\in\mathbb{N}$, temos

$$\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}f(s)ds=(-1)^k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}\frac{1}{s}ds=(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Então, para $n\in\mathbb{N}$, obtemos

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1}f(s)ds=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}}f(s)ds=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right).$$

Como a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ converge para $-\ln(\frac{\pi}{2})$, temos

$$\lim_{c\to0^+}\int_c^1 f(s)ds=-\ln\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.7, obtemos a existência da $\int_0^1 f(s)ds = -\ln(\frac{\pi}{2})$. É fácil constatarmos que a função f não é absolutamente integrável. Portanto, f é HK-integrável, mas não é integrável à Lebesgue.

O teorema a seguir descreve como será esta integral indefinida.

Teorema 3.1.8. *Sejam $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e $c \in [a,b]$. Então,*

$$\lim_{s\to c}\Big[\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\Big] = \int_a^c DU(\tau,t) \tag{3.19}$$

e

$$\lim_{s\to c}\Big[\int_s^b DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\Big] = \int_c^b DU(\tau,t). \tag{3.20}$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[a,b]$, tal que

$$\Big\|S(U,D) - \int_a^b DU(\tau,t)\Big\| < \epsilon,$$

para toda divisão marcada D δ-fina. Seja $c \in [c-\delta(c), c+\delta(c)] \cap [a,b]$, então, pelo Lema 3.1.2,

$$\Big\|U(c,s) - U(c,c) - \int_a^s DU(\tau,t)\Big\| < \epsilon.$$

Assim,

$$\Big\|\int_a^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c) - \int_a^c DU(\tau,t)\Big\| = \Big\|\int_c^s DU(\tau,t) - U(c,s) + U(c,c)\Big\| < \epsilon,$$

donde segue a igualdade (3.19). De forma análoga segue a relação (3.20). ■

Observamos que se $U : [a,b]\times[a,b] \to X$ for integrável, não é verdade que $F(s) = \int_a^s DU(\tau,t)$, para $s \in [a,b]$, será sempre contínua. Pelo Teorema 3.1.8, a função F será contínua quando U for contínua na segunda variável. Por exemplo, se $f : [a,b] \to X$ for HK-integrável, então $F(s) = (HK)\displaystyle\int_a^s f(s)ds$ será contínua.

A seguir, daremos uma condição para estimarmos o valor da integral de uma função que assume valores em um espaço de Banach X. Esse resultado será útil para trabalharmos com as Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas.

Teorema 3.1.9. *Sejam $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e $V \in \mathcal{K}([a,b],\mathbb{R})$. Se existe um calibre θ em $[a,b]$ tal que*

$$|t-\tau|\|U(\tau,t) - U(\tau,\tau)\| \leq (t-\tau)[V(\tau,t) - V(\tau,\tau)], \tag{3.21}$$

para todo $t \in (\tau-\theta(\tau), \tau+\theta(\tau))$, então vale a desigualdade

$$\Big\|\int_a^b DU(\tau,t)\Big\| \leq \int_a^b DV(\tau,t). \tag{3.22}$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como as funções U e V são Kurzweil integráveis, existe um calibre δ em $[a,b]$ com $\delta(\tau) < \theta(\tau)$, para todo $\tau \in [a,b]$, tal que, para toda divisão marcada δ-fina $D := \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]); i = 1, ..., k\}$ de $[a,b]$, temos

$$\left\|S(U,D) - \int_a^b DU(\tau,t)\right\| < \epsilon \quad \text{e} \quad \left|S(V,D) - \int_a^b DV(\tau,t)\right| < \epsilon.$$

Da desigualdade (3.21) e de $\alpha_i > \tau_i$ com $i = 1, ..., k$, segue que

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i),$$

e, para $\tau_i > \alpha_i$, com $i = 1, ..., k$,

$$\|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| \leq -[V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \tau_i)] = V(\tau_i, \tau_i) - V(\tau_i, \alpha_i).$$

Segue, para $i = 1, 2, ..., k$, que

$$\begin{aligned} \|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\| &\leq \|U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \tau_i)\| + \|U(\tau_i, \tau_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})\| \\ &= V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1}). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \left\|\int_a^b DU(\tau,t)\right\| &\leq \left\|\int_a^b DU(\tau,t) - S(U,D)\right\| + \|S(U,D)\| \\ &< \epsilon + \left\|\sum_{i=1}^k [U(\tau_i, \alpha_i) - U(\tau_i, \alpha_{i-1})]\right\| + \int_a^b DV(\tau,t) - \int_a^b DV(\tau,t) \\ &\leq \epsilon + \left|\sum_{i=1}^k [V(\tau_i, \alpha_i) - V(\tau_i, \alpha_{i-1})] - \int_a^b DV(\tau,t)\right| + \int_a^b DV(\tau,t) \\ &< 2\epsilon + \int_a^b DV(\tau,t). \end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ foi dado arbitrariamente, obtemos a desigualdade (3.22). ■

3.1.4 Resultados sobre convergência

Nas teoria de integração, os teoremas de convergência estabelecem condições para que uma sequência de funções integrais convirja para uma função que também é integrável. Esses resultados são extremamente importantes para estimarmos o valor de tal integral. Na integral de Kurzweil, para obtemos resultados de convergência, precisamos inserir o conceito de equintegrabilidade. Por este motivo, nesta subseção, obteremos condições que garantam a equintegrabilidade e algumas consequências imediatas.

Pela necessidade de trabalharmos com funções assumindo valores em espaços de Banach, adaptamos de modo a generalizar, os resultados de [35]. Esses resultados, no entanto, não haviam sido provados, e por este motivo os incluímos neste trabalho e, posteriormente, os escreveremos em forma de artigo.

Definição 3.1.3. *Dizemos que uma sequência de funções* $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é equintegrável se, para todo* $m \in \mathbb{N}$*,* $U_m \in \mathcal{K}([a,b],X)$ *e dado* $\epsilon > 0$*, existe uma função calibre* δ *de* $[a,b]$ *tal que*

$$\left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau,t) \right\| < \epsilon,$$

para toda divisão marcada δ*-fina* D *de* $[a,b]$*.*

Observação 3.1.1. Em alguns textos (veja [19]), uma sequência equintegrável é dita uniformemente integrável. Além disso, Ŝ. Schwabik, em [37], estudou a equintegrabilidade das sequências de funções HK-integráveis.

Teorema 3.1.10. *Sejam* $U, U_m : [a,b] \times [a,b] \to X$*,* $m \in \mathbb{N}$*. Suponhamos que a sequência* $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *é equintegrável e existe um calibre* η *em* $[a,b]$ *tal que*

$$\lim_{m\to\infty} [U_m(\tau,t_2) - U_m(\tau,t_1)] = [U(\tau,t_2) - U(\tau,t_1)], \tag{3.23}$$

para todo $t_1 < t_2$*,* $\tau \in [t_1,t_2] \cap [a,b]$ *e* $[t_1,t_2] \subset (\tau - \eta(\tau), \tau + \eta(\tau))$*. Então,* $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ *e*

$$\int_a^b DU(\tau,t) = \lim_{m\to\infty} \int_a^b DU_m(\tau,t). \tag{3.24}$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela equintegrabilidade da sequência $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe um calibre δ em $[a,b]$ satisfazendo $\delta(\tau) < \eta(\tau)$, para todo $\tau \in [a,b]$, tal que

$$\left\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau,t) \right\| < \frac{\epsilon}{2},$$

para toda divisão marcada δ-fina $D := \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]); i = 1,2,...,k\}$ em $[a,b]$. Pela condição (3.23), para toda divisão marcada δ-fina D de $[a,b]$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\|U_m(\tau,\alpha_i) - U_m(\tau,\alpha_{i-1}) - U(\tau,\alpha_i) + U(\tau,\alpha_{i-1})\| \;<\; \frac{\epsilon}{2^{m+1}}.$$

para $m > m_0$.

Consequentemente, para $m > m_0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|S(U_m,D) - S(U,D)\| &\le \sum_{i=1}^{k} \|U_m(\tau,\alpha_i) - U_m(\tau,\alpha_{i-1}) - U(\tau,\alpha_i) + U(\tau,\alpha_{i-1})\| \\ &< \sum_{i=1}^{k} \frac{\epsilon}{2^{m+1}} = \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Desta forma, para toda divisão marcada δ-fina D de $[a,b]$ e $m > m_0$, vale

$$\left\| S(U,D) - \int_a^b DU_m(\tau,t) \right\| \le \|S(U,D) - S(U_m,D)\| + \left\| S(U_m,D) - \int_a^b DU_m(\tau,t) \right\| < \epsilon.$$

Por outro lado, para $k, l > m_0$, temos

$$\begin{aligned}\Big\| \int_a^b DU_k(\tau,t) - \int_a^b DU_l(\tau,t)\Big\| &\leq \Big\|S(U,D) - \int_a^b DU_k(\tau,t)\Big\| \\ &+ \Big\|S(U,D) - \int_a^b DU_l(\tau,t)\Big\| < 2\epsilon,\end{aligned}$$

ou seja, a sequência $\Big\{ \int_a^b DU_m(\tau,t)\Big\}_{m\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy em um espaço de Banach X, logo existe

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b DU_m(\tau,t) = I.$$

Além disso, para toda divisão marcada δ-fina D e $m \geq m_0$,

$$\|S(U,D) - I\| = \Big\|S(U,D) - \int_a^b DU_m(\tau,t)\| + \| \int_a^b DU_m(\tau,t) - I\| < 2\epsilon.$$

Portanto, $U \in \mathcal{K}([a,b],X)$ e vale a igualdade em (3.24). ■

É importante destacarmos que os Teoremas da Convergência Dominada, Convergência Monótona e de Beppo Levi na teoria de Lebesgue seguem como consequência do Teorema 3.1.10.

Sabemos que não é tão fácil verificar a equintegrabilidade de uma sequência. Desta forma, obtemos resultados a fim de se garantir a equintegrabilidade. Mas antes, precisaremos de alguns resultados técnicos.

Notação 3.1.1. Consideremos uma função $U : [a,b] \times [a,b] \to X$. Seja (τ, J) um intervalo marcado com $\tau \in J = [\alpha, \beta] \subset [a,b]$. Denotaremos por

$$U(\tau, J) = U(\tau,\beta) - U(\tau,\alpha)$$

a função ponto-intervalo correspondente à U.

Nesta subseção, sempre, assumimos que $U, U_m : [a,b] \times [a,b] \to X$, $m = 1, 2, ...$ e $U_m \in \mathcal{K}([a,b],X)$, $m = 1,2,....$ Suponhamos que

(I1) para todo $\epsilon > 0$, existem um calibre ω em $[a,b]$, uma função $p : [a,b] \to \mathbb{N}$ e uma função intervalo superaditiva Φ assumindo valores em $\mathbb{R}$, ou seja, para intervalos fechados $J_1, J_2 \subset [a,b]$, $\Phi(J_1 \cup J_2) \geq \Phi(J_1) + \Phi(J_2)$, e $\Phi([a,b]) < \epsilon$. Para todo $\tau \in [a,b]$,

$$\|U_m(\tau,J) - U(\tau,J)\| < \Phi(J), \tag{3.25}$$

desde que $m > p(\tau)$ e (τ, J) é um intervalo marcado ω-fino.

(I2) existem uma função calibre θ de $[a,b]$ e $C \in \mathbb{R}^+$ tais que, para toda $m : [a,b] \to \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{k} \|U_{m(\tau_i)}(\tau_i, J_i)\| \leq C, \tag{3.26}$$

para toda divisão marcada $D := \{(\tau_i, J_i); i = 1, ..., k\}$ θ-fina de $[a,b]$.

O nosso objetivo é mostrar que toda sequência de funções em $\mathcal{K}([a,b],X)$ que satisfaz **(I1)** e **(I2)** será equintegrável.

Definição 3.1.4. *Sejam $U_m \in \mathcal{K}([a,b],X)$, para $m = 1,2,...$, satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)**. *Para cada $p \in \mathbb{N}$, definimos por S_p a família de funções $V : [a,b] \times [a,b] \to X$ para as quais existe uma divisão $a = \beta_0 < \beta_1 < ... < \beta_{l-1} < \beta_l = b$ de $[a,b]$, tal que, para todo intervalo marcado (τ, J), tenhamos*

$$V(\tau,J) = \begin{cases} U_{m_j}(\tau,J), & \textit{se } \tau \in (\beta_{j-1},\beta_j) \\ U_{m_j}(\tau,J^-) + U_{m_j}(\tau,J^+), & \textit{se } \tau = \beta_j, \end{cases} \tag{3.27}$$

onde $m_j \geq p$, $j = 1,2,...,l$, $J^- = J \cap (-\infty,\beta_j]$ e $J^+ = J \cap [\beta_j,+\infty)$.

Lema 3.1.3. *Se U e U_m, $m = 1,2,...$, satisfazem* **(I1)** *e* **(I2)**, *então valem:*

(i) para todo $p \in \mathbb{N}$, $U_p \in S_p$;

(ii) se $p_1,p_2 \in \mathbb{N}$ e $p_1 > p_2$, então $S_{p_1} \subset S_{p_2}$;

(iii) se $V \in S_1$, então $V \in \mathcal{K}([a,b],X)$.

Demonstração: Para a prova do item (i), consideremos $\beta_0 = a$ e $\beta_1 = b$. Então, $U_p(\tau,J) = V(\tau,J) \in S_p$. Para o item (ii), notemos que se $V \in S_{p_1}$, logo $m_j > p_1 > p_2$, então $V \in S_{p_2}$. Já no item (iii), se $V \in S_1$, então, para toda divisão D^j de $[\beta_{j-1},\beta_j]$, temos

$$S(V,D^j) = S(U_{m_j},D^j).$$

Como U_{m_j} é integrável sobre $[a,b]$, segue que V é integrável sobre $[a,b]$. ■

Lema 3.1.4. *Suponhamos que U e U_m satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)**, *$m = 1,2,....$ Se $V \in S_1$, então, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\|\sum_{i=1}^{k} V(\tau_i,J_i)\| = \|S(V,D)\| \leq C, \tag{3.28}$$

para alguma divisão marcada $D := \{(\tau_i,J_i); i = 1,2,...,k\}$ θ-fina de $[a,b]$.

Demonstração: Sejam $\{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\}$ pontos da divisão de $[a,b]$ dados pela Definição 3.1.4. Temos

$$V(\tau,J) = \begin{cases} U_{m_j}(\tau,J), & \text{se } \tau \notin \{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\} \\ U_{m_j}(\tau,J^-) + U_{m_j}(\tau,J^+), & \text{se } \tau \in \{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\}. \end{cases} \tag{3.29}$$

Consideremos a divisão marcada

$$\begin{aligned} D: &= \{(\tau_i,J_i^-); i = 1,2,...,k, \tau \notin \{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\}\} \cup \{(\tau_i,J_i^-); i = 1,2,...,k, \tau \in \{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\}\} \\ &\cup \{(\tau_i,J_i^+); i = 1,2,...,k, \tau \in \{\beta_0,\beta_1,...,\beta_l\}\} \end{aligned}$$

Portanto, pela condição **(I2)**,

$$\|S(V,D)\| \leq C.$$

■

Lema 3.1.5. *Sejam U e U_m satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)**. *Assumimos que $U_m \in \mathcal{K}([a,b], X)$, $m = 1, 2, ...$. Se (τ, J) for um intervalo marcado ω-fino, então*

$$\|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| \leq \Phi(J),$$

para todo $V \in S_\rho$, com $\rho \geq p(\tau)$.

Demonstração: Usando a Definição 3.1.4, a condição **(I1)** e (3.29), se $\tau \notin \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_l\}$, temos

$$\|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| = \|U_{m_j}(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \Phi(J),$$

pois $m_j > \rho > p(\tau)$. Agora, se $\tau \in \{\beta_0, \beta_1, ..., \beta_l\}$, então $\tau = \beta_j$, para algum $j = 1, 2, ..., l$ e

$$V(\tau, J) = U_{m_j}(\tau, J^+) + U_{m_j}(\tau, J^-).$$

Seja $J = [\alpha, \beta]$, temos $J^+ = [\beta_j, \beta]$, $J^- = [\alpha, \beta_j]$ e

$$U(\tau, J) = U(\tau, J^+) + U(\tau, J^-).$$

Da condição **(I1)**, vem que

$$\begin{aligned} \|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| &\leq \|U_{m_j}(\tau, J^+) - U(\tau, J^+)\| + \|U_{m_j}(\tau, J^-) - U(\tau, J^-)\| \\ &< \Phi(J^+) + \Phi(J^-) = \Phi(J), \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ■

Lema 3.1.6. *Sejam U e U_m satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)**. *Dado $\epsilon > 0$, existe $V_p \in S_p$, tal que*

$$\left| \left\| \int_a^b DV_p(\tau, t) \right\| - I \right| < \frac{\epsilon}{2^p},$$

onde $I = \inf\left\{ \left\| \int_a^b DV(\tau, t) \right\|; V \in S_p \right\}$.

Demonstração: Pelo Lema 3.1.4, para todo $V \in S_p \subset S_1$, temos $0 \leq \|S(V, D)\| \leq C$, para alguma divisão marcada θ-fina D. Assim, $0 \leq \|S(V, D)\| \leq \left\| \int_a^b DV(\tau, t) \right\|$, o que implica a existência de $I = \inf\left\{ \left\| \int_a^b DV(\tau, t) \right\|; V \in S_p \right\}$. O resultado segue da definição de ínfimo. ■

Lema 3.1.7. *Sejam U e U_m satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)**, *$m = 1, 2, ...$. Suponhamos que $I_j = [\gamma_{j-1}, \gamma_j]$, $j = 1, 2, ..., s$, é uma sequência finita de intervalos disjuntos em $[a, b]$ e $V \in S_p$. Então, dado $\epsilon > 0$, temos*

$$\left\| \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV(\tau, t) - \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV_p(\tau, t) \right\| \leq \frac{\epsilon}{2^p}, \tag{3.30}$$

onde a função V_p foi definida no Lema 3.1.6.

Demonstração: Suponhamos, por absurdo, que dado $\epsilon > 0$, exista $V^* \in S_p$ tal que

$$\Big\| \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV^*(\tau, t) - \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV_p(\tau, t) \Big\| > \frac{\epsilon}{2^p}.$$

Definimos

$$\widetilde{V}(\tau, J) = \begin{cases} V^*(\tau, J), & \text{se } \tau \in (\gamma_{j-1}, \gamma_j), j = 1, ..., s; \\ V_p(\tau, J), & \text{se } \tau \in [a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{s} I_j; \\ V^*(\tau, J^-) + V_p(\tau, J^+), & \text{se } \tau = \gamma_j, j = 1, ..., s, \end{cases} \tag{3.31}$$

onde $J^+ = J \cap [\gamma_j, +\infty)$ e $J^- = J \cap (-\infty, \gamma_j]$. Consideremos o conjunto $\{L_k; k = 1, ..., r\}$, onde $L_k, k = 1, ..., r$ são intervalos fechados, disjuntos e

$$\bigcup_{k=1}^{r} L_k = \overline{[a, b] \setminus \bigcup_{j=1}^{s} I_j}.$$

Então $\widetilde{V} \in S_p$ e

$$\begin{aligned} \Big\| \int_a^b D\widetilde{V}(\tau, t) - \int_a^b DV_p(\tau, t) \Big\| &= \Big\| \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV^*(\tau, t) + \sum_{k=1}^{r} \int_{L_k} DV_p(\tau, t) - \int_a^b DV_p(\tau, t) \Big\| \\ &= \Big\| \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV^*(\tau, t) - \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} DV_p(\tau, t) \Big\| > \frac{\epsilon}{2^p}. \end{aligned}$$

Assim,

$$I \leq \Big\| \int_a^b D\widetilde{V}(\tau, t) \Big\| < \Big\| \int_a^b DV_p(\tau, t) \Big\| - \frac{\epsilon}{2^p},$$

o que implica em $\Big| \Big\| \int_a^b DV_p(\tau, t) \Big\| - I \Big| > \dfrac{\epsilon}{2^p}$, contradizendo o Lema 3.1.6. Portanto, a desigualdade (3.30) é válida. ∎

Das condições **(I1)** e **(I2)** e dos lemas acima seguirá um resultado que garante a equintegrabilidade de uma sequência de funções.

Teorema 3.1.11. *Sejam U e U_m satisfazendo* **(I1)** *e* **(I2)***, $m = 1, 2, ...$ Então, a sequência $\{U_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ é equintegrável.*

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela hipótese **(I1)**, existe uma função calibre ω de $[a, b]$, tal que

$$\|U_m(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \Phi(J), \tag{3.32}$$

sempre que $m > p(\tau)$ e para todo intervalo marcado (τ, J) ω-fino. Pelo Lema 3.1.5,

$$\|V(\tau, J) - U(\tau, J)\| < \Phi(J), \tag{3.33}$$

para todo $V \in S_\rho$ com $\rho \geq p(\tau)$. De (3.32) e (3.33), temos

$$\|V_{p(\tau)}(\tau, J) - U_m(\tau, J)\| < 2\Phi(J), \tag{3.34}$$

sempre que $m > p(\tau)$ e para todo intervalo marcado ω-fino (τ, J).

Observemos que, pelo Lema 3.1.3, as funções $U_p, V_p \in \mathcal{K}([a,b], X)$, para todo $p \in \mathbb{N}$. Então, para cada $p \in \mathbb{N}$, existe um calibre δ_p de $[a,b]$, tal que

$$\|S(U_p, D) - \int_a^b DU_p(\tau,t)\| < \frac{\epsilon}{2^p} \quad \text{e} \quad \|S(V_p, D) - \int_a^b DU_p(\tau,t)\| < \frac{\epsilon}{2^p},$$

para toda divisão marcada δ_p-fina D de $[a,b]$.

Definimos um calibre δ em $[a,b]$, pela função $\tau \in [a,b] \to \delta(\tau) < \min\{\omega(\tau), \delta_1(\tau), ..., \delta_{p(\tau)}(\tau)\}$. Assumimos que $D = \{(\tau_i, J_i); i = 1, ..., k\}$ é uma divisão marcada δ-fina de $[a,b]$. Então

$$S(U_m, D) = \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i).$$

Se $m > p(\tau_i)$, $i = 1, 2, ..., k$, pela equação (3.34), segue que

$$\|U_m(\tau_i, J_i) - V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i)\| < 2\Phi(J_i),$$

e assim, pela condição **(I1)**,

$$\Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^{k} V_{p(\tau_i)}(\tau_i, J_i) \Big\| < \sum_{\substack{i=1 \\ m > p(\tau_i)}}^{k} 2\Phi(J_i) < 2\Phi([a,b]) < 2\epsilon. \tag{3.35}$$

Pelo fato de que $U_p, V_p \in \mathcal{K}([a,b], X)$, $p \in \mathbb{N}$, e pelo Lema 3.1.2, obtemos

$$\Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ m \leq p(\tau_i)}}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau, t) \Big\| < \epsilon \tag{3.36}$$

e

$$\Big\| \sum_{\substack{i=1 \\ p(\tau_i) = l}}^{k} V_l(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1 \\ p(\tau_i) = l}}^{k} \int_{J_i} DV_l(\tau, t) \Big\| < \frac{\epsilon}{2^l}. \tag{3.37}$$

Agora, consideremos $m > p(\tau_i)$, para $i = 1, 2, ..., k$. Pelo Lema 3.1.7 e pelas desigualdades em (3.35) e (3.37), temos

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau,t)\Big\| &\leq \Big\| \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1\\ p(\tau_i)=l}}^{k} V_l(\tau_i, J_i)\Big\| \\
&+ \Big\| \sum_{\substack{i=1\\ p(\tau_i)=l}}^{k} V_l(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau,t)\Big\| \\
&< 2\epsilon + \Big\| \sum_{l=1}^{m-1} \Big[\sum_{i=1}^{k} V_l(\tau_i, J_i) - \sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} DV_l(\tau,t)\Big]\Big\| \\
&+ \Big\| \sum_{l=1}^{m-1} \Big[\sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} DV_l(\tau,t) - \sum_{i=1}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau,t)\Big]\Big\| \\
&< 2\epsilon + 2\sum_{l=1}^{m-1} \frac{\epsilon}{2^l} < 4\epsilon.
\end{aligned}$$

Usando a relação acima e (3.36), para todo $m \in \mathbb{N}$, vale

$$\begin{aligned}
\Big\| S(U_m, D) - \int_a^b DU_m(\tau,t)\Big\| &\leq \Big\| \sum_{\substack{i=1\\ m\leq p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1\\ m\leq p(\tau_i)}}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau,t)\Big\| \\
&+ \Big\| \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} U_m(\tau_i, J_i) - \sum_{\substack{i=1\\ m>p(\tau_i)}}^{k} \int_{J_i} DU_m(\tau,t)\Big\| < 5\epsilon,
\end{aligned}$$

para toda divisão marcada δ-fina D de $[a, b]$. Portanto, a sequência $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é equintegrável. ■

O próximo resultado traz uma nova condição para que a sequência $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ seja equintegrável.

Teorema 3.1.12. *Sejam U e U_m, $m = 1, 2, ...,$ satisfazendo* **(I1)** *e*

(I2*) *existem $V \in \mathcal{K}([a, b], \mathbb{R})$ e um calibre θ de $[a, b]$ tais que, para todo $m \in \mathbb{N}$, temos*

$$\|U_m(\tau, J)\| \leq V(\tau, J), \tag{3.38}$$

para todo intervalo marcado (τ, J) θ-fino.

Então, a sequência $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é equintegrável.

Demonstração: Suponhamos que exista um calibre ξ em $[a, b]$, tal que $\xi(\tau) \leq \theta(\tau)$, para $\tau \in [a, b]$ e

$$\Big| S(V, D) - \int_a^b V(\tau, t)\Big| < 1,$$

para toda divisão marcada $D := \{(\tau_i, J_i); i = 1, ..., k\}$ ξ-fina de $[a, b]$, então pela condição **(I2*)**, para $m : [a, b] \to \mathbb{N}$ e toda divisão marcada $D := \{(\tau_i, J_i); i = 1, ..., k\}$ ξ-fina de $[a, b]$, temos $\|U_{m(\tau_j)}(\tau_j, J_j)\| \leq V(\tau_j, J_j)$, e também

$$\sum_{j=1}^{k} \|U_{m(\tau_j)}(\tau_j, J_j)\| \leq S(V, D) < \int_a^b DV(\tau, t) + 1.$$

Tomando $C = \displaystyle\int_a^b DV(\tau, t) + 1$, obtemos a condição **(I2)** do Teorema 3.1.12. Portanto, $\{U_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é equintegrável.

Observação 3.1.2. É fácil ver que se $U_m \in \mathcal{K}([a, b], X)$, $m = 1, 2, ...$, e U satisfazendo **(I1)**, então, para cada intervalo marcado ω-fino $(\tau, [t_1, t_2])$, temos

$$\lim_{m\to\infty} [U_m(\tau, t_2) - U_m(\tau, t_2)] = U(\tau, t_2) - U(\tau, t_2).$$

Consequentemente, vale

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b DU_m(\tau, t) = \int_a^b DU(\tau, t).$$

Observação 3.1.3. Podemos, também, transportar o conceito de equintegrabilidade para as integrais de Henstock-Kurzweil, esses resultados são encontrados em [37].

Corolário 3.1.1. *Consideremos a sequência de funções $f_m : [a, b] \to \mathbb{R}$ HK-integráveis, para todo $m \in \mathbb{N}$. Suponhamos existe $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que*

$$\lim_{m\to+\infty} f_m(\tau) = f(\tau) \quad \forall \tau \in [a, b],$$

e

$$v(\tau) \leq f_m(\tau) \leq w(\tau), \quad \forall \tau \in [a, b], m \in \mathbb{N},$$

onde $v, w : [a, b] \to \mathbb{R}$ são funções HK-integráveis. Então, a sequência $\{f_n\}$ é equintegrável. Além disso, f é HK-integrável e vale

$$\lim_{m\to\infty} \int_a^b f_m(s)ds = \int_a^b f(s)ds.$$

Exemplo 3.1.6. Consideremos a função $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, dada por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k}{x}, & \text{para } \frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}; \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases} \tag{3.39}$$

No Exemplo 3.1.5, mostramos que g é HK-integrável em $[0, 1]$. Agora, definimos a sequência de funções $f_m : [0, 1] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f_m(x) = \begin{cases} g(x), & \text{para } x \in [0, \frac{1}{2m}]; \\ 0, & \text{se } x \in [\frac{1}{2m}, 1]. \end{cases} \tag{3.40}$$

Assim, $\lim\limits_{m\to+\infty} f_m(x) = 0$. Além disso, $0 \leq f_m(x) \leq g(x)$, para todo $x \in [0, 1]$. Então, pelo Corolário 3.1.1, a sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ é equintegrável e

$$\lim_{m\to+\infty} \int f_m(s)ds = 0.$$

3.2 Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas

Antes de apresentarmos a teoria das Equações Diferenciais Ordinárias Generalizadas (EDOGs), faremos uma retrospectiva destacando o que motivou Jaroslav Kurzweil em 1957, no artigo [25], a introduzir um novo conceito de integral. Consideremos o problema de valor inicial

$$\dot{x} = f(t,x), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3.41}$$

onde $f : \Omega \times \mathbb{R} \to X, \Omega \subset X$ aberto. Sabemos que encontrar uma solução no sentido de Carathéodory da equação (3.41) é equivalente à obter uma solução da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds, \quad \text{quase sempre em } [a,b], \tag{3.42}$$

sendo a integral acima no sentido de Lebesgue. Suponhamos que exista uma solução de (3.41) em $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Consideremos a aplicação $F : \Omega \times [a,b] \to X$ dada por

$$F(x,t) = \int_{t_0}^{t} f(s,x(s))ds.$$

Se x é uma solução do problema de valor inicial (3.41) em $[t_0,t] \subset [a,b]$, então a função x é absolutamente contínua em $[t_0,t]$. Logo, existe uma sequência de funções escada $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ convergindo uniformemente para x em $[t_0,t]$. Por exemplo, se para cada $l \in \mathbb{N}$ temos uma divisão marcada $D_l = \{(\tau_i, [\alpha_{i-1}, \alpha_i]); i = 1, 2, ..., k_l\}$, podemos tomar a sequência $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$, onde $x_l(\tau) = x(\tau_j)$ com $\tau \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j]$. Construindo divisões marcadas suficientemente finas, podemos dizer que a sequência (x_l) converge uniformemente para x.

Se assumirmos que a função $f(t,x)$ é contínua na segunda variável, então

$$\lim_{l\to\infty} f(s, x_l(s)) = f(s, x(s)), \quad s \in [t_0, t].$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\lim_{l\to\infty} \int_{t_0}^{t} f(s, x_l(s))ds = \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))ds.$$

Para cada $l \in \mathbb{N}$ fixo, usando a definição de F, temos

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x_l(s))ds = \sum_{j=1}^{k_l} \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} f(s, x(\tau_j))ds = \sum_{j=1}^{k_l} [F(x(\tau_j), \alpha_j) - F(x(\tau_j), \alpha_{j-1})].$$

De (3.42), a solução $x(t)$ de (3.41) pode ser aproximada por

$$x_0 + \sum_{j=1}^{k_l} [F(x(\tau_j), \alpha_j) - F(x(\tau_j), \alpha_{j-1})]. \tag{3.43}$$

Observamos que a soma em (3.43) é exatamente a soma de Riemann usada na definição de integral de Kurzweil para a função F. Logo, tomando convenientemente as divisões marcadas, teremos que uma solução da equação (3.41) será também solução da equação integral

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} DF(x(\tau), t).$$

3.2.1 Noções básicas de EDOGs

Consideremos $\Omega = \mathcal{O} \times [a, b]$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto em X e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $F : \Omega \to X$ uma função definida para $(x, t) \in \Omega$ e assumindo valores no espaço de Banach X.

Definição 3.2.1. *Uma função $x : [\alpha, \beta] \to X$ é dita uma solução da EDOG*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t) \tag{3.44}$$

no intervalo $[\alpha, \beta]$, se $(x(t), t) \subset \Omega$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$ e

$$x(v) - x(u) = \int_{u}^{v} DF(x(\tau), t), \quad u, v \in [\alpha, \beta]. \tag{3.45}$$

A integral no lado direito da equação (3.45) deve ser entendida como sendo a integral de Kurzweil.

Observação 3.2.1. É importante ressaltar que a notação em (3.44) é apenas simbólica. O termo $\dfrac{dx}{d\tau}$ não significa que a solução da EDOG em (3.45) seja diferenciável. Isto pode ser comprovado através do seguinte exemplo.

Exemplo 3.2.1. Seja $r : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua que não é diferenciável em todo intervalo $[0, 1]$ (veja Teorema 7.18 em [34]). Definimos $F : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $F(\tau, t) = r(t)$. Então, F é contínua, existe a integral $\displaystyle\int_{0}^{v} DF(\tau, t)$ e

$$\int_{u}^{v} DF(\tau, t) = r(u) - r(v),$$

para todo $u, v \in [0, 1]$. Isso significa que a função $r : [0, 1] \to X$ é uma solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t),$$

e, a solução x da EDOG não é diferenciável.

Observação 3.2.2. Pela Definição 3.2.1 é importante observarmos que se adicionarmos a $F(x, t)$ uma função dependendo somente de x, as soluções da equação (3.44) não mudarão.

De fato, dada $H : \mathcal{O} \to X$, defina $G(x, t) = F(x, t) + H(x)$. Dada uma divisão marcada $D := \{(\tau_j, [s_{j-1}, s_j]); j = 1, 2, ..., k\}$ de $[a, b]$, temos

$$\begin{aligned} S(G, D) &= \sum_{j=1}^{k} [F(x(\tau_j), s_j) - H(x(\tau_j)) - F(x(\tau_j), s_{j-1}) + H(x(\tau_j))] \\ &= \sum_{j=1}^{k} [F(x(\tau_j), s_j) - F(x(\tau_j), s_{j-1})] = S(F, D), \end{aligned}$$

Assim, segue que

$$\int_a^b D[F(x(\tau),t) + H(x(\tau))] = \int_a^b DF(x(\tau),t).$$

Desta forma, se $x : [\alpha, \beta] \to X$ for solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = D[F(x(\tau),t) + H(x(\tau))],$$

então x também será solução da EDOG (3.44) no intervalo $[\alpha, \beta]$. A recíproca da afirmação se verifica. Em particular, dizemos que $F_1(x,t) = F(x,0) - F(x,t)$, para $(x,y) \in \Omega$ é a representação normalizada de F e satisfaz $F_1(x,0) = 0$, para todo $x \in \mathcal{O}$.

Dada a condição inicial $(\widetilde{x}, t_0) \in \Omega$, definiremos a seguir, o que é uma solução de um problema de valor inicial para a equação (3.44).

Definição 3.2.2. *Dizemos que uma função $x : [\alpha, \beta] \to X$ é uma solução de* (3.44) *com condição inicial $x(t_0) = \widetilde{x}$ no intervalo $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, se $t_0 \in [\alpha, \beta]$, $(x(t), t) \in \Omega$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, e se a igualdade*

$$x(\nu) - \widetilde{x} = \int_{t_0}^{\nu} DF(x(\tau),t)$$

for válida para todo $\nu \in [\alpha, \beta]$.

Fazendo analogia às EDOs, também mostraremos que x será solução da EDOG em (3.44) se, e somente se, x for solução de uma equação integral.

Proposição 3.2.1. *Seja $x : [\alpha, \beta] \to X$ uma solução de* (3.44) *em $[\alpha, \beta]$. Então, para todo $\gamma \in [\alpha, \beta]$ fixo, vale*

$$x(s) = x(\gamma) + \int_{\gamma}^{s} DG(x(\tau),t), \quad s \in [\alpha, \beta]. \tag{3.46}$$

Se $x : [\alpha, \beta] \to X$ satisfaz (3.46)*, para algum $\gamma \in [\alpha, \beta]$, então x será uma solução de* (3.44).

Demonstração: A primeira parte segue diretamente da Definição 3.2.1, basta escolher $s_1 = \gamma$ e $s_2 = s$. Reciprocamente, se $x : [\alpha, \beta] \to X$ satisfaz a equação (3.46), então

$$\begin{aligned} x(s_2) - x(s_1) &= x(\gamma) + \int_{\gamma}^{s_2} DF(x(\tau),t) - x(\gamma) - \int_{\gamma}^{s_1} DF(x(\tau),t) \\ &= \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau),t), \end{aligned}$$

para todo $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$, com $s_1 < s_2$. Portanto, x é uma solução de (3.44). ■

A Definição 3.2.1 não fornece informações à respeito das soluções $x : [\alpha, \beta] \to X$ de (3.44). Pela Proposição 3.2.1, pelo menos sabemos que tais soluções comportam-se de modo semelhante às integrais de Kurzweil indefinidas. Usando o Teorema de Hake (Teorema 3.1.7), deduzimos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.2. *Se $x : [\alpha, \beta] \to X$ for uma solução da EDOG em* (3.44)*, então*

$$\lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) - F(x(\sigma), \sigma)] = x(\sigma), \tag{3.47}$$

para todo $\sigma \in [\alpha, \beta]$.

Demonstração: Seja $\sigma \in [\alpha, \beta]$ dado. Como x é solução de (3.44), então, pela Proposição 3.2.1,

$$x(s) = x(\sigma) + \int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t),$$

para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Logo,

$$x(s) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) = x(\sigma) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) + \int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t), \quad (3.48)$$

para todo $s \in [\alpha, \beta]$. Pelo Teorema 3.1.7, temos

$$\lim_{s \to \sigma} \Big[\int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(s), s) \Big] = \int_{\sigma}^{\sigma} DF(x(\tau), t) = 0.$$

Portanto, pela relação acima e de (3.48), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{s \to \sigma} [x(s) - F(x(\sigma), s) - F(x(\sigma), \sigma)] &= \lim_{s \to \sigma} \Big[\int_{\sigma}^{s} DF(x(\tau), t) - F(x(\sigma), s) + F(x(\sigma), \sigma) + x(\sigma) \Big] \\ &= x(\sigma). \end{aligned}$$

■

A seguir, introduziremos uma classe de funções $F : \Omega \to X$ para a qual é possível obtermos informações concretas sobre as soluções da EDOG em (3.44). Ao longo deste capítulo, $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ será uma função não-decrescente e $\omega : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente lipschtiziana, crescente e $\omega(0) = 0$. Estamos interessados em invertigar o comportamento das soluções de (3.44) para uma função F nesta classe.

Definição 3.2.3. *Dizemos que uma função $F : \Omega \to X$ pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, se, para quaisquer $(x, t_1), (x, t_2), (y, t_1), (y, t_2) \in \Omega$, satisfaz*

(i) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1)\| \leq |h(t_2) - h(t_1)|$;

(ii) $\|F(x, t_2) - F(x, t_1) - F(y, t_2) + F(y, t_1)\| \leq \omega(\|x - y\|)|h(t_2) - h(t_1)|$.

Sabemos que a função identidade $I : [a, b] \to [a, b]$ é lipschtiziana, crescente e se anula na origem. Neste caso, denotaremos a classe $\mathscr{F}(\Omega, h, I)$ simplesmente por $\mathscr{F}(\Omega, h)$.

Antes de estabelecermos resultados de existência e unicidade para solução de (3.44), quando $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, vamos localizar o espaço que as contém. Veremos que este espaço é o das funções de variação limitada.

Lema 3.2.1. *Suponhamos que $F : \Omega \to X$ satisfaça a condição (i) da Definição 3.2.3. Se $x : [\alpha, \beta] \subset [a, b] \to X$ é tal que $(x(t), t) \in \Omega$, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, e se $\int_{\alpha}^{\beta} DF(x(\tau), t)$ existir, então, para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$,*

$$\Big\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \Big\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|. \quad (3.49)$$

Demonstração: Como a função F satisfaz a condição (i) da Definição 3.2.3, vale a desigualdade

$$\|F(x(\tau),t) - F(x(\tau),\tau)\| \leq \frac{(t-\tau)}{|t-\tau|}(h(t) - h(\tau)), \tag{3.50}$$

para todo $t, \tau \in [\alpha, \beta]$, pois h é não-decrescente. Seja $V(\tau, t) = h(t)$. Então $\int_{s_1}^{s_2} DV(\tau, t) = h(s_2) - h(s_1)$, para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Pelo Teorema 3.1.9, obtemos a seguinte relação

$$\Big\| \int_{s_1}^{s_2} DF(x(\tau), t) \Big\| \leq \Big| \int_{s_1}^{s_2} DV(x(\tau), t) \Big| = |h(s_2) - h(s_1)|,$$

para quaisquer $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Deste modo a prova está completa. ■

Corolário 3.2.1. *Suponhamos que $F : \Omega \to X$ satisfaça a condição (i) da Definição 3.2.3. Se $x : [\alpha, \beta] \subset [a, b] \to X$ é uma solução de* (3.44)*, então*

$$\|x(s_2) - x(s_1)\| \leq |h(s_2) - h(s_1)|, \tag{3.51}$$

para todo $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Além disso, a função x será de variação limitada em $[\alpha, \beta]$ com

$$Var_{\alpha}^{\beta} x \leq h(\beta) - h(\alpha). \tag{3.52}$$

Demonstração: A desigualdade segue direto do Lema 3.2.1 e da Definição 3.2.1. Para mostrarmos que x é de variação limitada em $[\alpha, \beta]$, consideremos $D := \{\alpha = s_0 < s_1 < ... < s_k = \beta\}$ uma divisão marcada do intervalo $[\alpha, \beta]$. A desigualdade (3.51) implica que

$$\sum_{j=1}^{k} \|x(s_j) - x(s_{j-1})\| \leq \sum_{j=1}^{k} \|h(s_j) - h(s_{j-1})\| = h(\beta) - h(\alpha). \tag{3.53}$$

Tomando o supremo em (3.53) com respeito à divisão D, teremos

$$Var_{\alpha}^{\beta} x \leq h(\beta) - h(\alpha).$$

■

No próximo lema, obteremos informações sobre as descontinuidades das soluções de (3.44), quando $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$. Como era de se esperar as descontinuidades serão de primeira espécie, elas descrevem os "saltos" da solução quando eles existem.

Lema 3.2.2. *Suponhamos que $F : \Omega \to X$ satisfaça a condição (i) da Definição 3.2.3. Se $x : [\alpha, \beta] \subset [a, b] \to X$ é uma solução de* (3.44)*, então*

(i) $x(s^+) - x(s) = F(x(s), s^+) - F(x(s), s)$, *para todo $s \in [\alpha, \beta)$, onde* $F(x, s^+) = \lim_{\sigma \to s^+} F(x, \sigma)$;

(ii) $x(s) - x(s^-) = F(x(s), s) - F(x(s), s^-)$, *para todo $s \in (\alpha, \beta]$, onde* $F(x, s^-) = \lim_{\sigma \to s^-} F(x, \sigma)$.

Demonstração: Como a função h é não-decrescente, os limites laterais em $[\alpha, \beta]$ existem. Pela hipótese sobre F, os limites $F(x, s^+)$ e $F(x, s^-)$, também, existem. Pela Definição 3.2.1, temos

$$x(\sigma) - x(s) = \int_\sigma^s DF(x(\tau), t),$$

para todo $\sigma, s \in [\alpha, \beta]$. Pelo Teorema 3.1.8,

$$\begin{aligned}\lim_{\sigma \to s^+} x(\sigma) - x(s) &= \lim_{\sigma \to s^+} \int_s^\sigma DF(x(\tau), t) \\ &= \int_\sigma^\sigma DF(x(\tau), t) + \lim_{\sigma \to s^+} \Big[F(x(s), \sigma) - F(x(s), s) \Big] \\ &= \lim_{\sigma \to s^+} [F(x(s), \sigma) - F(x(s), s)]\end{aligned}$$

e o item (i) está satisfeito. De modo semelhante, obtem-se o item (ii). ■

O próximo resultado garante a existência da integral na Definição 3.45, quando $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, usando o Resultado de Convergência (Teorema 3.1.12).

Teorema 3.2.1. *Seja $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$. Suponhamos que $x : [\alpha, \beta] \to X$ é o limite pontual de uma sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de funções $x_k : [\alpha, \beta] \to X$, $k \in \mathbb{N}$, tais que $(x(s), s), (x_k(s), s) \in \Omega$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$ e $k \in \mathbb{N}$. Se $\int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t)$ existir, para todo $k \in \mathbb{N}$, então $\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$ existe e*

$$\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t) = \lim_{k \to \infty} \int_\alpha^\beta DF(x_k(\tau), t). \tag{3.54}$$

Demonstração: Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, temos

$$\|F(x_k(\tau), t_2) - F(x_k(\tau), t_1) - F(x(\tau), t_2) + F(x(\tau), t_1)\| \leq \omega(\|x_k(\tau) - x(\tau)\|)|h(t_2) - h(t_1)|,$$

para todo $\tau \in [t_1, t_2] \subset [\alpha, \beta]$. Definimos a função não-decrescente $\mu : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ tal que, para cada $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\mu(t) = \frac{\epsilon}{h(\beta) - h(\alpha) + 1} h(t),$$

onde $\mu(\beta) - \mu(\alpha) < \epsilon$. Como a função ω é contínua com $\omega(0) = 0$ e $x_k(\tau) \to x(\tau)$, para todo $\tau \in [\alpha, \beta]$, para $\epsilon > 0$ dado acima, existe $p(\tau) \in \mathbb{N}$, tal que, para $k \geq p(\tau)$,

$$\omega(\|x_k(\tau) - x(\tau)\|) < \frac{\epsilon}{2(h(\beta) - h(\alpha))}.$$

Isso implica que

$$\|F(x_k(\tau), t_2) - F(x_k(\tau), t_1) - F(x(\tau), t_2) + F(x(\tau), t_1)\| \leq \mu(t_2) - \mu(t_1),$$

para todo $\tau \in [t_1, t_2] \subset [\alpha, \beta]$ e $k \geq p(\tau)$. Seja δ um calibre de $[\alpha, \beta]$. Para toda aplicação $m : [a, b] \to \mathbb{N}$ e toda divisão marcada δ-fina $D := \{(\tau_j, [\alpha_{j-1}, \alpha_j]); j = 1, 2, ..., k\}$ de $[\alpha, \beta]$, temos

$$\sum_{j=1}^{k} \|F(x_{m(\tau_i)}, \alpha_i) - F(x_{m(\tau_i)}, \alpha_{i-1})\| \leq \sum_{j=1}^{k} |h(\alpha_i) - h(\alpha_{i-1})| = h(\beta) - h(\alpha).$$

Assim, as condições **(I1)** e **(I2)** do Teorema 3.1.12 estão satisfeitas e, obtemos o resultado pelo Teorema 3.1.10. ■

Como nosso objetivo é mostrar a existência da integral $\int_a^b DF(x(\tau),t)$ sempre que x for solução de (3.44) e, por sua vez, possuindo variação limitada. Como toda função de variaçao limitada é limite aproximada uniformemente por uma função escada finita (dos Teoremas 1.1.1, 1.1.2 e 3.2.1), então é suficiente garantir a existência da integral quando $\varphi : [a,b] \to X$ for uma função escada finita.

Lema 3.2.3. *Se $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$ e $\varphi : [a,b] \to X$ for uma função escada finita com $(\varphi(s), s) \in \Omega$, para todo $s \in [a,b]$, então existirá a integral*

$$\int_a^b DF(\varphi(\tau),t).$$

Demonstração: Sejam $s_{j-1} < \sigma_1 < \sigma_2 < s_j$, para algum $j = 1,2,...,k$ e $c_j = \varphi(s)$, para todo $s \in (s_{j-1}, s_j)$ e $j = 1,2,...k$. Pela definição de integral, $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),t)$ existe e

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} DF(\varphi(\tau),t) = F(c_j,\sigma_2) - F(c_j,\sigma_1). \tag{3.55}$$

Tomemos $\sigma_0 \in (s_{j-1}, s_j)$. Por (3.55), segue que

$$\begin{aligned}
&\lim_{s \to s_{j-1}^+} \Big[\int_s^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau),t) + F(\varphi(s_{j-1}),s) - F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}) \Big] \\
&= \lim_{s \to s_{j-1}^+} [F(c_j,\sigma_0) - F(c_j,s) + F(\varphi(s_{j-1},s) - F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1})] \\
&= F(c_j,\sigma_0) - F(c_j,s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}).
\end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.1.8 e da relação acima, a integral $\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau),t)$ existe e,

$$\int_{s_{j-1}}^{\sigma_0} DF(\varphi(\tau),t) = F(c_j,\sigma_0) - F(c_j,s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}).$$

Analogamente, podemos mostrar que $\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi(\tau),t)$ existe e

$$\int_{\sigma_0}^{s_j} DF(\varphi(\tau),t) = F(c_j,s_j^-) - F(c_j,\sigma_0) - F(\varphi(s_j),s_j^-) - F(\varphi(s_j),s_j).$$

Portanto, pelo Teorema 3.1.6, existe $\int_{s_{j-1}}^{s_j} DF(\varphi(\tau),t)$ e

$$\begin{aligned}
\int_{s_{j-1}}^{s_j} DF(\varphi(\tau),t) &= F(c_j,s_j^-) - F(\varphi(s_j),s_j^-) - F(\varphi(s_j),s_j) \\
&- F(c_j,s_{j-1}^+) + F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}),s_{j-1}).
\end{aligned}$$

Repetindo este argumento em todo intervalo $[s_{j-1}, s_j]$, com $j = 1, 2, ..., k$ e usando novamente o Teorema 3.1.6, obtemos a existência da integral $\displaystyle\int_a^b DF(\varphi(\tau), t)$ e

$$\begin{aligned}\int_a^b DF(\varphi(\tau), t) &= \sum_{j=1}^{k}[F(c_j, s_j^-) - F(c_j, s_{j-1}^+)] \\ &+ \sum_{j=1}^{k}[F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}^+) - F(\varphi(s_{j-1}), s_{j-1}) - F(\varphi(s_j), s_j^-) - F(\varphi(s_j), s_j)].\end{aligned}$$

■

Corolário 3.2.2. *Sejam $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$ e $x : [\alpha, \beta] \to X$, $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, uma função regrada (em particular, uma função de variação limitada) em $[\alpha.\beta]$ tal que $(x(s), s) \in \Omega$, para todo $s \in [\alpha, \beta]$, então $\displaystyle\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t)$ existe.*

Demonstração: Toda função regrada é limite uniforme de funções escada finitas. Logo todas as hipóteses do Teorema 3.2.1 estão satisfeitas, donde segue o resultado. ■

Finalmente, conhecemos certas condições sobre x e F que garantem a existência da integral

$$\int_\alpha^\beta DF(x(\tau), t).$$

Portanto, estamos em condições de investigar propriedades básicas a respeito de soluções da EDOG em (3.44) descritas através desta integral.

3.2.2 Existência e unicidade de soluções

Continuaremos assumindo que $\Omega = \mathcal{O} \times [a, b]$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto de X e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Consideremos a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF(x(\tau), t), \tag{3.56}$$

onde $F : \Omega \to X$ pertencente à classe $\mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$ descrita anteriormente.

Nestas condições, pelo Corolário 3.2.1, uma solução de (3.56) será uma função de variação limitada. Consequentemente, devemos trabalhar no espaço das funções de variação limitada em $[a, b]$, $\mathrm{BV}([a, b], X)$ (veja Capítulo 1).

Além disso, pelo Lema 3.2.2, toda solução x de (3.56) será contínua à esquerda e os limites laterais existem e se, para algum $t_0 \in (a, b)$, $x(t_0) = \widetilde{x}$, então, pelo Teorema 3.1.7, o limite à direita em t_0 satisfaz

$$x(t_0^+) = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0^+) - F(\widetilde{x}, t_0).$$

Como há possibilidade de (3.56) admitir solução descontínua, pode ocorrer a existência de algum $\widetilde{x} \in \mathcal{O}$, tal que

$$\widetilde{x}^+ = x(t_0^+) = \widetilde{x} + F(\widetilde{x}, t_0^+) - F(\widetilde{x}, t_0) \notin \mathcal{O}.$$

Por esse motivo, é natural assumirmos que $\widetilde{x}^+ \in \mathcal{O}$, conforme veremos no próximo teorema. A prova deste resultado decorre do Teorema do Ponto Fixo de Banach.

Teorema 3.2.2. *Seja $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$. Então, para todo $(\widetilde{x}, t_0) \in \Omega$, com $\widetilde{x}^+ \in \mathcal{O}$, existe $\Delta > 0$ tal que, $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to X$ é a única solução de* (3.56) *satisfazendo $x(t_0) = \widetilde{x}$.*

Demonstração: Como $\widetilde{x} \in \mathcal{O}$, existe $\epsilon > 0$ tal que a bola aberta $B(\widetilde{x}, \epsilon) \subset \mathcal{O}$. Inicialmente, suponhamos que h é contínua em t_0. Para este $\epsilon > 0$, existe $\Delta_1 > 0$ tal que $|h(t) - h(t_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, sempre que $t \in [t_0, t_0 + \Delta_1]$. Pelo Corolário 3.2.1, para $t \in [t_0, t_0 + \Delta_1]$, segue que $x(t) \in \mathcal{O}$, pois $\|x(t) - \widetilde{x}\| \leq |h(t) - h(t_0)| < \dfrac{\epsilon}{2}$, para $t \in [t_0, t_0 + \Delta_1]$. Além disso, existe $\Delta_2 > 0$, tal que

$$h(t_0 + \Delta_2) - h(t_0) < \frac{1}{4L},$$

onde L é a constante de Lipschitz de ω em $[t_0, t_0 + \Delta_2]$. Consideremos $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$. Assim, $x(t) \in \mathcal{O}$, para $t \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e, como h é não-decrescente, temos

$$h(t_0 + \Delta) - h(t_0) < \frac{1}{4L}. \tag{3.57}$$

Consideremos o conjunto

$$\mathcal{A} = \{z : [t_0, t_0+\Delta] \to X; z \in \mathrm{BV}([t_0, t_0+\Delta], X), \quad \|z(t)-\widetilde{x}\| \leq |h(t)-h(t_0)|, \quad \forall t \in [t_0, t_0+\Delta]\}.$$

Pela demonstração do Teorema 2.3.1, o conjunto $\mathcal{A}$ é um espaço de Banach.

Para $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z \in \mathcal{A}$, definimos

$$Tz(s) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{s} DF(z(\tau), t). \tag{3.58}$$

Como $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$ e $z \in \mathrm{BV}([t_0, t_0 + \Delta], X)$, pelo Corolário 3.2.2, a integral $\displaystyle\int_{t_0}^{s} DF(z(\tau), t)$ existe. Além disso, segue do Lema 3.2.1 que

$$\|Tz(t) - \widetilde{x}\| = \| \int_{t_0}^{s} DF(x(\tau), t)\| \leq |h(t) - h(t_0)|,$$

para $s \in [t_0, t_0 + \Delta]$, ou seja, $T(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$.

Agora, mostraremos que o operador $T : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é uma contração. Como $F \in \mathscr{F}(\Omega, h, \omega)$, para $t, \tau \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, obtemos

$$\begin{aligned}\|F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t) - F(z_2(\tau), \tau) + F(z_1(\tau), \tau)\| &\leq \omega(\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|)|h(t) - h(\tau)| \\ &= \frac{t-\tau}{|t-\tau|}\omega(\|z_1 - z_2\|_{BV})[h(t) - h(\tau)].\end{aligned}$$

Logo, para $s_1, s_2 \in [t_0, t_0 + \Delta]$ e $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, usando o Teorema 3.1.9, temos

$$\begin{aligned}\| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)]\| &\leq \int_{s_1}^{s_2} D[\omega(\|z_2 - z_1\|_{BV})h(t)] \\ &= \omega(\|z_2 - z_1\|_{BV})[h(s_2) - h(s_1)] \\ &\leq L\|z_2 - z_1\|_{BV}|h(s_2) - h(s_1)|,\end{aligned}$$

consequentemente,

$$\begin{aligned} \|(Tz_2 - Tz_1)(s_2) - (Tz_2 - Tz_1)(s_1)\| &= \| \int_{s_1}^{s_2} D[F(z_2(\tau), t) - F(z_1(\tau), t)]\| \\ &\leq L\|z_2 - z_1\|_{BV}|h(s_2) - h(s_1)|. \end{aligned} \tag{3.59}$$

Seja $\mathcal{D} := \{t_0 = s_0 < s_1 < ... < s_k = t_0 + \Delta\}$ uma divisão finita arbitrária de $[t_0, t_0 + \Delta]$. Por (3.59),

$$\begin{aligned} \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) &= \sup_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{k} \|(Tz_2 - Tz_1)(s_i) - (Tz_2 - Tz_1)(s_{i-1})\| \\ &\leq \sup_{\mathcal{D}} \sum_{i=1}^{k} L\|z_2 - z_1\|_{BV}|h(s_i) - h(s_{i-1})| \\ &= L\|z_2 - z_1\|_{BV}|h(t_0 + \Delta) - h(t_0)|. \end{aligned}$$

Usando (3.57), para todo $z_1, z_2 \in \mathcal{A}$, obtemos

$$\begin{aligned} \|Tz_2 - Tz_1\|_{BV} &= \|(Tz_2 - Tz_1)(t_0)\| + \text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \\ &\leq 2\text{var}_{t_0}^{t_0+\Delta}(Tz_2 - Tz_1) \\ &\leq 2\|z_2 - z_1\|_{BV}|h(t_0 + \Delta) - h(t_0)| \\ &< 2L\|z_2 - z_1\|_{BV}\frac{1}{4L} \\ &= \frac{1}{2}\|z_2 - z_1\|_{BV}, \end{aligned}$$

ou seja, o operador T é uma contração em $\mathcal{A}$. Portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe um único $x \in \mathcal{A}$, tal que

$$x(s) = Tx(s) = \widetilde{x} + \int_{t_0}^{s} DF(x(\tau), t), \quad \text{para todo } \ s \in [t_0, t_0 + \Delta].$$

Consequentemente $x : [t_0, t_0 + \Delta] \to X$ é a única solução local de (3.56) com $x(t_0) = \widetilde{x}$.

Agora, consideremos t_0 como sendo um ponto de descontinuidade de h e definimos

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } \ t \leq t_0; \\ h(t) - [h(t_0^+) - h(t_0)], & \text{se } \ t > t_0. \end{cases} \tag{3.60}$$

Notemos que $\widetilde{h}$ é não-decrescente e contínua à esquerda em $[t_0, +\infty)$. Definindo, também,

$$\widetilde{F}(x, t) = \begin{cases} F(x, t), & \text{se } \ t \leq t_0; \\ F(x, t) - [F(\widetilde{x}, t_0^+) - F(\widetilde{x}, t_0)], & \text{se } \ t > t_0, \end{cases} \tag{3.61}$$

obtemos $\widetilde{F} \in \mathscr{F}(\Omega, \widetilde{h}, \omega)$. Portanto, realizando um procedimento análogo ao anterior, concluímos que existe uma única solução local z de $\frac{dz}{d\tau} = D\widetilde{F}(z(\tau), t)$ com $z(t_0) = \widetilde{x}^+$. Por conseguinte, definindo

$$x(t) = \begin{cases} \widetilde{x}, & \text{se } \ t = t_0 \\ z(t), & \text{se } \ t > t_0, \end{cases} \tag{3.62}$$

pela Observação 3.2.2, a função x será a única solução de (3.56) com $x(t_0) = \widetilde{x}$ e a prova está completa. ■

CAPÍTULO

4

Correspondência entre EDFRIs e EDOGs

Neste capítulo, mostraremos que a classe de EDFRIs, apresentada no segundo capítulo, é identificada com a classe de EDOGs apresentada no terceiro capítulo, através de uma correspondência biunívoca entre suas soluções. Observaremos que essa correspondência entre as soluções de tais classes de equações diferencias será fundamental para a construção dos resultados de dependência contínua das soluções em relação aos dados iniciais e estabilidade das soluções. As referências deste capítulo são [2] e [10].

4.1 Construção da EDOG

Nesta seção, construímos uma EDOG a partir de uma EDFRI e apresentamos um resultado técnico a respeito da solução dessa EDOG.

Consideremos a EDFRI

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0; \\ \Delta y\,(t) = I_k\,(y\,(t))\,, & t = t_k, \quad k =, 1, 2, \ldots; \\ y_{t_0} = \phi, & \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$.

Vamos supor, também, que $f : \mathbb{R} \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do tipo Carathéodory:

(A*) para cada $y \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, $t \mapsto f\,(t, y_t)$ é Henstock-Kurzweil integrável em $[t_0, t_0 + \sigma]$;

(B*) existe uma função Lebesgue integrável $M : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $x \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$,

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} f(s, x_s)\, ds\right| \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)\, ds;$$

(C*) existe uma função Lebesgue integrável $L : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $x, y \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e quaisquer $u_1, u_2 \in [t_0, t_0+\sigma]$,

$$\left|\int_{u_1}^{u_2} [f(s, x_s,) - f(y_s, s)]\, ds\right| \leq \int_{u_1}^{u_2} L(s)\, \|x_s - y_s\|\, ds.$$

Os operadores de impulso $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfazem as condições do tipo Lipschitz:

(A') existe uma constante $K_1 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \ldots$, e todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

(B') existe uma constante $K_2 > 0$ tal que, para todo $k = 1, 2, \ldots$, e para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|.$$

Observação 4.1.1. A integral, agora, é no sentido de Henstock-Kurzweil e não de Lebesgue, conforme tratamos no segundo capítulo. Fazendo pequenas adaptações, com respeito a integração não-absoluta, provamos a existência (local) e unicidade de solução para EDFRI (4.1) usando as ideias do Teorema 2.3.1. Neste caso, a aplicação $t \to f(t, y_t)$ além de possuir muitos pontos de descontinuidade, pode ser de variação ilimitada.

Seja PC_1 um conjunto aberto de $PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$ com a seguinte propriedade: se y é um elemento de PC_1 e $\bar{t} \in [t_0, t_0+\sigma]$, então $\bar{y}$ dada por

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t)\,, & t_0 - r \leq t \leq \bar{t}, \\ y(\bar{t})\,, & \bar{t} < t < t_0 + \sigma \end{cases}$$

é também um elemento de PC_1.

Exemplo 4.1.1. É fácil ver que o espaço das funções de $[t_0 - r, t_0+\sigma]$ em $\mathbb{R}^n$ de variação limitada e contínua à esquerda em $(t_0 - r, t_0+\sigma]$, $BV([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n) \cap PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$, é um conjunto PC_1 em $PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 4.1.2. Claramente, o espaço das funções de $[t_0 - r, t_0+\sigma]$ em $\mathbb{R}^n$ limitadas e contínua à esquerda em $(t_0 - r, t_0+\sigma]$, $C_0([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n) \cap PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$ é um conjunto PC_1 em $PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 4.1.3. Qualquer bola aberta é um conjunto PC_1 em $PC([t_0 - r, t_0+\sigma],\mathbb{R}^n)$.

De fato, sem perda de generalidade, consideremos

$$B(x,a) = \{z \in PC([t_0 - r, t_0 + \sigma, \mathbb{R}^n); \|z - x\| < a\},$$

com $x \in X$ e $a > 0$. Sejam $y \in B(x,a)$, $\bar{t} \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$ e

$$\bar{y}\,(t) = \begin{cases} y\,(t)\,, & t_0 - r \leq t \leq \bar{t}; \\ y\,(\bar{t})\,, & \bar{t} < t \leq t_0 + \sigma. \end{cases}$$

Então $\bar{y} \in B(x,a)$, pois

$$\|\bar{y} - x\| = \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |\bar{y}(t) - x(t)| = \sup_{t \in [t_0 - r, \bar{t}]} |y(t) - x(t)| \leq \sup_{t \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |y(t) - x(t)| < a.$$

Agora, definimos $F : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$, pondo

$$F(y,t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, \quad \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} f(s, y_s)ds, \quad \vartheta \in [t_0, t]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s, y_s)ds, \quad \vartheta \in [t, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{4.2}$$

No próximo resultado, mostramos que F pertencente à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, onde h é uma função não-decrescente e contínua à esquerda. Lembrando que esta é a classe escolhida para trabalharmos com às EDOGs.

Proposição 4.1.1. *Seja* $F : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n]$*, definida por* (4.2)*. Então, existe uma função* $h_1 : [t_0, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}$ *não-decrescente e contínua à esquerda tal que,* $F \in \mathscr{F}(\Omega, h_1)$*, onde* $\Omega = PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$*.*

Demonstração: Sejam $x, y \in PC_1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0 + \sigma$ dados. É fácil ver que

$$F(y, s_2)(\vartheta) - F(y, s_1)(\vartheta) = \begin{cases} 0, \quad \vartheta \in [t_0 - r, s_1]; \\ \displaystyle\int_{s_1}^{\vartheta} f(s, y_s)ds, \quad \vartheta \in [s_1, s_2]; \\ \displaystyle\int_{s_1}^{s_2} f(s, y_s)ds, \quad \vartheta \in [s_2, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{4.3}$$

De **(B*)** e **(C*)**, temos

$$\begin{aligned} \|F(x, s_2) - F(x, s_1)\| &= \sup_{\vartheta \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |F(x, s_2)(\vartheta) - F(x, s_1)(\vartheta)| \\ &= \sup_{\vartheta \in [s_1, s_2]} |F(x, s_2)(\vartheta) - F(x, s_1)(\vartheta)| \\ &= \sup_{\vartheta \in [s_1, s_2]} \left| \int_{s_1}^{\vartheta} f(s, x_s)ds \right| \leq \sup_{\vartheta \in [s_1, s_2]} \int_{s_1}^{\vartheta} M(s)ds = \int_{s_1}^{s_2} M(s)ds \end{aligned} \tag{4.4}$$

e

$$\begin{aligned}\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\| &= \sup_{\vartheta\in[s_1,s_2]}\left|\int_{s_1}^{\vartheta}[f(s,x_s)-f(s,y_s)]ds\right| \\ &\leq \int_{s_1}^{s_2} L(s)\|x_s-y_s\|_\infty ds \\ &\leq \sup_{\vartheta\in[s_1-r,s_2]}|x(\vartheta)-y(\vartheta)|\int_{s_1}^{s_2} L(s)ds \qquad (4.5) \\ &\leq \|x-y\|\int_{s_1}^{s_2} L(s)ds.\end{aligned}$$

Desta forma, basta definir $h_1 : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$, pondo

$$h_1(t) = \int_{t_0}^{t}[M(s)+L(s)]ds, \quad t \in [t_0, t_0+\sigma].$$

Então, a função h_1 é contínua e não-decrescente, pois $M, L : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ são funções não-negativas e Lebesgue integráveis. De (4.4) e (4.5), temos

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)\| \leq |h_1(s_2)-h_1(s_1)|$$

e

$$\|F(x,s_2)-F(x,s_1)-F(y,s_2)+F(y,s_1)\| \leq \|x-y\||h_1(s_2)-h_1(s_1)|,$$

para $x, y \in PC_1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0+\sigma$. Por conseguinte, $F \in \mathscr{F}(\Omega, h_1)$. ■

Agora, consideremos os operadores impulsivos I_k, $k = 1, 2, ...$, em (4.1), satisfazendo as condições do tipo de Lipschitz. Definimos $J : PC_1 \times [t_0, t_0+\sigma] \to PC([t_0-r, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$, pondo

$$J(y,t)(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} H_{t_k}(t)H_{t_k}(\vartheta)I_k(y(t_k)), \qquad (4.6)$$

onde $y \in PC_1$, $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, $\vartheta \in [t_0-r, t_0+\sigma]$, m é a quantidade de momentos de impulso em $[t_0, t_0+\sigma]$ e H_{t_k} denota a função de Heaviside contínua à esquerda e centrada em t_k, para $k = 1, 2, ..., m$.

A seguir, mostramos que J, também, pertencente à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, para alguma função h não-decrescente e contínua à esquerda.

Proposição 4.1.2. *Seja $J : PC_1 \times [t_0, t_0+\sigma] \to PC([t_0-r, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$, definida em* (4.6)*. Então, existe uma função $h_2 : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda tal que $J \in \mathscr{F}(\Omega, h_2)$, onde $\Omega = PC_1 \times [t_0, t_0+\sigma]$.*

Demonstração: Tomemos $x, y \in PC_1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0+\sigma$. Pela condição **(A')**, temos

$$\begin{aligned}\|J(x,s_2)-J(x,s_1)\| &= \sup_{\vartheta\in[t_0-r,t_0+\sigma]}|J(x,s_2)(\vartheta)-J(x,s_1)(\vartheta)| \qquad (4.7) \\ &= \sup_{\vartheta\in[t_0-r,t_0+\sigma]}\sum_{k=1}^{m}|[H_{t_k}(s_2)-H_{t_k}(s_1)]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(t_k))| \\ &\leq K_1\sum_{k=1}^{m}[H_{t_k}(s_2)-H_{t_k}(s_1)],\end{aligned}$$

e, analogamente, pela condição **(B')**, concluímos que

$$\|J(x,s_2)-J(x,s_1)-J(y,s_2)-J(y,s_1)\| \leq K_2\|x-y\|\sum_{k=1}^{m}[H_{t_k}(s_2)-H_{t_k}(s_1)]. \tag{4.8}$$

Definamos $h_2 : [t_0, t_0+\sigma] \to \mathbb{R}$, pondo $h_2(t) = \max(K_1, K_2)\sum_{k=1}^{j} H_{t_k}(t)$. Então, h_2 é contínua à esquerda em $(t_0, t_0+\sigma]$ e não-decrescente em $[t_0, t_0+\sigma]$.

De (4.7) e (4.8), temos

$$\|J(x,s_2)-J(x,s_1)\| \leq |h_2(s_2)-h_2(s_1)|$$

e

$$\|J(x,s_2)-J(x,s_1)-J(y,s_2)-J(y,s_1)\| \leq \|x-y\||h_2(s_2)-h_2(s_1)|,$$

sempre que $x, y \in PC_1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0+\sigma$. Portanto, $J \in \mathscr{F}(\Omega, h_2)$. ■

Sejam F e J definidas em (4.2) e (4.6), respectivamente. Seja $G : PC_1 \times [t_0, t_0+\sigma] \to PC([t_0 - r, t_0+\sigma], \mathbb{R}^n)$, pondo

$$G(y,t) = F(y,t) + J(y,t), \quad \text{para } y \in PC_1,\ \ t \in [t_0, t_0+\sigma]. \tag{4.9}$$

Assim, obtemos G a partir das funções do sistema impulsivo (4.1). Mostraremos que G pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, para uma certa h não-decrescente e contínua à esquerda. De fato, sejam $x, y \in PC_1$ e $t_0 \leq s_1 < s_2 \leq t_0+\sigma$. De (4.4) e (4.7), temos

$$\begin{aligned} \|G(x,s_2)-G(x,s_1)\| &\leq \|F(x,s_2)-F(x,s_1)\| + \|J(x,s_2)-J(x,s_1)\| \\ &\leq h_1(s_2)-h_1(s_1)-h_2(s_2)+h_2(s_1) = h(s_2)+h(s_1), \end{aligned} \tag{4.10}$$

onde $h(t) = h_1(t)+h_2(t)$, para $t \in [t_0, t_0+\sigma]$. Logo, h é contínua à esquerda e não-decrescente. Analogamente, (4.5) e (4.8) implicam

$$\|G(x,s_2)-G(x,s_1)-G(y,s_2)-G(y,s_1)\| \leq \|x-y\||h(s_2)-h(s_1)|. \tag{4.11}$$

Portanto, G pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$.

Consideramos a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = G(x,t), \tag{4.12}$$

onde G, dada por (4.9), pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$.

Recapitulando, dizemos que $x : [t_0, t_0+\sigma] \to PC([t_0 - r, t_0+\sigma]$ é solução da EDOG (4.12), com condição inicial $\widetilde{x} = x(t_0) \in PC_1$, dada por

$$\widetilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ x(t_0)(t_0), & \vartheta \in [t_0, t_0+\sigma], \end{cases} \tag{4.13}$$

onde $\phi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$, se $(x(t),t) \in PC_1 \times [t_0, t_0+\sigma]$, para todo $t \in [t_0, t_0+\sigma]$, e se

$$x(u)(\vartheta) = \widetilde{x}(\vartheta) + \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)\right)(\vartheta), \quad \text{para } \vartheta \in [t_0-r, t_0+\sigma],$$

para todo $u \in [t_0, t_0+\sigma]$.

No lema seguinte, observamos que a função G, dada por (4.9), fornece certas propriedades para a solução de (4.12).

Lema 4.1.1. *Seja $x : [t_0, t_0+\sigma] \to PC_1$ uma solução de* (4.12) *com a condição inicial $\widetilde{x} = x(t_0)$, dada por* (4.13)*. Então, para $u \in [t_0, t_0+\sigma]$, temos*

$$x(u)(\vartheta) = \begin{cases} x(\vartheta)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0-r, u]; \\ x(u)(u), & \vartheta \in [u, t_0+\sigma]. \end{cases} \tag{4.14}$$

Demonstração: Suponhamos, primeiramente, que $\vartheta \in [u, t_0+\sigma]$. Como x é solução de (4.12),

$$x(u)(u) = \widetilde{x}(u) + \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)\right)(u) \quad \text{e} \quad x(u)(\vartheta) = \widetilde{x}(\vartheta) + \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)\right)(\vartheta).$$

Implicando em

$$x(u)(\vartheta) - x(u)(u) = \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)\right)(u) - \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)\right)(\vartheta),$$

pois $\widetilde{x}(u) = x(t_0)(t_0) = \widetilde{x}(\vartheta)$.

Da existência de $\displaystyle\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t)$, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[t_0, t_0+\sigma]$ tal que

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})] - \int_{t_0}^{u} DG(x(\tau),t) \right\| < \epsilon,$$

para toda divisão marcada $D := \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]); i = 1, 2, ..., l\}$ δ-fina de $[t_0, u]$. Portanto,

$$\begin{aligned} |x(u)(\vartheta) - x(u)(u)| \quad < \quad & 2\epsilon + \left| \sum_{i=1}^{m} [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) \right. \\ - \quad & \left. \sum_{i=1}^{m} [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](u) \right|. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Agora, devemos mostrar que o segundo membro da desigualdade acima é igual a zero, ou seja,

$$[G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](u) = 0, \quad \forall i = 1, ..., m. \tag{4.16}$$

De fato, seja $t_0 \leq s_{i-1} < s_i \leq u \leq v$, com $i = 1, ..., l$. Então

$$[F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) = \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, x_s) ds = [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](u). \tag{4.17}$$

Mas, se $t_k \leq u$ ou $t_k \geq \vartheta$, para algum $k = 1, 2, ..., m$, temos $H_{t_k}(u) = H_{t_k}(\vartheta)$ e, se $u \leq t_k \leq \vartheta$, para algum $k = 1, 2, .., m$, então $H_{t_k}(s_i) = H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$, para todo $i = 1, ..., l$. Logo,

$$\begin{aligned} [J(x(\tau_i), s_i) - J(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) &= \sum_{k=1}^{j} [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(\vartheta) I_k(y(t_k)) \\ &= 0 = \sum_{k=1}^{j} [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(u) I_k(y(t_k)) \quad (4.18) \\ &= [J(x(\tau_i), s_i) - J(x(\tau_i), s_{i-1})](u). \end{aligned}$$

Consequentemente, de (4.17) e (4.18), obtemos a igualdade (4.16). Pela desigualdade (4.15), temos

$$|x(u)(\vartheta) - x(u)(u)| < 2\epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente, obtemos o desejado.

Finalmente, suponhamos que $\vartheta \leq u$. Pela definição de solução de (4.12),

$$x(u)(\vartheta) - x(\vartheta)(\vartheta) = \left(\int_{\vartheta}^{u} DG(x(\tau), t) \right)(\vartheta).$$

Como

$$F(x(\tau_i), s_i)(\vartheta) - F(x(\tau_i), s_{i-1})(\vartheta) = \int_{t_0}^{\vartheta} f(s, x_s) ds - \int_{t_0}^{\vartheta} f(s, x_s) ds = 0$$

e

$$J(x(\tau_i), s_i)(\vartheta) - J(x(\tau_i), s_{i-1})(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(\vartheta) I_k(y(t_k)) = 0,$$

para uma divisão arbitraria $D := \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]); i = 1, 2, ..., l\}$ de $[\vartheta, u]$. Segue que

$$\left(\int_{\vartheta}^{u} DG(x(\tau), t) \right)(\vartheta) = 0,$$

para todo $\vartheta \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$. Portanto, $x(u)(\vartheta) = x(\vartheta)(\vartheta)$, donde segue o resultado. ■

4.2 Correspondência entre EDOGs e EDFRIs

Os próximos resultados são cruciais para o desenvolvimento deste trabalho, pois consistem em construir uma solução da EDOG (4.12) a partir de uma solução da EDFRI (4.1) e vice-versa. Dedicamos esta seção ao estudo da correspondência biunívoca entre as EDFRIs e EDOGs.

Teorema 4.2.1. *Sejam $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $G : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ em* (4.9)*. Suponhamos que $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução da EDFRI* (4.1) *com a condição inicial $y_{t_0} = \phi$, tal que $y \in PC_1$. Para cada $t \in [t_0, t_0 + \sigma]$, tomemos*

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t]; \\ y(t), & \vartheta \in [t, t_0 + \sigma]. \end{cases} \quad (4.19)$$

Então, $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to PC_1$ *é uma solução da EDOG* (4.12) *com condição inicial*

$$x(t_0)(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ y(t_0), & \vartheta \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{4.20}$$

Demonstração: É suficiente mostrar que, para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe $\displaystyle\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau), t)$ e

$$x(u) - x(t_0) = \int_{t_0}^{u} DG(x(\tau), t).$$

Dado $\epsilon > 0$, devemos encontrar um calibre δ de $[t_0, u]$, com $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, satisfazendo a definição de integral de Kurzweil.

Sabemos que uma solução y de (4.1) em $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$, satisfaz

$$y(t) = \phi(0) + \int_{t_0}^{t} f(s, y_s)ds + \sum_{k=1}^{m} I_k(t_k, y(t_k))H_{t_k}(t), \quad \text{para } t \in [t_0, t_0 + \sigma], \tag{4.21}$$

ou seja, a função y restrita à $[t_0, t_0 + \sigma]$ pode ser escrita como soma de uma função absolutamente contínua e uma função escada finita contínua à esquerda. Desta forma, para todo $\tau \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe $\delta(\tau) = \delta(\tau, \epsilon) > 0$, tal que

$$|y(\rho) - y(\tau)| < \epsilon, \quad \text{para todo } \rho \in [t_0 - \delta(\tau), t_0] \tag{4.22}$$

e

$$|y(\rho) - y(\tau^+)| < \epsilon, \quad \text{para todo } \rho \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)]. \tag{4.23}$$

Como existe $\delta(\tau)$, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \sigma]$, temos naturalmente um calibre δ de $[t_0, t_0 + \sigma]$. Sem perda de generalidade, podemos exigir que o calibre δ também satisfaça, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)]$, as condições:

(i) $\displaystyle\left| \int_{u}^{v} L(s)ds \right| < \frac{\epsilon}{(m+1)(K_1+1)}$, para todo $[u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$;

(ii) $\displaystyle 0 < \delta(\tau) < \min\left\{ \frac{t_k - t_{k-1}}{2}; k = 1, 2, ..., m \right\}$;

(iii) $0 < 2\delta(\tau) < \min\{|\tau - t_k|, |\tau - t_{k-1}|; \tau \in (t_{k-1}, t_k), k = 1, 2, ..., m\}$.

Em **(i)**, observamos que a função L, dada pela condição **(C*)**, é Lebesgue integrável em $[t_0, t_0+\sigma]$. A constante m é a quantidade de instantes de impulsos em $[t_0, t_0 + \sigma]$ e a constante K_1 é dada em (**A’**). Se um intervalo marcado $(\tau, [s_1, s_2])$ é δ-fino, por **(ii)**, garantimos que $[s_1, s_2]$ possui no máximo um instante de impulso t_k, para algum $k = 1, 2, ..., m$. Caso contrário, se $t_k, t_{k-1} \in [s_1, s_2]$, para algum $k = 1, 2, ..., m$, teríamos

$$\delta(\tau) < \frac{t_k - t_{k-1}}{2} \leq \frac{s_2 - s_1}{2} < \frac{2\delta(\tau)}{2} = \delta(\tau).$$

Além disso, se o intervalo marcado $(\tau, [s_1, s_2])$ é δ-fino e $t_k \in [s_1, s_2]$, para algum $k = 1, 2, ..., m$, então $\tau = t_k$. Suponhamos, por absurdo, que $\tau \neq t_k$. Então, $\tau \in (t_{k-1}, t_k)$ ou $\tau \in (t_k, t_{k+1})$ implicando em $2\delta(\tau) < |t_k - \tau| \leq |s_2 - s_1| < 2\delta(\tau)$, uma contradição.

Seja $D := \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]); i = 1, ..., l\}$ uma divisão marcada δ-fina do intervalo $[t_0, u]$. Usando (4.21) e (4.31), temos

$$[x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) = \begin{cases} 0, \quad \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} f(s, y_s)ds + \sum_{k=0}^{m}[H_{t_k}(\vartheta) - H_{t_k}(s_{i-1})]I_k(y(t_k)), \ \vartheta \in [s_{i-1}, s_i]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds + \sum_{k=0}^{m}[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]I_k(y(t_k)), \ \vartheta \in [s_i, t_0 + \sigma], \end{cases} \tag{4.24}$$

para todo $i = 1, ..., m$. Por outro lado, obtemos

$$[G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) = \tag{4.25}$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=0}^{m}[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(\tau_i)(t_k)), \quad \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} f(s, x(\tau_i)_s)ds + \sum_{k=0}^{m}[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(\tau_i)(t_k)), \ \vartheta \in [s_{i-1}, s_i]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, x(\tau_i)_s)ds + \sum_{k=0}^{m}[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(\tau_i)(t_k)), \ \vartheta \in [s_i, t_0 + \sigma]. \end{cases}$$

Afirmação: Para todo $i = 1, 2, ..., l$, temos

$$[x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) = \tag{4.26}$$

$$= \begin{cases} 0, \quad \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds, \ \vartheta \in [s_{i-1}, s_i]; \\ \displaystyle\int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds, \ \vartheta \in [s_i, t_0 + \sigma]. \end{cases}$$

Para verificarmos essa afirmação, a partir do calibre δ escolhido, precisamos estudar cada intervalo marcado $(\tau_i, [s_{i-1}, s_i])$, $i = 1, ..., l$, de D. Temos duas possibilidades:

(a) $t_p \in [s_{i-1}, s_i]$, para um único $p \in \{1, 2, ..., m\}$;

(b) $[s_{i-1}, s_i) \cap \{t_0, t_1, ..., t_m\} = \emptyset$.

Consideremos o caso **(a)**, se $\vartheta \in [t_0 - r, s_{i-1}]$, então

$$[x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) = 0,$$

pois $H_{t_p}(\vartheta) = 0$. Agora, se tomarmos $\vartheta \in [s_{i-1}, s_i]$, temos

$$\begin{aligned} & [x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds \\ = & \sum_{k=0}^{m} \{[H_{t_k}(\vartheta) - H_{t_k}(s_{i-1})]I_k(y(t_k)) - [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(\tau_i)(t_k))\} \\ = & I_p(y(t_p))H_{t_p}(\vartheta) - I_p(y(t_p))H_{t_p}(\vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Mas $\vartheta \in [s_i, t_0 + \sigma]$ implica em

$$\begin{aligned} & [x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds \\ = & \sum_{k=0}^{m} \{[H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]I_k(y(t_k)) - [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})]H_{t_k}(\vartheta)I_k(x(\tau_i)(t_k))\} \\ = & I_p(y(t_p))H_{t_p}(\vartheta) - I_p(y(t_p))H_{t_p}(\vartheta) = 0. \end{aligned}$$

Logo, mostramos (4.26) para o caso **(a)**.

Analogamente, vale (4.26) para o caso **(b)**, pois $H_{t_k}(\vartheta) - H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$, para todo $\vartheta \in [s_{i-1}, s_i]$ e $k = 1, ..., m$.

Queremos estimar a norma de $x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})$, para todo $i = 1, ..., l$. De (4.26), temos

$$\begin{aligned} & \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| = \\ = & \sup_{\vartheta \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]} |[x(s_i) - x(s_{i-1})](\vartheta) - [G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta)| \\ = & \sup_{\vartheta \in [s_{i-1}, s_i]} \left| \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds \right|, \end{aligned} \tag{4.27}$$

para todo $i = 1, ..., l$. De **(a)**, temos

$$\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds = \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)]ds = \int_{t_p}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)]ds,$$

para $\vartheta \in [t_p, s_i]$, uma vez que

$$\int_{s_{i-1}}^{t_p} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds = \int_{s_{i-1}}^{t_p} [f(s, y_s) - f(s, y_s)]ds = 0.$$

E também vale

$$\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds = 0,$$

para $\vartheta \in [s_{i-1}, t_p]$.

Da condição **(C*)**, temos

$$\left| \int_{t_p}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(t_p)_s)]ds \right| \leq \int_{t_p}^{\vartheta} L(s) \|y_s - x(t_p)_s\| ds \tag{4.28}$$

e usando (4.23) e **(A')**, para todo $s \in [t_p, s_i]$, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_s - x(t_p)_s\| &= \sup_{\rho \in [-r,0]} |y(s+\rho) - x(t_p)(s+\rho)| = \sup_{\rho \in [-r,0]} |y(s+\rho) - x(t_p)(s+\rho)| \\ &= \sup_{\rho \in [t_p,s]} |y(\rho) - y(t_p)| \leq \sup_{\rho \in [t_p,s]} \{|y(\rho) - y(t_p^+)| + I_p(y(t_p))\} \leq \epsilon + K_1. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Portanto, no caso **(a)**, para cada $i = 1, ..., l$, substituímos (4.28) e (4.29) em (4.27), obtendo

$$\begin{aligned} \|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| &< (\epsilon + K_1) \int_{t_p}^{s_i} L(s) ds \\ &< \epsilon \left(\int_{t_p}^{s_i} L(s) ds + \frac{1}{m+1} \right). \end{aligned}$$

Agora, no caso **(b)**, temos

$$\int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds = \begin{cases} \int_{s_{i-1}}^{\tau_i} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds, & \vartheta \in [\tau_i, s_i]; \\ 0, & \vartheta \in [s_{i-1}, \tau_i]. \end{cases} \tag{4.30}$$

Como vale (4.22), obtemos

$$\|y_s - x(\tau_i)_s\| = \sup_{\rho \in [\tau_i, s]} |y(\rho) - y(\tau_i)|, \quad \text{para todo} \quad s \in [\tau_i, s_i].$$

Pela condição **(C*)**, segue que

$$\left| \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} [f(s, y_s) - f(s, x(\tau_i)_s)]ds \right| \leq \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} L(s) \|y_s - x(\tau_i)_s\| ds < \epsilon \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} L(s) ds.$$

Assim, no caso **(b)**, para cada $i = 1, ..., l$, temos

$$\|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| < \epsilon \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds.$$

Usando acima, majoramos $x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})$, para todo $i = 1, ..., l$. Supondo que o caso **(a)** ocorra no máximo em $j + 1 < l$ intervalos marcados da divisão D, temos

$$\begin{aligned}
&\|x(u) - x(t_0) - \sum_{i=1}^{l}[G(x(\tau_i), s_i) - G(x(\tau_i), s_{i-1})]\| = \\
= \;& \|\sum_{i=1}^{l}[x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})]\| \\
\leq \;& \sum_{i=1}^{l}\|x(s_i) - x(s_{i-1}) - G(x(\tau_i), s_i) + G(x(\tau_i), s_{i-1})\| \\
\leq \;& \sum_{\substack{i=1 \\ t_p \in [s_{i-1}, s_i]}}^{l} \int_{t_p}^{s_i} \epsilon \left(L(s)ds + \frac{1}{m+1} \right) + \sum_{i=1}^{l} \epsilon \int_{\tau_i}^{s_i} L(s)ds. \\
< \;& 2\epsilon \int_{t_0}^{t_0+\sigma} L(s)ds + \epsilon.
\end{aligned}$$

Portanto, para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, existe $\displaystyle\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau), t)$ e vale

$$x(u) - x(t_0) = \int_{t_0}^{u} DG(x(\tau), t),$$

donde segue o resultado. ■

Teorema 4.2.2. *Sejam $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $G : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$ em* (4.9)*. Suponhamos que $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to PC_1$ é uma solução da EDOG* (4.12) *com condição inicial*

$$x(t_0)(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ x(t_0)(t_0), & \vartheta \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{4.31}$$

Para $\vartheta \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$, consideremos

$$y(\vartheta) = \begin{cases} x(t_0)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ x(\vartheta)(\vartheta), & \vartheta \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{4.32}$$

Então, y é uma solução da EDFRI (4.1) *em $[t_0 - r, t_0 + \sigma]$. Além disso, $y(\vartheta) = x(t_0 + \sigma)(\vartheta)$, para todo $\vartheta \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$, ou seja, $y \in PC_1$.*

Demonstração: Primeiramente, observemos que $y_{t_0} = \phi$ em $[-r, 0]$, pois

$$y_{t_0}(s) = y(t_0 + s) = x(t_0)(t_0 + s) = \phi(t_0 + s - t_0) = \phi(s), \quad \text{para } s \in [-r, 0].$$

Além disso, pelo Lema 4.1.1, temos

$$y(u) = x(t_0)(u) = x(u)(u) = x(t_0 + \sigma)(u), \quad \text{para } u \in [t_0 - r, t_0]$$

e

$$y(u) = x(u)(u) = x(t_0 + \sigma)(u), \quad \text{para } u \in [t_0, t_0 + \sigma].$$

Como $x(t_0 + \sigma) \in PC_1$, temos $y \in PC_1$.

De acordo com o Lema 2.2.1 é suficiente mostrarmos, para todo $\eta > 0$, com $\eta < \sigma$ e todo $u \in [t_0, t_0 + \eta]$, que

$$\left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds - \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(u) \right| < \eta. \tag{4.33}$$

Podemos escolher um calibre δ de $[t_0, t_0 + \sigma]$ tal que, para cada $\tau \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)]$, satisfaça:

(a) $0 < \delta(\tau) < \min\left\{ \dfrac{t_k - t_{k-1}}{2}; k = 1, 2, ..., m \right\}$;

(b) $0 < 2\delta(\tau) < \min\{|\tau - t_k|, |\tau - t_{k-1}|; \tau \in (t_{k-1}, t_k), k = 1, 2, ..., m\}$;

(c) $\left| \displaystyle\int_u^v L(s)ds \right| < \dfrac{\epsilon}{(m+1)(K_1+1)}$ e $\left| \displaystyle\int_u^v M(s)ds \right| < \dfrac{\epsilon}{2m}$, para todo $[u, v] \subset (\tau - \delta(\tau), \tau + \delta(\tau))$;

(d) $|h(\rho) - h(\tau)| < \epsilon$, para todo $\rho \in [t_0 - \delta(\tau), t_0]$, e $|h(\rho) - h(\tau^+)| < \epsilon$, para todo $\rho \in [t_0, t_0 + \delta(\tau)]$.

Da demonstração do Teorema 4.2.2, sabemos que nessas condições, se o intervalo marcado $(\tau, [s_1, s_2])$ é δ-fino, então o intervalo $[s_1, s_2]$ possui no máximo um instante de impulso t_k, $k = 1, ..., m$. Seja $D = \{(\tau_i, [s_{i-1}, s_i]); i = 1, ..., l\}$ uma divisão marcada δ-fina de $[t_0, t_0 + \sigma]$. Se existe $p = 1, ..., m$, tal que $t_p \in [s_{i-1}, s_i]$, para algum $i = 1, ..., l$, temos

$$\begin{aligned} J(x(t_p), s_i)(\vartheta) - J(x(t_k), s_{i-1})(\vartheta) &= \sum_{i=1}^{m} [H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1})] H_{t_k}(\vartheta) I_k(x(t_p)(t_k)) \\ &= H_{t_p}(\vartheta) I_p(y(t_p)), \end{aligned}$$

pois $H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1}) \neq 0$ se, e somente se, $k = p$. Mas, se $[s_{i-1}, s_i] \cap \{t_1, ..., t_m\} = \emptyset$, então

$$J(x(t_p), s_i)(\vartheta) - J(x(t_k), s_{i-1})(\vartheta) = 0,$$

pois $H_{t_k}(s_i) - H_{t_k}(s_{i-1}) = 0$, para todo $k = 1, ..., m$. Logo, existe $\displaystyle\int_{t_0}^{u} DJ(x(\tau), t)$ e

$$\left(\int_{t_0}^{u} DJ(x(\tau), t) \right)(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(\vartheta). \tag{4.34}$$

Como x é um solução de (4.12), pelo Lema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} y(u) - y(t_0) &= x(u)(u) - x(t_0)(t_0) = x(u)(u) - x(t_0)(u) = \left(\int_{t_0}^{u} DG(x(\tau), t) \right)(u) \\ &= \left(\int_{t_0}^{u} DF(x(\tau), t) \right)(u) + \left(\int_{t_0}^{u} DJ(x(\tau), t) \right)(u), \end{aligned}$$

para todo $u \in [t_0, t_0+\sigma]$. Isto implica que

$$\begin{aligned} & y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds - \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(u) = \qquad (4.35) \\ = & \left(\int_{t_0}^{u} DF(x(\tau), t)\right)(u) + \left(\int_{t_0}^{u} DJ(x(\tau), t)\right)(u) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds - \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(u) \\ = & \left(\int_{t_0}^{u} DF(x(\tau), t)\right)(u) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds. \end{aligned}$$

Como G e J são integráveis à Kurzweil em $[t_0, t_0+\sigma]$, temos que F também será. Assim, para o calibre δ escolhido anteriormente, temos

$$\left\| \sum_{i=1}^{l} [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})] - \int_{t_0}^{u} DF(x(\tau), t) \right\| < \epsilon, \tag{4.36}$$

para toda divisão marcada δ-fina D.

De (4.35) e (4.36), segue que

$$\begin{aligned} & \left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds - \sum_{k=1}^{m} I_k(y(t_k))H_{t_k}(u) \right| \qquad (4.37) \\ \leq & \left(\int_{t_0}^{u} DF(x(\tau), t)\right)(u) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s)ds \\ \leq & \ \epsilon + \sum_{i=1}^{l} \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds \right|. \end{aligned}$$

Para concluir a prova, precisamos estimar o terceiro membro de (4.37). Pelo Lema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} & [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds = \\ = & \begin{cases} -\int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds, & \vartheta \in [t_0 - r, s_{i-1}]; \\ \int_{s_{i-1}}^{\vartheta} f(s, y_s)ds, & \vartheta \in (s_{i-1}, \tau_i]; \\ \int_{\tau_i}^{\vartheta} f(s, (x(\tau_i))_s)ds - \int_{\tau_i}^{s_i} f(s, (x(s_i))_s)ds, & \vartheta \in (\tau_i, s_i]; \\ 0, & \vartheta \in (s_i, t_0+\sigma], \end{cases} \end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., l$. De **(B*)** e do item **(c)**, se $\vartheta \leq \tau_i$, para $i = 1, ..., l$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds \right| & \leq \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s)ds \right| \qquad (4.38) \\ & \leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} M(s)ds < \frac{\epsilon}{2m}. \end{aligned}$$

Se $\vartheta > \tau_i$, $i = 1, ..., l$, a condição **(C*)** implica em

$$\begin{aligned} & \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| \qquad (4.39) \\ \leq & \left| \int_{s_{i-1}}^{s_i} [f(s, (x(\tau_i))_s) - f(s, (x(s_i))_s)] ds \right| \leq \int_{s_{i-1}}^{s_i} \|(x(\tau_i))_s - (x(s_i))_s\| L(s) ds \end{aligned}$$

e, pela Proposição 3.2.2 e do Lema 4.1.1, temos

$$\begin{aligned} \|(x(\tau_i))_s - (x(s_i))_s\| &= \sup_{\vartheta \in [-r,0]} |x(\tau_i)(s+\vartheta) - x(s_i)(s+\vartheta)| = \sup_{\rho \in [\tau_i, s_i]} |x(\tau_i)(\rho) - x(s_i)(\rho)| \\ &\leq \sup_{\rho \in [\tau_i, s_i]} \{|x(\tau_i)(\rho) - x(\tau_i^+)(\rho)| + |x(\tau_i)(\rho) - x(s_i)(\rho)|\} \\ &\leq \|x(\tau_i) - x(\tau_i^+)\| + \|x(\tau_i^+) - x(s_i)\| \qquad (4.40) \\ &\leq K_1 + \|G(x(\tau_i), \tau_i^+) - G(x(\tau_i), s_i)\| \\ &\leq K_1 + |h(s_i) - h(\tau_i)| < K_1 + \epsilon, \end{aligned}$$

para todo $i = 1, ..., l$ e $s \in [t_0 - r, t_0 + \sigma]$. Logo, para $\vartheta \geq \tau_i$, $i = 1, ..., l$, obtemos

$$\left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| \leq (K_1 + \epsilon) \int_{s_{i-1}}^{s_i} L(s) ds. \qquad (4.41)$$

Para todo $u \in [t_0, t_0 + \sigma]$, aplicando em (4.37) as desigualdades (4.39) e (4.41), obtemos

$$\begin{aligned} & \left| y(u) - \phi(0) - \int_{t_0}^{u} f(s, y_s) ds - \sum_{k=1}^{m} I_k(t_k, y(t_k)) H_{t_k}(u) \right| \leq \qquad (4.42) \\ \leq \ & \epsilon + \sum_{\substack{i=1 \\ \vartheta \in [s_{i-1}, \tau_i]}}^{l} \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| \\ + & \sum_{\substack{i=1 \\ \vartheta \in [\tau_i, s_i]}}^{l} \left| [F(x(\tau_i), s_i) - F(x(\tau_i), s_{i-1})](\vartheta) - \int_{s_{i-1}}^{s_i} f(s, y_s) ds \right| \\ < \ & \epsilon + m \frac{\epsilon}{2m} + (\epsilon + K_1) \sum_{i=1}^{m} \int_{\tau_i}^{s_i} L(s) ds < 3\epsilon + \epsilon \int_{t_0}^{t_0+\sigma} L(s) ds. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $\epsilon > 0$ de modo que

$$3\epsilon + \epsilon \int_{t_0}^{t_0+\sigma} L(s) ds < \eta$$

e substituindo em (4.42), provamos a desigualdade (4.33). Concluímos, assim, esta demonstração. ■

Observação 4.2.1. A unicidade de solução das EDFRIs é garantida pelo Teorema 2.3.1 no sentido local e para às EDOGs, segundo o Teorema 3.2.2, também. Logo, os teoremas de correspondência (Teorema 4.2.1 e Teorema 4.2.2) tratam da correspondência das soluções locais de EDFRIs e EDOGs.

Estamos interessando, também, no comportamento da solução global das EDFRIs. Portanto, estenderemos os resultados obtidos neste capítulo.

Consideramos $PC([a,+\infty),\mathbb{R}^n)$, com $a \in \mathbb{R}$, munido da topologia da convergência uniforme localmente, isto é, em cada subintervalo compacto de $[a,+\infty)$.

Seja, agora PC_1, um conjunto aberto de $PC([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ com a seguinte propriedade: se y é um elemento de PC_1 e $\bar{t} \in [t_0,+\infty)$, então $\bar{y}$ dada por

$$\bar{y}(t) = \begin{cases} y(t), & t_0 - r \leq t \leq \bar{t}; \\ y(\bar{t}), & \bar{t} < t < +\infty \end{cases}$$

é também um elemento de PC_1.

Assumimos que $f : [t_0,+\infty) \times PC([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ e $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1,2,...$, satisfazem as condições **(A)**, **(B)**, **(C)**, **(A')** e **(B')**, apresentadas no Capítulo 1.

Para $y \in PC_1$ e $t \in [t_0,+\infty)$, definimos

$$F(y,t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} f(s,y_s)ds, & \vartheta \in [t_0,t]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} f(s,y_s)ds, & \vartheta \in [t,+\infty) \end{cases} \tag{4.43}$$

e

$$J(y,t)(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} H_{t_k}(t) H_{t_k}(\vartheta) I_k(y(t_k)), \tag{4.44}$$

onde $\vartheta \in [t_0-r,+\infty)$. Seja $G : PC_1 \times [t_0,+\infty) \to PC([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, pondo

$$G(y,t)(\vartheta) = F(y,t)(\vartheta) + J(y,t)(\vartheta),$$

para $y \in PC_1$, $t \in [t_0,+\infty)$ e $\vartheta \in [t_0-r,+\infty)$.

Consideramos em $PC([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$ a norma local $\|.\|_{loc}$, ou seja, se $z \in PC([t_0-r,+\infty),\mathbb{R}^n)$, então $\|z\|_{loc} = \sup_{s\in[\alpha,\beta]} |z(s)|$, para todo compacto $[\alpha,\beta] \subset [t_0-r,+\infty)$. De modo análogo às desigualdades (4.7) e (4.8), para $s_1, s_2 \in [t_0,+\infty)$ e $x, y \in PC_1$, obtemos

$$\|G(x,s_2) - G(x,s_1)\|_{loc} \leq |h(s_2) - h(s_1)|$$

e

$$\|G(x,s_2) - G(x,s_1) - G(y,s_2) + G(y,s_1)\|_{loc} \leq \|x-y\| |h(s_2) - h(s_1)|,$$

onde

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} [M(s) + L(s)]ds + \max(K_1, K_2) \sum_{k=1}^{+\infty} H_{t_k}(t), \quad \text{para } t \in [t_0, +\infty),$$

é uma função não-decrescente e contínua à esquerda.

Claramente, G pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, onde $\Omega = PC_1 \times [c, d]$ e $[c, d]$ é algum subintervalo compacto de $[t_0, +\infty)$.

Consideremos a EDOG (4.12) e a condição inicial $x(t_0) = \widetilde{x}$, pondo

$$\widetilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \phi(0), & \vartheta \in [t_0, +\infty). \end{cases} \tag{4.45}$$

Fazendo adaptações necessárias, obtemos a correspondência entre as EDFRIs e EDOGs, isto é, o Teorema 4.2.1 e o Teorema 4.2.2, para soluções definidas em intervalos não limitados superiormente.

Observação 4.2.2. Nos próximos capítulos, utilizaremos frequentemente o Teorema 4.2.1 e o Teorema 4.2.2. Por isso, a seguir, descrevemos melhor essa correspondência biunívoca.

Sejam $t \geq t_0$ e $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Consideremos a EDFRI (4.1) com condição inicial $y_t = \phi$. Consideremos, também, a EDOG (4.12) com condição inicial $x(t) = \widetilde{x}$, onde

$$\widetilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \phi(\vartheta - t), & \vartheta \in [t - r, t]; \\ \phi(0), & \vartheta \in [t, +\infty). \end{cases} \tag{4.46}$$

Primeiramente, pelo Teorema 2.3.1, existe uma única solução $y : [t - r, \nu] \to \mathbb{R}^n$, $\nu > t$, de (4.1) que satisfaz $y_t = \phi$. Então, pelo Teorema 4.2.1, encontramos a solução $x : [t, \nu] \to PC([t, \nu], \mathbb{R}^n)$ de (4.12) satisfazendo a condição inicial $x(t) = \widetilde{x}$, onde

$$x(\tau)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & \vartheta \in [t - r, \tau]; \\ y(\tau), & \vartheta \in [\tau, \nu]. \end{cases} \tag{4.47}$$

Além disso, $x(t)(t + \theta) = y(t + \theta)$, para todo $\theta \in [-r, 0]$, ou seja, $(x(t))_t = y_t = \phi$.

Por outro lado, como $I_0 \equiv 0$, temos $\widetilde{x}^+ = \widetilde{x} + G(\widetilde{x}, t^+) - G(\widetilde{x}, t) = \widetilde{x} \in PC_1$. Então existirá uma única solução $x : [t, \nu] \to PC([t, \nu], \mathbb{R}^n)$ de (4.12) tal que $x(t) = \widetilde{x}$. Pelo Teorema 4.2.2, obtemos uma única solução $y : [t - r, \nu] \to \mathbb{R}^n$ de (4.1) que satisfaz $y_t = \phi$, onde

$$y(\vartheta) = \begin{cases} x(t)(\vartheta), \ \vartheta \in [t - r, t]; \\ x(\vartheta)(\vartheta), \ \vartheta \in [t, \nu]. \end{cases} \tag{4.48}$$

Logo, $(x(t))_t = y_t = \phi$. Consequentemente, a aplicação

$$(t, x(t)) \to (t, y_t),$$

para cada $t \geq t_0$, é uma bijeção.

CAPÍTULO

5

Dependência contínua

Neste capítulo, primeiramente, estabelecemos a dependência contínua com respeito aos dados iniciais para às EDOGs, ou seja, com respeito a sequência de problemas de valor inicial de EDOGs. Uma das vantagens de tratarmos as EDFRIs via a teoria das EDOGs é transportar os resultados de dependência contínua com respeito aos dados iniciais das EDOGs para as EDFRIs, daí, obtemos a dependência contínua da sequência de problemas de valor inicial de EDFRIs. Os resultados deste capítulo foram extraídos de [10].

5.1 Dependência contínua de soluçõoes das EDOGs

Nesta seção, consideraremos $\Omega = \mathcal{O} \times [a, b]$, onde $\mathcal{O}$ é um conjunto aberto de X e $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Seja $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não-decrescente e contínua à esquerda.

Apresentaremos resultados sobre a dependência contínua de soluções das EDOGs com respeito aos dados iniciais para uma classe restrita de EDOGs, ou seja, a função F em (3.56) pertencente à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$. Os próximos resultados foram obtidos de [3].

Lema 5.1.1. *Suponhamos que $F_k : \Omega \to X$ pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, para $k = 0, 1, 2, ...$, com $\lim_{k\to+\infty} F_k(x, t) = F_0(x, t)$, para todo $(x, t) \in \Omega$, em X. Se $\psi_k \in PC([\alpha, \beta], X)$, $k = 1, 2, \ldots$, e $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, satisfazendo $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty \to 0$, sempre que $k \to +\infty$, então*

$$\left\| \int_\alpha^\beta DF_k(\psi_k(\tau), t) - \int_\alpha^\beta DF_0(\psi_0(\tau), t) \right\| \to 0, \quad \textit{quando } k \to +\infty. \tag{5.1}$$

Demonstração: Como $\psi_k \in PC([\alpha,\beta],X)$ e $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty \to 0$, sempre que $k \to +\infty$, então $\psi_0 \in G([\alpha,\beta],X)$. Pelo Corolário 3.2.2, as integrais $\displaystyle\int_\alpha^\beta DF_k(\psi_k(\tau),t)$ existem, $k = 0,1,2,....$

Seja $\epsilon > 0$ dado. Como $\psi_0 \in PC([\alpha,\beta],X)$, existe uma função escada finita $y : [\alpha,\beta] \to X$, tal que $\|y - \psi_0\|_\infty < \epsilon$. Além disso, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty < \epsilon$, para todo $k > n_0$. Assim, para $k > n_0$,

$$\begin{aligned}\left\|\int_\alpha^\beta DF_k(\psi_k(\tau),t) - \int_\alpha^\beta DF_0(\psi_0(\tau),t)\right\| &\leq \left\|\int_\alpha^\beta D[F_k(\psi_k(\tau),t) - F_k(\psi_0(\tau),t)]\right\| \\ &+ \left\|\int_\alpha^\beta D[F_k(\psi_0(\tau),t) - F_k(y(\tau),t)]\right\| + \left\|\int_\alpha^\beta D[F_0(\psi_0(\tau),t) - F_0(y(\tau),t)]\right\| \\ &+ \left\|\int_\alpha^\beta D[F_k(y(\tau),t) - F_0(y(\tau),t)]\right\|.\end{aligned} \tag{5.2}$$

Queremos estimar por ϵ a desigualdade acima. Primeiramente, para o primeiro termo do lado direito da desigualdade, consideremos δ o calibre correspondente a ϵ da definição de $\displaystyle\int_\alpha^\beta D[F_k(\psi_k(\tau),t) - F_k(\psi_0(\tau),t)]$ e seja $D := \{(\tau_i,[s_{i-1},s_i]); i = 1,...,p\}$ uma divisão marcada δ-fina de $[\alpha,\beta]$. Logo, para $k > n_0$, temos

$$\begin{aligned}&\left\|\int_\alpha^\beta D[F_k(\psi_k(\tau),t) - F_k(\psi_0(\tau),t)]\right\| \leq \epsilon + \\ &+ \sum_{i=1}^p \|F_k(\psi_k(\tau_i),s_i) - F_k(\psi_0(\tau_i),s_i) - F_k(\psi_k(\tau_i),s_{i-1}) + F_k(\psi_0(\tau_i),s_{i-1})\| \\ &\leq \epsilon + \sum_{i=1}^p \|\psi_k(\tau_i) - \psi_0(\tau_i)\||h(s_i) - h(s_{i-1})| \leq \epsilon + \|\psi_k - \psi_0\|_\infty \sum_{i-1}^p |h(s_i) - h(s_{i-1})| \\ &= \epsilon[1 + (h(\beta) - h(\alpha))].\end{aligned}$$

Usando o argumento acima, para $k > n_0$, obteremos

$$\left\|\int_\alpha^\beta D[F_k(\psi_0(\tau),t) - F_k(y(\tau),t)]\right\| < \epsilon[1 + (h(\beta) - h(\alpha))] \tag{5.3}$$

e

$$\left\|\int_\alpha^\beta D[F_0(\psi_0(\tau),t) - F_0(y(\tau),t)]\right\| < \epsilon[1 + (h(\beta) - h(\alpha))]. \tag{5.4}$$

Assim, estimamos o segundo e terceiro termo do lado direito da desigualdade (5.2). Agora, vamos considerar o último termo do lado direito da desigualdade (5.2). Como $y : [\alpha,\beta] \to X$ é uma função escada finita, existe um número finito de pontos $\alpha = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_q = \beta$ tais que $y(\tau) = c_j$, se $\tau \in (r_{j-1},r_j)$, $j = 1,2,...,q$. Neste caso, a fórmula explícita para $\displaystyle\int_\alpha^\beta F_k(y(\tau),t)$, $k = 0,1,...,$

pode ser dada por

$$\int_\alpha^\beta F_k(y(\tau),t) = \sum_{j=1}^{q} \int_{r_{j-1}}^{r_j} F_k(y(\tau),t) \tag{5.5}$$

e o Lema 3.2.3 garante que, em cada intervalo $[r_{j-1}, r_j]$, $j = 1, ..., q$,

$$\begin{aligned} \int_{r_{j-1}}^{r_j} DF_k(y(\tau),t) &= F_k(c_j, r_j^-) - F_k(c_j, r_j^+) + F_k(y(r_{j-1}), r_{j-1}^+) && (5.6) \\ &- F_k(y(r_{j-1}), r_{j-1}) - F_k(y(r_j), r_j^-) + F_k(y(r_j), r_j). && (5.7) \end{aligned}$$

Como $F_k \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, $\lim_{\rho\to 0^+} F_k(x, t+\rho) = F_k(x, t^+)$ e $\lim_{\rho\to 0^+} F_k(x, t-\rho) = F_k(x, t^-)$, para todo $(x,t) \in \Omega$, sendo uniforme com respeito à $k = 0, 1, ...$ Por hipótese, $\lim_{k\to+\infty} F_k(x,t) = F_0(x,t)$ para todo $(x,t) \in \Omega$, donde

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty} F_k(x,t^+) &= \lim_{k\to+\infty} \lim_{\rho\to 0^+} F_k(x,t+\rho) = \lim_{\rho\to 0^+} \lim_{k\to+\infty} F_k(x,t+\rho) \\ &= \lim_{\rho\to 0^+} F_0(x,t+\rho) = F_0(x,t^+), \end{aligned}$$

desde que $(x,t) \in \Omega$. Analogamente, $\lim_{k\to+\infty} F_k(x,t^-) = F_0(x,t^-)$ para $(x,t) \in \Omega$. Logo, por (3.35) e (3.36), segue que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_\alpha^\beta D[F_k(y(\tau),t) - F_0(y(\tau),t)] = 0. \tag{5.8}$$

Temos, então, o desejado para (5.2).

Finalmente, como $\epsilon > 0$ pode ser escolhido suficientemente pequeno, obtemos o resultado desejado. ■

Corolário 5.1.1. *Suponhamos que $F_k \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, para $k = 0, 1, 2, ...$ com $\lim_{k\to+\infty} F_k(x,t) = F_0(x,t)$, para todo $(x,t) \in \Omega$. Se $\psi_k \in BV([\alpha,\beta], X)$, $k = 1, 2, ...$ e $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, satisfazendo $\|\psi_k - \psi_0\|_{BV} \to 0$ sempre que $k \to +\infty$, então*

$$\left\| \int_\alpha^\beta DF_k(\psi_k(\tau),t) - \int_\alpha^\beta DF_0(\psi_0(\tau),t) \right\| \to 0, \quad \textit{quando } \ k \to +\infty. \tag{5.9}$$

Demonstração: Observemos que $BV([\alpha,\beta], X) \subset PC([\alpha,\beta], X)$ e que, para todo $t \in [\alpha,\beta]$,

$$\begin{aligned} \|\psi_k(t) - \psi_0(t)\| &\leq \|\psi_k(\alpha) - \psi_0(\alpha)\| + \|\psi_k(t) - \psi_0(t) - [\psi_k(\alpha) - \psi_0(\alpha)]\| \\ &\leq \|\psi_k(\alpha) - \psi_0(\alpha)\| + \mathrm{var}_\alpha^\beta(\psi_k - \psi_0) = \|\psi_k - \psi_0\|_{BV}. \end{aligned}$$

Logo, $\|\psi_k - \psi_0\|_\infty \to 0$, quando $k \to +\infty$. O resultado segue do Lema 5.1.1. ■

Teorema 5.1.1. *Sejam $F_k \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, $k = 0, 1, ...$, tais que*

$$\lim_{k\to+\infty} F_k(x,t) = F_0(x,t), \tag{5.10}$$

para todo $(x,t) \in \Omega$*. Suponhamos que* $x_k : [\alpha,\beta] \to X$*, para* $k = 1, 2, ...$*, é a solução da EDOG*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x,t) \tag{5.11}$$

com

$$\lim_{k\to+\infty} x_k(s) = x_0(s), \quad \textit{para } \ s \in [\alpha,\beta], \tag{5.12}$$

e $(x_0(s), s) \in \Omega$*, para* $s \in [\alpha,\beta]$*. Então,* $x_0 : [\alpha,\beta] \to X$ *satisfaz as seguintes condições:*

(i) $\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leq h(s_2) - h(s_1)$*, se* $s_1 \leq s_2$*;*

(ii) $\lim_{k\to+\infty} x_k(s) = x(s)$ *uniformemente em* $[\alpha,\beta]$*;*

(iii) x_0 *é solução da EDOG*

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x,t) \tag{5.13}$$

em $[\alpha,\beta]$.

Demonstração: **(i)** Sejam $\alpha \leq s_1 \leq s_2 \leq \beta$. Então, para $k = 1, ...$, temos

$$\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leq \|x_k(s_1) - x_0(s_1)\| + \|x_k(s_1) - x_k(s_2)\| + \|x_k(s_2) - x_0(s_2)\|.$$

Seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Por (5.12), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para $k \geq n_0$, temos

$$\|x_k(s_1) - x_0(s_1)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad \|x_k(s_2) - x_0(s_2)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Pelo Lema 3.2.1, $\|x_k(s_1)-x_k(s_2)\| \leq h(s_2)-h(s_1)$, para $k = 1, 2, ...$ Consequentemente, $\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| < \epsilon + h(s_2) - h(s_1)$. Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado suficientemente pequeno, obtemos $\|x_0(s_2) - x_0(s_1)\| \leq h(s_2) - h(s_1)$.

Para provarmos **(ii)**, vamos supor primeiramente que h é contínua em $[\alpha,\beta]$. Pelo Teorema de Heine-Borel (veja [31]), h é uniformemente contínua em $[\alpha,\beta]$, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|h(s) - h(t)| < \epsilon$, sempre que $|s - t| < \delta$ em $[\alpha,\beta]$. Como $[\alpha,\beta]$ é compacto, existe um conjunto finito de pontos $r_1, ..., r_l$ tal que $[\alpha,\beta]$ é coberto por um número finito de intervalos $(r_j - \delta, r_j + \delta)$, $j = 1, 2, ..., l$. Pela condição (5.12), existe $k_0 > 0$ tal que, para $k > k_0$, temos

$$\|x_k(r_j) - x_0(r_j)\| < \epsilon, \quad \forall j = 1, ..., l.$$

Para todo $s \in [\alpha,\beta]$, existe $j \in \{1, 2, ..., l\}$ tal que $s \in (r_j - \delta, r_j + \delta)$. Logo, para $k \geq k_0$,

$$\begin{aligned}\|x_k(s) - x_0(s)\| &\leq \|x_k(s) - x_0(r_j)\| + \|x_k(r_j) - x_0(r_j)\| + \|x_0(r_j) - x_0(s)\| \\ &\leq |h(s) - h(r_j)| + \epsilon + |h(s) - h(r_j)| < 3\epsilon.\end{aligned}$$

Como isto pode ser feito para todo $s \in [\alpha,\beta]$, obtemos **(ii)** neste caso. Agora, sejam $\alpha = t_0 < t_1 < ... < t_m < \beta$ pontos de descontinuidades de h em $[\alpha,\beta]$. Seja $\epsilon > 0$ dado. Pela condição (5.12), existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $j \in \{1, ..., m\}$,

$$\|x_k(t_j) - x_0(t_j)\| < \epsilon, \quad \text{sempre que } \ k > n_0.$$

Para cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, ..., m$, de $[\alpha, \beta]$, definimos

$$h^*(t) = \begin{cases} h(t), & \text{se } t \in (t_{i-1}, t_i]; \\ h(t_{i-1}^+), & \text{se } t = t_{i-1}. \end{cases} \tag{5.14}$$

As propriedades de h implicam que a função $h^* : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ é não-decrescente e contínua. Para cada $k = 0, 1, ...$, consideremos a sequência de funções

$$x_k^*(t) = \begin{cases} x_k(t), & \text{se } t \in (t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, ..., m; \\ x_k(t_{i-1}^+), & \text{se } t = t_{i-1}. \end{cases} \tag{5.15}$$

Então, $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^*(s) = x_0^*(s)$, se $s \in (t_{i-1}, t_i]$ e $\lim\limits_{k\to\infty} x_k^*(t_{i-1}) = x_0^*(t_{i-1})$. Ainda

$$\|x_k^*(s_2) - x_k^*(s_1)\| \leq |h^*(s_2) - h^*(s_1)|, \quad \text{para todo } s_1, s_2 \in [t_{i-1}, t_i].$$

Usando a parte anterior, temos que $x_k^* \to x_0^*$ uniformemente em $[t_{i-1}, t_i]$, para cada $i = 1, 2, ..., m$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $k_* \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|x_k(s) - x_0(s)\| = \|x_k^*(s) - x_0^*(s)\| < \epsilon,$$

sempre que $s \in (t_{i-1}, t_i], i = 1, 2, ..., m$ e $\|x_k(t_{i-1}) - x_0(t_{i-1})\| < \epsilon$, $k > k_*$. Logo, $x_k \to x_0$ uniformemente em $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, 2, ..., m$. Como isto pode ser feito para $i = 1, 2, ..., m$, obtemos (**ii**) e sua forma geral como afirmamos no enunciado do teorema.

Agora, vamos provar **(iii)**. Pela definição de uma solução da EDOG em (5.13), temos que

$$x_k(s_2) - x_k(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF_k(x_k(\tau), t),$$

para todo $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Pelo Teorema 5.1.1, temos

$$\left\| \int_\alpha^\beta DF_k(\psi_k(\tau), t) - \int_\alpha^\beta DF_0(\psi_0(\tau), t) \right\| \to 0, \quad \text{quando } k \to +\infty, \tag{5.16}$$

para todo $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Logo,

$$\begin{aligned} \|x_0(s_2) - x_0(s_1) - \int_{s_1}^{s_2} DF_k(x_k(\tau), t)\| \quad &\leq \quad \|x_k(s_2) - x_0(s_2)\| + \|x_k(s_1) - x_0(s_1)\| \\ &+ \quad \left\| \int_{s_1}^{s_2} DF_k(x_k(\tau), t) - \int_{s_1}^{s_2} DF_0(x_0(\tau), t) \right\|. \end{aligned}$$

Então, quando $k \to \infty$, obtemos

$$x_0(s_2) - x_0(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} DF_0(x_0(\tau), t),$$

para todo $s_1, s_2 \in [\alpha, \beta]$. Portanto x é uma solução da EDOG $\dfrac{dx}{d\tau} = DF_0(x, t)$ no intervalo $[\alpha, \beta]$. ■

O exemplo seguinte, comprova a eficaz do Teorema 5.1.1.

Exemplo 5.1.1. Consideremos as funções $h_k : [-1,1] \to \mathbb{R}$, com $k = 1, 2, ...$, pondo

$$h_k(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [-1,0], \\ t + \dfrac{1}{k}, & \text{se } t \in (0,1], \end{cases} \tag{5.17}$$

e $h_0 : [-1,1] \to \mathbb{R}$ por $h_0(t) = t$, para $t \in [-1,1]$. Definamos $F_k : (-1,1) \times [-1,1] \to \mathbb{R}$, $k = 0, 1, 2, ...$, pondo $F_k(x,t) = x h_k(t)$. Temos que

$$|F_k(x,t_2) - F_k(x,t_1)| \leq h_k(t_2) - h_k(t_1)$$

e

$$|F_k(x,t_2) - F_k(x,t_1) - F_k(y,t_2) + F_k(y,t_1)| \leq |x-y|[h_k(t_2) - h_k(t_1)],$$

para $k = 0, 1, 2, ...$ e quaisquer $x, y \in (-1,1)$ e $t_1, t_2 \in [-1,1]$. Seja

$$h(t) = \begin{cases} t, & \text{se } t \in [-1,0], \\ t + 1, & \text{se } t \in (0,1]. \end{cases} \tag{5.18}$$

É fácil ver que $F_k \in \mathscr{F}(\Omega, h)$, $k = 0, 1, ...$, onde $\Omega = (-1,1) \times [-1,1]$ e

$$\lim_{k \to +\infty} F_k(x,t) = x \lim_{k \to +\infty} h_k(t) = x h_0(t) = F_0(x,t).$$

Consideremos a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_k(x(\tau),t) = D[x(\tau)h_k(t)], \quad k = 1, 2, ..., \tag{5.19}$$

com a condição inicial $x(-1) = \widetilde{x}$ e $|\widetilde{x}| < \dfrac{1}{2\exp(2)}$. Logo, a função $x_k : [-1,1] \to (-1,1)$, dada por

$$x_k(t) = \begin{cases} \exp(t+1)\widetilde{x}, & \text{se } t \in [-1,0], \\ \exp(t+1)(1 + \dfrac{1}{k})\widetilde{x}, & \text{se } t \in (0,1] \end{cases} \tag{5.20}$$

é solução de (5.19) com $x_k(-1) = x_0$ e

$$\lim_{k \to +\infty} x_k(t) = \exp(t+1)\widetilde{x} \quad t \in [-1,1].$$

Pelo Teorema 5.1.1, a função $x_0(t) = \exp(t+1)\widetilde{x}$ é solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DF_0(x(\tau),t) = D[x(\tau)h_k(t)] = D[xt], \quad \text{com } x(-1) = \widetilde{x}. \tag{5.21}$$

5.2 Dependência contínua de soluções das EDFRIs

Agora, iremos nos dedicar ao estudo da dependência contínua de soluções do problema impulsivo com respeito aos dados iniciais.

Consideremos a sequência de problemas de valor inicial de EDFRI

$$\begin{cases} y'(t) = f_p(t, y_t), \quad t \geq t_0, \;\; t \neq t_k; \\ \Delta y(t_k) = I_k^p(y(t_k)), \quad k = 0, 1, ..., m; \\ y_{t_0} = \phi_p, \end{cases} \tag{5.22}$$

onde $p = 0, 1, 2, ...$ Suponhamos que $\phi_p \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e f_p, I_k^p satisfazem as condições do tipo Carathéodory e Lipschitz, (**A***), (**B***), (**C***), (**A'**) e (**B'**), para as mesmas funções M e L e as mesmas constantes K_1 e K_2, para todo $p = 0, 1, 2, ...$

Sejam $t_0 \in \mathbb{R}$ e $\sigma, r > 0$. Definimos $F_p : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to C([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n]$, pondo

$$F_p(y, t)(\vartheta) = \begin{cases} 0, \quad \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{\vartheta} f_p(s, y_s) ds, \quad \vartheta \in [t_0, t]; \\ \displaystyle\int_{t_0}^{t} f_p(s, y_s) ds, \quad \vartheta \in [t, t_0 + \sigma], \end{cases} \tag{5.23}$$

e $J_p : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n]$, pondo

$$J_p(y, t)(\vartheta) = \sum_{k=1}^{m} H_{t_k}(t) H_{t_k}(\vartheta) I_k^p(y(t_k)). \tag{5.24}$$

Seja $G_p : PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma] \to PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n]$, dada por

$$G_p(y, t) = F_p(y, t) + J_p(y, t), \quad \text{para } y \in PC_1, t \in [t_0, t_0 + \sigma]. \tag{5.25}$$

De (4.10) e (4.11), temos, para cada $p = 0, 1, 2, ...$, que G_p pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, onde $\Omega = PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$ e

$$h(t) = \int_{t_0}^{t} [M(s) + L(s)] ds + \max(K_1, K_2) \sum_{k=0}^{m} H_{t_k}(t).$$

De acordo com o Teorema 4.2.1 e o Teorema 4.2.2, para cada $p = 0, 1, 2, ...$, existe uma correspondência biunívoca entre a solução do problema (5.22) e a solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = G_p(x, t), \tag{5.26}$$

com a condição inicial

$$\widetilde{x}(\vartheta) = \begin{cases} \phi_p(\vartheta - t_0), & \vartheta \in [t_0 - r, t_0]; \\ \phi_p(t_0), & \vartheta \in [t_0, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{5.27}$$

O próximo teorema garante a dependência contínua para as EDFRIs. Usaremos o Teorema 5.1.1 juntamente com o Teorema 4.2.1 e o Teorema 4.2.2 para demonstrá-lo.

Teorema 5.2.1. *Consideremos f_p, I_k^p e ϕ_p, com $p = 0, 1, 2, ...$ e $k = 1, 2, ..., m$, dadas anteriormente satisfazendo*

$$\lim_{p\to+\infty} \sup_{\vartheta\in[t_0,t_0+\sigma]} \left| \int_{t_0}^{\vartheta} [f_p(s, x_s) - f_0(s, x_s)]ds \right| = 0, \tag{5.28}$$

para todo $x \in PC_1$, e

$$\lim_{p\to+\infty} I_k^p(x) = I_k^0(x), \tag{5.29}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ..., m$. Suponhamos que $y_p : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$, com $p = 1, 2, ...$, seja uma solução do problema (5.22) *tal que*

$$\lim_{p\to+\infty} y_p(s) = y(s), \quad \textit{uniformemente em } [t_0 - r, t_0 + \sigma]. \tag{5.30}$$

Então, $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ será uma solução do problema

$$\begin{cases} y'(t) = f_0(t, y_t), & t \geq t_0, \;\; t \neq t_k; \\ \Delta y(t_k) = I_k^0(y(t_k)), & k = 0, 1, ..., m; \\ y_{t_0} = \phi_0. \end{cases} \tag{5.31}$$

Demonstração: Como $y_p : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$, com $p = 1, 2, ...$, é uma solução do problema (5.22), pelo Teorema 4.2.1, temos

$$x_p(t)(\vartheta) = \begin{cases} y_p(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t]; \\ y_p(t), & \vartheta \in [t, t_0 + \sigma] \end{cases} \tag{5.32}$$

é uma solução da EDOG (5.26) com a condição inicial (5.27) em $[t_0, t_0 + \sigma]$. Seja $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to PC_1$, dada por

$$x(t)(\vartheta) = \begin{cases} y(\vartheta), & \vartheta \in [t_0 - r, t]; \\ y(t), & \vartheta \in [t, t_0 + \sigma]. \end{cases} \tag{5.33}$$

De (5.30), temos

$$\lim_{p\to+\infty} x_p(s) = x(s) \quad s \in [t_0, t_0 + \sigma]$$

em $PC([t_0 - r, t_0 + \sigma], \mathbb{R}^n)$. Além disso, por (5.25), (5.28) e (5.29), temos

$$\lim_{p\to+\infty} G_p(y, t) = G_0(y, t),$$

para $(y, t) \in PC_1 \times [t_0, t_0 + \sigma]$. Pelo Teorema 5.1.1, $x : [t_0, t_0 + \sigma] \to PC_1$ é uma solução da EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DG_0(x, t).$$

Portanto, pelo Teorema 4.2.2, a função $y : [t_0 - r, t_0 + \sigma] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução do problema (5.31).■

Em [32], os autores abordam apenas a dependência contínua com respeito à funções inicial nas EDFRIs, assumindo que os operadores impulsivos dependem dos retardos. Apesar de não assumirmos que os operadores impulsivos dependam do retardo, como consequência imediata do resultado de dependência contínua com respeito aos dados iniciais (Teorema 5.2.1), obtemos os resultados de dependência contínua com respeito às funções iniciais.

Consideraremos a EDFRI

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0; \\ \Delta y\,(t) = I_k\,(y\,(t))\,, & t = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots; \end{cases} \tag{5.34}$$

onde $f : [t_0, t_0 + \sigma] \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do tipo Carathéodory e $I : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do tipo Lipschitz.

A seguir, formalizaremos a definição de dependência contínua de soluções de (5.34) com respeito à função inicial.

Definição 5.2.1. *As soluções de* (5.34) *são continuamente dependentes com respeito à função inicial se para toda solução $x = x(t_0, \phi)$ definida sobre o intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$, onde $(t_0, \phi) \in [t_0, t_0 + \sigma] \times PC([-r, 0], D)$, $\alpha > 0$, e $[t_0, t_0 + \alpha] \subset [t_0, t_0 + \sigma]$, e para todo $\varepsilon > 0$, existe algum $\delta > 0$ tal que para $\phi^* \in PC([-r, 0], D)$ com $\|\phi - \phi^*\| \leq \delta$, se $y = y(t_0, \phi^*)$ é uma solução de* (5.34)*, então y está definida ou pode ser continuada a $[t_0 - r, t_0 + \alpha]$ e $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$, para todo $t \in [t_0 - r, t_0 + \alpha]$.*

Para soluções definidas em intervalos semi-abertos à direita da forma $[t_0 - r, t_0 + \alpha)$, a Definição 5.2.1 continua válida, basta restringir a solução x ao intervalo $[t_0 - r, t_0 + \alpha_1]$, onde $0 < \alpha_1 < \alpha$.

Observação 5.2.1. Esta é, essencialmente, a definição dada por Hale e Lunel em [20] em seus estudos sobre dependência contínua de EDFRs.

Corolário 5.2.1. *Consideremos f e I_k, $k = 1, 2, ..., m$, satisfazendo as condições do tipo Carathéodory e Lipschitz,* (***A****)*,* (***B****)*,* (***C****)*,* (***A'***) *e* (***B'***)*. Então, a solução de* (5.34) *depende continuamente da função inicial.*

Demonstração: Segue imediatamente do Teorema 5.2.1. ■

CAPÍTULO

6

Estabilidade

Neste capítulo, apresentamos alguns critérios para a estabilidade (no sentido de Lyapunov) de soluções para as EDOGs e EDFRIs.

Na primeira seção, estudamos a estabilidade variacional da solução trivial para a classe de EDOGs que estamos trabalhando. Na segunda seção, de posse dos resultados de correspondência entre as soluções transferimos os resultados de estabilidade variacional das EDOG para estabilidade usual no estudo das EDFRIs. As principais referências para este capítulo são [5] e [11].

6.1 Estabilidade Variacional em EDOGs

Nesta seção, seja $\Omega = B_c \times [t_0, +\infty)$, onde $B_c = \{y \in X : \|y\| < c\}$, com $c > 0$ e $t_0 \geq 0$. Consideraremos a EDOG

$$\frac{dx}{d\tau} = DG(x,t), \tag{6.1}$$

onde G pertence à classe $\mathscr{F}(\Omega, h)$, com $h : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ não-decrescente e contínua à esquerda. Vamos supor que $G(0,t) - G(0,s) = 0$, para todo $t, s \in [t_0, +\infty)$. Então, para todo $[u, v] \subset [t_0, +\infty)$, temos

$$\int_u^v DG(0,t) = G(0,u) - G(0,v) = 0$$

e, consequentemente, $x \equiv 0$ é solução de (6.1) em $[t_0, +\infty)$.

O conceito de estabilidade variacional é motivado pelo fato de que toda solução de (6.1) será de variação limitada. É natural, então, medirmos a distância entre duas soluções de (6.1) utilizando a norma da variação, como veremos a seguir. Esse conceito foi introduzido em 1984 por Š. Schwabik em [36].

Definição 6.1.1. *A solução trivial $x \equiv 0$ de* (6.1) *será dita*

(i) variacionalmente estável, *se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que se $\overline{x} : [\gamma, v] \to B_c$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ tal que*

$$\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta$$

e

$$Var_\gamma^v \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t) \right) < \delta,$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\gamma, v];$$

(ii) variacionalmente atratora, *se existir $\delta_0 > 0$ e para todo $\varepsilon > 0$, existir $T = T(\varepsilon) \geq 0$ e $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tal que se $\overline{x} : [\gamma, v] \to B_c$, $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ tal que*

$$\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta_0$$

e

$$var_\gamma^v \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t) \right) < \rho,$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T, +\infty), \ \gamma \geq t_0;$$

(iii) variacionalmente assintoticamente estável, *se for variacionalmente estável e variacionalmente atratora.*

Para obtermos os resultados do tipo Lyapunov para a equação (6.1), precisamos de alguns resultados auxiliares.

Lema 6.1.1. *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ compacto e $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas à esquerda em $(a, b]$. Se para todo $\sigma \in [a, b]$, existir um $\delta(\sigma) > 0$ tal que, para todo $\eta \in (0, \delta(\sigma))$, temos*

$$g(\sigma + \eta) - g(\sigma) \leq f(\sigma + \eta) - f(\sigma). \tag{6.2}$$

Então,

$$g(s) - g(a) \leq f(s) - f(a), \quad para \ \ s \in [a, b].$$

Demonstração: Consideremos o conjunto

$$\mathcal{M} = \{s \in [a, b]; g(\sigma) - g(a) \leq f(\sigma) - f(a), \ \ \sigma \in [a, s]\}.$$

Por hipótese, temos $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Seja $S = \sup \mathcal{M}$, queremos mostrar que $S = b$. Suponhamos, por absurdo que $S \neq b$. Então, pela definição de supremo existe uma sequência $x_k \to S^+$ em $\mathbb{R}$, teremos

$$g(x_k) - g(a) \leq f(x_k) - f(a).$$

De (6.2), para todo $k \in \mathbb{N}$, temos

$$g(S) - g(a) = g(S) - g(x_k) + g(x_k) - g(a) \leq f(S) - f(x_k) + f(x_k) - f(a) = f(S) - f(a). \tag{6.3}$$

De (**??**) e (6.3), obtemos

$$g(S+\eta) - g(a) = g(S+\eta) - g(S) + g(S) - g(a) \leq f(S+\eta) - f(S) + f(S) - f(a) = f(S+\eta) - f(a).$$

Logo, $S + \eta \in M$, o que contradiz a definição de supremo. ■

Lema 6.1.2. *Seja* $V : [t_0, +\infty) \times X \to \mathbb{R}$ *tal que* $V(., x) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínuo à esquerda em* $(t_0, +\infty)$*, para cada* $x \in X$*, e satisfaz*

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, \quad \textit{para } z, y \in X, \ t \in [t_0, +\infty), \tag{6.4}$$

onde K *é uma constante positiva. Além disso, suponhamos que exista* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *tal que, para* $x : [a, b] \to X$ *solução de* (6.1)*, tenhamos*

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq \Phi(x(t)), \quad t \in [a, b]. \tag{6.5}$$

Se $\overline{x} : [\gamma, v] \to X$*,* $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$*, for contínua à esquerda em* $(\gamma, v]$ *e de variação limitada em* $[\gamma, v]$*, então*

$$V(v, \overline{x}(v)) - V(\gamma, \overline{x}(\gamma)) \leq KVar_\gamma^v\left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t)\right) + M(v - \gamma), \tag{6.6}$$

onde $M = \sup_{t \in [\gamma, v]} \Phi(\overline{x}(t))$.

Demonstração: Seja $\overline{x} : [\gamma, v] \to X$ uma função contínua à esquerda em $(\gamma, v]$ e de variação limitada em $[\gamma, v]$. Pelo Corolário 3.2.2, $\int_\gamma^v DG(\overline{x}(\tau), t)$ existe.

Pelo Teorema 3.2.2 a EDOG em (6.1) admite uma única solução local $x : [\sigma, \sigma+\eta_1(\sigma)] \to X$, com $\sigma \in [\gamma, v]$ e $\eta_1(\sigma) > 0$, satisfazendo a condição inicial $x(\sigma) = \overline{x}(\sigma)$. Seja $\eta_2 > 0$ suficientemente pequeno tal que $\eta_2 \leq \eta_1(\sigma)$ e $\sigma + \eta_2 \leq v$. Então existe $\int_\sigma^{\sigma+\eta_2} D[G(\overline{x}(\tau), t) - G(x(\tau), t)]$. Pela definição desta integral, dado $\epsilon > 0$, existe um calibre δ de $[\sigma, \sigma + \eta_2]$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\eta_2 < \delta(\sigma)$. Por (6.5), tomemos $0 < \eta < \eta_2$, tal que

$$V(\sigma + \eta, x(\sigma + \eta)) - V(\sigma, x(\sigma)) \leq \eta\Phi(x(\sigma)). \tag{6.7}$$

Além disso,

$$\left\|G(\overline{x}(\sigma), \sigma + \eta) - G(\overline{x}(\sigma), \sigma) - \int_\sigma^{\sigma+\eta} DG(\overline{x}(\tau), t)\right\| < \frac{\eta\epsilon}{2K} \tag{6.8}$$

e

$$\left\|G(x(\sigma), \sigma + \eta) - G(x(\sigma), \sigma) - \int_\sigma^{\sigma+\eta} DG(x(\tau), t)\right\| < \frac{\eta\epsilon}{2K}. \tag{6.9}$$

Como $\overline{x}(\sigma) = x(\sigma)$, temos

$$\|G(\overline{x}(\sigma),\sigma+\eta)-G(\overline{x}(\sigma),\sigma)-G(x(\sigma),\sigma+\eta)+G(\overline{x}(\sigma),\sigma)\| \leq \|\overline{x}(\sigma)-x(\sigma)\||h(\sigma+\eta)-h(\sigma)| = 0.$$

Logo, de (6.8) e (6.9),

$$\begin{aligned} \left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[G(\overline{x}(\tau),t) - G(x(\tau),t)] \right\| &\leq \left\| G(\overline{x}(\sigma),\sigma+\eta) - G(\overline{x}(\sigma),\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\overline{x}(\tau),t) \right\| \\ + \quad \left\| G(x(\sigma),\sigma+\eta) - G(x(\sigma),\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau),t) \right\| &< \frac{\eta\epsilon}{K}. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Além disso, de (6.4), obtemos

$$\begin{aligned} V(\sigma+\eta,\overline{x}(\sigma+\eta)) - V(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)) &\leq K\|\overline{x}(\sigma+\eta) - x(\sigma+\eta)\| \qquad (6.11) \\ &= K\left\| \overline{x}(\sigma+\eta) - \overline{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau),t) \right\|. \end{aligned}$$

Então, por (6.7), (6.10) e (6.11), segue que

$$\begin{aligned} & V(\sigma+\eta,\overline{x}(\sigma+\eta)) - V(\sigma,\overline{x}(\sigma)) = \\ = \; & V(\sigma+\eta,\overline{x}(\sigma+\eta)) - V(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)) + V(\sigma+\eta,x(\sigma+\eta)) - V(\sigma,\overline{x}(\sigma)) \\ \leq \; & K\left\| \overline{x}(\sigma+\eta) - \overline{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(x(\tau),t) \right\| + \eta\Phi(x(\sigma)) \\ \leq \; & K\left\| \overline{x}(\sigma+\eta) - \overline{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\overline{x}(\tau),t) \right\| + K\left\| \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} D[G(\overline{x}(\tau),t) - G(x(\tau),t)] \right\| + \eta\Phi(x(\sigma)) \\ \leq \; & K\left\| \overline{x}(\sigma+\eta) - \overline{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\overline{x}(\tau),t) \right\| + \eta\epsilon + \eta M. \end{aligned}$$

Definimos, para cada $s \in [\gamma, v]$,

$$P(s) = \overline{x}(s) - \int_{\gamma}^{s} DG(\overline{x}(\tau),t).$$

Então, P é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$, pois $\overline{x}$ é de variação limitada. Assim,

$$\begin{aligned} \left\| \overline{x}(\sigma+\eta) - \overline{x}(\sigma) - \int_{\sigma}^{\sigma+\eta} DG(\overline{x}(\tau),t) \right\| &= \|P(\sigma+\eta) + P(\sigma)\| \leq Var_{\sigma}^{\sigma+\eta} P \\ &= Var_{\gamma}^{\sigma+\eta} P + Var_{\gamma}^{\sigma} P. \end{aligned}$$

Obtendo, para todo $0 < \eta < \eta_2$,

$$V(\sigma+\eta,\overline{x}(\sigma+\eta)) - V(\sigma,\overline{x}(\sigma)) \leq K[Var_{\gamma}^{\sigma+\eta} P + Var_{\gamma}^{\sigma} P] + \eta\epsilon + \eta M = f(\sigma+\eta) - f(\sigma),$$

onde $f(t) = K \ Var_\gamma^t P + \epsilon t + Mt$. É fácil ver que f é uma função de variação limitada em $[\gamma, v]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$. Portanto, pelo Lema **??**, obtemos

$$V(v, \overline{x}(v) - V(\gamma, \overline{x}(\gamma)) \leq K \ Var_\gamma^v P + \epsilon(v - \gamma) + M(v - \gamma).$$

Como $\epsilon > 0$ pode ser tomado arbitrariamente pequeno, obtemos (6.6). ■

Seja $\overline{B_\rho} = \{y \in X : \|y\| \leq \rho\}$, $\rho > 0$. Com certas condições sobre o funcional V, obteremos resultados sobre a estabilidade variacional da solução trivial da EDOG em (6.1).

Teorema 6.1.1. *Seja* $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \to \mathbb{R}$ *satisfazendo as seguintes condições:*

(i) $V(t, 0) = 0$, $t \in [t_0, +\infty)$;

(ii) $V(., x) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínuo à esquerda em* $(0, +\infty)$, *para todo* $x \in \overline{B_\rho}$;

(iii) existe uma constante $K > 0$ *tal que*

$$|V(t, z) - V(t, y)| \leq K\|z - y\|, \quad t \in [t_0, +\infty), \ z, y \in \overline{B_\rho};$$

(iv) V é definido positivo, isto é, existe uma função crescente $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *tal que* $b(0) = 0$ *e*

$$V(t, x) \geq b(\|x\|), \quad \textit{para} \ \ (t, x) \in [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho};$$

(v) para toda solução $x : [\gamma, v] \to B_\rho$ *de* (6.1), *com* $t_0 \leq \gamma < v < +\infty$, *temos*

$$D^+V(t, x(t)) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t + \eta, x(t + \eta)) - V(t, x(t))}{\eta} \leq 0,$$

isto é, a derivada superior de Dini à esquerda de V *é não positiva ao longo de toda solução* $x(t)$ *de* (6.1).

Então a solução trivial $x \equiv 0$ *de* (6.1) *é variacionalmente estável.*

Demonstração: Seja $\overline{x} : [\gamma, v] \to \overline{B_\rho}$, uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $[\gamma, v] \subset [t_0, +\infty)$. Pelas condições (ii) e (iii) e pelo Lema 6.1.2, temos

$$V(s, \overline{x}(s)) - V(\gamma, \overline{x}(\gamma)) \leq KVar_\gamma^s \left(\overline{x}(\alpha) - \int_\gamma^\alpha DG(\overline{x}(\tau), t)\right), \quad \alpha \in [\gamma, v]. \tag{6.12}$$

Além disso, por (i) e (ii), temos $V(t, y(t)) \leq |V(t, y)| \leq K\|y\|$, para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e $y \in \overline{B_\rho}$.

De (iv), existe uma função monótona crescente $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $b(0) = 0$ e $V(t, y) \geq b(\|y\|)$, para todo $t \in [t_0, +\infty)$ e $y \in \overline{B_\rho}$. Dado $\epsilon > 0$, temos que $b(\epsilon) > 0$. Seja $\delta(\epsilon) > 0$ tal que $2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon)$. Suponhamos que

$$\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta(\epsilon)$$

e

$$Var_\gamma^t \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t)\right) < \delta(\epsilon), \quad t \in [\gamma, v],$$

então, a desigualdade (6.12), implica em

$$V(t,\overline{x}(t)) \leq 2K\delta(\epsilon) < b(\epsilon), \quad t \in [\gamma, v]. \tag{6.13}$$

Por outro lado, se existisse $u \in [\gamma, v]$, tal que $\|\overline{x}(u)\| \geq \epsilon$, então

$$V(u,\overline{x}(u)) \geq b(\|\overline{x}(u)\| > b(\epsilon).$$

contradizendo (6.13). Portanto, $\|\overline{x}(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v]$, donde segue o resultado. ■

Teorema 6.1.2. *Seja $V : [t_0, +\infty) \times \overline{B_\rho} \to \mathbb{R}$, onde $\overline{B_\rho} = \{y \in X : \|y\| \leq \rho\}$, $0 < \rho < c$, satisfaz as condições (i) e (iii) de Teorema 6.1.1. Além disso, suponhamos que existe uma função contínua $\Phi : X \to \mathbb{R}$ satisfazendo $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$, tal que para toda solução $x : [\gamma, v] \subset [t_0, v] \to B_\rho$ de* (6.1)*, temos*

$$D^+V(t,x(t)) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t+\eta, x(t+\eta)) - V(t,x(t))}{\eta} \leq -\Phi(x(t)),\ t \in [\gamma, v). \tag{6.14}$$

Então a solução trivial $x \equiv 0$ de (6.1) *é variacionalmente assintoticamente estável.*

Demonstração: Como as hipóteses do Teorema 6.1.1 são satisfeitas, a solução trivial $x \equiv 0$ de (6.1) é variacionalmente estável. Sendo assim, basta provarmos que a solução trivial $x \equiv 0$ de (6.1) é variacionalmente atratora. Da definição de estabilidade variacional, sabemos que:

(I) existe $\delta_0 \in (0, \rho)$ tal que se $\overline{x} : [\gamma, v] \to B_\rho$ for uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, com $\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta_0$ e

$$Var_\gamma^v \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t)\right) < \delta_0,$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \rho, \quad \text{para } t \in [\gamma, v];$$

(II) para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, $\delta < \epsilon$, tal que se $\overline{x} : [\overline{\gamma}, \overline{v}] \to B_\rho$ for uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\overline{\gamma}, \overline{v}]$, $\|\overline{x}(\overline{\gamma})\| < \delta$ e

$$Var_{\overline{\gamma}}^{\overline{v}} \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t)\right) < \delta,$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \epsilon, \quad \text{para } t \in [\overline{\gamma}, \overline{v}].$$

Sejam $\lambda(\epsilon) = \min\{\delta, \delta_0\} < \epsilon$, $N = \sup\{-\Phi(y) : \lambda(\epsilon) \leq \|y\| \leq \epsilon\} < 0$ e

$$T(\epsilon) := \min\left\{v - \gamma, -K\frac{\delta_0 + \lambda(\epsilon)}{N}\right\}.$$

Suponhamos que $\overline{x} : [\gamma, v] \to B_\rho$ seja uma função de variação limitada e contínua à esquerda em $(\gamma, v]$, tal que $\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta_0$ e

$$Var_\gamma^v \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t) \right) < \lambda(\epsilon) \leq \delta.$$

Queremos provar que

$$\|\overline{x}(t)\| < \epsilon, \quad \text{para todo } \; t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T(\epsilon), +\infty).$$

Afirmamos que existe $t^* \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$ tal que $\|x(t^*)\| < \lambda(\epsilon) < \delta$. Suponhamos, por absurdo, que $\|x(s)\| \geq \lambda(\epsilon)$, para todo $s \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$. Pelo Lema 6.1.2, temos

$$\begin{aligned} V(\gamma + T(\epsilon), \overline{x}(\gamma + T(\epsilon))) &\leq V(\gamma, \overline{x}(\gamma)) + KVar_\gamma^{\gamma+T(\epsilon)} \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t) \right) + NT \\ &< K\|\overline{x}(\gamma)\| + K\lambda(\epsilon) + N \left(-K \frac{\delta_0 + \lambda(\epsilon)}{N} \right) \\ &= K\|\overline{x}(\gamma)\| - K\delta_0 < 0, \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de V ser positivo definido, ou seja, existe uma função crescente $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que

$$V(\gamma + T(\epsilon), \overline{x}(\gamma + T(\epsilon))) \geq b(\|\overline{x}(\gamma + T(\epsilon))\| \geq b(\lambda) > 0.$$

Consequentemente, $\|\overline{x}(t)\| < \epsilon$ para todo $t \in [t^*, v]$, já que **(II)** vale para $\overline{\gamma} = t^*$ e $\overline{v} = v$. Como $t^* \in [\gamma, \gamma + T(\epsilon)]$, segue que $\|\overline{x}(t)\| < \epsilon$, para todo $t \in [\gamma, v] \cap [\gamma + T(\epsilon), +\infty)$, a prova está finalizada. ■

6.2 Estabilidade de EDFRIs

Consideremos a EDFRI

$$\begin{cases} \dot{y}\,(t) = f(t, y_t), & t \neq t_k, \quad t \geq t_0, \\ \Delta y\,(t) = I_k\,(y\,(t))\,, & t = t_k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \\ y_{t_0} = \phi, \end{cases} \tag{6.15}$$

onde $t_0 \geq 0$ e a função inicial $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ são dados. Assumimos, também, que $f : [t_0, t_0 + \sigma] \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições do tipo Carathéodory (**A**), (**B**) e (**C**) e os operadores impulsivos $I_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, ...$, satisfazem as condições do tipo Lipschitz (**A'**), (**B'**) presentes no primeiro capítulo. Além disso, vamos supor que

$$f(t, 0) = 0, \;\; \text{para todo } \; t \in [t_0, +\infty) e \;\text{ e }\; I_k(0) = 0, \; k = 1, 2, \ldots.$$

Então $y \equiv 0$ é uma solução trivial da EDFRI (6.15) em qualquer intervalo contido em $[t_0, +\infty)$. Também consideraremos o conjunto $E_c = \{\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) : \; \|\psi\| < c\}$, com $c > 0$.

Através da correspondência entre as EDFRIs e as EDOGs (Teorema 4.2.1 e Teorema 4.2.2) estabelecemos resultados sobre estabilidade da solução trivail da EDFRI (6.15) a partir dos resultados de estabilidade da solução trivial da EDOG (6.1).

Definição 6.2.1. *A solução trivial $y \equiv 0$ de* (6.15) *será dita*

(i) estável*, se para quaisquer $t_0 \geq 0$, $\epsilon > 0$, existir $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\overline{y} : [t_0 - r, v] \to \mathbb{R}^n$ for uma solução de* (6.15) *tal que $\overline{y}_{t_0} = \phi$ e*

$$\|\phi\| < \delta,$$

então

$$\|\overline{y}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \quad t \in [t_0, v];$$

(ii) uniformemente estável*, se o número δ no item (i) for independente de t_0;*

(iii) uniformemente assintoticamente estável*, se existir $\delta_0 > 0$ e, para todo $\epsilon > 0$, existir $T = T(\epsilon) \geq 0$ tal que se $\phi \in E_c$ e $\overline{y} : [t_0 - r, v] \to \mathbb{R}^n$ for solução de* (6.15) *em $[t_0, v]$ satisfazendo a condição inicial $\overline{y}_{t_0} = \phi$ e*

$$\|\phi\| < \delta_0,$$

então

$$\|\overline{y}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \quad t \in [t_0, v] \cap [t_0 + T, +\infty).$$

Aplicaremos os Teoremas 4.2.1, 6.1.1 e o 6.1.2 a fim de obter resultados sobre estabilidade para a solução trivial de (6.15). Através de um funcional U para a EDFRI (6.15) construíremos um outro funcional V para a EDOG em (6.1). Esta construção mantém as propriedadades fundamentais do funcional U e nos auxilia na obtenção dos critérios de estabilidade.

Sejam $t \geq t_0$ e $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$. Consideremos $y(t, \psi)$ a solucão da EDFRI (6.15) com a condição inicial $y_t = \psi$ e $x_\phi(t)$ solução da EDOG correspondente dada por (4.12) com a condição inicial

$$\widetilde{x}(\tau) = \begin{cases} \psi(\tau - t), & t - r \leq \tau \leq t, \\ \psi(0), & \tau \geq t, \end{cases} \tag{6.16}$$

Da Observação 4.2.2, a aplicação biunívoca

$$(t, x_\phi(t)) \to (t, y_t(t, \phi)),$$

onde, para cada $t \geq t_0$ e $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$, segue que $y_t(t, \phi) = (x_\phi(t))_t = \phi$.

Então, para cada funcional $U : [t_0, +\infty) \times PC([-r, 0], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, podemos definir um funcional $V : [t_0, +\infty) \times PC([-r, +\infty), \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, pondo

$$V(t, x_\phi(t)) = U(t, y_t(t, \phi)). \tag{6.17}$$

Portanto, para $t \geq t_0$, temos

$$D^+U(t, \phi) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{V(t + \eta, x_\phi(t + \eta)) - V(t, x_\phi(t))}{\eta} = D^+V(t, x_\phi(t)). \tag{6.18}$$

Observação 6.2.1. Temos $\|y_t(t,\phi)\| = \|x_\phi(t)\|$, para todo $t \geq t_0$.

De fato, pelo Teorema 4.2.1, obtemos

$$\begin{aligned} \|y_t(t,\phi)\| &= \sup_{\theta\in[-r,0]} |y(t+\theta)| = \sup_{\tau\in[t-r,t]} |y(\tau)| = \sup_{\tau\in[t-r,t]} |x_\phi(t)(\tau)| \\ &= \sup_{\tau\in[t-r,+\infty]} |x_\phi(t)(\tau)| = \|x_\phi(t)\|. \end{aligned} \tag{6.19}$$

No lema seguinte, vemos que certas propriedades para um funcional $U : [t_0,+\infty)\times PC([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ podem ser transmitidas para o outro funcional definido por (6.17).

Lema 6.2.1. *Seja* $U : [t_0,+\infty)\times PC([-r,0],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$*. Assumimos que* $V : [t_0,+\infty)\times PC([-r,+\infty),\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *é definido por* (6.17)*. Então as seguintes condições valem:*

(a) *se* $U(t,0) = 0$*, então* $V(t,0) = 0$*, para todo* $t \in [t_0,+\infty)$*;*

(b) *se* $U(.,\psi) : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínuo à esquerda em* $(t_0,+\infty)$*, para todo* $\psi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$*, então* $V(.,z) : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínuo à esquerda em* $(t_0,+\infty)$*, para todo* $z \in PC([t_0 - r,+\infty],\mathbb{R}^n)$*;*

(c) *se existe uma constante* $K > 0$ *tal que*

$$|U(t,\phi) - U(t,\psi)| \leq K\|\phi - \psi\|, \quad t \in [t_0,+\infty),\ \phi,\psi \in \overline{E_\rho},$$

então

$$|V(t,z) - V(t,y)| \leq K\|z - y\|, \quad t \in [t_0,+\infty),\ z,y \in \overline{B_\rho};$$

(d) *se* U *for definido positivo, então* V *também será definido positivo;*

(e) *se* $D^+U(t,\phi) \leq 0$*, para todo* $\phi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ *e* $t \geq t_0$*, então* $D^+V(t,z) \leq 0$*, para todo* $z \in PC([t_0 - r,+\infty],\mathbb{R}^n)$ *e* $t \geq t_0$*.*

Demonstração: O itens (b) e (d) seguem diretamente da definição do funcional V. Agora vamos provar o item (a). Dados $t \geq t_0$ e $\psi,\overline{\psi} \in \overline{E}_\rho$, sejam $y,\overline{y},\widehat{y} : [t-r,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ soluções da EDFRI (6.15) tal que $y_t = \psi$, $\overline{y}_t = \overline{\psi}$ e $\widehat{y}_t = 0$. Suponhamos que $x,\overline{x},\widehat{x}$ são soluções em $[t,+\infty)$ da EDOG (6.1) dadas pelo Teorema 4.2.1 correspondentes à y,$\overline{y}$ e $\widehat{y}$, respectivamente. Então, $(x(t))_t = y_t = \psi$, $(\overline{x}(t))_t = \overline{y}_t = \overline{\psi}$ e $(\widehat{x}(t))_t = \widehat{y}_t = 0$. Pela Observação 6.2.1, $x_\psi(t), x_{\overline{\psi}}(t) \in \overline{B}_\rho$. Então,

$$0 = U(t,0) = U(t,\widehat{y}_t(t,0)) = V(t,\widehat{x}(t)) = V(t,0),$$

sempre que $\widehat{x}(t)(\tau) = 0$, para $\tau \geq t_0$.

Além disso, para a prova do item (c), notemos que

$$|V(t,x_\psi(t)) - V(t,\overline{x}_{\overline{\psi}}(t))| = |U(t,y_t(t,\psi)) - U(t,\overline{y}_t(t,\overline{\psi}))| = |U(t,\psi) - U(t,\overline{\psi})|.$$

Então, pela Observação 6.2.1, obtemos

$$|V(t,x_\psi(t)) - V(t,\overline{x}_{\overline{\psi}}(t))| \leq K\|\psi - \overline{\psi}\| = K\|x_\psi(t) - \overline{x}_{\overline{\psi}}(t)\|. \tag{6.20}$$

Claramente, dados $t \geq t_0$ e $z, \overline{z} \in \overline{B}_\rho$, existem soluções x e $\overline{x}$ da EDOG (6.1) e $\psi, \overline{\psi} \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ tais que $z = x_\psi(t)$, $(x_\psi(t))_t = y_t(t,\psi)$, $\overline{z} = \overline{x}_{\overline{\psi}}(t)$ e $(\overline{x}_{\overline{\psi}}(t))_t = \overline{y}_t(t,\overline{\psi})$. Como

$$\|\psi\| = \|y_t(t,\psi)\| = \|x_\psi(t)\| = \|z\| \leq \rho$$

e

$$\|\overline{\psi}\| = \|\overline{y}_t(t,\overline{\psi})\| = \|\overline{x}_{\overline{\psi}}(t)\| = \|\overline{z}\| \leq \rho,$$

de (6.20), temos

$$|V(t,z) - V(t,\overline{z})| \leq K\|z - \overline{z}\|.$$

Dados $t \geq t_0$ e $z \in \overline{B}_\rho$, existem uma solução x da EDOG (6.1) e $\psi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ tais que $z = x_\psi(t)$, $(x_\psi(t))_t = y_t(t,\psi)$, onde y é a solução da EDFRI (6.15) correspondente a x. Por hipótese, existe uma função crescente $b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $b(0) = 0$ e $U(t,\psi) \geq b(\|\psi\|)$, para todo $\psi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $t \geq t_0$. Logo, obtemos

$$V(t,z) = V(t,x_\psi(t)) = U(t,y_t(t,\psi)) \geq b(\|\psi\|) = b(\|z\|),$$

pois

$$\|\psi\| = \|y_t(t,\psi)\| = \|x_\psi(t)\| = \|z\| \leq \rho,$$

provando o item (d). ■

Observação 6.2.2. Seja $\nu \in [t_0,+\infty)$ dado. Para cada $z \in PC([t_0,\nu],\mathbb{R}^n)$, podemos definir

$$\widehat{z}\,(t) = \begin{cases} z\,(t)\,, & t_0 \leq t \leq \nu, \\ z(v), & \tau \geq \nu. \end{cases} \tag{6.21}$$

É fácil ver que $\widehat{z} \in PC([t_0,+\infty),\mathbb{R}^n)$. Assim, para o funcional V definido por (6.17), vamos considerar o funcional $V_\nu : [t_0,+\infty) \times PC([t_0,\nu],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, dado por

$$V_\nu(t,z) = V(t,\widehat{z}).$$

No Lema 6.2.1, podemos substituir V_ν por V.

Teorema 6.2.1. *Suponhamos* $U : [t_0,+\infty) \times \overline{E_\rho} \to \mathbb{R}$*, onde* $\overline{E_\rho} = \{y \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n); \|y\| \leq \rho\}$ *satisfaz as seguintes condições:*

(i) $U(t,0) = 0$, $t \in [t_0,+\infty)$*;*

(ii) $U(.,\psi) : [t_0,+\infty) \to \mathbb{R}$ *é contínuo à esquerda em* $(t_0,+\infty)$*, para todo* $\psi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$*;*

(iii) existe $K > 0$ *tal que*

$$|U(t,\psi) - U(t,\overline{\psi})| \leq K\|\psi - \overline{\psi}\|, \quad t \in [t_0,+\infty),\ \psi,\overline{\psi} \in \overline{E}_\rho;$$

(iv) U *é definido positivo;*

(v) $D^+U(t,\psi) \leq 0$*, para cada* $t \geq t_0$ *e* $\psi \in \overline{E}_\rho$*.*

Então a solução trivial $y \equiv 0$ *de* (6.15) *é uniformemente estável.*

Demonstração: Sejam $\phi \in PC([-r,0],\mathbb{R}^n)$ e $y : [t_0 - r, v] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDFRI (6.15) tal que $y_{t_0} = \phi$. Consideremos o funcional $\widehat{V_v} : [t_0,+\infty) \times PC([t_0,v],\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$, dado na Observação 6.2.2. Aplicando (i) à (v) do Lema 6.2.1 ao funcional V_v, pelo Teorema 6.1.1, obtemos que a solução trivial $x \equiv 0$ da EDOG (4.12), assumindo valores em $PC([t_0,v],\mathbb{R}^n)$, é variacionalmente estável. Logo, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, tal que se $\overline{x} : [\gamma,\nu] \to \mathcal{O}$, onde $\mathcal{O}$ é um aberto de $PC([t_0,v],\mathbb{R}^n)$ e $t_0 \leq \gamma \leq \nu \leq v$, for uma função de variação limitada em $[\gamma,\nu]$ e contínua à esquerda em $(\gamma,\nu]$ tal que

$$\|\overline{x}(\gamma)\| \leq \delta \quad \text{e} \quad \mathrm{Var}_\gamma^\nu\left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau),t)\right) < \delta,$$

então
$$\|\overline{x}(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [\gamma,\nu].$$

Suponhamos que $\|\phi\| < \delta$, queremos provar que

$$\|y_t(t_0,\phi)\| < \epsilon, \quad \text{para } \ t \in [t_0,v]$$

Assim, para cada $t \in [t_0,v]$, definimos

$$x(t)(\tau) = \begin{cases} y\,(\tau)\,,\ t_0 - r \leq \tau \leq t, \\ y(t),\ t \leq \tau \leq v. \end{cases} \tag{6.22}$$

Pelo Teorema 4.2.1, a função $x : [t_0,v] \to PC([t_0 - r,v],\mathbb{R}^n)$ é uma solução da EDOG em (4.12) com condição inicial $x(t_0) = \widetilde{x}$, donde

$$\widetilde{x}(\tau) = \begin{cases} \phi\,(\tau - t_0)\,,\ t_0 - r \leq \tau \leq t_0, \\ \phi(0),\ t_0 \leq \tau \leq v. \end{cases} \tag{6.23}$$

Além disso, x é contínua à esquerda em $(t_0,v]$ e de variação limitada em $[t_0,v]$. Logo,

$$\|\widetilde{x}\| = \sup_{\tau \in [t_0 - r,v]} |\widetilde{x}(\tau)| = \sup_{\vartheta \in [-r,0]} |\phi(\vartheta)| = \|\phi\| < \delta \tag{6.24}$$

e
$$\mathrm{Var}_\gamma^\nu\left(x(s) - \int_\gamma^s DG(x(\tau),t)\right) = 0 < \delta. \tag{6.25}$$

Consequentemente, $\|x(t)\| < \varepsilon, \quad t \in [t_0,v]$. Portanto, para qualquer $t \in [t_0,v]$, temos

$$\begin{aligned} \|y_t(t_0,\phi)\| &= \sup_{\theta \in [-r,0]} |y(t+\theta)| \leq \sup_{\tau \in [t_0 - r,v]} |y(\tau)| \\ &= \sup_{\tau \in [t_0 - r,v]} |x(v)(\tau)| = \|x(v)\| < \epsilon. \end{aligned} \tag{6.26}$$

■

Teorema 6.2.2. *Suponhamos que $U : [t_0, +\infty) \times \overline{E_\rho} \to \mathbb{R}$ satisfaz as condições (i) até (iv) do Teorema 6.2.1. Além disso, suponhamos que exista uma função contínua $\Lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tal que $\Lambda(0) = 0$ e $\Lambda(x) > 0$, sempre que $x \neq 0$, de forma que, para todo $\psi \in \overline{E}_\rho$,*

$$D^+U(t, \psi) \leq -\Lambda(\|\psi\|), \quad t \geq t_0. \tag{6.27}$$

Então a solução trivial $y \equiv 0$ de (6.15) *é uniformemente assintoticamente estável.*

Demonstração: Sejam $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}^n)$ e $y : [t_0 - r, v] \to \mathbb{R}^n$ uma solução da EDFRI em (6.15) tal que $y_{t_0} = \phi$.

Consideremos o funcional $V_v : [t_0, +\infty) \times \overline{B}_\rho \to \mathbb{R}$, onde $\overline{B}_\rho \subset PC([t_0, v], \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$. Definimos $\Phi : \overline{B}_\rho \to \mathbb{R}$ por $\Phi(z) = \Lambda(\|z\|)$, para $z \in \overline{B}_\rho$. Então, Φ é contínua, $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(z) > 0$, sempre que $z \neq 0$.

Seja $x : [t, v] \to \overline{B}_\rho$ uma solução de (6.1) tal que $(x(t))_t = \psi$, onde $t \in [t_0, v]$ e $\psi \in \overline{E}_\rho$, e suponha que $y : [t - r, v] \to \mathbb{R}^n$ é uma solução de (6.15) dada pelo Teorema 4.2.2 com a condição inicial $y_t = \psi$. Pela Observação 6.2.1 e por (6.27), temos $\|y_t\| = \|x_\psi(t)\|$ e

$$\begin{aligned}
&\limsup_{\eta \to 0+} \frac{V_v(t+\eta, x_\psi(t+\eta)) - V_v(t, x_\psi(t))}{\eta} = \limsup_{\eta \to 0+} \frac{V(t+\eta, x_\psi(t+\eta)) - V(t, x_\psi(t))}{\eta} \\
&= D^+U(t, y_t(t, \psi)) = D^+U(t, \psi) \leq -\Lambda(\|\psi\|) = -\Lambda(\|y_t\|),
\end{aligned}$$

para todo $t \in [t_0, +\infty)$. Portanto,

$$\limsup_{\eta \to 0+} \frac{V_v(t+\eta, x_\psi(t+\eta)) - V_v(t, x_\psi(t))}{\eta} \leq -\Lambda(\|y_t\|) = -\Lambda(\|x_\psi(t)\|) = -\Phi(x_\psi(t)).$$

As hipóteses do Teorema 6.1.2 estão satisfeitas. Logo, $x \equiv 0$ é variacionalmente assintoticamente estável em $[t_0, v]$, ou seja, existe $\delta_0 > 0$ e, para todo $\epsilon > 0$, existem $T = T(\varepsilon) \geq 0$ e $\rho = \rho(\varepsilon) > 0$ tais que se $\overline{x} : [\gamma, \nu] \to B_c$, $t_0 \leq \gamma < \nu \leq v$, for uma função de variação limitada $[\gamma, \nu]$ e contínua à esquerda em $(\gamma, \nu]$ tal que

$$\|\overline{x}(\gamma)\| < \delta_0 \tag{6.28}$$

e

$$\text{var}_\gamma^v \left(\overline{x}(s) - \int_\gamma^s DG(\overline{x}(\tau), t) \right) < \rho, \tag{6.29}$$

então

$$\|\overline{x}(t)\| < \epsilon, \quad t \in [\gamma, \nu] \cap [\gamma + T, v]. \tag{6.30}$$

Supondo que $\|\phi\| < \delta$, queremos mostrar que

$$\|\overline{y}_t(t_0, \phi)\| < \epsilon, \quad t \in [t_0 + T, v]. \tag{6.31}$$

Isto segue como na prova do Teorema 6.2.1. De $\|\phi\| < \delta$, obtemos $\|\widetilde{x}\| < \delta$ e

$$\text{Var}_\gamma^\nu \left(x(s) - \int_\gamma^s DG(x(\tau), t) \right) = 0 < \rho, \tag{6.32}$$

implicando em (6.30).

Finalmente vale (6.31), uma vez que, para todo $t \in [t_0 + T, v]$, temos

$$\begin{aligned} \|y_t(t_0, \phi)\| &= \sup_{\theta \in [-r,0]} |y(t+\theta)| \leq \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |y(\tau)| \\ &= \sup_{\tau \in [t_0 - r, v]} |x(v)(\tau)| = \|x(v)\| < \epsilon. \end{aligned}$$

■

6.3 Exemplo

Destinamos esta seção para ilustrar a teoria abortada neste capítulo. Investigamos a estabilidade em um modelo de viscoelasticidade unidimensional com impulsos em instantes pré-fixado, para mais detalhes veja [9].

Consideremos o sistema impusivo

$$\begin{cases} y'(t) = -\int_{t-r}^{t} [p(t-s)g(y(s))]ds - \alpha(t)\beta(y(t)), & t \neq t_k, \quad t \geq 0, \\ \Delta y\,(t) = I_k(y(t)), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{6.33}$$

com a condição inicial

$$y_0 = \phi, \tag{6.34}$$

onde $r > 0$, $\phi \in PC([-r, 0], \mathbb{R})$. Assumimos que existem $B_1, B_2, \mathcal{K}$ constantes positivas tais que: $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função Henstock-Kurzweil integrável com $p(u) \leq B_1$, sempre que $u \in \mathbb{R}$; a função $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é não-negativa com $\alpha(u) \leq B_2$, sempre que $u \in \mathbb{R}$ e $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Henstock-Kurzweil tal que $\beta(0) = 0$ e $x\beta(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$. Além disso, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é função Lipschitziana com constante $\mathcal{K}$, $g(0) = 0$ e $xg(x) > 0$ sempre que $x \neq 0$.

Assumimos, também, que as condições são satisfeitas:

$(A1)$ existem funções localmente Lebesgue integráveis $m_1, m_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $z \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ and $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} \beta(z(s))ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} m_1(s)ds$$

e

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} g(z(s))ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} m_2(s)ds;$$

$(A2)$ existe uma função localmente Lebesgue integrável $\ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que, para todo $z, w \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ e $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$,

$$\left| \int_{s_1}^{s_2} [\beta(w(s)) - \beta(z(s))]ds \right| \leq \int_{s_1}^{s_2} \ell(s)|w(s) - z(s)|ds;$$

$(A3)$ se $z \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então $z(t) \displaystyle\int_{t-r}^{t} g(z(s))ds > 0$, sempre que $t \geq 0$.

Os operadores impulsivos I_k, $k = 1, 2, \ldots$ satisfazem:

$(B1)$ $I_k(0) = 0$, para todo $k = 1, 2, \ldots$;

$(B2)$ existe $K_1 > 0$ tal que, para $k = 1, 2, \ldots$ e $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|I_k(x)| \leq K_1;$$

$(B3)$ existe uma constante $0 < K_2 < 1$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{R}$ e $k = 1, 2, \ldots$,

$$|I_k(x) - I_k(y)| \leq K_2|x - y|;$$

(B_4) $xI_k(x) < 0$, para todo $x \neq 0$.

Se $z, w \in PC(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, então as composições $\beta \circ z$, $\beta \circ w$ e $g \circ z$ são Henstock-Kurzweil integráveis, desde que β, z e w sejam Henstock-Kurzweil integráveis.

Primeiramente, vamos garantir a existência local de solução para o sistema impulsivo (6.33), ou seja, resta verificarmos se vale as condições do tipo Carthéodory (A), (B) e (C), apresentadas no segundo capítulo.

Seja $f : G^-([-r, +\infty), \mathbb{R}) \times [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(\varphi, t) = -\int_{t-r}^{t} p(t-s)g(\varphi(0))ds - \alpha(t)\beta(\varphi(0)).$$

A condição (A) é imediata, mostraremos que f satisfaz as condições (B) e (C), presentes no segundo capítulo.

Dados $y \in PC_1$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, $u_1 \leq u_2$, temos

$$\begin{aligned}
\left|\int_{u_1}^{u_2} f(y_s, s)ds\right| &= \left|\int_{u_1}^{u_2} \left[\int_{s-r}^{s} p(s-u)g(y_u(0))du + \alpha(s)\beta(y_s(0))\right] ds\right| \leq \\
&\leq \left|\int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^{s} p(s-u)g(y(u))du\right) ds\right| + \left|\int_{u_1}^{u_2} \alpha(s)\beta(y(s))ds\right| \leq \\
&\leq B_1 \int_{u_1}^{u_2} \left|\int_{s-r}^{s} g(y(u))du\right| ds + B_2 \left|\int_{u_1}^{u_2} \beta(y(s))ds\right| \leq \\
&\leq B_1 \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^{s} m_2(u)du\right) ds + B_2 \int_{u_1}^{u_2} m_1(s)ds \leq \int_{u_1}^{u_2} M(s)ds.
\end{aligned}$$

Logo, (B) vale para $M(s) = B_1 \left(\int_{s-r}^{s} m_2(u)du\right) + B_2 m_1(s)$.

Dados $x, y \in G_1$ e $u_1, u_2 \in [0, +\infty)$, $u_1 \leq u_2$, temos

$$\left| \int_{u_1}^{u_2} f(x_s, s) - f(y_s, s) ds \right| =$$

$$= \left| \int_{u_1}^{u_2} \left(- \int_{s-r}^{s} p(s-u)(g(x(u)) - g(y(u)))du \right) - \alpha(s)[\beta(x(s)) - \beta(y(s))]ds \right| \leq$$

$$\leq \left| \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{s-r}^{s} |p(s-u)| \mathcal{K} |x(u) - y(u)| du \right) ds \right| + \left| \int_{u_1}^{u_2} B_2 |\beta(x(s)) - \beta(y(s))| ds \right| \leq$$

$$= \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{r}^{0} |p(\tau)| \mathcal{K} |x(s-\tau) - y(s-\tau)| d\tau \right) ds + \int_{u_1}^{u_2} B_2 \ell(s) |x(s) - y(s)| ds \leq$$

$$\leq \int_{u_1}^{u_2} \mathcal{K} \|x_s - y_s\| \left(\int_{0}^{r} |p(\tau)| d\tau \right) ds + B_2 \int_{u_1}^{u_2} \ell(s) \|x_s - y_s\| ds \leq$$

$$\leq \int_{u_1}^{u_2} (B_2 \ell(s) + B_1 \mathcal{K} r) \|x_s - y_s\| ds = \int_{u_1}^{u_2} L(s) \|x_s - y_s\| ds,$$

onde $L(s) = (B_2\ell(s) + B_1\mathcal{K}r)$ e $\mathcal{K}$ é a constante de Lipchtiz da função g. Logo, f satisfaz (C).

Visto que, pelo Teorema 2.3.1, existe uma solução local de (6.33), queremos aplicar a teoria desenvolvida neste capítulo, para investigarmos a estabilidade da solução trivial deste problema.

Definimos uma função auxiliar $W : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $W(s) = |s|$. Afirmamos que $D^+W(y(t)) \leq 0$, para todo $t \geq 0$, sempre que y for uma solução de (6.33) em um intervalo compacto $I \subset [0, +\infty)$. De fato, vamos considerar dois casos: quando $t \neq t_k$ e $t = t_k$, para $k = 1, 2, \ldots$.

Primeiramente, suponhamos que $t \neq t_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Então,

(i) se $y(t) \geq 0$,

$$D^+W(y(t)) = W'(y(t))y'(t) = y'(t) = - \int_{t-r}^{t} p(t-s)g(y(s))ds - \alpha(t)\beta(y(t)) \leq 0,$$

uma vez que p, $g \circ y$ e α são não-negativas, $x\beta(x) > 0$, para $x \neq 0$, e $h(0) = 0$;

(ii) se $y(t) < 0$,

$$D^+W(y(t)) = W'(y(t))y'(t) = -y'(t) = \int_{t-r}^{t} [p(t-s)g(y(s))]ds + \alpha(t)\beta(y(t)) \leq 0,$$

uma vez que p e α são não-negativas, $g(y(s)) \leq 0$, com $s \in I$, $x\beta(x) > 0$, para $x \neq 0$, e $h(0) = 0$. Agora, suponhamos que $t = t_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Então,

(i') se $y(t_k^i) > 0$, usando $(B1)$, $(B3)$ e $(B4)$, obtemos

$$0 < (1 - K_2)y(t_k^i) \leq I_k(y(t_k^i)) + y(t_k^i) \leq y(t_k^i),$$

ou seja,

$$W(I_k(y(t_k^i)) + y(t_k^i)) \leq W(y(t_k^i));$$

(ii') se $y(t_k^i) < 0$, temos

$$y(t_k^i) < I_k(y(t_k^i)) + y(t_k^i) \leq (1 - K_2)y(t_k^i) < 0,$$

isto é,

$$W(I_k(y(t_k^i)) + y(t_k^i)) \leq W(y(t_k^i)).$$

Como $W(y(t_k^i+)) \leq W(y(t_k^i))$, em ambos os casos, pela continuidade de W, dado $\eta > 0$ suficientemente pequeno, segue que

$$W(y(t_k^i + \eta)) \leq W(y(t_k^i)).$$

Portanto, para $t = t_k$, obtemos

$$D^+W(y(t)) = \limsup_{\eta \to 0^+} \frac{W(y(t+\eta)) - W(y(t))}{\eta} \leq 0.$$

Concluindo, então,

$$D^+W(y(t)) \leq 0, \quad \text{para todo} \quad t \geq 0. \tag{6.35}$$

Defina $U : [0, +\infty) \times PC([-r, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$, pondo

$$U(t, \psi) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(\psi(\theta)) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} |\psi(\theta)| = \|\psi\|.$$

Finalmente, o próximo passo é mostrar que U satisfaz as hipóteses do Teorema 6.2.1.

(a) Claramente, $U(t, 0) = 0$, para $t \geq 0$;

(b) Sejam $\psi, \varphi \in \mathcal{B}_\rho = \{\Psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R}) : \ \|\Psi\| < \rho\}$. Então

$$|U(t, \psi) - U(t, \varphi)| = |\|\psi\| - \|\phi\|| \leq \|\psi - \varphi\|,$$

para todo $t \geq 0$;

(c) Dados $t \geq 0$ e $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R})$, temos

$$U(t, \psi) = \|\psi\| = b(\|\psi\|),$$

onde $b(s) = s$;

(d) Dados $t \geq 0$, e $\psi \in PC([-r, 0], \mathbb{R})$, seja y uma solução de (6.33) definida $[t - r, v]$, $v > t$, com a condição inicial $y_t = \psi$, assim

$$U(t, \psi) = U(t, y_t) = \sup_{-r \leq \theta \leq 0} W(y_t(\theta)) = W(y_t(\theta_0)).$$

Queremos mostrar que $D^+U(t, y_t) \leq 0$, para todo $t \geq 0$. Precisamos considerar quando $\theta_0 = 0$ e o caso contrário. Se $\theta_0 = 0$, de (6.35), temos

$$D^+U(t, y_t) = D^+W(y(t)) \leq 0.$$

Agora, consideremos quando $-r \leq \theta_0 < 0$. Como $\sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} W(y_t(\theta)) = W(y_t(\theta_0))$, para $\eta > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\sup_{-r\leq\theta\leq 0} W(y_{t+\eta}(\theta)) = \sup_{-r\leq\theta\leq 0} W(y_t(\theta)).$$

Implicando em

$$D^+U(t, y_t) = \limsup_{\eta\to 0^+} \frac{\sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} W(y_{t+\eta}(\theta)) - \sup\limits_{-r\leq\theta\leq 0} W(y_t(\theta))}{\eta} = 0.$$

Portanto, pelo Teorema 6.2.1, a solução trivial de (6.33) é uniformemente estável.

Exemplo 6.3.1. Considere o sistema impulsivo

$$\begin{cases} y'(t) = -\int_{t-r}^{t} y(s)ds - \beta(y(t)), & t \neq t_k, \quad t \geq 0, \\ \Delta y\,(t) = I_k(y(t)), & t = t_k, \quad k = 1, 2, \ldots, \end{cases} \tag{6.36}$$

Sendo $I_k(x) = \frac{k}{k+1}\mathrm{arctg}(x)$, $k = 1, 2, \ldots$, e

$$\beta\,(x) = \begin{cases} 2^{-z},\ 0 < z < x \leq z + 1; \\ 0,\ x = 0; \\ -2^{z},\ z < x \leq z + 1 < 0; \end{cases} \tag{6.37}$$

Claramente, esse sistema é um caso particular do modelo (6.33). Portanto a solução trivial de (6.36) é uniformemente estável.

Observação 6.3.1. Se a função $\beta \equiv 0$ em (6.33), o sistema impulsivo (6.33)-(6.34) modela um reator nuclear de circulação de combustível.

CAPÍTULO

7

Conclusão

O enfoque principal desta dissertação é o estudo das EDFRIs com impulsos em tempos pré-fixados. O interesse nestas equações tem crescido e produzido muitas publicações, podemos citar [7, 15, 16, 17], entre outros. Pelo papel relevante tanto na própria matemática como nas diversas áreas em que apresentam aplicações. Nesta dissertaçao, primeiramente, apresentamos as EDFRIs com impulsos em tempos pré-fixados, garantindo a boa colocação do problema. Em seguida, introduzimos a teoria das EDOGs. Descrevemos os resultados sobre a teoria qualitativa de uma classe de EDFRIs via EDOGs. Neste contexto, houve a necessidade de estudarmos a integral no sentido de Kurzweil e, consequentemente, desenvolver a teoria quantitativa para uma certa classe de EDOGs, como em [35].

Reproduzimos o teorema da correspondência entre uma classe de EDOGs e outra de EDFRIs, proveniente de [10]. De posse desse resultado, estudamos a dependência contínua e a estabilidade da solução travial da EDOG para transferir tais resultados para as EDFRIs, visto que isto facilita a manipulação dos impulsos, uma vez que eles ficam "embutidos" nas EDOGs, e as hipóteses do problema se tornarão mais gerais (veja [12]).

Recentemente, os artigos [2, 3, 4] e [5] consideraram as EDFRIs em tempo variável, nos quais não conhecemos de antemão os instantes de impulso, pois os mesmos dependem também da solução. Estes trabalhos generalizam os resultados de nossa dissertação, mas isto não diminui sua relevância, já que o nosso propósito era estudar as EDOGs e manipular resultados quantitativos e qualitativos para EDFRIs através do teorema da correspondência.

Referências Bibliográficas

[1] P. Adams, R. Výborný, *Maple tools for the Kurzweil integral,* Matematica Bohemica, 131 No. 4, (2006), 337–346.

[2] S. M. Afonso, *Equações diferenciais funcionais com retardamento e impulsos em tempo variável via equações diferenciais ordinárias generalizadas*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2011.

[3] S. M. Afonso, E. M. Bonotto, M. Federson, Š. Schwabik, *Discontinuous local semiflows for Kurzweil equations leading to LaSalle's invariance principle for differential systems with impulses at variable times*, J. Differential Equations, 250, 2011, 2969-3001.

[4] S. M. Afonso, E. Bonotto, M. Federson, L. P. Gimenes, *Boundedness of solutions of functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations*, Mathematische Nachrichten, v. 285, p. 545-561, 2012.

[5] S. M. Afonso, E. Bonotto, M. Federson, L. P. Gimenes, *Stability of solutions of functional differential equations with variable impulses via generalized ordinary differential equations*, Bulletin des Sciences Mathématiques. Accepted for publication.

[6] D. D. Bainov and V. Covachev, *Impulsive Differential Equations with a Small Parameter*, World Scientific, Singapore, 1994.

[7] E. M. Bonotto, M. Federson, L. P. Gimenes, *Oscillation for a second-order neutral differential equation with impulses*, Applied Mathematics and Computation, v. 215, p. 1-15, 2009.

[8] N. Dunford, J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, Interscience Publ. Inc., New York, (1964).

[9] W. K. Ergen, *Kinetics of the circulating fuel nuclear reactor*, J. Appl. Phys. 25, p. 702-711, 1954.

[10] M. Federson, Š. Schwabik, *Generalized ODEs approach to impulsive retarded functional differential equations*, Differential and Integral Equations., 19 (11), (2006), 1201-1234.

[11] M. Federson, Š. Schwabik, *Stability for retarded functional differential equations*, Ukrainian Math J., 244 (2008), 2334-2349.

[12] M. Federson, Š. Schwabik, *A new approach to impulsive retarded differential equations: stability results*, Functional Differential Equations, 16(4), (2009), 583-607.

[13] M. Federson, R. Bianconi, *A Fredholm-tipe theorem for lienar intragral equations of Stieltjes type* Integration: Mathematical Theory and Applications, 1(2), (2008), 135-168.

[14] L. P. Gimenes, *Estabilidade e oscilação de soluções de equações diferenciais com retardos e impulsos*, Tese de Doutorado, ICMC-USP, 2007.

[15] L. P. Gimenes, M. Federson, *Oscillation by impulses for a second-order delay differential equation*, Computers and Mathematics with Applications, v. 52, p. 819-828, 2006.

[16] L. P. Gimenes, M. Federson, *Existence and impulsive stability for second order retarded differential equations*, Applied Mathematics and Computation, v. 177, n. 1, p. 44-62, 2006.

[17] L. P. Gimenes , M. Federson, *Existence and impulsive stability for second order retarded differential equations*, Applied Mathematics and Computation, v. 177, n. 1, p. 44-62, 2006.

[18] J. B. Godoy, *Método da Média para Equações Diferenciais Funcionais Retardadas Impulsivas via Equações Diferenciais Generalizadas*, Dissertação de Mestrado, ICMC-USP, 2009.

[19] A. R. Gordon, *The integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock*, Graduate Studies in Mathematics, 4. American Mathematical Society, 1994.

[20] J. K. Hale, S. M. V. Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1993.

[21] C. S. Hoing , *Volterra Stieljes Integral Equations,* North Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1975.

[22] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Aplications*, Wiley, 1989.

[23] V. Kolmanovskii, A. Myshkis, *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.

[24] D. S. Kurtz, C. W. Swartz, *Theories of integration. The integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil, and Mcshane*, Series in Real Analysis, 9. World Scientific Publishing, 2004.

[25] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations and continuous dependence on a parameter*, Czech. Math. J. 7(82), (1957), 418-448.

[26] J. Kurzweil, *Generalized ordinary differential equations*, Czech. Math. J. 8(83),(1958), 360-338.

[27] J. Kurzweil, *On generalized ordinary differential equations with discontinuous solutions*, Prikl. Mat. Meh. XXII(1958), 27-57. (Russian)

[28] J. Kurzweil, *Unicity of solutions of generalized ordinary differential equations*, Czech. Math. J., 8(83), (1958), 502-509.

[29] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov, *Theory of Impulsive Differential Equations*, World Scientific, Singapore, 1989.

[30] S. Leader, *The Kurzweil-Henstock Integral and its differentials: An Unified Theory of Integration on $\mathbb{R}$ and $\mathbb{R}^n$*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, 242. Marcel Dekker, Inc., New York, 2001.

[31] E. L. Lima, *Curso de Análise vol. 1*, Projeto Euclides, IMPA, 2008.

[32] X. Liu; G. Ballinger, *Continuous dependence on initial values for impulsive delay differential equations*, Apll. Math. Lett. 17 (2004) 483-490.

[33] N. Onuchic, *Equações diferenciais com retardamento*, 8º colóquio brasileiro de matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1971.

[34] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, 3rd ed. McGraw-Hill, 1976.

[35] Š. Schwabik, *Generalized Ordinary Differential Equations*, World Scientific, Series in Real Analysis, vol. 5, 1992.

[36] Š. Schwabik, *Variational stability for generalized ordinary differential equations*, Časopis pro Pěstování matematiky, Vol. 109 (1984), No. 4, 389-420.

[37] Š. Schwabik, I. Vrkoč, *On Kurzweil-Henstock equiintegrable sequences*, Mathematica Bohemica, Vol. 121 (1996), No. 2, 189–207.

[38] I. Stamova, *Stability Analysis of Impulsive Functional Differential Equations*, Walter de Gruyter, Berlin, 2009.

[39] L. T. Yeong, *Henstock-Kurzweil integration on Euclidean Spaces*, Series in Real Analysis, vol. 12, 2011.

Índice Remissivo