UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

GIOVANA ALVES

Decaimento Exponencial para a Equação de Schrödinger em Domínios Ilimitados

Maringá - PR

2014

GIOVANA ALVES

Decaimento Exponencial para a Equação de Schrödinger em Domínios Ilimitados

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Fábio Matheus Amorin Natali.

Maringá - PR

2014

Decaimento Exponencial para a Equação de Schrödinger em Domínios Ilimitados

GIOVANA ALVES

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática pela Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA

Prof. Dr. Fábio Matheus Amorin Natali
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR
(Orientador)

Prof. Dr. Adán José Corcho Fernández
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ-RJ

Prof. Dr. Gleb Germanovitch Doronin
Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR

Aos meus pais Aparecida (In memoriam) e Isac.

Aos meus irmãos Alan e Marcelo.

Agradecimentos

Primeiramente agradeço a Deus pela oportunidade e pela força para a realização deste trabalho.

Ao meu pai, ao Té, ao Nan, a tia Preta e a todos da minha família pelo incentivo dado e por sempre torcerem por mim.

Ao meu orientador Fábio Natali pela paciência, pelos conselhos e pela compreensão.

Aos professores da graduação e do curso de mestrado, que adicionaram muito à minha formação pessoal e profissional.

Ao professor Osvaldo Colleti e aos meus amigos de Rinópolis.

Aos meus amigos de graduação e mestrado, especialmente ao Ósmar, ao Altair a Amanda, ao Alisson e ao Fabrício.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Enfim, gostaria de agradecer a todas as pessoas que de acreditaram em mim. Muito obrigada!

Giovana Alves

Eu poderia suportar, embora não sem dor,

que tivessem morrido todos os meu amores, mas

enlouqueceria se morressem todos os meus amigos.

—— Vinícius de Moraes.

Resumo

Nesta trabalho, provamos resultados de boa colocação local e global, bem como decaimento exponencial em L^2 associado a equação não-linear de Schrödinger com damping localizado. Em relação à resolubilidade local e global, usamos argumentos de continuação, estimativas de Strichartz e efeitos regularizantes locais relacionados à equação de Schrödinger. O decaimento exponencial é determinado por meio de um argumento de contradição que é bem conhecido para a equação de onda.
Palavras-chave: Equação de Schrödinger, estimativas de Strichartz, decaimento exponencial.

Abstract

In this thesis, we prove results of local and global well-posedness as well as exponential decay in L^2-level associated with the nonlinear Schrödinger equation with localized damping. Regarding the local and global solvability we use arguments of unique continuation property, Strichartz estimates and local smoothing effects related to the Schrödinger equation. The exponential decay is established by using a contradiction argument which is well-known for the wave equation.

Key words: Schrödinger equation, Strichartz estimates, exponentical decay.

SUMÁRIO

Introdução

Ao longo dos anos, diversos pesquisadores tem se interessado em obter resultados importantes de controlabilidade e estabilização para modelos dispersivos alocados em domínios limitados e ilimitados. Os resultados obtidos estão sendo constantemente melhorados no que tange à determinação de condições suficientes que asseguram tais propriedades. Um dos modelos mais importantes de equações dispersivas estudadas neste contexto é a equação de Schrödinger com termo dissipativo

$$iu_t + \Delta u + \lambda |u|^{\alpha-1}u + g(x,u)u = 0, \tag{1}$$

onde $\lambda = 0, \pm 1$, $\alpha \geq 1$ e $u = u(x,t)$, $(x,t) \in \mathcal{O} \times (0,+\infty)$, é uma função à valores complexos e $\mathcal{O}$ é um subconjunto conveniente de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. A função g acima é um termo que surge como fonte de dissipação para a energia associada a equação (1) e que satisfaz a seguinte condição

$$\mathrm{Im}(g(x,u(x,t))) \geq 0, \qquad \forall\ (x,t) \in \mathcal{O} \times (0,+\infty).$$

De fato, dependendo da condição de fronteira imposta é possível estabelecer um efeito dissipativo na norma L^2 (neste contexto, esta norma será chamada de energia do sistema) para a solução da referida equação. Por exemplo, se assumirmos $\mathcal{O} = \mathbb{R}^n$, podemos formalmente multiplicar a equação (1) por $\overline{u}$ para obter, após uma integração em $\mathbb{R}^n$, a seguinte igualdade

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx = -2\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Im}(g(x,u(x,t)))|u(x,t)|^2 dx \leq 0. \tag{2}$$

Desta forma, usando a desigualdade em (2), faz sentido encontrar taxas de decaimento da energia no nível L^2 para equação (1). Um caso particular para esta equação que possui resultados interessantes de controlabilidade e estabilização na literatura corrente firma a seguinte equação não linear

$$iu_t + \Delta u + \lambda |u|^2 u + ia(x)u = 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,+\infty), \tag{3}$$

em outras palavras, $g(x,u) = ia(x)$ com $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$ e $\alpha = 3$ na equação (1). A identidade de energia obtida de (2) após integração do resultado sobre o intervalo $[0,t)$, vem dada por

$$E_0(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx = -2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u(x,s)|^2 dx\, ds + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2 dx, \qquad \forall\, t \geq 0 \tag{4}$$

Nosso principal foco é o estudo da estabilização exponencial da energia E_0 para a equação (3). Para este fim, em toda esta dissertação, iremos assumir as seguintes hipóteses:

(H1) $a \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $a(x) \geq 0$ q.s. em $\mathbb{R}^n$.

(H2) $a(x) \geq \alpha_0 > 0$ q.s. em $\mathbb{R}^n \backslash B_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n,\ |x| > R,\ R > 0\}$.

Em relação à equação (1), se assumirmos $g \equiv 0$ juntamente com o fato que $\mathcal{O}$ é um conjunto limitado com fronteira suave, os autores em [27] determinaram resultados de controlabilidade no nível de H^s desde que a solução u satisfaça condições de fronteira do tipo Dirichlet ou Neumann. Em domínios periódicos, temos a referência [16]. Neste caso, o autor estabeleceu novos resultados de controlabilidade/estabilização para a equação (3) desde que troquemos o espaço $\mathbb{R}^n$ pelo toro $\mathbb{T}$. O principal ingrediente deste artigo é o uso de estimativas multilineares e a regularidade do espaço de Bourgain apropriado.

Por outro lado, se consideramos domínios ilimitados, podemos citar o trabalho [5] onde foram apresentados resultados de decaimento exponencial da energia no nível L^2 para a equação (3) com $\lambda = -1$ (não-linearidade do tipo defocusing) para o caso bidimensional. Além disso, a função a que fornece o efeito dissipativo deve possuir hipóteses idênticas (H1) e (H2) acima. Um ponto importante deste trabalho foi que um resultado de continuação única para a equação não linear (e sem termo dissipativo) foi provada com intuito de obter o resultado desejado. Outra referência importante é o artigo [8] onde foram estabelecidos resultados similares para o caso unidimensional. Neste caso específico, os autores usaram o resultado de continuação única provada em [31] e o combinaram com o efeito regularizante local em $H^{\frac{1}{2}}$. Efeito este que é bem conhecido para a equação de Schrödinger.

Em [30], foi estudado o comportamento assintótico no tempo de soluções com norma L^2 pequena para o problema (1) com $g(x,u) = \mu|u|^{\frac{2}{n}}$, $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, e $n = 1, 2, 3$. O autor mostrou que se $\mu > 0$, então existe uma única solução global no tempo que decai com a taxa $(t \log t)^{-\frac{n}{2}}$ e na topologia de $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Agora, apresentaremos um breve esboço da dissertação. Conforme dissemos anteriormente, nosso intuito é estabelecer um resultado de decaimento exponencial para a energia E_0 da equação (3). Em outras palavras, provaremos que existem constantes positivas c e ω de modo que o decaimento exponencial para a energia em nível L^2

$$E_0(t) \leq ce^{-\omega t}, \qquad t \gg 1, \tag{5}$$

ocorre.

Neste trabalho, estabeleceremos tais resultados para os seguintes casos específicos:

1) $\lambda = 0$ e $n \in \mathbb{N}$.

2) $\lambda = \pm 1$ e $n = 1$.

No Capítulo 1 estabelecemos resultados preliminares que serão úteis neste trabalho. Resultados básicos de análise funcional, integração e espaços de Sobolev são alguns dos pontos abordados. Além disso, apresentamos um breve estudo sobre a equação linear de Schrödinger em $\mathbb{R}^n$.

O Capítulo 2 estabelece uma teoria de boa-colocação local e global para a equação (3) com $\lambda = 0$, isto é, estudamos questões de existência, unicidade, dependência contínua com relação aos dados e persistência para a seguinte equação linear e não homogênea

$$iu_t + \Delta u + ia(x)u = 0, \qquad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty). \tag{6}$$

com $a : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^+$

Para este fim, usamos a abordagem de [19]. Estabelecemos para a equação (6) as teorias de boa colocação local em L^2, H^1 e H^2 e a boa colocação global em L^2 (uma vez que nossos resultados de decaimento pairam sobre este espaço). Para isto, usamos o método do ponto fixo de Banach combinado com as estimativas de Strichartz. Outro ponto alto deste capítulo tange ao efeito regularizante em $H^{1/2}$ que neste caso é global no tempo e local no espaço. Por fim, determinamos o resultado de decaimento exponencial através de um argumento de contradição. Tal fato é bem difundido para a equação da onda mas verificamos que esta técnica também pode ser usada para equações dispersivas (ver por exemplo [4], [8], [5], [16], [17], [18], [20], [23] e respectivas referências contidas nestas). É oportuno mencionar que os resultados deste capítulo são totalmente novos e, de acordo com o nosso conhecimento, nunca foram tratados na literatura até o presente momento.

Finalmente, o Capítulo 3 é voltado ao estudo da boa colocação local e global para a equação cúbica não linear no caso unidimensional

$$iu_t + \Delta u + \lambda |u|^2 u + a(x)u = 0, \qquad \text{em } \mathbb{R} \times (0, +\infty). \tag{7}$$

com $a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$

Neste caso, usamos os mesmos métodos usados no capítulo anterior com as devidas adaptações. Resultados de decaimento exponencial também serão abordados. Este capítulo foi inspirado no recente trabalho em [8].

CAPÍTULO 1

Resultados Preliminares

1.1 Os espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |u(x)|, \text{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada) *Se $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções mensuráveis e v e w são funções integráveis, então:*

1. *Se $u_\nu \leq v$ q.s. para todo ν, então $\int \limsup u_\nu \geq \limsup \int u_\nu$;*

2. *Se $u_\nu \geq w$ q.s. para todo ν, então $\int \liminf u_\nu \leq \liminf \int u_\nu$;*

3. *Se $u_\nu \xrightarrow{q.s.} u$ e $|u_\nu| \leq v$ q.s. para todo ν, então $\int u = \lim_\nu \int u_\nu$.*

Demonstração: Ver [13]. $\square$

Teorema 1.2. (Lema de Fatou) *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ *uma sucessão de funções integráveis e não negativas, que converge quase sempre para uma função* u*. Se* $\liminf\limits_{\nu\to\infty}\int_\Omega u_\nu dx$ *é finito, então* u *é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u dx \leq \liminf_{\nu\to\infty}\int_\Omega u_\nu dx.$$

Demonstração: Ver [22]. □

Proposição 1.3. (Desigualdade de Young) *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tais que* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ *e* $a, b \geq 0$*. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.4. (Desigualdade de Minkowski) *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$*, então*

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Proposição 1.5. (Desigualdade de Hölder) *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$*. Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e vale a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [15]. □

Observação 1.6. *Em* $L^2(\Omega)$ *a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Schwarz.*

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.7. (Desigualdade de Hölder generalizada) *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$*,* $p_i \geq 1$*,* $1 \leq i \leq k$*, onde* $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_k}=\frac{1}{p}$ *e* $\frac{1}{p}\leq 1$*. Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Daqui em diante, usaremos a notação $\|\cdot\|_{L^p} = \|\cdot\|_p$.

Teorema 1.8. *Seja* $p \in [1, \infty)$ *e* $X \subset \mathbb{R}^n$. *Se* $u \in L^p(X)$, *então*

$$\|u\|_p = \sup \left\{ \int_X u(x)\overline{v(x)}\, dx;\ \|v\|_{p'} = 1 \right\}.$$

Demonstração: Ver [14]. □

Teorema 1.9. **(Desigualdade integral de Minkowski)** *Sejam* $X, Y \subset \mathbb{R}^n$, $u : X \times Y \to \mathbb{C}$ *mensurável e* $1 \leq p < \infty$. *Então*

$$\left(\int_X \left(\int_Y |u(x,y)| dy \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_Y \left(\int_X |u(x,y)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} dy.$$

Demonstração: Se $p = 1$ é o clássico teorema de Fubini. Se $p > 1$, usando a desigualdade de Hölder e o teorema anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \| \int_Y |u(\cdot,y)| dy \|_p &= \sup_{\|v\|_{p'}=1} \int_X \overline{v(x)} \left(\int_Y |u(x,y)| dy \right) dx \\ &= \sup_{\|v\|_{p'}=1} \int_Y \int_X \overline{v(x)} |u(x,y)| dx dy \\ &\leq \sup_{\|v\|_{p'}=1} \int_Y \|v\|_{p'} \|u(\cdot,y)\|_p dy \\ &= \int_Y \|u(\cdot,y)\|_p dy, \end{aligned}$$

onde $p' = \frac{p}{p-1}$ é o conjugado de p. □

Teorema 1.10. **(Desigualdade de Young para convolução)** *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$ *e* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Então* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *com*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_p \|g\|_1,$$

onde $f * g$ *denota o produto de convolução de* f *e* g.

Demonstração: Ver [1]. □

Proposição 1.11. **(Desigualdade de Interpolação)** *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)},$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [7]. □

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

Para maiores detalhes consulte [6].

1.2 A Transformada de Fourier

Nesta seção, iremos estudar os principais resultados para o operador Transformada de Fourier, os quais terão uma grande importância para a compreensão e desenvolvimento dos próximos capítulos.

Definição 1.12. *A Transformada de Fourier de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, denotada por $\hat{f}$, é definida por*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x \cdot \xi)} dx, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

onde $(x \cdot \xi) = x_1 \xi_1 + \ldots + x_n \xi_n$ é o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.13. *Como $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é imediato ver que $\hat{f}$ está bem definida para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. De fato, temos que*

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x \cdot \xi)} dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1},$$

o que prova a afirmação.

Teorema 1.14. *A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$f \mapsto \widehat{f}$ define uma transfomação linear de $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ com*

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{L^1}.$$

2. *A função $\widehat{f}(\xi)$ é contínua.*

3. $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ *(Lema de Riemann-Lebesgue).*

4. *Se* $\tau_h f = f(x-h)$ *denota a translação por* $h \in \mathbb{R}^n$, *então*
$\widehat{(\tau_h f)}(\xi) = e^{-2\pi i(h\cdot\xi)}\widehat{f}(\xi)$ *e*
$(\widehat{e^{2\pi i(x\cdot h)} f})(\xi) = \tau_h \widehat{f}(\xi)$.

5. *Se* $\delta_a f(x) = f(ax)$ *denota a dilatação por* $a > 0$, *então*
$\widehat{(\delta_a f)}(\xi) = a^{-n}\widehat{f}(a^{-1}\xi)$.

6. *Sejam* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *e* $f * g$ *o produto de convolução de* f *e* g. *Então*
$\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

7. *Dados* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *temos que*
$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(y)g(y)dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\widehat{g}(y)dy$.

Demonstração: Ver [19]. □

Uma das características mais importantes da Transformada de Fourier é o seu relacionamento com o operador diferenciação. Isto é descrito nos seguintes resultados.

Proposição 1.15. *Suponha* $x_k f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *onde* x_k *denota a k-ésima coordenada de* x. *Então,* $\widehat{f}$ *é diferenciável com respeito a* ξ_k *e*

$$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial \xi_k}(\xi) = (\widehat{-2\pi i x_k f(x)})(\xi).$$

Demonstração: Basta usar o Teorema da Convergência Dominada 1.1. □

Definição 1.16. *A função* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *é diferenciável em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *com respeito a k-ésima variável se existir* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{f(x+he_k) - f(x)}{h} - g(x) \right|^p dx \longrightarrow 0 \quad \text{quando } h \longrightarrow 0.$$

Se a função g *existir (é única) é chamada a derivada parcial de* f *com respeito a k-ésima variável na norma* L^p.

Teorema 1.17. *Sejam* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* g *sua derivada parcial com respeito a k-ésima variável na norma* L^1. *Então* $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi)$.

Demonstração: Ver [19]. □

A partir dos resultados anteriores podemos obter as fómulas

$$P(D)\widehat{f}(\xi) = (P(\widehat{-2\pi ix)}f(x))(\xi),$$
$$(\widehat{P(D)}f)(\xi) = P(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi),$$

onde P é um polonômio em n variáveis e $P(D)$ denota o operador diferencial associado a P. Isto nos permite reduzir equações diferenciais lineares com coeficientes constantes em equações algébricas.

Exemplo 1.18. *A Transformada de Fourier da função $f(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$ é $\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$. Ver Exemplo 1.3 de [19], ou [7].*

Exemplo 1.19. *Consideremos a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in [0,1] \\ 0, & se \quad x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Claramente $f \in L^1(\mathbb{R})$, portanto podemos calcular sua Transformada de Fourier Se $\xi \neq 0$

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx \\
&= \int_0^1 e^{-2\pi ix\xi}dx \\
&= -\frac{1}{2\pi i\xi}(e^{-2\pi i\xi} - 1) \\
&= \frac{e^{-\pi i\xi}}{\pi\xi}\left(\frac{e^{\pi i\xi} - e^{-\pi i\xi}}{2i}\right) \\
&= \frac{e^{-\pi i\xi}}{\pi\xi}\sin(\pi\xi).
\end{aligned}$$

Se $\xi = 0$, temos que $\widehat{f}(0) = 1$. Observemos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$. Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)|d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right| d\xi.$$

Como $\frac{\sin(x)}{x} \notin L^1(\mathbb{R})$, segue que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

O exemplo anterior nos mostra que o fato de $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ não implica que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Este fato nos motiva a estudar a Transformada de Fourier em subespaços de $L^1(\mathbb{R}^n)$ que sejam invariantes sob a Transformada e Fourier.

1.2.1 A Transformada de Fourier no espaço de Schwartz

Definição 1.20. *Uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *está no espaço de Schwartz, denotado por* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*, se* $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e*

$$\|f\|_{(\alpha,\beta)} = \|x^\alpha \partial_x^\beta f\|_\infty < \infty.$$

Observemos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{C}$ e que $\|.\|_{(\alpha,\beta)}$ é uma seminorma para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 1.21. $f(x) = e^{-\|x\|^2}$ *é um exemplo clássico de função que pertence ao espaço de Schwartz.*

Exemplo 1.22. *O espaço das funções testes* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*
De fato, seja $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$*, então existe um compacto* $K \subset \mathbb{R}^n$ *tal que supp(*ϕ*)* $\subset K$*. Consideremos* $\rho > 0$ *tal que* $K \subset B_\rho(0)$*. Assim, dados* $\epsilon > 0$ *e* $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$*, temos para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *tal que* $\|x\| > \rho$ *que*

$$|x^\alpha \partial_x^\beta \phi(x)| = 0 < \epsilon.$$

Logo, $\phi \in \mathcal{S}$*.*

Para uma definição mais detalhada deste espaço, consulte [7].

Definição 1.23. *Seja* $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*. Dizemos que* $\varphi_j \longrightarrow 0$ *quando* $j \longrightarrow \infty$ *se para qualquer* $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^{2n}$ *tem-se que*

$$\|\varphi_j\|_{(\alpha,\beta)} \longrightarrow 0 \quad \textit{quando} \quad j \longrightarrow \infty.$$

Proposição 1.24. *Para* $1 \le p \le \infty$*, temos que* $\mathcal{S} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 1.25. *Em particular, para* $1 \le p < \infty$*, resulta que* $\mathcal{S}$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *em virtude da densidade de* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *e do fato que* $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

Proposição 1.26. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 1.27. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, *então* $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 1.28. *Seja* $f \in \mathcal{S}$.*Então,*

(i) $\widehat{D_x^\alpha f}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

(ii) $\xi^\alpha D_\xi^\alpha(\widehat{f}(\xi)) = \frac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}}(D_x^\beta \widehat{(x^\alpha f(x)}))(\xi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

(iii) $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} \widehat{f}(\xi) = 0$.

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 1.29. *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então* $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *e a aplicação* $f \in \mathcal{S} \mapsto \widehat{f} \in \mathcal{S}$ *é linear contínua.*

Demonstração: Ver [7]. □

Proposição 1.30. (Fórmula de inversão de Fourier) *Seja* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. *Então,*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} \widehat{f}(\xi)\, d\xi.$$

Demonstração: Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ arbitrária e consideremos $\lambda > 0$. Definamos

$$g(x) = \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right).$$

Então $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e em virtude do Teorema 1.14, temos que

$$\widehat{g}(\xi) = \lambda^n \widehat{\varphi}(\lambda\xi).$$

Aplicando o Teorema 1.14 em f e g, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\lambda^n \widehat{\varphi(\lambda x)} dx.$$

Fazendo uma mudança de variável do lado direito da igualdade acima, vem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{\varphi}(x)dx.$$

Mas,

$$\lim_{\lambda\to\infty} \widehat{f}(\xi)\varphi\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = \widehat{f}(\xi)\varphi(0) \quad \text{e} \quad \lim_{\lambda\to\infty} f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \widehat{\varphi}(x) = f(0)\widehat{\varphi}(x).$$

Agora, como $\widehat{\varphi}, \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e f e g são limitadas, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada 1.1 e obter

$$\varphi(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)d\xi = f(0)\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(x)dx.$$

Considerando $\varphi(x) = e^{-\pi\|x\|^2}$, cuja Transformada de Fourier é $\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}$, resulta que

$$f(0)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|x\|^2}dx = 1,$$

obtemos que

$$f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)d\xi.$$

Usando o Teorema 1.14, obtemos

$$f(x) = \tau_{-x}f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{\tau_{-x}f(0)})(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i(x\cdot\xi)}d\xi,$$

o que prova o desejado. □

Proposição 1.31. *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo topológico.*

Demonstração: Consideremos a aplicação

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi)e^{2\pi i(x\cdot\xi)}d\xi, \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n). \tag{1.1}$$

Notemos que

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x),$$

onde $\mathcal{F}(f)$ é a Transformada de Fourier $\widehat{f}$ de f. Como $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua, o mesmo vale para $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então as aplicações

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & \widehat{f} \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1}: & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \to & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & f & \mapsto & \check{f} \end{array}$$

onde $\check{f}$ está definida como em (1.1) são contínuas e pela Proposição 1.30, temos que

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = Id_{\mathcal{S}}. \tag{1.2}$$

Resulta das igualdades acima que $\mathcal{F}$ é uma bijeção. De fato, $\mathcal{F}$ é sobrejetiva, pois dado $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, existe $\mathcal{F}^{-1}(\varphi) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(\varphi)) = \varphi$ e injetiva, já que $\mathcal{F}(\varphi) = 0$ implica que $\varphi = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\varphi)) = 0$. Logo, $\mathcal{F}$ é um isomorfismo topológico. □

Proposição 1.32. (Relação Forte de Parseval) *Sejam $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\bar{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\bar{\widehat{g}}(\xi)d\xi.$$

Demonstração: Ver [7]. □

Corolário 1.33. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2.$$

Demonstração: Basta aplicar a proposição precedente com $f = g$. □

Este corolário nos leva a primeira extensão da Transformada de Fourier a uma classe mais ampla de funções.

Teorema 1.34. (Plancherel) *Existe uma bijeção isométrica*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Sendo $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ linear contínua e sendo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$ podemos estender $\mathcal{F}$, por continuidade, a uma única aplicação linear contínua

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n),$$

tal que $\mathcal{P}(f) = \widehat{f}$, para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Em verdade, $\mathcal{P}$ é definido por: dado $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então existe $(f_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f_k \to f$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Consideremos então

$$\mathcal{P}(f) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_k}.$$

Pelo Corolário 1.33, temos que

$$\|\mathcal{P}f\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|\widehat{f_k}\|_2 = \lim_{k\to\infty} \|f_k\|_2 = \|f\|_2,$$

o que prova que $\mathcal{P}$ é uma isometria, e portanto injetiva. Mostraremos agora que $\mathcal{P}$ é sobrejetiva. Com efeito, seja $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pela densidade de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ em $L^2(\mathbb{R}^n)$, existe $(\varphi_k) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\varphi_k \to h \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Mas, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $\psi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{\psi_k} = \varphi_k$. Como (φ_k) é uma sequência de Cauchy, segue que $(\widehat{\psi_k})$ também é de Cauchy. Usando o Corolário 1.33, resulta que

$$\|\widehat{\psi_k} - \widehat{\psi_l}\|_2 = \|\psi_k - \psi_l\|_2,$$

isto é, (ψ_k) é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n)$. Logo, existe $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi_k \to g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Donde,

$$\mathcal{P}\psi_k = \widehat{\psi_k} \to \mathcal{P}g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n),$$

ou seja

$$\varphi_k \to \mathcal{P}g \quad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Pela unicidade do limite, obtemos que $\mathcal{P}g = h$, o que prova a sobrejetividade da aplicação e encerra o teorema. $\square$

Teorema 1.35. *A Transformada inversa de Fourier $\mathcal{F}^{-1}$ pode ser definida pela fórmula*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \mathcal{F}(f)(-x), \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

onde $\mathcal{F}(f)$ é a Transformada de Fourier $\widehat{f}$ de f.

Demonstração: Ver [19]. □

Uma vez definida a Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e em $L^2(\mathbb{R}^n)$, podemos estender sua definição na classe de funções

$$L^1(\mathbb{R}^n) + L^2(\mathbb{R}^n) = \{f;\ f = f_1 + f_2;\ f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

De fato, se $f = f_1 + f_2$ com, $f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $f_2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, definimos $\widehat{f} = \widehat{f_1} + \widehat{f_2}$. Esta definição independe da decomposição de f escolhida, pois caso $f = f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, com $f_i, g_i \in L^i(\mathbb{R}^n)$, com $i = 1, 2$, temos que $h = f_1 + g_1 = g_2 - f_2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, $\widehat{h} = \widehat{f_1} - \widehat{g_1} = \widehat{g_2} - \widehat{f_2}$, o que implica que $\widehat{f_1} + \widehat{f_2} = \widehat{g_1} + \widehat{g_2}$. Como $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, com $1 \leq p \leq 2$, podemos definir a Transformada de Fourier nestes espaços.

Teorema 1.36. (Desigualdade de Hausdorff-Young) *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Então $\widehat{f} \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p$$

Demonstração: Ver [19]. □

1.2.2 A Transformada de Fourier no espaço das Distribuições Temperadas

Seja $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, isto é, o conjunto de todos os funcionais lineares contínuos sobre $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais precisamente, uma aplicação linear $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ está em $\mathcal{S}'$ se, e somente se, para toda $(\varphi_j) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$ a sequência numérica $T(\varphi_j) \longrightarrow 0$ quando $j \longrightarrow \infty$. Um elemento de $\mathcal{S}'$ é chamado de distribuição temperada.

Observação 1.37. *Pela Proposição 1.26, temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Resulta daí que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ é identificado com um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Exemplo 1.38. *As funções de crescimento polinomial.*

Diremos que uma função f tem crescimento polinomial L^p (ou simplesmente crescimento polinomial se $p = \infty$), se $\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para algum inteiro $k \geq 0$ e algum p com $1 \leq p \leq \infty$.

Definimos o funcional linear

$$L_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx.$$

Como L_f é linear, para verificar a continuidade, é suficiente considerar o caso $\varphi \longrightarrow 0$. Usando a desigualdade de Hölder, decorre que

$$\begin{aligned} |L_f(\varphi)| = \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{f(x)}{(1+|x|^2)^k}\right| |(1+|x|^2)^k\varphi(x)|dx \\ &\leq \left\|\frac{f}{(1+|x|^2)^k}\right\|_p \|(1+|x|^2)^k\varphi\|_{p'} \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

quando $\varphi \longrightarrow 0$.

Definição 1.39. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Definimos a Transformada de Fourier $\widehat{T}$ de T por*

$$\langle \widehat{T}, f\rangle = \langle T, \widehat{f}\rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Analogamente, podemos definir a Transformada de Fourier inversa por:

Definição 1.40. *Dado $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, definimos a Transformada de Fourier inversa $\check{T}$ de T por*

$$\langle \check{T}, f\rangle = \langle T, \check{f}\rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

onde $\check{f}$ é a Transformada de Fourier inversa de f.

Proposição 1.41. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e consideremos $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então,*

(i) $D^\alpha \widehat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{(x^\alpha T)}$.

(ii) $\widehat{(D^\alpha T)} = (2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha \widehat{T}$.

Demonstração: Ver [7]. □

Observação 1.42. *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que*

$$\begin{aligned} \widehat{T}_f(\varphi) &= T_f(\widehat{\varphi}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{\varphi}(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)\varphi(x)dx \\ &= T_{\widehat{f}}(\varphi), \end{aligned}$$

donde concluímos que a Definição 1.39 é consistente com a teoria de Transformada de Fourier desenvolvida anteriormente.

1.3 Os espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$. Se $u \in L^p(\Omega)$, sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Para maiores informações consulte [7]. Isto motiva o conceito de um novo espaço.

Definição 1.43. *Sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Dizemos que v é a derivada fraca de u e escrevemos $D^\alpha u = v$ quando*

$$\int_\Omega u D^\alpha \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\phi dx \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)$$

Definição 1.44. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p \leq \infty$, definimos o espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ como sendo*

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ \forall |\alpha| \leq k\},$$

onde $D^\alpha u$ é considerado no sentido fraco.

O espaço $W^{k,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{k,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{k,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach. (Ver [7])

Observação 1.45. *Quando $p = 2$, o espaço $W^{k,2}(\Omega)$ será denotado por $H^k(\Omega)$, que munido do produto interno*

$$(u, v)_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} dx$$

e com a norma induzida

$$\|u\|_{k,2} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

é um espaço de Hilbert.

Sabemos que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{k,p}(\Omega)$ para $k \geq 1$ (ver [7]). Motivado por esta razão, define-se o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{k,p}(\Omega)} = W_0^{k,p}(\Omega).$$

Quando $p = 2$, o espaço $W_0^{k,p}(\Omega)$ será representado por $H_0^k(\Omega)$.

Definição 1.46. *Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-k,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{k,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^k(\Omega)$ denota-se por $H^{-k}(\Omega)$.*

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, caracterizaremos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. Definimos para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}, \tag{1.3}$$

munido da norma

$$\|f\|_{H^s} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|\xi\|^2)^s |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.4}$$

a qual provém do produto interno

$$(f, g)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + ||\xi||^2)^s \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi, \tag{1.5}$$

onde $\widehat{f}$ é a Transformada de Fourier de f.

Se s é um inteiro positivo, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ definido em (1.3) coincide com o espaço $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, dado na Observação 1.45. Com efeito, sejam c_1, c_2 constantes reais positivas tais que

$$c_1 \sum_{|\alpha| \leq s} x^{2\alpha} \leq (1 + \|x\|^2)^s \leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq s} x^{2\alpha} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Identificando $L^2(\mathbb{R}^n)$ com seu dual temos a cadeia $W^{s,2}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Se $f \in W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$, resulta que $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
\|f\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&\leq c_2 \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} x^{2\alpha} |\widehat{f}(x)|^2 dx \\
&= c_2 \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |x^\alpha \widehat{f}|^2 dx \\
&= c \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{D^\alpha f(x)}| dx
\end{aligned}$$

que por Plancherel é igual a

$$c\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{R}^n}|D^\alpha f(x)|dx<\infty.$$

Assim, $W^{s,2}(\mathbb{R}^n)\subseteq H^s(\mathbb{R}^n)$.

Reciprocamente, suponhamos que $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$. Logo, pelo fato de

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(x)|^2dx\le\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|^2)^s|\widehat{f}(x)|^2dx\le\infty,$$

vem que $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Resta provar que $D^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ $\forall\alpha\in\mathbb{N}$, $|\alpha|\le s$. De fato, usando a Proposição 1.41, obtemos que

$$\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{D^\alpha f(x)}|^2dx=(2\pi)^{2|\alpha|}\sum_{|\alpha|\le s}\int_{\mathbb{R}^n}x^{2\alpha}|\widehat{f}(x)|^2dx$$

que por (1.7) é menor ou igual a

$$\frac{(2\pi)^{2|\alpha|}}{c_1}\int_{\mathbb{R}^n}(1+\|x\|^2)^s|\widehat{f}(x)|^2dx\le\infty.$$

Portanto, $\widehat{D^\alpha f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ e por Plancherel $D^\alpha f\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente $H^s(\mathbb{R}^n)\subseteq W^{s,2}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.47. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *Se $0\le s<s'$, então $H^{s'}(\mathbb{R}^n)\subset H^s(\mathbb{R}^n)$.*

2. *$H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert com respeito ao produto interno definido em (1.6).*

3. *Para todo $s\in\mathbb{R}$, o espaço de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^n)$.*

4. *Se $s_1\le s\le s_2$, com $s=\theta s_1+(1-\theta)s_2$, $0\le\theta\le1$, então*

$$\|f\|_{H^s}\le\|f\|^{\theta}_{H^{s_1}}\|f\|^{1-\theta}_{H^{s_2}}.$$

Demonstração: Ver [19]. □

Teorema 1.48. (Imersão de Sobolev) *Seja $s>\frac{n}{2}+k$, então $H^s(\mathbb{R}^n)$ é continuamente imerso em $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, o espaço das funções com k derivadas contínuas que se anulam no infinito. Em outras palavras, se $f\in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s>\frac{n}{2}+k$ então (após uma possível modificação de f em um conjunto de medida nula) $f\in C^k_\infty$ e*

$$\|\widehat{f}\|_{C^k_\infty}\le c_s\|f\|_{H^s}.$$

Demonstração: Se $k = 1$ primeiramente mostraremos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, com

$$\|\widehat{f}\|_1 \leq c_s \|f\|_{H^s}. \tag{1.7}$$

Se $s > \frac{n}{2}$, a integral $\int_{\mathbb{R}^n}(1+\xi^2)^{-\frac{s}{2}}d\xi$ é finita. Logo, usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)|(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \\
&\leq \|f\|_{H^s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+\xi^2)^{\frac{s}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c_s \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

Como $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Portanto, usando os Teorema 1.35 e Teorema 1.36, obtemos

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}|\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(f))(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \text{ess}|\mathcal{F}(\mathcal{F}(f))(-x)| =\leq \|\widehat{f}\|_1 \leq c_s\|f\|_{H^s}.$$

Se $k \geq 1$, temos que se $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ com $s > \frac{n}{2} + k$, então para $\alpha \in \mathbb{N}^n$ segue $\widehat{\partial_x^\alpha f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pois

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\partial_x^\alpha f}(\xi)|d\xi &= (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^\alpha |\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{|\alpha|}{2}} |\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}-\frac{n}{4}} |\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(\xi)|d\xi \\
&\leq (2\pi i)^{|\alpha|} \|f\|_{H^s}.
\end{aligned}$$

e

$$\|\partial_x^\alpha f\|_\infty \leq \|\widehat{\partial_x^\alpha f}\|_1 \leq \|(2\pi i\xi)^\alpha \widehat{f}\| \leq c_s\|f\|_{H^s}.$$

Isto encerra a prova. □

1.4 Resultados auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

Teorema 1.49. (Ponto Fixo de Banach) *Sejam (X, d) um espaço métrico completo não vazio e $T : X \to X$ uma aplicação tal que existe $k \in [0, 1)$ satisfazendo*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y) \qquad \forall x, y \in X.$$

Então existe um único ponto x_0 de X tal que $T(x_0) = x_0$.

Demonstração: Ver [15]. □

Definição 1.50. *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínua todas as aplicações $f \in E'$. Quando $(x_n)_{n\in N}$ é uma sequência de E, a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E')$, denotamos*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.51. *Seja E um espaço de Banach reflexivo e seja $(x_n)_{n\in N}$ uma sequência limitada em E, então, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in N}$ e $x \in E$, tal que $x_{n_k} \rightharpoonup x$ em E.*

Demonstração: Ver [6]. □

Proposição 1.52. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R})$. Então $u \in L^\infty(\mathbb{R})$ e*

$$\|u\|_\infty \leq \|u\|_{1,2}.$$

Demonstração: Ver [28]. □

Lema 1.53. (Lema de Lions) *Seja (u_ν) uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q,

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [21]. □

Teorema 1.54. (Teorema de Aubin-Lions) *Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde B_0 e B_1 são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos W munido da norma

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver [21]. □

Teorema 1.55. (Riez-Thorin) *Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $p_0 \neq p_1$ e $q_0 \neq q_1$. Seja T um operador limitado de $L^{p_0}(X)$ em $L^{q_0}(Y)$ e de $L^{p_1}(X)$ em $L^{q_1}(Y)$ com*

$$M_0 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{q_0}}{\|f\|_{p_0}} \quad e \quad M_1 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Tf\|_{q_1}}{\|f\|_{p_1}}.$$

Então T é um operador limitado de $L^{p_\theta}(X)$ em $L^{q_\theta}(Y)$ com norma M_θ tal que

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

onde

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1},\ \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1},\ \theta \in (0,1).$$

Demonstração: Ver [19]. □

Definição 1.56. *Seja $0 < \alpha < n$. O potencial de Riez de ordem α, denotado por I_α, é definido por*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy,$$

onde $c_\alpha = \pi^{-\frac{n}{2}} 2^{-\alpha} \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{\alpha}{2}) / \Gamma(\frac{\alpha}{2})$.

Teorema 1.57. (Hardy-Littlewood-Sobolev) *Seja $0 < \alpha < n$, $1 \leq p < q < \infty$, com $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}$.*

1. *Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, então a integral $I_\alpha f(x)$ é absolutamente convergente para algum $x \in \mathbb{R}^n$.*

2. *Se $p > 1$, então $\|I_\alpha(f)\|_q \leq c_{p,\alpha,n} \|f\|_p$.*

Demonstração: Ver [19]. □

1.5 A equação de Schrödinger linear homogênea

Nesta seção vamos estudar o problema de valor inicial (PVI) para a equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} u_t = i\Delta u & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{1.8}$$

Nosso objetivo será encontrar o grupo de Schrödinger e estudar as suas propriedades, as quais serão de suma importância para provar a existência e unicidade de soluções dos problemas em questão.

Consideremos $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, iremos procurar solução $u \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$. Usando a Transformada de Fourier em relação a variável espacial, obtemos

$$\begin{cases} \widehat{u}_t(\xi,t) = \widehat{i\Delta u}(\xi,t) = -4\pi^2 i|\xi|^2\widehat{u}(\xi,t) & (\xi,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, \\ \widehat{u}(\xi,0) = \widehat{u}_0(\xi). \end{cases}$$

Assim, reduzimos o problema de equações diferenciais parcias a uma EDO de primeira ordem. A solução desta equação diferencial ordinária é dada por

$$\widehat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2 it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi). \tag{1.9}$$

Agora, aplicando a Transformada inversa em ambos os lados de (1.9), encontramos

$$\begin{aligned} u(x,t) &= (e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{u_0}(\xi))^\vee \\ &= \frac{e^{\frac{i|x|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} * u_0(x). \end{aligned} \tag{1.10}$$

Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $t \in \mathbb{R}$, definamos

$$e^{it\Delta}f(x) = (e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi))^\vee.$$

Vemos então que a solução do problema linear homogêneo (1.8) é dado por

$$u(x,t) = e^{it\Delta}u_0(x).$$

Proposição 1.58. *Se $u = u(x,t)$ é uma solução de (1.8), então*
$u_1(x,t) = e^{i\theta}u(x,t)$, $\theta \in R$ fixado,
$u_2 = u(x - x_0, t - t_0)$, com $x_0 \in R^n$, $t_0 \in \mathbb{R}$ fixados,

$u_3(x,t) = u(Ax,t)$, *onde* A *é uma matriz ortogonal* $n \times n$,

$u_4(x,t) = u(x - 2x_0t, t)e^{i(x\cdot x_0 - |x_0|^2 t)}$, *com* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *fixado,*

$u_5(x,t) = \lambda^{\frac{n}{2}} u(\lambda x, \lambda^2 t)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *fixado,*

também satisfazem a equação (1.8).

Demonstração: Ver [19]. $\square$

Teorema 1.59. *1. Para todo* $t \in \mathbb{R}$, $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *é uma isometria, isto é*

$$\|e^{it\Delta} f\|_2 = \|f\|_2.$$

2. $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$, *com* $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{-it\Delta} = (e^{it\Delta})^*$.

3. $e^{i0\Delta} = 1$.

4. Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *tem-se que a função* $\phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ *definida por* $\phi_f(t) = e^{it\Delta} f$ *é uma função contínua; isto é, descreve uma curva em* $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: 1. Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Então, pela desigualdade de Plancherel

$$\begin{aligned} \|e^{it\Delta} f\|_2^2 &= \|(e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi))^\vee\|_2 \\ &= \|e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f}(\xi))\|_2 \\ &= \|\widehat{f}\|_2 \\ &= \|f\|_2. \end{aligned}$$

Portanto $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria.

2. Temos que

$$\begin{aligned} e^{i(t+t')\Delta} f &= (e^{-4\pi i(t+t')|\xi|^2}\widehat{f}(\xi))^\vee \\ &= (e^{-4\pi i(t)|\xi|^2}e^{-4\pi i(t')|\xi|^2}\widehat{f})^\vee \\ &= \{e^{-4\pi i(t)|\xi|^2}[(e^{-4\pi i(t)|\xi|^2}\widehat{f})^\vee]^\wedge\}^\vee. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} e^{i(t+t')\Delta} f &= \{e^{-4\pi i(t)|\xi|^2}[e^{it\Delta} f]^\wedge\}^\vee \\ &= e^{it\Delta}e^{it'\Delta} f. \end{aligned}$$

Logo, $e^{i(t+t')\Delta} = e^{it\Delta}e^{it'\Delta}$ Por outro lado, usando argumentos similares ao Teorema 1.14, segue que

$$\begin{aligned}
(e^{it\Delta}f, g)_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee}\overline{g(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f})(\overline{g(x)})^{\vee}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f})\overline{\widehat{g}(x)}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\overline{e^{4\pi it|\xi|^2}\widehat{g}(x)})dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(\overline{e^{4\pi it|\xi|^2}\widehat{g}(x)})^{\wedge}dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f\overline{(e^{4\pi it|\xi|^2}\widehat{g}(x))^{\vee}}dx \\
&= (f, e^{-it\Delta}g)_2.
\end{aligned}$$

Donde obtemos que $e^{-it\Delta} = (e^{it\Delta})^*$.

3. Basta notar que

$$\begin{aligned}
e^{-i0\Delta}f &= (e^{-4\pi i0|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee} \\
&= (\widehat{f})^{\vee} = f.
\end{aligned}$$

4. Mostraremos agora que $\phi_f : \mathbb{R} \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é contínua. De fato,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t'} \|\phi_f(t) - \phi_f(t')\|_2 &= \lim_{t\to t'} \|e^{it\Delta}f - e^{it'\Delta}f\|_2 \\
&= \lim_{t\to t'} \|(e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee} - (e^{-4\pi it'|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee}\|_2 \\
&= \lim_{t\to t'} \|(e^{-4\pi it|\xi|^2}\widehat{f} - e^{-4\pi it'|\xi|^2}\widehat{f})^{\vee}\|_2 \\
&= \lim_{t\to t'} \|[(e^{-4\pi it|\xi|^2} - e^{-4\pi it'|\xi|^2})\widehat{f}]^{\vee}\|_2 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

onde a última igualdade decorre do Teorema 1.1. □

Proposição 1.60. *Sejam $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ e $p' \in [1, 2]$. Então $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua e vale a desigualdade*

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq c|t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|f\|_{p'}. \tag{1.11}$$

Demonstração: Pelo teorema anterior temos que $e^{it\Delta} : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ é uma isometria. Seja $f \in S(\mathbb{R}^n)$. Usando (1.10) e o Teorema 1.10 vem que

$$\begin{aligned}
\|e^{it\Delta}f\|_\infty &\leq \|\frac{e^{\frac{i|.|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}} * f\|_\infty \\
&\leq \|\frac{e^{\frac{i|.|^2}{4t}}}{(4\pi it)^{\frac{n}{2}}}\|_\infty \|f\|_1 \\
&\leq c|t|^{-\frac{n}{2}}\|f\|_1.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\sup_{f\neq 0} \frac{\|e^{it\Delta}f\|_\infty}{\|f\|_1} \leq c|t|^{-\frac{n}{2}}.$$

Logo, segue do Teorema de Riesz-Thorin que $e^{it\Delta} : L^{p'}(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ é limitado e

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq (c|t|^{-\frac{n}{2}})^\theta 1^{1-\theta}\|f\|_p,$$

onde

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} + \theta,\ \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2},\ \ \theta \in (0,1).$$

Portanto,

$$\|e^{it\Delta}f\|_p \leq c|t|^{-\frac{n}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|f\|_{p'}.$$

□

Definição 1.61. *Dizemos que o par (p, q) é admissível se*

$$\frac{2}{q} = \frac{n}{2} - \frac{n}{p}$$

e

$$\begin{cases} 2 \leq p < \frac{2n}{n-2} & se \quad n \geq 3 \\ 2 \leq p < \infty & se \quad n = 2 \\ 2 \leq p \leq \infty & se \quad n = 1 \end{cases}$$

Teorema 1.62. (Estimativas de Strichartz) *As seguintes propriedades são válidas:*

1. *Para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ função $t \mapsto e^{it\Delta}u_0$ pertence a*

$$C(\mathbb{R}, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^q(\mathbb{R}, L^p(\mathbb{R}^n))$$

para todo par admissível (p,q). Além disso, existe c tal que

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{L^q(\mathbb{R},L^p)} \leq c\|u_0\|_2 \quad \forall u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

2. *Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ (limitado ou não), $J = \bar{I}$ e $t_0 \in J$. Se (p_1, q_1) é um par admissível e $f \in L^{q_1'}(I, L^{p_1'}(\mathbb{R}^n))$, então para todo par admissível (p_0, q_0), a função*

$$t \mapsto \theta_f(t) = \int_{t_0}^{t} e^{i\Delta(t-s)} f(s)ds \quad \textit{para } t \in I$$

pertence a $C(J, L^2(\mathbb{R}^n)) \cap L^{q_2}(I, L^{p_2}(\mathbb{R}^n))$. Além disso, existe uma constante c independente de I tal que

$$\|\theta_f\|_{L^{q_2}(I,L^{p_2})} \leq c\|f\|_{L^{q_1'}(I,L^{p_1'})} \quad \forall f \in L^{q_1'}(I, L^{p_1'}(\mathbb{R}^n))$$

Demonstração: Ver [9] □

Teorema 1.63. *Se $n = 1$, então*

$$\sup_x \int_{\mathbb{R}} |D_x^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} f(x)|^2 dt \leq c\|f\|_2^2. \tag{1.12}$$

Se $n \geq 2$, então para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$

$$\sup_{x_j} \int_{\mathbb{R}^n} |D_{x_j}^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} f(x)|^2 dx_1 \cdots dx_{j-1} dx_{j+1} \cdots dx_n dt \leq c\|f\|_2^2, \tag{1.13}$$

onde $D_{x_j}^{\frac{1}{2}} g(x,t) = ((2\pi|\xi_j|)^{\frac{1}{2}} \widehat{g}(\xi,t))^{\vee}(x,t)$ denota a derivada homogênea de ordem $\frac{1}{2}$ na variável x_j.

Demonstração: Ver [19]. □

Corolário 1.64.

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \int_{|x|\leq R} |D_x^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} f|^2(x) dx dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq cR\|f\|_2, \tag{1.14}$$

onde $D_x^{\frac{1}{2}} v(x,t) = ((2\pi|\xi|)^{\frac{1}{2}} \widehat{v}(\xi,t))^{\vee}$. Note que combinando este resultado com a propriedade da solução de ser invariante por translação, obtemos

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n,\, R>0} \left(\frac{1}{R} \int_{\mathbb{R}} \int_{B_R(x_0)} |D_x^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} f(x)|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|f\|_2. \tag{1.15}$$

Demonstração: Se $n = 1$, a desigualdade (1.14) segue de (1.12). Consideremos $n \geq 2$ e definamos $D_j\{\xi \in \mathbb{R}^n; |\xi_j| > \frac{1}{\sqrt{2n}}|\xi|\}$, com $j = 1, \cdots, n$. Temos que $\bigcup_{j=1}^{n} D_j = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

De fato, $\bigcup_{j=1}^{n} D_j \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ segue da definição de D_j. Seja $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, então $\xi_i \neq 0$ para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$. Seja $\xi_k \in R^n$ tal que $|\xi_k| \geq |\xi_i|$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Temos que

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &= \xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2 \\ &\leq n\xi_k^2 \\ &< 2n\xi_k^2. \end{aligned}$$

Logo $|\xi_k| > \frac{|\xi|}{\sqrt{2n}}$, donde obtemos $\xi \in D_k$. Consideremos $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ uma partição subordinada da cobertura $\{D_j\}_{j=1}^n$. Usando linearidade, é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{|x| \leq R} |e^{it\Delta} f(x)|^2 dx dt \leq cR \|D_x^{-\frac{1}{2}} f\|_2^2 = cR \| |\xi|^{-\frac{1}{2}} \widehat{f} \|_2^2.$$

Em virtude de (1.19), para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{|\bar{x}| \leq R} |D_{x_j}^{\frac{1}{2}} e^{it\Delta} D_{x_j}^{-\frac{1}{2}} g(x)|^2 d\bar{x} dt &= \int_{\mathbb{R}} \int_{|\bar{x}| \leq R} |e^{it\Delta} g(x)|^2 d\bar{x} dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} |e^{it\Delta} g(x)|^2 d\bar{x} dt \\ &\leq c \|D_{x_j}^{-\frac{1}{2}} g\|_2^2, \end{aligned}$$

onde $\bar{x} = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_n)$. Assim, para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{R} \int_{\mathbb{R}} \int_{|\bar{x}| \leq R} |e^{it\Delta} g(x)|^2 d\bar{x} dt dx_j &= \int_{\mathbb{R}} \int_{|x| \leq R} |e^{it\Delta} g(x)|^2 dx dt \\ &\leq cR \|D_{x_j}^{-\frac{1}{2}} g\|_2^2. \end{aligned}$$

Portanto, denotando $\widehat{f_j} = \widehat{f} \phi_j$, $j = 1, \cdots, n$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \int_{|x| \leq R} |e^{it\Delta} f(x)|^2 dx dt &\leq c \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \int_{|x| \leq R} |e^{it\Delta} f_j(x)|^2 dx dt \\ &\leq cR \sum_{j=1}^{n} \|D_{x_j}^{-\frac{1}{2}} f_j\|_2^2 \\ &= cR \sum_{j=1}^{n} \| |\xi_j|^{-\frac{1}{2}} \widehat{f_j} \|_2^2 \\ &= cR \sum_{j=1}^{n} \| |\xi_j|^{-\frac{1}{2}} \widehat{f} \phi_j \|_2^2 \\ &\leq cR \| |\xi|^{-\frac{1}{2}} \widehat{f} \|_2^2 \\ &= cR \|D_x^{-\frac{1}{2}} f\|_2^2, \end{aligned}$$

o que encerra a prova. □

Proposição 1.65. *Sejam $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $u_0 \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, tal que $x^\alpha u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Se $u(t) = e^{it\Delta}u_0$ então*

$$D^\alpha e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u(t) \in C((\mathbb{R}\setminus\{0\}); L^2(\mathbb{R}^n)),$$

e para todo $t \neq 0$, temos que

$$(2|t|)^{|\alpha|}\|D^\alpha(e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u)\|_2 = \|x^\alpha u_0\|_2.$$

Demonstração: Para cada $j \in \{1, \cdots, n\}$, definamos o operador P_j sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$P_j u(t,x) = (x_j + 2it\partial_j)u(x,t)$$

e para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, definamos o operador P_α sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ por

$$P_\alpha = \prod_{j=1}^{n} P_j^{\alpha_j}$$

Consideremos uma função suave $u : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{C}$. Então

$$\begin{aligned} 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}}\frac{\partial}{\partial_{x_j}}(e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u) &= 2ite^{i\frac{|x|^2}{4t}}\left(-\frac{2ix_j}{4t}e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u + e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}\frac{\partial u}{\partial_{x_j}}\right) \\ &= (x_j + 2it\partial_j)u \\ &= P_j u(x,t). \end{aligned}$$

No caso geral vale

$$P_\alpha u(x,t) = (2it)^{|\alpha|}e^{i\frac{|x|^2}{4t}}D^\alpha(e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u). \tag{1.16}$$

Por outro lado, um cálculo formal mostra que P_j comuta com $(\partial_t - i\Delta)$ e, consequentemente, P_α também comuta com $(\partial_t - i\Delta)$. Deste modo, se u é uma solução suave da equação linear de Schrödinger, então $P_\alpha u$ também é solução. Em particular, se consideramos $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que $u = e^{it\Delta}u_0$ e $u_\alpha = P_\alpha u$ são soluções da equação linear de Schrödinger. Além disso,

$$u_\alpha(t) = e^{it\Delta}u_\alpha(0) = e^{it\Delta}x^\alpha u_0.$$

Logo, $\|u_\alpha\|_2 = \|x^\alpha u_0\|_2$ e (1.16) resulta

$$(2|t|)^{|\alpha|}\|D^\alpha(e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u)\|_2 = \|x^\alpha u_0\|_2. \tag{1.17}$$

Por densidade obtemos o desejado. □

Corolário 1.66. *Seja* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *e assuma que* $(1+|x|^m)u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *para algum inteiro* m. *Então* $e^{-i\frac{|x|^2}{4t}}u(t) \in C((\mathbb{R}\setminus\{0\}), H^m(\mathbb{R}^n))$ *e se* k *é a parte inteira de* $\frac{m}{2}$, *então*

$$u \in \bigcap_{0\leq j\leq k} C^j((\mathbb{R}\setminus\{0\}); H^{m-2j}_{loc}(\mathbb{R}^n)).$$

Em particular, se $(1+|x|^m)u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *para todo inteiro* m *não negativo, então* $u \in C^\infty(\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [9]. □

Teorema 1.67. *Sejam* $\lambda \in \mathbb{R}$, $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ *e* $u \in C(\mathbb{R}; L^2(\mathbb{R})) \cap L^4_{loc}(\mathbb{R}; L^\infty(\mathbb{R}))$ *uma solução do problema*

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \lambda|u|^2u = 0 & \text{em } \mathbb{R}\times[0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Se u_0 *tem suporte compacto, então* $u \in C^\infty((0,T)\times\mathbb{R})$

Demonstração: Ver [9]. □

Teorema 1.68. *Seja* $u \in C((0,T); H^2(\mathbb{R}^n))$ *uma solução forte da equação*

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda|u|^{\alpha-1}u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n\times(0,T) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Se existirem $t_1, t_2 \in (0,T)$, $t_1 \neq t_2$, $\rho > 2$ *e* $\beta > 0$ *tais que*

$$u(\cdot,t_1), u(\cdot,t_2) \in H^1_{loc}(e^{\beta|x|^\rho}dx),$$

então $u \equiv 0$.

Demonstração: Ver [12]. □

Capítulo 2

A equação de Schrödinger linear não homogênea

Neste capítulo, estudaremos resultados de existência, unicidade, dependência contínua e persistência com relação ao dado inicial da equação de Schrödinger linear

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + ib(x)u = 0 \\ u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, t \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde b satisfaz a seguinte condição:

$$\text{(H)} \begin{cases} b \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n) \text{ é uma função não negativa e,} \\ b(x) \geq \alpha_0 > 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n \setminus B(0,R). \end{cases}$$

Salientamos que se u é solução de (2.1), pelo Princípio de Duhamel, u satisfaz a equação integral

$$u(x,t) = e^{it\Delta}u_0 - \int_0^t e^{i(t-t')\Delta}b(x)u(t')dt', \tag{2.2}$$

onde $e^{it\Delta}$ é o grupo unitário associado a equação de Schrödinger linear homogênea.

Note que se $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, então não é possível resolver (2.1), pois não é possível colocar $u(t)$ em um espaço vetorial normado para quase todo $t \in [0,T]$, uma vez que não faz sentido $\Delta u(t)$ (exceto no sentido das distribuições). Como então resolver (2.1) para dados mais fracos? Vamos dar sentido para resolver a equação (2.1). Diremos que o problema (2.1) está bem colocado (localmente ou globalmente) se u satisfaz a equação integral (2.2). Mais precisamente,

Definição 2.1. *Diremos que (2.2) está localmente bem colocada num espaço vetorial normado X, se existe $0 < T < \infty$ tal que a função*

$$\begin{aligned} F \ &: \ X \to C([0,T];X) \\ u_0 &\mapsto F(u_0) = u. \end{aligned}$$

onde $u = u(t)$ representa a solução de (2.2), é contínua.

Se a função F acima definida é contínua para todo $T > 0$, diremos que a equação (2.2) é globalmente bem colocada.

2.1 Boa colocação em $L^2(\mathbb{R}^n)$

Nesta seção estudaremos a boa colocação local para o problema (2.1) com dados iniciais em $L^2(R^n)$.

Teorema 2.2. *Para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, existe um tempo positivo $T' = T'(n, \|b\|_\infty)$ e uma única solução u da equação integral (2.2), no intervalo $[0, T']$ com $u \in C([0, T']; L^2(\mathbb{R}^n))$. Além disso, para todo $T'' < T'$, existe uma vizinhança V de u_0 em $L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que a função*

$$\begin{array}{cccc} F: & V & \to & C([0,T'']; L^2(\mathbb{R}^n)) \\ & v_0 & \mapsto & v \end{array}$$

é lipschitziana.

Demonstração: Para todo par (T', a) de constantes positivas, definamos o espaço métrico completo

$$E(T', a) = \{v \in C([0, T']; L^2(\mathbb{R}^n)) : \|v\| = \sup_{[0,T']} \|v(t)\|_2 \leq a\}.$$

Nosso objetivo é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para operador

$$\Phi_{u_0}(u)(t) = \Phi(u)(t) = e^{it\Delta}u_0 - \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(x)u(t')dt'.$$

Com efeito, seja $u \in E(T', a)$, então

$$\|\Phi(u)(t)\|_2 = \|e^{it\Delta}u_0 - \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(x)u(t')dt'\|_2.$$

Usando a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4) e as propriedades do grupo, resulta em

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|e^{it\Delta}u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(.)u(t')dt'\|_2 \\
&= \|u_0\|_2 + \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)u(t')dt'\|_2 \\
&= \|u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)u(t')dt'\|_2 \\
&\leq \|u_0\|_2 + \int_0^t \|e^{-it'\Delta}b(.)u(t')\|_2 dt' \\
&= \|u_0\|_2 + \int_0^t \|b(.)u(t')\|_2 dt' \\
&\leq \|u_0\|_2 + \|b\|_\infty \int_0^t \|u(t')\|_2 dt'.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
|\!|\!|\Phi(u)|\!|\!| &\leq \|u_0\|_2 + \|b\|_\infty |\!|\!|u|\!|\!| \sup_{[0,T']}\int_0^t dt' \\
&\leq \|u_0\|_2 + \|b\|_\infty aT' \\
&\leq c(\|u_0\|_2 + aT'),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

onde $c = \max\{1, \|b\|_\infty\}$.

Considerando $a = 2c\|u_0\|_2$, obtemos

$$|\!|\!|\Phi(u)|\!|\!| \leq c\|u_0\|_2(1 + 2cT'),$$

Se $0 < T' < \dfrac{1}{2c}$, segue que $\Phi(E(T', a)) \subset E(T', a)$.

Sejam agora $u, v \in E(T', a)$. Aplicando novamente a desigualdade de Minkowski e as propriedades do grupo, segue que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_2 &= \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2 \\
&= \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2 \\
&= \|\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2 \\
&\leq \int_0^t \|e^{-it'\Delta}b(.)(v(t') - u(t'))\|_2 dt' \\
&= \int_0^t \|b(.)(v(t') - u(t'))\|_2 dt' \\
&\leq \|b\|_\infty \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_2 dt'.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Assim

$$\|\Phi(v) - \Phi(u)\| \leq cT'\|v - u\|. \tag{2.6}$$

Considerando $T' < \frac{1}{2c}$, obtemos que Φ é uma contração. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, garantimos a existência de uma solução u da equação (2.2).

Provemos a unicidade. Sejam $u, v \in C([0, T']; L^2(\mathbb{R}^n))$ duas soluções da equação

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + ib(x)u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t \in [0, T'] \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.7}$$

com mesmo dado inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mostraremos que $u \equiv v$. Com efeito, definamos

$$\theta(t) = \|u(t) - v(t)\|_2, \qquad t \in [0, T'].$$

Notemos que θ é contínua, e $\theta(0) = \|u(0) - v(0)\|_2 = 0$. Suponhamos que exista $t \in [0, T']$ tal que $\theta(t) > 0$. Desta forma, definamos $t_0 = \inf\{t \in [0, T'] : \theta(t) > 0\}$. Pela definição de ínfimo, temos que $\theta(t_0) = 0$, isto é, $u(t_0) = v(t_0)$. Além disso, pela continuidade de θ, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (t_0, t_0 + \delta) \subset [0, T']$ então $\theta(t) > 0$. Definamos $\tilde{u}(x, t) = u(x, t + t_0)$ e $\tilde{v}(x, t) = v(x, t + t_0)$. Assim, $\tilde{u}, \tilde{v} \in C((0, \delta); L^2(\mathbb{R}^n))$ são soluções de

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + \lambda |u|^2 u + ib(x)u = 0, & x \in \mathbb{R}^n, \ t \in (0, \delta) \\ u(x, t_0) = u_{t_0}(x), \end{cases} \tag{2.8}$$

com $\tilde{u}(t) \neq \tilde{v}(t)$, para todo $t \in (0, \delta)$. Procedendo de forma análogo a (2.5) e (2.6), obtemos

$$\|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta \quad \leq \quad K(\delta)\|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta$$

onde $\|v\|_\delta = \sup\limits_{(0,\delta)} \|v(t)\|_2$. Escolhendo δ suficientemente pequeno tal que $K(\delta) < 1$ obtemos que $\|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta = 0$. Assim $\theta(t) = \|\tilde{v}(t - t_0) - \tilde{u}(t - t_0)\|_2 = \|v(t) - u(t)\|_2 = 0$ se $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Absurdo!

Agora provaremos a continuidade de $\Phi(u)(t)$ com respeito a u_0. Sejam u, v duas soluções de (2.2) correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0. Então

$$v(t) - u(t) = e^{it\Delta}(v_0 - u_0) - \int_0^t e^{i\Delta(t-t')} b(x)(v(t') - u(t'))dt'. \tag{2.9}$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}\|v(t)-u(t)\|_2 &\leq \|e^{it\Delta}(v_0-u_0)\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(x)(v(t')-u(t'))dt'\|_2 \\ &= \|v_0-u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(x)(v(t')-u(t'))dt'\|_2.\end{aligned}$$

Prosseguindo de maneira análoga a (2.5) e (2.6), obtemos que

$$|||v-u||| \leq \|v_0-u_0\|_2 + cT'|||v-u|||. \tag{2.10}$$

Pela escolha de T', segue que $1 > cT'$ desse modo,

$$|||v-u||| \leq k\|v_0-u_0\|_2, \tag{2.11}$$

com $k = \dfrac{1}{1-cT'}$. O que conclui a demostração do teorema. □

Observação 2.3. *Notemos que como T' depende apenas de n e $\|b\|_\infty$, a solução u obtida no Teorema 2.2 é global.*

De fato, podemos aplicar o Teorema 2.2 com dado inicial $u_{T'} = u(x,T')$, para obter uma solução u no intervalo de tempo $[T', 2T']$. Aplicando sucessivamente o Teorema 2.2 podemos concluir que a solução u se estende globalmente no tempo.

O mesmo argumento poderá ser usado para mostrar que as soluções obtidas nas teorias H^1 e H^2 são globais.

2.2 Boa colocação em $H^1(\mathbb{R}^n)$

Mostraremos agora a existência de solução para o problema 2.1 com dados iniciais em $H^1(\mathbb{R}^n)$. O resultado a seguir é similar ao Teorema 2.2, assim como sua demonstração.

Teorema 2.4. *Dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existe $T' = T'(n, \|b\|_{1,\infty}) > 0$ e uma única solução u da equação integral (2.2) no intervalo $[0,T']$, com $u \in C([0,T'], H^1(\mathbb{R}^n))$. Mais ainda, para todo $T'' < T'$, existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que a função*

$$\begin{array}{rccc} F: & V & \to & C([0,T'']; H^1(\mathbb{R}^n)) \\ & v_0 & \mapsto & v \end{array}$$

é lipschitziana.

Demonstração: Consideremos

$$E(T',a) = \{v \in C([0,T']; H^1(\mathbb{R}^n)) : \|\|v\|\| = \sup_{[0,T']} \|v(t)\|_{1,2} \le a\}.$$

Mostraremos que existem constantes T' e a tais que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$. De fato, seja $u \in E(T',a)$, temos que

$$\|\|\Phi(u)\|\| = \sup_{[0,T']} \|\Phi(u)(t)\|_{1,2} \le \sup_{[0,T']} \|\Phi(u)(t)\|_2 + \sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_2.$$

Por (2.3), vem que

$$\|\Phi(u)(t)\|_2 \quad \le \quad \|u_0\|_2 + \|b\|_\infty \int_0^t \|u(t')\|_2 dt'.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T']} \|\Phi(u)(t)\|_2 &\le \|u_0\|_2 + \|b\|_\infty T' \sup_{[0,T']} \|u(t')\|_2 \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + \|b\|_{1,\infty} T' \sup_{[0,T']} \|u(t')\|_{1,2} \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + \|b\|_{1,\infty} T' a. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Minkowski (Teo. 1.9) e pelo fato de $e^{it\Delta}$ ser um operador limitado e isométrico em $L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos

$$\begin{aligned} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\le \|e^{it\Delta}\nabla u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}\nabla(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\ &= \|\nabla u_0\|_2 + \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta}\nabla(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\ &= \|\nabla u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{-it'\Delta}\nabla(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\ &\le \|\nabla u_0\|_2 + \int_0^t \|e^{-it'\Delta}\nabla(b(.)u(t'))\|_2 dt' \\ &= \|\nabla u_0\|_2 + \int_0^t \|\nabla(b(.)u(t'))\|_2 dt' \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + \int_0^t \|\nabla b(.)u(t') + b(.)\nabla u(t')\|_2 dt' \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + \int_0^t (\|\nabla b(.)u(t')\|_2 + \|b(.)\nabla u(t')\|_2) dt' \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + \|b\|_{1,\infty}\int_0^t (\|u(t')\|_2 + \|\nabla u(t')\|_2) dt' \\ &\le \|u_0\|_{1,2} + 2\|b\|_{1,\infty}\int_0^t \|u(t')\|_{1,2} dt'. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_{1,2} + 2\|b\|_{1,\infty} T' \sup_{[0,T']} \|u(t')\|_{1,2} \\ &\leq \|u_0\|_{1,2} + 2\|b\|_{1,\infty} T' a. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Por conseguinte,

$$|||\Phi(u)||| \leq c(\|u_0\|_{1,2} + T'a).$$

onde $c = \max\{2, 3\|b\|_{1,\infty}\}$.

Considerando $a = 2c\|u_0\|_{1,2}$, resulta que

$$|||\Phi(u)||| \leq c\|u_0\|_{1,2}(1 + 2cT'),$$

Se $0 < T' < \dfrac{1}{2c}$ obtemos o desejado. Provemos agora que $\Phi : E(T', a) \to E(T', a)$ é uma contração.

Sejam $u, v \in E(T', a)$, então

$$\sup_{[0,T']} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_{1,2} \leq \sup_{[0,T']} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_2 + \sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(v)(t) - \nabla\Phi(u)(t)\|_2.$$

Por (1.5), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|b\|_\infty \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_2 dt' \\ &\leq \|b\|_{1,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{1,2} dt'. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\sup_{[0,T']} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_2 \leq c\|b\|_{1,\infty} T' |||v - u|||. \tag{2.14}$$

Usando novamente as propriedades do grupo e a desigualdade de Minkowski, temos que

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(v)(t) - \nabla\Phi(u)(t)\|_2 &= \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}[\nabla(b(.)v(t')) - \nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2 \\
&= \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta}[\nabla(b(.)v(t')) - \nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2 \\
&= \|\int_0^t e^{-it'\Delta}[\nabla(b(.)v(t')) - \nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2 \\
&\leq \int_0^t \|e^{-it'\Delta}[\nabla(b(.)v(t')) - \nabla(b(.)u(t'))]\|_2 dt' \\
&= \int_0^t \|\nabla b(.)(v(t') - u(t')) + b(.)(\nabla v(t') - \nabla u(t'))\|_2 dt' \\
&\leq \|b\|_{1,\infty}\left(\int_0^t \|v(t') - u(t')\|_2 + \|\nabla v(t') - \nabla u(t')\|_2 dt'\right) \\
&\leq 2\|b\|_{1,\infty}\int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{1,2} dt'.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que

$$\sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(v)(t) - \nabla\Phi(u)(t)\|_2 \leq cT'|||v - u|||. \tag{2.15}$$

Portanto,

$$|||\Phi(v) - \Phi(u)||| \leq 2cT'|||v - u|||.$$

Se $T' < \frac{1}{2c}$, segue que Φ é uma contração. Do Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma solução u da equação (2.2). A unicidade da solução segue de maneira análoga ao Teorema 2.2. Provaremos a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial. Sejam u, v duas soluções de (2.2) correspondentes aos dados inicias u_0, v_0. Temos que

$$\|v(t) - u(t)\|_{1,2} \leq \|v(t) - u(t)\|_2 + \|\nabla v(t) - \nabla u(t)\|_2.$$

Observamos que

$$\begin{aligned}
\|v(t) - u(t)\|_2 &\leq \|e^{it\Delta}(v_0 - u_0)\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2 \\
&= \|v_0 - u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2 \\
&\leq \|v_0 - u_0\|_{1,2} + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}b(.)(v(t') - u(t'))dt'\|_2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\nabla v(t)-\nabla u(t)\|_2 &\leq \|e^{it\Delta}(\nabla v_0-\nabla u_0)\|_2+\|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}[\nabla(b(.)v(t'))-\nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2\\ &= \|\nabla v_0-\nabla u_0\|_2+\|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}[\nabla(b(.)v(t'))-\nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2\\ &\leq \|v_0-u_0\|_{1,2}+\|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')}[\nabla(b(.)v(t'))-\nabla(b(.)u(t'))]dt'\|_2.\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga às estimativas (2.14) e (2.15), vemos que

$$|||v-u||| \leq 2\|v_0-u_0\|_{1,2}+2cT'|||v-u|||. \tag{2.16}$$

Pela escolha de T', segue que $1>2cT'$. Logo

$$|||v-u||| \leq k\|v_0-u_0\|_{1,2}, \tag{2.17}$$

onde $k=\frac{2}{1-2cT'}$, donde conluímos a demostração. □

2.3 Boa colocação em $H^2(\mathbb{R}^n)$

Teorema 2.5. *Para todo $u_0\in H^2(\mathbb{R}^n)$, existe $T'=T'(n,\|b\|_{2,\infty})>0$ e uma única solução u da equação integral (2.2) no intervalo $[0,T']$ com $u\in C([0,T'];H^2(\mathbb{R}^n))$. $T''<T'$ existe uma vizinhança V de u_0 tal que a função*

$$\begin{array}{rccl} F: & V & \to & C([0,T''];H^2(\mathbb{R}^n))\\ & v_0 & \mapsto & v\end{array}$$

é lipschitziana.

Demonstração: Consideremos

$$E(T',a)=\{v\in C([0,T'];H^2(\mathbb{R}^n)):|||v|||=\sup_{[0,T']}\|v(t)\|_{2,2}\leq a\}.$$

Provemos que Φ está bem definida Com efeito, seja $u\in E(T',a)$, temos que

$$|||\Phi(u)|||=\sup_{[0,T']}\|\Phi(u)(t)\|_{2,2}\leq\sup_{[0,T']}\|\Phi(u)(t)\|_2+\sup_{[0,T']}\|\nabla\Phi(u)(t)\|_2+\sup_{[0,T']}\|D^2\Phi(u)(t)\|_2.$$

Por (2.12) e (2.13) resulta que

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T']}\|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_{1,2}+\|b\|_{1,\infty}T'\sup_{[0,T']}\|u(t')\|_{1,2}\\ &\leq \|u_0\|_{2,2}+\|b\|_{2,\infty}T'\sup_{[0,T']}\|u(t')\|_{2,2}\\ &\leq \|u_0\|_{2,2}+\|b\|_{2,\infty}T'a\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_{1,2} + 2\|b\|_{1,\infty} T' \sup_{[0,T']} \|u(t')\|_{1,2} \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + 2\|b\|_{2,\infty} T' \sup_{[0,T']} \|u(t')\|_{2,2} \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + 2\|b\|_{2,\infty} T' a.
\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Minkowski (Teo. 1.9) e pelo fato de $e^{it\Delta}$ ser um operador limitado e isométrico em $L^2(\mathbb{R}^n)$, segue que

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|D^2\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|e^{it\Delta} D^2 u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{i\Delta(t-t')} D^2(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\
&= \|D^2 u_0\|_2 + \|e^{it\Delta}\int_0^t e^{-it'\Delta} D^2(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\
&= \|D^2 u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{-it'\Delta} D^2(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\
&\leq \|D^2 u_0\|_2 + \int_0^t \|e^{-it'\Delta} D^2(b(.)u(t'))\|_2 dt' \\
&= \|D^2 u_0\|_2 + \int_0^t \|D^2(b(.)u(t'))\|_2 dt' \qquad (2.18)\\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + \int_0^t \|D^2 b(.)u(t')\|_2 dt' + 2\int_0^t \|\nabla b(.)\nabla u(t')\|_2 dt' \\
&\quad + \int_0^t \|b(.)D^2 u(t')\|_2 dt' \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + 4\|b\|_{2,\infty}\int_0^t \|u(t')\|_{2,2} dt' \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + 4\|b\|_{2,\infty} a T'.
\end{aligned}$$

Donde obtemos que

$$|||\Phi(u)||| \leq c(\|u_0\|_{2,2} + aT'), \qquad (2.19)$$

onde $c = \max\{3, 7\|b\|_{2,\infty}\}$.

Escolhendo $a = 2c\|u_0\|_{2,2}$, obtemos

$$|||\Phi(u)||| \leq c\|u_0\|_{2,2}(1 + 2cT'),$$

Se $0 < T' < \dfrac{1}{2c}$, segue que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$.

Mostraremos agora que Φ é uma contração. Sejam $u, v \in E(T', a)$, temos que

$$\begin{aligned}\sup_{[0,T']} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_{2,2} &\leq \sup_{[0,T']} \|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_2 + \sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(v)(t) - \nabla\Phi(u)(t)\|_2 \\ &+ \sup_{[0,T']} \|D^2\Phi(v)(t) - D^2\Phi(u)(t)\|_2.\end{aligned}$$

Pela demonstração do Teorema 2.4, decorre que

$$\begin{aligned}\|\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|b\|_{1,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{1,2} dt'. \\ &\leq \|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{2,2} dt'. \\ &\leq \|b\|_{2,\infty} T' \|v - u\|\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\|\nabla\Phi(v)(t) - \nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\leq 2\|b\|_{1,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{1,2} dt' \\ &\leq 2\|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{2,2} dt'. \\ &\leq 2\|b\|_{2,\infty} T' \|v - u\|.\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\|D^2\Phi(v)(t) - D^2\Phi(u)(t)\|_2 &= \| \int_0^t e^{i\Delta(t-t')}[D^2(b(.)v(t')) - D^2(b(.)u(t'))]dt'\|_2 \\ &\leq \int_0^t \|D^2(b(.)v(t')) - D^2(b(.)u(t'))\|_2 dt' \\ &\leq \int_0^t (\|D^2b(.)(v(t') - u(t')\|_2 + 2\|\nabla b(.)(\nabla v(t') - \nabla u(t')\|_2 \\ &+\|b(.)(D^2v(t') - D^2u(t')\|_2)dt' \\ &\leq \|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_2 + 2\|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|\nabla v(t') - \nabla u(t')\|_2 dt' \\ &+\|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|D^2v(t') - D^2u(t')\|_2 dt' \\ &\leq 4\|b\|_{2,\infty} \int_0^t \|v(t') - u(t')\|_{2,2} dt' \\ &\leq 4\|b\|_{2,\infty} T' \|v - u\|.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\Phi(v) - \Phi(u)\| \leq 3cT' \|v - u\| \tag{2.20}$$

Se $T' < \frac{1}{3c}$ segue que Φ é uma contração. Do Teorema do Ponto Fixo de Banach, existe uma solução u da equação (2.2). A unicidade da solução segue de maneira análoga ao Teorema 2.2.

Provemos agora a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial,. Sejam u, v duas soluções de (2.2) correspondentes aos dados inicias u_0, v_0. De modo semelhante à análise anterior, temos que

$$|||v - u||| \leq 3\|v_0 - u_0\|_{2,2} + 3cT'|||v - u|||.$$

Logo,

$$(1 - 3cT')|||v - u||| \leq 3\|v_0 - u_0\|_{2,2}.$$

Pela escolha de T', temos que $1 > 3cT'$.Assim

$$\begin{aligned} |||v - u||| &\leq \frac{3}{3cT'}\|v_0 - u_0\|_{2,2} \\ &= k\|v_0 - u_0\|_{2,2}, \end{aligned}$$

donde segue o desejado. $\square$

A seguir, mostraremos que se u é uma solução obtida no Teorema 2.2, então para todo $T > 0$ vale a seguinte desigualdade

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \qquad \forall t \in [0, T]. \tag{2.21}$$

Com efeito, consideremos $u_0 \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e u a solução correspondente obtida pelo Teorema 2.5. Multiplicando (2.1) por $\bar{u}$ e integrando na variável espacial, obtemos

$$i \int_{\mathbb{R}^n} u_t \bar{u} dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u \bar{u} dx - i \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^2 dx. \tag{2.22}$$

Analogamente, temos

$$-i \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_t u dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta \bar{u} u dx + i \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^2 dx. \tag{2.23}$$

Computando a diferença de (2.22) com (2.23) e usando o fato de que laplaciano é auto adjunto em $H^2(\mathbb{R}^n)$, vem que

$$i \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_t u + u_t \bar{u} dx = -2i \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^2 dx. \tag{2.24}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}\|u(t)\|_2^2 = -2\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(t)|^2 dx \leq 0. \tag{2.25}$$

Consequentemente,

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \qquad \forall t \in [0, T'], \tag{2.26}$$

onde T' é o tempo obtido no Teorema 2.5.

Consideremos agora $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $u \in C([0,T'];L^2(\mathbb{R}^n))$ a solução de (2.1) correspondente. Como $\overline{H^2(\mathbb{R}^n)}^{L^2} = L^2(\mathbb{R}^n)$, existe uma sequência de dados $(u_{0_j}) \subset H^2$ tal que $u_{0_j} \longrightarrow u_0$ em L^2. Seja $u_j \in C([0,T'];H^2(\mathbb{R}^n))$ a solução de (2.1) com dado inicial u_{0_j}. Por (2.26), temos para todo $j \in \mathbb{N}$ que

$$\|u_j(t)\|_2 \leq \|u_{0_j}\|_2, \qquad \forall t \in [0, T']. \tag{2.27}$$

Em particular, temos que u_j é solução de (2.1) em L^2. Pela dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial, segue que

$$\begin{aligned} \|u_j - u\|_2 &\leq \sup_{[0,T']} \|u_j - u\|_2 \\ &\leq K(T')\|u_{0_j} - u_j\|_2 \longrightarrow 0. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Logo, $u_j \longrightarrow u$ em L^2 e assim

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \qquad \forall t \in [0, T']. \tag{2.29}$$

Como a solução obtida no Teorema 2.2 é global, podemos aplicadar novamente o Teorema 2.2 com dado inicial $u(T')$, podemos estender u em um intervalo $[0, T' + \Delta T']$. Aplicando sucessivamente o Teorema 2.2, obtemos o desejado.

Apresentaremos agora um resultado de efeito regularizante global para a solução obtida pelo Teorema 2.2 que será empregado na próxima seção.

Lema 2.6. *Seja u uma solução de 2.1 obtida pelo Teorema 2.2. Então, para todo $T > 0$ e $R > 0$, temos a seguinte estimativa*

$$\int_0^T \int_{B_R} |D^{\frac{1}{2}} u(x,t)|^2 dx dt \leq C(\|u_0\|_2, T, R, \|b\|_{L^\infty}),$$

onde $B_R = B(0,R)$.

Demonstração: Pelo Teorema 2.2, a solução u satisfaz a equação integral

$$u(t) = e^{it\Delta}\left(u_0 - \int_0^t e^{-it\Delta}b(x)u(t')dt'\right). \tag{2.30}$$

Definamos

$$I(u(x,t)) = \left(\int_0^T \int_{B_R} |D^{\frac{1}{2}}u(x,t)|^2 dxdt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.31}$$

Usando a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), as propriedades de grupo unitário, (2.29) e o Corolário 1.64, obtemos que

$$\begin{aligned}
I(u(x,t)) &\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)u(t')dt'\|_2\right) \\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \sup_{[0,T]}\|\int_0^t e^{-it'\Delta}b(.)u(t')dt'\|_2\right) \\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \int_0^T \|b(.)u(t)\|_2 dt\right) \\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \|b\|_\infty \int_0^T \|u(t)\|_2 dt\right) \\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \|b\|_\infty T\|u(t)\|_2\right) \\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \|b\|_\infty T\|u_0\|_2\right).
\end{aligned} \tag{2.32}$$

Como u é uma solução global e $u \in C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)) \hookrightarrow L^2([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$, podemos concluir que $u \in L^2([0,T];H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}^n))$, para todo $T > 0$. □

2.4 Decaimento exponencial

Nesta seção estamos interessados em obter a taxa de decaimento para energia associada a solução de L^2. Com intuito de obter o resultado desejado, vamos assumir o resultado de boa coloção global determinado na seção anterior e trabalhar com dados regulares. Integrando (2.25) em $[0,t]$ resulta que

$$E_0(t) := \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx = -2\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,s)|^2 dxds + \int_{\mathbb{R}^n} |u_0(x)|^2 dx \; \forall t \geq 0. \tag{2.33}$$

Antes de demostrar o teorema principal desta seção, precisamos de um resultado preliminar.

Lema 2.7. *Dado $L > 0$, seja u uma solução de (2.1) com dado inicial u_0. Então, para todo $T \gg 1$ existe uma constante positiva $c = c(L)$ tal que*

$$\int_0^T \int_{B_R} |u|^2 dxdt \leq c \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^2 dxdt \tag{2.34}$$

sempre que $\|u_0\|_2 \leq L$.

Demonstração: Argumentaremos por contradição. Suponhamos que (2.34) não ocorra, isto é, existe $T_0 \gg 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um dado u_{0_k} uniformemente limitado em $L^2(\mathbb{R}^n)$ pela constante L e uma solução correspondente u_k que satisfaz

$$\int_0^{T_0} \int_{B_R} |u_k|^2 dxdt > k \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^2 dxdt.$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{T_0} \|u_k(t)\|^2_{L^2(B_R)} dt}{\int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^2 dxdt} = +\infty. \tag{2.35}$$

Em outras palavras,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^2 dxdt}{\int_0^T \|u_k(t)\|^2_{L^2(B_R)} dt} = 0. \tag{2.36}$$

Sendo $L^2([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$ um espaço de Banach reflexivo, temos que toda sequência limitada tem uma subsequência que converge fraco. Como

$$E_0^k(t) \leq E_0^k(0) \leq L^2,$$

obtemos uma subsequência de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ daqui em diante, tal que

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^2([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2.37}$$

Por (2.36) e (2.37), concluímos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^2 dxdt = 0. \tag{2.38}$$

Consequentemente, da hipótese (H), vem que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |u_k|^2 dxdt = 0. \tag{2.39}$$

Por outro lado, o Lema 2.6 garante que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado em $L^2([0,T_0];H^{\frac{1}{2}}(B_R))$. Além disso, como $H^{\frac{1}{2}}(B_R) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(B_R)$, pelo Lema de Aubin-Lions existe uma subsequência, que denotaremos por $(u_k)_{k\in N}$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{forte em} \quad L^2(B_R\times[0,T_0]). \tag{2.40}$$

Portanto,

$$u_k \to u \quad \text{q.s.} \quad B_R\times[0,T_0]. \tag{2.41}$$

Das afirmações (2.39) e (2.41) podemos deduzir a seguinte convergência

$$u_k \to \tilde{u} \quad \text{q.s.} \quad \mathbb{R}^n\times[0,T_0]. \tag{2.42}$$

onde

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{q.s. em} \quad B_R\times[0,T_0] \\ 0 & \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n\setminus B_R\times[0,T_0]. \end{cases} \tag{2.43}$$

Agora dividiremos a prova em 2 casos, a saber: $u\neq 0$ e $u=0$.

Caso $u\neq 0$.

Nosso objetivo é passar o limite na equação

$$iu_{t,k}+\Delta u_k+ib(x)u_k=0. \tag{2.44}$$

De fato, consideremos $\theta\in\mathcal{D}[0,T_0]$ e $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Compondo a equação (2.44) com $\theta\varphi$, obtemos

$$\langle iu_{t,k}+\Delta u_k+ib(x)u_k,\theta\varphi\rangle=0, \qquad \forall\theta\in\mathcal{D}[0,T_0],\ \forall\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

onde $\langle\cdot,\cdot\rangle=\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n\times[0,T_0]),\mathcal{D}(\mathbb{R}^n\times[0,T_0])}$

Notemos que

$$\langle iu_{t,k},\theta\varphi\rangle=-\langle iu_k,\theta'\varphi\rangle$$

e

$$\langle\Delta u_k,\theta\varphi\rangle=\langle u_k,\theta\Delta\varphi\rangle.$$

Pelo Teorema 2.2, temos que $u_k\to u$ em $C([0,T_0];L^2(\mathbb{R}^n))$. Assim,

$$-\langle iu_k,\theta'\varphi\rangle\to-\langle iu,\theta'\varphi\rangle=\langle iu_t,\theta\varphi\rangle$$

e

$$\langle u_k, \theta\Delta\varphi\rangle \to \langle u, \theta\Delta\varphi\rangle = \langle \Delta u, \theta\varphi\rangle.$$

Por outro lado, por (2.38), segue que

$$\langle ib(x)u_k, \theta\varphi\rangle \to 0.$$

Do exposto acima, obtemos após passagem ao limite

$$\langle iu_t + \Delta u, \theta\varphi\rangle = 0, \qquad \forall\theta \in \mathcal{D}[0,T_0],\ \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Pela totalidade de $R = \{\theta\varphi : \theta \in \mathcal{D}[0,T_0],\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$ em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0,T_0])$ segue que

$$\langle iu_t + \Delta u, \psi\rangle = 0, \qquad \forall\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n \times [0,T_0]).$$

Desse modo, u satisfaz

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times [0,T_0]) \\ u = 0 & \text{q.s. em } \mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]. \end{cases} \tag{2.45}$$

Como $u \in L^2([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}^n))$, existe $t_0 \in [0,T_0]$ tal que $u_{t_0} = u(x,t_0) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tem suporte compacto. Assim, podemos usar o Corolário 1.66 e concluir que $u \in C^\infty((0,T_0] \times \mathbb{R}^n)$, com $u(x,t) = 0$ para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]$. Consequentemente, existem $t_1, t_2 \in [0,T_0]$ distintos, $\rho > 2$ e $\beta > 0$ tais que $u(\cdot,t_1), u(\cdot,t_2) \in H^1(e^{\beta|x|^\rho}dx)$. Do Teorema 1.68, vem que $u \equiv 0$ em $B_R \times [0,T_0]$. Como $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]$, concluímos que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \times [0,T_0]$, o que contradiz o fato de $u \neq 0$.

Caso $u = 0$.

Denotemos

$$\nu_k = \|u_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))}. \tag{2.46}$$

Se definirmos $v_k = \frac{u_k}{\nu_k}$, obtemos

$$\|v_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))} = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.47}$$

Vamos deduzir uma limitação uniforme conveniente para o dado inicial $v_{0_k} = v_k(0)$ em L^2. Usando a hipótese (H), temos que

$$\begin{aligned}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}|u_k(t)|^2dxdt &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}|u_k(t)|^2dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R}|u_k(t)|^2dxdt \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R}b(x)|u_k(t)|^2dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R}|u_k(t)|^2dxdt \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u_k(t)|^2dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R}|u_k(t)|^2dxdt.\end{aligned} \tag{2.48}$$

Por (2.33) temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u_{0_k}(x)|^2dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|u_k(t)|^2dx + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u_k(s)|^2dxds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n}|u_k(t)|^2dx + 2\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u_k(s)|^2dxds,\end{aligned} \tag{2.49}$$

desse modo,

$$T_0\int_{\mathbb{R}^n}|u_{0_k}(x)|^2dx \leq \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}|u_k(t)|^2dxdt + 2T_0\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u_k(s)|^2dxds.$$

Usando a desigualdade (2.48), obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|u_{0_k}(x)|^2dx &\leq \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}|u_k(t)|^2dxdt + 2\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u_k(t)|^2dxdt \\ &\leq \left(2+\frac{1}{\alpha_0T_0}\right)\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|u(t)|^2dxdt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_{B_R}|u_k(t)|^2dxdt.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Assim, da desigualdade (2.50), vem que

$$\|v_{0_k}\|_2^2 \leq \left(2+\frac{1}{\alpha_0T_0}\right)\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|v_k(t)|^2dxdt + \frac{1}{T_0}. \tag{2.51}$$

Logo pelo Teorema 2.2 v_k é uma solução global da equação

$$iv_{t,k} + \Delta v_k + ib(x)v_k = 0. \tag{2.52}$$

Usando (2.35), resulta que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\int_0^{T_0}\|v_k(t)\|^2_{L^2(B_R)}dt}{\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|v_k|^2dxdt} = +\infty. \tag{2.53}$$

e por (2.47), vem que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}^n}b(x)|v_k|^2dxdt = 0. \tag{2.54}$$

Como $b(x) \geq \alpha_0 > 0$ q.s. para $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_R$, temos por (2.54) que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} |v_k|^2 dxdt = 0. \tag{2.55}$$

Assim, obtemos uma função $\tilde{v}$ que verifica $v_k \rightharpoonup \tilde{v}$ em $L^2([0,T_0] : L^2(\mathbb{R}^n))$, onde

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{q.s. em} \quad B_R \times [0,T_0] \\ 0 & \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]. \end{cases} \tag{2.56}$$

Por outro lado, como $\nu_k = \|u_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))} \to 0$ quando $k \to \infty$ e v_k é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n \times [0,T_0])$, por (2.51), (2.52), (2.54) e (2.55), podemos usar argumentos similares ao caso $u \neq 0$ para passar o limite na equação (2.52) e obter

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times [0,T_0]) \\ v = 0 & \text{q.s. em } \mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]. \end{cases} \tag{2.57}$$

Também por argumentos similares ao caso $u \neq 0$, podemos usar o Corolário 1.66 e o Teorema 1.68 para concluir que $v \equiv 0$ em $B_R \times [0,T_0]$. Usando o Lema 2.6 em v_k, obtemos que v_k é limitada em $L^2([0,T_0]; H^{\frac{1}{2}}(B_R))$ e em virtude do Lema de Aubin-Lions, tendo em vista que $v \equiv 0$ em $B_R \times [0,T_0]$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{B_R} |v_k|^2 dxdt = 0. \tag{2.58}$$

Mas, por (2.47), temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{B_R} |v_k|^2 dxdt = 1, \tag{2.59}$$

o que é uma contradição. □

Teorema 2.8. *Considere o potencial b satisfazendo a hipótese (H). Para qualquer $L > 0$, existem $\alpha = \alpha(L) > 0$ e $\omega = \omega(L) > 0$ tais que*

$$E_0(t) \leq \alpha e^{-\omega t},$$

para todo $t \gg 10$ e para qualquer solução de (2.1) dada pelo Teorema 2.2, desde que o dado inicial satisfaça $\|u_0\|_2 \leq L$.

Demonstração: Temos que para todo $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
\int_0^T E_0(t)dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} |u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{\alpha_0}{\alpha_0} |u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&\leq \frac{1}{\alpha_0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&\leq \frac{1}{\alpha_0} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&= -\frac{1}{2\alpha_0} \left[\int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx \right]_0^T + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt \\
&= -\frac{1}{2\alpha_0} E_0(T) + \frac{1}{2\alpha_0} E_0(0) + \int_0^T \int_{B_R} |u(x,t)|^2 dxdt.
\end{aligned}$$

Assim, pelo o lema anterior, vem que

$$\int_0^T E_0(t)dt \leq \frac{\alpha_0^{-1}}{2} E_0(0) + c \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt \quad \forall T \gg 1. \tag{2.60}$$

Usando a identidade de energia de L^2, isto é,

$$E_0(t) - E_0(0) = -2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,s)|^2 dxds \qquad \forall t \geq 0, \tag{2.61}$$

concluímos que $E_0(t)$ é não decrescente e além disso

$$2 \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,s)|^2 dxds = E_0(0) - E_0(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{2.62}$$

Combinando (2.60) e (2.62), temos

$$E_0(T) \leq \frac{\alpha_0^{-1}}{2T} \left[E_0(T) - 2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt \right] + \frac{c}{T} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt$$

o que implica que para todo $T \gg 1$

$$\left(T - \frac{\alpha_0^{-1}}{2} \right) E_0(T) \leq (\alpha_0^{-1} + c) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt. \tag{2.63}$$

Para $T > \frac{\alpha_0^{-1}}{2}$, obtemos da última desigualdade que

$$E_0(T) \leq c \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt. \tag{2.64}$$

Finalmente, combinando (2.62) e (2.64), segue que

$$E_0(T) \leq c\left[\frac{E_0(0) - E_0(T)}{2}\right], \tag{2.65}$$

logo,

$$E_0(T) \leq \gamma E_0(0) \qquad \text{onde } \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{1+\frac{c}{2}}. \tag{2.66}$$

Como a solução de L^2 é global, definamos $v(x,t) = u(x,t+T)$. Temos que v é uma solução da equação de Schrödinger (2.1), que pertence a $C([T,2T], L^2(\mathbb{R}^n))$. Além disso, o dado inicial agora é $v(x,0) = u(x,T) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Pelo Lema 2.7 aplicado em v, temos que

$$\begin{aligned} E_0(2T) = E_{0,v}(T) &\leq c\int_0^T \int_{B_R} b(x)|v(x,t)|^2 dx dt \\ &= c\int_0^T \int_{B_R} b(x)|u(x,t+T)|^2 dx dt \\ &= \int_T^{2T} \int_{B_R} b(x)|u(x,s)|^2 dx ds \\ &= c\left[\frac{E_0(T) - E_0(2T)}{2}\right], \end{aligned}$$

onde $E_{0,v}$ é a energia de $L^2(\mathbb{R}^n)$ associada a v. Assim,

$$E_0(2T) \leq \gamma E_0(T) \leq E_0(0).$$

Repetindo este argumento, obtemos que $E_0(nT) \leq \gamma^n E_0(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste último fato deduzimos o decaimento exponencial. De fato, considerando $t = nT + r$, onde $0 \leq r < T$, segue que

$$E_0(t) \leq E_0(nT) \leq \gamma^n E_0(0) = \gamma^{\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{T}\right)} E_0(0). \tag{2.67}$$

Como $0 < \gamma < 1$, podemos escolher $\omega = -\frac{\ln(\gamma)}{T} > 0$ e $\alpha = \gamma^{-\frac{r}{T}} E_0(0) < c(L)$ para obter

$$E_0(t) \leq \alpha e^{-\omega t} \qquad \forall t > 0,$$

o que completa a prova. $\square$

Capítulo 3

A equação de Schrödinger não linear

Nosso objetivo agora é estudar o caso unidimensional, onde queremos obter resultados de existência, unicidade, dependência contínua e persistência com relação ao dado inicial u_0 da equação de Schrödinger não linear. Mais precisamente, estudaremos o PVI a seguir:

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \lambda |u|^2 u + ib(x)u = 0, & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \\ u(x,0) = u_0(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $\lambda = \pm 1$ e b satisfaz a seguinte condição:

$$\text{(H)} \begin{cases} b \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}) \text{ é uma função não negativa e,} \\ b(x) \geq \alpha_0 > 0 \text{ para } |x| > R. \end{cases}$$

Formalmente, se u é solução da equação (3.1), podemos usar o Princípio de Duhamel e concluir que u satisfaz

$$u(x,t) = e^{it\partial_x^2} u_0 + i \int_0^t e^{i\partial_x^2 (t-t')} (\lambda |u|^2 u + ib(x)u)(t')dt' \tag{3.2}$$

onde $e^{it\partial_x^2}$ é o grupo unitário associado a equação linear de Schrödinger homogênea.

Observação 3.1. *Se $u \in C([0,T] : H^2(\mathbb{R})) \cap C^1([0,T] : L^2(\mathbb{R}))$, temos que se u resolve (3.2) então u resolve (3.1), isto é, vale a recíproca.*

Assim como no capítulo anterior, diremos que a equação (3.1) está bem colocada (localmente ou globalmente) se u satisfaz a equação integral (3.2).

3.1 Boa colocação em $L^2(\mathbb{R})$

Teorema 3.2. *Para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$, existe um tempo positivo $T' = T'(\|u_0\|_2, \|b\|_\infty)$ e uma única solução u da equação integral (3.2), no intervalo $[0,T']$, com $u \in C([0,T']; L^2(\mathbb{R})) \cap$*

$L^8([0,T'];L^4(\mathbb{R}))$. *Ademais, para todo $T'' < T'$ existe uma vizinhança V de u_0 em $L^2(\mathbb{R})$ tal que a função*

$$\begin{array}{rccl} F: & V & \to & C([0,T''];L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([0,T''];L^4(\mathbb{R})) \\ & v_0 & \mapsto & v \end{array}$$

é lipschitziana.

Demonstração: Para todo par (T', a) de constantes positivas, definamos o espaço métrico completo

$$E(T',a) = \{v \in C([0,T'];L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([0,T'];L^4(\mathbb{R})) : \|v\| = \sup_{[0,T']} \|v\|_2 + (\int_0^{T'} \|v(t)\|_4^8 dt)^{\frac{1}{8}} \leq a\}.$$

Nosso objetivo é usar o Teorema do Ponto Fixo de Banach no operador

$$\Phi_{u_0}(u)(t) = \Phi(u)(t) = e^{it\partial_x^2}u_0 + i\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(\lambda|u|^2u + ib(x)u)(t')dt'.$$

De fato, seja $u \in E(T',a)$, então

$$\|\Phi(u)(t)\|_2 = \|e^{it\partial_x^2}u_0 + i\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|u|^2u + ib(.)u)(t')dt'\|_2.$$

Usando a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), as estimativas de Strichartz e a desigualdade de Hölder resulta que

$$\begin{aligned} \|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|e^{it\partial_x^2}u_0\|_2 + \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|u|^2u)(t')dt'\|_2 + \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)u(t')dt'\|_2 \\ &\leq \|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \||u(t)|^3\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}}dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\int_0^{T'}\|b(.)u(t')\|_2dt' \\ &\leq \|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_4^{\frac{24}{7}}dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_\infty\int_0^{T'}\|u(t')\|_2dt' \qquad (3.3) \\ &\leq \|u_0\|_2 + cT'^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_4^8dt\right)^{\frac{3}{8}} + c\|b\|_\infty aT' \\ &\leq \|u_0\|_2 + cT'^{\frac{1}{2}}a^3 + c\|b\|_\infty T'a. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'}\|\Phi(u)(t)\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} &\leq \left(\int_0^{T'}\|e^{it\partial_x^2}u_0\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} + \left(\int_0^{T'}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|u|^2u)(t')dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}}\\ &\quad + \left(\int_0^{T'}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)u(t')dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}}\\ &\leq c\|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'}\||u|^3\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\int_0^{T'}\|b(.)u(t)\|_2 dt \qquad (3.4)\\ &\leq c\|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_4^{\frac{24}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_\infty\int_0^{T'}\|u(t)\|_2 dt\\ &\leq c\|u_0\|_2 + cT'^{\frac{1}{2}}a^3 + c\|b\|_\infty T'a.\end{aligned}$$

Assim,

$$|||\Phi(u)||| \leq C(\|u_0\|_2 + T'^{\frac{1}{2}}a^3 + T'a),$$

onde $C = \max\{1+c, 2c, 2c\|b\|_\infty\}$. Considerando $a = 2C\|u_0\|_2$, segue que

$$|||\Phi(u)||| \leq C\|u_0\|_2(1 + 8C^3T'^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_2^2 + 2CT'). \qquad (3.5)$$

Escolhendo $T' > 0$ tal que

$$8C^3T'^{\frac{1}{2}}\|u_0\|_2^2 + 2CT' < 1,$$

concluímos que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$.

Consideremos agora $u, v \in E(T',a)$. Pela desigualdade do valor médio, vem que

$$||v|^2v - |u|^2u| \leq c(|v|^2 + |u|^2)|v-u|. \qquad (3.6)$$

De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que $|v| \leq |u|$. Seja $\tilde{v} = \frac{|v|}{|u|}u$, então $|\tilde{v}| = |v|$, e

$$\begin{aligned}||u|^2u - |v|^2v| &\leq ||u|^2 - |\tilde{v}|^2\tilde{v}| + ||\tilde{v}|^2\tilde{v} - |v|^2v|\\ &\leq ||u|^2u - |v|^2\frac{|v|}{|u|}u| + |v|^2|\tilde{v} - v|.\end{aligned}$$

Estimemos a última desigualdade

$$\begin{aligned}||u|^2u - |v|^2\frac{|v|}{|u|}u| &\leq |u|||u|^2 - \frac{|v|^3}{|u|}|\\ &= ||u|^3 - |v|^3|\\ &\leq c(|u|^2 + |v|^2)|u-v|\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} |v|^2|\tilde{v}-v| &\leq |u|^2|\tilde{v}-v| \\ &\leq |u|^2|u-v|, \end{aligned}$$

o que demostra a desigualdade (3.6).

Utilizando a desigualdade (3.6), a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), a desigualdade de Hölder, a desigualdade de Hölder generalizada e as estimativas de Strichartz, vem que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|(\Phi(v)-\Phi(u))(t)\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2v-|u|^2u)(t')dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&+ \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}((|v|^2+|u|^2)|v-u|)(t')dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&+ \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2+|u|^2)|v-u|\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} \\
&+c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \qquad (3.7) \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} (\||v|^2+|u|^2\|_2\|v-u\|_4)^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} \\
&+c\|b\|_{L^\infty}\int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \||v|^2+|u|^2\|_2^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&+c\|b\|_{L^\infty}\int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq cT'^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T'} \||v|^2+|u|^2\|_2^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} \\
&+c\|b\|_{L^\infty}\int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq cT'^{\frac{1}{2}}\left[\left(\int_0^{T'} \||v|^2\|_2^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \||u|^2\|_2^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}\right] \\
&\times \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} + c\|b\|_{L^\infty}\int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq cT'^{\frac{1}{2}}\left[\left(\int_0^{T'} \|v\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \|u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{4}}\right] \\
&\times \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{8}} + c\|b\|_{L^\infty}\int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq 2cT'^{\frac{1}{2}}a^2 |||v-u||| + c\|b\|_\infty T' |||v-u|||.
\end{aligned}
$$

Estimemos a norma $\sup_{[0,T']} \|\Phi(v) - \Phi(u)\|_2$. Usando desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4) e as estimativas de Strichartz, resulta que

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|\Phi(v) - \Phi(u)\|_2 &\leq \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2 v - |u|^2 u)(t')dt'\|_2 \\
&\quad + \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_2 \qquad (3.8)\\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 v - |u|^2 u)(t)\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 + |u|^2)|v-u|\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \\
&\leq 2cT'^{\frac{1}{2}}a^2 \|\!|v-u|\!\| + c\|b\|_\infty T' \|\!|v-u|\!\|.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\!|\Phi(v) - \Phi(u)|\!\| \leq C(2T'^{\frac{1}{2}}a^2 + T')\|\!|v-u|\!\|, \qquad (3.9)$$

onde $C = \max\{1+c, 4c, 2c\|b\|_\infty\}$.

Assim, se $C(2a^2T'^{\frac{1}{2}} + T') < 1$, segue que Φ é uma contração. Logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach, garantimos a existência de uma única solução u da equação integral (3.2).

Provemos a unicidade da solução u em $C([0,T'];L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([0,T'];L^4(\mathbb{R}))$.

Sejam $u, v \in C([0,T'];L^2(\mathbb{R})) \cap L^8([0,T'];L^4(\mathbb{R}))$ duas soluções da equação

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \lambda|u|^2 u + ib(x)u = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in [0,T'] \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \qquad (3.10)$$

com mesmo dado inicial $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$. Mostraremos que $u \equiv v$. Com efeito, definamos

$$\theta(t) = \|u(t) - v(t)\|_2, \qquad t \in [0,T'].$$

Notemos que θ é contínua, e $\theta(0) = \|u(0) - v(0)\|_2 = 0$. Suponhamos que exista $t \in [0,T']$ tal que $\theta(t) > 0$. Desta forma, definamos $t_0 = \inf\{t \in [0,T'] : \theta(t) > 0\}$. Pela definição de ínfimo, temos que $\theta(t_0) = 0$, isto é, $u(t_0) = v(t_0)$. Além disso, pela continuidade de θ, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (t_0, t_0+\delta) \subset [0,T']$ então $\theta(t) > 0$.

Definamos $\tilde{u}(x,t) = u(x,t+t_0)$ e $\tilde{v}(x,t) = v(x,t+t_0)$. Assim, $\tilde{u}, \tilde{v} \in C((0,\delta); L^2(\mathbb{R})) \cap L^8((0,\delta); L^4(\mathbb{R}))$ são soluções de

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \lambda |u|^2 u + ib(x)u = 0, & x \in \mathbb{R},\ t \in (0,\delta) \\ u(x,t_0) = u_{t_0}(x), \end{cases} \tag{3.11}$$

com $\tilde{u}(t) \neq \tilde{v}(t)$, para todo $t \in (0,\delta)$.

Procedendo de forma análogo a (3.7) e (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned} \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta &\leq c\delta^{\frac{1}{2}} \left[\left(\int_0^\delta \||\tilde{v}\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^\delta \||\tilde{u}\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{4}} \right] \\ & \quad \times \left(\int_0^\delta \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}} + c\|b\|_{L^\infty} \int_0^\delta \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_2 dt \\ &\leq 2c\delta^{\frac{1}{2}} \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta + c\|b\|_\infty \delta \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta \\ &= C(\delta) \|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta \end{aligned}$$

onde $\|v\|_\delta = \sup\limits_{(0,\delta)} \|v(t)\|_2 + \left(\int_0^\delta \|v(t)\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}}$. Escolhendo δ suficientemente pequeno tal que $C(\delta) < 1$ obtemos que $\|\tilde{v} - \tilde{u}\|_\delta = 0$. Assim $\theta(t) = \|\tilde{v}(t - t_0) - \tilde{u}(t - t_0)\|_2 = \|v(t) - u(t)\|_2 = 0$ se $t \in (t_0, t_0 + \delta)$. Absurdo!

Agora provaremos a dependência contínua de u com respeito a u_0. Sejam u, v duas soluções de (3.2) correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0. De modo semelhante à análise anterior, temos que

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{T'} \|v(t) - u(t)\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|e^{it\partial_x^2}(v_0 - u_0)\|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}} \\ & \quad + \left(\int_0^{T'} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2 v - |u|^2 u)(t') dt' \|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}} \\ & \quad + \left(\int_0^{T'} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')} b(.)(v - u)(t') dt' \|_4^8 dt \right)^{\frac{1}{8}} \qquad (3.12) \\ &\leq c\|v_0 - u_0\|_2 + c \left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 v - |u|^2 u)(t)\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt \right)^{\frac{7}{8}} \\ & \quad + c \int_0^{T'} \|b(.)(v - u)(t)\|_2 dt \\ &\leq c\|v_0 - u_0\|_2 + 2ca^2 T'^{\frac{1}{2}} \|v - u\| + c\|b\|_\infty T' \|v - u\|. \end{aligned}$$

Analogamente, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|v(t)-u(t)\|_2 &\leq \|e^{it\partial_x^2}(v_0-u_0)\|_2 + \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2v-|u|^2u)(t')dt'\|_2 \\
&\quad + \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(b(x)(v-u)(t'))dt'\|_2 \\
&\leq \|v_0-u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2v-|u|^2u)(t)\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt \right)^{\frac{7}{8}} \\
&\quad + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \qquad (3.13)\\
&\leq \|v_0-u_0\|_2 + 2ca^2T'^{\frac{1}{2}}\|\!|v-u|\!\| + c\|b\|_\infty T'\|\!|v-u|\!\| \\
&\leq C(\|v_0-u_0\|_2 + 2a^2T'^{\frac{1}{2}}\|\!|v-u|\!\| + T'\|\!|v-u|\!\|).
\end{aligned}
$$

Por conseguinte,

$$
\|\!|v-u|\!\| \leq C(\|v_0-u_0\|_2 + 2a^2T'^{\frac{1}{2}}\|\!|v-u|\!\| + T'\|\!|v-u|\!\|).
$$

Pela escolha de T', segue que $1 > 2a^2CT'^{\frac{1}{2}} - CT'$, assim

$$
\|\!|v-u|\!\| \leq k\|v_0-u_0\|_2, \qquad (3.14)
$$

onde $k = \frac{C}{1-2a^2CT'^{\frac{1}{2}}-CT'}$, donde conluímos a demostração. □

Corolário 3.3. *A solução u obtida no Teorema 3.2, pertence a $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}))$ para todo par admissível (p,q). Mais ainda, a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.2 se estende aos espaços $L^q([0,T];L^p(\mathbb{R}))$.*

Demonstração: Seja (p,q) um par admissível. Usando desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), das estimativas de Strichartz e da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|e^{it\partial_x^2}u_0\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|u|^2u)(t')dt'\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)u(t')dt'\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.15)\\
&\leq c\|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \||u|^3\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\int_0^{T'} \|b(.)u(t)\|_2 dt \\
&\leq c\|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_4^{\frac{24}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_\infty \int_0^{T'} \|u(t')\|_2 dt' \\
&\leq \|u_0\|_2 + cT'^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_4^8 dt\right)^{\frac{3}{8}} + c\|b\|_\infty T' \sup_{[0,T']} \|u(t)\|_2 \\
&\leq \infty.
\end{aligned}$$

A prova da dependência contínua com respeito ao dado inicial descrita no Teorema 3.2, faz-se da mesma forma. De fato, sejam u e v duas soluções de (3.2), correspondentes aos dados iniciais u_0 e v_0, então

$$v(t) - u(t) = e^{it\partial_x^2}(v_0 - u_0) + i\int_0^t e^{i\partial_x^2 t}[\lambda(|v|^2v - |u|^2u) + ib(x)(v-u)](t')dt'. \qquad (3.16)$$

Usando a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4) e as estimativas de Strichartz de maneira análoga a demonstração do Teorema 3.2, decorre que

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|v(t) - u(t)\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|e^{it\partial_x^2}(v_0 - u_0)\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2v - |u|^2u)(t')dt'\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\quad + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)(v-u)(t')dt'\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (3.17)\\
&\leq c\|v_0 - u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2v - |u|^2u)(t)\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} \\
&\quad + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt
\end{aligned}$$

e pela demonstração do Teorema 3.2

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|v(t)-u(t)\|_p^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq c\|v_0-u_0\|_2 + 2ca^2 T'^{\frac{1}{2}} \|v-u\| + c\|b\|_\infty T' \|v-u\| \\
&\leq c\|v_0-u_0\|_2 + \tilde{k}\|v_0-u_0\|_2 \qquad (3.18) \\
&\leq \bar{k}\|v_0-u_0\|_2,
\end{aligned}
$$

o que conclui a demonstração. □

Corolário 3.4. *Se $\|u_0\|_2 \ll 1$, o Teorema 3.2 e o Corolário 3.3 podem ser estendidos a qualquer intervalo de tempo, isto é*

$$u \in C([0,T] : L^2(\mathbb{R})) \cap L^q([0,T], L^p(\mathbb{R})), \ \forall T > 0$$

onde (p,q) um par admissível.

Demonstração: Ver [19]. □

3.2 Boa colocação em $H^1(\mathbb{R})$

Teorema 3.5. *Dado $u_0 \in H^1(\mathbb{R})$, existem $T' = T'(\|u_0\|_{1,2}, \|b\|_{1,\infty}) > 0$ e uma única solução da equação (3.2) tal que $u \in C([0,T']; H^1(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T']; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$. Mais ainda, para todo $T'' < T'$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^1(\mathbb{R})$ tal que a função*

$$
\begin{array}{rccl}
F: & V & \to & C([0,T'']; H^1(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T'']; W^{1,\infty}(\mathbb{R})) \\
 & v_0 & \mapsto & v
\end{array}
$$

é lipschitziana.

Demonstração: Definamos

$$
\begin{aligned}
E(T,a) = \{ v \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R})) : \\
\|v\| = \sup_{[0,T]} \|v(t)\|_{1,2} + \left(\int_0^T \|v(t)\|_{1,\infty}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq a \}.
\end{aligned}
$$

Provemos que existem constantes T' e a tais que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$. De fato, seja $u \in E(T',a)$ temos que

$$\sup_{[0,T']} \|\Phi(u)(t)\|_{1,2} \leq \sup_{[0,T']} \|\Phi(u)(t)\|_2 + \sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_2. \qquad (3.19)$$

Em virtude de (3.3), vem que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_4^{\frac{24}{7}}\, dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_\infty \int_0^{T'} \|u(t')\|_2 dt' \qquad (3.20)\\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_{1,2}^{\frac{24}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|u(t')\|_{1,2} dt'\\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + ca^3 T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty} a T'
\end{aligned}$$

e, em virtude da desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), das estimativas de Strichartz, da desigualdade de Hölder e do fato de $e^{it\partial_x^2}$ ser um operador limitado e isométrico em

$L^2(\mathbb{R})$, segue que

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|e^{it\partial_x^2}\nabla u_0\|_2 + \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(|u|^2u)(t')dt'\|_2 \\
&+ \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(b(.)u(t'))dt'\|_2 \\
&\leq \|\nabla u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'}\|\nabla(|u|^2u)(t)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'}\|\nabla(b(.)u(t))\|_2 dt \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'}\||u|^2\nabla u\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&+c\int_0^{T'}\|\nabla b(.)u(t) - b(.)\nabla u(t)\|_2 dt \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'}\||u|^2\|_2^{\frac{4}{3}}\|\nabla u\|_2^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&+c\left(\int_0^{T'}\|\nabla b(.)u(t)\|_2 dt + \int_0^{T'}\|b(.)\nabla u(t)\|_2 dt\right) \qquad (3.21)\\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'}\|u\|_4^{\frac{8}{3}}\|\nabla u\|_2^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&+c\left(\|\nabla b\|_\infty\int_0^{T'}\|u(t)\|_2 dt + \|b\|_\infty\int_0^{T'}\|\nabla u(t)\|_2 dt\right) \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'}\|u\|_{1,2}^{\frac{8}{3}}\|\nabla u\|_{1,2}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&+c\|b\|_{1,\infty}\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_2 dt + \int_0^{T'}\|\nabla u(t)\|_2 dt\right) \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_{1,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty}\int_0^{T'}\|u(t)\|_{1,2}dt \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + ca^3T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty}aT'.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$\sup_{0,T'}\|\Phi(u)\|_{H^!} \leq 2\|u_0\|_{1,2} + 2ca^3T'^{\frac{3}{4}} + 2c\|b\|_{1,\infty}aT'. \qquad (3.22)$$

Estimemos a norma $\left(\int_0^{T'}\|\Phi(u)(t)\|_{1,\infty}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}$. Com efeito, temos que

$$\left(\int_0^{T'}\|\Phi(u)(t)\|_{1,\infty}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq \left(\int_0^{T'}\|\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'}\|\nabla\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}.$$

Também podemos estimar que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|e^{it\partial_x^2}u_0\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|u|^2u)(t')dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)u(t')dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq c\|u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \||u|^3\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|b(.)u(t)\|_2 dt \qquad (3.23) \\
&\leq c\|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u\|_{L^3}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_\infty \int_0^{T'} \|u(t)\|_2 dt \\
&\leq c\|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u\|_{1,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|u(t)\|_{1,2} dt \\
&\leq c\|u_0\|_{1,2} + ca^3T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty}aT'.
\end{aligned}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^{T'} \|\nabla\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|e^{it\partial_x^2}\nabla u_0\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(|u|^2u)dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\
&\quad + \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(b(.)u)dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \qquad (3.24) \\
&\leq c\|\nabla u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|\nabla(|u|^2u)(t)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|\nabla(b(.)u(t))\|_2 dt \\
&\leq c\|u_0\|_{1,2} + ca^3T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty}aT'.
\end{aligned}
$$

Desse modo,

$$
\left(\int_0^{T'} \|\Phi(u)(t)\|_{1,\infty}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq 2c\|u_0\|_{1,2} + 2ca^3T'^{\frac{3}{4}} + 2c\|b\|_{1,\infty}aT'. \qquad (3.25)
$$

Portanto,

$$
\|\!|\Phi(u)|\!\| \leq C(\|u_0\|_{1,2} + a^3T'^{\frac{3}{4}} + aT'), \qquad (3.26)
$$

onde $C = \max\{2+2c, 4c, 4c\|b\|_{1,\infty}\}$.

Considerando $a = 2C\|u_0\|_{1,2}$, segue

$$
\|\!|\Phi(u)|\!\| \leq C\|u_0\|_{1,2}(1^+8C^3T'^{\frac{3}{4}}\|u_0\|_{1,2}^2 + 2CT'). \qquad (3.27)
$$

Escolhendo $T' > 0$ tal que

$$8C^3 T'^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_{1,2}^2 + 2CT' < 1,$$

concluímos que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$.

Provemos agora que $\Phi : E(T',a) \to E(T',a)$ é uma contração. Consideremos agora $u, v \in E(T',a)$. Das estimativas de Strichartz, da desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4) e da desigualdade de Hölder, resulta que

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|\Phi(v) - \Phi(u)\|_2 &\leq \sup_{[0,T']} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2 v - |u|^2 u)(t')dt'\|_2 \\
&\quad + \sup_{[0,T']} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_2 \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 v - |u|^2 u)(t)\|_1^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 + |u|^2)|v-u|\|_1^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_\infty \int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 + |u|^2)\|_2^{\frac{4}{3}} \|v-u\|_2^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2 + |u|^2)\|_2^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \qquad (3.28) \\
&\leq c\left[\left(\int_0^{T'} \|v\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \|u\|_4^8 dt\right)^{\frac{1}{4}}\right] \\
&\quad \times \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_2^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|v-u\|_2 dt \\
&\leq c\left[\left(\int_0^{T'} \|v\|_{1,2}^8 dt\right)^{\frac{1}{4}} + \left(\int_0^{T'} \|u\|_{1,2}^8 dt\right)^{\frac{1}{4}}\right] \\
&\quad \times \left(\int_0^{T'} \|v-u\|_{1,2}^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|v-u\|_{1,2} dt \\
&\leq 2ca^2 T'^{\frac{3}{4}} |\!|\!| v-u |\!|\!| + c\|b\|_{1,\infty} T' |\!|\!| v-u |\!|\!| .
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(v) - \nabla\Phi(u)\|_2 &\leq \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(|v|^2 v - |u|^2 u)(t')dt'\|_2 \\
&\quad + \sup_{[0,T']} \| \int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_2 \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|\nabla(|v|^2 v - |u|^2 u)(t)\|_1^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|\nabla(b(.)(v-u)(t))\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \||v|^2\nabla v - |u|^2\nabla u\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad + c\int_0^{T'} \|\nabla b(.)(v-u) - b(.)(\nabla v - \nabla u)\|_2 dt.
\end{aligned}
$$

A desigualdade

$$
||v|^2\nabla v - |u|^2\nabla u| \leq c[(|v| + |u|)|v-u||\nabla v| + |u|^2|\nabla v - \nabla u|] \tag{3.29}
$$

é obtida da seguinte forma

$$
\begin{aligned}
||v|^2\nabla v - |u|^2\nabla u| &\leq ||v|^2\nabla v - |u|^2\nabla v| + ||u|^2\nabla v - |u|^2\nabla u| \\
&\leq ||v|^2 - |u|^2||\nabla v| + |u|^2|\nabla v - \nabla u| \\
&\leq c[(|v| + |u|)|v-u||\nabla v| + |u|^2|\nabla v - \nabla u|].
\end{aligned}
$$

Usando (3.29), a desigualdade Minkowski (Teo. 1.4), a desigualdade de Hölder generalizada e as estimativas de Strichartz, decorre que

$$
\begin{aligned}
\sup_{[0,T']} \|\nabla\Phi(v)-\nabla\Phi(u)\|_2 &\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|+|u|)|v-u||\nabla v|+|u|^2|\nabla v-\nabla u|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\int_0^{T'} \|\nabla b(.)(v-u)\|_2+\|b(.)(\nabla v-\nabla u)\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|+|u|)|v-u||\nabla v|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} \||u|^2|\nabla v-\nabla u|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\|b\|_{1,\infty}\int_0^{T'} \|(v-u)\|_2+\|\nabla v-\nabla u\|_2 dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} \||v||v-u||\nabla v|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\left(\int_0^{T'} \||u||v-u||\nabla v|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} \||u|^2|\nabla v-\nabla u|\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{1,\infty}\int_0^{T'} \|(v-u)\|_{1,2}dt \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} (\|v\|_4\|v-u\|_4\|\nabla v|\|_2)^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} (\|u\|_4\|v-u\|_4\|\nabla v|\|_2)^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} (\|u\|_4^2\|\nabla v-\nabla u|\|_2)^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{1,\infty}T'|\!|\!|v-u|\!|\!| \\
&\leq c\left(\int_0^{T'} (\|v\|_{1,2}\|v-u\|_{1,2}\|v\|_{1,2})^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} (\|u\|_{1,2}\|v-u\|_{1,2}\|v\|_{1,2})^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\quad +c\left(\int_0^{T'} (\|u\|_{1,2}^2\|v-u\|_{1,2})^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{1,\infty}T'|\!|\!|v-u|\!|\!| \\
&\leq 3ca^2T'^{\frac{3}{4}}|\!|\!|v-u|\!|\!|+c\|b\|_{1,\infty}T'|\!|\!|v-u|\!|\!|.
\end{aligned}
$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'} \|\Phi(v)-\Phi(u)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}(|v|^2v-|u|^2u)(t')dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &+\left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}b(.)(v-u)(t')dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq c\left(\int_0^{T'} \|(|v|^2v-|u|^2u)(t)\|_1^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|b(.)(v-u)(t)\|_2 dt \\ &\leq 2ca^2T'^{\frac{3}{4}}\|\!|v-u|\!\| + c\|b\|_{1,\infty}T'\|\!|v-u|\!\|\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'} \|\nabla\Phi(v)-\nabla\Phi(u)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(|v|^2v-|u|^2u)(t')dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &+\left(\int_0^{T'} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}\nabla(b(.)(v-u)(t'))dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \\ &\leq c\left(\int_0^{T'} \|\nabla(|v|^2v-|u|^2u)(t)\|_1^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\ &+c\int_0^{T'} \|\nabla(b(.)(v-u)(t))\|_2 dt \\ &\leq 3ca^2T'^{\frac{3}{4}}\|\!|v-u|\!\| + c\|b\|_{1,\infty}T'\|\!|v-u|\!\|.\end{aligned}$$

Dessa forma, concluímos que

$$\|\!|\Phi(v)-\Phi(u)|\!\| \leq C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T')\|\!|v-u|\!\|, \tag{3.30}$$

onde $C' = \max\{C, 10c, 4c\|b\|_{1,\infty}\}$ Escolhendo, $a>0$ e $T'>0$ também de tal forma que

$$C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T') < 1,$$

obtemos o desejado, ou seja, que Φ é contração. Assim, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach temos a existência da solução para a equação integral (3.2). A unicidade pode ser obtida usando argumentos análogos aos usados na demonstração do Teorema 3.2. Agora provaremos a dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial. Sejam u, v duas soluções de (3.2) correspondentes aos dados iniciais u_0, v_0. Das análises feitas, temos que

$$|||v-u||| \leq c\|u_0-v_0\|_{1,2}+C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T')|||v-u|||,$$

ou seja,

$$\left(1-C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T')\right)|||v-u||| \leq c\|u_0-v_0\|_{1,2}.$$

Pela escolha de T', segue que

$$\left(1-C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T'\right)>0.$$

Logo,

$$\begin{aligned} |||v-u||| &\leq \frac{c}{1-C'(a^2T'^{\frac{3}{4}}+T'}\|u_0-v_0\|_{1,2} \\ &= k\|u_0-v_0\|_{1,2}, \end{aligned}$$

o que prova o desejado. □

Observação 3.6. *Na demonstração anterior usamos que $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R})$ para todo $2 \leq p \leq \infty$. Isto se deve ao fato de $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ e $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R})$. Usando o Teorema de Interpolação obtemos que se $u \in H^1(\mathbb{R})$, então*

$$\|u\|_{L^p} \leq \|u\|_2^{1-\theta}\|u\|_\infty^\theta \leq \|u\|_{1,2}^{1-\theta}\|u\|_{1,2}^\theta = \|u\|_{1,2}.$$

3.3 Boa colocação em $H^2(\mathbb{R})$

Teorema 3.7. *Para todo $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$, existem $T' = T'(\|u_0\|_{2,2}, \|b\|_{1,\infty}) > 0$ e uma única solução u da equação (3.2) tal que $u \in C([0,T']; H^2(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T']; W^{2,\infty}(\mathbb{R}))$. Além disso, para todo $T'' < T'$ existe uma vizinhança V de u_0 em $H^2(\mathbb{R})$ tal que a função*

$$\begin{array}{rccl} F: & V & \to & C([0,T'']; H^2(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T'']; W^{2,\infty}(\mathbb{R})) \\ & v_0 & \mapsto & v \end{array}$$

é lipschitziana.

Demonstração: Para todo par (T,a) de constantes positivas, definamos o espaço métrico completo

$$E(T,a) = \{v \in C([0,T]; H^2(\mathbb{R})) \cap L^4([0,T]; W^{2,\infty}(\mathbb{R})) :$$
$$|||v||| = \sup_{[0,T]}\|v(t)\|_{2,2} + \left(\int_0^T \|v(t)\|_{2,\infty}^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} \leq a\}.$$

Mostraremos que existem constantes T' e a tais que $\Phi(E(T',a)) \subset E(T',a)$. De fato, seja $u \in E(T',a)$ por (3.20) e (3.21), temos que

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_{1,2}^{\frac{24}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|u(t')\|_{1,2} dt' \\
&\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_{2,2}^{\frac{24}{7}} dt\right)^{\frac{7}{8}} + c\|b\|_{2,\infty} \int_0^{T'} \|u(t')\|_{2,2} dt' \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + ca^3 T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{2,\infty} a T'
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\|\nabla\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|u_0\|_{1,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_{1,2}^{4} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{1,\infty} \int_0^{T'} \|u(t)\|_{1,2} dt \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + c\left(\int_0^{T'} \|u(t)\|_{2,2}^{4} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{2,\infty} \int_0^{T'} \|u(t)\|_{2,2} dt \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + ca^3 T'^{\frac{3}{4}} + c\|b\|_{2,\infty} a T'.
\end{aligned}$$

Usando (2.18), obtemos

$$\begin{aligned}
\|D^2\Phi(u)(t)\|_2 &\leq \|e^{it\partial_x^2} D^2 u_0\|_2 + \sup_{[0,T']} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')} D^2(|u|^2 u)(t') dt'\|_2 \\
&\quad + \sup_{[0,T']} \|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')} D^2(b(.)u(t')) dt'\|_2 \\
&\leq \|D^2 u_0\|_2 + c\left(\int_0^{T'} \|D^2(|u|^2 u)(t)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} + c\int_0^{T'} \|D^2(b(.)u(t))\|_2 dt \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + c\|b\|_{2,\infty} T' a \\
&\quad + c\left(\int_0^{T'} (\|D^2 u|u|^2\|_{L^1} + \||Du|^2 u\|_{L^1} + \|D^2 u u^2\|_{L^1} + \|(Du)^2 u\|_{L^1})^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + c\|b\|_{2,\infty} T' a \\
&\quad + c\left(\int_0^{T'} (\|D^2 u\|_2 \|u\|_4^2 + \|Du\|_4^2 \|u\|_2 + \|D^2 u\|_2 \|u\|_4^2 + \|Du\|_2^2 \|u\|_2)^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + c\|b\|_{2,\infty} T' a \\
&\quad + c\left(\int_0^{T'} (\|u\|_{2,2} \|u\|_{2,2}^2 + \|u\|_{2,2}^2 \|u\|_{2,2} + \|u\|_{2,2} \|u\|_{2,2}^2 + \|u\|_{2,2}^2 \|u\|_{2,2})^{\frac{4}{3}} dt\right)^{\frac{3}{4}} \\
&\leq \|u_0\|_{2,2} + c\|b\|_{2,\infty} T' a + 4ca^3 T'^{\frac{3}{4}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, prosseguindo de maneira análoga a (3.21), (3.23) e (3.24), vem que

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'}\|\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq c\|u_0\|_{1,2}+c\left(\int_0^{T'}\|u\|_{1,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{1,\infty}\int_0^{T'}\|u(t)\|_{1,2}dt\\ &\leq c\|u_0\|_{2,2}+c\left(\int_0^{T'}\|u\|_{2,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{2,\infty}\int_0^{T'}\|u(t)\|_{2,2}dt\\ &\leq c\|u_0\|_{2,2}+ca^3T'^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{2,\infty}aT'\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'}\|\nabla\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq c\|\nabla u_0\|_2+c\left(\int_0^{T'}\|\nabla(|u|^2u)(t)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\int_0^{T'}\|\nabla(b(.)u(t))\|_2 dt\\ &\leq c\|u_0\|_{1,2}+c\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_{1,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{1,\infty}\int_0^{T'}\|u(t)\|_{1,2}dt\\ &\leq c\|u_0\|_{2,2}+c\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_{2,2}^4 dt\right)^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{2,\infty}\int_0^{T'}\|u(t)\|_{2,2}dt\\ &\leq c\|u_0\|_{2,2}+ca^3T'^{\frac{3}{4}}+c\|b\|_{2,\infty}aT'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{T'}\|D^2\Phi(u)(t)\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}} &\leq \left(\int_0^{T'}\|e^{it\partial_x^2}D^2u_0\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}+\left(\int_0^{T'}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}D^2(|u|^2u)dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\quad+\left(\int_0^{T'}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(t-t')}D^2(b(.)u)dt'\|_\infty^4 dt\right)^{\frac{1}{4}}\\ &\leq c\|D^2u_0\|_2+c\left(\int_0^{T'}\|D^2(|u|^2u)(t)\|_{L^1}^{\frac{4}{3}}dt\right)^{\frac{3}{4}}\\ &\quad+c\int_0^{T'}\|D^2(b(.)u(t))\|_2 dt\\ &\leq c\|u_0\|_{2,2}+c\|b\|_{2,\infty}T'a+4ca^3T'^{\frac{3}{4}}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|\Phi(u)\|\leq C(\|u_0\|_{2,2}+a^3T'^{\frac{3}{4}}+T'a). \tag{3.31}$$

Considerando $a=2C\|u_0\|_{2,2}$, resulta que

$$\|\Phi(u)\|\leq C\|u_0\|_{2,2}(1^+8C^3T'^{\frac{3}{4}}\|u_0\|_{2,2}^2+2CT'). \tag{3.32}$$

Escolhendo $T' > 0$ tal que

$$8C^3 T'^{\frac{3}{4}} \|u_0\|_{2,2}^2 + 2CT' < 1.$$

Assim, $\Phi : E(T', a) \to E(T', a)$ é um operador bem definido. Prosseguindo de forma análoga aos Teorema 3.2 e Teorema 3.5 podemos verificar que Φ é uma contração, logo, pelo Teorema do Ponto Fixo de Banhach, existe uma solução u da equação (3.2). A unicidade e a dependência contínua seguem de modo análogo às demonstrações dos Teorema 3.2 e Teorema 3.5. $\square$

Mostraremos agora que se u é uma solução obtida no Teorema 3.2, então para todo $T > 0$, temos

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2 \qquad \forall t \in [0, T].$$

De fato, consideremos $u_0 \in H^2(\mathbb{R})$ e u a solução correspondente obtida pelo Teorema 3.7. Multiplicando (3.1) por $\bar{u}$ e integrando na variável espacial obtemos

$$i \int_{\mathbb{R}} u_t \bar{u} dx \;=\; - \int_{\mathbb{R}} u_{xx} \bar{u} dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx - i \int_{\mathbb{R}} b(x) |u|^2 dx. \tag{3.33}$$

Analogamente, temos

$$-i \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_t u dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_{xx} u dx - \lambda \int_{\mathbb{R}} |u|^4 dx + i \int_{\mathbb{R}^n} b(x) |u|^2 dx. \tag{3.34}$$

Fazendo a diferença de (3.33) com (3.34) e usando integração por parte, vem que

$$i \int_{\mathbb{R}^n} \bar{u}_t u + u_t \bar{u} dx = -2i \int_{\mathbb{R}^n} b(x) |u|^2 dx. \tag{3.35}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt} \|u(t)\|_2^2 = -2 \int_{\mathbb{R}^n} b(x) |u(t)|^2 dx \leq 0. \tag{3.36}$$

Consequentemente,

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \qquad \forall t \in [0, T']. \tag{3.37}$$

onde T' é o tempo obtido no Teorema 3.7.

Consideremos agora $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ e u a solução de (3.1) correspondente no intervalo de tempo $[0, T']$. Como $\overline{H^2(\mathbb{R})}^{L^2} = L^2(\mathbb{R})$, existe uma sequência de dados $(u_{0_n}) \subset H^2$ tal que $u_{0_n} \longrightarrow u_0$ em L^2. Seja u_n a solução de (3.1) com dado inicial u_{0_n}. Por (3.37), temos para todo $n \in \mathbb{N}$ que

$$\|u_n(t)\|_2 \leq \|u_{0_n}\|_2, \qquad \forall t \in [0, T']. \tag{3.38}$$

Em particular, temos que u_n é solução de (3.1) em L^2. Pela dependência contínua da solução com respeito ao dado inicial, temos que

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_2 &\leq \sup_{[0,T']} \|u_n - u\|_2 \\ &\leq K(T')\|u_{0_n} - u_n\|_2 \longrightarrow 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

logo, obtemos que $u_n \longrightarrow u$ em L^2. Assim,

$$\|u(t)\|_2 \leq \|u_0\|_2, \qquad \forall t \in [0, T'] \tag{3.40}$$

aplicando novamente o Teorema 3.2 com dado inicial $u_{T'} = u(\cdot, T')$, podemos estender u em um intervalo $[0, T' + \Delta T']$. Aplicando sucessivamente o Teorema 3.2, obtemos o resultado desejado.

Veremos agora um resultado de efeito regularizante local para a solução obtida pelo Teorema 3.2 que será empregado na próxima seção.

Lema 3.8. *Seja u uma solução de (3.1) obtida pelo Teorema 3.2. Então, para todo $R > 0$ temos a seguinte estimativa*

$$\int_0^{T'} \int_{|x| \leq R} |D^{\frac{1}{2}} u(x,t)|^2 dx dt \leq C(\|u_0\|_2, T', R, \|b\|_{L^\infty})$$

onde T' é o tempo local obtido no Teorema 3.2.

Demonstração: Pelo Teorema 3.2, a solução u satisfaz a equação integral

$$u(t) = e^{it\partial_x^2}\left(u_0 + i\int_0^t e^{-it\partial_x^2}(\lambda|u|^2 u + ib(x)u)(t')dt'\right). \tag{3.41}$$

Definamos

$$I(u(x,t)) = \left(\int_0^T \int_{|x| \leq R} |D^{\frac{1}{2}} u(x,t)|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.42}$$

Usando a desigualdade de Minkowski (Teo. 1.4), as estimativas de Strichartz, a desigualdade de Hölder, o Corolário 1.64 e a desigualdade (3.40), obtemos que

$$\begin{aligned}
I(u(x,t)) &\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \|\int_0^t e^{-it'\partial_x^2}(\lambda|u|^2u + ib(x)u)(t')dt'\|_2\right)\\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{i\partial_x^2(-t')}(|u|^2u)(t')dt'\|_2 + \sup_{[0,T']}\|\int_0^t e^{-it'\partial_x^2}b(.)u(t')dt'\|_2\right)\\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \left(\int_0^{T'}\||u(t)|^3\|_{\frac{4}{3}}^{\frac{8}{7}}dt\right)^{\frac{7}{8}} + \int_0^{T'}\|b(.)u(t)\|_2dt\right) \qquad (3.43)\\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + \left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_4^{\frac{24}{7}}dt\right)^{\frac{7}{8}} + \|b\|_\infty\int_0^{T'}\|u(t)\|_2dt\right)\\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + T'^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^{T'}\|u(t)\|_4^8dt\right)^{\frac{3}{8}} + \|b\|_\infty T'\|u(t)\|_2\right)\\
&\leq cR\left(\|u_0\|_2 + T'^{\frac{1}{2}}a^3 + \|b\|_\infty T'\|u_0\|_2\right),
\end{aligned}$$

onde T' é o tempo local obtido no Teorema 3.2. Como $u \in C([0,T'];L^2(\mathbb{R})) \hookrightarrow L^2([0,T'];L^2(\mathbb{R}))$, concluímos por (3.43) que $u \in L^2([0,T'];H^{\frac{1}{2}}_{loc}(\mathbb{R}))$. □

3.4 Decaimento exponencial

Nesta seção estamos interessados em obter a taxa de decaimento para energia associada a solução de L^2. A fim de obter o resultado desejado, vamos assumir o resultado de boa coloção global determinado na seção anterior e trabalhar com dados regulares. Integrando (3.36) em $[0,t]$ resulta que

$$E_0(t) := \int_{\mathbb{R}}|u(x,t)|^2dx = -2\int_0^t\int_{\mathbb{R}}b(x)|u(x,s)|^2dxds + \int_{\mathbb{R}}|u_0(x)|^2dx \ \forall t\geq 0, \qquad (3.44)$$

Para demonstrar o decaimento da energia (3.44), precisamos do seguinte resultado.

Lema 3.9. *Seja u uma solução de 3.1 com dado inicial satisfazendo $\|u_0\|_2 \ll 1$. Então para todo $T \gg 1$ existe uma constante positiva que depende de T tal que a seguinte desigualdade ocorre*

$$\int_0^T\int_{|x|\leq R}|u|^2dxdt \leq c\int_0^t\int_{\mathbb{R}}b(x)|u|^2dxdt. \qquad (3.45)$$

Demonstração: Consideremos $B_R := \{x \in \mathbb{R}; |x| \leq R, R > 0\}$. Argumentaremos por contradição. Suponhamos que (3.45) não ocorra, isto é, existe $T_0 \gg 1$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe um dado u_{0_k} uniformemente limitado em $L^2(\mathbb{R})$ por 1 e uma solução correspondente u_k que satisfaz

$$\int_0^{T_0} \int_{B_R} |u_k|^2 dxdt > k \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} b(x)|u_k|^2 dxdt.$$

Desse modo,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{T_0} \|u_k(t)\|^2_{L^2(B_R)} dt}{\int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} b(x)|u_k|^2 dxdt} = +\infty. \tag{3.46}$$

Assim,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{T} \int_{\mathbb{R}} b(x)|u_k|^2 dxdt}{\int_0^{T} \|u_k(t)\|^2_{L^2(B_R)} dt} = 0. \tag{3.47}$$

Como $L^2([0,T_0]; L^2(\mathbb{R}))$ é um espaço de Banach reflexivo, então toda sequência limitada tem uma subsequência que converge fraco. De

$$E_0^k(t) \leq E_0^k(0) \leq 1,$$

obtemos uma subsequência de $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$, que denotaremos por $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ daqui em diante, tal que

$$u_k \rightharpoonup u \qquad \text{em } L^2([0,T_0]; L^2(\mathbb{R})). \tag{3.48}$$

Por (3.47) e (3.48) decorre que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} b(x)|u_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.49}$$

Consequentemente, da hipótese (H) vem que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}\setminus B_R} |u_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.50}$$

Por outro lado, em virtude do Lema 3.8 temos que $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é limitado em $L^2([0,T_0]; H^{\frac{1}{2}}(B_R))$. Além disso, como $H^{\frac{1}{2}}(B_R) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(B_R)$, pelo Lema de Aubin-Lions existe uma subsequência, que denotaremos por $(u_k)_{k\in N}$ tal que

$$u_k \to u \quad \text{forte em} \quad L^2(B_R \times [0,T_0]). \tag{3.51}$$

Portanto,

$$u_k \to u \quad \text{q.s.} \quad B_R \times [0, T_0]. \tag{3.52}$$

Das afirmações (3.50) e (3.52) podemos deduzir a seguinte convergência

$$u_k \to \tilde{u} \quad \text{q.s.} \quad \mathbb{R} \times [0, T_0]. \tag{3.53}$$

onde

$$\tilde{u} = \begin{cases} u & \text{q.s. em} \quad B_R \times [0, T_0] \\ 0 & \text{q.s. em} \quad \mathbb{R} \setminus B_R \times [0, T_0]. \end{cases} \tag{3.54}$$

Agora dividiremos a prova em 2 casos a saber $u \neq 0$ e $u = 0$.

Caso $u \neq 0$.

Nosso objetivo é passar o limite na equação

$$iu_{t,k} + u_{xx,k} + |u_k|^2 u_k + ib(x)u_k = 0. \tag{3.55}$$

Usando as convergências (3.48) e (3.49) podemos passar o limite na parte linear da equação sem problemas. A dificuldade é lidar com o termo não linear. Pela teoria local vista no Teorema 3.2 obtemos que u_k é limitada em $L^8([0, T_0]; L^4(\mathbb{R})) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R} \times [0, T_0])$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assim

$$(|u_k|^2 u_k)_{k \in \mathbb{N}} \qquad \text{é limitada em } L^{\frac{4}{3}}(\mathbb{R} \times [0, T_0]). \tag{3.56}$$

Por (3.53) e pelo lema de Lions para domínio limitado, segue que

$$|u_k|^2 u_k \rightharpoonup |u|^2 u \qquad \text{em } L^{\frac{4}{3}}(B_R \times [0, T_0]). \tag{3.57}$$

Assim, podemos passar o limite na equação (3.55) quando $k \to \infty$. Temos que u satisfaz

$$\begin{cases} iu_t + u_{xx} + \lambda |u|^2 u = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times [0, T_0]) \\ u = 0 & \text{q.s. em } \mathbb{R} \setminus B_R \times [0, T_0]. \end{cases} \tag{3.58}$$

Como $u \in L^2([0, T_0]; L^2(\mathbb{R}))$, existe $t_0 \in [0, T_0]$ tal que $u_{t_0} = u(x, t_0) \in L^2(\mathbb{R})$ tem suporte compacto. Assim, podemos usar o Teorema 1.67 e concluir que $u \in C^\infty((0, T_0) \times \mathbb{R})$, com $u(x, t) = 0$ para todo $(x, t) \in \mathbb{R} \setminus B_R \times [0, T_0]$. Consequentemente, existem

$t_1, t_2 \in (0, T_0)$ distintos, $\rho > 2$ e $\beta > 0$ tais que $u(\cdot, t_1), u(\cdot, t_2) \in H^1(e^{\beta|x|^\rho}dx)$. Do Teorema 1.68, vem que $u \equiv 0$ em $B_R \times [0, T_0]$. Como $u \equiv 0$ em $\mathbb{R} \setminus B_R \times [0, T_0]$ concluímos que $u \equiv 0$ em $\mathbb{R} \times [0, T_0]$, o que contradiz o fato de $u \neq 0$.

Caso $u = 0$.

Denotemos

$$\nu_k = \|u_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))}. \tag{3.59}$$

Se definirmos $v_k = \frac{u_k}{\nu_k}$, obtemos

$$\|v_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))} = 1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.60}$$

Vamos deduzir uma limitação uniforme conveniente para o dado inicial $v_{0_k} = v_k(0)$ em L^2. Usando a hipótese (H), temos que

$$\begin{aligned} \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} |u_k(t)|^2 dxdt &= \frac{\alpha_0}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}\setminus B_R} |u_k(t)|^2 dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R} |u_k(t)|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}\setminus B_R} b(x)|u_k(t)|^2 dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R} |u_k(t)|^2 dxdt \\ &\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u_k(t)|^2 dxdt + \int_0^{T_0}\int_{B_R} |u_k(t)|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.61}$$

Em virtude de (3.44) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_{0_k}(x)|^2 dx &\leq \int_{\mathbb{R}} |u_k(t)|^2 dx + 2\int_0^t\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(s)|^2 dxds \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |u_k(t)|^2 dx + 2\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(s)|^2 dxds, \end{aligned} \tag{3.62}$$

desse modo,

$$T_0\int_{\mathbb{R}} |u_{0_k}(x)|^2 dx \leq \int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} |u_k(t)|^2 dxdt + 2T_0\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(s)|^2 dxds.$$

Pela desigualdade (3.61), obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u_{0_k}(x)|^2 dx &\leq \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} |u_k(t)|^2 dxdt + 2\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(t)|^2 dxdt \\ &\leq \left(2 + \frac{1}{\alpha_0 T_0}\right)\int_0^{T_0}\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(t)|^2 dxdt + \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\int_{B_R} |u_k(t)|^2 dxdt. \end{aligned} \tag{3.63}$$

Logo, usando a desigualdade (3.63), decorre que

$$\|v_{0_k}\|_2^2 \leq \left(2 + \frac{1}{\alpha_0 T_0}\right) \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k(t)|^2 dxdt + \frac{1}{T_0}, \tag{3.64}$$

que estabelece uma limitação para o dado inicial v_{0_k} em L^2 e, para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, temos de (3.47) que $\|v_{0_k}\|_2 \ll 1$. Logo, pelo Teorema 3.2 v_k é uma solução global da equação

$$iv_{t,k} + v_{xx,k} + |v_k|^2 v_k + ib(x)v_k = 0. \tag{3.65}$$

Por (3.46), resulta que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\int_0^{T_0} \|v_k(t)\|_{L^2(B_R)}^2 dt}{\int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} b(x)|v_k|^2 dxdt} = +\infty, \tag{3.66}$$

e por (3.60), vem que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}} b(x)|v_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.67}$$

Como $b(x) \geq \alpha_0 > 0$ q.s. para $x \in \mathbb{R} \setminus B_R$, temos por (3.67) que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{\mathbb{R}\setminus B_R} |v_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.68}$$

Assim, obtemos uma função $\tilde{v}$ que verifica $v_k \rightharpoonup \tilde{v}$ em $L^2([0,T_0] : L^2(\mathbb{R}))$, onde

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{q.s. em} \quad B_R \times [0,T_0] \\ 0 & \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n \setminus B_R \times [0,T_0]. \end{cases} \tag{3.69}$$

Por outro lado, como $\nu_k = \|u_k\|_{L^2([0,T_0];L^2(B_R))} \to 0$ quando $k \to \infty$ e v_k é limitado em $L^2(\mathbb{R} \times [0,T_0])$, usando (3.64), (3.65), (3.67) e (3.68) podemos usar argumentos similares ao caso $u \neq 0$ para passar o limite na equação (3.65) e obter

$$\begin{cases} iv_t + \Delta v = 0 & \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R} \times [0,T_0]) \\ v = 0 & \text{q.s. em } \mathbb{R} \setminus B_R \times [0,T_0]. \end{cases} \tag{3.70}$$

Também por argumentos similares ao caso $u \neq 0$, usando o Corolário 1.66 e o Teorema 1.68 concluímos que $v \equiv 0$ em $B_R \times [0,T_0]$. Usando o Lema 3.8 em v_k obtemos que v_k é limitada em $L^2([0,T_0]; H^{\frac{1}{2}}(B_R))$ e em virtude do Lema de Aubin-Lions, tendo em vista que $v \equiv 0$ em $B_R \times [0,T_0]$, segue que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{T_0} \int_{B_R} |v_k|^2 dxdt = 0. \tag{3.71}$$

Mas por (3.60), temos que

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{T_0}\int_{B_R}|v_k|^2dxdt = 1, \tag{3.72}$$

o que é uma contradição. □

Teorema 3.10. *Se* $\|u_0\|_2 \ll 1$, *existem* $c > 0$ *e* $\omega > 0$ *tais que*

$$E_0(t) \leq ce^{-\omega t}$$

para todo $t \gg 1$ *e para qualquer solução de (3.1) dada no Teorema 3.2.*

Demonstração: Temos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T E_0(t)dt &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}}|u(x,t)|^2dxdt\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}\backslash B_R}|u(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt\\
&= \int_0^T\int_{\mathbb{R}\backslash B_R}\frac{\alpha_0}{\alpha_0}|u(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt\\
&\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}\backslash B_R}b(x)|u(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt\\
&\leq \frac{1}{\alpha_0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}}b(x)|u(x,t)|^2dxdt + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt\\
&= -\frac{1}{2\alpha_0}\left[\int_{\mathbb{R}}|u(x,t)|^2dx\right]_0^T + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt\\
&= -\frac{1}{2\alpha_0}E_0(T) + \frac{1}{2\alpha_0}E_0(0) + \int_0^T\int_{B_R}|u(x,t)|^2dxdt.
\end{aligned}$$

Deste modo, usando o lema anterior obtemos

$$\int_0^T E_0(t)dt \leq \frac{1}{2\alpha_0}E_0(0) + c\int_0^T\int_{\mathbb{R}}b(x)|u(x,t)|^2dxdt \quad \forall T \gg 1. \tag{3.73}$$

Usando a identidade de energia de L^2, isto é,

$$E_0(t) - E_0(0) = -2\int_0^t\int_{\mathbb{R}}b(x)|u(x,t)|^2dxdt \qquad \forall t \geq 0, \tag{3.74}$$

concluímos que $E_0(t)$ é não decrescente e, além disso, que

$$2\int_0^t\int_{\mathbb{R}}b(x)|u(x,s)|^2dxds = E_0(0) - E_0(t) \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.75}$$

Combinando (3.73) e (3.75) temos

$$E_0(T) \leq \frac{1}{2T\alpha_0}\left[E_0(T) - 2\int_0^T\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt\right] + \frac{c}{T}\int_0^T\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt,$$

o que implica para $T \gg 1$ que

$$\left(T - \frac{1}{2\alpha_0}\right) E_0(T) \leq (\alpha_0^{-1} + c)\int_0^T\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.76}$$

Para $T > \frac{1}{2\alpha_0}$, obtemos da última desigualdade que

$$E_0(T) \leq c\int_0^T\int_{\mathbb{R}} b(x)|u(x,t)|^2 dxdt. \tag{3.77}$$

Finalmente, combinando (3.75) e (3.77) segue que

$$E_0(T) \leq c\left[\frac{E_0(0) - E_0(T)}{2}\right] \tag{3.78}$$

logo,

$$E_0(T) \leq \gamma E_0(0) \qquad \text{onde } \gamma = \frac{\frac{c}{2}}{1 + \frac{c}{2}}. \tag{3.79}$$

Como a solção de L^2 é global, definamos $v(x,t) = u(x,t+T)$. Temos que v é uma solução da equação de Schrödinger (3.1) que pertence a $C([T,2T], L^2(\mathbb{R}))$. Além disso, o dado inicial agora é $v(x,0) = u(x,T) \in L^2(\mathbb{R})$. Pelo Lema 3.9 aplicado em v temos que

$$\begin{aligned} E_0(2T) = E_{0,v}(T) &\leq c\int_0^T\int_{B_R} b(x)|v(x,t)|^2 dxdt \\ &= c\int_0^T\int_{B_R} b(x)|u(x,t+T)|^2 dxdt \\ &= \int_T^{2T}\int_{B_R} b(x)|u(x,s)|^2 dxds \\ &= c\left[\frac{E_0(T) - E_0(2T)}{2}\right], \end{aligned}$$

onde $E_{0,v}$ é a energia de $L^2(\mathbb{R}^n)$ associada a v. Assim,

$$E_0(2T) \leq \gamma E_0(T) \leq E_0(0).$$

Repetindo este argumento obtemos que $E_0(nT) \leq \gamma^n E_0(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste último fato deduzimos o decaimento exponencial. De fato, considerando $t = nT + r$, onde $0 \leq r < T$, segue que

$$E_0(t) \leq E_0(nT) \leq \gamma^n E_0(0) = \gamma^{(\frac{t}{T} - \frac{r}{T})} E_0(0). \tag{3.80}$$

Como $0 < \gamma < 1$, podemos escolher $\omega = -\frac{\ln(\gamma)}{T} > 0$ e $\alpha = \gamma^{-\frac{r}{T}} E_0(0) < c(L)$ para obter

$$E_0(t) \leq \alpha e^{-\omega t} \qquad \forall t > 0,$$

o que completa a prova. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] BRÉZIS, H.: **Analyse Fonctionnelle (Théore et Applications).** Paris, Masson, 1983.

[2] CARDOSO, D. C. S.: **O Problema de Cauchy para Sistema de Gross-Pitaevskii**. Dissertação de Mestrado. UFAL. Maceió, 2005

[3] CARNEIRO, E: **A transformada de Fourier**. Notas de aula. IMPA. Rio de Janeiro, 2011

[4] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FAMINSKII, A.; NATALI, F.: **Decay of solutions to damped Korteweg-de Vries type equation**, Appl. Math. Optim., 65 (2012), pp. 221-251.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; FUKUOKA, R.; NATALI, F.: **Exponential stability for the $2-D$ defocusing Schrödinger equation with locally distributed damping**, Diff. Int. Equat., 22 (2009), pp. 617–636.

[6] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V.: **Introdução à Anàlise Funcional**. Eduem, Maringá, 2011.

[7] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Introdução à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Eduem, Maringá, 2009.

[8] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; SORIANO, J.; NATALI, F.: **Qualitative aspects for the cubic nonlinear Schrödinger equations with localized damping: Exponential and polynomial stabilization**, J. Diff. Equat. 248 (2010) pp. 2955–2971

[9] CAZENAVE, T.: **Semilinear Schrödinger Equations**. Courant Lectures Notes. American Mathematical Society, 2003

[10] COAYLA TERAN, E. A.: **O problema de existência de solução para a equação de Schrödinger não linear**. Dissertação de Mestrado. UNICAMP. Campinas, 1995

[11] EVANS, L. C.: **Partial Differential Equations**. Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society.

[12] ESCAURIAZA, L.; KENIG, C. E.; PONCE, G.; VEGA, L.: **On uniqueness properties of solution of Schrodinger equations**. Comm. Partial Differential Equations, 31 (2006)

[13] FERNANDEZ, P. J.: **Medida e Integração**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[14] FOLLAND, G. B.: **Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications**. N.Y.: John Wiley & Sons, 1999.

[15] KREYSZIG, E.: **Introductory functional analysis with applications**. Istituto di Analisi Matematica, Universita Di Torino, 1989.

[16] LAURENT, C.: **Global controllability and stabilization for the nonlinear Schrdinger equation on an interval**, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 16 (2010), pp. 356–379.

[17] LAURENT, C.; ROSIER, L.; ZHANG, B.-Y.: **Control and stabilization of thr Korteweg–de Vries equation on a periodic domain**, Comm. Partial Diff. Equations, 35 (2010), pp. 707–744.

[18] LINARES, F.; PAZOTO, A.F.: **Asymptotic behavior of the Korteweg–de Vries equation posed in a quarter plane**. J. Diff. Equations, 246 (2009), pp. 1342–1353.

[19] LINARES, F.; PONCE, G.: **Introduction to nonlinear Dispersive Equations**. NY: Springer, 2008.

[20] LINARES, F.; PAZOTO, A.F.: **On the exponential decay of the critical generalized Korteweg–de Vries equation with localized damping**. Proc. Amer. Math. Soc., 135 (2007), pp. 1515–1522.

[21] LIONS, J. L.: **Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes Aux Limites Non Linéaires**. Dunod, Gauthier-Villars, 1969.

[22] MEDEIROS, L. A.; MELLO, E.A.: **A Integral de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[23] MENZALA, G.P.; VASCONCELLOS, C.F.; ZUAZUA, E.: **Stabilization of the Korteweg–de Vries equation with localized damping**, J. Q. Appl. Math., 60 (2002), pp. 111–129.

[24] NATALI, F.: **A note on the exponential decayfor the Nonlinear Schrödinger Equation**. 2012

[25] NATALI, F.: **Exponential stabilization for the Nonlinear Schrödinger Equation with localized damping**. 2012

[26] PONCIANO, D. S.: **O problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear com derivadas satisfazendo a condição gauge nula**. Dissertação de Mestrado. UFPI. Teresina, 2011

[27] ROSIER, L.; ZHANG, B.-Y.: **Exact boundary controllability of the nonlinear Schrdinger equation**, J. Diff. Equat., 246 (2009), pp. 4129–4153.

[28] SALSA, S.: **Partial Differential Equations in Action**. Milan: Springer, 2008

[29] SANTOS, A. S.: **Estimativas de Strichartz e a equação não linear de Schrödinger em espaços euclidianos**. Dissertação de Mestrado. UFAL. Maceió, 2009

[30] SHIMOMURA, A.: **Asymptotic behavior of solutions for Schrödinger equations with dissipative nonlinearities**, Comm. Partial. Diff. Equat., 31 (2006), pp. 1407–1423.

[31] ZHANG, B.-Y.: **Unique continuation properties for the nonlinear Schrödinger equation**, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 127A (1997), pp. 191–206.