

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

HÉLIO VINICIUS M. TOZATTI

Decomposições de Morse para ações de semigrupos.

Maringá - PR

2011

HÉLIO VINICIUS M. TOZATTI

Decomposições de Morse para ações de semigrupos.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Dr. Carlos José Braga Barros.
Co-orientador: Prof. Dr. Josiney Alves de Souza

Maringá - PR

2011

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao orientador Prof. Dr. Carlos José Braga Barros e ao Co-orientador Prof. Dr. Josiney Alves de Souza pela paciência e dedicação ao meu desenvolvimento desde a minha graduação. Agradeço aos amigos e parentes que acreditaram em minha capacidade, e ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Hélio Vinicius M. Tozatti

RESUMO

Apresentamos a teoria de decomposições de Morse para ações de semigrupos e recorrência por cadeias desenvolvidas em [1], [2] e [3]. A finalidade deste trabalho, teve como motivação a construção de conceitos que permitam usar o potencial da teoria de Morse no contexto de semigrupos e a generalização da teoria de decomposição de Morse e recorrência por cadeias para fluxos e semifluxos apresentadas em [4]. Apresentamos a teoria de sistemas de controle e aplicamos a teoria desenvolvida aqui em sistemas de controle. Desenvolvemos a teoria de decomposição de Morse dinâmica apresentada em [1] e mostramos que toda decomposição de Morse é uma decomposição de Morse dinâmica e nem sempre uma decomposição de Morse dinâmica é uma decomposição de Morse.

INTRODUÇÃO

Desenvolvemos a teoria de decomposições de Morse para ações de semigrupos agindo em um espaço topológico compacto. Dada uma família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo, definimos \mathcal{F} -decomposição de Morse, como uma coleção finita e ordenada de conjuntos que são intersecções de conjuntos \mathcal{F} -atratores e repulsores complementares de uma sequência crescente de \mathcal{F} -atratores. Uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica desenvolvida em Barros, Carlos J. Braga; Souza, Josiney A. e Reis, Ronan A. [1], é definida como uma coleção finita de conjuntos, onde estes conjuntos contém todos os conjuntos ω -limites e ω^* -limites de cada ponto do espaço topológico e que satisfaz a condição de não-ciclo. Neste trabalho, estudamos a teoria de recorrência por cadeias sobre ações de semigrupos em espaços topológicos compactos desenvolvida em Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. [2], mostramos resultados relacionando com a teoria de decomposições de Morse para ações de semigrupos. Mostramos que a teoria de decomposição de Morse para fluxos e recorrência por cadeias apresentadas em Conley, Charles C. [4] são casos particulares das teorias de decomposições de Morse para ações de semigrupos sobre espaços topológicos compactos. Na teoria de decomposição de Morse para fluxos apresentada em [4] mostra que as definições de \mathcal{F} -decomposição de Morse e \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica são equivalentes, mas na Seção 4.2 mostra um exemplo em que uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica não é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse.

No Capítulo 1, desenvolvemos a teoria de sistemas de controle apresentadas em Colonijs, Fritz e Kliemann, Wolfgang [6] e San Martín, Luiz A. B. [9], onde um sistema de controle é determinada por uma variedade diferenciável, um conjunto de

controle, um conjunto de funções admissíveis e uma família de equações diferenciais. Mostramos que um sistema de controle pode ser definido por uma família de campos de vetores, definimos grupo do sistema de controle, semigrupo do sistema de controle e órbita do grupo e do semigrupo do sistema de controle. Definimos condições para que um sistema de controle seja acessível e controlável a partir de um ponto do espaço topológico. Estudamos o conceito de distribuições características de uma variedade diferenciável e mostramos que para cada ponto existe uma única variedade integral maximal que contém este ponto.

No Capítulo 2, desenvolvemos a teoria de conjuntos limites apresentadas em [1], [2] e Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. [3]. Definimos o conceito de ação de um semigrupo em um espaço topológico. Definimos os conjuntos ω -limites e ω^* -limites referentes a uma família de subconjuntos do semigrupo, mostramos que o conceito de conjuntos limites para fluxos é um caso particular de conjuntos limites para ações de semigrupos. Definimos hipóteses sobre a família de subconjuntos do semigrupos, para que os conjuntos ω -limite e ω^* -limite sejam invariantes. Por fim, assumindo que o espaço topológico seja compacto e que a família de subconjuntos do semigrupo seja uma base de filtro, definimos conjuntos atratores, conjuntos repulsores, repulsores complementares de conjuntos atratores e estudamos propriedades destes conjuntos sobre os conjuntos ω -limite e ω^* -limite.

No Capítulo 3, estudamos a teoria de recorrência por cadeias desenvolvida em [2]. Mostramos que esta teoria generaliza a teoria de recorrência por cadeias desenvolvida por Conley em [4]. Definimos os conjuntos Ω -limites por cadeias, estudamos propriedades destes conjuntos e mostramos que o conjunto dos pontos recorrentes por cadeias é a intersecção de todos o atratores unidos com seu respectivo repulsor complementar. Em seguida desenvolvemos a teoria de decomposição de Morse para ações de semigrupos, onde dada uma sequência de conjuntos atratores, uma decomposição de Morse é determinada por uma coleção finita de conjuntos, tais que fixado um índice e um conjunto atrator da sequência, a intersecção deste atrator com o repulsor complementar do atra-

tor de um índice menor, coincide com um conjunto da coleção finita. Relacionamos a teoria de decomposição de Morse com a teoria de recorrência por cadeias. Mostramos que dado uma decomposição de Morse, os pontos recorrentes por cadeias está contido na união dos conjuntos de Morse, definimos condições para que uma decomposição de Morse fosse mais fina e mostramos que o conjunto dos pontos transitivos por cadeias é a união finita de conjuntos maximais transitivos por \mathcal{F} -cadeias se e somente se existir uma decomposição de Morse mais fina.

No Capítulo 4, desenvolvemos a teoria de decomposição de Morse dinâmica desenvolvida em [1]. A teoria é desenvolvida sobre a ação de um semigrupo de homeomorfismos sobre um espaço topológico compacto Hausdorff. Dada uma família de subconjuntos do semigrupo, uma decomposição de Morse dinâmica é determinada por uma coleção finita de conjuntos não vazios, invariantes isolados, dois a dois disjuntos, compactos que contém todos os conjuntos ω -limites e ω^* -limites de cada ponto do espaço e que satisfaz a propriedade de não ciclo. Mostramos que esta teoria generaliza a teoria de decomposição de Morse apresentada por Conley em [4]. Na teoria de decomposição de Morse apresentada em [4], mostra que as definições de decomposição de Morse e decomposição de Morse dinâmica são equivalentes. Mostramos que toda decomposição de Morse é decomposição de Morse dinâmica e em seguida mostramos que uma decomposição de Morse dinâmica não é uma decomposição de Morse. Por fim, aplicamos a teoria de decomposição de Morse dinâmica em sistemas de controle.

SUMÁRIO

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Sistemas de controle | 2 |
| 1.1 | Sistemas de controle | 2 |
| 1.2 | Acessibilidade e controlabilidade | 14 |
| 1.2.1 | Distribuições singulares | 16 |
| 1.2.2 | Unicidade | 21 |
| 2 | Conjuntos limites. | 25 |
| 2.1 | Conjuntos limites | 25 |
| 2.2 | Atratores e repulsores | 36 |
| 3 | Recorrência por cadeias e decomposição de Morse. | 43 |
| 3.1 | Recorrência por cadeias | 43 |
| 3.2 | Decomposições de Morse | 54 |
| 4 | Decomposição de Morse dinâmica. | 61 |
| 4.1 | Decomposição de Morse dinâmica. | 61 |
| 4.2 | Compactificação de Alexandroff. | 69 |
| 4.3 | Decomposições de Morse para sistemas de controle | 77 |

Sistemas de controle

Neste capítulo estudamos a teoria de sistemas de controle. Apresentamos, resultados sobre soluções de sistema de controle. A seguir, estudamos acessibilidade e controlabilidade de um sistema de controle, ou seja, apresentamos as condições para que um sistema de controle seja acessível, controlável e aproximadamente controlável a partir de um ponto da variedade. Estudamos também distribuições características em uma variedade diferenciável. Estes conceitos foram abordados por Fritz Colonius, Wolfgang Kliemann [6] e Luiz A. B. San Martin [9]. Aplicamos estes resultados na teoria de recorrência por cadeias e decomposições de Morse para ações de semigrupos nos sistemas de controle, desenvolvidas em Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. [2].

1.1 Sistemas de controle

Nesta seção, estudamos a teoria de sistemas de controle sobre uma variedade diferenciável e resultados referentes as soluções dos sistemas de controle. Consequentemente, definimos para os sistemas de controle seus respectivos grupo e semigrupo. Também serão definidas órbitas do grupo e do semigrupo através de um ponto. Estas órbitas são classes de equivalência sobre uma determinada relação de equivalência.

Definição 1.1. Um *sistema de controle* é constituído por:

1. Um **espaço de fase** M , ou seja, uma variedade diferenciável de dimensão d .
2. Um **conjunto de controle** $U \subset \mathbb{R}^n$ e um conjunto de funções admissíveis

$$\mathcal{U} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U\},$$

onde $u \in \mathcal{U}$ é localmente integrável.

3. Uma família de equações diferenciais,

$$x' = X(x, u(t)),$$

onde $X : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ é uma função C^∞ .

O conjunto de controle U da definição acima é um subconjunto arbitrário do \mathbb{R}^n . Denominaremos de **controle** a cada elemento de \mathcal{U} . A seguir, definiremos concatenações entre duas funções de controle.

Definição 1.2. Sejam $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$.

1. Uma **s -concatenação** de u_1, u_2 é a função $u : \mathbb{R} \rightarrow U$ dada por

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t), & \text{se } t \leq s \\ u_2(t - s), & \text{se } t > s. \end{cases}$$

2. Dados $u \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a função de controle $u(\cdot + s)(t) = u(t + s)$ será denominada **s -translação** de u . Para todos $u \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, $u(\cdot + s) \in \mathcal{U}$.
3. Dados $u, v \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$, a s -concatenação de u e v pertence a \mathcal{U}

O conjunto \mathcal{U} pode eventualmente ser o conjunto das funções constantes por partes. Denotaremos este conjunto por $\mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; u \text{ é constante por partes}\}$.

Assumiremos que

$$x' = X(x, u(t)), \quad x(0) = x_0$$

possui única solução $\varphi(t, x_0, u)$ definida para todo tempo $t \in \mathbb{R}$.

Para cada controle $u \in U$ assumiremos que a aplicação $X_u : M \rightarrow TM$ dada por $X_u(x) = X(x, u)$ define um campo de vetores completo de classe C^∞ em M . Fixando $t_1 \in \mathbb{R}$, consideremos $u_1 = u(t_1) \in U$ com $u \in \mathcal{U}$. Assim a equação diferencial autônoma,

$$x' = X_{u_1}(x)$$

tem única solução $\varphi_x^{u_1}(t)$ com $\varphi_x^{u_1}(0) = x$, para $x \in M$. Portanto, o fluxo $\varphi^{u_1}(t, x) = \varphi_x^{u_1}(t)$ é definido em $\mathbb{R} \times M$. Frequentemente, denotaremos $\varphi_x^{u_1}(t)$ por $e^{tX_{u_1}}(x)$.

Segue da continuidade em relação a condição inicial que a aplicação

$$\varphi(t, \cdot, u) : M \rightarrow M$$

é contínua para $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}$ fixados.

Dessa forma um sistema de controle pode ser definido pelo conjunto de campos de vetores $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$.

Proposição 1.3. *Sejam $u \in \mathcal{U}$ e $t, s \in \mathbb{R}$. As soluções das equações diferenciais com respectivas funções de controle u e $u(\cdot + s)$, satisfazem a igualdade*

$$\varphi(t + s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u(\cdot + s)).$$

Demonstração: Sejam $x_0 \in M$, $u \in \mathcal{U}$ e $s \in \mathbb{R}$ quaisquer e $y = \varphi(s, x_0, u)$. Definamos, $\phi(t) = \varphi(t + s, x_0, u)$ e $\psi(t) = \varphi(t, y, u(\cdot + s))$ para $t \in \mathbb{R}$. Consideremos o problema de valor inicial,

$$x'(t) = X(x(t), u(t + s)), \quad x(0) = y.$$

Vamos mostrar que ϕ e ψ são soluções deste problema. Com efeito, $\phi(0) = \psi(0) = y$.

Além disto,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\psi(t) &= \frac{d}{dt}\varphi(t, y, u(\cdot + s)) \\ &= X(\varphi(t, y, u(\cdot + s)), u(\cdot + s)(t)) = X(\psi(t), u(t + s)) \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(t) &= \frac{d}{d(t+s)} \frac{d(t+s)}{dt} \phi(t) \\ &= \frac{d}{d(t+s)} \varphi(t+s, x_0, u) = X(\varphi(t+s, x_0, u), u(t+s)) = X(\phi(t), u(t+s)). \end{aligned}$$

Assim, pela unicidade da solução para o problema de valor inicial temos que $\phi(t) = \varphi(t)$, ou seja, $\varphi(t+s, x_0, u) = \varphi(t, \varphi(s, x_0, u), u(\cdot+s))$. Como $x_0 \in M$ é arbitrário temos o resultado.

□

Com as mesmas notações da proposição anterior, temos o seguinte resultado.

Corolário 1.4. *Para cada $t \in \mathbb{R}$ e $u \in \mathcal{U}$, a aplicação $\varphi(t, \cdot, u) : M \rightarrow M$ é um homeomorfismo.*

Demonstração: Como a aplicação $\varphi(t, \cdot, u)$ é solução de um sistema de controle, temos de imediato que ela é contínua. Sejam $x, y \in M$ tais que $\varphi(t, x, u) = y$. Aplicando a proposição anterior temos que,

$$x = \varphi(0, x, u) = \varphi(t-t, x, u) = \varphi(-t, \varphi(t, x, u), u(\cdot+t)) = \varphi(-t, y, u(\cdot+t)).$$

Assim a função $\varphi(t, \cdot, u)$ é invertível e sua inversa é a função $\varphi(-t, \cdot, u(\cdot+t))$. Como $-t \in \mathbb{R}$ e $u(\cdot+t) \in \mathcal{U}$ temos que $\varphi(-t, \cdot, u(\cdot+t))$ é solução do sistema de controle, ou seja, é uma aplicação contínua. Portanto $\varphi(t, \cdot, u)$ é um homeomorfismo.

□

Agora apresentaremos alguns casos especiais de sistemas de controle.

Exemplo 1.5. *Um sistema de controle é dito **linear** quando é definido por uma família de equações lineares*

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

onde $x(t) \in \mathbb{R}^m$ e $u(t) \in \mathbb{R}^n$, com A matriz real $m \times m$ e B matriz real $m \times n$.

Exemplo 1.6. *Sejam, X_0, X_1, \dots, X_m campos de vetores completos de classe C^∞ em uma variedade diferenciável M . Considere $U = \mathbb{R}^n$. O sistema de controle não linear,*

$$x' = X_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i(t)X_i(x)$$

*é dito **sistema de controle afim**.*

A partir de agora consideraremos um sistema de controle e seu correspondente conjunto de campos de vetores completos $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$. Observemos que a cada campo $X_u \in \mathcal{V}$ e $t \in \mathbb{R}$, corresponde um homeomorfismo $e^{tX_u} : M \rightarrow M$ de classe C^∞ definido por, $e^{tX_u} = \varphi(t, x, u)$ e $e^{0X_u} = Id_M$. Note que para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$, temos que $e^{(t+s)X_u} = e^{tX_u}e^{sX_u}$. De fato, dado $x \in M$ temos que

$$\begin{aligned} e^{(t+s)X_u} &= \varphi(t+s, x, u) = \varphi(t, \varphi(s, x, u), u(\cdot + s)) = \\ &= \varphi(t, \varphi(s, x, u), u) = e^{tX_u}(\varphi(s, x, u)) = e^{tX_u}(e^{sX_u}) = e^{tX_u}e^{sX_u}. \end{aligned}$$

Esses homeomorfismos são essenciais para a definição de grupo e semigrupo do sistema de controle.

Definição 1.7. *Os conjuntos*

$$\mathcal{G}_{\mathcal{V}} = \{e^{t_n X_{u_n}} e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}; u_i \in \mathcal{U}, t_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \text{ e}$$

$$\mathcal{S}_{\mathcal{V}} = \{e^{t_n X_{u_n}} e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}; u_i \in \mathcal{U}, t_i > 0, n \in \mathbb{N}\},$$

*são denominados, respectivamente, de **grupo do sistema** e **semigrupo do sistema**.*

Note que os conjuntos definidos acima, são não vazios e que o conjunto $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$ está contido no conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}$. Sendo assim temos os seguintes resultados:

Proposição 1.8. *O conjunto $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}$ é um grupo, munido com operação interna de composição de aplicações.*

Demonstração: Primeiramente, notemos que $Id_M = e^{0X_u} \in \mathcal{G}_{\mathcal{V}}$. Já temos de imediato que a propriedade associativa é satisfeita, pois a composição de aplicações satisfaz esta

propriedade. Agora, dados quaisquer $\phi, \psi \in \mathcal{G}_V$, temos

$$\phi = e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}},$$

$$\psi = e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}},$$

onde $t_i, s_j \in \mathbb{R}$ com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$. Assim, temos que

$$\begin{aligned} \phi \circ \psi &= (e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}) \circ (e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}), \\ &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}, \end{aligned}$$

renumerando na igualdade acima, obtemos

$$\phi \circ \psi = e^{r_m X_{w_m}} e^{r_{m-1} X_{w_{m-1}}} \dots e^{r_1 X_{w_1}},$$

onde $w_i = v_i$, $i = 1, \dots, k$, $w_j = u_j$ com $j = 1, \dots, l$ e $r_{j'} \in \mathbb{R}$ com $j' = 1, \dots, m = k + l$, ou seja, $\phi \circ \psi \in \mathcal{G}_V$. Finalmente dado $\phi \in \mathcal{G}_V$ com $\phi = e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}$, pelo corolário anterior temos que sua inversa existe e é dada por

$$\phi^{-1} = e^{-t_l X_{u_l}} e^{-t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{-t_1 X_{u_1}}$$

e portanto pertence a \mathcal{G}_V , concluindo que \mathcal{G}_V é um grupo.

□

Agora, definiremos subsemigrupo de um grupo.

Definição 1.9. *Dado um grupo G , dizemos que um subconjunto não vazio S de G é um **subsemigrupo** de G se S é um semigrupo referente a operação definida pelo grupo G .*

Proposição 1.10. *O conjunto \mathcal{S}_V é um subsemigrupo de \mathcal{G}_V .*

Demonstração: Com efeito, como \mathcal{S}_V é um subconjunto de \mathcal{G}_V temos que a propriedade associativa é válida para os elementos de \mathcal{S}_V , agora resta mostrar que este conjunto é fechado para a operação de composição de aplicações. De fato, sejam $\gamma, \eta \in \mathcal{S}_V$, com

$\gamma = e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}$ e $\eta = e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}$, onde $t_i > 0$ e $s_j > 0$ com $i = 1, \dots, k$ e $j = 1, \dots, l$. Assim temos

$$\begin{aligned} \gamma \circ \eta &= (e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}) \circ (e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}), \\ &= e^{t_l X_{u_l}} e^{t_{l-1} X_{u_{l-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} e^{s_k X_{v_k}} e^{s_{k-1} X_{v_{k-1}}} \dots e^{s_1 X_{v_1}}. \end{aligned}$$

Renumerando na igualdade acima, obtemos

$$\gamma \circ \eta = e^{r_m X_{w_m}} e^{r_{m-1} X_{w_{m-1}}} \dots e^{r_1 X_{w_1}},$$

onde $w_i = v_i$, $i = 1, \dots, k$, $w_j = u_j$ com $j = 1, \dots, l$ e $r_{j'} > 0$ com $j' = 1, \dots, m = k + l$, ou seja, $\gamma \circ \eta \in \mathcal{S}_Y$

□

Quando o conjunto das funções de controle é \mathcal{U}_{cp} , o semigrupo do sistema é obtido naturalmente como mostra o resultado a seguir.

Proposição 1.11. *Seja $\mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U; u \text{ é constante por partes}\}$. Consideremos um sistema de controle com funções de controle em \mathcal{U}_{cp} . Dados quaisquer $t_1, t_2 > 0$ e $u_1, u_2 \in U$ existe $u_3 \in U$ satisfazendo,*

$$e^{t_2 X_{u_2}} e^{t_1 X_{u_1}} = e^{(t_1+t_2) X_{u_3}}.$$

Demonstração: Tomemos a função $u \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $u(t) = u_1$ para todo t em um intervalo $I_1 \subset \mathbb{R}$ contendo t_1 e a função $v \in \mathcal{U}_{cp}$ tal que $v(t) = u_2$ para todo t em um intervalo $I_2 \subset \mathbb{R}$ contendo t_2 . Para qualquer $x \in M$ temos que

$$e^{t_1 X_{u_1}}(x) = \varphi(t_1, x, u),$$

$$e^{t_2 X_{u_2}}(x) = \varphi(t_2, x, u).$$

Logo para todo $x \in M$ temos que,

$$e^{t_2 X_{u_2}} e^{t_1 X_{u_1}}(x) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x, u), u).$$

Agora tomemos a t_1 - concatenação de u e v , isto é, a função de controle $w \in \mathcal{U}_{cp}$ definida por

$$w(t) = \begin{cases} u(t) & \text{se } t \leq t_1, \\ v(t - t_1) & \text{se } t > t_1. \end{cases}$$

Assim temos $\varphi(t_2 + t_1, x, w) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x, w), w(\cdot + t_1))$, mas $\varphi(t_1, x, w) = \varphi(t_1, x, u)$, pois $w(t) = u(t)$ para $t \leq t_1$. Além disso para qualquer $t > 0$, temos $t + t_1 > t_1$, logo $w(t + t_1) = v(t + t_1 - t_1) = v(t)$. Assim,

$$\varphi(t_2 + t_1, x, w) = \varphi(t_2, \varphi(t_1, x, u), v) = e^{t_2 X_{u_2}} e^{t_1 X_{u_1}}(x).$$

Por outro lado, consideremos o intervalo $I_3 \subset \mathbb{R}$ contendo $t_1 + t_2$ onde $w(t) = u_3 \in U$ para todo $t \in I_3$. Assim, $\varphi(t_2 + t_1, x, w) = \varphi(t_2 + t_1, x, u_3) = e^{t_1 + t_2 X_{u_3}}$, concluindo que $e^{t_2 X_{u_2}} e^{t_1 X_{u_1}} = e^{t_1 + t_2 X_{u_3}}$ para todo $x \in M$.

□

Como consequência imediata da proposição anterior temos que este mesmo resultado é válido para uma quantidade finita de funções de controle, ou seja:

Corolário 1.12. *Consideremos um sistema de controle com funções de controle em \mathcal{U}_{cp} . Dados quaisquer $t_1, \dots, t_n > 0$ e $u_1, \dots, u_n \in U$ existe $u \in U$ satisfazendo*

$$e^{t_n X_{u_n}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} = e^{(t_n + \dots + t_1) X_u}.$$

Demonstração: O resultado segue por indução. Para $n = 1$ o resultado é imediato. Suponhamos que o resultado é válido para $n - 1$ com $n > 1$, ou seja, existe $u_0 \in U$ tal que

$$e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} = e^{(t_1 + \dots + t_{n-1}) X_{u_0}},$$

aplicando a proposição anterior, temos que existe $u \in U$ tal que

$$e^{(t_n + \dots + t_1) X_u} = e^{t_n X_{u_n}} e^{(t_1 + \dots + t_{n-1}) X_{u_0}} = e^{t_n X_{u_n}} e^{t_{n-1} X_{u_{n-1}}} \dots e^{t_1 X_{u_1}} = e^{t_n X_{u_n}} \dots e^{t_1 X_{u_1}}.$$

□

Em geral usamos concatenações para construção de trajetórias de um sistema de controle para valores positivos. Mais precisamente, seja $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$ o conjunto de campos de vetores completos de um sistema de controle. Tomemos $X_{u_1}, \dots, X_{u_n} \in \mathcal{V}$ e definamos $F : [0, T] \rightarrow \mathcal{V}$ por $F(t) = X_{u_k}$ se $t \in [t_{k-1}, t_k]$, onde $t_0 = 0$, $t_n = T$ e $k = 1, \dots, n$. Consideremos o problema de valor inicial

$$x' = F(t)(x),$$

com $x(0) = x_0$.

A solução deste problema é dada por

$$e^{tX} = e^{(t-t_{k-1})X} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1X_1}(x_0),$$

onde $t_{k-1} \leq t \leq t_k$ e $k = 1, \dots, n$.

Com efeito $e^{0X_1}(x_0) = x_0$. Além disto, temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tX} &= \frac{d}{dt}e^{tX_k}(e^{-t_{k-1}X_k} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1X_1}(x_0)) \\ &= X_{u_k}(e^{tX_k}(e^{-t_{k-1}X_k} e^{t_{k-1}X_{k-1}} \dots e^{t_1X_1}(x_0))) = X_{u_k}(e^{tX}) = F(t)(e^{tX}). \end{aligned}$$

Portanto as trajetórias de um sistema de controle definida para valores positivos são determinados pelos campos de vetores em \mathcal{V} e pelo correspondente semigrupo $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}$.

Agora, definiremos órbita do grupo e do semigrupo do sistema de controle.

Definição 1.13. *Dado um sistema de controle e $x \in M$, definamos*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in \mathcal{G}_{\mathcal{V}} \text{ com } \phi(x) = y\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^+(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}} \text{ com } \phi(x) = y\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^-(x) = \{y \in M : \text{existe } \phi \in \mathcal{S}_{\mathcal{V}} \text{ com } \phi(y) = x\}.$$

Os conjuntos $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$ e $\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^+(x)$ são denominados respectivamente de **órbita do grupo do sistema** e **órbita do semigrupo do sistema** através de $x \in M$.

Observe que quando o conjunto das funções de controle é \mathcal{U}_{cp} obtemos,

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^+(x) = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } e^{tX_u}(x) = y\},$$

$$\mathcal{O}_{\mathcal{V}}^-(x) = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } e^{tX_u}(y) = x\}.$$

Proposição 1.14. *Dados $x, y \in M$, defina $x \sim y$ se e somente se $y \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$. Temos que \sim é uma relação de equivalência em M .*

Demonstração: Com efeito, $x \sim x$ pois $x \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$. Se $x \sim y$, existe $\phi \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$ tal que $\phi(x) = y$, logo $\phi^{-1}(y) = x$ com $\phi^{-1} \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$, portanto $y \sim x$. Enfim, se $x \sim y$ e $x \sim z$ então existem $\phi, \psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$ tais que $\phi(x) = y$ e $\psi(x) = z$. Como $\phi \circ \psi \in \mathcal{O}_{\mathcal{V}}(x)$ e $\phi \circ \psi(x) = z$ temos $x \sim z$.

□

Note que cada órbita é uma classe de equivalência desta relação, concluindo que o conjunto das órbitas determinam uma partição do espaço de fase M .

Lembremos que um grupo G **age transitivamente** em um conjunto X se para quaisquer $x, y \in X$ existe $g \in G$ tal que $gx = y$.

Definição 1.15. *Seja M uma variedade diferenciável. Um sistema de controle em M determinado por um conjunto de campos de vetores \mathcal{V} é dito **transitivo**, quando o grupo do sistema $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}$ age transitivamente em M .*

Exemplo 1.16. *Sejam $M = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{V} = \{X_1, X_2\}$ com $X_1 = a \frac{\partial}{\partial x_1}$ e $X_2 = b \frac{\partial}{\partial x_2}$ onde $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\}$ é a base canônica do espaço tangente de \mathbb{R}^2 . Sejam a e b não nulos. As soluções das equações $x' = X_1(x)$ e $x' = X_2(x)$ são dadas respectivamente por $\varphi_x^a(t) = (x_1 + at, x_2)$, $\varphi_x^b(t) = (x_1, x_2 + bt)$ onde $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Fixando-se $x_0 = (x_1^0, x_2^0)$, dado um ponto qualquer $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tomemos a solução $\varphi_{x_0}^a(t)$ e $\varphi_{x_0}^b(t)$ de valor inicial x_0 . Sejam $t_1 = \frac{x_1 - x_1^0}{a}$ e $t_2 = \frac{x_2 - x_2^0}{b}$. Temos que $\varphi_{t_2}^b$ e $\varphi_{t_1}^a \in \mathcal{G}_{\mathcal{V}}$ é tal que $\varphi_{t_2}^b \circ \varphi_{t_1}^a(x_0) = x$, logo $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}(x) = \mathbb{R}^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e portanto o sistema de controle é transitivo em \mathbb{R}^2 . A órbita $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x)$ através de um ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ referente aos seguintes casos são:*

Para $a > 0$ e $b > 0$ temos que $\mathcal{S}_V(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha \geq x_1, \beta \geq x_2\} \setminus \{x\}$
(Veja figura 1.1).

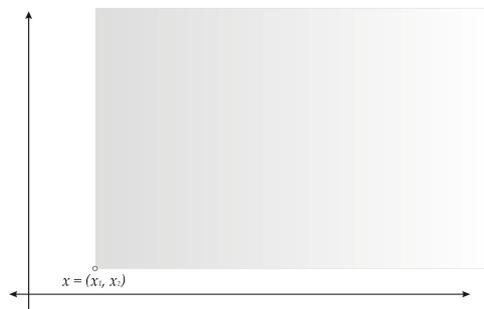


Figura 1.1:

Quando $a > 0$ e $b < 0$ temos que $\mathcal{S}_V(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha \geq x_1, \beta \leq x_2\} \setminus \{x\}$
(Veja figura 1.2).

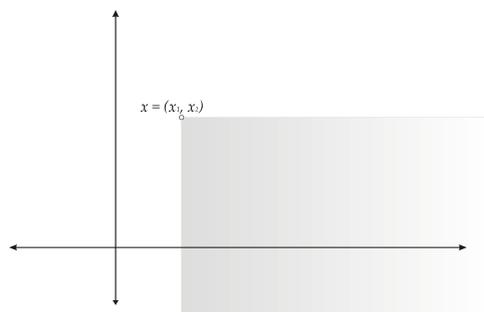


Figura 1.2:

Se $a < 0$ e $b < 0$ temos que $\mathcal{S}_V(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha \leq x_1, \beta \leq x_2\} \setminus \{x\}$ (Veja figura 1.3).

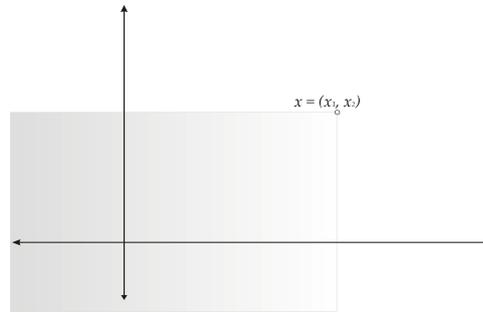


Figura 1.3:

E no caso em que $a < 0$ e $b > 0$ temos que $\mathcal{S}_V(x) = \{(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2; \alpha \leq x_1, \beta \geq x_2\} \setminus \{x\}$ (Veja figura 1.4).

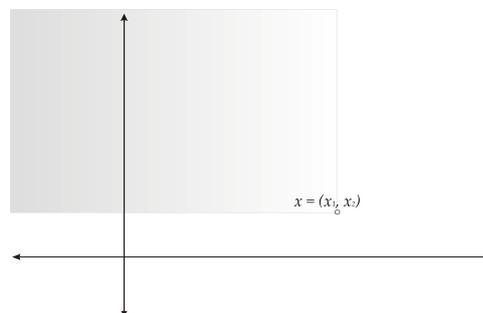


Figura 1.4:

1.2 Acessibilidade e controlabilidade

Inicialmente definiremos sistemas de controle acessíveis e controláveis.

Definição 1.17. *Um sistema de controle \mathcal{V} é dito **acessível a partir de** $x \in M$ se $\text{int}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x)) \neq \emptyset$. O sistema é dito **acessível** se for **acessível a partir de todo ponto** $x \in M$.*

Note que no exemplo 1.15 o sistema é acessível para todo $x \in \mathbb{R}^2$.

Definição 1.18. *Um sistema de controle \mathcal{V} é dito **controlável a partir de** $x \in M$ se $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x) = M$. O sistema é dito **controlável** se for **controlável a partir de todo** $x \in M$. O sistema de controle é dito **aproximadamente controlável a partir de** $x \in M$ se $\text{fe}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x)) = M$. O sistema é dito **aproximadamente controlável** se o for a partir de todo $x \in M$.*

Observe que se o sistema é controlável a partir de x então $M = \mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x) \subset \mathcal{G}_{\mathcal{V}}(x) \subset M$, ou seja, $\mathcal{G}_{\mathcal{V}}(x) = M$ concluindo que o sistema é transitivo a partir de x . Além disso, como $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x) = M$ temos $\text{int}(\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x)) \neq \emptyset$, assim o sistema é acessível a partir de $x \in M$. No entanto, o fato de $\mathcal{S}_{\mathcal{V}}(x) = M$ para algum $x \in M$, ou seja, o sistema ser controlável a partir de um determinado ponto de M , não significa que o sistema é acessível, ver exemplo 1.20. No exemplo 1.19 mostraremos um caso onde o sistema não é acessível em nenhum ponto de \mathbb{R}^n .

Exemplo 1.19. *Sejam $M = \mathbb{R}^n$ e $U = \mathbb{R}$. Consideremos o conjunto de funções de controle $\mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \text{constante por partes}\}$ e a família de equações diferenciais,*

$$x' = X(x, u(t)) = u(t)x, x \in \mathbb{R}^n.$$

Dado $u_1 = u(t_1)$, com $u \in \mathcal{U}_{cp}$, temos que as soluções da equação

$$x' = X_{u_1}(x) = u_1x$$

são da forma $\varphi_x^{u_1}(t) = e^{u_1 t}x$. Se $u_1 = 0$, tais soluções são pontos singulares. Se $u_1 \neq 0$, o único ponto singular é a origem. As trajetórias nos pontos são segmentos de retas

tendendo para origem, quando $t \rightarrow \pm\infty$ respectivamente conforme $u_1 < 0$ e $u_1 > 0$. Assim, dado $x \in \mathbb{R}^n$ não nulo, a órbita $\mathcal{G}_V(x)$ é um segmento de reta passando por x e tendendo para a origem, como ilustra a figura 1.5. Logo $\text{int}(\mathcal{S}_V(x)) = \emptyset$, já que $\mathcal{S}_V(x) \subset \mathcal{G}_V(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Portanto o sistema não é aproximadamente controlável e nem acessível a partir de qualquer ponto de \mathbb{R}^n .

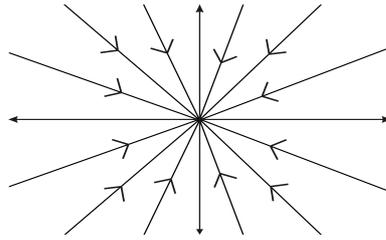


Figura 1.5:

1.2.1 Distribuições singulares

Nesta subseção, definiremos o conceito de distribuição para uma variedade diferenciável. Estabeleceremos condições para que uma distribuição seja integrável, característica e diferenciável em um ponto da variedade diferenciável.

Seja M uma variedade diferenciável. Uma **distribuição** Δ em M é uma aplicação que a cada $x \in M$ associa um subespaço $\Delta(x) \subset T_x M$, do espaço tangente a x . A distribuição Δ é chamada **regular**, se $\dim(\Delta(x))$ é constante como função de x e caso contrário é chamada **singular**.

Seja N uma variedade diferenciável. Uma **imersão** $\phi : N \rightarrow M$ é uma aplicação diferenciável tal que $d\phi_x$ é injetora para todo $x \in N$. Denotando por ϕ_* a derivada da aplicação ϕ , temos que a imagem de uma imersão é uma **variedade integral** de Δ se para todo $x \in N$ tem-se $\phi_*(T_x N) = \Delta(\phi(x))$.

Definição 1.20. *Uma distribuição Δ em M é dita **integrável em** $x \in M$ se existe uma variedade integral de Δ contendo x . A distribuição é **integrável** se for integrável em todo $x \in M$.*

Definição 1.21. *Uma distribuição Δ em M é **diferenciável em** $x \in M$ se existem campos de vetores diferenciáveis X^1, \dots, X^k definidos em uma vizinhança de x que são tangentes a Δ , isto é, $X^i(y) \in \Delta(y)$ para y pertencente ao domínio de X^i , onde $i = 1, \dots, k$ e $\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}$ gera $\Delta(x)$. Uma **distribuição é diferenciável** se for para todo $x \in M$*

Na definição acima, não exigimos que a distribuição seja gerada pelos campos de vetores ao longo da vizinhança de x , mas apenas em x , além disto como a distribuição é diferenciável em x , sempre é possível tomarmos uma quantidade k de campos de vetores de modo que $k = \dim(\Delta(x))$. Note também pela definição acima que um sistema de controle em M define uma distribuição diferenciável em M .

Agora, definiremos o que é uma parametrização de uma distribuição Δ .

Definição 1.22. Uma parametrização de uma distribuição Δ centrada em x é uma aplicação $\delta : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow TM$ com U vizinhança de x tal que:

1. $\delta(y, v)$ é linear em v ;
2. a imagem de $\delta(y, \cdot)$ está contida em $\Delta(y)$ para todo $y \in U$;
3. a imagem de $\delta(x, \cdot)$ é exatamente $\Delta(x)$.

A parametrização é dita de classe C^r quando a aplicação δ tem essa classe de diferenciabilidade como função de y .

Note que uma distribuição Δ é diferenciável em um ponto x se, e somente se, existe uma parametrização diferenciável centrada em x , pois dada uma parametrização, os campos $X^i(y) = \delta(y, e_i)$ onde $\{e_1, \dots, e_k\}$ é uma base de \mathbb{R}^k , satisfaz a condição de diferenciabilidade em x . Reciprocamente dados os campos X^1, \dots, X^k temos que

$$\delta(y, u_1, \dots, u_k) = u_1 X^1(y) + \dots + u_k X^k(y),$$

com $u_i \in \mathbb{R}$ define uma parametrização diferenciável de Δ .

Exemplo 1.23. Seja Δ uma distribuição em \mathbb{R}^2 da seguinte forma:

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} \{(u, v) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 : u = 0\} & \text{se } y > 0, \\ \{(u, v) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 : v = 0\} & \text{se } y \leq 0. \end{cases}$$

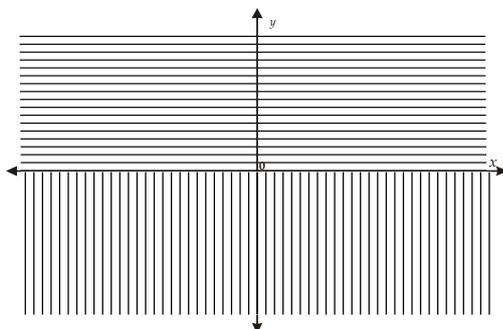


Figura 1.6:

Temos que esta distribuição é integrável, pois a semi-retas $s_a = \{(a, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ com $a \in \mathbb{R}$ e as retas $r_b = \{(x, b) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$ com $b \leq 0$, são subvariedades integrais e cada ponto de \mathbb{R}^2 pertence a algum destes conjuntos. Essa distribuição é diferenciável fora do eixo horizontal $\{y = 0\}$, mas neste eixo ela não é contínua, pois se um campo contínuo da forma $X = a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y}$ gera $\Delta(x_0, 0)$ para $x_0 \in \mathbb{R}$ então $a(x, y) \neq 0$ numa vizinhança de $(x_0, 0)$, portanto X não pode ser tangente a Δ .

Definição 1.24. 1. Um campo de vetores X definido em um aberto $U \subset M$ **preserva a distribuição** Δ se $(X_t)'(\Delta(x)) \subset \Delta(X_t(x))$, para todo $x \in U$ e $t \in \mathbb{R}$. Nesse caso dizemos que a **distribuição é invariante** por X .

2. Um campo de vetores $X : U \rightarrow TM$ é chamado **característico da distribuição** Δ se X preserva Δ e é tangente a mesma, isto é, $X(y) \in \Delta(y)$ para y pertencente ao domínio de X .

3. Uma distribuição Δ é chamada **característica em** $x \in M$ se existem campos característicos X^1, \dots, X^k definidos numa vizinhança de x tal que

$$\Delta(x) = \text{ger}\{X^1(x), \dots, X^k(x)\},$$

isto é, determinam uma parametrização de Δ ao redor de x .

Teorema 1.25. Para uma distribuição Δ são equivalentes;

1. Δ é característica.
2. Δ é diferenciável e integrável.

Demonstração: Suponha que Δ é característica. Então Δ é diferenciável por definição. Resta mostrar que Δ é integrável, isto é, que todo $x \in M$ pertence a alguma variedade integral. Seja $x \in M$. Como Δ é característica, existem campos X^1, \dots, X^k definidos numa vizinhança de x tal que

$$\Delta(x) = \text{ger}\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}.$$

Para alguma vizinhança U da origem em \mathbb{R}^k a expressão $\rho(\tau) = \rho(t_1, \dots, t_k) = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$, com $\tau = (t_1, \dots, t_k) \in U$ faz sentido e define uma aplicação diferenciável $\rho : U \rightarrow M$. A construção da variedade integral será feita mostrando que ρ é uma imersão quando restrita a alguma vizinhança $V \subset U$. Para isso deve-se calcular a diferencial $d\rho_t$ de ρ em τ . A imagem da aplicação ρ é gerada pelas derivadas parciais $\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(\tau)$. Usando o fato de que a derivada em relação a t de $X_t(x)$ é $X(X_t(x))$, temos que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(\tau) = (X_{t_1}^1)' \circ \dots \circ (X_{t_{i-1}}^{i-1})'(X^i(z_i)),$$

onde $z_i = X_{t_i}^i \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$. Fazendo $\tau = 0$ na expressão acima obtém-se que $\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(0) = X^i(x)$. Como a imagem de $d\rho_0$ é gerada por essas derivadas parciais, mostramos que essa imagem coincide em $\Delta(x)$ e daí ρ tem posto máximo na origem, conseqüentemente a restrição de ρ a alguma vizinhança V da origem é uma imersão. Essa restrição é uma subvariedade integral de Δ . Para isso observe em primeiro lugar que $(X_{t_1}^1)' \circ \dots \circ (X_{t_k}^k)'(\Delta) = \Delta$, pois cada X^i é um campo característico juntamente com a expressão das derivadas parciais de ρ e que $X^i(z_i) \in \Delta(z_i)$ (usando o fato de que X^i é tangente a distribuição), permitindo concluir que se $\tau \in U$ então $\frac{\partial \rho}{\partial t_i}(\tau) \in \Delta(\rho(\tau))$ e daí $im(d\rho_\tau) \subset \Delta(\rho(\tau))$. Essa inclusão é uma igualdade se $\tau \in V$, pois x e $\rho(\tau)$ são respectivamente o ponto inicial e final de uma curva que é a concatenação de trajetórias de campos característicos de Δ . Como a dimensão de Δ não varia ao longo das trajetórias dos campos característicos, então $dim \Delta(\rho(\tau)) = dim \Delta(x)$ e esta coincide com $dim(im(d\rho_\tau))$ pois ρ é uma imersão em V , concluindo a demonstração de que Δ é integrável. A recíproca é consequência do lema 1.27, que garante que uma distribuição integrável é invariante por seus campos tangentes. Dessa forma se Δ é diferenciável e integrável então os campos de suas parametrizações são automaticamente característicos, o mesmo ocorrendo com a distribuição.

□

Lema 1.26. *Seja $\psi : N \hookrightarrow M$ uma imersão, suponha que o campo X de M seja tangente a $\psi(N)$, isto é, $X(x) \in T_x\psi(N)$ para todo $x \in \psi(N)$. Então para todo $x \in \psi(N)$ existem uma vizinhança $V \subset \psi(N)$ de x e $\epsilon > 0$ tal que se $y \in V$ então $X_t(y) = e^{tX}(y) \in \psi(N)$ para $|t| < \epsilon$. Além do mais $X_t(y) : V \rightarrow \psi(N)$ onde $|t| < \epsilon$ é um difeomorfismo sobre um aberto de $\psi(N)$.*

Demonstração: Devido a forma local das imersões podemos supor sem perda de generalidade que M é o produto $V \times W \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ com V e W vizinhanças da origem e que $N \cong V \times \{0\}$. Nessa situação tome uma vizinhança da origem $V_1 \times W_1 \subset V \times W$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que $X_t(V_1 \times W_1) \subset V \times W$ para $|t| < \epsilon$. O fato de X ser tangente a N permite definir por restrição um campo X' de $V \times \{0\}$. Uma trajetória α de X' satisfaz,

$$\alpha'(t) = X'(\alpha(t)) = X(\alpha(t))$$

e portanto temos que α é uma trajetória de X . O teorema da unicidade das soluções das equações diferenciais garante que as trajetórias de X iniciadas em $V \times \{0\}$ permanecem em $V \times \{0\}$. Dessa forma, se $|t| < \epsilon$ temos $X_t(V \times \{0\}) \subset V \times \{0\}$ o que mostra o lema.

□

Lema 1.27. *Suponha que Δ seja uma distribuição integrável e seja X um campo tangente a Δ . Então X preserva Δ .*

Demonstração: Seja U o domínio de X e tome $y \in U$. Seja L uma variedade integral de Δ passando por y . Pelo lema anterior existem $\epsilon > 0$ e $V \subset L \cap U$ (dependendo de y e de L) tal que X_s é um difeomorfismo de V sobre um aberto de L para $|s| < \epsilon$. Portanto X_s aplica espaços tangentes a L sobre seus espaços tangentes, ou seja, $(X_s)'\Delta(z) = \Delta(X_s(z))$ para $z \in V$. Em particular essa igualdade vale para $z = y$ e $|s| < \epsilon$. Tomemos agora $x \in \text{dom}X_t$. Suponha $t > 0$ e defina

$$m = \sup\{s \in [0, t]; \text{ para todo } \sigma \in [0, s](X_\sigma)'(\Delta(x)) \subset \Delta(X_\sigma(x))\}.$$

Aplicando a primeira parte da demonstração a $y = X_m(x)$ obtém-se que $m = t$.

□

Exemplo 1.28. *Dada a distribuição*

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} T_{(x,y)}\mathbb{R}^2 & \text{para } x < 0 \text{ e } y > 0; \\ \{(u, v) \in T_{(x,y)}\mathbb{R}^2; v = 0\} & \text{para os outros casos.} \end{cases}$$

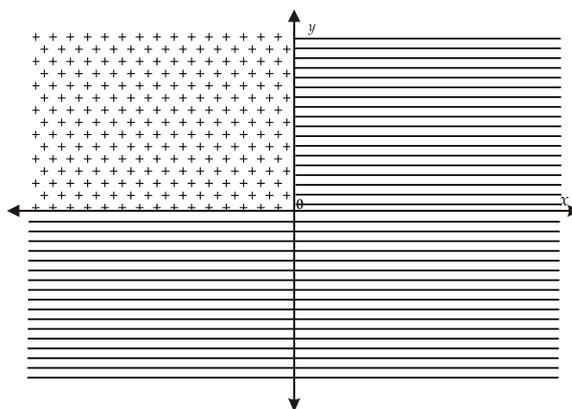


Figura 1.7:

A distribuição é integrável na origem por que $L = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$ é a variedade integral. Mas Δ não é característico na origem. Dado um campo vetorial X tangente a Δ com $X(0) \neq 0$, temos que existe uma vizinhança $N(0)$ com $X(z) \neq 0$ para todo $z \in N(0)$. Para $z \in N(0) \cap \{(x, y); x < 0, y > 0\}$ as trajetórias não estão contidas na reta $x = 0$ e a dimensão $\Delta(z)$ não é constante ao longo das trajetórias.

1.2.2 Unicidade

Nos resultados que serão abordados a seguir, mostraremos que para uma distribuição característica definida em uma variedade diferenciável, tem-se que para cada ponto desta variedade existe uma única variedade integral maximal que passa por este ponto. Provaremos que as variedades integrais conexas maximais da distribuição característica, são precisamente as órbitas da família de todos os campos de vetores diferenciáveis tangentes a distribuição característica.

A seguir mostraremos que a intersecção de variedades integrais de uma distribuição é também uma variedade integral da mesma.

Teorema 1.29. *Seja Δ uma distribuição característica, N_1 e N_2 variedades integrais de Δ . Então $N_1 \cap N_2$ é uma subvariedade aberta tanto de N_1 quanto de N_2 .*

Demonstração: Assumindo que $N_1 \cap N_2 \neq \emptyset$, tome $x \in N_1 \cap N_2$. Sejam X^1, \dots, X^k campos característicos de Δ definidos numa vizinhança de x com

$$\Delta(x) = \text{ger}\{X^1(x), \dots, X^k(x)\}.$$

Defina, $\rho(t_1, \dots, t_k) = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(x)$. Pelo teorema 1.26, $\rho : U \rightarrow M$ é uma imersão para algum aberto que contém a origem de \mathbb{R}^k . Pelo lema 1.27, se U é suficientemente pequeno tal que $\rho(U) \subset N_1 \cap N_2$, as aplicações $\rho : U \rightarrow N_1$ e $\rho : U \rightarrow N_2$ são imersões. Como as dimensões de U , N_1 e N_2 são iguais, podemos diminuir U se necessário para que essas imersões sejam mergulhos. Portanto $\rho(U)$ é uma subvariedade aberta tanto de N_1 quanto de N_2 , assim $N_1 \cap N_2$ é um aberto nas duas variedades integrais.

□

Seja \mathcal{F} o conjunto das variedades integrais conexas de Δ . Em \mathcal{F} podemos considerar a ordem parcial definida por $N_1 \prec N_2$ se N_1 é uma subvariedade aberta de N_2 . Assim uma variedade integral é dita maximal se ela for conexa e maximal em relação a essa ordem.

Teorema 1.30. *Seja Δ uma distribuição característica. Então para cada $x \in M$ passa uma única variedade integral maximal.*

Demonstração: Seja \mathcal{F} o conjunto das variedades integrais conexas de Δ . Defina $\mathcal{F}_x = \{N \in \mathcal{F}; x \in N\}$. Temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$, uma vez que Δ é integrável e a ordem parcial de \mathcal{F} se restringe a \mathcal{F}_x . Seja \mathcal{H} uma cadeia de \mathcal{F}_x , isto é, um subconjunto totalmente ordenado de \mathcal{F}_x . Mostraremos que \mathcal{H} admite um majorante em \mathcal{F}_x para poder aplicar o principio da maximalidade de Hausdorff. Defina $N' = \bigcup_{N \in \mathcal{H}} N$. Temos que $N' \in \mathcal{F}_x$

e N' majora \mathcal{H} . Podemos definir uma estrutura de variedade em N' da seguinte forma. Dado $y \in N'$ existe algum $N \in \mathcal{H}$ que contém y . Como N é subvariedade, suas cartas ao redor de y define cartas em N' . Fazendo isso para todo $y \in N'$ fica definido um conjunto de cartas cujos domínios cobrem N' . Duas cartas definidas dessa maneira se relacionam diferencialmente, de fato, se $y \in N_1 \cap N_2$ então $N_1 \prec N_2$ ou $N_2 \prec N_1$ e uma delas é variedade aberta da outra. Assim define-se um atlas em N' de tal forma que N é uma subvariedade aberta de N' para todo $N \in \mathcal{H}$. Com esta estrutura N' é uma subvariedade integral de Δ que contém x e portanto $N' \in \mathcal{F}_x$. Como todo subconjunto ordenado de \mathcal{F}_x admite um majorante, o princípio da maximalidade garante que \mathcal{F}_x admite elementos maximais. Um elemento maximal de \mathcal{F}_x é uma variedade integral maximal que passa por x . Para verificar a unicidade, suponha que $x \in N_1 \cap N_2$ com N_1 e N_2 maximais. Pelo teorema da unicidade local $N_1 \cap N_2$ é aberta em N_1 e em N_2 e portanto $N_1 \cup N_2$ admite estrutura de subvariedade integral conexa contendo N_1 e N_2 como subvariedades abertas. Como N_1 e N_2 são maximais, temos que $N_1 = N_2$.

□

Observemos que a primeira parte do teorema se aplica às distribuições integráveis. Para estas distribuições todos os pontos estão contidos em alguma variedade integral maximal, não existindo a unicidade das mesmas.

A variedade integral maximal de Δ que contém $x \in M$ será denotada por $I(x)$. O teorema de unicidade das variedades integrais maximais mostra que para $x, y \in M$, $I(x) = I(y)$ ou $I(x) \cap I(y) = \emptyset$. Isto permite definir uma relação de equivalência, ou seja, $x \sim y$ se $I(x) = I(y)$. As classes de equivalência desta relação são as variedades integrais maximais de Δ .

Teorema 1.31. *Seja Δ uma distribuição característica e seja Σ a família de todos os campos de vetores diferenciáveis que estão definidos em algum aberto de M e que são tangentes a Δ . Então as órbitas de Σ são precisamente as variedades integrais conexas maximais de Δ .*

Demonstração: Primeiramente iremos mostrar que as variedades integrais maximais são invariantes pelos campos de Σ . O lema 1.27 garante que essas variedades são localmente invariantes no sentido que $X \in \Sigma$ e o fato de X ser tangente a Δ implica que para todo $x \in \text{dom}X$ existe $\epsilon > 0$ tal que para $|t| < \epsilon$, $X_t(x) \in I(x)$, onde $I(x)$ é única variedade integral maximal que contém x . Para estender a toda trajetória de X que as variedades são invariantes, seja

$$m = \sup\{s \in [0, t]; X_\sigma(x) \in I(x), \text{ para todo } \sigma \in [0, s]\}.$$

Como $m \in [0, t]$, $X_m(x)$ pertence ao domínio de X . Assim pela invariância local dada pelo lema 1.27, temos que para $s > 0$ suficientemente pequeno, $X_{-s}(X_m(x)) = X_{m-s}(x)$ está em $I(X_m(x))$. Mas $X_{m-s}(x) \in I(x)$ o que mostra que $I(x) = I(X_m(x))$. Aplicando a invariância local em $X_m(x)$, obtém-se que $m = t$, mostrando que $I(x)$ é invariante pelas trajetórias dos campos de Σ iniciadas em x . Usando o mesmo argumento, é possível mostrar que $I(x)$ é invariante por concatenações de trajetórias de campos em Σ . Em outras palavras, $G_\Sigma(x) \subset I(x)$ onde $G_\Sigma(x)$ denota a órbita de x por Σ . Agora vamos mostrar que $G_\Sigma(x)$ é aberto em $I(x)$. Para isso, seja $z \in G_\Sigma(x)$ e tome uma parametrização X^1, \dots, X^k por campos característicos. Então como na demonstração do teorema 1.26, a imagem

$$\rho(t_1, \dots, t_k) = X_{t_1}^1 \circ \dots \circ X_{t_k}^k(z)$$

é uma variedade integral e portanto uma vizinhança de $z \in I(x)$. Como essa imagem está contida em $G_\Sigma(x)$, temos que $G_\Sigma(x)$ é de fato um aberto em $I(x)$. Feito isso, seja $\mathcal{C} = \bigcup G_\Sigma(y)$ com y percorrendo $I(x) \setminus G_\Sigma(x)$. Cada $G_\Sigma(y)$ é aberto em $I(y) = I(x)$. Portanto \mathcal{C} é aberto em $I(x)$. Como $\mathcal{C} \cap G_\Sigma(x) = \emptyset$ e o fato de que $I(x)$ ser conexo, implica que $\mathcal{C} = \emptyset$ e concluindo assim que $G_\Sigma(x) = I(x)$.

□

Aplicando o teorema em sistemas de controle, temos que as órbitas do sistema de controle são precisamente variedades integrais conexas maximais de uma distribuição característica.

Conjuntos limites.

Neste capítulo estudamos o conceito de conjuntos limites, abordados em [1], [2] e [3]. Uma das características deste conceito são o comportamento atrator e o comportamento repulsor desses conjuntos limites que são determinados pela ação de um semigrupo sobre um espaço topológico. Estudamos propriedades de invariância desses conjuntos limites e alguns exemplos mostrando que este conceito generaliza o conceito de conjuntos limites para fluxos. Usaremos esta teoria para o desenvolvimento da teoria de decomposição de Morse para ações de semigrupos e recorrência por cadeias, que apresentaremos em capítulos posteriores.

2.1 Conjuntos limites

Nesta seção introduzimos o conceito de ação de um semigrupo em um espaço topológico. Definimos o conceito de conjuntos limites para uma família de subconjuntos do semigrupo agindo em um espaço topológico.

Primeiro vamos começar com as notações usuais de ações de semigrupos. Suponha que M é um espaço topológico e S um semigrupo.

Definição 2.1. Uma **ação** (ação a esquerda) de S em M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \mu : S \times M &\rightarrow M \\ (s, x) &\mapsto \mu(s, x) = s \cdot x \end{aligned}$$

satisfazendo $s \cdot (u \cdot x) = (s \cdot u) \cdot x$ para todo $x \in M$ e $u, s \in S$. Neste caso dizemos que S **age** em M .

Com abuso de notação omitiremos o \cdot da ação do semigrupo sobre o espaço topológico.

Denotaremos por $\mu_s : M \rightarrow M$ a aplicação definida como $\mu_s(x) = \mu(s, x)$. Assumiremos que μ_s é contínua para todo $s \in S$.

Agora, vamos definir órbitas para ações de semigrupos.

Definição 2.2. *Assumindo que S age em M , temos que para $x \in M$, os conjuntos*

$$Sx = \{y \in M; \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sx = y\} \text{ e}$$

$$S^*x = \{y \in M; \text{ existe } s \in S \text{ tal que } sy = x\},$$

são chamados respectivamente de **órbita** e **órbita regressiva** de S no ponto x .

Note que, pela definição acima, $SX = \bigcup_{x \in X} Sx$ e $S^*X = \bigcup_{x \in X} S^*x$. De fato, mostraremos o caso $SX = \bigcup_{x \in X} Sx$, pois o outro caso é análogo. De imediato, temos que $Sx \subset SX$ para todo $x \in X$, ou seja, $\bigcup_{x \in X} Sx \subset SX$. Agora seja $y \in SX$, então existe $s \in S$ e $x \in X$ tal que $sx = y$, ou seja, $y \in Sx$ para algum $x \in X$, em particular $y \in \bigcup_{x \in X} Sx$. Concluindo assim que $SX = \bigcup_{x \in X} Sx$.

Para um subconjunto não vazio X de M é usual dizer que

1. X é **progressivamente invariante** para a ação do semigrupo S se $SX \subset X$.
2. X é **regressivamente invariante** para a ação do semigrupo S se $S^*X \subset X$.
3. X é **invariante** para a ação do semigrupo S se este é progressivamente invariante e regressivamente invariante.

A seguir, mostraremos alguns casos de conjuntos progressivamente invariantes, regressivamente invariantes e invariantes.

Exemplo 2.3. Considerando o semigrupo \mathbb{R}^+ com a operação interna usual da multiplicação e o espaço topológico \mathbb{R} . Defina μ como,

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, x) &\mapsto \mu(s, x) = s \cdot x \end{aligned}$$

note que a operação de multiplicação é associativa em \mathbb{R} , assim temos que μ é uma ação de \mathbb{R}^+ em \mathbb{R} . Agora note que o conjunto $X = \{x \in \mathbb{R}; x < 0\}$ é invariante para a ação de \mathbb{R}^+ . De fato,

$$SX = \{y \in \mathbb{R}; \text{existe } s \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x < 0 \text{ com } s \cdot x = y\} = \{y \in \mathbb{R}; y < 0\} = X \text{ e}$$

$$S^*X = \{y \in \mathbb{R}; \text{existe } s \in \mathbb{R}^+ \text{ e } x < 0 \text{ com } s \cdot y = x\} = \{y \in \mathbb{R}; y < 0\} = X,$$

mostrando respectivamente que X é progressivamente invariante e regressivamente invariante para a ação de \mathbb{R}^+ . Concluindo assim que X é invariante para a ação de \mathbb{R}^+ .

Para $X \subset M$ é imediato verificar que SX e \overline{SX} são progressivamente invariantes por S . De fato, tome $z \in SX$, temos que existe $s \in S$ e $x \in X$ tal que $sx = z$, assim para qualquer $t \in S$ temos que $t(sx) = (ts)x$. Como $ts \in S$ e $t(sx) = (ts)x \in SX$, temos que $S(SX) \subset SX$, mostrando que SX é progressivamente invariante. Para o caso \overline{SX} , dado $s \in S$, segue por continuidade que

$$s\overline{SX} \subset \overline{sSX} \subset \overline{SX},$$

logo temos que $S\overline{SX} \subset \overline{SX}$.

Analogamente podemos mostrar que S^*X é regressivamente invariante, se não é vazio.

A seguir, definiremos a noção de ação aberta de um semigrupo em um espaço topológico seja aberta e em seguida provaremos que se a ação do semigrupo no espaço topológico for aberta então $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante se $\overline{S^*X}$ não for vazio.

Definição 2.4. Dizemos que a ação do semigrupo S em um espaço topológico M é uma **ação aberta** se para todo $s \in S$ e todo conjunto aberto V de M , sV é um conjunto aberto em M .

Proposição 2.5. *Se a ação do semigrupo S no espaço topológico M for aberta então o conjunto $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante se ele não for vazio.*

Demonstração: De fato, tome $z \in S^*\overline{S^*X}$, ou seja, existe $s \in S$ e $u \in \overline{S^*X}$ tal que $sz = u$. Seja V uma vizinhança de z . Como a ação de S é aberta em M temos que sV é um aberto e sV é uma vizinhança de u . Como $u \in \overline{S^*X}$ temos que $sV \cap S^*X \neq \emptyset$. Tome $b \in sV \cap S^*X$, então existe $v \in V$ tal que $sv = b$ e existe $s' \in S$ e $x \in X$ tal que $s'b = x$, assim temos que $s'sv = x$ para algum $x \in X$, ou seja, $(s's)v = x$. Como $s's \in S$ segue que $v \in S^*X$, concluindo que $V \cap S^*X \neq \emptyset$ e que $z \in \overline{S^*X}$. Portanto $\overline{S^*X}$ é regressivamente invariante. □

Note que a condição de $\overline{S^*X}$ ser não vazio é importante, pois existem casos onde S^*X é um conjunto vazio, o que mostraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.6. *Consideremos o semigrupo \mathbb{R}_*^+ com a operação interna usual da soma e o espaço topológico \mathbb{R}^+ . Defina μ como,*

$$\begin{aligned} \mu : \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ (s, x) &\mapsto \mu(s, x) = s + x \end{aligned}$$

note que a operação da soma é associativa em \mathbb{R}^+ , assim temos que μ é uma ação de \mathbb{R}_^+ em \mathbb{R}^+ . Note que o conjunto $X = \{0\}$ tem como órbita regressiva o conjunto vazio. De fato, como $s + y > 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^+$ e $s \in \mathbb{R}_*^+$ então*

$$S^*0 = \{y \in \mathbb{R}^+; \text{ existe } s \in \mathbb{R}_*^+ \text{ tal que } s + y = 0\} = \emptyset.$$

A partir de agora definiremos classes importantes de conjuntos progressivamente invariantes e conjuntos invariantes.

Definição 2.7. Um subconjunto $X \subset M$ é um conjunto minimal para a ação de S se

1. X é não vazio, fechado e invariante pela ação de S .
2. X é minimal (com respeito a inclusão) satisfazendo a propriedade 1.

Usando a definição apresentada acima temos o seguinte resultado.

Proposição 2.8. Um subconjunto não vazio X de M é um conjunto minimal para a ação de S se e somente se $X = \overline{Sx}$ para todo $x \in X$.

Demonstração: De fato, suponha primeiro que X é um conjunto minimal para a ação de S . Então $Sx \subset X$ para todo $x \in X$ e conseqüentemente $\overline{Sx} \subset \overline{X} = X$. Mostramos anteriormente que \overline{Sx} é fechado e progressivamente invariante. Usando o fato que X é minimal com respeito a inclusão satisfazendo as propriedades 1 e 2 acima, obtemos que $\overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$. Para a recíproca suponha que $\overline{Sx} = X$ para todo $x \in X$. Segue imediatamente que X é fechado e progressivamente invariante. Seja $X' \subset X$ satisfazendo a propriedade 1. Então $\overline{Sx'} \subset X'$ para todo $x' \in X'$, mas $x' \in X$ e por hipótese $\overline{Sx'} = X$ concluindo assim que $X' = X$. Portanto, X é minimal para a ação de S .

□

Exemplo 2.9. Tome $M = \{1, 2, 3\}$ com a topologia discreta. Seja $f : M \rightarrow M$ definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 1$ e $f(3) = 3$ e $id : M \rightarrow M$ a aplicação identidade. Note que o conjunto $S = \{f, id\}$ é um semigrupo com a operação interna de composição de funções. Definamos a ação, $\mu : S \times M \rightarrow M$ por $\mu(f, x) = f(x)$ e $\mu(id, x) = id(x)$. Por construção, a propriedade associativa é satisfeita e que as aplicações μ_f e μ_{id} são contínuas. Agora, note que os conjuntos $\{1, 2\}$ e $\{3\}$ são invariantes. De fato,

$$S\{1, 2\} = \{1, 2\} = S^*\{1, 2\} \text{ e } S\{3\} = \{3\} = S^*\{3\}.$$

Como $S1 = S^*1 = S2 = S^*2 = \{1, 2\}$, temos que não existe subconjunto de $\{1, 2\}$ invariante. Obtemos assim que $\{1, 2\}$ é minimal com respeito a inclusão. Portanto, $\{1, 2\}$ e $\{3\}$ são conjuntos minimais para a ação de S .

A seguir, definiremos reversibilidade para semigrupos, onde em seguida, mostraremos alguns resultados sobre os conjuntos minimais.

Definição 2.10. Um semigrupo S é chamado **reversível a direita** se $Ss \cap St \neq \emptyset$ para todo $s, t \in S$, no caso em que $sS \cap tS \neq \emptyset$ para todo $s, t \in S$ o semigrupo S é chamado de **reversível a esquerda**. Um semigrupo S é chamado **reversível** se ele é reversível a direita e a esquerda.

Exemplo 2.11. Para $n \in \mathbb{N}$, consideremos o semigrupo \mathbb{R}^n munido da operação interna da soma. Mostraremos que \mathbb{R}^n é reversível. De fato, para $s, t \in \mathbb{R}^n$ temos que $t\mathbb{R}^n = s\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n t = \mathbb{R}^n s = \mathbb{R}^n$, ou seja, $t\mathbb{R}^n \cap s\mathbb{R}^n \neq \emptyset$ e $\mathbb{R}^n t \cap \mathbb{R}^n s \neq \emptyset$ para todo $s, t \in \mathbb{R}^n$.

Proposição 2.12. Seja S um semigrupo reversível a direita. Suponha que a ação de S em M é aberta. Então, um subconjunto X de M é minimal para a ação de S se e somente se $\overline{S^*Sx} = X$ para todo $x \in X$.

Demonstração: Suponha que X é minimal para a ação de S e tome $x \in X$. Como X é invariante e fechado, temos que $\overline{S^*Sx} \subset X$. Note que $\overline{S^*Sx}$ é regressivamente invariante, assim podemos tomar $t \in S$, $x \in \overline{S^*Sx}$ e uma vizinhança aberta V de tx . Como $\mu_t^{-1}(V)$ é uma vizinhança aberta de x , existe $y \in \mu_t^{-1}(V) \cap S^*Sx$, onde $ty \in V$ e $sy \in Sx$ para algum $s \in S$. Como S é reversível a direita, para $\tau \in Ss \cap St$ temos que $\tau y \in Ssy \cap Sty \subset Sx$. Logo, $ty \in V \cap S^*SX$ resultando que $tx \in \overline{S^*Sx}$ e que $\overline{S^*Sx}$ é invariante. Pela minimalidade de X , segue que $\overline{S^*Sx} = X$. Reciprocamente, suponha que $\overline{S^*Sx} = X$ para todo $x \in X$. Então X é um subconjunto invariante e fechado de M . Seja Y um subconjunto não vazio de X que é fechado e invariante. Tomando um ponto $y \in Y$, temos, $\overline{S^*Sy} \subset Y$. Desde que $\overline{S^*Sx} = X$ conclui-se que $X = Y$. Portanto X é um conjunto minimal para a ação de S .

□

A seguir, definiremos conjuntos limites para uma família de subconjuntos de um semigrupo. Este conceito, será usado para definirmos os conjuntos atratores e os conjuntos repulsores.

De agora em diante, \mathcal{F} denota uma família de subconjuntos do semigrupo S . Para um subconjunto X de M e $A \in \mathcal{F}$ definimos

$$AX = \{y \in M; \text{existe } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tal que } sx = y\} \text{ e}$$

$$A^*X = \{y \in M; \text{existe } s \in A \text{ e } x \in X \text{ tal que } sy = x\}.$$

Definição 2.13. Define-se o conjunto ω -**limite** de $X \subset M$ para a família \mathcal{F} por,

$$\omega(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX}.$$

Também definimos o conjunto ω^* -**limite** de X para a família \mathcal{F} por

$$\omega^*(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A^*X}.$$

Os conjuntos ω -limite e ω^* -limite de X são chamados **conjuntos limite** de X .

Definição 2.14. Um *fluxo* (ou *sistema dinâmico*) de M é uma aplicação $\phi : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ tal que $\phi(0, x) = x$ e $\phi(s+t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in M$. Um *semi-fluxo* de M é uma aplicação $\phi : \mathbb{R}^+ \times M \rightarrow M$ tal que $\phi(0, x) = x$ e $\phi(s+t, x) = \phi(s, \phi(t, x))$ para todo $t, s \in \mathbb{R}^+$ e $x \in M$.

No exemplo a seguir, mostraremos que a definição acima generaliza o conceito de conjunto limite para fluxos e semi-fluxos.

Exemplo 2.15. Seja M um espaço métrico, munido da topologia da métrica e o semi-grupo $S = \mathbb{R}$ ou \mathbb{Z} , com operação interna da adição. Suponhamos que ϕ é um fluxo em M . Definimos a ação a esquerda de S em M por $sx = \phi(s, x)$. Seja \mathcal{F} a família de todos os conjuntos $A_t = \{s \in S; s \geq t\}$, com $t \geq 0$. Para $A_t \in \mathcal{F}$ temos

$$A_t X = \{y \in M : \text{existe } s \geq t \text{ e } x \in X \text{ com } \phi(s, x) = y\} = \bigcup_{s \geq t} \phi(s, X) \text{ e}$$

$$\begin{aligned}
A_t^*X &= \{y \in M : \text{existe } s \geq t \text{ e } x \in X \text{ com } \phi(s, y) = x\} \\
&= \{y \in M : \text{existe } s \geq t \text{ e } x \in X \text{ com } \phi^{-1}(s, x) = \phi(-s, x) = y\} = \bigcup_{r \leq -t} \phi(r, X).
\end{aligned}$$

Portanto, obtém que

$$\omega(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{t > 0} (\overline{\bigcup_{s \geq t} \phi(s, X)}) \text{ e } \omega^*(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{t > 0} (\overline{\bigcup_{r \geq -t} \phi(r, X)})$$

que são os conjuntos limites usuais para um fluxo. No caso onde o semigrupo $S = \mathbb{R}^+$ ou \mathbb{Z}^+ e tomando a família \mathcal{F} como descrito acima, temos que os conjuntos limites são

$$\omega(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{t \in S} (\overline{\bigcup_{s \geq t} \phi(s, X)}) \text{ e } \omega^*(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{t \in S} (\overline{\bigcup_{s \geq t} \phi^{-1}(r, X)}).$$

que são os conjuntos limites para semifluxos.

A generalização do conceito de conjuntos limite para fluxos n -dimensionais será apresentada no exemplo a seguir.

Definição 2.16. Para $n \in \mathbb{N}$, sejam M um espaço métrico munido da topologia da métrica e o semigrupo \mathbb{R}^n munido da operação interna da adição. Um fluxo n -dimensional é uma ação do semigrupo \mathbb{R}^n no espaço topológico M .

Exemplo 2.17. Seja M um espaço topológico e $S = \mathbb{R}^n$. Seja ψ um fluxo n -dimensional de M . Para $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$ e $x \in M$ denotaremos a ação $\psi((t_1, \dots, t_n), x) = (t_1, \dots, t_n) \cdot x$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$, considere o hiper-espaço

$$A_i(t) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i > t\}.$$

Tomando a família, $\mathcal{F}_i = \{A_i(t); t \geq 0\}$, temos que

$$\begin{aligned}
\omega(X, \mathcal{F}_i) &= \bigcap_{t \geq 0} A_i X \\
&= \{y \in M : \text{existe } (t_1^k, \dots, t_n^k) \text{ com } t_i^k \rightarrow \infty \text{ e } x_k \in X \text{ tal que } (t_1^k, \dots, t_n^k) \cdot x_k \rightarrow y\} \text{ e} \\
\omega^*(X, \mathcal{F}_i) &= \bigcap_{t \geq 0} A_i^* X
\end{aligned}$$

$$= \{y \in M : \text{existe } (t_1^k, \dots, t_n^k) \text{ com } t_i^k \rightarrow -\infty \text{ e } x_k \in X \text{ tal que } (t_1^k, \dots, t_n^k) \cdot x \rightarrow y\}.$$

Agora apresentaremos algumas hipóteses sobre a família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo S . A importância destas hipóteses é que se a família satisfizer algumas destas hipóteses, poderemos concluir que os conjuntos limites são progressivamente invariante ou regressivamente invariante.

Definição 2.18. *A família \mathcal{F} satisfaz,*

1. *A hipótese H_1 , se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$.*
2. *A hipótese H_2 , se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$.*
3. *A hipótese H_3 , se para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$.*

Na próxima proposição mostraremos que ω -limite é progressivamente invariante se este for não vazio e a família de subconjuntos de um semigrupo satisfaz a hipótese H_1 .

Proposição 2.19. *Suponha que a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_1 . Então $\omega(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante se este é não vazio.*

Demonstração: Dado $z \in \omega(X, \mathcal{F})$, $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$. Como \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_1 , existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $sB \subset A$. Pela definição de ω -limite, $z \in \overline{BX}$. Pela continuidade da ação de s temos que

$$sz \in \overline{sBX} \subset \overline{AX}.$$

Como vale para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que $sz \in \omega(X, \mathcal{F})$ e $S\omega(X, \mathcal{F}) \subset \omega(X, \mathcal{F})$. Portanto $\omega(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. □

Observe que com as mesmas hipóteses da proposição anterior, se $x \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) = \overline{Ax}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. De fato, como $\omega(x, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante temos

$$Ax \subset Sx \subset S\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F}),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Como $\omega(x, \mathcal{F})$ é fechado temos que $\overline{Ax} \subset \omega(x, \mathcal{F})$ para todo $A \in \mathcal{F}$. Usando a definição de $\omega(x, \mathcal{F})$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset AX \subset \overline{AX}$, para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proposição 2.20. *Se a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 e $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é não vazio, então $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante.*

Demonstração: Tome $z \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$. Como \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Aplicando a definição de ω -limite temos que $z \in \overline{B^*X}$. Seja U um aberto que contém sz . Pela continuidade da ação de s tem-se que $\mu_s^{-1}(U)$ é um aberto que contém z . Obtemos assim, $\mu_s^{-1}(U) \cap B^*X \neq \emptyset$. Tomando $w \in \mu_s^{-1}(U) \cap B^*X$, temos que existe $b \in B$ e $x \in X$ tal que $bw = x$. Além disso $sw \in U$. Como $B \subset As$ obtemos que $U \cap A^*X \neq \emptyset$, concluindo que $sz \in \overline{A^*X}$. Como A é arbitrário tem-se que $sz \in \overline{A^*X}$ para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, $sz \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, provando que $S\omega^*(X, \mathcal{F}) \subset \omega^*(X, \mathcal{F})$. Portanto $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. □

Proposição 2.21. *Suponha que a ação de S em M é aberta, $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é não vazio e que a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_2 . Então $\omega^*(X, \mathcal{F})$ é regressivamente invariante.*

Demonstração: Tomemos $A \in \mathcal{F}$, $z \in \omega^*(X, \mathcal{F})$ e $w \in S^*z$. Iremos mostrar que $w \in \overline{A^*X}$, obtendo assim que $w \in \omega^*(X, \mathcal{F})$, o que mostra o resultado. De fato, dado um aberto U de w existe $s \in S$ tal que $sw = z$. Como a ação é aberta tem-se que sU é uma vizinhança aberta de z . Pela hipótese H_2 existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $Bs \subset A$. Assim, $z \in \overline{B^*X}$ e obtemos que $sU \cap B^*X \neq \emptyset$. Temos também que existe $p \in U$ tal que $sp \in B^*X$. Portanto existe $b \in B$ tal que $b(sp) = (bs)p \in X$. Como $bs \in A$, temos que $U \cap A^*X \neq \emptyset$ e concluindo que $w \in \overline{A^*X}$. □

Aplicando a última proposição para o caso onde $X = \{x\}$ e $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$, temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) = \overline{A^*x}$ para todo $A \in \mathcal{F}$. De fato, como $\omega^*(x, \mathcal{F})$ é regressivamente invariante e usando o fato de que $x \in \omega^*(x, \mathcal{F})$ temos

$$A^*x \subset S^*x \subset S^*\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \omega^*(x, \mathcal{F}),$$

para todo $A \in \mathcal{F}$. Pela definição de ω^* -limite temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset A^*x$ para todo $A \in \mathcal{F}$.

Proposição 2.22. *Seja \mathcal{F} uma família que satisfaz a hipótese H_1 . Suponha que $X \subset M$ é um subconjunto minimal pela ação de S e que $\omega(x, \mathcal{F})$ é não vazio para todo $x \in X$. Então $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$. Reciprocamente temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é minimal se $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$ e $X \neq \emptyset$.*

Demonstração: Suponha que X é um conjunto minimal pela ação de S . Para $x \in X$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset X$. Como $\omega(x, \mathcal{F})$ é não vazio temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é fechado e progressivamente invariante. Assim, pela minimalidade de X que satisfaz estas propriedades, obtém-se que $\omega(x, \mathcal{F}) = X$. Por outro lado suponha que $\omega(x, \mathcal{F}) = X$ para todo $x \in X$. De imediato temos que X é fechado e progressivamente invariante. Resta mostrar que é minimal com essas propriedades. De fato, seja um subconjunto Y não vazio, progressivamente invariante e fechado de X . Tome $y \in Y$, como Y é progressivamente invariante temos que $\omega(y, \mathcal{F}) \subset Y$, mas por hipótese $\omega(y, \mathcal{F}) = X$. Assim $X \subset Y$ concluindo que X é um conjunto minimal pela ação de S .

□

Uma condição apresentada nas proposições anteriores era que ω -limite e ω^* -limite sejam não vazios. De fato, pois podemos ter casos em que o ω -limite e o ω^* -limite sejam vazios. Como mostraremos no exemplo a seguir.

Exemplo 2.23. *Seja $M = \mathbb{R}_*^+$ com a topologia induzida de \mathbb{R} . Tome o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna de multiplicação e define $\mu : S \times M \rightarrow M$ como $\mu(s, x) = s \cdot x$, onde \cdot é a multiplicação usual. Note que para todo $s \in S$, μ_s é um homeomorfismo de M em M . Como a multiplicação satisfaz a propriedade associativa, temos que μ é uma ação de S em M . Agora considere a família $\mathcal{F} = \{(a, +\infty); a > 0\}$. Note que para $x \in \mathbb{R}_*^+$,*

$$\begin{aligned}\omega(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} [ax, +\infty) = \emptyset \quad e \\ \omega^*(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} (0, \frac{x}{a}] = \emptyset.\end{aligned}$$

O fato dos conjuntos limites serem vazios pode ocorrer porque o espaço M não é compacto. Em outra situação, mesmo sobre um espaço compacto, os conjuntos ω^* -limites pode ser vazios se a ação não for sobrejetiva (Ver Exemplo 2.24 na próxima seção).

2.2 Atratores e repulsores

Nesta seção apresentaremos condições para que um conjunto seja atrator ou repulsor, também definiremos repulsor complementar de um conjunto atrator e mostraremos relações entre esses conjuntos. Usaremos, nesta seção, resultados topológicos sobre redes, subredes e base de filtro encontrados por exemplo em [10].

Nesta seção assumiremos que, M é um espaço topológico compacto, \mathcal{F} é uma família de subconjuntos de um semigrupo S a qual é uma base de filtro de S , ou seja, dados $A, B \in \mathcal{F}$ existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset A \cap B$. Observe que se o espaço topológico M for compacto, temos que $\omega(X, \mathcal{F}) \neq \emptyset$ para X um subconjunto não vazio de M . De fato, como \mathcal{F} é uma base de filtro, temos que \mathcal{F} satisfaz a hipótese da intersecção finita. Assim a família $\{\overline{AX}; A \in \mathcal{F}\}$ também satisfaz a hipótese de intersecção finita. Como M é compacto, podemos concluir que $\omega(X, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AX} \neq \emptyset$. Para o ω^* -limite ser não vazio é necessário que $A^*X \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$. No exemplo a seguir mostraremos um caso onde o ω^* -limite é um conjunto vazio em um espaço topológico compacto.

Exemplo 2.24. *Sejam o semigrupo \mathbb{R}_*^+ munido da operação interna da soma e $M = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty_1\}$ a compactificação de Alexandroff do espaço topológico \mathbb{R}^+ munido da topologia usual. Defina μ de $\mathbb{R}_*^+ \times M$ em M como $\mu(s, x) = s + x$ se $x \in \mathbb{R}_*^+$ e $\mu(s, x) = \infty_1$ se $x = \infty_1$. Temos que μ define uma ação de \mathbb{R}_*^+ em M . De fato, como a operação da soma é associativa, temos que para $x \in \mathbb{R}^+$ e $t, s \in \mathbb{R}_*^+$ vale $\mu(t, \mu(s, x)) = t + (s + x) = (t + s)x = \mu(t + s, x)$. Para $x = \infty_1$ temos que,*

$$\mu(t, \mu(s, \infty_1)) = \mu(t, \infty_1) = \infty_1 = \mu(t + s, \infty_1).$$

Consideremos a família $\mathcal{F} = \{A_s = \{t \in \mathbb{R}_^+; t > s\}; s \geq 0\}$ de subconjuntos de \mathbb{R}_*^+ ,*

temos que \mathcal{F} é uma base de filtro de \mathbb{R}_*^+ . De fato, tome $A_s, A_t \in \mathcal{F}$ com $s, t \geq 0$, assumindo que $s < t$ temos que $A_s \cap A_t = A_s$. Tomando $B = A_s \in \mathcal{F}$ temos $B \subset A_s \cap A_t$. Temos que para todo $s \geq 0$, $A_s^*0 = \{y \in M; \text{ existe } t \in \mathbb{R}_*^+ \text{ com } t + y = 0\} = \emptyset$, pois para quaisquer $t \in \mathbb{R}_*^+$ e $y \in M$ temos que $t + y \neq 0$. Assim, $\omega^*(0, \mathcal{F}) = \emptyset$.

Definição 2.25. Um \mathcal{F} -atrator para a ação de S no espaço topológico M é um conjunto \mathcal{A} que admite uma vizinhança V tal que $\omega(V, \mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Um \mathcal{F} -repulsor é um conjunto \mathcal{R} que tem uma vizinhança U tal que $\omega^*(U, \mathcal{F}) = \mathcal{R}$. As vizinhanças V e U são chamadas respectivamente de **vizinhança atratora** de \mathcal{A} e **vizinhança repulsora** de \mathcal{R} . O conjunto vazio e M serão ambos definidos como \mathcal{F} -atratores e \mathcal{F} -repulsores.

Como vimos no exemplo 2.15, assumindo a família $\mathcal{F} = \{A_t = \{s \in \mathbb{R}; s \geq t\}\}$ com $t \geq 0$, os conjuntos ω -limite e ω^* -limite referente a esta família coincidem com os conjuntos ω -limite e ω^* -limite da teoria de fluxos. Sendo assim, tomando esta família \mathcal{F} temos que a definição de \mathcal{F} -atrator e \mathcal{F} -repulsor coincide com a definição de conjunto atrator e conjunto repulsor para fluxos.

Exemplo 2.26. Em \mathbb{R}^2 , consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1' = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2)\text{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right), \\ x_2' = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2)\text{sen}\left(\frac{\pi}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}\right). \end{cases}$$

Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas polares, $r \cos(\theta) = x_1$ e $r \text{sen}(\theta) = x_2$, onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} r' = r^3 \text{sen}\left(\frac{\pi}{r}\right), \\ \theta' = 1. \end{cases}$$

Assim, tomando $M = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$ com a topologia induzida de \mathbb{R}^2 . Sejam a ação de \mathbb{R} em M e a família \mathcal{F} como no exemplo 2.15. Temos que a origem é o único ponto singular, assim $\omega(0, \mathcal{F}) = \omega^*(0, \mathcal{F}) = \{0\}$. Observe que se $r = \frac{1}{n}$ onde $n \in \mathbb{N}$ temos $r' = 0$ e o fluxo definido pelo sistema é a circunferência de raio $\frac{1}{n}$ centrada na origem de \mathbb{R}^2 . Denotando esta circunferência por C_n , para cada $n \in \mathbb{N}$ temos também que se $x \in C_n$ então $\omega(x, \mathcal{F}) = \omega^*(x, \mathcal{F}) = C_n$. Se $\frac{1}{n+1} < \|x\| < \frac{1}{n}$ temos que as soluções estão contidas entre as circunferências C_{n+1} e C_n , sendo assim temos os seguintes casos. Se

n é par e analisando o sistema anterior temos que $r' = r^3 \sin(\frac{\pi}{r}) > 0$ para $n < r < n+1$, assim as soluções são espirais que se aproximam de C_n quando $t \rightarrow \infty$ e de C_{n+1} quando $t \rightarrow -\infty$. Desta forma temos $\omega(x, \mathcal{F}) = C_n$ e $\omega^*(x, \mathcal{F}) = C_{n+1}$. Se n é ímpar temos que $r' = r^3 \sin(\frac{\pi}{r}) < 0$ para $n < r < n+1$ então os campos de soluções são espirais que se aproximam de C_{n+1} quando $t \rightarrow \infty$ e de C_n quando $t \rightarrow -\infty$. Desta forma temos $\omega(x, \mathcal{F}) = C_{n+1}$ e $\omega^*(x, \mathcal{F}) = C_n$. Sabendo disso, temos que para n par C_n é um \mathcal{F} -atrator e para n ímpar C_n é um \mathcal{F} -repulsor se n for ímpar. De fato, mostraremos para n par. Seja $V_n = \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{n+1} < \|x\| < \frac{1}{n-1}\}$ temos que V_n é uma vizinhança aberta de C_n e como visto $\omega(V_n, \mathcal{F}) = C_n$. Para $n = 1$, seja a vizinhança $V_1 = \{x \in \mathbb{R}; \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1\}$. Como vimos $\omega^*(V_1, \mathcal{F}) = C_n$. Para o caso onde n é ímpar a demonstração é análoga com o caso onde n é par. Na figura abaixo mostra o comportamento da ação do semigrupo \mathbb{R} no espaço M .

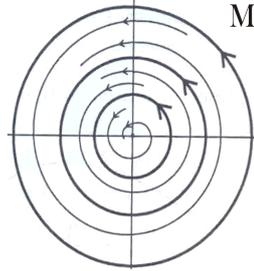


Figura 2.1:

No próximo resultado, mostraremos que existe um conjunto A pertencente a família \mathcal{F} tal que a vizinhança atratora de um conjunto atrator e a vizinhança repulsora de um conjunto repulsor, são invariantes por A .

Proposição 2.27. *Dado um \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} com uma vizinhança atratora V então existe $A \in \mathcal{F}$ com $\overline{AV} \subset \text{int}(V)$, e para todo \mathcal{F} -repulsor \mathcal{R} com uma vizinhança repulsora U existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{A^*U} \subset \text{int}(U)$.*

Demonstração: Iremos demonstrar para o caso do \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} , pois a demonstração para o caso do \mathcal{F} -repulsor \mathcal{R} é análoga. Suponhamos por contradição que para todo $A \in \mathcal{F}$ existe $x_A \in \overline{AV} \setminus \text{int}(V)$. Como \mathcal{F} é uma base de filtro consideremos a rede $(x_A)_{A \in \mathcal{F}}$ em $M \setminus \text{int}(V)$. Desde que $M \setminus \text{int}(V)$ é compacto temos uma subrede $(x_{A_i})_{i \in I}$ que converge para algum ponto $x \in M \setminus \text{int}(V)$. Para $A \in \mathcal{F}$ existe um índice $j \in I$ tal que $A_j \subset A$. Assim para todo $i \geq_I j$, temos $A_i \subset A_j \subset A$ e

$$x_{A_i} \in \overline{A_i V} \subset \overline{AV}.$$

Daí $x \in \overline{AV}$. Portanto $x \in \omega(V, \mathcal{F}) = \mathcal{A} \subset \text{int}(V)$, o que é uma contradição.

□

Dado um \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} com uma vizinhança atratora V temos, pela proposição anterior, que existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{AV} \subset \text{int}(V)$. Sendo assim, tomemos o conjunto aberto $U = M \setminus \overline{AV}$. Note que $A^*U \subset M \setminus \text{int}(V)$. De fato, suponha por contradição que existe $x \in A^*U \cap \text{int}(V)$. Então existe $a \in A$ e $u \in U$ tal que $ax = u$, ou seja, $u \in AV$ o que é uma contradição com a definição de U . Assim, obtemos que

$$\omega^*(U, \mathcal{F}) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{B^*U} \subset \overline{A^*U} \subset M \setminus \text{int}(V),$$

como $\overline{AV} \subset \text{int}(V)$, temos que $M \setminus \text{int}(V) \subset M \setminus \overline{AV} = U$, mostrando que $\omega^*(U, \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -repulsor com vizinhança repulsora U .

A partir daqui assumiremos que a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 . A seguir mostraremos que $\omega^*(U, \mathcal{F})$ é formado pelos pontos, tais que o ω -limite não intercepta o conjunto atrator.

Lema 2.28. *Sejam \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator e U como foi definido anteriormente então*

$$\omega^*(U, \mathcal{F}) = \{x \in M : \omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset\}.$$

Demonstração: Seja V a vizinhança atratora de \mathcal{A} . Como a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 , $\omega^*(U, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante. Assim, dado $x \in \omega^*(U, \mathcal{F})$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega^*(U, \mathcal{F}) \subset M \setminus \text{int}(V)$. Usando o fato que $\mathcal{A} \subset \text{int}(V)$, obtemos $\omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Por outro lado, tome $x \in M$ com $\omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. Assim Sx não intercepta V . De fato, suponha que existe $s \in S$ tal que $sx \in V$. Pela hipótese H_3 , para todo $A \in \mathcal{F}$ existe $B' \in \mathcal{F}$ tal que $B' \subset As$ (1). Denotando \mathcal{F}' a família que contém todos os conjuntos B' que satisfazem (1) temos que $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$. Sendo assim, como $B'x \subset Asx$ temos que

$$\omega(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} \overline{Bx} \subset \bigcap_{B' \in \mathcal{F}'} \overline{B'x} \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{Asx} = \omega(sx, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A},$$

o que é uma contradição. Daí $Sx \subset U$ e $x \in \omega^*(U, \mathcal{F})$. Portanto $\omega^*(U, \mathcal{F}) = \{x \in M : \omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset\}$

□

Definição 2.29. *O conjunto $\mathcal{A}^* = \omega^*(U, \mathcal{F})$ definido acima é chamado **repulsor complementar** de \mathcal{A} . Chamaremos o par $(\mathcal{A}, \mathcal{A}^*)$ de par atrator-repulsor.*

Por definição, temos que se \mathcal{A}^* é não vazio então \mathcal{A}^* é progressivamente invariante. Temos também que \mathcal{A} e \mathcal{A}^* são disjuntos. Na proposição a seguir mostraremos que o repulsor complementar é invariante se ele não for vazio.

Proposição 2.30. *Seja \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator. Então o seu repulsor complementar \mathcal{A}^* de \mathcal{A} é invariante, se é não vazio, e*

$$\mathcal{A}^* = M \setminus \{x \in M : \omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}\}.$$

Demonstração: Dado $x \in \mathcal{A}^*$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^*$ pois \mathcal{A}^* é progressivamente invariante. Assim, $\omega(x, \mathcal{F})$ não está contido em \mathcal{A} . Por outro lado, tome $x \in M$ tal

que $\omega(x, \mathcal{F})$ não está contido em \mathcal{A} . Se $x \notin \mathcal{A}^*$, nós temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Tomando V uma vizinhança atratora de \mathcal{A} temos que existe $s \in S$ tal que $sx \in V$. Assim $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(sx, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$, o que é uma contradição, ou seja, $x \in \mathcal{A}^*$. Assim podemos concluir que $\mathcal{A}^* = M \setminus \{x \in M : \omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}\}$. Agora, resta mostrar que \mathcal{A}^* é regressivamente invariante. Sejam $x \in \mathcal{A}^*$ e $y \in S^*x$. Tomando $s \in S$ tal que $sy = x$, temos que $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \omega(x, \mathcal{F})$. Como $\omega(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, segue que, $\omega(y, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$, ou seja, $y \in \mathcal{A}^*$, concluindo que \mathcal{A}^* é regressivamente invariante .

□

Mostraremos a seguir que todo \mathcal{F} -repulsor é um repulsor complementar de um \mathcal{F} -atrator.

Proposição 2.31. *Seja \mathcal{R} um \mathcal{F} -repulsor então existe um \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} tal que $\mathcal{R} = \mathcal{A}^*$.*

Demonstração: Suponha que $\mathcal{R} \neq M$. Dada uma vizinhança repulsora U de \mathcal{R} tome $A \in \mathcal{F}$ tal que $A^*U \subset \text{int}(U)$. Denotemos $V = M \setminus \overline{A^*U}$. É claro que V é aberto e $AV \subset M \setminus U$. Assim $\omega(V, \mathcal{F}) \subset M \setminus \text{int}(U) \subset V$, concluindo que $\mathcal{A} = \omega(V, \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -atrator. Desde que \mathcal{R} é progressivamente invariante e $\mathcal{R} \cap \mathcal{A} = \emptyset$, segue da proposição anterior que $\mathcal{R} \subset \mathcal{A}^*$. Por outro lado, se $x \notin \mathcal{R}$ então para todo $A \in \mathcal{F}$ temos que $x \notin A^*U$. Daí, $x \in V$ e $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \omega(V, \mathcal{F}) = \mathcal{A}$, concluindo que $x \notin \mathcal{A}^*$. Portanto temos que $\mathcal{A}^* = \mathcal{R}$.

□

Na próxima proposição, mostraremos o que acontece com o ω -limite e ω^* -limite de um ponto que não pertence a um atrator e seu repulsor complementar. O resultado é válido quando $\mathcal{A}^* \neq \emptyset$.

Proposição 2.32. *Seja \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator. Se $x \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^*$ então $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^*$ e $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$.*

Demonstração: Como $x \notin \mathcal{A}^*$ então pela definição de \mathcal{A}^* , temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Agora suponha que existe $y \in \omega^*(x, \mathcal{F}) \setminus \mathcal{A}^*$. Como $\omega^*(x, \mathcal{F})$ é progressivamente invariante e $y \notin \mathcal{A}^*$, então $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \omega^*(x, \mathcal{F}) \cap \mathcal{A}$. Assim, para uma vizinhança atratora V

de \mathcal{A} temos $\overline{A^*x} \cap V \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{F}$, ou seja, para $A \in \mathcal{F}$ existe $z \in V$ tal que para toda vizinhança de z intercepta A^*x , em particular o próprio conjunto V . Sendo assim, como $A^*x \cap V \neq \emptyset$, existem $w \in V$ e $s \in A$ tal que $sw = x$, ou seja, $x \in AV$. Como vale para todo $A \in \mathcal{F}$, temos que

$$x \in \bigcap_{A \in \mathcal{F}} AV \subset \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AV} = \omega(V, \mathcal{F}) = \mathcal{A},$$

o que é uma contradição. Concluindo que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^*$.

□

Observe que se $\mathcal{A}^* = \emptyset$, então $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$, para todo $x \in M$, e $\omega^*(x, \mathcal{F}) = \emptyset$ para todo x fora de \mathcal{A} .

Agora, mostraremos que a união de dois conjuntos \mathcal{F} -atratores é um conjunto \mathcal{F} -atrator.

Proposição 2.33. *Se \mathcal{A} e \mathcal{B} são \mathcal{F} -atratores, então $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um \mathcal{F} -atrator.*

Demonstração: Sejam V e W vizinhanças atratoras de \mathcal{A} e \mathcal{B} respectivamente. Note que $V \cup W$ é uma vizinhança de $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ e

$$\omega(V \cup W, \mathcal{F}) = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{A(V \cup W)} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AV} \cup \overline{AW}.$$

Assim $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} \subset \omega(V, \mathcal{F}) \cup \omega(W, \mathcal{F}) \subset \omega(V \cup W, \mathcal{F})$. Por outro lado, como $x \in \omega(V \cup W, \mathcal{F})$ tal que $x \notin \mathcal{A}$. Como $x \notin \mathcal{A}$, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $x \notin \overline{AV}$, daí $x \in \overline{AW}$. Como \mathcal{F} é uma base de filtro de subconjuntos de S , para $B \in \mathcal{F}$ existe $C \in \mathcal{F}$, onde $C \subset A \cup B$. Como $x \notin \overline{CV}$, temos que $x \in \overline{CW} \subset \overline{BW}$ e $x \in \mathcal{B}$, concluindo que $\omega(V \cup W, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$. Portanto $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ é um \mathcal{F} -atrator com vizinhança atratora $V \cup W$.

Recorrência por cadeias e decomposição de Morse.

Na primeira seção deste capítulo, desenvolvemos a teoria de recorrência por cadeias para ação de um semigrupo S em um espaço topológico M compacto Hausdorff, apresentada em [2]. Mostramos que a teoria de recorrência por cadeias para sistemas de controle e fluxos apresentadas no apêndice B de [6] é um caso particular desta teoria de recorrência por cadeias para ações de semigrupos em um espaço topológico. Na segunda seção desenvolvemos a teoria de decomposição de Morse para ações de um semigrupo S em um espaço topológico M compacto e Hausdorff e relacionamos com a teoria de decomposição de Morse para fluxos.

3.1 Recorrência por cadeias

Antes de desenvolver a teoria de recorrência por cadeias para ação de um semigrupo S em um espaço topológico Hausdorff M , primeiro mostraremos as condições para que uma família de coberturas abertas de M seja admissível.

Dados \mathcal{U} e \mathcal{V} coberturas abertas do espaço topológico M , dizemos que \mathcal{U} é um refinamento de \mathcal{V} e escreveremos como $\mathcal{U} \preceq \mathcal{V}$, se para dado $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que U esteja contido em V . Denotaremos $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, se para todo $V, V' \in \mathcal{V}$, com $V \cap V' \neq \emptyset$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V' \subset U$.

Para uma cobertura aberta \mathcal{U} de M e um subconjunto compacto $K \subset M$,

denotemos

$$[\mathcal{U}, K] = \{U \in \mathcal{U} : K \cap U \neq \emptyset\}.$$

Seja $Y \subset M$ um conjunto aberto, $K \subset Y$ um subconjunto compacto de M , então uma cobertura aberta \mathcal{U} de M é **K -subordinada** de Y se para todo $U \in [\mathcal{U}, K]$ implica que $U \subset Y$.

Uma família \mathcal{O} de coberturas abertas de M é dita **admissível** se satisfaz as seguintes propriedades:

1. Para cada $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$, existe uma cobertura aberta $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$.
2. Dado $Y \subset M$ um conjunto aberto e K um compacto de M contido em Y então existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ que é K -subordinada de Y .

Em [10] na seção 20, vê-se que a família de todas as coberturas abertas de M é admissível se M é Hausdorff e compacto.

A partir daqui denotaremos por \mathcal{O} a família de todas as coberturas abertas de M , assumiremos que M é compacto e \mathcal{F} uma base de filtro do semigrupo S . Assim temos que os conjuntos ω -limites para a família \mathcal{F} são não vazios.

Definição 3.1. Para $x, y \in M$, uma cobertura aberta \mathcal{U} de M e $A \subset S$, uma **(\mathcal{U}, A) -cadeia** de x para y é uma sequência $x_0 = x, \dots, x_n = y$ em M , $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ e conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tal que $a_i x_i, x_{i+1} \in U_i$ para todo $i = 0, \dots, n-1$.

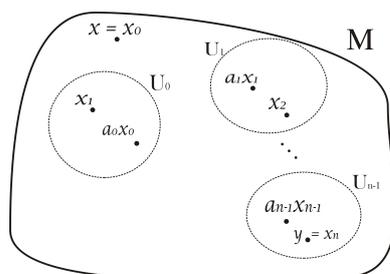


Figura 3.1:

Exemplo 3.2. *Seja M uma variedade diferenciável C^∞ com dimensão n e o sistema de controle,*

$$x'(t) = X_0(x(t)) + \sum_{i=1}^n u_i(t)X_i(x(t)), \quad (1)$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, \text{ constante por partes.}\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e convexo, onde X_0, \dots, X_n são campos de vetores C^∞ completos de M . Já vimos que para $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $x \in M$ o sistema (1) tem única solução $\phi(t, x, u)$, $t \in \mathbb{R}$ com $\phi(0, x, u) = x$. Também para $x \in M$ e $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, temos que

$$X(x, u) = X_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i X_i(x)$$

e $X_u(\cdot) = X(\cdot, u)$. Sabemos que o sistema de controle é determinado pelo correspondente conjunto de campos de vetores $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$ e o semigrupo do sistema é o semigrupo de difeomorfismos de M definido por,

$$S = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

Sabemos que S age em M com as concatenações das trajetórias

$$e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} x = \phi(t, u, x)$$

para algum $u \in \mathcal{U}$ e $t = t_0 + \dots + t_n$. Para $T > 0$, o conjunto

$$A(T) = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^n t_j \geq T, n \in \mathbb{N}\},$$

é um semigrupo de difeomorfismos que está contido em S . Assim a família $\mathcal{F}_c = \{A(T) : T \geq 0\}$ de subconjuntos de S é uma base de filtro de S . De fato, sejam $A(T_1), A(T_2) \in \mathcal{F}_c$. Suponha sem perda de generalidade que $T_1 < T_2$, então temos que

$$A(T_1) \cap A(T_2) = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^n t_j \geq T_2, n \in \mathbb{N}\},$$

assim tomando $B = A(T_2) \in \mathcal{F}_c$ temos o desejado. Agora vamos mostrar que \mathcal{F}_c satisfaz as hipóteses H_1 e H_2 . De fato, tome $e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} \in S$ com $Y_j \in \mathcal{V}$, $t_j \geq 0$ onde $j = 1, \dots, n$ e $A(T) \in \mathcal{F}_c$. Como

$$e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} A(T) \subset A(T),$$

tomando $B = A(T)$ temos a hipótese H_1 satisfeita. Para a hipótese H_2 ,

$$A(T)e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} \subset A(T).$$

Assim tomando $B = A(T)$, temos que a hipótese H_2 é satisfeita. Para cada $\epsilon > 0$ seja $\mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}$ a cobertura de M de todas as bolas abertas de raio $\frac{\epsilon}{2}$. Assim, para $x, y \in M$ uma $(\mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}, A(T))$ -cadeia de x a y é uma sequência $x_0 = x, \dots, x_n = y$ em M ,

$$\phi(t_0, \cdot, u_0), \dots, \phi(t_{n-1}, \cdot, u_{n-1}) \in A(T)$$

e conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}$ tal que $\phi(t_i, x_i, u_i), x_{i+1} \in U_i$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, ou seja, é uma sequência $x_0 = x, \dots, x_n = y$ em M , $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathcal{U}$, $t_0, \dots, t_{n-1} \geq T$ tais que $d(\phi(t_i, x_i, u_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para todo $i = 0, \dots, n-1$ e ϵ, T fixados. Como na página 51 de [5], é a definição de (ϵ, T) -cadeia para sistemas de controle de x a y .

Exemplo 3.3. Sejam (M, d) um espaço métrico compacto, munido da topologia da métrica e ϕ um fluxo em M . No exemplo 2.15, mostramos que um fluxo é uma ação de $S = \mathbb{R}$ em M , onde \mathbb{R} é munido da operação interna da soma e que considerando a família $\mathcal{F} = \{A_t = \{s \in \mathbb{R}; s \geq t\}; t \in \mathbb{R}\}$, a definição dos conjuntos ω -limite e ω^* -limite pela família \mathcal{F} coincide com a definição dos conjuntos ω -limite e ω^* -limite para fluxos. Note que esta família é uma base de filtro de \mathbb{R} . De fato, sejam $A_t, A_z \in \mathcal{F}$. Suponha que $z < t$, então $A_z = A_z \cap A_t$, assim tomando $B = A_z \in \mathcal{F}$, temos que $B \subset A_z \cap A_t$. Agora, para cada $\epsilon > 0$ seja a cobertura $\mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}$ de todas as bolas abertas de raio $\frac{\epsilon}{2}$. Assim para $x, y \in M$ uma $(\mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}, A_t)$ -cadeia de x a y é uma sequência $x_0 = x, \dots, x_n = y$ em M , $t_0, \dots, t_{n-1} \in A_t$ e conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}_{\frac{\epsilon}{2}}$ tais que $t_i \cdot x_i = \phi(t_i, x_i), x_{i+1} \in U_i$ para todo $i = 0, \dots, n-1$, ou seja, é uma sequência $x_0 = x, \dots, x_n = y$ em M , $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathcal{U}$, $t_0, \dots, t_{n-1} \geq t$ tais que $d(\phi(t_i, x_i, u_i), x_{i+1}) < \epsilon$ para todo $i = 0, \dots, n-1$ e ϵ, t fixados. Como na página 546 de [5], é a definição de (ϵ, t) -cadeia para fluxos.

Definição 3.4. *Seja Y um subconjunto não vazio de M , $A \in \mathcal{F}$ e uma cobertura aberta $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$. Os conjuntos,*

$$\Omega(Y, \mathcal{U}, A) = \{y \in M : \text{existe } x \in Y \text{ e uma } (\mathcal{U}, A)\text{-cadeia de } x \text{ para } y\},$$

$$\Omega^*(Y, \mathcal{U}, A) = \{y \in M : \text{existe } x \in Y \text{ e uma } (\mathcal{U}, A)\text{-cadeia de } y \text{ para } x\},$$

Então o conjunto Ω -limite por cadeias de Y é

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \Omega(Y, \mathcal{U}, A),$$

e Ω^ -limite por cadeias de Y como sendo*

$$\Omega^*(Y) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \Omega^*(Y, \mathcal{U}, A).$$

Um subconjunto $Y \subset M$ é **transitivo por cadeias** se para todo $y \in Y$ tivermos que $Y \subset \Omega(y)$, ou seja, para $x, y \in Y$ existe uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x a y . Um ponto $x \in M$ é **recorrente por cadeias** se $x \in \Omega(x)$. O conjunto de todos os pontos recorrentes por cadeias será denotado por \mathfrak{R}_c .

Os conjuntos **transitivos por \mathcal{F} -cadeias maximais** (com respeito a inclusão) são os conjuntos $E_x = \Omega(x) \cap \Omega^*(x)$, com $x \in \mathfrak{R}_c$.

Proposição 3.5. *Para todo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$, o conjunto $\Omega(Y, \mathcal{U}, A)$ é aberto.*

Demonstração: Dado $y \in \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$, existem $x_0 = x, \dots, x_n = y \in M$, com $x \in Y$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ e conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tal que $a_i x_i, x_{i+1} \in U_{i+1}$. Para $z \in U_{n-1}$ temos que $a_{n-1} x_{n-1}, z \in U_{n-1}$, assim construímos uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x para z , ou seja, $U_{n-1} \subset \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$. Como $y \in U_{n-1}$, temos uma vizinhança aberta de y contida em $\Omega(Y, \mathcal{U}, A)$. Portanto que $\Omega(Y, \mathcal{U}, A)$ é aberto.

□

Agora veremos que o ω -limite de um conjunto está contido no Ω -limite por cadeias do mesmo.

Proposição 3.6. *Para um subconjunto $Y \subset M$ temos $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset \Omega(Y)$.*

Demonstração: Seja $x \in \omega(Y, \mathcal{F})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Tome $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Pela definição de ω -limite, temos que $U \cap AY \neq \emptyset$. Assim existem $x_0 \in Y$ e $a \in A$ com $ax_0 \in U$, obtendo uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x_0 a x , concluindo assim que $x \in \Omega(Y)$.

□

Na próxima proposição mostraremos que ω -limite de um ponto do espaço é transitivo por cadeias se a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 .

Proposição 3.7. *Se a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 então para $x \in M$ temos que $\omega(x, \mathcal{F})$ é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Sejam $y, z \in \omega(x, \mathcal{F})$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Note que $y \in \overline{Ax}$, assim podemos escolher $a_0 \in A$ e usando a continuidade da ação, temos que $a_0y \in \overline{a_0Ax}$. Seja $U_0 \in \mathcal{U}$, onde $a_0y \in U_0$. Então existe $s \in S$ tal que $sx \in U_0$. Agora tome $U_1 \in \mathcal{U}$ tal que $z \in U_1$. Pela hipótese H_3 existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset As$. Como $z \in \overline{Bx} \subset \overline{Asx}$, existe $a_1 \in A$ tal que $a_1sx \in U_1$. Assim os pontos $x_0 = y, x_1 = sx, x_2 = z \in M$, os elementos $a_0, a_1 \in A$ e os conjuntos abertos $U_0, U_1 \in \mathcal{U}$ definem uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de y para z . Concluindo que $\omega(x, \mathcal{F})$ é transitivo por cadeias.

□

Para os próximos resultados assumiremos que a família \mathcal{F} de subconjuntos de S satisfaz a hipótese H_3 .

Proposição 3.8. *O conjunto recorrente por cadeias \mathfrak{R}_c é fechado.*

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{R}_c \neq \emptyset$ e tome $x \in \overline{\mathfrak{R}_c}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Sejam, $U_0 \in \mathcal{U}$ e $a \in A$ tal que $ax \in U_0$. Assim $\mu_a^{-1}(U_0)$ é uma vizinhança aberta de x . Tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$. Dado $V \in \mathcal{V}$ tal que $x \in V$, então $\mu_a^{-1}(U_0) \cap V$ é uma vizinhança aberta de x e existe $y \in \mu_a^{-1}(U_0) \cap V \cap \mathfrak{R}_c$. Denotando $x_1 = ay$, temos $ax, x_1 \in U_0$. Pela hipótese H_3 , existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset Aa$. Como $y \in \mathfrak{R}_c$ existem pontos $y_1 =$

$y, \dots, y_n = y \in M$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ e conjuntos abertos $V_1, \dots, V_{n-1} \in \mathcal{V}$ tais que $b_i y_i, y_{i+1} \in V_i$ para $i = 1, \dots, n-1$. Denote, $b_j = a_j a$ com $a_j \in A$ onde $j = 1, \dots, n-1$. Então, $a_1 x_1 = a_1 a y = b_1 y \in V$, de onde $a_1 x_1, y_2 \in V_1$. Desde que $y \in V \cap V_{n-1}$ existe $U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V_{n-1} \subset U_{n-1}$. Assim, $b_{n-1} y_{n-1}, x \in V_{n-1} \cup V \subset U_{n-1}$. Denotando, $x_j = a y_j$ para $j = 1, \dots, n-1$, $x_n = x$ e $U_i \in \mathcal{U}$ tal que $V_i \subset U_i$ para $i = 1, \dots, n-2$. Assim os pontos $x_0, \dots, x_n \in M$, os elementos $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ e conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}$, definem uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x para x . Portanto $x \in \mathfrak{R}_c$, concluindo que \mathfrak{R}_c é fechado. □

Mostraremos a seguir que o fecho de um conjunto transitivo por cadeias é transitivo por cadeias.

Proposição 3.9. *Dado $Y \subset M$ transitivo por cadeias então \overline{Y} é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Note que $Y \subset \mathfrak{R}_c$. De fato, como Y é transitivo por cadeia temos que para todo $y \in Y$ tem-se que $Y \subset \Omega(y)$, ou seja, $y \in \Omega(y)$. Assim todos os pontos de Y são recorrentes por cadeias. Como \mathfrak{R}_c é fechado, temos que $\overline{Y} \subset \overline{\mathfrak{R}_c} = \mathfrak{R}_c$, obtendo que todos os pontos de \overline{Y} são recorrentes por cadeias. Agora, sejam $x, y \in \overline{Y}$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$. Iremos mostrar que existe uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x a y . Tomando $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ tal que $\mathcal{V} \preceq \frac{1}{2}\mathcal{U}$, considere os pontos, $x_0 = x, x_1, \dots, x_n = x \in \overline{Y}$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in A$ e os conjuntos abertos $U_0, \dots, U_{n-1} \in \mathcal{U}$ tais que $a_i x_i, x_{i+1} \in U_i$ para $i = 0, \dots, n-1$. Como $x \in U_{n-1}$, podemos tomar $x' \in U_{n-1} \cap Y$. Assim $a_{n-1} x_{n-1}, x' \in U_{n-1}$, obtendo uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x a x' . Por outro lado, tome uma vizinhança aberta $V \in \mathcal{V}$ de y e $y' \in V \cap Y$. Sejam $x'_0 = x', x_1, \dots, x'_m = y' \in M$, $a'_0, \dots, a'_{m-1} \in A$ e V'_0, \dots, V'_{m-1} tais que $a'_j x'_j, x'_{j+1} \in V'_j$ para $j = 0, \dots, m-1$. Como $y' \in V \cap V'_{m-1}$, existe um conjunto aberto $U_{m-1} \in \mathcal{U}$ tal que $V \cup V'_{m-1} \subset U_{m-1}$. Assim, temos que $a'_{m-1} x'_{m-1}, y \in V \cup V'_{m-1} \subset U_{m-1}$, obtendo uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x' a y . Fazendo a concatenação da (\mathcal{U}, A) -cadeia de x a x' com a (\mathcal{U}, A) -cadeia de x' a y , obtém-se uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x a y . Portanto \overline{Y} é transitivo por cadeias. □

Uma consequência imediata dos resultados anteriores é o seguinte corolário.

Corolário 3.10. *Seja X um conjunto transitivo por \mathcal{F} -cadeias maximal. Então X é fechado.*

Demonstração: De fato, seja X um conjunto maximal transitivo por cadeias. Pela proposição anterior temos \overline{X} que é transitivo por cadeias. Como X é maximal com respeito a inclusão de conjuntos, temos que $X = \overline{X}$.

Proposição 3.11. *Se a família \mathcal{F} de subconjuntos de S é uma base de filtro deste semigrupo, então:*

1. *Dados $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$ temos que $\omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -atrator contendo $\omega(Y, \mathcal{F})$.*
2. *Além disto,*

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}).$$

Demonstração: Sejam $z \in \Omega(Y)$, $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $B \in \mathcal{F}$. Para uma vizinhança aberta V de z , tome $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ que é $\{z\}$ -subordinada do conjunto aberto V e tome um refinamento $\mathcal{W} \in \mathcal{O}$ de ambos \mathcal{V} e \mathcal{U} . Para $B_1 \subset B \cap A$, existem pontos $x_0, \dots, x_n = z \in M$, $x_0 \in Y$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in B_1$ e conjuntos abertos $V_0, \dots, V_{n-1} \in \mathcal{W}$ que definem uma (\mathcal{W}, B_1) -cadeia de x_0 para z . Como $z \in V_{n-1}$, segue que $V_{n-1} \subset V$ e $a_{n-1}x_{n-1} \in V$. Agora, temos que $x_{n-1} \in \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$ e $a_{n-1}x_{n-1} \in B\Omega(Y, \mathcal{U}, A) \cap V$. Assim, $z \in \overline{B\Omega(Y, \mathcal{U}, A)}$. Sendo $B \in \mathcal{F}$ arbitrário, temos pela definição de conjunto limite que $z \in \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$, concluindo que $\Omega(Y) \subset \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$. Por outro lado, sabendo que $\Omega(Y, \mathcal{U}, A)$ é um conjunto aberto, dado $y \in \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$ e $U \in \mathcal{U}$ tal que $y \in U$, existe $a \in A$ e $x \in \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$ tal que $ax \in U$. Existindo $x_0 \in Y$ e uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x_0 para x , acrescentando o ponto $a \in A$ e o conjunto aberto U nesta (\mathcal{U}, A) -cadeia, obtém-se uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de x_0 para y . Assim temos que $y \in \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$, ou seja, $\omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}) \subset \Omega(Y, \mathcal{U}, A)$. Portanto, $\omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -atrator com vizinhança atratora $\Omega(Y, \mathcal{U}, A)$. Assim

temos que $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset \Omega(Y) \subset \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$. Assim,

$$\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}) \subset \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \Omega(Y, \mathcal{U}, A) = \Omega(Y).$$

Portanto,

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}).$$

□

Agora mostraremos que o Ω -limite por cadeias de um conjunto é a intersecção de todos os conjuntos \mathcal{F} -atratores que contém o ω -limite do mesmo.

Proposição 3.12. *Para um subconjunto não vazio Y de M , temos que $\Omega(Y)$ é a intersecção de todos os \mathcal{F} -atratores que contém $\omega(Y, \mathcal{F})$.*

Demonstração: Seja \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(Y, \mathcal{F})$ e V uma vizinhança atratora de \mathcal{A} . Assim, existe $A \in \mathcal{F}$ tal que $\overline{AV} \subset \text{int}(V)$. Tome uma cobertura $\mathcal{V} \in \mathcal{O}$ que é \overline{AV} -subordinada do conjunto aberto $\text{int}(V)$. Como $\omega(Y, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A} \subset \text{int}(V)$, existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $A_0 Y \subset V$. Dado $s \in A_0$, temos que $sY \subset V$. Por hipótese, podemos tomar $B_0, B \in \mathcal{F}$ tais que $B_0 \subset B \cap A$ e $B \subset As$. Assim temos que $B_0 \subset A \cap As$ e $B_0 Y \subset AsY \subset AV$. Agora vamos mostrar que $\Omega(Y, \mathcal{V}, B_0) \subset \text{int}(V)$. De fato, dado $z \in \Omega(Y, \mathcal{V}, B_0)$, temos que existem $x_0 = y, \dots, x_n = z \in M$, com $y \in Y$, $b_0, \dots, b_{n-1} \in B_0$ e $V_0, \dots, V_{n-1} \in \mathcal{V}$ que definem uma (\mathcal{V}, B_0) -cadeia de y para z . Como $b_0 y \in B_0 Y \cap V_0$, temos que $AV \cap V_0 \neq \emptyset$ de onde se obtém que $V_0 \subset \text{int}(V)$. Assim $x_1 \in \text{int}(V)$ e $b_1 x_1 \in B_0 V \cap V_1 \subset AV \cap V_1$ implicando que $V_1 \subset \text{int}(V)$. Continuando com o processo, temos por indução que $x_n = z \in \text{int}(V)$. Assim $\Omega(Y, \mathcal{V}, B_0) \subset \text{int}(V)$, implicando que $\omega(\Omega(Y, \mathcal{V}, B_0), \mathcal{F}) \subset \omega(V, \mathcal{F}) = \mathcal{A}$. Assim $\Omega(Y) \subset \mathcal{A}$. Portanto, $\Omega(Y)$ está contido na intersecção de todos os \mathcal{F} -atratores que contém $\omega(Y, \mathcal{F})$. Por outro lado, temos pela proposição anterior que

$$\Omega(Y) = \bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}),$$

onde $\omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(Y, \mathcal{F})$. Como

$$\bigcap_{\mathcal{U} \in \mathcal{O}, A \in \mathcal{F}} \omega(\Omega(Y, \mathcal{U}, A), \mathcal{F}) \supset \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{Z}} \mathcal{A},$$

onde \mathcal{Z} representa o conjunto de todos os atratores que contém $\omega(Y, \mathcal{F})$, segue que $\Omega(Y) \supset \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{Z}} \mathcal{A}$, concluindo a demonstração. □

Exemplo 3.13. *Retomando o exemplo 2.26, vimos que para cada n par, os conjuntos $C_n = \{x \in M; \|x\| = \frac{1}{n}\}$ são \mathcal{F} -atratores e que para $x \in M$ com $\frac{1}{n-1} < \|x\| < \frac{1}{n+1}$, $\omega(x, \mathcal{F}) = C_n$. Assim, aplicando a proposição anterior, temos que $\Omega(x) = C_n$.*

Note que, não podemos mostrar que para um conjunto X não vazio, $\Omega^*(X)$ é a intersecção de todos os \mathcal{F} -repulsores que contém $\omega^*(X, \mathcal{F})$.

Na proposição a seguir, mostraremos que o Ω^* -limite por cadeias de um ponto é a intersecção de todos os repulsores complementares onde o ponto não pertence a nenhum dos \mathcal{F} -atratores.

Proposição 3.14. *Dado $x \in M$, temos que $\Omega^*(x)$ é a intersecção de todos os repulsores complementares \mathcal{A}^* , onde \mathcal{A} é um \mathcal{F} -atrator tal que $x \notin \mathcal{A}$.*

Demonstração: Tome \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator tal que $x \notin \mathcal{A}$. Para $z \in \Omega^*(x)$ temos que pela definição dos conjuntos Ω -limite e Ω^* -limite por cadeias, que $x \in \Omega(z)$. Desde que $\Omega(z)$ é a intersecção de todos os \mathcal{F} -atratores que contém $\omega(z, \mathcal{F})$ e $x \notin \mathcal{A}$, nós temos que $\omega(z, \mathcal{F})$ não está contido em \mathcal{A} . Portanto $z \in \mathcal{A}^*$ e $\Omega^*(x) \subset \mathcal{A}^*$. Para mostrarmos a outra inclusão, seja y pertencente a intersecção de todos os repulsores complementares \mathcal{A}^* , onde \mathcal{A} é um \mathcal{F} -atrator tal que $x \notin \mathcal{A}$. Tomemos um \mathcal{F} -atrator \mathcal{B} que contém $\omega(y, \mathcal{F})$. Por hipótese de y temos que $x \in \mathcal{B}$. Assim, como $x \in \mathcal{B}$ e \mathcal{B} é um \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(y, \mathcal{F})$, obtemos que $x \in \Omega(y)$ e $y \in \Omega^*(x)$, concluindo a demonstração. □

No teorema a seguir, mostraremos que os pontos recorrentes por cadeias pertencem a intersecção de todos os conjuntos atratores unidos com seus respectivos repulsores complementares.

Teorema 3.15. *Suponha que a família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo S é uma base de filtro. Então o conjunto recorrente por cadeias \mathfrak{R}_c é o conjunto*

$$\bigcap \{ \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^* : \mathcal{A} \text{ é um } \mathcal{F}\text{-atrator} \}.$$

Onde \mathcal{A}^* é o repulsor complementar de \mathcal{A} .

Demonstração: Se $x \in \mathfrak{R}_c$, temos que $x \in \Omega(x)$, pela proposição anterior, x pertence a intersecção de todos os \mathcal{F} -atratores que contém $\omega(x, \mathcal{F})$. Dado \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator tal que $\omega(x, \mathcal{F}) \not\subset \mathcal{A}$, temos que $x \in \mathcal{A}^*$. Assim $x \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^*$ para todo \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} . Agora, tome $y \in \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^*$ para todo \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} . Seja \mathcal{B} um \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(y, \mathcal{F})$. Note que $y \notin \mathcal{B}^*$. Assim temos que $y \in \mathcal{B}$, concluindo que y pertence a todo \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(y, \mathcal{F})$, ou seja, $y \in \Omega(y)$, mostrando que $y \in \mathfrak{R}_c$ e concluindo a demonstração. □

Como consequência do teorema anterior temos o resultado a seguir.

Corolário 3.16. *Com as mesmas hipóteses do último teorema temos que M é transitivo por cadeias se e somente se M é o único \mathcal{F} -atrator não vazio.*

Demonstração: Suponha que M é transitivo por cadeias. Seja \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator que contém um ponto de $x \in M$. Tem-se que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}$. Como $\Omega(x)$ é a intersecção de todo \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(x, \mathcal{F})$, temos que $\Omega(x) \subset \mathcal{A}$. Como $M = \Omega(x)$, concluimos que $\mathcal{A} = M$. Reciprocamente, temos que para todo $x \in M$, $\Omega(x)$ é a intersecção de todo \mathcal{F} -atrator que contém $\omega(x, \mathcal{F})$. Assim $\Omega(x) = M$. Concluindo que M é transitivo por \mathcal{F} -cadeias. □

3.2 Decomposições de Morse

A partir daqui, iremos desenvolver a teoria de decomposição de Morse para ações de semigrupos em espaços compactos. Esta teoria generaliza a teoria desenvolvida [4], onde é desenvolvida para fluxos em um espaço métrico compacto.

Assumiremos aqui que M é um espaço topológico compacto Hausdorff, S é um semigrupo agindo no espaço M e \mathcal{F} uma família de subconjuntos de S .

Definição 3.17. *Seja*

$$\emptyset = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n = M,$$

uma sequência crescente de \mathcal{F} -atratores em M e defina $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$, com $i = 1, \dots, n$. Então a coleção ordenada $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ é chamada de **\mathcal{F} -decomposição de Morse**. Os conjuntos \mathcal{C}_i são chamados **\mathcal{F} -conjuntos de Morse**.

Exemplo 3.18. *Retomando o exemplo 2.26. Vamos mostrar que os conjuntos $D_{2n} = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq \frac{1}{2n}\}$ são \mathcal{F} -atratores, com $n \geq 1$. De fato, considere a vizinhança, $V_{2n} = \{x \in \mathbb{R}^2; \|x\| < \frac{1}{2n-1}\}$ de D_{2n} . Pelo exemplo 2.26, temos que para $\|x\| \leq \frac{1}{2n}$, $\omega(x, \mathcal{F}) \subset D_{2n}$ e para $\frac{1}{2n} < \|x\| < \frac{1}{2n-1}$, $\omega(x, \mathcal{F}) = C_{\frac{1}{2n}} \subset D_{2n}$, assim $\omega(V_{2n}, \mathcal{F}) = D_{2n}$. Tome a sequência crescente*

$$\emptyset = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 = D_{2n-2} \subset \mathcal{A} = D_{2n-4} \subset \dots \subset \mathcal{A}_i = D_{2(n-i)} \subset \dots \subset \mathcal{A}_{n-1} = D_2 \subset \mathcal{A}_n = M.$$

Veja que para $i \geq 1$,

$$\mathcal{A}_i^* = \{x \in M; \omega(x, \mathcal{F}) \cap D_{2(n-i)} = \emptyset\} = \{x \in M; \|x\| \geq \frac{1}{2(n-i)-1}\}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_1 &= \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_0^* = D_{2n-2} \cap M = D_{2n-2}, \\ \mathcal{C}_2 &= \mathcal{A}_2 \cap \mathcal{A}_1^* = D_{2n-4} \cap D_{2n-2}^* = D_{2n-4} \cap \{x \in M; \|x\| \geq \frac{1}{2n-3}\} \\ &= \{x \in M; \frac{1}{2n-3} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2n-4}\}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_i &= \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^* = D_{2(n-i)} \cap D_{2(n-i+1)}^* = D_{2(n-i)} \cap \left\{x \in M; \|x\| \geq \frac{1}{2(n-i+1)}\right\} \\
&= \left\{x \in M; \frac{1}{2(n-i+1)} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2(n-i)}\right\}, \\
&\quad \vdots \\
\mathcal{C}_{n-1} &= \mathcal{A}_{n-1} \cap \mathcal{A}_{n-2}^* = D_2 \cap D_4^* = D_2 \cap \left\{x \in M; \|x\| \geq \frac{1}{4}\right\} \\
&= \left\{x \in M; \frac{1}{4} \leq \|x\| \leq \frac{1}{2}\right\}, \\
\mathcal{C}_n &= \mathcal{A}_n \cap \mathcal{A}_{n-1}^* = M \cap D_2^* = M \cap \{x \in M; \|x\| = 1\} \\
&= \{x \in M; \|x\| = 1\},
\end{aligned}$$

definem uma \mathcal{F} -decomposição de Morse. A figura abaixo mostra o caso de $n = 4$.

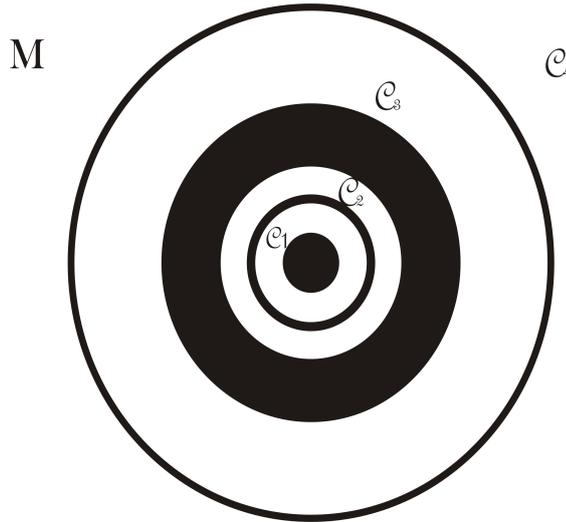


Figura 3.2:

No próximo resultado, mostraremos que para qualquer \mathcal{F} -decomposição de Morse os pontos recorrentes por cadeias pertencem a união dos \mathcal{F} -conjuntos de Morse.

Proposição 3.19. *Dado $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ uma \mathcal{F} -decomposição de Morse então o conjunto recorrente por cadeias \mathfrak{R}_c está contido na união $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$.*

Demonstração: Seja $\emptyset = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n = M$, a sequência crescente de \mathcal{F} -atratores em M tal que $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$, $i = 1, \dots, n$. Primeiro mostraremos que $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i = \bigcap_{i=1}^n (\mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_i^*)$, e daí o resultado segue aplicando o teorema apresentado anteriormente. De fato, seja $x \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ e $j \in \{1, \dots, n\}$. Se $x \in \mathcal{A}_j$ temos nada a provar. Agora suponha que $x \notin \mathcal{A}_j$. Seja $k \in \{1, \dots, n\}$ tal que $x \in \mathcal{A}_k \cap \mathcal{A}_{k-1}^*$. Segue que $k > j$ e $k - 1 \geq j$. Assim $x \in \mathcal{A}_{k-1}^* \subset \mathcal{A}_j^*$. Portanto $x \in \mathcal{A}_j \cup \mathcal{A}_j^*$. Por outro lado, dado $y \in \bigcap_{i=1}^n (\mathcal{A}_i \cup \mathcal{A}_i^*)$ e j o menor inteiro tal que $y \in \mathcal{A}_j$ e que $y \notin \mathcal{A}_{j-1}$. Assim, temos que $y \in \mathcal{A}_{j-1}^*$ obtendo assim que $y \in \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_{j-1}^* = \mathcal{C}_j$.

□

A seguir, mostraremos que os \mathcal{F} -conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos e que dado um ponto o ω -limite deste ponto está contido em algum \mathcal{F} -conjunto de Morse.

Proposição 3.20. *Seja $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ uma \mathcal{F} -decomposição de Morse. Então os \mathcal{F} -conjuntos de Morse, \mathcal{C}_i , são dois a dois disjuntos, e para todo $x \in M$ existe um inteiro i tal que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_i$.*

Demonstração: Tome $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tal que $i \neq j$. Sem perda de generalidade podemos supor que $i < j$. Como $i \leq j - 1$, temos $\mathcal{A}_{j-1}^* \subset \mathcal{A}_i^*$. Assim

$$\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{j-1}^* \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_i^* = \emptyset.$$

Portanto, $\mathcal{C}_j \cap \mathcal{C}_i = \emptyset$. Agora dado, $x \in M$, seja o menor inteiro i tal que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_i$. Desde que $\omega(x, \mathcal{F}) \not\subset \mathcal{A}_{i-1}$ então temos $x \in \mathcal{A}_{i-1}^*$, assim $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_{i-1}^*$, concluindo que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_i$.

□

Definição 3.21. Uma \mathcal{F} -decomposição de Morse $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ é dita **mais fina** do que uma \mathcal{F} -decomposição de Morse $\{\mathcal{C}'_1, \dots, \mathcal{C}'_m\}$ se para todo \mathcal{F} -conjunto de Morse \mathcal{C}'_j existe um \mathcal{F} -conjunto de Morse \mathcal{C}_i com $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{C}'_j$, assim uma \mathcal{F} -decomposição de Morse é chamada **\mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina** se é mais fina que toda \mathcal{F} -decomposição de Morse.

Note que, no exemplo 3.17, não é possível construir uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina.

Veremos uma relação entre uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina com os conjuntos transitivos por cadeias maximais.

Teorema 3.22. Uma \mathcal{F} -decomposição de Morse é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina se e somente se os \mathcal{F} -conjuntos de Morse coincidem com os conjuntos transitivos por cadeias maximais.

Demonstração: Assuma que $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina e seja $\emptyset = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_n = M$, a sequência crescente de \mathcal{F} -atratores em M tal que $\mathcal{C}_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$, $i = 1, \dots, n$. Para $x \in \mathcal{C}_i$, tome um \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} que contém $\omega(x, \mathcal{F})$. Iremos mostrar que $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{A}$. Sejam V e V_i vizinhanças atratoras de \mathcal{A} e \mathcal{A}_i respectivamente. Como,

$$\omega(V \cap V_i, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A} \cap \mathcal{A}_i \subset V \cap V_i,$$

temos que $\mathcal{B} = \omega(V \cap V_i, \mathcal{F})$ é um \mathcal{F} -atrator. Assim pela proposição 2.33 temos que $\mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B}$ é um \mathcal{F} -atrator. Agora considere a sequência crescente de \mathcal{F} -atratores,

$$\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_{i-1} \subset \mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B} \subset \mathcal{A}_i \subset \dots \subset \mathcal{A}_n.$$

Como $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina, existe \mathcal{C}_j tal que

$$\mathcal{C}_j \subset (\mathcal{A}_{i-1} \cup \mathcal{B}) \cap \mathcal{A}_{i-1}^* = \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{i-1}^*.$$

Uma vez que, $\mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{i-1}^* \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$ e que os \mathcal{F} -conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos, temos que $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_i$. Assim $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$, concluindo que $\mathcal{C}_i \subset \mathcal{A}$. Como

o atrator \mathcal{A} que contém $\omega(x, \mathcal{F})$ é arbitrário temos $\mathcal{C}_i \subset \Omega(x)$, ou seja, \mathcal{C}_i é transitivo por cadeias. Como $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_i$ temos que $\Omega(x) \subset \mathcal{A}_i$. Mas $x \in \mathcal{A}_{i-1}$ obtendo que $\Omega^*(x) \subset \mathcal{A}_{i-1}^*$, assim $\Omega(x) \cap \Omega^*(x) \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^* = \mathcal{C}_i$. Usando o fato de \mathcal{C}_i ser transitivo por cadeias, conclui-se que $\mathcal{C}_i = \Omega(x) \cap \Omega^*(x)$. Portanto \mathcal{C}_i é um conjunto transitivo por cadeias maximal. Reciprocamente, suponha que os \mathcal{F} -conjuntos de Morse \mathcal{C}_i são conjuntos transitivos por cadeias maximais. Considere a \mathcal{F} -decomposição de Morse definida pelos \mathcal{F} -atratores \mathcal{B}_j e com os conjuntos de Morse $\mathcal{C}'_j = \mathcal{B}_j \cap \mathcal{B}_{j-1}^*$, para $j = 1, \dots, m$. Dado $y \in \mathcal{C}'_j$, segue que $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}'_j$. Desde que $\omega(y, \mathcal{F})$ é transitivo por cadeias, pela proposição 3.19 temos que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j \neq \emptyset$ para algum \mathcal{C}_i . Desde que $\Omega(x) \subset \mathcal{B}_j$ e $\Omega^*(x) \subset \mathcal{B}_{j-1}^*$, nós temos que $\mathcal{C}_i = \Omega(x) \cap \Omega^*(x) \subset \mathcal{C}'_j$. Portanto $\{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_n\}$ é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina.

□

Com este resultado, obtemos que se existe uma decomposição de Morse mais fina, então a quantidade de conjuntos transitivos por cadeias maximais é finita.

Para os próximos resultados desta seção, assumiremos que a família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo S satisfaz a hipótese da translação a esquerda, ou seja, para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$, existe $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset sA$.

Proposição 3.23. *Para $X \subset M$ temos que $\omega(X, \mathcal{F}) \subset s\omega(X, \mathcal{F})$ para todo $s \in S$.*

Demonstração: Dados $x \in \omega(X, \mathcal{F})$ e $s \in S$, seja \mathcal{V} a família de todas as vizinhanças de x . Para $(V, f), (U, g) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^\mathcal{V}$, definimos $(V, f) \succeq (U, g)$ se $V \subset U$ e $f(W) \subset g(W)$ para todo $W \in \mathcal{V}$. Agora, dado $A \in \mathcal{F}$, tome $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset sA$. Para $V \in \mathcal{V}$, temos

$$\emptyset \neq BX \cap V \subset sA \cap V,$$

e podemos escolher $s_{(V,A)} \in sAX \cap V$ com $x_{(V,A)} \in AX$. Para $(V, f) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^\mathcal{V}$, denotaremos $x_{(V,f)}$ por $x_{(V,f(V))}$, onde $s_{(V,f)} \in sf(V)X \cap V$. Consideremos a rede $(x_{(V,f)})_{(V,f) \in \mathcal{V} \times \mathcal{F}^\mathcal{V}}$ em M . Desde que M é compacto, existe uma subrede de $(x_{(V,f)})$ que converge para um ponto $y \in M$. Para uma vizinhança U de y , existe (V_0, f_0) tal que

$x_{(V,f)} \in U$ para todo $(V, f) \succeq (V_0, f_0)$. Como \mathcal{F} é uma base de filtro, para $A \in \mathcal{F}$ podemos definir $f_A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{F}$ tal que $f_A(V) \subset A \cap f_0(V)$ para todo $V \in \mathcal{V}$. Para $(V, f) \succeq (V_0, f_A)$ nós temos,

$$x_{(V,f)} \in U \cap f(V)X \subset U \cap f_A(V)X \subset U \cap AX.$$

Assim $y \in \overline{AX}$. Pela arbitrariedade de A temos que $y \in \omega(X, \mathcal{F})$. Note que para uma vizinhança W de x , nós temos

$$sx_{(V,f)} \in sf(V)X \cap V \subset W,$$

para todo (V, f) com $V \subset W$. Assim $sx_{(V,f)} \rightarrow x$. Desde que $sx_{(V,f)} \rightarrow sy$ (usando a continuidade de s) segue que $x = sy$. Portanto $x \in s\omega(X, \mathcal{F})$ concluindo a demonstração.

□

Mostraremos que o conjunto dos pontos recorrentes por cadeias é uma união finita de conjuntos transitivos por \mathcal{F} -cadeias maximais se e somente se existe uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina.

Teorema 3.24. *Em M existe uma \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina se e somente se \mathfrak{R}_c é a união finita de conjuntos transitivos por \mathcal{F} -cadeias maximais.*

Demonstração: Suponha que $\mathfrak{R}_c = \bigcup_{i=1}^n E_i$, onde $E_i = \Omega(x_i) \cap \Omega^*(x_i)$ é o conjunto transitivo por \mathcal{F} -cadeias maximal. Para algum x_i , nós temos que $x_j \notin \Omega(x_i)$ se $j \neq i$, pois caso contrário teríamos um ciclo, $x_{i_1} \in \Omega(x_{i_2}), \dots, x_{i_k} \in \Omega(x_{i_1})$. Alterando a ordem se necessário podemos considerar $x_i \notin \Omega(x_1)$ se $i > 1$. Então para $i > 1$, existe uma \mathcal{F} -atrator \mathcal{A}_i tal que $\omega(x_1, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_i$ e $x_i \notin \mathcal{A}_i$. Tome um \mathcal{F} -atrator $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \cap \dots \cap \mathcal{A}_n$ tal que $\omega(x_1, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_1$. Como E_1 está contido na intersecção de todos os atratores que contém $\omega(x_1, \mathcal{F})$, então $E_1 \subset \mathcal{A}_1$ e $E_i \subset \mathcal{A}_i^*$ se $i > 1$. Agora para $x \in \mathcal{A}_1$, o fato de que $\omega(x, \mathcal{F})$ é transitivo por cadeias e E_1 é maximal, nós temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset E_1$. Assim, $E_1 \subset \Omega(x)$. Por outro lado, pela proposição anterior, temos que $\mathcal{A}_1 \subset s\mathcal{A}_1$ para todo $s \in S$. Em particular, para $A \in \mathcal{F}$ existe $x_A \in \mathcal{A}_1$ tal que $x_A \in A^*x$. A rede (x_A) tem uma subrede que converge para $y \in \mathcal{A}_1$. Dado $\mathcal{U} \in \mathcal{O}$ e $A \in \mathcal{F}$, escolha $a_0 \in A$ e

$U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $a_0 y \in U_0$. Assim existe $A_0 \in \mathcal{F}$ tal que $a_0 x_B \in U_0$ para todo $B \subset A_0$. Sendo assim, tome $B \in \mathcal{F}$ tal que $B \subset Aa_0$ e $B \subset A_0$. Então existe $a_1 \in A$ tal que $a_1 a_0 x_B = x$ e obtemos uma (\mathcal{U}, A) -cadeia de y a x . Assim $y \in \Omega^*(x) \cap \mathcal{A}_1$. Desde que $\Omega^*(x)$ é invariante e compacto, nós temos que $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \Omega^*(x) \cap E_1$, concluindo que $x \in E_1$. Assim $E_1 = \mathcal{A}_1$, definindo $\mathcal{A}_0 = \emptyset$, nós temos que $E_1 = \mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_0^*$. Agora a prova segue por indução de índices. Para $k < n$ suponha que

$$\emptyset = \mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \dots \subset \mathcal{A}_k,$$

é uma sequência crescente de \mathcal{F} -atratores tal que $E_i = \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^*$ onde $i = 1, \dots, k$ e $E_j \subset \mathcal{A}_k^*$ se $j > k$. Para algum $l > k$, nós temos $x_j \notin \Omega(x_l)$ se $j > k$ e $j \neq l$. Considerando $x_j \notin \Omega(x_{k+1})$ se $j > k+1$, então existe um \mathcal{F} -atrator \mathcal{B} tal que $E_{k+1} \subset \mathcal{B}$ e $E_j \subset \mathcal{B}^*$ se $j > k+1$. Tomando o \mathcal{F} -atrator $\mathcal{A}_{k+1} = \mathcal{A}_k \cup \mathcal{B}$, temos $E_{k+1} \subset \mathcal{A}_{k+1} \cap \mathcal{A}_k^*$ e $E_i \cap \mathcal{A}_{k+1} \cap \mathcal{A}_k^* = \emptyset$ se $i \neq k+1$. Para $x \in \mathcal{A}_{k+1} \cap \mathcal{A}_k^*$, nós temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset E_{k+1}$ e $E_{k+1} \subset \Omega(x)$. Por outro lado, existe $y \in \Omega^*(x) \cap \mathcal{A}_{k+1}$, onde $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \Omega^*(x) \cap \mathcal{A}_{k+1}$. Desde que $\Omega^*(x) \subset \mathcal{A}_k^*$, temos $\omega(y, \mathcal{F}) \subset \Omega^*(x) \cap E_{k+1}$ e $x \in E_{k+1}$. Assim $E_{k+1} = \mathcal{A}_{k+1} \cap \mathcal{A}_k^*$. Portanto os conjuntos \mathcal{F} -transitivos por cadeias maximais são \mathcal{F} -conjuntos de Morse. Pelo Teorema 3.21 segue que $\{E_1, \dots, E_n\}$ é a \mathcal{F} -decomposição de Morse mais fina.

□

Decomposição de Morse dinâmica.

Neste Capítulo desenvolveremos, a teoria de decomposição de Morse dinâmica para ações de semigrupos sobre espaços topológicos compactos Hausdorff, desenvolvida em [1]. Na primeira seção desenvolvemos a teoria de decomposição de Morse dinâmica, mostrando que esta teoria generaliza a teoria de decomposição de Morse apresentada em [4]. Na segunda seção aplicamos esta teoria e a teoria de recorrência por cadeias em espaços topológicos munidos pela topologia da compactificação de Alexandroff. Apresentamos um contra-exemplo mostrando que uma decomposição de Morse dinâmica não é uma decomposição de Morse. Por fim, aplicamos a teoria em sistemas de controle e mostramos que para sistemas de controle, uma decomposição de Morse dinâmica é uma decomposição de Morse.

4.1 Decomposição de Morse dinâmica.

Inicialmente, apresentaremos a teoria de decomposição de Morse dinâmica. A motivação em [1] é a construção de conceitos que permitam usar o potencial da teoria de Morse no contexto de semigrupos e a generalização da teoria de decomposição de Morse apresentada em [4] e [5]. Nesta seção assumiremos a ação de um subsemigrupo de um grupo de homeomorfismos em um espaço topológico compacto Hausdorff M . Assumiremos também que a família de subconjuntos do subsemigrupo satisfaz as hipóteses de translação à esquerda e à direita.

Assumiremos que M é um espaço topológico de Hausdorff compacto, S é

um semigrupo de homeomorfismos de M , onde a ação de S em M é a aplicação do homeomorfismo de um elemento $s \in S$ nos elementos $x \in M$. A operação interna deste semigrupo é a composição de homeomorfismos.

Uma família \mathcal{F} de subconjuntos do semigrupo S satisfaz a hipótese de translação, se e somente se, para todo $s \in S$ e $A \in \mathcal{F}$ existem B e B' pertencentes a \mathcal{F} tal que $B \subset As$ (hipótese de translação a direita) e $B' \subset sA$ (hipótese de translação a esquerda) e além disto \mathcal{F} é uma base de filtro de S , ou seja, $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e para $A, B \in \mathcal{F}$ existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset A \cap B$. Com estas hipóteses, já vimos na seção 2.2 que os conjuntos limites são não vazios. Note que pelas proposições 2.30 e 2.31, temos que os conjuntos \mathcal{F} -repulsores são invariantes. Note também que com estas hipóteses os conjuntos \mathcal{F} -atratores são invariantes. De fato, tome a ação de S^{-1} em M e a família $\mathcal{F}^{-1} = \{A^{-1}; A \in \mathcal{F}\}$. Note que \mathcal{F}^{-1} é uma base de filtro de S^{-1} e que satisfaz a hipótese de translação. De fato, dado $A^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$ e $s^{-1} \in S^{-1}$, como S satisfaz a hipótese de translação, temos que existem $B, C \in \mathcal{F}$ tais que $B \subset As$ e $C \subset sA$, ou seja, $B^{-1} \subset s^{-1}A^{-1}$ e $C^{-1} \subset A^{-1}s^{-1}$, mostrando a hipótese de translação para S^{-1} . Agora, para $A^{-1}, B^{-1} \in \mathcal{F}^{-1}$, como \mathcal{F} é base de filtro de S , existe $C \in \mathcal{F}$ tal que $C \subset A \cap B$, ou seja, $C^{-1} \subset A^{-1} \cap B^{-1}$ mostrando que \mathcal{F}^{-1} é base de filtro de S^{-1} . Para mostrar que dado um \mathcal{F} -atrator \mathcal{A} é invariante, mostraremos que \mathcal{A} é um \mathcal{F}^{-1} -repulsor. De fato, seja V uma vizinhança atratora de \mathcal{A} , note que para $A \in \mathcal{F}$,

$$\begin{aligned} (A^{-1})^*V &= \{y \in M; \text{existe } s^{-1} \in S^{-1} \text{ e } v \in V \text{ tal que } s^{-1}y = v\} \\ &= \{y \in M; \text{existe } s \in S \text{ e } v \in V \text{ tal que } y = sv\} = AV. \end{aligned}$$

Assim, temos que $\omega(V, \mathcal{F}) = \omega^*(V, \mathcal{F}^{-1})$, mostrando que \mathcal{A} é um \mathcal{F}^{-1} -repulsor com vizinhança repulsora V .

Definição 4.1. *Um subconjunto X de M é chamado de **invariante isolado** para ação do semigrupo S se é invariante e se existe uma vizinhança V de X tal que se $Sx \subset V$ e $S^*x \subset V$ implica $x \in X$.*

A seguir, mostraremos que conjuntos \mathcal{F} -atratores e \mathcal{F} -repulsores são invariantes isolados e que a órbita regressiva de um ponto que não pertence a um conjunto \mathcal{F} -atrator não está contida na vizinhança atratora da mesma. Mostraremos também que a órbita progressiva de um ponto que não pertence a um conjunto \mathcal{F} -repulsor não está contida na vizinhança repulsora da mesma.

Proposição 4.2. *Seja \mathcal{A} um \mathcal{F} -atrator e \mathcal{R} um \mathcal{F} -repulsor. Então existe uma vizinhança V de \mathcal{A} e uma vizinhança U de \mathcal{R} tal que $S^*x \not\subset V$ para todo $x \in V \setminus \mathcal{A}$ e $Sx \not\subset U$ para todo $x \in U \setminus \mathcal{R}$. Em particular \mathcal{A} e \mathcal{R} são invariantes isolados.*

Demonstração: Seja V uma vizinhança atratora de \mathcal{A} e U uma vizinhança repulsora de \mathcal{R} . Se $x \in V \setminus \mathcal{A}$, temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}^*$. Assim, $S^*x \cap \mathcal{A}^* \neq \emptyset$. Portanto $S^*x \not\subset V$ para todo $x \in V \setminus \mathcal{A}$. Visto que \mathcal{A} é invariante segue que \mathcal{A} é invariante isolado. Se $x \in U \setminus \mathcal{R}$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}'$, onde \mathcal{A}' é um \mathcal{F} -atrator tal que $(\mathcal{A}')^* = \mathcal{R}$. Assim, $Sx \cap \mathcal{A}' \neq \emptyset$. Portanto $Sx \not\subset U$ para todo $x \in U \setminus \mathcal{R}$. Visto que \mathcal{R} é invariante, segue que \mathcal{R} é invariante isolado.

□

Note que se X é um conjunto invariante isolado, então se as órbitas progressiva e as órbitas regressiva estão muito próximas de X , temos que estas órbitas estão contidas em X .

Definição 4.3. *Uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica para a ação de S no espaço M , é uma coleção finita $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i : i = 1, \dots, n\}$ de subconjuntos de M não vazios, dois a dois disjuntos, invariantes isolados e compactos tais que*

1. para todo $x \in M$ tem que $\omega(x, \mathcal{F}), \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ e
2. (a condição do não ciclo) Se existem $\mathcal{C}_{j_0}, \dots, \mathcal{C}_{j_l}$ e $x_1, \dots, x_l \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$, com

$$\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}} \text{ e } \omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$$

para $k = 1, \dots, l$ então $\mathcal{C}_{j_0} \neq \mathcal{C}_{j_l}$.

Os conjuntos \mathcal{C}_i de uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica são chamados de **\mathcal{F} -conjuntos de Morse dinâmicos**.

Exemplo 4.4. *Sejam M um espaço métrico compacto e o semigrupo $S = \mathbb{R}$ munido com a operação interna da soma. Já foi mostrado no Exemplo 2.15 que um fluxo ϕ de M é uma ação de S em M definida por $sx = \phi(s, x)$ com $s \in S$ e $x \in M$. Também foi mostrado que tomando a família $\mathcal{F} = \{A_t = \{s \in S; s \geq t\}; t \geq 0\}$, os conjuntos ω -limites e ω^* -limites referente à \mathcal{F} são os conjuntos ω -limites e ω^* -limites para fluxos. Sabemos que para cada $s \in S$, ϕ_s é um homeomorfismo de M . Note que a família \mathcal{F} satisfaz as hipótese de translação à esquerda e à direita. De fato, sejam $s \in S$ e $A_t \in \mathcal{F}$. Observe que $sA_t = \{z \in S; z \geq t + s\} = A_{t+s}$. Assim, tomando $w > 0$ tal que $w > t + s$, temos que $A_w \subset sA_t$ e $A_w \subset A_{t+s}$. Assim, a definição de decomposição de Morse apresentada por Conley, coincide com a definição de \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.*

Proposição 4.5. *Seja $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i : i = 1, \dots, n\}$ uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica. Suponha que para algum $x \in M$ tem-se $\omega(x, \mathcal{F}) \cup \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Então $x \in \mathcal{C}_j$.*

Demonstração: Suponha que para $x \in M$, os conjuntos $\omega(x, \mathcal{F}) \cup \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_j$ para algum $j \in \{1, \dots, n\}$. Como M é compacto e o semigrupo S é um semigrupo de homeomorfismos de M , os conjuntos $\omega(x, \mathcal{F})$ e $\omega^*(x, \mathcal{F})$ são não vazios. Como $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_j$ e $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_j$, temos pela hipótese de não ciclo da definição de decomposição de Morse dinâmica que $x \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$. Assim, $x \in \mathcal{C}_k$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. O fato de \mathcal{C}_k ser progressivamente invariante e regressivamente invariante, implica que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_k$ e $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_k$. Desde que os \mathcal{F} -conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos nós temos que $\mathcal{C}_j = \mathcal{C}_k$. Portanto $x \in \mathcal{C}_j$.

□

Agora, definiremos uma ordem entre os \mathcal{F} -conjuntos de Morse dinâmicos.

Dados $\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_\beta \in \mathcal{M}$, dizemos que $\mathcal{C}_\alpha \preceq \mathcal{C}_\beta$ se e somente se existem $\mathcal{C}_{j_0} =$

$\mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_m} = \mathcal{C}_\beta$ e $x_1, \dots, x_m \in M$ com $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$ para $k = 1, \dots, m$.

Proposição 4.6. *A relação \preceq definida acima é uma ordem entre os conjuntos \mathcal{C}_i de uma \mathcal{F} -decomposição de Morse.*

Demonstração: Tome $x \in \mathcal{C}_i$. Sabendo que \mathcal{C}_i é compacto e invariante, segue que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_i$ e $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_i$. Assim $\mathcal{C}_i \preceq \mathcal{C}_i$, para todo $i = 1, \dots, n$. Agora, suponha que $\mathcal{C}_\alpha \preceq \mathcal{C}_\beta$ e $\mathcal{C}_\beta \preceq \mathcal{C}_\alpha$. Tomando $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_m} = \mathcal{C}_\alpha$, $x_1, \dots, x_m \in M$ com $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$ onde $\mathcal{C}_\beta = \mathcal{C}_k$ para algum $k = 1, \dots, m$. Desde que, $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_{j_m}$, a segunda condição da definição de decomposição de Morse dinâmica, implica que existe $x_{k_l} \in \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ com $x_{k_l} \in \mathcal{C}_l$ para algum $l \in \{1, \dots, n\}$, portanto $\omega(x_{k_l}, \mathcal{F}), \omega^*(x_{k_l}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_l$. Sabendo que $\omega(x_{k_l}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k_l}}$, $\omega^*(x_{k_l}, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k_l-1}}$ e o fato que os conjuntos de Morse são dois a dois disjuntos, temos que $\mathcal{C}_{j_{k_l-1}} = \mathcal{C}_l = \mathcal{C}_{j_{k_l}}$. Assim $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n-1\}$. Analogamente mostra-se que $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_k$ para todo $k = 1, \dots, m$. Assim concluímos que $\mathcal{C}_\alpha = \mathcal{C}_\beta$. Para provar a hipótese de transitividade, suponha que $\mathcal{C}_\alpha \preceq \mathcal{C}_\beta$ e $\mathcal{C}_\beta \preceq \mathcal{C}_\gamma$. Então existem $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_m} = \mathcal{C}_\beta$, $x_1, \dots, x_m \in M$ onde $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$ para $k = 1, \dots, m$. Além disto, existem $\mathcal{C}'_{j_0} = \mathcal{C}_\beta, \mathcal{C}'_{j_1}, \dots, \mathcal{C}'_{j_n} = \mathcal{C}_\gamma$, $x'_1, \dots, x'_n \in M$ onde $\omega^*(x_l, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}'_{j_{l-1}}$ e $\omega(x'_l, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}'_{j_l}$ para $l = 1, \dots, n$. Assim renumerando $\mathcal{C}'_{j_l} = \mathcal{C}_{j_{m+i}}$ e $x'_i = x_{m+i}$ para $i = 1, \dots, n$ temos $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_\alpha, \mathcal{C}_{j_1}, \dots, \mathcal{C}_{j_m} = \mathcal{C}_\beta, \mathcal{C}_{j_{m+1}}, \dots, \mathcal{C}_{j_{m+n}} = \mathcal{C}_\gamma$ com $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$ para $k = 1, \dots, m+n$, concluindo que $\mathcal{C}_\alpha \preceq \mathcal{C}_\gamma$.

□

Teorema 4.7. *Uma coleção finita $\{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n\}$ de conjuntos compactos não vazios, invariantes isolados e dois a dois disjuntos é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica se e somente satisfaz:*

1. $\omega(x, \mathcal{F}), \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ para todo $x \in M$
2. $\omega(x, \mathcal{F}) \cup \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_i$ implica $x \in \mathcal{C}_i$

3. A relação \preceq definida acima é uma ordem entre os conjuntos \mathcal{C}_i .

Demonstração: Se $\{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n\}$ é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica, temos que a primeira condição do teorema é satisfeita por definição. As condições 2 e 3 seguem respectivamente pelas proposições 4.5 e 4.6. Reciprocamente, a primeira condição apresentada neste teorema é a primeira condição da definição de decomposição de Morse dinâmica, assim precisamos mostrar a segunda condição da definição. Assuma que existem $\mathcal{C}_{j_0}, \dots, \mathcal{C}_{j_l}, x_1, \dots, x_l \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$ onde $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_{k-1}}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_k}$ para $k = 1, \dots, l$ e $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_{j_l}$. Para todo $k = 1, \dots, l-1$ temos que $\mathcal{C}_{j_0} \preceq \mathcal{C}_{j_k}$ e $\mathcal{C}_{j_k} \preceq \mathcal{C}_{j_l} = \mathcal{C}_{j_0}$. Desde que \preceq é uma ordem entre estes conjuntos, concluímos que $\mathcal{C}_{j_0} = \mathcal{C}_{j_k}$ para todo $k = 1, \dots, l$. Assim $\omega^*(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_0}$ e $\omega(x_k, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{j_0}$ para todo $k = 1, \dots, l$. Pela hipótese 2 implica que $x_k \in \mathcal{C}_{j_0}$ o que contradiz o fato de $x_k \in M \setminus \bigcup_{i=1}^n \mathcal{C}_i$. Portanto $\mathcal{C}_{j_0} \neq \mathcal{C}_{j_l}$.

□

Enumerando os conjuntos \mathcal{C}_i de tal forma que $\mathcal{C}_i \preceq \mathcal{C}_j$ implica $i \leq j$, a \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica descreve o comportamento limite dos semigrupos via os movimentos do conjuntos \mathcal{C}_i de menor índice para os de maior índice.

Sejam $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n\}$ e $\mathcal{M}' = \{\mathcal{C}'_j, j = 1, \dots, m\}$ \mathcal{F} -decomposições de Morse dinâmicas. Denotaremos $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}' = \{\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j : i, j\}$ onde são permitidos apenas os índices i e j com $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j \neq \emptyset$. A seguir mostraremos que esta intersecção é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.

Proposição 4.8. *Suponha que $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i, i = 1, \dots, n\}$ e $\mathcal{M}' = \{\mathcal{C}'_j, j = 1, \dots, m\}$ são \mathcal{F} -decomposições de Morse dinâmicas. Então $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$, como definido acima, é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.*

Demonstração: Segue imediatamente pela definição, que $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$ são não vazios, compactos e dois a dois disjuntos. Tome $x \in \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$. Como \mathcal{C}_i e \mathcal{C}'_j são invariantes, temos que $Sx \subset \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$ e $S^*x \subset \mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$. Assim $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$ é invariante. Além do mais, a intersecção das vizinhanças de \mathcal{C}_i e \mathcal{C}'_j é uma vizinhança de $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$. Portanto, $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j$ é invariante

isolado para todo i, j . Agora para todo $x \in M$ e $y \in \omega(x, \mathcal{F})$, existe i, j tal que $y \in \mathcal{C}_i$ e $x \in \mathcal{C}'_j$. Assim, $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \bigcup_{i,j} (\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}'_j)$. Analogamente, temos para $\omega^*(x, \mathcal{F})$. Portanto $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ satisfaz a condição 1 da definição de decomposição de Morse dinâmica. Finalmente, suponha que existem $\mathcal{C}_{k_0} \cap \mathcal{C}'_{k_0}, \dots, \mathcal{C}_{k_m} \cap \mathcal{C}'_{k_m}, x_1, \dots, x_m \in M \setminus \bigcup_{l=0}^m (\mathcal{C}_{k_l} \cap \mathcal{C}'_{k_l})$ onde $\omega^*(x_l, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{k_{l-1}} \cap \mathcal{C}'_{k_{l-1}}$ e $\omega(x_l, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{k_l} \cap \mathcal{C}'_{k_l}$ para $l = 1, \dots, m$. Desde que $\mathcal{C}_{k_l} \cap \mathcal{C}'_{k_l} \subset \mathcal{C}_{k_l}$ para todo $l = 1, \dots, m$, temos que $\mathcal{C}_{k_0} \neq \mathcal{C}_{k_m}$. Assim, \mathcal{C}_{k_0} e \mathcal{C}_{k_m} são disjuntos. Portanto $\mathcal{C}_{k_0} \cap \mathcal{C}'_{k_0} \neq \mathcal{C}_{k_m} \cap \mathcal{C}'_{k_m}$, mostrando que $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}'$ satisfaz a segunda condição da definição de decomposição de Morse dinâmica.

□

A seguir mostraremos que toda \mathcal{F} -decomposição de Morse é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.

Teorema 4.9. *Seja $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i; i = 1, \dots, n\}$ uma \mathcal{F} -decomposição de Morse, onde $\mathcal{C}_{n-i} = \mathcal{A}_{i+1} \cap \mathcal{A}_i^*$ para $i = 0, \dots, n-1$, então \mathcal{M} é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.*

Demonstração: Se \mathcal{M} é a \mathcal{F} -decomposição de Morse trivial, não a nada o que fazer. Suponha que $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_i; i = 1, \dots, n\}$ é não trivial. Os elementos de $\{\mathcal{C}_i; i = 1, \dots, n\}$ são compactos e invariantes isolados, já que são intersecções de compactos e invariantes isolados. Para $i < j$ temos,

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{n-i} \cap \mathcal{C}_{n-j} &= \mathcal{A}_{i+1} \cap \mathcal{A}_i^* \cap \mathcal{A}_{j+1} \cap \mathcal{A}_j^* \\ &= \mathcal{A}_{i+1} \cap \mathcal{A}_j^* \subset \mathcal{A}_j \cap \mathcal{A}_j^* = \emptyset. \end{aligned}$$

Assim, temos que os elementos de $\{\mathcal{C}_i; i = 1, \dots, n\}$ são dois a dois disjuntos. Agora para $x \in M$ existe um menor índice i tal que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_i$. Além do mais, como

$$\emptyset = \mathcal{A}_n^* \subset \dots \subset \mathcal{A}_0^* = M,$$

existe um maior índice j tal que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_j^*$. Observando que $i > 0$ e $j < n$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \not\subset \mathcal{A}_{i-1}$ obtendo que $x \in \mathcal{A}_{i-1}^*$. Como $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_{i-1}^*$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_{i-1}^* = \mathcal{C}_{n-i+1}$. Analogamente, como $\omega^*(x, \mathcal{F}) \not\subset \mathcal{A}_{j+1}^*$ temos que $x \in \mathcal{A}_{j+1}$. Assim

$\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_{j+1}$ e $\omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{A}_{j+1} \cap \mathcal{A}_j^* = \mathcal{C}_{n-j}$. Suponha que $j < i - 1$. Como $j + 1 \leq i - 1$, tem-se que $\mathcal{A}_{i-1}^* \subset \mathcal{A}_{j+1}^*$. Assim

$$x \in \mathcal{A}_{j+1} \cap \mathcal{A}_{i-1}^* \subset \mathcal{A}_{j+1} \cap \mathcal{A}_{j+1}^* = \emptyset,$$

o que é uma contradição. Portanto, $j \geq i - 1$ obtendo que $n - j \leq n - i + 1$. Para $j = i - 1$, temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}) \cup \omega(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_{n-j}$, obtendo que $x \in \mathcal{A}_{j+1} \cap \mathcal{A}_j^* = \mathcal{C}_{n-j}$. Pela Teorema 4.7 segue que a coleção $\{\mathcal{C}_i; i = 1, \dots, n\}$ é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica.

□

No artigo [4], mostra-se que uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse. Mas nem sempre é possível, uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica ser uma \mathcal{F} -decomposição de Morse. Na seção a seguir mostraremos um exemplo.

4.2 Compactificação de Alexandroff.

Nesta seção, trabalharemos a teoria de ações de semigrupos sobre espaços topológicos munidos pela topologia da compactificação de Alexandroff, onde podemos aplicar a teoria de recorrência por cadeias e a teoria de decomposição de Morse para ações de semigrupos. Mostraremos o exemplo desenvolvido neste trabalho por Tozatti, Hélio V. M.; Barros, Carlos J. Braga e Souza, Josiney A., onde mostra que uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica não é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse.

Primeiramente, assumiremos que X é um espaço topológico localmente compacto, S um semigrupo agindo em X e \mathcal{F} uma base de filtro do semigrupo S . A compactificação de Alexandroff do espaço topológico X será denotada por $Y = X \cup \{\infty\}$. Relembrando que a topologia da compactificação de Alexandroff é formada pelo seguintes abertos: \emptyset, X , os conjuntos abertos da topologia do espaço X e $A \cup \{\infty\}$, onde A é complementar de um subconjunto compacto de X . Uma condição sobre a ação $\phi : S \times X \rightarrow X$, é que para todo $s \in S$, a aplicação $\phi_s : X \rightarrow X$ definida por $\phi_s(x) = s \cdot x$ para $x \in X$, é um homeomorfismo sobre o espaço X . Como X é localmente compacto, temos que para todo $s \in S$, o homeomorfismo $\phi_s : X \rightarrow X$ se estende à um homeomorfismo $\phi'_s : Y \rightarrow Y$, onde $\phi'_s(\infty) = \infty$ (Ver [7], pg 205). Fixado a família \mathcal{F} de subconjuntos de S , o conjunto ω -limite de um subconjunto U de X e U' de Y será denotado respectivamente por $\omega(U, \mathcal{F})$ e $\omega_Y(U', \mathcal{F})$. Analogamente usaremos a mesma notação para os ω^* -limites. Para diferenciar a topologia de X com a topologia de Y , denotaremos o fecho da topologia de Y com $'$.

Proposição 4.10. *Seja U um subconjunto não vazio de X . Então,*

$$\omega_Y(U, \mathcal{F}) \cap X = \omega(U, \mathcal{F}) \text{ e}$$

$$\omega_Y^*(U, \mathcal{F}) \cap X = \omega^*(U, \mathcal{F}).$$

Demonstração: Para todo subconjunto $B \subset X$, temos que $\overline{B'} \cap X = \overline{B}$. Assim,

$$\omega_Y(U, \mathcal{F}) \cap X = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AU'} \cap X = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} \overline{AU} = \omega(U, \mathcal{F}).$$

Analogamente mostra-se que $\omega_Y^*(U, \mathcal{F}) \cap X = \omega^*(U, \mathcal{F})$.

□

O resultado da proposição anterior, vale para os conjuntos ω^* -limite. A demonstração é análoga.

Na teoria de recorrência por cadeias assumimos que o espaço topológico seja compacto. Esta condição é usada para garantir que os conjuntos ω -limites sejam não vazios. Como neste caso, assumimos que X é localmente compacto, não temos a garantia de que o conjunto ω -limite seja não vazio. Sendo assim, fixado o semigrupo S agindo em X , a base de filtro \mathcal{F} de S , uma cobertura aberta \mathcal{U} de X e $A \subset S$, assumiremos que as definições de (\mathcal{U}, A) -cadeia, Ω -limite por cadeias, Ω^* -limite por cadeias, conjunto transitivo por cadeias e pontos transitivos por cadeias, serão as mesmas do Capítulo 3.

No teorema a seguir, assumiremos que a família \mathcal{F} satisfaz a hipótese H_3 .

Teorema 4.11. *Se X não admite pontos recorrentes por cadeias, então Y é transitivo por cadeias.*

Demonstração: Primeiramente, mostraremos que para todo $x \in X$, $\omega(x, \mathcal{F}) = \emptyset$. De fato, suponha que $\omega(x, \mathcal{F}) \neq \emptyset$. Pela Proposição 3.7, $\omega(x, \mathcal{F})$ é transitivo por cadeias, ou seja, para todo $y \in \omega(x, \mathcal{F})$ temos que $\omega(x, \mathcal{F}) \subset \Omega(y)$, ou seja, $y \in \Omega(y)$ mostrando que y é recorrente por cadeias, o que é absurdo. Observe que $\omega_Y(x, \mathcal{F}) = \{\infty\}$ para todo $x \in Y$. De fato, suponha que existe $z \in \omega_Y(x, \mathcal{F})$ com $z \neq \infty$. Assim, $\omega(x, \mathcal{F}) = \omega_Y(x, \mathcal{F}) \cap X \neq \emptyset$, o que é absurdo. Agora mostraremos que Y é o único \mathcal{F} -atrator. Suponha que existe um subconjunto próprio \mathcal{A} de Y que é um \mathcal{F} -atrator. Seja U a vizinhança atratora de \mathcal{A} . Temos que $\infty \in \mathcal{A}$. De fato, $\infty \in \omega_Y(x, \mathcal{F}) \subset \omega_Y(U, \mathcal{F}) = \mathcal{A}$ para todo $x \in U$. Seja, \mathcal{A}^* o \mathcal{F} -repulsor complementar de \mathcal{A} . Pela Proposição 2.31 temos que existe um \mathcal{F} -repulsor R não vazio tal que $\mathcal{A}^* = R$. Assim, para $y \in \mathcal{A}^*$ temos que $\infty \in \omega_Y(y, \mathcal{A})$, o que é absurdo pela definição de \mathcal{A}^* . Como Y é o único \mathcal{F} -atrator, pelo

Corolário 3.16 podemos concluir que Y é transitivo por cadeias.

□

Agora, iremos definir duas ações de semigrupos em espaços munidos com a topologia da compactificação de Alexandroff e calcularemos os ω -limites de cada ponto do espaço topológico.

Exemplo 4.12. Tome $M = \mathbb{R}_*^+$ com a topologia induzida de \mathbb{R} . Seja o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna da multiplicação. Defina μ de S em M da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu : S \times M &\longrightarrow M \\ (s, x) &\mapsto \mu(s, x) = s \cdot x \end{aligned}$$

Note que μ é uma ação de S em M de homeomorfismos. Agora considere a família

$$\mathcal{F} = \{(a, +\infty); a > 0\}.$$

Veja que \mathcal{F} é uma base de filtro de S . De fato $\emptyset \notin \mathcal{F}$, e dados $(a, +\infty), (b, +\infty) \in \mathcal{F}$, assumindo que $b \geq a$, temos que

$$(a, +\infty) \cap (b, +\infty) = (b, +\infty) \in \mathcal{F}.$$

Observe também que \mathcal{F} satisfaz as hipóteses de translação a direita e a esquerda. De fato, note que para todo $s \in S$ e $(a, +\infty) \in \mathcal{F}$ temos que $sa > 0$ e

$$s(a, +\infty) = (a, +\infty)s = (sa, +\infty) \in \mathcal{F}.$$

Seja $X_1 = \mathbb{R}_*^+ \cup \{\infty_1\}$ com a compactificação de Alexandroff. De imediato temos X_1 compacto e Hausdorff. Tome o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna de multiplicação e defina μ^1 de S em X_1 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu^1 : S \times X_1 &\longrightarrow X_1 \\ (s, x) &\mapsto s \cdot x = \begin{cases} s \cdot x & \text{se } x \in \mathbb{R}_*^+, \\ \infty_1 & \text{se } x = \infty_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Note que μ^1 é uma ação de S em X_1 de homeomorfismos. Primeiramente como todo homeomorfismo de \mathbb{R}_*^+ em \mathbb{R}_*^+ se estende a um homeomorfismo entre seu respectivo espaço de Alexandroff, onde o ponto infinito é levado nele mesmo, assim como visto acima, a aplicação μ_s^1 é a extensão do homeomorfismo $\mu_s|_{\mathbb{R}_*^+}$ (Ver [7], pg 205). Concluindo que μ_s^1 é um homeomorfismo para todo $s \in S$. Para $(a, +\infty) \in \mathcal{F}$ e $x \in \mathbb{R}_*^+$ temos $(a, +\infty)x = (ax, +\infty)$ e $(a, +\infty)^*x = (0, \frac{x}{a})$, para $x = \infty_1$ temos $(a, +\infty)x = \{\infty_1\}$ e $(a, +\infty)^*x = \{\infty_1\}$. Note que para $x \in \mathbb{R}_*^+$,

$$\omega(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} \overline{(ax, +\infty)} = \bigcap_{a>0} [ax, +\infty) \cup \{\infty_1\} = \{\infty_1\} \text{ e}$$

$$\omega^*(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x}{a})} = \bigcap_{a>0} (0, \frac{x}{a}] \cup \{\infty_1\} = \{\infty_1\}.$$

Para $x = \infty_1$ temos

$$\omega(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_1\}} = \{\infty_1\} \text{ e}$$

$$\omega^*(x, \mathcal{F}) = \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_1\}} = \{\infty_1\}.$$

Exemplo 4.13. Seja $M = \mathbb{R}^+$ com a topologia induzida de \mathbb{R} . Seja o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna de multiplicação. Defina μ de S em M da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu : S \times M &\longrightarrow M \\ (s, x) &\longmapsto \mu(s, x) = s \cdot x \end{aligned}$$

Note que μ é uma ação de S em M de homeomorfismos. Agora considere a família

$$\mathcal{F} = \{(a, +\infty); a > 0\}.$$

Já vimos que \mathcal{F} é uma base de filtro de S e que satisfaz as condições de translação a esquerda e a direita. Seja $X_2 = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty_2\}$ com a compactificação de Alexandroff. De imediato temos X_2 compacto e Hausdorff. Tome o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna de multiplicação e define μ^2 de S em X_2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mu^2 : S \times X_2 &\longrightarrow X_2 \\ (s, x) &\longmapsto s \cdot x = \begin{cases} s \cdot x & \text{se } x \in \mathbb{R}^+, \\ \infty & \text{se } x = \infty_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Da mesma forma como foi mostrado no exemplo anterior, μ^2 é uma ação de homeomorfismos S em X_2 . Para $(a, +\infty) \in \mathcal{F}$ e $x \in \mathbb{R}^+$ com $x \neq 0$, temos que $(a, +\infty)x = (ax, +\infty)$ e $(a, +\infty)^*x = (0, \frac{x}{a})$. Para $x = 0$ temos que $(a, +\infty)x = \{0\}$ e $(a, +\infty)^*x = \{0\}$. Para $x = \infty_2$ temos $(a, +\infty)x = \{\infty_2\}$ e $(a, +\infty)^*x = \{\infty_2\}$. Note que para $x \in \mathbb{R}^+$ com $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\omega(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} \overline{(ax, +\infty)} = \bigcap_{a>0} [(ax, +\infty) \cup \{\infty_2\}] = \{\infty_2\} \text{ e} \\ \omega^*(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x}{a})} = \bigcap_{a>0} [0, \frac{x}{a}] = \{0\}.\end{aligned}$$

Para $x = \infty_2$ temos que

$$\begin{aligned}\omega(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_2\}} = \{\infty_2\} \text{ e} \\ \omega^*(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_2\}} = \{\infty_2\}.\end{aligned}$$

Para $x = 0$ temos que

$$\begin{aligned}\omega(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{0\}} = \{0\} \text{ e} \\ \omega^*(x, \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*x} = \bigcap_{a>0} \overline{\{0\}} = \{0\}.\end{aligned}$$

Exemplo 4.14. Dado $X_1 = (0, \infty_1] \times X_2 = [0, \infty_2]$ com o topologia do produto. Tome o conjunto $X = X_1 \times X_2 \setminus \mathbb{R}_* \times \{\infty_2\}$ com a topologia induzida de $X_1 \times X_2$. Note que X é localmente compacto. De fato, para $(x_1, x_2) \in X$ temos os seguintes casos: Se $x_2 = 0$, temos que $(x_1, 0) \in X_1 \times \{0\}$ que é uma vizinhança compacta em X . Pois $X_1 \times \{0\}$ é compacto em $X_1 \times X_2$ e $X_1 \times \{0\} \cap X = X_1 \times X_2 \setminus \mathbb{R}_* \times \{\infty_2\} = X_1 \times \{0\}$. Para $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_*^+$, tome $a, b, c, d \in \mathbb{R}_*^+$ tais que $a < x_1 < b$ e $c < x_2 < d$, assim $[a, b] \times [c, d]$ é uma vizinhança compacta de (x_1, x_2) . Para $x_1 = \infty_1$, temos que $\{\infty_1\} \times X_2$ é uma vizinhança compacta de (∞_1, x_2) . Observe também que X não é compacto em $X_1 \times X_2$, de fato $\overline{X} = X_1 \times X_2$, sendo assim X não é compacto com a topologia induzida por $X_1 \times X_2$. Seja o semigrupo $S = \mathbb{R}_*^+$ com a operação interna da multiplicação. Defina $\mu^3 : S \times X \rightarrow X$, como sendo, $\mu^3(s, (x_1, x_2)) = (\mu^1(s, x_1), \mu^2(s, x_2))$. Veja que μ^3 é uma ação de S em X de homeomorfismos, pois cada coordenada é um homeomorfismo. Agora, tome $Y = X \cup \{\infty_3\}$ a compactificação de Alexandroff de X . Defina, μ^4 como

$$\begin{aligned} \mu^4 : S \times Y &\longrightarrow Y \\ (s, x) &\mapsto s \cdot x = \begin{cases} s \cdot x = s \cdot (x_1, x_2) & \text{se } x = (x_1, x_2) \in X, \\ \infty_3 & \text{se } x = \infty_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Novamente como feitos nos exemplos anteriores, μ^4 é uma ação de homeomorfismos S em Y . Considerando a família $\mathcal{F} = \{(a, +\infty); a > 0\}$, já temos que \mathcal{F} é uma base de filtro de S e que satisfaz as condições de translação a esquerda e a direita. Primeiramente iremos calcular os ω -limites de todos os pontos de Y . De fato, para $x = (x_1, 0)$ com $x_1 \neq \infty_1$, temos que

$$\begin{aligned} \omega((x_1, 0), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)(x_1, 0)} = \bigcap_{a>0} \overline{(ax_1, +\infty) \times \{0\}} \\ &= \bigcap_{a>0} \overline{(ax_1, +\infty) \times \{0\}} = \bigcap_{a>0} [(ax_1, +\infty) \cup \{\infty_1\}] \times \{0\} = \{(\infty_1, 0)\}, \\ \omega^*((x_1, 0), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*(x_1, 0)} = \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x_1}{a}) \times \{0\}} \\ &= \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x_1}{a}) \times \{0\}} = \bigcap_{a>0} (0, \frac{x_1}{a}) \cup \{\infty_1\} \times \{0\} = \{(\infty_1, 0)\}, \end{aligned}$$

para $x = (\infty_1, 0)$, temos

$$\begin{aligned} \omega((\infty_1, 0), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)(\infty_1, 0)} = \bigcap_{a>0} \overline{\{(\infty_1, 0)\}} = \{(\infty_1, 0)\}, \\ \omega^*((\infty_1, 0), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*(\infty_1, 0)} = \bigcap_{a>0} \overline{\{(\infty_1, 0)\}} = \{(\infty_1, 0)\} \end{aligned}$$

para $x = (x_1, x_2)$ com $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_*^+$, assim temos que

$$\begin{aligned} \omega((x_1, x_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)(x_1, x_2)} = \bigcap_{a>0} \overline{(ax_1, +\infty) \times (ax_2, +\infty)} \\ &= \bigcap_{a>0} \overline{((ax_1, +\infty) \times (ax_2, +\infty) \cup \{\infty_3\})} \\ &= \bigcap_{a>0} (([ax_1, +\infty) \cup \{\infty_1\}] \times [ax_2, +\infty) \cup \{\infty_2\}) \cup \{\infty_3\} = \{(\infty_1, \infty_2), \infty_3\}, \\ \omega^*((x_1, x_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*(x_1, x_2)} = \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x_1}{a}) \times (0, \frac{x_2}{a})} \\ &= \bigcap_{a>0} \overline{(0, \frac{x_1}{a}) \times (0, \frac{x_1}{a})} \end{aligned}$$

$$= \bigcap_{a>0} (0, \frac{x_1}{a}] \cup \{\infty_1\} \times [0, \frac{x_1}{a}] = \{(\infty_1, 0)\}.$$

para $x_1 = \infty_1$, $x_2 > 0$ e $x_2 \neq \infty_2$ temos que

$$\begin{aligned} \omega((\infty_1, x_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)(\infty_1, x_2)} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_1\} \times (ax_2, +\infty)} \\ &= \bigcap_{a>0} (\overline{\{\infty_1\} \times (ax_2, +\infty)} \cup \{\infty_3\}) \\ &= \bigcap_{a>0} (\{\infty_1\} \times [ax_2, +\infty) \cup \{\infty_2\}) \cup \{\infty_3\} = \{(\infty_1, \infty_2), \infty_3\}, \\ \omega^*((\infty_1, x_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*(\infty_1, x_2)} = \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_1\} \times (0, \frac{x_2}{a})} \\ &= \bigcap_{a>0} \overline{\{\infty_1\} \times (0, \frac{x_1}{a})} \\ &= \bigcap_{a>0} \{\infty_1\} \times [0, \frac{x_1}{a}] = \{(\infty_1, 0)\}. \end{aligned}$$

Agora para (∞_1, ∞_2) temos que

$$\begin{aligned} \omega((\infty_1, \infty_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)(\infty_1, \infty_2)} = \{(\infty_1, \infty_2)\}, \\ \omega^*((\infty_1, \infty_2), \mathcal{F}) &= \bigcap_{a>0} \overline{(a, +\infty)^*(\infty_1, \infty_2)} = \{(\infty_1, \infty_2)\}, \end{aligned}$$

Por fim, para $x = \infty_3$, $\omega(\infty_3, \mathcal{F}) = \omega^*(\infty_3, \mathcal{F}) = \{\infty_3\}$. Agora considere a coleção de conjuntos $\{\mathcal{C}_1 = X_1 \times \{0\}, \mathcal{C}_2 = \{(\infty_1, \infty_2)\}, \mathcal{C}_3 = \{\infty_3\}\}$. Note que estes conjuntos são compactos e dois a dois disjuntos. Note que estes conjuntos são invariantes isolados. De fato, primeiro note que os conjuntos são invariantes.

$$SX_1 \times \{0\} = X_1 \times \{0\} = S^*X_1 \times \{0\},$$

$$S\{(\infty_1, \infty_2)\} = \{(\infty_1, \infty_2)\} = S^*\{(\infty_1, \infty_2)\} \text{ e}$$

$$S\{\infty_3\} = \{\infty_3\} = S^*\{\infty_3\}.$$

Tome a vizinhança V de $X_1 \times \{0\}$, note que para $(x_1, x_2) \in V \setminus X_1 \times \{0\}$ temos que $x_2 > 0$, assim $S(x_1, x_2) = X_1 \times \mathbb{R}_*^+ = S^*(x_1, x_2)$ que não está contida em $X_1 \times \{0\}$. Agora seja a vizinhança $V' = X_1 \times (a, +\infty) \cup \{\infty_2\} \cap X = X_1 \times X_2 \setminus \mathbb{R}_* \times \{\infty_2\}$

com $a \in \mathbb{R}_*^+$, para $(x_1, x_2) \in V' \setminus \{(\infty_1, \infty_2)\}$ temos que $x_2 > a$ e $x_2 \neq \infty$, assim $S(x_1, x_2) = X_1 \times \mathbb{R}_*^+ = S^*(x_1, x_2)$, que não está contido em $\{(\infty_1, \infty_2)\}$. Por ultimo, seja V'' vizinhança de $\{\infty_3\}$, note que para qualquer ponto $(x_1, x_2) \in V''$ diferente de ∞_3 , temos que $\{\infty_3\} \not\subset S(x_1, x_2)$ e $\{\infty_3\} \not\subset S^*(x_1, x_2)$. Note que para $x \in Y$, temos que $\omega(x, \mathcal{F}), \omega^*(x, \mathcal{F}) \subset \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_3$. Note que para $x \in Y \setminus \bigcup_{i=1}^3 \mathcal{C}_i$, temos $\omega(x, \mathcal{F}) = \{(\infty_1, \infty_2), \infty_3\}$, não está contido em nenhum dos conjuntos $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ e \mathcal{C}_3 . Assim, por vacuidade a condição de não ciclo é satisfeita. Portanto,

$$\{\mathcal{C}_1 = X_1 \times \{0\}, \mathcal{C}_2 = \{(\infty_1, \infty_2)\}, \mathcal{C}_3 = \{\infty_3\}\}$$

é uma \mathcal{F} -decomposição de Morse dinâmica. Mas note que estes conjuntos não definem uma \mathcal{F} -decomposição de Morse, pois $\{\infty_3\}$ não é um repulsor. De fato, primeiro $\{\infty_3\}$ não é uma vizinhança dele mesmo por construção. Note que para toda vizinhança V de $\{\infty_3\}$, temos que para (x_1, x_2) , os ω^* -limites podem ser $\{(\infty_1, \infty_2)\}$ ou $\{(\infty_1, 0)\}$, ou seja $\omega^*(V, \mathcal{F}) \not\subset \{\infty_3\}$. Concluindo assim que

$$\{\mathcal{C}_1 = X_1 \times \{0\}, \mathcal{C}_2 = \{(\infty_1, \infty_2)\}, \mathcal{C}_3 = \{\infty_3\}\}$$

não é \mathcal{F} -decomposição de Morse.

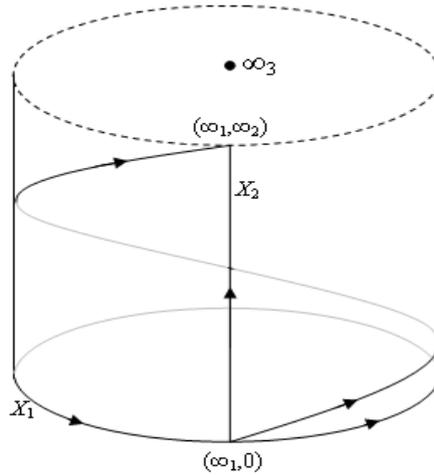


Figura 4.1:

4.3 Decomposições de Morse para sistemas de controle

Agora aplicaremos a teoria de decomposição de Morse dinâmica em sistemas de controle.

Sendo assim, seja M uma variedade diferenciável compacta C^∞ de dimensão n . Consideremos o sistema de controle,

$$x'(t) = X_0(x(t)) + \sum_{i=1}^n u_i X_i(x(t)), \quad (1)$$

onde $u \in \mathcal{U}_{cp} = \{u : \mathbb{R} \rightarrow U, \text{ constante por partes.}\}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto compacto e convexo e X_0, \dots, X_n são campos de vetores C^∞ de M .

Já sabemos do Capítulo 1 que para $u \in \mathcal{U}_{cp}$ e $x \in M$, o sistema (1) tem única solução $\phi(t, x, u)$, $t \in \mathbb{R}$ com $\phi(0, x, u) = x$.

Para $x \in M$ e $u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ temos

$$X(x, u) = X_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i X_i(x)$$

e $X_u(\cdot) = X(\cdot, u)$. Assumimos que todo campo de vetores X_u , $u \in U$ é completo. O sistema de controle é determinado pelo correspondente conjunto de campos de vetores $\mathcal{V} = \{X_u : u \in U\}$.

Como já foi visto no Capítulo 1, o semigrupo do sistema é o semigrupo de difeomorfismos de M definido por

$$S = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, t_j \geq 0, n \in \mathbb{N}\}.$$

As órbitas regressiva e progressiva a partir de x são respectivamente os conjuntos

$$Sx = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } y = \phi(t, x, u)\},$$

$$S^*x = \{y \in M : \text{existe } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ e } t > 0 \text{ com } y = \phi(-t, x, u)\}.$$

Para $T > 0$, definamos o conjunto

$$A(T) = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^n t_j \geq T, n \in \mathbb{N}\},$$

que é um semigrupo de difeomorfismos contido em S .

A família $\mathcal{F}_c = \{A(T) : T \geq 0\}$ de subconjuntos de S é uma base de filtro de S .

Para $T > 0$ defina o conjunto,

$$S_{\leq T} = \{e^{t_n Y_n} e^{t_{n-1} Y_{n-1}} \dots e^{t_0 Y_0} : Y_j \in \mathcal{V}, \sum_{j=0}^n t_j \leq T, n \in \mathbb{N}\}.$$

Assim temos $Sx = \bigcup_{t>0} S_{\leq T}x$ e $S^*x = \bigcup_{t>0} S_{\leq T}^*x$, onde

$$S_{\leq T}x = \{y \in M : \text{existe } 0 \leq t \leq T \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ com } y = \phi(t, x, u)\} \text{ e}$$

$$S_{\leq T}^*x = \{y \in M : \text{existe } 0 \leq t \leq T \text{ e } u \in \mathcal{U}_{cp} \text{ com } y = \phi(-t, x, u)\}.$$

Referente ao Capítulo 4 de [6], o conjunto \mathcal{U} munido com a topologia "fraca" em $\mathcal{L}_\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$, é compacto e \mathcal{U}_{cp} é denso em \mathcal{U} .

Definição 4.15. *Seja \mathcal{F}_c definido acima. Um atrator para o sistema de controle é definido como um \mathcal{F}_c -atrator. Analogamente para repulsor e repulsor complementar para sistemas de controle. Um conjunto de Morse para o sistema de controle é um \mathcal{F}_c -conjunto de Morse e uma decomposição de Morse para sistema de controle e uma decomposição de Morse dinâmica para o sistema de controle, são respectivamente uma \mathcal{F}_c -decomposição de Morse e \mathcal{F}_c -decomposição de Morse dinâmica.*

Exemplo 4.16. Sejam $X = (X_1, X_2)$ e $Y = (Y_1, Y_2)$ dois campos de vetores no disco, $M = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; \|x\| \leq 1\}$, dados por

$$X_1(x) = -x_2 + x_1\|x\|^2 \sin\left(\frac{\pi}{\|x\|}\right),$$

$$X_2(x) = x_1 + x_2\|x\|^2 \sin\left(\frac{\pi}{\|x\|}\right),$$

$$Y_1(x) = \alpha(x)x_1 + (\alpha(x) - \beta(x))x_2 + x_1\|x\|^2(\beta(x) \sin\left(\frac{\pi}{\|x\|}\right) - 4\alpha(x)),$$

$$Y_2(x) = \alpha(x)x_2 + (\alpha(x) - \beta(x))x_1 + x_2\|x\|^2(\beta(x) \sin\left(\frac{\pi}{\|x\|}\right) - 4\alpha(x)),$$

$X(0) = Y(0) = 0$, onde

$$\alpha(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{se } \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1 \end{cases} \quad e$$

$$\beta(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } \|x\| \leq \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{se } \frac{1}{2} < \|x\| \leq 1 \end{cases} \quad .$$

Para $\|x\| \leq \frac{1}{2}$, o campo de vetor Y é

$$Y_1(x) = x_2 + x_1(1 - 4\|x\|^2) \quad e$$

$$Y_2(x) = -x_1 + x_2(1 - 4\|x\|^2).$$

No caso em que $\frac{1}{2} \leq \|x\| \leq 1$, o campo de vetor Y coincide com o campo de vetor X . As trajetórias de X e Y são descritas nas figuras abaixo.

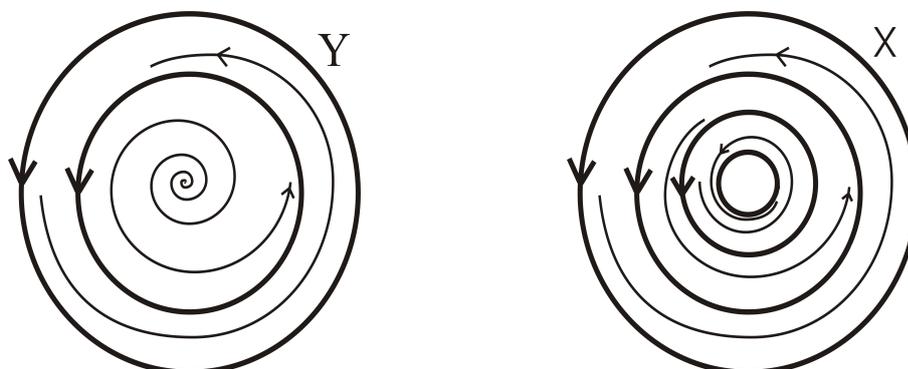


Figura 4.2:

A circunferência $C_n = \{x : \|x\| = \frac{1}{n}\}$ são trajetórias periódicas de X . Entre as duas circunferências C_n e C_{n+1} as trajetórias são espirais que se aproximam das circunferências com índice par. No campo Y as únicas órbitas periódicas são circunferências C_1 e C_2 . As outras trajetórias de Y são espirais. Considerando o sistema de controle determinados pela família de campos de vetores $\mathcal{V} = \{X, Y\}$. As órbitas do sistema de controle acima são concatenações das trajetórias de X e de Y . Os conjuntos $\mathcal{C}_1 = \{x; \|x\| = 1\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{x; \|x\| \leq \frac{1}{2}\}$ são invariantes isolados e compactos. Além do mais, para $x \in M \setminus (\mathcal{C}_2 \cup \mathcal{C}_1)$ nós temos que $\omega^*(x, \mathcal{F}_c) = \mathcal{C}_1$ e $\omega(x, \mathcal{F}_c) \subset \mathcal{C}_2$. Então $\mathcal{M} = \{\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2\}$ é uma decomposição de Morse dinâmica para sistemas de controle.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Barros, Carlos J. Braga; Souza, Josiney A. e Reis, Ronan A.: *Dynamic Morse Decompositions for semigroup of homeomorphisms and control systems*. A aparecer em Journal of Dynamics and Control Systems (2011)
- [2] Barros, Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. : *Attractor and chain recurrence for semigroup actions*. Journal of Dynamics and differential Equations. vol. 22. 723-740 (2010)
- [3] Barros, Carlos J. Braga e Souza, Josiney A. : *Finest Morse Decompositions for Semigroup on Fiber Bundles*. Journal of Dynamics and differential Equations. vol. 22. 741-760 (2010)
- [4] Conley, Charles C. *Isolated Invariant Sets and the Morse Index*. CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 38. American Mathematical Society (1978)
- [5] Conley, Charles C. *The gradient structure os a flow: I*. Ergodic Theory Dyn. Sys. 8, 11-26 (1988)
- [6] Colonius, Fritz e Kliemann, Wolfgang : *The dynamics of control/ Fritz, Colonius; Wolfgang, Kliemann*. (2000) 1st edition, Publisher Birkhäuser Boston, New York.
- [7] Lima, Elon Lages : *Elementos de topologia geral*, segunda ed. rev. Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, (1976)

- [8] Souza, Josiney Alves de : *Sistemas dinâmicos, sistemas de controle, e ações de semigrupos*. Dissertação de mestrado Universidade Estadual de Maringá - UEM (2005)
- [9] San Martin, Luiz A. B. : *Órbitas de famílias de campos de vetores*. (1998)
- [10] Willard, Stephen *General Topology*, 1st edition, Publisher Dover publications, Mineola, New York (2004)