UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

GUILHERME ZSIGMOND MACHADO

Controlabilidade de Sistemas Lineares(†)

(†) Trabalho Financiado pela CAPES e Fundação Araucária.

Maringá-PR

2012

GUILHERME ZSIGMOND MACHADO

Controlabilidade de Sistemas Lineares

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria e Topologia

Orientador: Prof. Dr. Osvaldo Germano do Rocio

Co-orientador: Prof Dr. Alexandre J. Santana

Maringá

2012

Controlabilidade de Sistemas Lineares

Guilherme Zsigmond Machado

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Dr.Osvaldo Germano do Rocio - UEM ....
(Orientador)

Prof. Dr.Alexandre José Santana -UEM ....
(Co-Orientador)

Prof. Dr. Simão Nicolau Stelmastchuk - FAFIUV ....

Maringá

setembro - 2012

A Matemática é um pôr do sol: todos podem vê-la, mas poucos admiram-na.

A minha família e amigos.

Agradecimentos

Agradeço a minha esposa Franciele pela compreensão, carinho, dedicação e ajuda durante todos os anos de graduação e mestrado.

Agradeço aos meus pais, Cynthia e Jorge, a minha avó Maria Célia e a toda a minha família pela confiança depositada, em especial a minha bisavó Maria que sempre me incentivou a estudar. Aos meus amigos Jean, Rodrigo e as pessoas que me ajudaram durante as dificuldades desta jornada.

Agradeço a turma de 2010, Victor, Djeison, Alex, Jorge, Tiago, André e Fausto pelo apoio na horas cruciais.

Agradeço a todos os professores do Departamento de Matemática da UEM, que desde a graduação me ajudaram e continuam me ajudando na construção do meu conhecimento. Em especial agradeço ao meu orientador Osvaldo, que de forma serena e extremamente polida me ajudou no decorrer dos estudos e na redação desta dissertação, principalmente nas inúmeras correções. Agradeço também ao meu co-orientador Alexandre e aos professores Ryuichi, Marcos e Carmelo.

Agradeço a CAPES e a Fundação Araucária pelo suporte financeiro.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar a controlabilidade local para um sistema de controle sobre um grupo de Lie G, expressos da forma

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde os campos de controle $Y_1, ...Y_k$ pertencem a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G e o campo vetorial $\mathcal{X}$ é um campo linear. Provaremos que a condição de ad-rank é suficiente para que o sistema seja localmente controlável.

Palavras-chaves: Sistema de Controle, Controlabilidade, Controlabilidade local e Sistemas Lineares.

Abstract

The objective of this dissertation is to study the local controllability of control systems over a Lie group G, which can be expressed as

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

where the control fields $Y_1, ...Y_k$ belongs to the Lie algebra $\mathfrak{g}$ of the Lie group G and the vector field $\mathcal{X}$ is a linear field. We prove that the ad-rank condition is sufficient for the system be locally controllable.

Keywords: Control system, Controllability, Local Controllability and Linear systems.

Sumário

Introdução

O estudo da controlabilidade de sistemas dinâmicos tem papel fundamental na sociedade moderna. A partir deste é possível não apenas descrever o funcionamento de sistemas como também modificá-lo, é neste ponto que entra a teoria de controle.

O propósito deste trabalho é estudar a controlabilidade local, a partir da identidade, de sistemas de controle da forma

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde g pertence a um grupo de Lie G, os campos de controle $Y_1, ...Y_k$ pertencem a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ do grupo de Lie G, as funções de controle $u_1, ..., u_k$ são constantes por partes e o campo vetorial $\mathcal{X}$ é linear, isto é, $\mathcal{X}$ é um campo vetorial suave e completo sobre G, tal que, o colchete $[\mathcal{X}, Y]$ pertence a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ para todo Y em g, cujo fluxo tem a identidade como ponto fixo .

Tradicionalmente o estudo da controlabilidade de sistemas de controle do tipo afim é feito para o caso em que o campo $\mathcal{X}$ também pertence a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$. Uma propriedade a ser destacada nesta situação é o fato do conjunto de atingibilidade a partir da identidade ser um semigrupo do grupo de Lie, com isto, admitindo como hipótese a condição do posto, o sistema será controlável desde que o elemento identidade pertença ao interior do semigrupo e o grupo, é claro, seja conexo.

No caso em que $\mathcal{X}$ não pertence a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ o estudo é um pouco mais sofisticado pois, ao contrário do caso tradicional, o conjunto de atingibilidade, em geral, não é um semigrupo. Assumindo a controlabilidade local o sistema será globalmente controlável se, e somente se o conjunto de atingibilidade for um semigrupo.

O início de nossos estudo sobre o assunto se deu com o artigo de Ayala e Tirao [1], onde é estabelecido uma condição suficiente para a controlabilidade local do sistema descrito acima, através da chamada condição de ad-rank a qual definiremos no capítulo 3. Posteriormente Cardetti e Minttenhuber abordaram em [2], o mesmo problema de Ayala e Tirao, porém com enfoque direcionado para a teoria de Lie, enfoque este, que daremos neste trabalho. No transcorrer do estudo houveram perguntas que não haviam sido respondidas a respeito do campos lineares, muitas desta foram respondidas pelo artigo de Jouan [3].

Esta dissertação está dividido em duas partes separadas em quatro capítulos que compõe este trabalho. A primeira parte, de caracter introdutório, é formada pelas seções 1.1 e 2.1. Nestas seções é visado apenas dar uma visão geral dos objetos necessários para a compreensão do trabalho e fixar a notação. Mais especificamente, na seção 1.1 é feita a introdução da teoria de grupos de Lie enquanto na seção 2.1 é feita a introdução da teoria de sistemas de controle.

A segunda parte são os resultado propriamente ditos. Esta parte compreende as seções 1.2, 2.2 e os capítulo 3 e 4. Na seção 1.2 descrevemos algumas propriedades do normalizador de uma álgebra de Lie, descreveremos uma decomposição desta álgebra e a partir desta caracterizaremos de maneira explícita uma condição para que um campo pertença ao normalizador. De maneia análoga a seção 1.2, a seção 2.2 dá continuidade ao desenvolvimento da teoria tratada na seção 2.1, com enfoque na comparação entre os resultados da tradicional e os resultado para sistemas linear.

O capítulo 3 constitui a parte principal da dissertação. A seção 3.1 é constituída dos resultados necessários para a demonstração da controlabilidade local para sistema lineares. Nela construiremos um grupo de Lie, no qual levantaremos o sistema linear de controle a um sistema de controle invariante à direita. A seção 3.2 traz o principal resultado deste trabalho, o qual dividimos em dois teoremas: o Teorema 3.8 e o Teorema 3.9. O primeiro estabelece a controlabilidade local do sistema linear a partir da condição de que $\widehat{W}+\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$, enquanto o segundo demonstra que se o sistema satisfaz a condição ad-rank então a condição $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$ é verificada.

O último capítulo é dedicado a exemplificação desta teoria. Calcularemos os campos lineares do grupo de Heisenberg e daremos um exemplo numérico que somente a condição do posto não é suficiente para controlabilidade local.

Capítulo 1

Conceitos básicos

Neste capítulo, apresentaremos os principais conceitos para a compreensão desta dissertação. Na primeira seção, faremos uma rápida revisão de grupos de Lie e alguns tópicos de campos de vetores em grupos de Lie, para isto utilizaremos basicamente as referências Warner [8] e Conlon [12]. A segunda seção é dedicada ao estudo do normalizador, desta álgebra de Lie apresentaremos sua definição e estudaremos as propriedades necessárias para o desenvolvimento da dissertação. As principais referências para a segunda seção são Ayala e Tirao [1], Cardetti e Mitenhuber [2] e Jouan [3].

1.1 Grupos e álgebras de Lie

Nesta seção, faremos um breve resumo de alguns conceitos e resultados relacionados a grupos e álgebras de Lie. A maioria dos resultados será apresentada sem as devidas demonstrações. Para maiores detalhes vide [8].

Definição 1.1. *Um* grupo de Lie *é um grupo abstrato* G*, munido de uma estrutura de variedade diferenciável a qual torna o produto* $\mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$*, definido por* $(g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2$*, e a inversão* $\mathrm{G} \to \mathrm{G}$*, definida por* $g_1 \mapsto g_1^{-1}$*, diferenciáveis.*

No decorrer deste trabalho, ao mencionarmos que uma aplicação é diferenciável ou suave, entenderemos que esta aplicação é C^∞, salvo menção contrária.

A partir da estrutura de variedade do grupo de Lie G, a qual denotaremos por $\mathfrak{F}$, podemos construir o espaço tangente à G no ponto g, que denotaremos por $T_g\mathrm{G}$. Seja $\lambda : J \subset \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ um caminho diferenciável tal que $\lambda(0) = g$. Definimos $C(g)$ como sendo o conjunto

$$C(g) = \{\lambda : \lambda(0) = g\}.$$

Seja r a relação de equivalência definida por: dados λ e μ curvas pertencentes à $C(g)$, então λ está relacionado com μ, se ambas possuem o mesmo vetor tangente em g no tempo $t = 0$. Desta forma, $T_g\mathrm{G}$ é o conjunto quociente $\frac{C(g)}{r}$. Por meio dos espaços tangentes, podemos definir o fibrado tangente de G.

Definição 1.2. *O* fibrado tangente *do grupo de Lie* G *é a união disjunta dos espaços tangente à* G.

Denotaremos o fibrado tangente por $T\mathrm{G}$. Desta forma, podemos expressá-lo por:

$$T\mathrm{G} = \bigcup_{g \in \mathrm{G}} \{g\} \times T_g\mathrm{G}$$

Sejam $\pi : T\mathrm{G} \to \mathrm{G}$, definida por $\pi(v) = g$ se $v \in T_g\mathrm{G}$ e (U, ϕ) uma carta local de G, cuja funções coordenadas são $x_1, ..., x_n$. Podemos munir $T\mathrm{G}$ de uma estrutura topológica e diferenciável dada pela coleção maximal $\tilde{\mathfrak{F}}$ que contenha o conjunto

$$\{(\pi^{-1}(U), \tilde{\phi}) : (U, \phi) \in \mathfrak{F}\},$$

onde $\tilde{\phi}(v) = (x_1(\pi(v)), ..., x_n(\pi(v)), dx_1, ..., dx_n)$.

Um campo vetorial Y ao longo de uma curva $\alpha : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ é uma aplicação

$$Y : [a, b] \to T\mathrm{G}$$

que satisfaz $\pi \circ Y = \alpha$. Note que, se $\alpha(0) = g$, então

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)|_{t=0} = Y(g) \in T_g\mathrm{G}.$$

Podemos estender o conceito de campo para um aberto V de G (e, posteriormente, para G), exigindo que $\pi \circ Y$ seja aplicação identidade sobre V (G).

Definição 1.3. *A* curva integral *do campo X pelo ponto $g \in \mathrm{G}$ é a aplicação diferenciável $\alpha : I_g \to \mathrm{G}$, onde $I_g \subset \mathbb{R}$ é maximal, que satisfaz*

$$\frac{d\alpha(t)}{dt}|_t = X(\alpha(t)), \quad \alpha(0) = g.$$

No decorrer deste trabalho, denotaremos a curva $\alpha(t)$ passando pelo ponto g por $\alpha_t(g)$. Diremos que um campo Y é completo se o domínio da curva integral do campo Y por g for $\mathbb{R}$, para todo $g \in \mathrm{G}$. Denotaremos por $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ o conjunto de todos os campos diferenciáveis e completos do grupo de Lie G. Veremos que neste espaço vetorial podemos definir um colchete de Lie.

Definição 1.4. *O* fluxo *do campo X é uma aplicação $\Phi : \mathbb{R} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ definida por $\Phi(t, g) = \alpha_t(g)$.*

A próxima proposição trará algumas propriedades de conceito de fluxo

Proposição 1.1. *Seja Φ o fluxo de X. Então Φ satisfaz:*

1. *$\Phi(0, g) = g$, para todo $g \in \mathrm{G}$;*

2. *$\Phi(t + s, g) = \Phi(t, \Phi(s, g))$, para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$ e $g \in \mathrm{G}$;*

3. *$\frac{\partial \Phi(t,g)}{\partial t}|_t = X(\Phi(t, g))$, para quaisquer $t \in \mathbb{R}$ e $g \in \mathrm{G}$.*

Agora, veremos um pouco sobre colchete de Lie.

Lema 1.2. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$. Então existe um único campo em $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ definido por $[X, Y]_m(f) = X_m(Yf) - Y_m(Xf)$, e denominado de* colchete dos campos *X e Y.*

Demonstração: Veja Lema 5.2, em [16]. □

Proposição 1.3. *Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$, as seguinte propriedades do colchete de Lie são válidas:*

1. *o colchete de Lie é uma aplicação bilinear;*

2. *$[X, Y]$ é um campo vetorial suave sobre G;*

3. *se $f, g \in C^\infty(\mathrm{G})$, então $[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$;*

4. *$[X, Y] = -[Y, X]$, conhecida como anti-comutatividade;*

5. $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$, *conhecida como identidade de Jacobi.*

Demonstração: Veja Proposição 5.3, em [16]. $\square$

Definição 1.5. *O campo vetorial acima é chamado de colchete de Lie de X e Y.*

Nosso próximo objetivo é definir a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie G.

Definição 1.6. *Sejam* G, H *grupos de Lie e* $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *uma aplicação diferenciável, cuja diferencial denotaremos por* $d\psi$. *Dados* $X \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$ *e* $Y \in \mathfrak{X}(\mathrm{H})$, *diremos que* X *é* ψ-relacionado *com* Y *se*

$$d\psi \circ X = Y \circ \psi.$$

Antes de apresentarmos um exemplo da definição acima, precisamos da seguinte definição.

Definição 1.7. *Seja* G *um grupo de Lie. A* translação à esquerda *por* g *é a aplicação* $L_g : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, *definida por* $L_g(g_1) = gg_1$. *De maneira análoga definimos a* translação à direita *por* g *como sendo a aplicação* $R_g : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$, *definida por* $R_g(g_1) = g_1 g$.

Note que as translações são diferenciáveis, pois a operação produto em G é diferenciável. Para uma melhor compreensão das definições acima faremos um exemplo. Tome o grupo de Lie $\mathbb{R}^n$ munido da operação soma. Calcularemos os campos L-relacionados do $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.1. ***Campos L-relacionados do*** $\mathbb{R}^{\mathbf{n}}$.

Sejam $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* L_y *a translação à esquerda por* y *em* $\mathbb{R}^n$. *Se* $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$, *então o campo* Y *no ponto* $x \in \mathbb{R}^n$ *é dado por*

$$Y(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j},$$

onde cada a_j *é uma aplicação de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathbb{R}$. *Para que* Y *seja* $L-$*relacionado é necessário que este satisfaça a condição:*

$$dL_y \circ Y(x) = Y \circ L_y(x), \tag{1.1}$$

onde dL_y *denota a diferencial da aplicação translação à esquerda.*

Denotemos por $L_y^1, ..., L_y^n$ *as funções coordenadas da aplicação translação* L_y*, que a cada* x *associa* $L_y(x) = y + x$*. Desta forma, a diferencial* dL_y *é representada pela matriz Jacobiana de* L_y*, a qual pode ser escrito em relação a base canônica como*

$$JL_y(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial L_y^1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial L_y^1}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial L_y^1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial L_y^2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial L_y^2}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial L_y^2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L_y^n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial L_y^n}{\partial x_2}(x) & \dots & \frac{\partial L_y^n}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da igualdade 1.1 temos

$$dL_y \circ Y(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ a_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ \vdots \\ a_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x_1, x_2, ..., x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (1.2)$$

Do lado direito da igualdade 1.1 segue que

$$Y \circ L_y(x) = Y(y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j(y_1 + x_1, y_2 + x_2, ..., y_n + x_n) \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (1.3)$$

Das igualdade 1.2 e 1.3 concluímos que

$$a_j(x) = a_j(y + x).$$

Pela arbitrariedade de y*, segue que cada aplicação* a_j *é constante. Portanto os campos L-relacionado de* $\mathbb{R}^n$ *são os campos constantes.*

Os campos $L-$relacionados são conhecidos como campos invariantes à esquerda enquanto os campos $R-$relacionados são conhecidos como campos invariantes à direita. Note que pela invariância à esquerda, basta-nos saber o valor de Y em um ponto de G para conhecermos o campo Y em todos pontos de G.

Definição 1.8. *Uma* álgebra de Lie *sobre* $\mathbb{R}$ *é um espaço vetorial real* $\mathfrak{g}$ *munido de uma transformação bilinear denotada por* $[\quad,\quad] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$*, satisfazendo os itens* (4) *e* (5) *da Proposição 1.3.*

Dado uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$, uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ é um subespaço vetorial $\mathfrak{h}$ de $\mathfrak{g}$ no qual a operação $[\quad,\quad]$ é fechada, ou seja, para todo $X, Y \in \mathfrak{h}$ temos que $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

Exemplo 1.2. *O espaço vetorial* $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ *munido do colchete dado por* $[X, Y] = XY - YX$ *é uma álgebra de Lie.*

Um outro exemplo de álgebra de Lie é o espaço das derivações de uma álgebra de Lie, que denotaremos por $\mathfrak{D}er(\mathfrak{g})$. Uma derivação é uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que satisfaz

$$D[Y_1, Y_2] = [DY_1, Y_2] + [Y_1, DY_2], \quad \forall\, Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}.$$

O conjunto de todas as derivações da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ forma um espaço vetorial que, quando munido do colchete $[D, D_1] = D \circ D_1 - D_1 \circ D$, se torna uma álgebra de Lie.

Proposição 1.4. *Sejam* G, H *grupos de Lie e* $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ *uma aplicação diferenciável. Sejam* X *e* X_1 *campos pertencentes à* $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$, Y *e* Y_1 *pertencente à* $\mathfrak{X}(\mathrm{H})$. *Se* X *é* $\psi-$*relacionado com* Y *e* X_1 *é* $\psi-$*relacionado com* Y_1 *então* $[X, X_1]$ *é* $\psi-$*relacionado com* $[Y, Y_1]$.

A partir da proposição acima concluímos que o subespaço vetorial formado pelos campos invariantes à esquerda é uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$.

Definição 1.9. *A* álgebra de Lie associada ao grupo Lie G *é a álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *dos campos invariante à esquerda sobre* G.

Note que é possível fazer um raciocínio análogo para os campos invariante à direita. Mas antes precisamos de mais uma definição.

Seja $\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ uma aplicação diferenciável entre os grupos de Lie G e H. A partir de ψ, podemos relacionar os campos vetoriais de G aos campos vetoriais de H.

Definição 1.10. *Sejam* $g \in \mathrm{G}$, $Y \in \mathfrak{g}$ *e* $\psi(g) \in \mathrm{H}$. *O* "push-forward"*do campo* Y *pela aplicação* ψ *é definido como sendo o campo vetorial em* H *dado por* $(d\psi Y)(\psi(g)) = d\psi|_g(Y(g))$.

Note que $d\psi|_g(Y)$ está bem definida quando ψ é difeomorfismo. Neste caso não existe ambiguidade na igualdade $(d\psi Y)(\psi(g)) = d\psi|_g Y(g)$, pois caso a aplicação ψ não fosse injetiva poderia existir $g_1 \in \mathrm{G}$ tal que $\psi(g_1) = \psi(g)$ sendo este o caso $d\psi|_g Y(g) = (d\psi Y)(\psi(g)) = d\psi|_{g_1} Y(g_1)$, mas não temos necessariamente que $d\psi|_g Y(g) = d\psi|_{g_1} Y(g_1)$ e além disso $d\psi$ está definida em todo grupo H(sobrejetividade).

Veremos agora uma relação entre estes campos.

Exemplo 1.3. ***Os campos invariantes à direita***

Notemos primeiramente que

$$R_{g_1^{-1}} \circ I = I \circ L_{g_1},$$

onde I denota a aplicação inversão. De fato, dado $g \in \mathrm{G}$ temos

$$R_{g_1^{-1}} \circ I(g) = R_{g_1^{-1}}(g^{-1}) = g^{-1} g_1^{-1} = I(g_1 g) = I \circ L_{g_1}(g).$$

Diferenciando a primeira igualdade segue que

$$dR_{g_1^{-1}} \circ dI = dI \circ dL_{g_1}.$$

Dado $Y \in \mathfrak{g}$, ao aplicarmos a diferencial da aplicação inversa obtemos

$$\begin{aligned} (dIY)(g_1^{-1}) &= dI|_{g_1}(Y(g_1)) = dI \circ Y \circ L_{g_1}(e) = dI \circ dL_{g_1} \circ Y(e) \\ &= dR_{g_1^{-1}} \circ dI \circ Y(e) = dR_{g_1^{-1}} \circ dI(Y(e)) \end{aligned}$$

onde e denota identidade do grupo de Lie G. *Portanto $dI(\mathfrak{g})$ é o conjunto dos campos invariante à direita.*

De agora em diante a identidade do grupo de Lie G será denotada sempre por e.

Construiremos uma aplicação que relaciona o grupo de Lie a sua álgebra de Lie. Sejam G um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e $Y \in \mathfrak{g}$. É fácil, ver que a aplicação definida por

$$\lambda \frac{d}{dr} \mapsto \lambda Y$$

é um homomorfismo entre as álgebras de Lie $\mathbb{R}$ e $\mathfrak{g}$. Como $\mathbb{R}$ é simplesmente conexo, existe um único subgrupo à 1-parâmetro

$$\mathrm{exp_Y} : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$$

tal que

$$d\mathrm{exp_Y}(\lambda \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dr}}) = \lambda \mathrm{Y}.$$

Em outras palavras $\mathrm{exp_Y(t)}$ é o único subgrupo à 1-parâmetro de G cujo vetor tangente na origem é $Y(e)$, ou seja,

$$\frac{d}{dt}\mathrm{exp_Y(t)}|_{\mathrm{t=0}} = \mathrm{Y(e)}.$$

A partir da aplicação $\mathrm{exp_Y}$ podemos definir a aplicação desejada.

Definição 1.11. *A* aplicação exponencial *é a aplicação* $\mathrm{exp} : \mathfrak{g} \to \mathrm{G}$ *é definida por*

$$\mathrm{exp(Y) = exp_Y(1)}.$$

Proposição 1.5. *Sejam $Y \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$. As seguintes afirmações são válidas:*

1. $\mathrm{exp(tY) = exp_Y(t)}$

2. $\mathrm{exp(-tY) = (exp(tY))^{-1}}$

3. $\mathrm{exp} \in \mathrm{C^\infty}(\mathfrak{g}, \mathrm{G})$

Se $Y \in \mathfrak{g}$ e $I : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ é a aplicação inversão, calcularemos o campo $dI(Y)$ na identidade. Seja $\mathrm{exp_Y(t)}$ o subgrupo a um parâmetro associado ao campo Y. Segue da proposição anterior que $I(\mathrm{exp_Y(t)}) = \mathrm{exp_Y(-t)}$. Por outro lado,

$$dI(Y(e)) = \frac{d}{dt}I(\mathrm{exp_Y(t)})|_{\mathrm{t=0}}.$$

Portanto

$$dI(Y(e)) = \frac{d}{dt}I(\mathrm{exp_Y(t)})|_{\mathrm{t=0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mathrm{exp_Y(-t)}|_{\mathrm{t=0}} = -\mathrm{Y(e)}.$$

s Dado $Y \in \mathfrak{g}$, a curva integral de Y através da identidade em G é a aplicação que a cada t associa $\mathrm{exp(tY)}$. Além disso, pela invariância do campo Y, temos que o fluxo de Y através de g é a aplicação que associa t à $g\mathrm{exp(tY)}$. Se considerarmos adotado a álgebra de Lie de G como o conjunto dos campos invariante à direita, então o fluxo através de g é dado por $\mathrm{exp(tY)}g$. Outra propriedade muito útil e importante da aplicação exponencial é que esta é um difeomorfismo local entre a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada a G e o próprio grupo de Lie. Em alguns casos, temos que exp é um difeomorfismo global. O grupo de Heinsenberg, que será estudado no capítulo 4, é um exemplo deste caso. Uma outra propriedade importante da aplicação exponencial é dada pela seguinte proposição

Proposição 1.6. *Sejam* $\psi : \mathrm{H} \to \mathrm{G}$ *um homomorfismo e* $X \in \mathfrak{h}$*. Então vale a igualdade*

$$\psi(\exp(\mathrm{X})) = \exp(\mathrm{d}\psi(\mathrm{X})).$$

Um conceito fundamental na teoria de Grupos de Lie é o conceito de espaço homogêneo de um grupo de Lie.

Definição 1.12. *Seja* M *uma variedade diferenciável e* G *um grupo de Lie. Uma* ação à esquerda *de* G *sobre* M *é uma aplicação diferenciável* $\mu : \mathrm{G} \times M \to M$ *tal que* $\mu(gh, m) = \mu(g, \mu(h, m))$ *e* $\mu(e, m) = m$*, para todo* $m \in M$ *e* $g, h \in \mathrm{G}$.

Se μ é uma ação então para cada $g \in \mathrm{G}$ a aplicação $m \mapsto \mu(g, m)$ é um difeomorfismo. Lembremos que uma representação de $\mathfrak{g}$ em um espaço vetorial U é um homomorfismo

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(U),$$

onde $\mathfrak{gl}(U)$ é a álgebra de Lie da transformações lineares de U.

Teorema 1.7. *Seja* μ *uma ação de* G *em* M*. Suponha que* m_0 *é um ponto fixo de* μ *para todo* $g \in \mathrm{G}$*, isto é* $\mu(g, m_0) = m_0$ *para todo* $g \in \mathrm{G}$*. Então a aplicação*

$$\psi : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathrm{M_{m_0}})$$

definida por

$$\psi(g) = d\mu(g)|_{M_{m_0}}$$

é uma representação.

Considere a aplicação conjugação $C : \mathrm{G} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ definida por

$$C(g, h) = ghg^{-1}.$$

Desta forma, cada g define um difeomorfismo $C_g : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ tal que $C_g(h) = ghg^{-1}$. Notemos que a identidade de G é um ponto fixo de C_g para todo $g \in \mathrm{G}$. Portanto a partir do Teorema 1.7 podemos construir uma representação $\mathrm{Ad} : \mathrm{G} \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ definida por

$$\mathrm{Ad(g)} = \mathrm{dG_g}.$$

A aplicação Ad é usualmente chamada de *Representação Adjunta*. Seja a aplicação ad definida pela diferencial da Representação Adjunta. Desta forma $d(\mathrm{Ad}) = \mathrm{ad}$ e além disso a aplicação ad é definida da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ no espaço dos endomorfismo de $\mathfrak{g}$. Pela Proposição 1.6, obtemos que os seguinte diagramas são comutativos

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \xrightarrow{Ad} & \mathrm{Aut}(\mathfrak{g}) \\ \exp\uparrow & & \uparrow \quad \exp \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{ad} & \mathrm{End}(\mathfrak{g}) \end{array},$$

onde $\mathrm{End}(\mathfrak{g})$ é o espaço dos endomorfismo de $\mathfrak{g}$ e $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ é o espaço dos automorfismo de $\mathfrak{g}$. Em outras palavras, dado $Y \in \mathfrak{g}$, aplicação $\exp(\mathrm{ad_Y})$ é igual a aplicação $Ad(\exp(\mathrm{Y}))$, ou seja,

$$\exp(\mathrm{ad_Y}) = \mathrm{Ad}(\exp(\mathrm{Y})) \quad \forall\ \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}.$$

Fixando o ponto g segue que C_g é um automorfismo de G. Aplicando novamente a Proposição 1.6 temos que

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{G} & \xrightarrow{C_g} & \mathrm{G} \\ \exp\uparrow & & \uparrow \exp. \\ \mathfrak{g} & \xrightarrow{dC_g|_e} & \mathfrak{g} \end{array}$$

Em outras palavras, dado $g \in \mathrm{G}$, aplicação $\exp(\mathrm{Ad_g})$ é igual a aplicação $C_g(\exp(\mathrm{Y}))$, ou seja,

$$\exp(\mathrm{Ad_g}) = \mathrm{C_g}(\exp) \quad \forall\ \mathrm{g} \in \mathrm{G}.$$

A próxima proposição traz uma propriedade da aplicação *ad*.

Proposição 1.8. *Sejam* G *um grupo de Lie,* $\mathfrak{g}$ *sua álgebra de Lie e* $X, Y \in \mathfrak{g}$. *Então* $\mathrm{ad_X(Y)} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$.

O *centralizador* da álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ é o conjunto dos campos X em $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ tais que

$$\mathrm{ad_X(Y)} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = 0 \quad \forall\ \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}.$$

Denotaremos este conjunto por $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.

Para relacionar o centralizador de $\mathfrak{g}$ com os campos invariantes à direita provaremos, sob a hipótese de G ser um grupo de Lie conexo, que $dI(\mathfrak{g}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Para tal utilizaremos o seguinte resultado sobre colchete de Lie:

Teorema 1.9. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(G)$. O colchete de X por Y é nulo se, e somente se, seus fluxos comutam.*

A demonstração deste fato pode ser encontrada no livro [12], pg. 62.

Deste teorema obtemos a proposição a seguir.

Proposição 1.10. *Se* G *um grupo de Lie então $dI(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração: Mostraremos que se Z é um campo invariante à direita então

$$[Z, Y] = 0, \quad \forall\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Denotemos por α e β os fluxos associadas à Y e Z, respectivamente. Note que

$$\beta_s \circ \alpha_t(g) = \beta_s(g\mathrm{exp(tY)}) = \mathrm{exp(sZ)gexp(tY)} = \alpha_\mathrm{t}(\mathrm{exp(sZ)g}) = \alpha_\mathrm{t} \circ \beta_\mathrm{s}(\mathrm{g}), \quad \forall\ \mathrm{g} \in \mathrm{G}.$$

Como os fluxos comutam pelo Teorema 1.9 segue que $[Z, Y] = 0$. □

Para demonstrarmos a inclusão inversa precisamos da hipótese adicional de G ser um grupo de Lie conexo, no qual é valida a proposição a seguir.

Proposição 1.11. *Se* G *um grupo de Lie conexo então*

$$\mathrm{G} = \bigcup_{i=1}^{\infty} V^i,$$

onde V é uma vizinhança da identidade fixa arbitrária de G.

Proposição 1.12. *Seja* G *um grupo de Lie. Se* G *é conexo, então $dI(\mathfrak{g}) = \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração: Para esta demonstração utilizaremos as notações fixadas na Proposição 1.10. Falta-nos mostrar que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g}) \subset dI(\mathfrak{g})$. Se $Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$, então $[Z, Y] = 0$, para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Pelo Teorema 1.9, segue que $\alpha_t \circ \beta_s(g) = \beta_s \circ \alpha_t(g)$. Logo, temos que

$$Z(g\mathrm{exp(tY)}) = \frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}\beta_\mathrm{s} \circ \alpha_\mathrm{t}(\mathrm{g})|_{\mathrm{s}=0} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}\alpha_\mathrm{t} \circ \beta_\mathrm{s}(\mathrm{g})|_{\mathrm{s}=0} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{s}}\mathrm{R}_{\mathrm{exp(tY)}}\beta_\mathrm{s}(\mathrm{g})|_{\mathrm{s}=0} = \mathrm{dR}_{\mathrm{exp(tY)}}\mathrm{Z(g)}.$$

Como G é conexo pela Proposição 1.11, podemos escrever qualquer g_1 em G como

$$g_1 = \prod_{i=1}^{n} \exp(\mathrm{Y_i}).$$

Desta forma

$$Z(gg_1) = dR_{g_1}|_g Z(g) \quad \forall\, g, g_1 \in \mathrm{G}.$$

Portanto Z é invariante. □

Dizemos que uma variedade diferenciável é uma *variedade homogênea* se esta é obtida pelo quociente de um grupo de Lie G por um subgrupo fechado H de G, cuja estrutura diferenciável é a única que satisfaz:

1. $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{G/H}$ é suave, onde π é a projeção canônica,

2. para cada classe lateral $g\mathrm{H}$ existe V um vizinhança de $g\mathrm{H}$ e uma aplicação suave $\tau : V \to \mathrm{G}$ tal que $\pi \circ \tau = id$.

Diremos que uma ação $\mu : \mathrm{G} \times M \to M$ do grupo de Lie G na variedade M é *transitiva* se para quaisquer $m, n \in M$ existe um $g \in \mathrm{G}$ tal que $\mu(g, m) = n$. Os elementos de G que fixam o ponto m formam um subgrupo de G, conhecido como subgrupo de isotropia em m, o qual denotaremos por G_m.

Teorema 1.13. *Sejam $\mu : \mathrm{G} \times M \to M$ uma ação transitiva, $m \in M$, e G_m o subgrupo de isotropia de m. A aplicação $\beta : \mathrm{G}/\mathrm{G}_m \to M$ definida por*

$$\beta(g\mathrm{H}) = \mu(g, m)$$

é um difeomorfismo.

Outra parte de Teoria de Lie importante para o estudo da controlabilidade é a teoria de semigrupos de Lie. Neste trabalho utilizaremo-na para demonstrar o Teorema 3.9.

Definição 1.13. *Um* semigrupo *do grupo de Lie* G *é um conjunto S tal que $SS \subset S$.*

Proposição 1.14. *Se S é um semigrupo do grupo de Lie conexo* G, *então*

1. $\mathrm{int(S)}$ *é um ideal do semigrupo,*

2. *se a identidade pertence à* $\overline{\mathrm{int(S)}}$ *então* $S \subset \overline{\mathrm{int(S)}}$ *e* $\mathrm{int(S)} = \mathrm{int}(\overline{\mathrm{S}})$.

Demonstração:

1. Sejam $s \in \mathrm{int(S)}$, $t \in S$ e U uma vizinhança de s em S. Então $st \in Ut \subset S$. Logo $st \in \mathrm{int(S)}$ e portanto $\mathrm{int(S)S} \subset \mathrm{int(S)}$. Analogamente segue que $S\mathrm{int(S)} \subset \mathrm{int(S)}$. Portanto $\mathrm{int(S)}$ é um ideal de S.

2. Sejam $s \in S$ e s_i uma seqüência pertence à $\mathrm{int(S)}$ tal que s_i converge para e. Logo ss_i converge para s e $ss_i \in \mathrm{int(S)}$ para todo i natural, isto implica que $S \subset \overline{\mathrm{int(S)}}$. É facil ver que $\mathrm{int(S)} \subset \mathrm{int}(\overline{\mathrm{S}})$. Para inclusão oposta, se $x \in \mathrm{int}(\overline{\mathrm{S}})$ e U uma vizinhança de e com $xU^{-1} \subset \overline{S}$. Tome W como sendo o conjunto $U \cap \mathrm{int(S)}$. Então xW^{-1} é um conjunto aberto de $\overline{S}$ e, portanto, contém elementos $s \in S$. Então $s = xw^{-1}$ com $w \in W$, portanto $x = sw \in S\mathrm{int(S)} \subset \mathrm{int(S)}$.

□

Para falarmos sobre o espaço tangente de um semigrupo precisamos primeiro de mais algumas definições. Seja V um espaço vetorial topológico.

Definição 1.14. *Um* cone *do espaço vetorial topológico* V *é um subconjunto fechado* W *que satisfaz:*

1. $W + W = W$

2. $\mathbb{R}^+ W = W$.

Uma "borda"de um cone W é o maior subespaço vetorial contido em W, i.e., $H(W) = W \cap (-W)$. Denotaremos este conjunto por $H(W)$.

Definição 1.15. *Um* cone de Lie *é um cone* W *na álgebra de Lie real* $\mathfrak{g}$ *que é invariante com respeito a adjunção de sua borda, i.e.,*

$$Ad(\mathrm{exp(H))W = W}, \ \forall \ \mathrm{H \in H(W)}$$

Teorema 1.15. *Seja S um semigrupo fechado de um grupo de Lie* G *conexo. Então o cone tangente à S,*

$$L(S) = \{X : \exp\mathbb{R}^{+}\mathrm{X} \subset \mathrm{S}\}$$

é um cone de Lie. Além disso o grupo gerado por $\exp(\mathrm{L(S)})$ *está contido em S.*

Para finalizar a seção estudaremos brevemente o grupo de Lie proveniente de um produto semi direto de dois grupos de Lie. Seja

$$\phi : \mathrm{H} \to Aut(\mathrm{G})$$

uma representação suave do grupo de Lie H no grupo de Lie G. O produto semi direto de G por H via representação ϕ é um grupo de Lie, que denotaremos por $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$. Como conjunto, $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$ é o produto cartesiano $\mathrm{G} \times \mathbb{R}$, enquanto que sua operação é definida por

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 \phi_{h_1} g_2, h_1 h_2),$$

onde $\phi_h(g) = \phi(h)(g)$.

Sejam G' e H' subgrupos de Lie do grupo de Lie $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$ definidos, respectivamente, por $\mathrm{G}' = \mathrm{G} \times \{e_{\mathrm{H}}\}$ e $\mathrm{H}' = \{e_{\mathrm{G}}\} \times \mathrm{H}$, onde e_G e e_H são as identidades de G e H. Note que em ambos casos existem difeomorfismos entre G e G', e entre H e H', dados por $g \mapsto (g, e_{\mathrm{H}})$ e $h \mapsto (e_{\mathrm{G}}, h)$. Denotaremos (g, e_{H}) por g' e (e_{G}, h) por h'. Afirmamos que G' é um subgrupo normal de $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$. De fato, dados $g_1, g_2 \in \mathrm{G}$ e $h_1, h_2 \in \mathrm{H}$ temos que

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2)(g_1, h_1)^{-1} = (g_1 \phi_{h_1}(g_2) \phi_{h_1 h_2 h_1^{-1}}(g_1^{-1}), h_1 h_2 h_1^{-1}).$$

Desta forma se (g_2, h_2) pertence à G', então $h_2 = e_{\mathrm{H}}$ e

$$(g_1 \phi_{h_1}(g_2) \phi_{h_1 e_{\mathrm{H}} h_1^{-1}}(g_1^{-1}), h_1 e_{\mathrm{H}} h_1^{-1}) = (g_1 \phi_{h_1}(g_2) g_1^{-1}, e_{\mathrm{H}}).$$

Logo G' é um subgrupo normal. Utilizando a notação fixada e supondo que $(g_1, h_1) \in \mathrm{H}$ segue que

$$\begin{aligned} h' g' h'^{-1} &= (e_{\mathrm{G}}, h)(g, e_{\mathrm{H}})(e_{\mathrm{G}}, h)^{-1} = (e_{\mathrm{G}}, h)(g, e_{\mathrm{H}})(\phi_{h^{-1}}(e_{\mathrm{G}}), h^{-1}) \\ &= (e_{\mathrm{G}} \phi_h(g) \phi_{hh^{-1}}(e_{\mathrm{G}}), h e_{\mathrm{H}} h^{-1}) = (\phi_h(g), e_{\mathrm{H}}) = [\phi_h(g)]'. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Passemos a construção da álgebra de Lie associada à $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$. Sejam $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$ as álgebras de G e H respectivamente. Note que se ϕ_h é um automorfismo de G, para todo $h \in \mathrm{H}$, segue que a sua diferencial $d\phi_h$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$. Além disso segue da Proposição 1.6 que

$$\phi_h(\mathrm{exp(Y)}) = \mathrm{exp(d\phi_h(Y))}.$$

Seja a aplicação θ definida pela diferencial da aplicação $d\phi$. Como cada $d\phi_h$ é um automorfismo de $\mathfrak{g}$ para cada $h \in \mathrm{H}$ segue que θ_Z é uma derivação de $\mathfrak{g}$ para cada $Z \in \mathfrak{h}$. A demonstração deste fato pode ser encontrada no livro [14]. A partir da derivação θ, obteremos que a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$ é a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \times_{\theta} \mathfrak{h}$, que como conjunto é o produto cartesiano de $\mathfrak{g}$ por $\mathfrak{h}$ enquanto seu colchete é definido por

$$[(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2)] = \tau([Y_1, Y_2] + \theta_{Z_1}(Y_2) - \theta_{Z_2}(Y_1), [Z_1, Z_2]).$$

De fato, sejam $\mathfrak{g}'$ e $\mathfrak{h}'$ as álgebras de Lie associadas aos subgrupos G' e H', respectivamente, e, conseqüentemente, isomorfas as álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ e $\mathfrak{h}$. Note que G' é um subgrupo normal e, portanto, $\mathfrak{g}'$ é um ideal da álgebra de Lie de $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$. Da igualdade 1.4 e da Proposição 1.6 segue que

$$(exp(d\phi_h(Y)))' = h' exp(Y') h'^{-1} \quad \text{para quaisquer } Y \in \mathfrak{g} \text{ e } h \in \mathrm{H},$$

onde $Y' = (Y, 0)$. Reescrevendo a igualdade, temos que

$$(exp(d\phi_h(Y)))' = C_{h'}(exp(Y')) \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}, h \in \mathrm{H},$$

onde $C_{h'}$ é a aplicação conjugação. Diferenciando a igualdade, obtemos que

$$(d\phi_h(Y))' = Ad(h')(Y') \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g}, h \in \mathrm{H}.$$

Diferenciando novamente, segue que

$$(\theta_Z(Y))' = [Z', Y'] \quad \forall\, Y \in \mathfrak{g},\ Z \in \mathfrak{h}.$$

Logo, $\theta = -ad$.

Feita esta consideração, mostraremos a existência do isomorfismo de Lie entre a álgebra de Lie $\mathrm{G} \times_{\phi} \mathrm{H}$, denotada por $\widehat{\mathfrak{g}}$ e $\mathfrak{g} \times_{\theta} \mathfrak{h}$. Seja $\tau : \mathfrak{g} \times_{\theta} \mathfrak{h} \to \widehat{\mathfrak{g}}$ dado por $(Y, Z) \mapsto Y + Z$.

Demonstraremos, apenas, que τ é um homomorfismo de Lie, tendo em vista que a injetividade, bem como a sobrejetividade, seguem da construção de $\mathrm{G} \times_\phi \mathrm{H}$. Sejam $Y_1', Y_2' \in \mathfrak{g}'$ e $Z_1', Z_2' \in \mathfrak{h}'$. Mostraremos que

$$\tau[(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2)] = [Y_1 + Z_1, Y_2 + Z_2].$$

Assumindo que o colchete entre em $\mathfrak{g} \times_\theta \mathfrak{h}$ é dado por

$$[(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2)] = ([Y_1, Y_2] + \theta_{Z_1}(Y_2) - \theta_{Z_2}(Y_1), [Z_1, Z_2]),$$

segue que

$$\begin{aligned}
\tau[(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2)] &= \tau([Y_1, Y_2] + \theta_{Z_1}(Y_2) - \theta_{Z_2}(Y_1), [Z_1, Z_2]) \\
&= [Y_1, Y_2] + \theta_{Z_1}(Y_2) - \theta_{Z_2}(Y_1) + [Z_1, Z_2] \\
&= [Y_1, Y_2] + [Z_1, Y_2] - [Z_2, Y_1] + [Z_1, Z_2] \\
&= [Y_1, Y_2] + [Z_1, Y_2] + [Y_1, Z_2] + [Z_1, Z_2] \\
&= [Y_1 + Z_1, Y_2 + Z_2]
\end{aligned}$$

Portanto, a álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{g}}$, associado ao grupo de Lie $\mathrm{G} \times_\phi \mathrm{H}$, é isomorfa à $\mathfrak{g} \times_\theta \mathfrak{h}$. Para maiores detalhes a respeito do colchete vide Varadarajan [13].

1.2 Normalizador de uma álgebra de Lie

O principal objetivo desta seção é introduzir o conceito de normalizador de uma álgebra de Lie e descrever suas principais propriedades. Mostraremos que o normalizador é uma subalgebra e calcularemos o normalizador da álgebra de Lie $\mathbb{R}^n$ munida de sua estrutura usual. O principal resultado desta seção é o Teorema 1.21, que caracteriza de maneira explicita duas condições necessárias e suficientes para que um campo vetorial seja um campo linear. Após este teorema, estudaremos os fluxos associados aos campos afins e por fim concluiremos que campos afins são completos, esta seção baseia-se nos artigos Cardetti e Mittenhuber [2] e Jouan [3].

Como sempre, G denotará um grupo de Lie e $\mathfrak{g}$ sua álgebra associada. A próxima definição terá um papel fundamental no transcorrer deste trabalho.

Definição 1.16. *O* normalizador *da álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *em* $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ *é o conjunto dos campos* $\mathcal{F} \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$ *tais que* $[\mathcal{F}, Y] \in \mathfrak{g}$, *para todo* $Y \in \mathfrak{g}$.

Chamamos os campos $\mathcal{F}$ de campos *afins*. Denotaremos o conjunto dos campos afins por $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Como visto na Seção 1.1, temos que $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ é uma álgebra de Lie munida do colchete usual. Seria $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ uma subálgebra de $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$? O próximo lema nos esclarece esta duvida.

Lema 1.16. $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ *é uma subálgebra da álgebra de Lie* $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$.

Demonstração: Dados $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{F}, \mathcal{X}, \mathcal{W} \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ e $Y \in \mathfrak{g}$, pela Identidade de Jacobi segue que

$$\begin{aligned}
[Y, [\alpha\mathcal{F} + \mathcal{W}, \mathcal{X}]] &= [[Y, \alpha\mathcal{F} + \mathcal{W}], \mathcal{X}] + [\alpha\mathcal{F} + \mathcal{W}, [Y, \mathcal{X}]] \\
&= [[Y, \alpha\mathcal{F}] + [Y, \mathcal{W}], \mathcal{X}] + [\alpha\mathcal{F}, [Y, \mathcal{X}]] + [\mathcal{W}, [Y, \mathcal{X}]] \\
&= [\alpha[Y, \mathcal{F}], \mathcal{X}] + [[Y, \mathcal{W}], \mathcal{X}] + \alpha[\mathcal{F}, [Y, \mathcal{X}]] + [\mathcal{W}, [Y, \mathcal{X}]] \\
&= \alpha[[Y, \mathcal{F}], \mathcal{X}] + [[Y, \mathcal{W}], \mathcal{X}] + \alpha[\mathcal{F}, [Y, \mathcal{X}]] + [\mathcal{W}, [Y, \mathcal{X}]].
\end{aligned}$$

Como $[Y,\mathcal{F}]$, $[Y,\mathcal{W}]$, $[Y,\mathcal{X}]$ pertencem à $\mathfrak{g}$, então $[[Y,\mathcal{F}],\mathcal{X}]$, $[[Y,\mathcal{W}],\mathcal{X}]$, $[\mathcal{F},[Y,\mathcal{X}]]$, $[\mathcal{W},[Y,\mathcal{X}]]$ pertencem à $\mathfrak{g}$. Como $\mathfrak{g}$ é uma álgebra de Lie, segue que $\alpha[[Y,\mathcal{F}],\mathcal{X}]+[[Y,\mathcal{W}],\mathcal{X}]+\alpha[\mathcal{F},[Y,\mathcal{X}]]+[\mathcal{W},[Y,\mathcal{X}]]$ pertencem à $\mathfrak{g}$. Portanto, o campo $[\alpha\mathcal{F}+\mathcal{W},\mathcal{X}]$ pertence à $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. $\square$

Definição 1.17. *Um campo vetorial $\mathcal{F}$ sobre o grupo de Lie* G *é dito* linear *se $\mathcal{F}$ pertence à $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{F}(e)=0$.*

Denotaremos por $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ o conjunto dos campos lineares. Este conjunto é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ como nos mostra o lema a seguir.

Lema 1.17. *O conjunto $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de Lie de $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Como $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$, segue que $\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2\in\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Note que $(\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2)(e)=\mathcal{X}_1(e)+\mathcal{X}_2(e)=0$. Logo, $\mathcal{X}_1+\mathcal{X}_2\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Falta mostrar que $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2]\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Novamente utilizando o fato que $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra de Lie, segue que $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2]\in\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Note que $\mathcal{X}_1(e)$ e $\mathcal{X}_2(e)$ são nulos e portanto $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2](e)=\mathcal{X}_1|_e(\mathcal{X}_2)-\mathcal{X}_2|_e(\mathcal{X}_1)=0$. Assim, $[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2]\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$. Portanto, $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ é uma subálgebra. $\square$

Para exemplificar os conceitos introduzidos, retornaremos ao Exemplo 1.1. Como calculado anteriormente, os campos invariantes à esquerda são os campos constantes. Utilizaremos este fato para calcular o normalizador da álgebra de Lie abeliana $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.4. *Sejam x um ponto $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{F}$ um campo suave arbitrário. Podemo-lo expressar no ponto x como $\mathcal{F}(x)=\sum_{j=1}^n a_j(x)(\frac{\partial}{\partial x_j})$. Para que $\mathcal{F}\in\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$, este campo deve satisfazer a seguinte condição*

$$[\mathcal{F},Y]_x=\sum_{i=1}^n c_i(x)(\frac{\partial}{\partial x_i})\in\mathfrak{g},$$

para todo $Y\in\mathfrak{g}$, onde as aplicações $c_i(x)$ devem ser constantes. Dados f um germe de $\mathbb{R}^n$ e Y um campo L-relacionado sobre $\mathbb{R}^n$,o qual pode ser expresso por

$$Y(x)=\sum_{i=1}^n b_i\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Pela definição de colchete, temos que

$$[\mathcal{F}, Y]_x(f) = \mathcal{F}_x(Yf) - Y_x(\mathcal{F}f).$$

Desenvolvendo o lado direito da igualdade, segue que

$$\mathcal{F}_x(Yf) - Y_x(\mathcal{F}f) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial f}{\partial x_i})) - \sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial}{\partial x_i})(\sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\frac{\partial f}{\partial x_j})). \tag{2.5}$$

Como $\frac{\partial}{\partial x_i}$ *são aplicações lineares e* b_i *são aplicações constantes, temos que*

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial f}{\partial x_i})) = \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}). \tag{2.6}$$

Utilizando as igualdades acima, segue que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\frac{\partial}{\partial x_j})(\sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial f}{\partial x_i})) - \sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial}{\partial x_i})(\sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\frac{\partial f}{\partial x_j}))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i(\frac{\partial}{\partial x_i})(a_j(x)(\frac{\partial f}{\partial x_j})). \tag{2.7}$$

Aplicando a regra de Leibniz em 2.7, temos que

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})(a_j(x)(\frac{\partial f}{\partial x_j})) = \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}. \tag{2.8}$$

Aplicando a igualdade 2.8 em 2.7, segue que

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_i(\frac{\partial}{\partial x_i})(a_j(x)(\frac{\partial f}{\partial x_j}))$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_j(x) \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i(\frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} + a_j(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j})$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}(\frac{\partial f}{\partial x_i}) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_i a_j(x) \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} -b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j},$$

donde temos que

$$\mathcal{F}_x(Yf) - Y_x(\mathcal{F}f) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} -b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} \tag{2.9}$$

e, assim, cada aplicação c_j pode ser expressa como

$$c_j(x) = \sum_{i=1}^{n} -b_i \frac{\partial a_j(x)}{\partial x_i}.$$

Para que $\mathcal{F}$ pertença a $\mathcal{N}orm(\mathbb{R}^n)$, temos que as aplicações c_j devem ser constantes. Como cada b_i é constante, segue que

$$a_j(x) = (a_{j1}x_1 + b_{j1}, ..., a_{jn}x_n + b_{jn}) \tag{2.10}$$

Desta forma, um elemento da álgebra dos campos afins pode ser escrito como uma matriz $A(x) + B$,onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} b_{i1} \\ \sum_{i=1}^{n} b_{i2} \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} b_{in} \end{pmatrix}.$$

Portanto, os elementos $\mathcal{N}orm(\mathbb{R}^n)$ são da forma $A(x) + B$, onde A é uma matriz $n \times n$ e B é um campo constante.

Sabendo que $\mathcal{F} \in \mathcal{N}orm(\mathbb{R}^n)$ se e somente se $\mathcal{F}(x) = \sum_{j=1}^{n}(a_j(x))(\frac{\partial}{\partial x_j})$, calcularemos a subálgebra $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$. Para que $\mathcal{X}$ pertença a subálgebra dos campos lineares, este deve ser um campo afim e $\mathcal{X}(0) = 0$. Para satisfazer a primeira condição, temos que

$$\mathcal{X}(x) = \sum_{j=1}^{n}(a_j(x))(\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

onde cada a_j é definida na 2.10. Note que

$$\mathcal{X}(0) = \sum_{j=1}^{n}(a_j(0))(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \sum_{j=1}^{n} b_j(\frac{\partial}{\partial x_j}) = 0.$$

Como b_{ij} são constante, faz-se necessário que cada constante b_{ij} seja nula. Portanto, os campos lineares em R^n são da forma

$$\mathcal{X}(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)(\frac{\partial}{\partial x_j}),$$

onde cada $a_j(x) = (a_{j1}x_1, ..., a_{jn}x_n)$.

Doravante, $\mathcal{F}$ sempre denotará um campo afim, $\mathcal{X}$ um campo linear e G um grupo de Lie conexo salvo menção explícita em contrário.

O nome *afim* se deve a uma decomposição de $\mathcal{F}$ como soma de um campo linear $\mathcal{X}$ e um campo invariante à direita Z. Conforme o exemplo acima o campo $\mathcal{F}$ foi escrito como $A(x)+B$, neste caso $A(x)$ é o campo linear e B é o campo invariante à direita. Objetivamos agora demonstrar esta decomposição, para tal definiremos um homomorfismo que nos será útil.

Proposição 1.18. *A aplicação $\tau : \mathcal{N}orm(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{D}er(\mathfrak{g})$ definida por $\mathcal{F} \mapsto ad(\mathcal{F})$ é um homomorfismo de álgebras de Lie.*

Demonstração: Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Então

$$\begin{aligned}
\tau[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2](Y) &= ad_{[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2]}(Y)\\
&= [[\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2],Y]\\
&= [\mathcal{F}_1,[\mathcal{F}_2,Y]] - [\mathcal{F}_2,[\mathcal{F}_1,Y]]\\
&= ad_{\mathcal{F}_1}(ad_{\mathcal{F}_2}(Y)) - ad_{\mathcal{F}_2}(ad_{\mathcal{F}_1}(Y))\\
&= (ad_{\mathcal{F}_1}(ad_{\mathcal{F}_2}) - ad_{\mathcal{F}_2}(ad_{\mathcal{F}_1}))(Y)\\
&= [ad_{\mathcal{F}_1}, ad_{\mathcal{F}_2}](Y)\\
&= [\tau(\mathcal{F}_1),\tau(\mathcal{F}_2)](Y).
\end{aligned}$$

□

Para a demonstração da próxima proposição utilizaremos, como mostrado na Proposição 1.12, que $\mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$ coincide com $dI(\mathfrak{g})$. Além deste, utilizaremos outros dois resultados. Dado um ponto $g \in$ G podemos escrever g como $\prod_{i=1}^{k} exp(Y_i)$ com $Y_i \in \mathfrak{g}$, (vide Proposição 1.11) e que dados $W, X \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$ e w_t, x_t seus respectivos fluxos associados, então $[W,X]=0$ se, e somente se, $w_t \circ x_t(g) = x_t \circ w_t(g)$, para todo g em G e t em $\mathbb{R}$, (vide no Teorema 1.9).

Proposição 1.19. *Se* G *é um grupo de Lie conexo, então $\mathcal{K}er\ \tau$ é o centralizador de $\mathfrak{g}$. Além disso, todo campo vetorial afim pode ser decomposto de maneira única como soma de um campo vetorial linear e um campo invariante à direita.*

Demonstração: Pelo comentários anteriores, basta-nos mostrar que $\mathcal{K}er\ \tau = dI(\mathfrak{g})$. Se $\mathcal{F} \in \mathcal{K}er\ \tau$ então

$$[\mathcal{F}, Y] = 0, \quad \forall\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Seja ϕ_t o fluxo associado ao campo $\mathcal{F}$. Conforme o Teorema 1.9, temos que ϕ_t comuta com $exp(sY)$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$ e $s \in \mathbb{R}$. Por conseguinte, vale a igualdade

$$\phi_t((exp(sY))(g)) = \phi_t(gexp(sY)) = (\phi_t(g))exp(sY) \quad \forall\ g \in \mathrm{G}, t, s \in \mathbb{R}.$$

Pela proposição 1.11, dado $g \in \mathrm{G}$ existem $Y_1, ..., Y_k \in \mathfrak{g}$ tais que g pode ser escrito como

$$g = exp(Y_1)...exp(Y_k).$$

Deste modo

$$\phi_t(g) = \phi_t(\prod_{i=1}^{k} exp(Y_i)) = \phi_t(e) \prod_{i=1}^{k} exp(Y_i) = \phi_t(e)g.$$

Para t suficientemente pequeno temos que

$$\mathcal{F}(g) = \frac{d}{dt}\phi_t(g)|_{t=0} = \frac{d}{dt}R_g(\phi_t(e))|_{t=0} = dR_g\mathcal{F}(e).$$

Isto prova que $\mathcal{K}er\ \tau \subset dI(\mathfrak{g})$.

Para a inclusão $dI(\mathfrak{g}) \subset \mathcal{K}er\ \tau$. Tome Z um campo invariante à direita. Pela Proposição 1.12 segue que $Z \in \mathfrak{Z}(\mathfrak{g})$. Logo

$$[Z, Y] = 0 \quad \forall\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Assim, concluímos que $\tau(Z)(Y) = 0$ e, portanto $dI(\mathfrak{g}) = \mathcal{K}er\ \tau$.

Para a segunda afirmação, tome Z um campo invariante à direita construído a partir do vetor $Z(e) = \mathcal{F}(e)$. Então $\mathcal{X} = \mathcal{F} - Z$ é linear pois $\mathcal{F}, Z \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{X}(e) = \mathcal{F}(e) - Z(e) = \mathcal{F}(e) - \mathcal{F}(e) = 0$. $\square$

A seguir mostraremos que $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ é isomorfo ao produto semi-direto da subálgebra de Lie $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ pelo ideal de Lie $dI(\mathfrak{g})$. Aqui a representação dada é a aplicação $ad : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{Der}(dI(\mathfrak{g}))$. Note primeiramente que ainda sob a hipótese de G ser um grupo de Lie conexo, a representação $ad : \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \to \mathfrak{Der}(dI(\mathfrak{g}))$ está bem definida. De fato, sejam $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$,

$Z \in dI(\mathfrak{g})$ e $Y \in \mathfrak{g}$. Queremos mostrar que $ad_{\mathcal{X}}(Z) = [\mathcal{X}, Z] \in dI(\mathfrak{g})$. Pela identidade de Jacobi temos que

$$[[\mathcal{X}, Z], Y] = [\mathcal{X}, [Z, Y]] + [Z, [Y, \mathcal{X}]].$$

Pela Proposição 1.12, segue que $[Z, Y], [Z, [\mathcal{X}, Y]]$ são ambos nulos. Desta forma temos que

$$[\mathcal{X}, [Z, Y]] + [Z, [Y, \mathcal{X}]] = [\mathcal{X}, 0] + [Z, [Y, \mathcal{X}]] = 0.$$

Portanto para todo $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ e $Z \in dI(\mathfrak{g})$ temos que $ad_{\mathcal{X}}(Z) = [\mathcal{X}, Z] \in dI(\mathfrak{g})$.

Note que $dI(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. De fato, dados $Z_1, Z_2 \in dI(\mathfrak{g})$ e $Y \in \mathfrak{g}$, pela Proposição 1.12, segue que $[Z_i, Y] = 0,\ i = 1, 2$. Logo

$$ad_{Z_1+Z_2}(Y) = [Z_1, Y] + [Z_2, Y] = 0 + 0 = 0,$$

donde segue que $Z_1 + Z_2 \in \mathcal{K}er\ \tau$. Para mostrar que $[Z_1, Z_2] \in dI(\mathfrak{g})$ utilizaremos a identidade de Jacobi. Note que

$$ad_{[Z_1,Z_2]}(Y) = [Z_1, [Z_2, Y]] + [Z_2, [Y, Z_1]] \qquad \forall\ Y \in \mathfrak{g}.$$

Mas novamente, pela Proposição 1.12, temos que $[Y, Z_1] = [Z_2, Y] = 0$ para todo $Y \in \mathfrak{g}$. Substituindo na igualdade acima temos que

$$[Z_1, [Z_2, Y]] + [Z_2, [Y, Z_1]] = [Z_1, 0] + [Z_2, 0] = 0.$$

Dado $\mathcal{F} \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$, pela proposição anterior temos que $\mathcal{F} = \mathcal{X} + Z$. Então

$$[\mathcal{F}, Z_1] = [\mathcal{X} + Z, Z_1] = [\mathcal{X}, Z_1] + [Z, Z_1].$$

Pelos fatos demonstrados anteriormente temos que $[\mathcal{X}, Z_1], [Z, Z_1] \in dI(\mathfrak{g})$. Portanto $dI(\mathfrak{g})$ é um ideal de $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$.

Teorema 1.20. *A álgebra de Lie $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ é isomorfa ao produto semi direto $dI(\mathfrak{g}) \times_{ad} \mathcal{L}(\mathfrak{g})$.*

Demonstração: Consideremos a aplicação $\Phi : dI(\mathfrak{g}) \times_{ad} \mathcal{L}(\mathfrak{g}) \to \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ definida por $\Phi(Z, \mathcal{X}) = \mathcal{X} + Z$. Mostraremos que Φ é um isomorfismo de álgebras de Lie. Sejam $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Pela Proposição 1.19, existem $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2 \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ e $Z_1, Z_2 \in dI(\mathfrak{g})$ tais que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{X}_1 + Z_1$ e $\mathcal{F}_2 = \mathcal{X}_2 + Z_2$. Provaremos que

$$\Phi([(Z_1, \mathcal{X}_1), (Z_2, \mathcal{X}_2)] = [\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2].$$

Desenvolvendo a igualdade temos

$$\begin{aligned}
\Phi([(Z_1,\mathcal{X}_1),(Z_2,\mathcal{X}_2)] &= \Phi([Z_1,Z_2]+ad_{\mathcal{X}_1}(Z_2)-ad_{\mathcal{X}_2}(Z_1)],[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2]) \\
&= [Z_1,Z_2]+ad_{\mathcal{X}_1}(Z_2)-ad_{\mathcal{X}_2}(Z_1)+[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2] \\
&= [Z_1,Z_2]+[\mathcal{X}_1,Z_2]-[\mathcal{X}_2,Z_1]+[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2] \\
&= [Z_1,Z_2]+[\mathcal{X}_1,Z_2]+[Z_1,\mathcal{X}_2]+[\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2] \\
&= [\mathcal{X}_1+Z_1,Z_2]+[\mathcal{X}_1+Z_1,\mathcal{X}_2] \\
&= [\mathcal{X}_1+Z_1,\mathcal{X}_2+Z_2] \\
&= [\mathcal{F}_1,\mathcal{F}_2].
\end{aligned}$$

Portanto $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ é isomorfo como álgebra de Lie a $dI(\mathfrak{g})\times_{ad}\mathcal{L}(\mathfrak{g})$.

□

Um fato interessante sobre os campo lineares é que um sistema da forma $\dot{g}=\mathcal{X}(g)$, com $\mathcal{X}\in\mathcal{L}(\mathfrak{g})$ tem a identidade do grupo como ponto de equilíbrio. De fato, seja $\phi_t(e):\mathbb{R}\to \mathrm{G}$ o fluxo associado ao campo linear $\mathcal{X}$ que passa por e. Como $\mathcal{X}(e)=0$, segue que para todo t real, a curva $\phi_t(e)$ é constante, sendo $\phi_0(e)=e$, concluímos que $\phi_t(e)=e$ para todo $t\in\mathbb{R}$.

Mudando o foco desta seção, de um campo afim arbitrário para um campo linear, mostraremos condições necessárias e suficientes para que um campo seja linear, este será o próximo e principal teorema desta seção. Este mostrará que o fluxo associado a um campo linear $\mathcal{X}$ é um automorfismo a 1-parâmetro de G e mais ainda, que se o fluxo de um campo arbitrário X é um automorfismo a 1-parâmetro de G, então X é um campo linear.

Começamos com a definição de automorfismo a 1-parâmetro, segundo Bourbaki [11].

Definição 1.18. *Dizemos que uma aplicação* $\phi:\mathbb{R}\times \mathrm{G}\times \mathrm{G}\to \mathrm{G}$ *é um* automorfismo a 1-parâmetro *se*

$$\phi_t(g_1g_2)=\phi_t(g_1)\phi_t(g_2)\quad \forall t\in\mathbb{R}\ e\ g_1,g_2\in \mathrm{G}.$$

Um campo X é dito **automorfismo infinitesimal**, se seu fluxo for um grupo de automorfismos a 1-parâmetro de G. Da mesma forma o campo X é dito ser o automorfismo infinitesimal gerador do automorfismo a 1-parâmetro.

Teorema 1.21. *Seja $\mathcal{X}$ um campo vetorial sobre um grupo de Lie conexo* G. *As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *$\mathcal{X}$ pertence à $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$;*

2. *o fluxo ϕ_t associado ao campo $\mathcal{X}$ é um grupo de automorfismo a 1-parâmetro de* G. *Em outras palavras $\mathcal{X}$ é um automorfismo infinitesimal;*

3. *se $\mathcal{X}(gg_1) = dL_g|_{g_1}\mathcal{X}(g_1) + dR_{g_1}|_g\mathcal{X}(g)$ para quaisquer $g, g_1 \in$* G.

Além disso o segundo item implica que um campo vetorial linear sobre um grupo de Lie conexo é completo

Demonstração: $(1 \Rightarrow 3)$ Como $\mathcal{X}$ é linear, para todo $Y \in \mathfrak{g}$, o colchete de Lie $[\mathcal{X}, Y]$ é invariante à esquerda. Segue que dado $g \in$ G vale a igualdade

$$[\mathcal{X}, Y](g) = dL_g[\mathcal{X}, Y](e).$$

Como L_g é um difeomorfismo, para todo $g \in$ G, o "push-forward"de dL_g está bem definido e além disto

$$(dL_g[\mathcal{X}, Y])(e) = [dL_g(\mathcal{X}), dL_g(Y)](e) = [dL_g(\mathcal{X}), Y \circ L_g](e).$$

Note que $dL_g\mathcal{X}$ e $\mathcal{X}$ são L-relacionados pois

$$(dL_g\mathcal{X}) \circ L_g(e) = (dL_g\mathcal{X})(g) = dL_g|_e\mathcal{X}(e).$$

Segue que

$$[dL_g(\mathcal{X}), Y \circ L_g](e) = [(dL_g\mathcal{X}) \circ L_g, Y \circ L_g](e) = [(dL_g\mathcal{X}), Y](g).$$

Provamos com esta última igualdade que $ad_{dL_g\mathcal{X}} = ad_{\mathcal{X}}$, bem como que o campo $[dL_g\mathcal{X}, Y]$ é invariante à esquerda. Logo $dL_g\mathcal{X} \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Utilizando a Proposição 1.19, podemos decompor o campo $dL_g\mathcal{X}$ como

$$dL_g\mathcal{X} = \mathcal{X} + Z.$$

Como Z é invariante à direita, podemos escrevê-lo a partir da identidade. Pela igualdade acima, temos que

$$Z(e) = \mathcal{X}(e) + Z(e) = (dL_g\mathcal{X})(e) = dL_g|_{L_g^{-1}}\mathcal{X}(L_g^{-1}(e)) = dL_g|_{g^{-1}}\mathcal{X}(g^{-1}).$$

Pela invariância à direita de Z, temos que, para todo $g_1 \in$ G,

$$Z(g_1) = dR_{g_1}|_e Z(e) = dR_{g_1}|_e dL_g|_{g^{-1}}\mathcal{X}(g^{-1}) = dL_g|_{g^{-1}g_1} dR_{g_1}|_{g^{-1}}\mathcal{X}(g^{-1}).$$

Calculando $dL_g\mathcal{X}$ no ponto g_1, segue que

$$\begin{aligned} (dL_g\mathcal{X})(g_1) &= (dL_g\mathcal{X})(gg^{-1}g_1) = (dL_g\mathcal{X})(L_g(g^{-1}g_1)) = dL_g|_{g^{-1}g_1}\mathcal{X}(g^{-1}g_1) \\ &= \mathcal{X}(g_1) + Z(g_1) = \mathcal{X}(g_1) + dL_g|_{g^{-1}g_1} dR_{g_1}|_{g^{-1}}\mathcal{X}(g^{-1}). \end{aligned}$$

Aplicando $dL_{g^{-1}}$ na igualdade acima temos que

$$\mathcal{X}(g^{-1}g_1) = dL_{g^{-1}}|_{g_1}\mathcal{X}(g_1) + dR_{g_1}|_{g^{-1}}\mathcal{X}(g^{-1}).$$

Substituindo g^{-1} por g, segue o desejado.

($3 \Rightarrow 2$) Seja ϕ_t o fluxo de $\mathcal{X}$ definido sobre um domínio contido em $\mathbb{R} \times$ G. Tome a curva $\alpha(t) = \phi_t(g)\phi_t(g_1)$. Podemos considerá-la definida em um intervalo aberto suficientemente pequeno contendo 0, para quaisquer $g, g_1 \in$ G. Além disso, α assume o valor gg_1, quando $t = 0$. Pela Regra de Leibnitz, temos que

$$\frac{d}{dt}\alpha(t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}\phi_t(g)\phi_t(g_1)|_{t=0} = dL_g|_{g_1}\mathcal{X}(g_1) + dR_{g_1}|_g\mathcal{X}(g).$$

Usando a hipótese segue que

$$dL_g|_{g_1}\mathcal{X}(g_1) + dR_{g_1}|_g\mathcal{X}(g) = \mathcal{X}(gg_1).$$

Por outro lado, temos que

$$\frac{d}{dt}\phi_t(gg_1) = \mathcal{X}(gg_1)$$

e $\phi_0(gg_1) = gg_1$. Logo as curvas são soluções da mesma equação diferencial e tem o mesmo valor inicial. Pelo teorema de existência e unicidade de solução para equações diferenciais ordinárias, segue que $\phi_t(gg_1) = \phi_t(g)\phi_t(g_1)$.

Além disso, temos que $\mathcal{X}(e) = 0$. Primeiramente, note que $dL_e = dR_e = Id$, onde Id é a aplicação identidade de $\mathfrak{g}$ em $\mathfrak{g}$. Segue que

$$dL_e|_e\mathcal{X}(e) + dR_e|_e\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(e) + \mathcal{X}(e) = 2\mathcal{X}(e).$$

Por outro lado, pela hipótese, temos que

$$dL_e|_e\mathcal{X}(e) + dR_e|_e\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(e).$$

Assim,

$$2\mathcal{X}(e) = dL_e|_e\mathcal{X}(e) + dR_e|_e\mathcal{X}(e) = \mathcal{X}(e).$$

Portanto $\mathcal{X}(e) = 0$.

Vamos mostrar que $\mathcal{X}$ é completo. Como $\mathcal{X}(e) = 0$ temos que $\phi_t(e) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Segue que ϕ está definido em uma vizinhança da identidade de G, V_e, para todo t real. Como o grupo de Lie G é conexo, pela Proposição 1.11, segue que G pode ser gerado por V_e. Logo, existem $g_1, ..., g_n \in V_e$ tais que $g = g_1...g_n$. Desta forma, podemos escrever $\phi_t(g) = \phi_t(g_1...g_n) = \phi_t(g_1)...\phi_t(g_n)$, pois ϕ_t é um automorfismo de G, para todo $t \in \mathbb{R}$. Com isso, provamos que $\mathcal{X}$ é completo.

($2 \Rightarrow 1$) Sejam $(\phi_t, t \in \mathbb{R})$ um grupo de automorfismos a 1-parâmetro do grupo de Lie G e $\mathcal{X}$ seu automorfismo infinitesimal gerador. Como ϕ_t é um automorfismo, segue que $\phi_t(e) = \phi_t(ee) = \phi_t(e)\phi_t(e)$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto $\phi_t(e) = e$ e $\mathcal{X}(e) = 0$. Dado $Y \in \mathfrak{g}$, por uma caracterização para colchete de Lie temos que o colchete de X e Y a a partir da identidade pode ser escrito como

$$[\mathcal{X}, Y](e) = \frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(e)}(Y_{\phi_t(e)})|_{t=0} = \frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_e(Y_e)|_{t=0}.$$

Afirmamos que

$$\phi_{-t} \circ L_{\phi_t(g)} = L_g \circ \phi_{-t}. \tag{2.11}$$

De fato, dado $g_1 \in$ G, temos que

$$\begin{aligned}
\phi_{-t} \circ L_{\phi_t(g)}(g_1) &= \phi_{-t}(L_{\phi_t(g)}(g_1)) \\
&= \phi_{-t}(\phi_t(g)g_1) \\
&= \phi_{-t}(\phi_t(g))\phi_{-t}(g_1) \\
&= \phi_{-t+t}(g)\phi_{-t}(g_1) \\
&= g\phi_{-t}(g_1) = L_g(\phi_{-t}(g_1)) \\
&= L_g \circ \phi_{-t}(g_1).
\end{aligned}$$

Derivando de ambos os lados da igualdade 2.11 em relação à t, temos que

$$d\phi_{-t}(dL_{\phi_t(g)}) = dL_g(d\phi_{-t}). \tag{2.12}$$

Utilizando a mesma caracterização podemos escrever o colchete de $\mathcal{X}$ e Y a partir do ponto g como

$$[\mathcal{X}, Y](g) = \frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(g)}(Y(\phi_t(g)))|_{t=0} = \frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(g)}(Y \circ L_{\phi_t(g)}(e))|_{t=0}.$$

Pela invariância a esquerda de Y, temos que

$$\frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(g)}(Y \circ L_{\phi_t(g)}(e))|_{t=0} = \frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(g)}(dL_{\phi_t(g)}|_e Y(e))|_{t=0}. \tag{2.13}$$

Pela igualdade 2.12, segue que

$$\frac{d}{dt} d\phi_{-t}|_{\phi_t(g)}(dL_{\phi_t(g)}|_e Y(e))|_{t=0} = \frac{d}{dt} dL_g|_e(d\phi_{-t}(e)|_e Y(e))|_{t=0}.$$

Como dL_g não depende de t e é linear, vale a igualdade

$$\frac{d}{dt} dL_g|_e(d\phi_{-t}(e)|_e Y(e))|_{t=0} = dL_g|_e \frac{d}{dt}(d\phi_{-t}(e)|_e Y(e))|_{t=0} = dL_g|_e[\mathcal{X}, Y](e).$$

Concluímos que X é afim e como demonstrado anteriormente, $\phi_t(e) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto o campo $\mathcal{X}$ é linear. □

De agora em diante, ϕ_t denotará o fluxo associado a um campo linear. Dado um campo $\mathcal{X}$, podemos associá-lo a uma derivação D, a qual associa cada $Y \in \mathfrak{g}$, a campo $-[\mathcal{X}, Y]$, ou seja,

$D = -ad(\mathcal{X})$. O sinal de menos vem do caso real, onde temos a igualdade $[A(x), b] = -bA(x)$. Para mostrarmos essa afirmação utilizaremos a notação do exemplo 1.2.1 De fato, dados o campo $A(x)$ no normalizador e o campo b na álgebra de Lie, temos que $[A(x), b]$ pertence à álgebra de Lie. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, pela definição de campos invariante à esquerda segue que

$$\begin{aligned} [A(x), b](x) &= dL_x|_0[A(x), b](0) = dL_x|_0((A(x))_0(b) - b_0(A(x))) \\ &= dL_x|_0((A_0)(b) - b_0(A(x))). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Como $A(x)$ é linear, segue que $A(x)_0 = A_0 = 0$ e, portanto,

$$(A(x))_0(b) = 0.$$

Segue da igualdade acima e da invariância á esquerda de b, que

$$dL_x|_0(-b_0(A(x))) = -b_x(A(x)).$$

Portanto, $[A(x), b] = -bA(x)$. Mas podemos evitar o sinal negativo na igualdade acima utilizando a igualdade

$$\phi_t(expY) = exp(e^{tD}Y),$$

válida para quaisquer $Y \in \mathfrak{g}$ e $t \in \mathbb{R}$.

O próximo exemplo nos mostrará como construir um campo linear a partir de um campo na álgebra $\mathfrak{g}$ e descreve, de maneira breve, a relação entre um campo linear e uma derivação interna de G.

Exemplo 1.5. ***As Derivações internas*** *Diremos que D é uma derivação interna se D é uma derivação e D tem a forma $D = ad_Y$ para algum campo Y pertencente à $\mathfrak{g}$.*

Sejam $Y \in \mathfrak{g}$ e I o difeomorfismo inversão definido por $g \mapsto g^{-1}$. Então pelos cálculos feitos após a Proposição 1.5, dIY é um campo invariante à direita e é igual à $-Y(e)$. Afirmamos que

$$\mathcal{X} = Y + dIY$$

é linear.

De fato, é fácil ver que o campo definido acima pertence ao normalizador, pois para todo $Y_1 \in \mathfrak{g}$, *temos que*

$$[\mathcal{X}, Y_1] = [Y + dIY, Y_1] = [Y, Y_1] \in \mathfrak{g},$$

tendo em vista que $[dIY, Y_1] = 0$. *Além disso*

$$\mathcal{X}(e) = Y(e) + dIY(e) = Y(e) - Y(e) = 0.$$

A derivação associada à $\mathcal{X}$, *é interna pois* $ad(\mathcal{X}) = ad(Y)$.

Isto mostra que, dada uma derivação interna $D = -ad(\mathrm{Y}_1)$, *sempre existe um campo vetorial linear sobre* G *que é associado à derivação, como construído acima. Porém este fato deixa de ser verdade no caso geral, nos quais* D *não é uma derivação interna, mas vale quando* G *é simplesmente conexo.*

Estendendo um pouco mais nesta direção, o próximo teorema dá uma caracterização para o caso em que D não é necessariamente interna. A partir do Lema 4 pg.250 do livro [11] podemos concluir.

Teorema 1.22. *Seja* G *um grupo de Lie conexo e simplesmente conexo. Se* D *uma derivação da sua álgebra* $\mathfrak{g}$, *então existe um, e somente um, campo linear* $\mathcal{X}$ *sobre o grupo de Lie* G, *o qual é associado à* D.

A demonstração deste teorema é demasiadamente longa e foge do objetivo da dissertação. Mas em essência, este fato equivale a demonstrar que existe um isomorfismo τ entre $Aut(\mathrm{G})$ e $Aut(\mathfrak{g})$. Em particular, a condição de G ser um grupo de Lie simplesmente conexo é utilizado para mostrar a sobrejetividade de τ.

Para encerrar esta seção, mostraremos que não é necessário a condição de completude na definição dos campos afins.

Proposição 1.23. *Um campo vetorial* $\mathcal{F}$ *afim sobre um grupo de Lie* G *conexo é completo.*

Demonstração: Seja $\mathcal{F}$ um campo afim de G pelo Teorema 1.20 temos que existe uma decomposição $\mathcal{F} = \mathcal{X} + Z$, onde $\mathcal{X}$ é o campo vetorial linear e Z é o campo vetorial invariante à direita.

Seja $e(t)$ a curva integral de $\mathcal{F}$ pela identidade, definida sobre um intervalo (a, b). Verificaremos usando a terceira caracterização do campo linear, que $t \to e(t)\phi_t(g)$ é a curva integral de $\mathcal{F}$ pelo $g \in \mathrm{G}$, também definida sobre (a, b), onde $\phi_t(g)$ é a curva integral por ponto g associada ao campo $\mathcal{X}$. De fato

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e(t)\phi_t(g)|_{t=0} &= dR_g|_e\mathcal{F}(e) + dL_e|_g\mathcal{X}(g) \\ &= dR_g|_e(\mathcal{X}(e) + Z(e)) + dL_e|_g\mathcal{X}(g) \\ &= dR_g|_e\mathcal{X}(e) + dL_e|_g\mathcal{X}(g) + dR_g|_eZ(e) \\ &= \mathcal{X}(ge) + Z(g) = \mathcal{F}(g).\end{aligned}$$

Seja $b < +\infty$ e tome $g = e(\frac{b}{2})$. Então, $t \to e(t - \frac{b}{2})\phi_{t-\frac{b}{2}}(e(\frac{b}{2}))$ é a trajetória de $\mathcal{F}$ por $g = e(\frac{b}{2})$ e $t = \frac{b}{2}$.

Porém, a trajetória $e(t)$ pode ser estendida a $\frac{3b}{2}$, o que é absurdo. $\square$

Capítulo 2

Teoria de controle

Neste capítulo introduziremos parte da teoria de controle, que será importante para a compreensão deste trabalho. A primeira seção trará definição e resultados gerais enquanto na segunda trataremos de sistema linear, que é conceito central deste trabalho.

2.1 Sistema de controle

Esta seção trará resultados gerais da teoria de controle. Começaremos pela definição de sistema de controle, passaremos as definições de curva integral do sistema, do fluxo associado ao sistema e por fim das concatenação de fluxos. A partir deste último conceito, podemos definir o conjunto de atingibilidade do sistema de controle. Passaremos então ao teorema mais importante da seção, o Teorema da órbita. Por fim definiremos os conceitos de acessibilidade, controlabilidade e a condição do posto. Finalizando esta seção, falaremos da importância da condição do posto para a controlabilidade. Esta seção baseia-se no artigo [4] e no livro [9]

Neste capítulo, como usual, G denotará um grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie e $T\mathrm{G}$ seu fibrado tangente.

Definição 2.1. *Um* sistema de controle Σ *sobre* G *é definido por*

$$\frac{dg}{dt} = F(g, u(t)),$$

onde $u(t)$ *pertence a uma classe* $\mathcal{U}$ *de controles admissíveis com valor em um subconjunto* U *de* $\mathbb{R}^n$ *e a aplicação* $F : \mathrm{G} \times U \to T\mathrm{G}$, *quando fixado um controle* $u(t)$, *é um campo vetorial suave.*

Queremos dizer por classe controle admissível que as funções pertencentes a esta classe satisfazem as condições necessárias para a existência e unicidade das soluções da equação diferencial. Neste trabalho assumiremos $\mathcal{U}$ como sendo o conjunto das funções constantes por partes de $\mathbb{R}$ em $U \subset \mathbb{R}^n$. Para facilitar a notação denotaremos $u(t)$ apenas por u e a aplicação $F(\ ,u) : \mathrm{G} \to T\mathrm{G}$ por $F_u(\ )$.

Exemplo 2.1. *Um sistema de controle Σ é dito ser de* controle afim *se a aplicação F for escrita como:*

$$F(g,u) = Y_0(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

com $g \in \mathrm{G}$ e $Y_j \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$, para todo $j \in \{0, ..., k\}$.

Note que, ao assumirmos os campos $Y_j \in \mathfrak{X}(\mathrm{G})$, estamos implicitamente exigindo que ao fixarmos o controle u, a aplicação F_u seja um campo suave e completo. Neste trabalho estaremos interessado em uma sub-classe dos sistema de controle afim, os sistemas lineares que serão descrito na próxima seção. A partir de agora assumiremos que Σ seja um sistema de controle afim. Prosseguindo com a seção, introduziremos o conceito de atingibilidade, para tal, primeiramente definiremos os conceitos de fluxo associado a um sistema de controle e de concatenações de fluxos.

Seja Γ o conjunto de todos os campos $\{F_u\}_{u \in \mathcal{U}}$ construídos a partir do sistema Σ, pelas escolhas dos controles.

Definição 2.2. *Uma* curva integral do sistema *de controle Σ associada ao controle u passando por $g \in \mathrm{G}$ é a aplicação diferenciável $\alpha : I_g \to \mathrm{G}$, onde $I_g \subset \mathbb{R}$ é maximal, e α satisfaz*

$$\frac{d\alpha}{dt} = F_u(\alpha_t(g)), \quad \alpha_0(g) = g.$$

Conforme dito anteriormente, os campos F_u são suaves e completos e portanto o domínio de definição da curva integral α, do sistema de controle Σ passando pelo ponto g é $\mathbb{R}$ para todo $g \in \mathrm{G}$.

Definição 2.3. *A aplicação $\Phi_u : \mathbb{R} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ definida por $\Phi_u(t,g) = \alpha_t(g)$ é dita ser o* fluxo do sistema Σ *associado ao controle $u \in \mathcal{U}$.*

A próxima proposição estabelece algumas propriedades bem conhecidas relativas ao fluxo.

Proposição 2.1. *Seja Φ_u um fluxo de Σ. Então Φ_u satisfaz:*

1. $\Phi_u(0, g) = g$ *para todo* $g \in \mathrm{G}$.

2. $\Phi_u(t + s, g) = \Phi(t, \Phi(s, g))$ *para todo* $t, s \in \mathbb{R}$ *e todo* $g \in \mathrm{G}$.

3. $\frac{\partial \Phi(t,g)}{\partial t} = F_u(\Phi(t, g))$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $g \in \mathrm{G}$.

Denotaremos a aplicação $\Phi_u(t, \quad) : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ simplesmente por Φ_u^t. Notemos que Φ_u^t é um difeomorfismo de G. Dados fluxos $\Phi_{u_1}, ..., \Phi_{u_n}$ do sistema Σ e $t_1, ..., t_n$ números reais, temos que $\Phi_{u_1}^{t_1}, ..., \Phi_{u_n}^{t_n}$ são difeomorfismo de G, os quais sob a operação de composição formam um grupo, conhecido como grupo de difeomorfismo do sistema Σ, o qual denotaremos por G_Σ.

Definição 2.4. *Sejam $\Phi_{u_1}, ..., \Phi_{u_n}$ fluxos do sistema Σ, $t_1, ..., t_n$ números reais. A* concatenação dos fluxos $\Phi_{u_1}, ..., \Phi_{u_n}$ *nos tempos $t_1, ..., t_n$ é o difeomorfismo*

$$\Phi := \Phi_{u_n}^{t_n} \circ ... \circ \Phi_{u_1}^{t_1} : \mathrm{G} \to \mathrm{G}$$

definido por

$$g \mapsto \Phi_{u_n}^{t_n} \circ ... \circ \Phi_{u_2}^{t_2} \circ \Phi_{u_1}^{t_1}(g) = \Phi_{u_n}(t_n, ...\Phi_{u_2}(t_2, \Phi_{u_1}(t_1, g))...).$$

Segue como conseqüência das propriedades de fluxos que

Proposição 2.2. *Seja Φ uma concatenação de fluxos de G_Σ. Dado $g \in \mathrm{G}$, a aplicação Φ satisfaz:*

1. $\Phi(0, g) = g$;

2. $$\frac{\partial \Phi(t,g)}{\partial t}\Big|_t = \begin{cases} F_{u_1}(\Phi_{u_1}(t, g)), & se\ t \in (0, t_1); \\ F_{u_2}(\Phi_{u_2}(t - t_1, \Phi_{u_1}(t_1, g))), & se\ t \in (t_1, t_1 + t_2); \\ \vdots, & \vdots \\ F_{u_n}(\Phi_{u_n}(t - \sum_{i=1}^{n-1} t_i, (...(\Phi_{u_2}(t_2, \Phi_{u_1}(t_1, g)))))), & se\ t \in (\sum_{i=1}^{n-1} t_i, \sum_{i=1}^{n} t_i]. \end{cases}$$

Para o estudo do conjunto de atingibilidade, estamos interessados nas concatenações em que cada t_i seja positivo. Este conjunto sob a operação de composição forma um semigrupo que é conhecido como semigrupo do sistema Σ, o qual denotaremos por S_Σ. Consideraremos agora o conjunto de atingibilidade do sistema de controle Σ. Dados $g, h \in \mathrm{G}$, dizemos que o ponto h é atingível a partir de g se existir uma concatenação de fluxos Φ do sistema de controle Σ, com tempos positivos, a partir de g cujo ponto final é h, isto é, existem controles $u_1, ..., u_n \in \mathcal{U}$, e tempos reais $t_1, ..., t_n \geq 0$ tais que

$$h = \Phi_{u_n}^{t_n} \circ ... \circ \Phi_{u_1}^{t_1}(g).$$

Diremos que h pode ser atingido a partir de g, no tempo T, se $\Phi(T, g) = h$ e $\sum_{i=1}^{n} t_i = T$.

Definição 2.5. *O* conjunto de atingibilidade do sistema Σ a partir de g, no tempo t, *é o conjunto de todos os pontos que são atingíveis no tempo t a partir do ponto g. O* conjunto de atingibilidade do sistema Σ a partir do ponto g *é a união de todo os conjuntos de atingibilidade com tempo positivo.*

Denotaremos o conjunto de atingibilidade de Σ a partir de g no tempo t por $\mathcal{A}(g, t)$. Desta forma podemos escrever o conjunto de atingibilidade do sistema Σ como sendo

$$\mathcal{A}(g) = \bigcup_{t=0}^{\infty} \mathcal{A}(g, t).$$

Definição 2.6. *A* órbita *de Γ por g é o conjunto dos pontos $h \in \mathrm{G}$ tais que h pode ser escrito como*

$$h = \Phi_{u_n}(t_n, ...\Phi_{u_2}(t_2, \Phi_{u_1}(t_1, g))...),$$

onde cada $t_i \in \mathbb{R}$ para todo $i \in \{1, .., n\}$ e $n \in \mathbb{N}$.

O próximo teorema é um dos teoremas mais importantes da teoria de controle, conhecido como o teorema da órbita, é devido à Sussmann,H.J. [5].

Teorema 2.3. *A órbita de Γ por cada ponto $g \in \mathrm{G}$ é uma subvariedade conexa de* G.

A partir deste teorema, garantimos que o conjunto de atingibilidade do sistema Σ, $\mathcal{A}(g)$, é uma subvariedade de G.

Definição 2.7. *O sistema Σ é dito ter a propriedade de* acessibilidade *em g, ou é acessível em g se $\mathcal{A}(g)$ tem interior não vazio. O sistema Σ é dito ser acessível se for acessível no ponto g, para todo $g \in \mathrm{G}$.*

Este conceito foi relacionado com a condição do posto, em 1972, por Sussmann e Jurdjevic (ver [4]). Em seu trabalho mostraram que sob a hipótese de que F_u são campos analíticos a condição do posto é necessária e suficiente para que o sistema Σ tenha a propriedade de acessibilidade.

Seja Lie(Γ) a menor subálgebra de Lie da álgebra de Lie $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ que contém Γ, que ao aplicarmos no ponto g torna-se uma subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$, pois quando aplicado o campo no ponto g o vetor resultante é tangente a variedade. Diremos que o sistema Σ satisfaz a *condição do posto,* se $\mathrm{dimLie}(\Gamma)(\mathrm{g}) = \dim(\mathfrak{g})$.

Em resumo o Teorema de Sussmann diz que:

Teorema 2.4. *O sistema Σ é acessível se, e somente se, a dimensão da álgebra de Lie* Lie(Γ), *em cada ponto $g \in \mathrm{G}$, for igual à dimensão de* G.

Definição 2.8. *O sistema Σ é dito ser* localmente controlável *em g se $g \in \mathrm{int}\mathcal{A}(\mathrm{t}, \mathrm{g})$, para todo $t > 0$.*

Em outras palavras, dizemos que Σ é localmente controlável se o conjunto de atingibilidade forma uma vizinhança do ponto g, para todo $t > 0$. Uma condição necessária para que o sistema Σ seja localmente controlável é que $\mathcal{A}(g, t)$ tenha interior não vazio para todo t e, portanto, faz-se necessário que Σ tenha a propriedade de acessibilidade.

Apesar de estarmos interessados na controlabilidade local lembraremos a definição da controlabilidade global.

Definição 2.9. *O sistema Σ é dito ser* controlável no ponto *g se $\mathcal{A}(g) = \mathrm{G}$ e é dito ser* controlável *se é controlável no ponto g, para todo $g \in \mathrm{G}$.*

2.2 Sistema linear

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de sistema linear. Começaremos definindo o conceito de sistema afim e apresentaremos o conceito de sistema invariante à esquerda e os relacionaremos. Exibiremos alguns resultados para sistemas invariantes à esquerda. Posterior a esses resultados, definiremos o conceito de sistema linear, faremos uma breve relação entre o conceito de sistema invariante à esquerda e o de sistema linear. Para finalizar a seção, relacionaremos os resultado de controlabilidade para estas duas classes de sistemas. Esta seção baseia se nos artigos Cardetti e Mittenhuber [2] e Sachkov [6].

Comecemos pela definição de sistema afim.

Definição 2.10. *Um* sistema afim *sobre o grupo de Lie* G, *é um sistema de controle afim* Σ *dado por*

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{F}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde $g \in \mathrm{G}$, $\mathcal{F} \in \mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$ *e* $Y_j \in \mathfrak{g}$, *para todo* $j \in \{1, ..., k\}$.

Normalmente chamamos os campos Y_j de campos de controle, enquanto o campos $\mathcal{F}$ é chamado de campo não controlado.

Definição 2.11. *Um* sistema invariante à esquerda *sobre* G *é um sistema de controle afim* Σ *definido por*

$$\frac{dg}{dt} = Y_0(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde $g \in \mathrm{G}$ *e* $Y_j \in \mathfrak{g}$, *para todo* $j \in \{0, ..., k\}$.

Note que um sistema invariante à esquerda é um sistema afim, pois o campo não controlado $Y_0 \in \mathfrak{g}$ pertence ao normalizador por definição e. Portanto, o conceito de sistema afim generaliza o conceito de sistema invariante à esquerda.

Os resultados a seguir podem ser encontrados no artigo [4].

Lema 2.5. *Seja* Σ *um sistema invariante à esquerda sobre* G. *Então:*

1. $\mathcal{A}(e)$ *é conexo por caminho;*

2. *$\mathcal{A}(e)$ é um semigrupo.*

Pela invariância à esquerda do sistema Σ, podemos caracterizar o conjunto de atingibilidade no ponto g a partir da identidade.

Proposição 2.6. *O conjunto de atingibilidade $\mathcal{A}(g)$ pode ser escrito como*

$$\mathcal{A}(g) = g\mathcal{A}(e).$$

Demonstração: Considere o campo vetorial Σ_u definido por

$$\Sigma_u(g) = Y_0(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g).$$

Pela invariância, temos que

$$Y_j \circ L_g(e) = dL_g|_e \circ Y_j(e), \quad \forall\, g \in \mathrm{G}, \quad \forall\, j \in \{0, ..., k\}.$$

Pela linearidade da aplicação dL_g e pela independência do controle u em relação ao ponto, temos que:

$$\Sigma_u(g) = Y_0(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g) = dL_g(Y_0(e) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(e)) = dL_g \Sigma_u(e).$$

Da igualdade acima obtemos que o campo Σ_u é invariante à esquerda e portanto $\exp(\mathrm{t}\Sigma_\mathrm{u})$ é uma solução do sistema Σ na identidade e, novamente, pela igualdade anterior, segue que $g\exp(\mathrm{t}\Sigma_\mathrm{u})$ é uma solução do sistema a partir g e o que prova o resultado. $\square$

O teorema a seguir é extremamente importante para o estudo da controlabilidade de sistema invariante à esquerda.

Teorema 2.7. *Se $\mathcal{A}(e)$ é um subgrupo do grupo de Lie* G, *então sua álgebra associada é a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ gerada por* $Lie(Y_0, ..., Y_k)$.

Conseqüentemente, obtemos que o sistema Σ é controlável se, e somente se,

1. $\mathcal{A}(e)$ é um subgrupo;

2. G é conexo;

3. $Lie(Y_0, ..., Y_k) = \mathfrak{g}$.

Deste fato obtemos resultados parciais sobre controlabilidade para sistema invariantes á esquerda. Por exemplo:

Teorema 2.8. *Sejam* G *um grupo de Lie conexo e* Σ *um sistema invariante à esquerda sobre* G. *Se* Σ *é controlável, então* $Lie(Y_0, ..., Y_k) = \mathfrak{g}$. *Além disto esta condição será suficiente se acontecer algum dos itens abaixo*

1. G *for compacto;*

2. Σ *for um sistema homogêneo;*

3. *se* $\mathcal{U} = \mathcal{U}_u$ *e* $Y_0 \in Lie(Y_1, ..., Y_k)$.

Passaremos ao estudo dos sistemas lineares e de algumas de suas propriedades relativas à controlabilidade.

Definição 2.12. *Um* sistema linear *sobre* G *é um sistema de controle afim* Σ *dado por*

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde $g \in \mathrm{G}$, $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ *e* $Y_j \in \mathfrak{g}$, *para todo* $j \in \{1, ..., k\}$.

Exemplo 2.2. *Como visto no exemplo 1.4, se* $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ *então* $\mathcal{X}(x) = \sum_{i=1}^{n} A_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$, *onde* A_i *é a i-ésima linha da matriz A. Desta forma um sistema linear sobre* $\mathbb{R}^n$ *é da forma*

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + \sum_{j=1}^{k} u_j B_j,$$

onde B_j *são vetores n-dimensionais constantes.*

Note que as classes de sistemas lineares e sistema invariantes não possuem relação de continência. De fato, suponha que o sistema de controle Σ pertença a ambas as classes.

Então $Y_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ e $Y_0 \in \mathfrak{g}$. Pela linearidade segue que $Y_0(e) = 0$, por outro lado, pela invariância à esquerda temos que

$$Y_0(g) = dL_g \circ Y_0(e) = dL_g|_e(0(e)) = 0(g).$$

Pela arbitrariedade de g, segue que o campo não controlado do sistema tem que ser o campo nulo e portanto o sistema de controle Σ tem a forma

$$\frac{dg}{dt} = \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g)$$

que não é um objeto de estudo interessante.

Lema 2.9. *Se Σ é um sistema linear então $\mathcal{A}(e)$ é conexo por caminhos.*

Demonstração: Se $g, h \in \mathcal{A}(e)$, existem $T_g, T_h \in \mathbb{R}^+$ tais que $g \in \mathcal{A}(e, T_g)$ e $h \in \mathcal{A}(e, T_h)$. Por definição de $\mathcal{A}(e, T_g)$ existe uma concatenação de fluxos do sistema Σ, Φ, tal que $g = \Phi(e, T_g)$. De maneira análoga, existe uma concatenação de fluxos de Σ, Ψ, tal que $h = \Psi(e, T_h)$. Note que Φ e Ψ são curvas diferenciáveis por partes, em particular, contínuas ligando a identidade à g e h respectivamente. Tome Φ_r como sendo $\Phi(T_g - t)$ então $\Phi_r(0) = \Phi(T_g - 0) = g$ e $\Phi_r(T_g) = \Phi(T_g - T_g) = e$. Note que Φ_r está definida no intervalo $[0, T_g]$ e é diferenciável por partes, pois Φ e a mudança de variáveis o são. Tome Ψ_r como $\Psi(t - T_g)$. Assim Ψ_r está definida em $[T_g, T_h + T_g]$, além disso, $\Psi_r(T_g) = \Psi(T_g - T_g) = e$ e $\Psi_r(T_h + T_g) = \Psi(T_h + T_g - T_g) = \Psi(T_h) = h$. Como Ψ e a mudança de variável são diferenciáveis segue que Ψ_r é diferenciável, em particular contínua. Tome ω a curva definida por

$$\omega(t) = \begin{cases} \Phi_r(t), & t \in [0, T_g]; \\ \Psi_r(t), & t \in [T_g, T_h + T_g]. \end{cases}$$

Pela construção, segue que ω é um caminho diferenciável por partes que liga g à h. Portanto $\mathcal{A}(e)$ é conexo por caminho. $\square$

Como na seção 1.2, o fluxo associado ao campo linear $\mathcal{X}$ será denotado por ϕ_t. Lembramos que pelo Teorema 1.21, ϕ_t é um automorfismo infinitesimal para todo t real.

Proposição 2.10. *O conjunto de atingibilidade do sistema linear Σ no ponto $g \in \mathrm{G}$ pode ser expresso como*

$$\mathcal{A}(g,t) = \phi_t(g)\mathcal{A}(e,t).$$

Demonstração: Seja Φ uma concatenação de fluxos do sistema Σ a partir do ponto g. Note que ϕ_t é um automorfismo e, portanto, $\phi_t(g^{-1}) = (\phi_t(g))^{-1}$.

Seja a curva $\beta : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ definida por $\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g)$. Note que $\beta(0) = \phi_0(g^{-1})\Phi(0,g) = g^{-1}g = e$ e, além disso, β é diferenciável, pois ϕ_t, Φ e o produto o são. Derivando β com respeito a t temos que:

$$\frac{d}{dt}\beta(t)|_t = \frac{d}{dt}|_t\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g).$$

Usando a regra de Leibnitz segue que

$$\frac{d}{dt}\beta(t)|_t = dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}\frac{d}{dt}\Phi(t,g) + dR_{\Phi(t,g)}|_{\phi_t(g^{-1})}\frac{d}{dt}\phi_t(g^{-1}).$$

Utilizando que $\Phi(t,g)$ é uma concatenação de fluxos de Σ, que a diferencial da translação é linear e que o controle não depende do ponto temos que

$$\frac{d}{dt}\beta(t)|_t = dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}[\mathcal{X}(\Phi(t,g)) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(\Phi(t,g))] + dR_{\Phi(t,g)}|_{\phi_t(g^{-1})}\mathcal{X}(g^{-1})$$

$$= dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}\mathcal{X}(\Phi(t,g)) + \sum_{j=1}^{k} u_j dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}Y_j(\Phi(t,g)) + dR_{\Phi(t,g)}|_{\phi_t(g^{-1})}\mathcal{X}(g^{-1}).$$

Como os campos controlados são invariantes à esquerda segue que

$$\frac{d}{dt}\beta(t)|_t = dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}\mathcal{X}(\Phi(t,g)) + dR_{\Phi(t,g)}|_{\phi_t(g^{-1})}\mathcal{X}(g^{-1}) + \sum_{j=1}^{k} u_j dL_{\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g))}|_e Y_j(e).$$

Pelo Teorema 1.21, temos que

$$\mathcal{X}(\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g)) = dL_{\phi_t(g^{-1})}|_{\Phi(t,g)}\mathcal{X}(\Phi(t,g)) + dR_{\Phi(t,g)}|_{\phi_t(g^{-1})}\mathcal{X}(g^{-1}).$$

Logo

$$\frac{d\beta(t)}{dt}|_t = \mathcal{X}(\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g)) + \sum_{j=1}^{k} u_j dL_{\phi_t(g^{-1})\Phi(t,g))}|_e Y_j(e) = \mathcal{X}(\beta(t)) + \sum_{j=1}^{k} u_j dL_{\beta(t)}|_e Y_j(e)$$

Novamente pela invariância à esquerda de Y_j, temos que

$$\frac{d\beta}{dt} = \mathcal{X}(\beta(t)) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(\beta(t)).$$

Além disso $\beta(0) = e$, logo $\beta \in \mathcal{A}(e,t)$. Portanto $\mathcal{A}(g,t) \subseteq \phi_t(g)\mathcal{A}(e,t)$.

Para a inclusão $\mathcal{A}(g,t) \supseteq \phi_t(g)\mathcal{A}(e,t)$, basta tomar a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ definida por $\gamma(t) = \phi_t(g)\Phi(t,e)$, onde $\Phi(t,e)$ uma concatenação dos fluxos de Σ partindo da identidade e $\phi_t(g)$ o fluxo do campo $\mathcal{X}$ por g. As contas seguem de maneira análoga. $\square$

Com relação ao Teorema 2.8, existe um resultado equivalente demonstrado por San Martin e Ayala no artigo [7] que expressa uma condição de controlabilidade de sistemas lineares, sob a hipótese de que G é um grupo de Lie compacto. Mas antes que possamos apresentá-lo precisamos lembrar que o sistema Σ satisfaz a condição do posto, se $\dim\mathrm{Lie}(\Gamma)(g) = \dim(\mathfrak{g})$ para todo $g \in \mathrm{G}$.

Teorema 2.11. *Seja* G *um grupo de Lie conexo e compacto, um sistema linear* Σ *é controlável se, e somente se,* Σ *satisfaz a condição do posto.*

Demonstração: Vide artigo [7]. $\square$

Capítulo 3

Controlabilidade de sistemas lineares

Este é o principal capítulo desta dissertação. Aqui apresentaremos resultados sobre controlabilidade local, para sistemas lineares sobre grupos de Lie. Para tal, dividiremos o capítulo em duas seções: a primeira será constituída de resultados necessários para a demonstração do principal teorema deste trabalho: o Teorema 3.9; nela construiremos a partir de um sistema linear Σ, um sistema invariante à direita $\widehat{\Sigma}$ sobre um grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$. A segunda seção traz o principal resultado desta dissertação, o qual conclui a controlabilidade local do sistema linear na identidade sob a hipótese de que Σ satisfazer a condição de ad-rank, via relação entre os fluxos dos sistemas Σ e $\widehat{\Sigma}$.

3.1 Sistema invariante

Esta seção tem dois objetivos. O primeiro é a construção de um sistema invariante à direita a partir do sistema Σ e o segundo é relacionar os fluxos destes sistemas. Para a primeira parte construiremos o grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$, no qual faremos o levantamento do sistema linear Σ a um sistema invariante à direita $\widehat{\Sigma}$, e o grupo de Lie G será um espaço homogêneo de $\widehat{\mathrm{G}}$. Os resultados desta seção encontram-se nos artigos Cardetti e Mittenhuber [2] e Jouan [3].

Como sempre, G denotará um grupo de Lie conexo, $\mathfrak{g}$ sua álgebra de Lie, $\mathcal{X}$ um campo linear e ϕ_t seu fluxo associado.

Lembremos que um sistema linear Σ, sobre G, é da forma

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g),$$

onde $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$, $Y_j \in \mathfrak{g}$ e $u_j \in \mathcal{U}$. Segundo o Teorema 1.21, ϕ_t é um automorfismo de G, para todo t real. Desta forma podemos definir uma representação ϕ de $\mathbb{R}$ em G, que a cada t real associa o automorfismo ϕ_t. Como visto na seção 1.1, podemos construir o produto semi-direto de G por $\mathbb{R}$, via a representação ϕ, o qual denotaremos por $\widehat{G}$.

Como conjunto, $\widehat{\mathrm{G}}$ se identifica com o produto cartesiano $\mathrm{G} \times \mathbb{R}$ e a operação produto em $\widehat{\mathrm{G}}$ é definida por $(g_1, t_1)(g_2, t_2) = (g_1\phi_{t_1}(g_2), t_1 + t_2)$. Para que não haja confusão entre os elementos identidade de G e $\widehat{\mathrm{G}}$, denotaremos por e a identidade de G e por $1 = (e, 0)$ a identidade de $\widehat{\mathrm{G}}$.

Denotaremos por $\widehat{\mathfrak{g}}$ a álgebra de Lie associada ao grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$. Segue da construção na seção 1.1 que esta é isomorfa a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \times_{-ad_{t\mathcal{X}}} \mathbb{R}$.

Associado aos campos $\mathcal{X}$ e Y_j de G podemos definir naturalmente campos invariantes à direita em $\widehat{\mathrm{G}}$.

Definição 3.1. *Sejam* $\widehat{\mathcal{X}}$ *e* $\widehat{Y}_j$ *os campos invariantes à direita em* $\widehat{\mathfrak{g}}$ *tais que* $\widehat{\mathcal{X}}(1) = (0, 1)$ *e* $\widehat{Y}_j(1) = (Y_j, 0)$.

Para calcularmos os campos nos demais pontos de $\widehat{\mathrm{G}}$, precisaremos encontrar suas respectivas curvas integrais a partir da identidade.

Proposição 3.1. *As curvas integrais dos campos* $\widehat{\mathcal{X}}$ *e* $\widehat{Y}_j$ *na identidade são, respectivamente, as aplicações dadas por* $\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}}) = (\mathrm{e}, \mathrm{t})$ *e* $\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathrm{Y}}_\mathrm{j}) = (\exp(\mathrm{tY_j}), 0)$.

Demonstração: A partir da definição da aplicação exponencial temos que

$$\frac{d}{dt}\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})|_{\mathrm{t=0}} = \widehat{\mathcal{X}}(1) = (0, 1).$$

Consideremos a curva suave $\alpha : \mathbb{R} \to \widehat{\mathrm{G}}$ definida por $t \mapsto \alpha_t(1) = (e, t)$. Derivando α em relação à t obtemos que

$$\frac{d}{dt}\alpha_t(1)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(e, t)|_{t=0} = (0, 1).$$

Logo ambas curvas satisfazem a mesma equação diferencial e possuem o mesmo valor inicial. Pelo teorema de existência e unicidade de soluções para equações diferenciais ordinárias segue que $\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}}) = (\mathrm{e}, \mathrm{t})$. De maneira análoga segue que $\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathrm{Y}}_\mathrm{j}) = (\exp(\mathrm{tY_j}), 0)$. $\square$

Pela a invariância à direita dos campos $\widehat{\mathcal{X}}$ e $\widehat{Y}_j$, podemos os vetores tangente aos pontos $\widehat{g} = (g, s) \in \widehat{\mathrm{G}}$ utilizando a Proposição 3.1.Note que

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{X}}(\widehat{g}) &= \widehat{\mathcal{X}}(R_{\widehat{g}}(1)) = dR_{\widehat{g}}(\widehat{\mathcal{X}}(1)) = \frac{d}{dt}R_{\widehat{g}}(\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}}))|_{\mathrm{t=0}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(\mathrm{e,t})(\mathrm{g,s})|_{\mathrm{t=0}} \\ &= \frac{d}{dt}(e\phi_t(g), s+t)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\phi_t(g), s+t)|_{t=0} = (\mathcal{X}(g), 1). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por contas similares obtemos que

$$\widehat{Y}_j(\widehat{g}) = \frac{d}{dt}(\exp(\mathrm{tY_j})\phi_0(\mathrm{g})|_{\mathrm{t=0}}, 0 + \mathrm{s}) = (\mathrm{dR_g}|_{\mathrm{e}}\mathrm{Y_j}(\mathrm{e}), 0), \quad \forall\ \mathrm{j} \in 1, ..., \mathrm{k}. \tag{1.2}$$

A partir destes campos definiremos um sistema invariante à direita em $\widehat{\mathrm{G}}$.

Seja $\widehat{\Sigma}$ o sistema invariante à direita em $\widehat{\mathrm{G}}$ definido por

$$\dot{\widehat{g}} = \widehat{\mathcal{X}}(\widehat{g}) + \sum_{j=1}^{k} u_j \widehat{Y}_j(\widehat{g}).$$

Este sistema será de suma importância para o estudo da controlabilidade local de Σ. Note que a partir das igualdades 1.1 e 1.2, podemos expressar $\widehat{\Sigma}$ como:

$$\begin{pmatrix} \dot{g} \\ \dot{s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{X}(g) + \sum_{j=1}^{k} u_j Y_j(g) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Durante o trabalho, às vezes, referiremo-nos ao sistema $\widehat{\Sigma}$ como o sistema levantado de Σ, ou simplesmente como sistema levantado. De maneira pouco formal podemos concluir a partir da equação acima que a “ projeção ”do sistema invariante à direita $\widehat{\Sigma}$ em G resulta no sistema linear Σ. Passaremos agora a segunda parte desta seção, que visa relacionar o grupo de Lie G ao grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$ e, posteriormente, os fluxos de Σ e $\widehat{\Sigma}$.

Seja $\beta : \widehat{\mathrm{G}} \times \mathrm{G} \to \mathrm{G}$ a aplicação definida por

$$\beta(\widehat{g_1}, g) = (g_1\phi_{t_1}(g)),$$

onde $\widehat{g_1} = (g_1, t_1)$.

Lema 3.2. *A aplicação β é uma ação transitiva. Além disso, o subgrupo de isotropia na identidade é* $\exp(\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}})$.

Demonstração: Dados $\widehat{g_1} = (g_1, t_1)$ e $\widehat{g_2} = (g_2, t_2)$ em $\widehat{\mathrm{G}}$, temos que mostrar que β satisfaz a definição de ação. Note que, para todo $g \in \mathrm{G}$, temos que

$$\beta(1, g) = e\phi_0(g) = g.$$

Além disso

$$\beta(\widehat{g_2}, \beta(\widehat{g_1}, g)) = \beta(\widehat{g_2}, g_1\phi_{t_1}(g)) = g_2\phi_{t_2}(g_1\phi_{t_1}(g)) = g_2\phi_{t_2}(g_1)\phi_{t_2+t_1}(g).$$

Por outro lado temos que

$$\beta(\widehat{g_2}\widehat{g_1}, g) = g_2\phi_{t_2}(g_1)\phi_{t_2+t_1}(g).$$

Logo β é uma ação. Mostraremos agora a transitividade. Dados $g, h \in \mathrm{G}$ temos que exibir $\widehat{g_1} \in \widehat{\mathrm{G}}$ tal que

$$\beta(\widehat{g_1}, g) = h.$$

Tomando $\widehat{g_1} = (hg^{-1}, 0)$, segue que

$$\beta(\widehat{g_1}, g) = hg^{-1}\phi_0(g) = h.$$

Portanto β é uma ação transitiva.

Para a segunda afirmação queremos encontrar os elementos $\widehat{g_1}$ do grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$, tais que $\beta(\widehat{g_1}, e) = e$.

Dado $\widehat{g_1}$ arbitrário temos que

$$\beta(\widehat{g_1}, e) = g_1\phi_{t_1}(e) = g_1.$$

Para que $\beta(\widehat{g_1}, e) = e$ temos que $g_1 = e$. Como $\phi_{t_1}(e) = e$, para todo $t_1 \in \mathbb{R}$, concluímos que t_1 pode ser um numero real arbitrário, enquanto g_1 deve ser obrigatoriamente e. Portanto $\widehat{g_1}$ pertence à grupo de isotropia da ação β na identidade se, e somente se, $\widehat{g_1}$ é da forma (e, t). Pela Proposição 3.1, concluímos que o grupo de isotropia na identidade é o subgrupo de Lie dado pela curva integral do campo $\widehat{\mathcal{X}}$ pela identidade. $\square$

Para facilitar a notação denotaremos o subgrupo de Lie $\exp(\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}})$ por T. Segue do Teorema 1.13, a existência de um difeomorfismo θ entre $\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$ e G definido por $\theta((g,t)T) = \beta((g,t), e) = g\phi_t(e) = g$.

Observe que as classes laterais à esquerda dos pontos (g,t) e $(g,0)$ coincidem. De fato, aplicando $(e,-t)$ à direita do ponto (g,t), temos que

$$(g,t)(e,-t) = (g\phi_t(e), t-t) = (g,0).$$

Portanto a classe lateral à esquerda de (g,t) coincide com a classe lateral de $(g,0)$. Concluímos assim que G é um espaço homogêneo do grupo de Lie $\widehat{\mathrm{G}}$ e que $\theta((g,t)T) = \theta((g,0)T) = g$.

Consideremos a projeção canônica $\pi : \widehat{\mathrm{G}} \to \frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$, e sua diferencial $d\pi(1) : \widehat{\mathfrak{g}} \to T_{\pi(1)}\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$. Para facilitar a notação denotaremos $\pi(1)$ por x_0.

O espaço tangente $T_{x_0}\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$ é isomorfo ao espaço $\frac{\widehat{\mathfrak{g}}}{\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}}$, pois a aplicação $\psi : T_1\widehat{\mathrm{G}} \to T_{x_0}\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$ definida por $\psi(\frac{d}{dt}\alpha_e|_{t=0}) = \frac{d}{dt}(\pi \circ \alpha_e(t))$, onde $\alpha : \mathbb{R} \to \mathrm{G}$ é uma curva suave, é um homomorfismo sobrejetor de álgebra de Lie, cujo núcleo é $\mathbb{R}\mathcal{X}$.

Definição 3.2. *Seja* $\mathrm{pr} : \widehat{\mathfrak{g}} \to \frac{\widehat{\mathfrak{g}}}{\mathrm{R}\widehat{\mathcal{X}}}$ *a aplicação linear sobrejetora definida por* $\mathrm{pr(Y)} = \mathrm{Y} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}$, *onde* $Y + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}$ *é a classe lateral do campo* Y.

Seja $\mathfrak{h}$ a subálgebra de Lie de $\mathfrak{g}$ gerada pelos campos de controle $\Upsilon = \{Y_1, ..., Y_k\}$ e $\widehat{\mathfrak{h}}$ a subálgebra de Lie de $\widehat{\mathfrak{g}}$ gerada pelos campos de controle $\widehat{\Upsilon} = \{\widehat{Y}_1, ..., \widehat{Y}_k\}$, isto é,$\mathfrak{h} = Lie(\Upsilon)$ e $\widehat{\mathfrak{h}} = Lie(\widehat{\Upsilon})$.

Proposição 3.3. $Lie(\widehat{\Upsilon}) = \widehat{Lie(\Upsilon)}$.

Demonstração: Basta-nos mostrar que $[\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_i](\widehat{g}) = ([Y_j, Y_i](g), 0(s))$, pois dados $\widehat{Y}_j = (Y_j, 0)$ e $\widehat{Y}_i = (Y_i, 0)$ e $c \in \mathbb{R}$ temos por definição que $(\widehat{Y}_j + \widehat{Y}_i)(\widehat{g}) = (Y_j + Y_i(g), 0(s))$ e $c\widehat{Y}_j(\widehat{g}) = (cY_j(g), c0(s)) = (cY_j(g), 0(s))$. Pela definição de colchete de Lie temos que

$$\begin{aligned}
[\widehat{Y}_j, \widehat{Y}_i](\widehat{g}) &= [(Y_j, 0), (Y_i, 0)](\widehat{g}) \\
&= ([Y_j, Y_i] - ad_{0\mathcal{X}}(Y_i) + ad_{0\mathcal{X}}(Y_j), 0)(\widehat{g}) \\
&= ([Y_j, Y_i], 0)(\widehat{g}) \\
&= ([Y_j, Y_i](g), 0(s)). \qquad (1.3)
\end{aligned}$$

Portanto o levantamento da álgebra de Lie $\mathfrak{h}$ é a álgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$. $\square$

Por argumento similar ao demonstrado acima segue que o colchete de $\widehat{\mathcal{X}}$ com $\widehat{Y} \in \widehat{\mathfrak{h}}$ é dado por

$$[\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{Y}] = ([\mathcal{X}, Y], 0).$$

Seja H o único subgrupo de Lie conexo de G associado a subálgebra de Lie $\mathfrak{h}$ e $\widehat{\mathrm{H}}$ o único subgrupo de Lie conexo de $\widehat{\mathrm{G}}$ associado subálgebra de Lie $\widehat{\mathfrak{h}}$. Note que um ponto $h \in \mathrm{H}$ pode escrito como $h = \prod_{l=1}^{n} exp(t_l Y_l)$, onde $Y_l \in \mathfrak{h}$, bem como $\widehat{h} = \prod_{l=1}^{n} exp(t_l \widehat{Y_l})$, onde $\widehat{Y_l} \in \widehat{\mathfrak{h}}$.

Consideremos o conjunto de atingibilidade $\mathcal{A}(e)$ do sistema Σ. Para estudarmos este conjunto podemos, a partir do fluxo dos elementos de $\Sigma_f = \{\mathcal{X}\} \cup \mathfrak{h}$ construir o conjunto $\mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$. Conforme é conhecido na literatura, o conjunto $\mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$ possui o mesmo fecho que o conjunto $\mathcal{A}(e)$, nos utilizaremos deste fato para demonstrar o próximo teorema. Para maiores detalhes acerca do argumento acima, ver por exemplo pg.598 Jouan,P.[3] e pg.78 Jurdjevic [9].

O conjunto $\mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$ é dado por

$$\mathcal{A}_{\Sigma_f}(e) = \{g \in \mathrm{G} : g = \phi_{t_n}(h_n(\phi_{t_{n-1}}(...(\phi_{t_1}(h_1))...))), \text{ para algum } n \in \mathbb{N}, t_i \geq 0 \text{ e } h_i \in \mathrm{H}\},$$

onde ϕ_t denota o fluxo associado ao campo $\mathcal{X}$ no tempo t. Além disso, como

$$\phi_{t_i}(h_i \phi_{t_j}(h_j)) = \phi_{t_i}(h_i)\phi_{t_i+t_j}(h_j), \quad \forall\, t \in \mathbb{R} \text{ e } \forall\, h \in \mathrm{H}.$$

Segue que, os pontos $g \in \mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$ podem ser escritos como

$$g = \phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1),$$

com $h_i \in \mathrm{H}$ e $0 < s_n < ... < s_i < ... < s_1$ onde cada $s_i = \sum_{j=i}^{n} t_j$.

Analogamente, a partir do fluxo dos campos $\widehat{\Sigma_f} = \{\widehat{\mathcal{X}}\} \cup \{\widehat{\mathfrak{h}}\}$ podemos construir o conjunto $\widehat{A}_{\widehat{\Sigma_f}}(1)$. Logo para analisar a controlabilidade dos sistemas Σ e $\widehat{\Sigma}$ a partir da identidade, basta-nos considerar os conjuntos $\mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$ e $\widehat{A}_{\widehat{\Sigma_f}}(1)$.

Teorema 3.4. $\theta \circ \pi(\widehat{\mathcal{A}}_{\widehat{\Sigma_f}}(1)) = \mathcal{A}_{\Sigma_f}(e)$.

Demonstração: Seja $\eta = \theta \circ \pi$. Notemos que η é sobrejetora e suave, pois θ e π o são. Dado $g \in A_{\Sigma}(e)$, existem controles $u_1, ..., u_n \in \mathcal{U}$ e tempos positivos $t_1, ..., t_n$ tais que g pode ser escrito como

$$g = \phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1),$$

onde $s_i = \sum_{j=i}^{n} t_j$ e $h_j \in \mathrm{H}$. Sejam $\widehat{h_j} \in \widehat{\mathrm{H}}$ os levantamentos dos pontos h_j. Note que estes pontos levantados $\widehat{h_j}$ estão bem definidos pela P0roposição 3.3. Tome

$$\widehat{g} = \exp(\mathrm{t_n}\widehat{\mathcal{X}})(\widehat{\mathrm{h_n}}(...(\exp(\mathrm{t_1}\widehat{\mathcal{X}})(\widehat{\mathrm{h_1}}(\exp(\mathrm{t_0}\widehat{\mathcal{X}})(1))))...)),$$

onde cada $t_j, \widehat{h_j} \in \widehat{\mathrm{H}}$ foram definido pelo ponto g e t_0 um numero real arbitrário. Reescrevendo o ponto

$$\widehat{g} = (\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), \sum_{i=0}^{n} t_i).$$

Aplicando η em $\widehat{g}$ temos que

$$\begin{aligned} \eta(\widehat{g}) &= \theta \circ \pi(\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), \sum_{i=0}^{n} t_i) \\ &= \theta((\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), \sum_{i=0}^{n} t_i)T) \end{aligned}$$

Como provado anteriormente temos que

$$(\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), \sum_{i=0}^{n} t_i)T = (\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), 0)T.$$

Além disso, como $\phi_t(e) = e$, para todo $t \in \mathbb{R}$,

$$(\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_{s_0}(e), 0)T = (\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1), 0)T.$$

Isso implica que

$$\theta((\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1), \sum_{i=0}^{n} t_i)T) = \theta((\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1), 0)T)$$

$$= \beta((\phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1), 0), e) = \phi_{s_n}(h_n)\phi_{s_{n-1}}(h_{n-1})...\phi_{s_1}(h_1)\phi_0(e) = g.$$

□

Segue do teorema acima que se $\widehat{\Sigma}$ for localmente controlável na identidade então Σ também o será.

3.2 Controlabilidade local

Nessa seção estudaremos a controlabilidade local de um sistema linear Σ em torno da identidade usando a teoria de cones de Lie. Como demonstrado no Teorema 3.4, se $\widehat{\Sigma}$ for localmente controlável na identidade em $\widehat{\mathrm{G}}$ então Σ será localmente controlável na identidade em G, nessa seção objetivamos enfraquecer esta hipótese. Para tal começaremos definindo o cone de Lie $\widehat{W}$. Mostraremos algumas de suas propriedades, e passaremos, então, a demonstração da controlabilidade local a partir da identidade sob a hipótese de que o sistema Σ satisfaz a condição de ad-rank. Esta seção baseia-se no artigo Cardetti e Mittenhuber [2].

Durante esta seção, utilizaremos as notações estabelecidas na seção anterior.

Definição 3.3. *Seja $\widehat{W}$ o menor cone de Lie em $\widehat{\mathfrak{g}}$ que contem $\mathbb{R}^{+}\widehat{\mathcal{X}} + \widehat{\mathfrak{h}}$.*

Demonstraremos agora uma propriedade do cone de Lie $\widehat{W}$, que será necessária para demonstrar resultados futuros. Para este demonstração utilizaremos a segunda forma geométrica do Teorema de Hahn-Banach, que diz Sejam $A \subset E$ e $B \subset E$ dois subconjunto convexo e não-vazio tais que $A \cap B =$. Suponha que A é fechado e B é compacto. Então existe um hiperplano fechado que separa A e B.

Proposição 3.5. *Se $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$, então $\widehat{\mathcal{X}} \in \operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}})$.*

Demonstração: Pela definição de $\widehat{W}$, segue que $\widehat{\mathcal{X}} \in \widehat{W}$ e, além disso, $\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}$ está contido no espaço vetorial $\widehat{W} - \widehat{W}$. Como $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$ então $\widehat{W} - \widehat{W} = \widehat{\mathfrak{g}}$ e portanto $\operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}}) \neq \emptyset$, pois $\operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}}) - \operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}}) = \operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}} - \widehat{\mathrm{W}}) = \operatorname{int}(\widehat{\mathfrak{g}})$

Suponha por absurdo que $\widehat{\mathcal{X}}$ pertença a fronteira $\widehat{W}$. Tome $\widehat{Y} \in \widehat{g}$ tal que $\widehat{Y} \notin \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} \cup \widehat{\mathfrak{h}}$. Pela definição de cone de Lie $\widehat{W}$ é fechado e convexo, além disso o conjunto formado pelo campo $\widehat{Y}$ é compacto e convexo, segue da segunda forma Geométrica do Teorema de Hahn-Banach, que existe um hiperplano H por $\widehat{\mathcal{X}}$ que suporta $\widehat{W}$ e que contem o vetor $(0, 1)$. Isto significa que $\widehat{W}$ está contido em um semi-espaço e que $\mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}$ também está no hiperplano. Logo o conjunto $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$ está contido em um semi-espaço de $\widehat{\mathfrak{g}}$, absurdo!. Portanto $\widehat{\mathcal{X}} \in \operatorname{int}(\widehat{\mathrm{W}})$. $\square$

Objetivamos mostrar que a hipótese da proposição acima é uma condição suficiente para a controlabilidade local do sistema Σ. Seja $\widehat{\mathrm{S}}$ o semigrupo gerado pela $\exp(\widehat{\mathrm{W}})$.

Será necessário utilizarmos na próxima demonstração que $\mathrm{int}\widehat{\mathrm{S}} = \mathrm{int}\widehat{\mathcal{A}}(1)$. De fato, notemos que o cone de Lie $\widehat{W}$ pode ser gerado por campos $\widehat{\mathcal{X}} + \mathbb{R}\widehat{Y}_j$. Tomando $\widehat{V}$, o cone de Lie gerado por $\widehat{\mathcal{X}} + \mathbb{R}\widehat{Y}_j$ temos que $\widehat{W} \subset \widehat{V}$. Por outro lado $\widehat{\mathcal{X}} + \mathbb{R}\widehat{Y}_j \in \widehat{W}$, como $\widehat{W}$ contém o conjunto gerador de $\widehat{V}$ temos que $\widehat{V} \subset \widehat{W}$. Segue portanto que $\overline{\widehat{\mathcal{A}}(1)} = \overline{\widehat{S}}$. Para concluir o desejado temos que utilizar que a seguinte proposição.

Proposição 3.6. *Se $\widehat{\mathfrak{g}}$ é uma álgebra de Lie de dimensão finita gerada por um conjunto $\widehat{W}$, então o conjunto de atingibilidade de $\widehat{W}$ a partir da identidade tem interior denso.*

A demonstração desta proposição pode ser encontrada [15].

Munida desta proposição e sob a hipótese de $\widehat{W}$ satisfazer a condição $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$, em particular, temos que $\widehat{W}$ gera $\widehat{\mathfrak{g}}$, segue portanto que $1 \in \overline{\mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}})}$ Utilizando o item 2 da Proposição 1.14 temos que $\mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}}) = \mathrm{int}(\overline{\widehat{\mathrm{S}}}) = \mathrm{int}\widehat{\mathcal{A}}(1)$.

Segue do Teorema 3.4, que se o sistema $\widehat{\Sigma}$ em $\widehat{\mathrm{G}}/T$ é localmente controlável na identidade, então Σ será controlável a partir da identidade de G, via o difeomorfismo θ. Antes de prosseguirmos precisamos de mais um resultado.

Proposição 3.7. *Seja* G *um grupo de Lie agindo em uma variedade M e* S *um semigrupo de* G, *com interior não vazio. Se $m \in M$ e $m \in \mathrm{int(S)m}$, então existe uma vizinhança aberta de m em M na qual* int(S) *age transitivamente.*

Demonstração: Seja $V = \mathrm{int(S)m} \cap \mathrm{int(S)^{-1}m}$. Como $m \in \mathrm{int(S)m}$ existe $\alpha \in \mathrm{int(S)}$ tal que $m = \alpha m$, logo $m = \alpha^{-1}m$ e portanto $V \neq \emptyset$. Para mostrar que S age transitivamente em V consideremos $m_1, m_2 \in V$. Sejam $a, b, c, d \in \mathrm{int(S)}$ tais que $m_1 = am = b^{-1}m$ e $m_2 = cm = d^{-1}m$. Portanto $m_2 = cm = cbm_1$. □

Teorema 3.8. *Se $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$, então Σ é localmente controlável em e.*

Demonstração: Pela Proposição 3.7, basta mostrar que $\pi(1) \in \mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}})\pi(1)$. Pela hipótese $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$, segue da proposição 3.5 que $\widehat{\mathcal{X}} \in \mathrm{int}(\widehat{\mathrm{W}})$.

Tome $\delta > 0$ tal que a aplicação $\exp : \widehat{\mathfrak{g}} \to \widehat{\mathrm{G}}$ seja um difeomorfismo de $B_\delta(0)$ sobre sua imagem.

Defina o conjunto $\widehat{V}$ por $\mathrm{int}(\widehat{\mathrm{W}}) \cap \mathrm{B}_\delta$. Perceba que $\widehat{V}$ é diferente do conjunto vazio, pois $\frac{\delta}{2}\widehat{\mathcal{X}} \in \widehat{V}$.

Considere a aplicação $\Phi : \widehat{\mathfrak{g}} \to \frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$ definida por $\Phi(\widehat{Y}) = \pi(\exp\widehat{\mathrm{Y}})$. Note que $\Phi(V)$ é um aberto pois π é uma aplicação aberta e exp sobre B_δ é um difeomorfismo e, além disso, $\Phi(\widehat{V}) = \exp(\widehat{\mathrm{V}})\mathrm{T} = \exp(\widehat{\mathrm{V}})\pi(1)$. Por outro lado $\pi(1) = \Phi(\frac{\delta}{2}\widehat{\mathcal{X}}) \in \Phi(\widehat{V})$.

Como $\widehat{V} \subset \widehat{W}$ temos que $\exp(\widehat{\mathrm{V}}) \subset \widehat{\mathrm{S}}$. Além disso $\exp(\widehat{\mathrm{V}})$ é um aberto, logo $\exp(\widehat{\mathrm{V}}) \subset \mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}})$. Como $\pi(1) \in \Phi(\widehat{V}) = \exp(\widehat{\mathrm{V}})\pi(1) \subset \mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}})\pi(1)$.

Logo pela Proposição 3.7 temos que $\mathrm{int}(\widehat{\mathrm{S}})$ age transitivamente em uma vizinhança de $\pi(1)$. Segue do Teorema 3.4 que Σ é localmente controlável em e. □

Para concluirmos nosso estudo mostraremos que a condição de ad-rank para o sistema Σ implica na condição $\widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}} = \widehat{\mathfrak{g}}$.

Definição 3.4. *O sistema Σ satisfaz a* condição de ad-rank *se* $\dim(\mathrm{G}) = \dim(\mathfrak{h}^{\mathcal{X}})$, *onde* $\mathfrak{h}^{\mathcal{X}}$ *é o subespaço de $\mathfrak{g}$ gerado pelos campos vetoriais da forma $ad^i_{\mathcal{X}}(Y_j)$ com $i \geq 0$ e $1 \leq j \leq k$.*

No caso em que $\mathrm{G} = \mathbb{R}^n$ a condição do ad-rank é conhecida como *condição de Kalman* que diz: Dado um sistema de controle Σ em $\mathbb{R}^n$ dado por

$$\frac{dx}{dt} = A(x) + Bu,$$

onde $A \in M_{n\times n}$, $B \in M_{n\times m}$ e $u \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. O sistema Σ satisfaz a condição de Kalman se a matriz M $n \times nm$ dada por $M = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{pmatrix}$ tiver posto completo, ou seja, $posto(M) = n$.

Teorema 3.9. *Se o sistema Σ satisfaz a condição de ad-rank, então $pr(\widehat{W}) = \mathfrak{g}$ e, portanto, o sistema linear Σ é localmente controlável na identidade.*

Demonstração: Como $\widehat{Y}_j$ e $\widehat{\mathcal{X}}$ estão contido em $\widehat{W}$, temos que, para $t > 0$ e $\epsilon \in \mathbb{R}$

$$\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}) \in \widehat{\mathrm{S}}.$$

Aplicando π temos que

$$\begin{aligned}
\pi(\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}})) &= \exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}})\mathrm{T} \\
&= \exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}})(\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}}))^{-1}\mathrm{T} \\
&= \pi(\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}})\exp(-\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})) \in \pi(\widehat{\mathrm{S}})
\end{aligned}$$

pois $\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})^{-1} \in \mathrm{T}$. Pela proposição 1.6, temos que

$$\pi(\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})\exp(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}})\exp(-\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})) = \pi(\exp(\mathrm{Ad}_{\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})}(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}))).$$

Utilizando a linearidade de Ad obtemos que

$$\pi(\exp(\mathrm{Ad}_{\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})}(\epsilon\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}))) = \pi(\exp(\epsilon\mathrm{Ad}_{\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})}(\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}))).$$

Concluímos que para todo ϵ real e t positivo

$$\pi(\exp(\epsilon\mathrm{Ad}_{\exp(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})}(\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}))) = \pi(\exp(\epsilon \mathrm{e}^{\mathrm{ad}(\mathrm{t}\widehat{\mathcal{X}})}(\widehat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{j}}))) \in \pi(\widehat{\mathrm{S}}).$$

Derivando com respeito à ϵ e calculando em $\epsilon = 0$ temos que

$$d\pi(1)(e^{tad(\widehat{\mathcal{X}})}\widehat{Y_j}) \in d\pi(1)(\widehat{W}) = pr(\widehat{W}).$$

Utilizando agora ϵ negativo temos que

$$d\pi(1)(-e^{tad(\widehat{\mathcal{X}})}\widehat{Y_j}) \in pr(\widehat{W}).$$

Logo para todo t positivo temos que

$$d\pi(1)(\pm e^{tad(\widehat{\mathcal{X}})}\widehat{Y_j}) \in pr(\widehat{W}).$$

Como visto na seção anterior $[\widehat{\mathcal{X}}, \widehat{Y_j}] = ([\mathcal{X}, Y_j], 0)$, segue que

$$\begin{aligned}
d\pi(1)(\pm e^{tad(\widehat{\mathcal{X}})}\widehat{Y_j}) &= d\pi(1)(\pm \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tad(\widehat{\mathcal{X}}))^n}{n!}(\widehat{Y_j})) = d\pi(1)(\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n ad^n_{\widehat{\mathcal{X}}}}{n!}(\widehat{Y_j})) \\
&= d\pi(1)(\pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n(ad^n_{\mathcal{X}}(Y_j), 0)}{n!})) = d\pi(1)(\pm(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n ad^n_{\mathcal{X}}(Y_j)}{n!}, 0)).
\end{aligned}$$

Obtendo assim que $\pm e^{tad(\mathcal{X})}Y_j \in pr(\widehat{W})$ para todo t positivo. Derivando l vezes com respeito a t e calculando em $t = 0$ temos que para todo $l \in \mathbb{N}$ e $j \in \{1, ..., k\})$ os campos

$$\pm ad(\mathcal{X})^l(Y_j) \in \overline{pr(\widehat{W})}.$$

Portanto, temos que $\mathfrak{h}^{\mathcal{X}} \subseteq \overline{pr(\widehat{W})}$.

Utilizando a condição do ad-rank temos que $\dim(\mathfrak{h}^{\mathcal{X}}) = \dim(\mathfrak{g})$. Este fato implica que $pr(\widehat{W})$ é denso em $T_{\pi(1)}\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{T}$ pois $\dim(\mathfrak{g}) = \dim(\mathfrak{h}^{\mathcal{X}}) \leq \dim(\mathrm{pr}(\widehat{\mathrm{W}})) \leq \dim(\mathrm{T}_{\mathrm{x}_0}\frac{\widehat{\mathrm{G}}}{\mathrm{T}}) = \dim(\mathfrak{g})$. Como $\widehat{W}$ é convexo temos que $pr(\widehat{W})$ é convexo e, portanto, temos que $pr(\widehat{W}) = T_{x_0}\frac{\widehat{G}}{T}$.

Além disso, utilizando que $\dim(\widehat{\mathfrak{g}}) = \dim(\mathfrak{g}) + 1$ e $\dim(\mathrm{pr}(\widehat{\mathrm{W}})) = \dim(\mathfrak{g})$ temos que $\widehat{g} = \widehat{W} + \mathbb{R}\widehat{\mathcal{X}}$. Para a segunda afirmação basta aplicar o teorema anterior. $\square$

Capítulo 4

Aplicações

Este capítulo é dedicado a exemplificação da teoria desenvolvida no decorrer desta dissertação. Ele é composto por apenas uma seção que trará uma caracterização dos campos lineares sobre o grupo de Heisenberg e exemplos de sistemas lineares.

4.1 Sistemas Lineares no Grupo de Heisenberg

Esta seção trará alguns exemplos de controlabilidade local a partir da identidade para sistemas lineares sobre o grupo de Heisenberg. Para tal objetivo começaremos definindo o grupo de Heisenberg, caracterizando os campos invariantes à esquerda e o seu normalizador. Feito isto, relacionaremos os campos lineares do normalizador com as derivações da álgebra de Lie associada ao grupo e, por fim, calcularemos alguns exemplos numéricos, caracterizando a controlabilidade local.

Seja G o subconjunto do conjunto das matrizes reais 3 por 3 cujos elementos são da forma

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

munido da multiplicação usual de matrizes. Este conjunto é um grupo de Lie chamado *grupo de Heisenberg.* Podemos identificar a matriz acima com a terna ordenada (x, y, z), induzindo em $\mathbb{R}^3$ o produto

$$(x, y, z)(x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1 + xy_1).$$

Se $g_1 = (x_1, y_1, z_1) \in \mathrm{G}$, a translação à esquerda L_{g_1} é dada por

$$L_{g_1}(x, y, z) = (x_1 + x, y_1 + y, z_1 + z + x_1 y).$$

Podemos representar a diferencial da aplicação translação a esquerda, dL_{g_1}, na base canônica como:

$$J(L_{g_1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando os fatos acima, calcularemos o $\mathcal{N}orm(\mathfrak{g})$. Primeiramente, calcularemos explicitamente os campos invariante à esquerda sobre G. Seja Y pertencente à $\mathfrak{X}(\mathrm{G})$ arbitrário. Podemos escrever o campo Y no ponto $g = (x, y, z) \in \mathrm{G}$ como

$$Y(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g)\frac{\partial}{\partial y} + f_3(g)\frac{\partial}{\partial z},$$

onde f_i são aplicações de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$. Lembramos que Y é invariante à esquerda se, e somente se, o campo Y satisfaz a igualdade

$$dL_{g_1} \circ Y(g) = Y(L_{g_1}(g)) \quad \forall\ g, g_1 \in \mathrm{G}.$$

Desenvolvendo o primeiro termo da igualdade temos que

$$\begin{aligned} dL_{g_1} \circ Y(g) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1(g) \\ f_2(g) \\ f_3(g) \end{pmatrix} \\ &= f_1(x, y, z)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(x, y, z)\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ (x_1 f_2(x, y, z) + f_3(x, y, z))\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Y \circ L_{g_1}(g) &= Y(g_1 g) \\ &= f_1(x_1 + x, y_1 + y, z_1 + z + x_1 y)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(x_1 + x, y_1 + y, z_1 + z + x_1 y)\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ f_3(x_1 + x, y_1 + y, z_1 + z + x_1 y)\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Das igualdades (1.1) e (1.2) segue que o campo Y é invariante à esquerda se para todo $g, g_1 \in$ G tivermos que

$$\begin{aligned} f_1(x_1+x, y_1+y, z_1+z+x_1y)\frac{\partial}{\partial x} &= f_1(x,y,z)\frac{\partial}{\partial x} \\ f_2(x_1+x, y_1+y, z_1+z+x_1y)\frac{\partial}{\partial y} &= f_2(x,y,z)\frac{\partial}{\partial y} \\ f_3(x_1+x, y_1+y, z_1+z+x_1y)\frac{\partial}{\partial z} &= (x_1f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z))\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pela arbitrariedade de g e g_1, segue que

$$f_1(x,y,z) = f_1(0,0,0) = a$$

$$f_2(x,y,z) = f_2(0,0,0) = b$$

$$f_3(x,y,z) = xb + c.$$

Portanto o campo Y é invariante à esquerda se, e somente, Y puder ser escrito como

$$\begin{aligned} Y &= a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + (xb+c)\frac{\partial}{\partial z} \\ &= a\frac{\partial}{\partial x} + b(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}) + c\frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.4}$$

Pela equação (1.4) concluímos que a álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ associada ao grupo de Lie G é gerada pelos campos

$$X = \frac{\partial}{\partial x} \tag{1.5}$$

$$Y = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.6}$$

$$Z = \frac{\partial}{\partial z} \tag{1.7}$$

Pela Proposição 1.3, dados $X, Y \in \mathfrak{g}$ e $f, g \in C^\infty(\mathrm{G})$ temos que

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X.$$

Utilizando a igualdade acima e as igualdades (1.5), (1.6) e (1.7) calcularemos os colchetes entre os campos X, Y, Z. Desta forma obtemos que

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}] \\
&= [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + [\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}] \\
&= 0 + x[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}] + \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z} - x\frac{\partial 1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= Z. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

De maneira análoga, obtemos que

$$[X,Z] = 0,$$

$$[Y,Z] = 0.$$

Pela dimensão da álgebra $\mathfrak{g}$ concluímos que $\beta = \{X, Y, Z\}$ é uma base de $\mathfrak{g}$. Lembramos que uma derivação de $\mathfrak{g}$ é uma aplicação linear $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ que para todos $Y_1, Y_2 \in \mathfrak{g}$ satisfaz:

$$D[Y_1, Y_2] = [DY_1, Y_2] + [Y_1, DY_2].$$

Seja D a derivação de $\mathfrak{g}$ tal que

$$DX = aX + bY + cZ \qquad (1.9)$$

$$DY = dX + eY + fZ \qquad (1.10)$$

$$DZ = gX + hY + iZ. \qquad (1.11)$$

Como D é uma derivação segue que

$$\begin{aligned}
D[X,Y] &= [DX, Y] + [X, DY] \\
&= [aX + bY + cZ, Y] + [X, dX + eY + fZ] \\
&= aZ + eZ = (a+e)Z \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

Por outro lado, da igualdade (1.8) temos que $[X, Y] = Z$. Logo

$$D[X,Y] = DZ = gX + hY + iZ. \qquad (1.13)$$

Das equações (1.12) e (1.13) segue que $g = h = 0$ e $i = a + e$. Portanto D é uma derivação de $\mathfrak{g}$ se, e somente se, a matriz de D com relação a base β é da forma

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix}, \qquad (1.14)$$

onde a, b, c, d, e, f são constante reais arbitrárias.

Como o grupo de Heisenberg é conexo e simplesmente conexo, pelo Teorema 1.22, existe um isomorfismo entre $\mathfrak{Der}(\mathfrak{g})$ e $\mathcal{L}(\mathfrak{g})$, que a cada derivação D associa um único campo linear $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ tal que $D = -ad_{\mathcal{X}}$.

Sejam $\mathcal{X} \in \mathcal{L}(\mathfrak{g})$ dado por

$$\mathcal{X}(g) = f_1(g)\frac{\partial}{\partial x} + f_2(g)\frac{\partial}{\partial y} + f_3(g)\frac{\partial}{\partial z}$$

e β a base da álgebra de Lie escolhida anteriormente. Para associarmos à derivação D ao campo linear $\mathcal{X}$ tal que $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$ aplicaremos $-ad_{\mathcal{X}}$ na base β. Desta forma obtemos que:

$$\begin{aligned} -ad_{\mathcal{X}}X = [-\mathcal{X}, X] &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}] \\ &= -([f_1\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}] + [f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}] + [f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}]) \\ &= -(-\frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

De forma análoga temos que

$$\begin{aligned} -ad_{\mathcal{X}}Y = [-\mathcal{X}, Y] &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}] \\ &= -([f_1\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + [f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}] + [f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}] \\ &+ [f_1\frac{\partial}{\partial x}, x\frac{\partial}{\partial z}] + [f_2\frac{\partial}{\partial y}, x\frac{\partial}{\partial z}] + [f_3\frac{\partial}{\partial z}, x\frac{\partial}{\partial z}]) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial y}\frac{\partial}{\partial z} \\ &- f_1\frac{\partial}{\partial z} + x\frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.16}$$

$$\begin{aligned} -ad_{\mathcal{X}}Z = [-\mathcal{X}, Z] &= -[f_1\frac{\partial}{\partial x} + f_2\frac{\partial}{\partial y} + f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}] \\ &= -([f_1\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial z}] + [f_2\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}] + [f_3\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial z}]) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial z}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Seja D a derivação dada por

$$DX = aX + bY + cZ = a\frac{\partial}{\partial x} + b(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}) + c\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.18}$$

$$DY = dX + eY + fZ = d\frac{\partial}{\partial x} + e(\frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}) + f\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.19}$$

$$DZ = gX + hY + iZ = (a+e)\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.20}$$

Comparando a equação (1.15) com (1.18), a equação (1.16) com (1.19) e a equação (1.17) com (1.20) podemos calcular explicitamente o campo $\mathcal{X}$. Reescrevendo as igualdades segue que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_1}{\partial x} &= a && (1.21)\\
\frac{\partial f_1}{\partial y} + x\frac{\partial f_1}{\partial z} &= d && (1.22)\\
\frac{\partial f_1}{\partial z} &= 0 && (1.23)\\
\frac{\partial f_2}{\partial x} &= b && (1.24)\\
\frac{\partial f_2}{\partial y} + x\frac{\partial f_2}{\partial z} &= e && (1.25)\\
\frac{\partial f_2}{\partial z} &= 0 && (1.26)\\
\frac{\partial f_3}{\partial x} &= c + bx && (1.27)\\
\frac{\partial f_3}{\partial y} - f_1 + x\frac{\partial f_3}{\partial z} &= f + ex && (1.28)\\
\frac{\partial f_3}{\partial z} &= a + e && (1.29)\\
& && (1.30)
\end{aligned}$$

Pela equação (1.23) temos que $\frac{\partial f_1}{\partial z} = 0$, bem como, pelas equações (1.21), (1.22) temos que $\frac{\partial f_1}{\partial x} = a$ e $\frac{\partial f_1}{\partial y} = d$. Concluímos desta equações que

$$f_1(x, y, z) = ax + dy + k_1, \tag{1.31}$$

onde k_1 é uma constante real arbitrária. De maneira análoga, pela equações (1.26), (1.24) e (1.25), obtemos que

$$f_2(x, y, z) = bx + ey + k_2, \tag{1.32}$$

onde k_2 é uma constante arbitrária. Segue da equação (1.29) que $f_3(x, y, z) = (a+e)z+g(x, y)$, onde g é uma função diferenciável das variáveis x e y reais. Utilizando a equação (1.27) temos que $\frac{\partial g}{\partial x} = c + bx$, logo

$$g(x, y) = d\frac{x^2}{2} + cx + h(y),$$

onde h é uma função diferenciável da variável real y. Substituindo $f_3(x,y,z) = (a+e)z + d\frac{x^2}{2} + cx + h(y)$ temos que $\frac{\partial f_3}{\partial y}(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}((a+e)z + d\frac{x^2}{2} + cx + h(y))(x,y,z) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y,z)$. Utilizando a igualdade acima na equação (1.28) segue que

$$\frac{\partial h}{\partial y} - ax - dy - k_1 + (a+e)x = f + ex$$

o que implica que

$$\frac{\partial h}{\partial y} = dy + f + k_2.$$

Da igualdade anterior obtemos que

$$f_3(x,y,z) = b\frac{x^2}{2} + d\frac{y^2}{2} + cx + (f+k_2)y + (a+e)z + k_3. \tag{1.33}$$

Concluimos a partir das equações (1.31), (1.32) e (1.33) e do Teorema 1.22 a seguinte proposição.

Proposição 4.1. *O campo vetorial $\mathcal{X}$ é linear se, e somente se, $\mathcal{X}$ é escrito como*

$$\mathcal{X}(x,y,z) = (ax+dy)\frac{\partial}{\partial x} + (bx+ey)\frac{\partial}{\partial y} + (b\frac{x^2}{2} + d\frac{y^2}{2} + cx + fy + (a+e)z)\frac{\partial}{\partial z},$$

onde a,b,c,d,e,f são constantes reais. Além disso, temos que o campo $\mathcal{X}$ é associado à derivação D tal que

$$[D]_\beta = \begin{pmatrix} a & d & 0 \\ b & e & 0 \\ c & f & a+e \end{pmatrix}. \tag{1.34}$$

Pela Proposição 1.19, temos que um campo afim $\mathcal{F}$ é da forma $\mathcal{F} = \mathcal{X} + Z$, onde $\mathcal{X}$ é linear e Z é invariante à direita. Concluímos da proposição acima que um campo $\mathcal{F}$ é afim se, e somente se, $\mathcal{F}$ é da forma

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x,y,z) &= (ax+dy)\frac{\partial}{\partial x} + (bx+ey)\frac{\partial}{\partial y} + (b\frac{x^2}{2} + d\frac{y^2}{2} + cx + fy + (a+e)z)\frac{\partial}{\partial z} \\ &+ a_1\frac{\partial}{\partial x} + b_1\frac{\partial}{\partial y} + (ya_1 + c_1)\frac{\partial}{\partial z} \\ &= (ax+dy+a_1)\frac{\partial}{\partial x} + (bx+ey+b_1)\frac{\partial}{\partial y} \\ &+ (b\frac{x^2}{2} + d\frac{y^2}{2} + cx + (f+a_1)y + (a+e)z + c_1)\frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned} \tag{1.35}$$

onde $a, a_1, b, b_1, c, c_1, d, e, f$ são constantes reais.

Exemplo 4.1. *Sejam* $\mathcal{X} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(x^2+y^2)}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ *um campo linear,* $X = \frac{\partial}{\partial x}$ *e* $Z = \frac{\partial}{\partial z}$ *campos invariantes à esquerda e considere o sistema*

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + uX + vZ.$$

Notemos que o sistema Σ, *pode ser escrito da seguinte forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u & , \\ \dot{y} = x & , \\ \dot{z} = x^2 + y^2 + v & , \end{cases}$$

Utilizando a Proposição 4.1, temos que a derivação D *tal que* $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$ *é*

$$[D]_\beta \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.36}$$

Notemos que $DX = Y$, $DY = X$ *e* $DZ = 0$. *Segue que,* $\mathfrak{h}^{\mathcal{X}}$, *que é o espaço vetorial gerado pelo campos* X, DX, D^2X, Z *e* DZ, *tem dimensão* 3 *e portanto* Σ *satisfaz a condição do ad-rank. Segue diretamente do Teorema 3.9 que o sistema* Σ *é localmente controlável na identidade.*

Exemplo 4.2. *Sejam* $\mathcal{X} = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{(x^2+y^2)}{2}\frac{\partial}{\partial z}$ *um campo linear,* $X = \frac{\partial}{\partial x}$ *um campo invariante à esquerda e considere o sistema*

$$\frac{dg}{dt} = \mathcal{X}(g) + uX.$$

Pela Proposição 4.1, temos que a derivação D *tal que* $D = -\mathrm{ad}_{\mathcal{X}}$ *é*

$$[D]_\beta \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.37}$$

Como $DX = Y$ *e* $DY = X$ *e* $[X, Y] = Z$ *temos que o sistema* Σ *satisfaz a condição do posto, para maiores detalhes a respeito da condição do posto ver pg. 37. Note também que* Σ *não satisfaz a condição do ad-rank, pois* $\mathfrak{h}^{\mathcal{X}}$ *é o espaço vetorial gerado pelo campos* X *e* Y, *o qual não tem dimensão* 3*. Mas, somente este fato não implica que o sistema* Σ *não seja localmente controlável a partir da identidade de* G*.*

Para concluirmos a não controlabilidade do sistema Σ*, notemos que este, pode ser escrito da seguinte forma*

$$\begin{cases} \dot{x} = y + u & , \\ \dot{y} = x & , \\ \dot{z} = x^2 + y^2 & . \end{cases}$$

Segue das equações que podemos tirar o sistema de seu estado inicial apenas pelo vetor de controle, pois a identidade $(0,0,0)$ *é um ponto de equilíbrio de* $\mathcal{X}$ *e portanto uma vez fora da origem a coordenada a equação* $x^2 + y^2$ *tem apenas valores positivos, com isso não é possível retornar a origem.*

Referências Bibliográficas

[1] Ayala, V., Tirao, J., *Linear control systems on Lie groups and controllability*, Differential geometry and control: Summer Resesrch Institute on Differential Geometry and Control, Vol. 64, June 29-July 19, (1997).

[2] Cardetti, F., Mittenhuber, D., Local *Controllability for linear control systems on Lie groups*, Journal of Dynamical and Control Systems Vol. 11, Number 3 (2005), 353-373.

[3] Jouan, P., *Controllability of linear systems on Lie groups*, Journal of Dynamical and control Systems Volume 17, Number 4 (2011), 591-616.

[4] Sussmann, H. J., Jurdejevic, V. *Control systems on Lie groups*, Journal of Differential Equations 12, (1972), 313-329.

[5] Sussmann, H. J., *Orbits of families of vector fields and integrability of distributions*, Trans. Amer. Math. Soc. **180** (1973), 171-188.

[6] Sachkov, YU. L., *Controllability of invariant systems on Lie groups and homogeneous spaces*, Program Systems Institure, Russian Academy of Science, 1999.

[7] Ayala, V., San Martin, L., *Controllability properties of a class of control systems on Lie groups*, Lecture Notes in Control and Information Sciences, 2000, Volume 258/2000

[8] Warner, F. **Foundations of differentiable manifolds and Lie groups**, 1971.

[9] Jurdjevic, V., **Geometric Control Theory**, Cambrigde University Press, 1997.

[10] Hausner, M.; Schawartz, J.T. **Lie groups Lie algebras**, New York: Gordon and Breach, 1968.

[11] Bourbaki, N. **Groupes et algèbres de Lie**, Chapitres 2 et 3. CCLS, France, 1972.

[12] Conlon,L. **Differentiable manifolds: a first course**, 1993.

[13] Varadarajan, V. S. Lie Groups, **Lie algebras and their representaions**, Ed.Prince-Hall, 1974.

[14] San Martin, Luiz A. B., **Álgebra de Lie**, Ed.unicamp, 1999.

[15] Hilgert, J., Hofmann, K.H., Lawson, J.D., **Lie groups, convex cones and semi-groups**, The Claremdon Press Oxford University Press, New York, 1989.

[16] Carmo, M.P., **Geometria riemanniana**, IMPA , Rio de Janeiro, 1979.

Índice Remissivo