UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

JACKSON LUCHESI

Problema misto geral para equação de KdV em domínio limitado.

Maringá - PR

2010

JACKSON LUCHESI

Problema misto geral para equação de KdV em domínio limitado.

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos nescessários à obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Nikolai Andreevitch Larkine.

Maringá - PR

2010

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à minha família, meus pais e meus irmãos que sempre me incentivaram a estudar.

A todos o professores do Departamento de Matemática da UEM que contribuíram para minha formação acadêmica.

Ao meu orientador Professor Nikolai Andreevitch Larkine pela sua imensa colaboração para meu crescimento em Matemática.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A todos os colegas de Mestrado, em especial ao Eduardo que me ajudou em alguns pontos da dissertação e ao Hélio Vinícius que me ajudou de várias formas aqui em Maringá.

Finalmente, meus agradecimentos especiais à minha namorada Raquel pelo apoio e companherismo.

Jackson Luchesi.

Resumo

Neste trabalho estudamos o problema misto geral para a equação de Korteweg–de Vries (KdV) em um domínio limitado:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + Du(x,t) + D^3u(x,t) + u(x,t)Du(x,t) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,T); \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1 Du(0,t) + a_0 u(0,t), \\ D^2u(1,t) = b_0 u(1,t), \\ Du(1,t) = c_0 u(1,t), \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1); \end{cases}$$

onde $D^j = \partial^j/\partial x^j$, $j \in \mathbb{N}$ são as derivadas parciais com respeito a x, $T > 0$ e a_0, a_1, b_0 e c_0 são constantes satisfazendo certas condições. Como resultado principal, obtemos a existência e unicidade de solução regular do problema acima, para $T > 0$ suficientemente pequeno.

Palavras-chave: equação KdV, semigrupos, teoremas de ponto fixo, soluções regulares.

Abstract

We study here the general mixed problem for the Korteweg–de Vries (KdV) equation in a bounded domain:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + Du(x,t) + D^3u(x,t) + u(x,t)Du(x,t) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,T); \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1 Du(0,t) + a_0 u(0,t), \\ D^2u(1,t) = b_0 u(1,t), \\ Du(1,t) = c_0 u(1,t), \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1); \end{cases}$$

where $D^j = \partial^j/\partial x^j, j \in \mathbb{N}$ are the partial derivatives with respect to x, $T > 0$ and a_0, a_1, b_0 and c_0 are constants satisfying certain conditions. Existence and uniqueness of local-in-t regular solutions of this problem are proved.

Key-words: KdV equation, semigroups, fixed-point theorems, regular solutions.

Sumário

Introdução

Por volta de 1834 John Scott Russel [25], observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. Russel realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de Ondas Solitárias. Inicia-se então, o estudo sobre as equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos.

Mais tarde George Airy e George Stokes [9], se interessaram pelo assunto desenvolvendo e analisando principalmente os modelos matemáticos dos fenômenos observados anteriormente nos laboratórios. Apesar de certo avanço, várias questões ficaram sem respostas concretas, como por exemplo, por que se realiza uma propagação constante de uma onda de forma permanente sobre a superfície da água. O próximo grande avanço se encontra no trabalho de Joseph Boussinesq [6]. O modelo matemático dele inclui, implicitamente, várias situações as quais originaram posteriormente as equações KdV, BBM e outras.

Somente em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Diederik Korteweg e Gustav de Vries [19], que relata uma modelagem matemática essencial sobre as Ondas Solitárias observadas por Russel. A forma original da equação principal do artigo é

$$\eta_t = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\left(\frac{1}{2}\eta^2 + \frac{3}{2}\alpha\eta + \frac{1}{3}\beta\eta_{xx}\right)_x$$

onde η é a elevação da superfície de líquido sobre o seu nível de equilíbrio $l > 0$, $\alpha > 0$ é uma constante relacionada ao movimento uniforme (propulsão linear) do líquido, $g > 0$ é a constante de gravidade e $\beta = \frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$ é a constante relacionada às forças capilares do tensor T e da densidade $\rho = const > 0$.

Podemos dizer que as equações de Boussinesq e KdV que descrevem os movimentos de ondas, são as mais familiares nas quais os efeitos dispersivos estão presentes. De um modo bem simples, podemos dizer que dispersão de uma onda é o fenômeno no qual a velocidade da onda depende da sua amplitude, ver [15, 22] para mais detalhes.

O sistema de equações

$$(S.B.)\begin{cases} u_t + [(1+\alpha u)w]_x - \frac{\beta}{6}w_{xxx} = 0, \\ w_t + u_x + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2}w_{xxt} = 0, \end{cases}$$

descreve a propagação unilateral das ondas dispersivas na superfície de um líquido e foi originado por Boussinesq. Sua dedução pode ser encontrada em [2] ou [3]. Fisicamente, as variáveis redimensionadas u e w estão relacionadas à amplitude e comprimento de onda, respectivamente. Afim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se a seguinte mudança de variáveis,

$$w = u + \alpha A + \beta B,$$

onde

$$A = A(u, u_x, u_t, ...) \text{ e } B = B(u, u_x, u_t, ...).$$

Substituindo essas novas variáveis em (S.B.), obtém-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com pequena amplitude, a saber:

$$\begin{cases} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6}u_{xxx} = 0 \ , & \qquad KdV \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \frac{\beta}{6}u_{xxt} = 0 \ . & \qquad BBM \end{cases}$$

A primeira das equações é a famosa equação de Korteweg–de Vries, já mencionada acima, e a segunda é a equação BBM em homenagem aos matemáticos Benjamin, Bona e Mahony, ver [2, 3, 4].

Para análise matemática, é conveniente modificar os termos com α e β relacionados a amplitude máxima e comprimento de onda, respectivamente. Para isto, podemos fazer $\alpha = \frac{2}{3}$ e $\beta = 6$. Assim, podemos reescrever as equações KdV e BBM como

$$\begin{cases} u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = 0 \ , & \qquad KdV \\ u_t + (1+u)u_x - u_{xxt} = 0 \ . & \qquad BBM \end{cases}$$

Há muitos estudos sobre a equação KdV em várias formas. A ela foram dedicados vários trabalhos sobre problemas de valores inicial e de fronteira, como os encontrados em [4, 5, 12, 16, 18, 21, 22]. Nos problemas mistos, na maior parte dos trabalhos citados, foram impostas condições simples na fronteira do tipo, $u(0,t) = u(1,t) = u_x(1,t) = 0$.

Problemas mistos com condições mais gerais na fronteira, para a equação KdV em domínios limitados, foram considerados em [8]. Problemas mistos gerais para equações lineares de evolução de ordem ímpar foram estudados em [17].

O presente trabalho se dedica ao estudo do problema misto, no domínio limitado $(0,1) \times (0,T)$, $0 < T < +\infty$, para a equação KdV, a saber:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + Du(x,t) + D^3u(x,t) + u(x,t)Du(x,t) = 0, & x \in (0,1), t \in (0,T); \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1 Du(0,t) + a_0 u(0,t), \\ D^2u(1,t) = b_0 u(1,t), \\ Du(1,t) = c_0 u(1,t), \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1); \end{cases}$$

onde os coeficientes a_0, a_1, b_0 e c_0 são escalares tais que

$$b_0 > 0, \quad a_0 < 0, \quad |a_1| < min\{1, -2a_0\} \quad \text{e} \quad |c_0| < \sqrt{2b_0}.$$

O objetivo aqui é mostrar que para $T > 0$ suficientemente pequeno o problema acima possui uma única solução regular $u = u(x,t)$;

$$u \in L^\infty(0,T; H^3(0,1)) \cap L^2(0,T; H^4(0,1)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1(0,1)),$$

para cada $u_0 \in H^3(0,1)$.

Para isto dividimos o trabalho em

- Problema estacionário;
- Problema de evolução linear;
- Problema de evolução não-linear. Soluções locais.

O problema estacionário refere-se ao problema

$$\begin{cases} D^3u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in (0,1); \\ D^2u(0) = a_1 Du(0) + a_0 u(0), & \\ D^2u(1) = b_0 u(1), & \\ Du(1) = c_0 u(1), & \end{cases}$$

onde $\lambda > 0$ e $f \in L^2(0,1)$.

Aqui utilizamos o Método de Continuação com Respeito de um Parâmetro, ver [27], para provarmos que o problema estacionário acima possui uma única solução $u \in H^3(0,1)$ para cada $\lambda > 0$ e cada $f \in L^2(0,1)$. Daí, definimos o operador $Au := D^3u$ com domínio

$$\begin{aligned} D(A) := \{u \in H^3(0,1); \quad & D^2u(0) = a_1 Du(0) + a_0 u(0), \\ & D^2u(1) = b_0 u(1), \\ & Du(1) = c_0 u(1)\}, \end{aligned}$$

e temos então que, para cada $\lambda > 0$, o operador $\lambda I + A$ é bijetor. Além disso, mostramos que $(Au, u)_{L^2(0,1)} \geq 0, \forall u \in D(A)$, ou seja, A é um operador m-acretivo. Desta forma, usando resultados da Teoria de Semigrupos, ver [24, 28], prova-se que o problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$\begin{cases} u_t + Au = f \\ u(0) = u_0, \end{cases}$$

possui uma única solução $u = u(x,t)$;

$$u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,1)),$$

para cada $f \in C([0,T]; L^2(0,1))$ tal que $f_t \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ e cada $u_0 \in D(A)$. Assim podemos, por argumentos de densidade, considerar funções mais lisas, obter algumas estimativas e após passagem ao limite concluir que o problema de evolução linear

$$\begin{cases} u_t(x,t) + D^3u(x,t) = f(x,t), & x \in (0,1), t \in (0,T); \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1 Du(0,t) + a_0 u(0,t), \\ D^2u(1,t) = b_0 u(1,t), \\ Du(1,t) = c_0 u(1,t), \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1); \end{cases}$$

possui uma única solução global $u = u(x,t)$;

$$u \in X = L^\infty(0,T;H^3(0,1)),$$

$$u_t \in Y = L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1)).$$

para cada $u_0 \in D(A)$.

Daí, fazendo $f = -Dv - vDv$ no problema linear acima, onde v pertence ao espaço de Banach

$$\begin{aligned} V = \{v : [0,1]\times[0,T] \to \mathbb{R} : \ & v \in X, v_t \in Y \\ & D^2v(0,t) = a_1Dv(0,t) + a_0v(0,t), \\ & D^2v(1,t) = b_0v(1,t), \\ & Dv(1,t) = c_0v(1,t), \\ & v(x,0) = u_0(x)\} \end{aligned}$$

com a norma

$$\|v\|_V^2 = \sup_{t\in(0,T)} \{\|v\|^2_{L^2(0,1)}(t) + \|v_t\|^2_{L^2(0,1)}(t)\} + \int_0^T [\|Dv\|^2_{L^2(0,1)}(t) + \|Dv_t\|^2_{L^2(0,1)}(t)]dt,$$

podemos definir um operador P sobre V relacionado ao problema de evolução linear tal que $u = Pv$. Definimos então uma bola B_R em V e mostramos que para $T > 0$ suficientemente pequeno o operador P leva B_R em si mesma e que P é uma contração de B_R em B_R. Logo pelo teorema do Ponto Fixo de Banach (ou Princípio da Contração) obtem-se a existência e unicidade de solução local generalizada $u = u(x,t)$;

$$u, u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$$

do problema original. Por fim, voltamos à equação

$$u_t + D^3u + Du + uDu = 0$$

e obtemos um ganho na regularidade, mostrando existência e unicidade de solução local regular.

Nesta última etapa, problema de evolução não-linear, seguimos uma linha de raciocínio análogo aos trabalhos de G.G. Doronin e N.A. Larkin, ver [11] e E. Tronco, ver [13]. Mas grande parte da teoria desenvolvida aqui é originalmente deste trabalho e eventuais correções serão bem aceitas para melhoria desta dissertação. O presente trabalho pode ser visto também como uma continuação dos trabalhos de M. A. J. Silva [26], que estudou a equação de Airy e de E. Tronco [13], que trabalhou com a equação KdV em um domínio não limitado.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, formularemos o problema e enunciaremos o resultado principal. Além disso, apresentaremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho, entre eles resultados de teoria de semigrupos. No entanto, por serem resultados familiares, omitimos suas demonstrações, as quais podem ser encontradas em nossas referências.

1.1 Formulação do problema e resultado principal

Para $0 < T < +\infty$ fixo denotamos $\mathbb{Q}_T = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in (0,1), \ t \in (0,T)\}$. Em $\mathbb{Q}_T$, consideramos a equação KdV,

$$u_t + Du + D^3u + uDu = 0 \tag{1.1}$$

sujeita às condições de fronteira e dado inicial

$$D^2u(0,t) = a_1Du(0,t) + a_0u(0,t), \quad t \in (0,T); \tag{1.2}$$

$$D^2u(1,t) = b_0u(1,t), \quad t \in (0,T); \tag{1.3}$$

$$Du(1,t) = c_0u(1,t), \quad t \in (0,T); \tag{1.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in (0,1), \tag{1.5}$$

onde os coeficientes a_0, a_1, b_0 e c_0 são escalares tais que

$$b_0 > 0, \quad a_0 < 0, \quad |a_1| < min\{1, -2a_0\} \quad \text{e} \quad |c_0| < \sqrt{2b_0}. \tag{1.6}$$

Se considerarmos uma condição na fronteira mais geral do tipo

$$\begin{aligned}a_2D^2u(0,t)+a_1Du(0,t)+a_0u(0,t)=0,\\ b_2D^2u(1,t)+b_1Du(1,t)+b_0u(1,t)=0,\\ c_2D^2u(1,t)+c_1Du(1,t)+c_0u(1,t)=0,\end{aligned}$$

então se $a_2 \neq 0$ temos

$$D^2u(0,t)=\overline{a_1}Du(0,t)+\overline{a_0}u(0,t),$$

onde

$$\overline{a_1}=-\frac{a_1}{a_2} \quad \text{e} \quad \overline{a_0}=-\frac{a_0}{a_2}.$$

Além disso, se impormos que o determinante $\Delta = b_2c_1 - c_2b_1$ seja diferente de zero então podemos, pela regra de Cramer, escrever $D^2u(1,t)$ e $Du(1,t)$ em função de $u(1,t)$ como segue

$$D^2u(1,t)=\overline{b_0}u(1,t); \quad \overline{b_0}=\frac{b_1c_0-b_0c_1}{b_2c_1-c_2b_1}$$

e

$$Du(1,t)=\overline{c_0}u(1,t); \quad \overline{c_0}=\frac{b_0c_2-b_2c_0}{b_2c_1-c_2b_1}.$$

Assim recaímos nas condições de fronteira (1.2)-(1.4), logo os coeficientes $\overline{a_0}$, $\overline{a_1}$, $\overline{b_0}$ e $\overline{c_0}$ devem satisfazer

$$\overline{b_0}>0, \quad \overline{a_0}<0, \quad |\overline{a_1}|<min\{1,-2\overline{a_0}\} \quad \text{e} \quad |\overline{c_0}|<\sqrt{2\overline{b_0}}.$$

Por outro lado, se $a_2 = 0$ então, a fim de obtermos

$$(D^3u,u)(t)=D^2u(1,t)u(1,t)-D^2u(0,t)u(0,t)-\frac{1}{2}(Du(1,t))^2+\frac{1}{2}(Du(0,t))^2\geq 0,$$

devemos ter $u(0,t) = 0$, o que exige também $a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$ e as condições

$$u(1,t)=Du(1,t)=0 \quad \text{ou} \quad Du(1,t)=D^2(1,t)=0,$$

o que é um caso bastante estudado, ver [3, 4, 16].

O resultado principal deste trabalho é o seguinte:

Teorema 1.1. *Seja $u_0 \in H^3(0,1)$ e a_0, a_1, b_0 e c_0 satisfazendo (1.6). Então existe $T_0 > 0$ tal que o problema (1.1)-(1.5) possui uma única solução regular $u = u(x,t)$;*

$$u \in L^\infty(0,T_0;H^3(0,1)) \cap L^2(0,T_0;H^4(0,1))$$

e

$$u_t \in L^\infty(0,T_0;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(0,1)).$$

1.2 Notações e resultados preliminares

Daqui em diante adotaremos as notações usuais $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$ para a norma e o produto interno em $L^2(0,1)$ respectivamente.

Vejamos agora, algumas definições e resultados auxiliares que aparecerão por todo o texto, principalmente no Capítulo 2. Faremos o uso de tais resultados constantemente e suas demonstrações podem ser encontradas em [1, 7, 20, 23] .

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotaremos por

$$C(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \varphi \text{ é contínua}\}$$
$$C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \varphi \text{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

Dada uma função $u \in C(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$
$$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega); \ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}$$
$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}.$$

Dizemos que uma sucessão de funções $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ quando existir um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tal que

(i) $Supp(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu$ e $Supp(\varphi) \subset K$,

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$; uniformemente sobre K, $\forall\ \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Com esta noção de convergência, denotaremos $C_0^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{D}(\Omega)$ e o chamaremos de espaço das funções testes.

Definição 1.2. *Um Espaço de Banach E é um Espaço Vetorial Normado Completo. Quando a norma de E provém de um Produto Interno (p.i.), então dizemos que E é um Espaço de Hilbert.*

Definição 1.3. *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável quando u é o limite quase sempre (q.s.) de uma sucessão de funções do tipo escada.*

Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Denotamos por

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ u \text{ é mensurável e} \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Em $L^p(\Omega)$ há uma identificação entre funções que diferem entre si, em pontos de um conjunto de medida nula. Podemos definir uma norma em $L^p(\Omega)$, associando a cada (classe de funções) função $u \in L^p(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Com isto, $\big(L^p(\Omega); \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$ é um espaço de Banach para todos $1 \leq p < \infty$.
No caso particular $p = 2$, os espaços $L^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert com $p.i.$ dado por $(u, v) = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx$ e norma $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u, u)}$. Logo, toda teoria construida para os espaços de Hilbert pode ser aplicada a $L^2(\Omega)$.
Se $p = \infty$, denotamos por

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq \lambda \ q.s. \text{ em } \Omega, \text{com } \lambda > 0\}.$$

Neste caso, como $|u(x)| \leq \lambda \ q.s.$ em Ω diz-se então que $\lambda > 0$ é majorante essencial de u. Seja $A = \{\lambda \in \mathbb{R} \ ; \ |u(x)| \leq \lambda \ q.s. \text{ em } \Omega\}$ e definimos $supess|u| = inf A$. Podemos assim, definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ associando cada $u \in L^\infty(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = supess|u|,$$

e com isto o espaço $(L^\infty(\Omega); \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ é um Espaço de Banach.
Suponhamos agora $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representaremos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega); \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \ , \ \forall \ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada se dá no sentido das Distribuições. Nestes espaços podemos definir normas como segue

$$\|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \quad , \quad se \ 1 \leq p < \infty;$$
$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} supess|D^\alpha u(x)| \quad , \quad se \ p = \infty.$$

Assim definido, $(W^{m,p}(\Omega); \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. No caso particular $p = 2$, representaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ que são espaços de Hilbert com o $p.i.$

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \ ; \ \forall\ u, v \in H^m(\Omega).$$

Seja X um Espaço de Banach e $T > 0$ um número real. Representaremos por $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p < \infty$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0, T)$, munido da norma $\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left[\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right]^{1/p}$. Representaremos por $L^\infty(0, T; X)$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0, T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^\infty(0, T)$, munido da norma $\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess_{t\in(0,T)} \|u(t)\|_X$. Denotamos também $C([0, T]; X)$ o espaço das funções continuas $u : (0, T) \to X$ tal que $||u||_{C([0,T];X)} = \max_{0\leq t\leq T} ||u(t)||_X < +\infty$.

Dado $(E; \| \cdot \|_E)$ um espaço de Banach, o dual topológico de E define-se por $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ f$ é linear e contínua$\}$, munido da norma $\|f\|_{E'} = sup_{x\in E, \|x\|_E \leq 1} |\langle f, x\rangle|$ também é um espaço de Banach. Do mesmo modo, podemos definir o bi-dual de E denotado por E'' com a norma $\|\xi\|_{E''} = sup_{f\in E', \|f\|_{E'} \leq 1} |\langle \xi, f\rangle|$.

Como pode ser visto em [7], a aplicação

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_x, \end{aligned}$$

onde $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $J_x(f) = \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$, $\forall x \in E$; é uma isometria de E sobre $J(E) \subset E''$, o que nos permite fazer a identificação $E \cong J(E)$.

Dizemos que E é reflexivo quando $J(E) = E''$ e que E é separável se existe um subconjunto $S \subset E$ enumerável e denso em E.

Definição 1.4. *A topologia fraca $\sigma(E, E')$ em E é a topologia mais grossa (menos fina) em E no qual todas as funções $\varphi_f : E \to \mathbb{R}$; $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle, \forall x \in E$, $f \in E'$ são contínuas.*

Definição 1.5. *A topologia fraca∗ $\sigma(E', E)$ em E' é a topologia mais grossa (menos fina) em E' no qual todas funções J_x, $x \in E$ são contínuas.*

Teorema 1.6. *Sejam E um espaço de Banach separável e $\{f_n\}$ uma sucessão limitada de E'. Então existe uma subsucessão $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$ que converge na topologia fraca$*$ $\sigma(E', E)$.*

Demonstração*:* Ver [7].

Teorema 1.7. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\{x_n\}$ uma sucessão limitada de E. Então existe uma subsucessão $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ que converge na topologia fraca $\sigma(E, E')$.*

Demonstração*:* Ver [7].

Teorema 1.8. *$C(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são densos em $L^p(\Omega)$ para todos $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração*:* Ver [1].

Lema 1.9. *Se Ω é limitado e $u \in L^p(\Omega)$ então $u \in L^q(\Omega)$, desde que exista q tal que $1 \leq q \leq p \leq +\infty$.*

Demonstração*:* Ver [1].

Lema 1.10. *Seja X um espaço de Banach. Se $u \in L^p(0, T; X)$ e $u' \in L^p(0, T; X)$, então $u \in C([0, T]; X)$.*

Demonstração*:* Ver [1].

Teorema 1.11 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a e b números reais e $1 < p < \infty$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ temos que:*

$$|a||b| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|\varepsilon^{-1} b|^q}{q},$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração*:* Ver [20].

Teorema 1.12 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demonstração*:* Ver [7].

• Quando $p = 2$, a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwartz que representaremos como

$$|(u,v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Teorema 1.13 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se* $u, v \in L^p(\Omega)$. *Então*

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}; \quad 1 \leq p < \infty.$$

Demonstração*:* Ver [20].

Teorema 1.14 (Desigualdade de Ehrling)**.** *Suponhamos que* Ω *satisfaz a propriedade do cone uniforme, ver [1] e seja* $\varepsilon_0 > 0$ *qualquer. Então existe uma constante* $\delta = \delta(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ *tal que para quaisquer* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *inteiro* $0 \leq j \leq m-1$ *e* $u \in W^{m,p}(\Omega)$ *vale a seguinte estimativa*

$$\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq \delta\varepsilon\|D^m u\|_{L^p(\Omega)} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{m-j}}\|u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração*:* Ver [1].

Lema 1.15. (Desigualdade Diferencial de Gronwall) *Seja* $u(t)$ *uma função não-negativa e diferenciável em [0,T], que satisfaz:*

$$u'(t) \leq f(t)u(t) + g(t)$$

onde $f(t)$ *e* $g(t)$ *são funções integráveis em* $[0,T]$. *Então*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)e^{-\int_0^s f(\tau)d\tau}ds\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Se $f(t)$ *e* $g(t)$ *forem não-negativas, então a expressão torna-se*

$$u(t) \leq e^{\int_0^t f(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t g(s)ds\right], \quad \forall t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [14].

Teorema 1.16. (Método de Continuação com Respeito de um Parâmetro) *Sejam $A, B : X \to Y$ operadores lineares e contínuos, onde X e Y são espaços de Banach sobre um corpo $\mathbb{K}$. Consideremos os problemas:*

$$(P_1) \qquad Bu = f, \quad u \in X;$$

$$(P_\zeta) \qquad L_\zeta u \equiv \zeta Bu + (1-\zeta)Au = f, \quad 0 \le \zeta \le 1.$$

Se para todo $f \in Y$, (P_0) possuir uma única solução e a estimativa a priori

$$\|u\|_X \le C\|f\|_Y, \quad 0 \le \zeta \le 1,$$

onde a constante C independe de ζ e f, estiver satisfeita, então o problema (P_1) possui solução única para todo $f \in Y$.

Demonstração: Ver [27].

Definição 1.17. *Seja X um espaço de Banach e $\mathcal{L}(X)$ o espaço dos operadores lineares e limitados de X. Diz-se que uma aplicação $S : \mathbb{R}^+ \to \mathcal{L}(X)$ é um semigrupo de operadores lineares limitados de X se:*

i) $S(0) = I$, onde I é o operador identidade de $\mathcal{L}(X)$;

ii) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall t, s \in \mathbb{R}^+$.

Diz-se que o semigrupo S é de classe C_0 se

iii) $\lim_{t\to 0^+} \|(S(t) - I)x\| = 0, \forall x \in X$.

Além disso, se $\|S(t)\| \le 1, \forall t \in \mathbb{R}^+$, então dizemos que S é um semigrupo de contrações de classe C_0.

Definição 1.18. *O operador A definido por*

$$D(A) = \left\{ x \in X; \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x \text{ existe} \right\},$$

$$-Ax = \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h) - I}{h} x, \forall x \in D(A)$$

é dito gerador infinitesimal do semigrupo S.

Para cada $x \in D(A)$, introduzimos a norma do gráfico $\|x\|_{D(A)} = (\|x\|^2 + \|Ax\|^2)^{\frac{1}{2}}$. Desde que A seja um operador fechado, temos que o espaço $D(A)$ munido da norma do gráfico é um espaço de Banach, ver [24, 28].

Definição 1.19. *Seja H um espaço de Hilbert. Dizemos que o operador $A : H \to H$ é m-acretivo quando:*
i) $Re(Ax, x)_H \geq 0$ para todo $x \in D(A)$;
ii) $R(I + A) = H$. ($R(I + A)$ = imagem de $I + A$).

Teorema 1.20. *(Lumer-Phillips) O operador A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0 se, e somente se, A é m-acretivo.*

Demonstração: Ver [24, 28].

Teorema 1.21. *Consideremos o seguinte problema não homogêneo:*

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = f(t), \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{1.7}$$

onde A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Se para cada $T > 0$ finito, $f \in C([0,T]; X)$ e $f_t \in L^2(0,T; X)$, então o problema (1.7) admite uma única solução clássica u tal que

$$u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; X),$$

para cada $u_0 \in D(A)$.

Demonstração*:* Ver [28].

Capítulo 2

Existência e unicidade de solução para equação KdV com condições de fronteira gerais

2.1 Problema estacionário

Nesta seção, nosso objetivo é resolver o seguinte problema de fronteira:

$$\begin{cases} D^3u(x) + \lambda u(x) = f(x), & x \in (0,1); \\ D^2u(0) = a_1 Du(0) + a_0 u(0), \\ D^2u(1) = b_0 u(1), \\ Du(1) = c_0 u(1), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\lambda > 0$, $f \in L^2(0,1)$ e a_0, a_1, b_0 e c_0 satisfazem (1.6).

Se denotarmos $X = H^3(0,1)$, $Y = L^2(0,1)$ e definirmos os operadores

$$Au := D^3u \quad \text{e} \quad Bu := (D^3 + \lambda I)u,$$

com domínios

$$\begin{aligned} D(A) = D(B) := \{u \in H^3(0,1); \quad & D^2u(0) = a_1 Du(0) + a_0 u(0), \\ & D^2u(1) = b_0 u(1), \\ & Du(1) = c_0 u(1)\}, \end{aligned}$$

então de acordo com o teorema 1.16 basta mostrarmos que para todo $f \in L^2(0,1)$, o problema de fronteira

$$\begin{cases} D^3u(x) = f(x), & x \in (0,1); \\ D^2u(0) = a_1 Du(0) + a_0 u(0), \\ D^2u(1) = b_0 u(1), \\ Du(1) = c_0 u(1), \end{cases} \tag{2.2}$$

possui solução única, e que a estimativa a priori

$$\|u\|_{H^3(0,1)} \leq C\|f\|, \quad 0 \leq \zeta \leq 1,$$

seja satisfeita.

Fazendo a mudança de variáveis $y = 1 - x$, temos

$$\begin{cases} -D^3 v(y) = f_1(y), & y \in (0,1); \\ D^2 v(0) = b_0 v(0), & \\ Dv(0) = -c_0 v(0), & \\ D^2 v(1) = -a_1 Dv(1) + a_0 v(1), & \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $v(y) = u(1-y)$ e $f_1(y) = f(1-y)$. Como a equação no problema (2.3) é linear, temos pela teoria de equações diferenciais ordinárias, ver [10], que uma solução geral para esta equação vem dada por

$$v(y) = v_c(y) + v_p(y), \tag{2.4}$$

onde $v_p(y)$ é uma solução particular para a equação (2.3) e $v_c(y)$ é uma solução geral da equação homogênea associada

$$-D^3 v(y) = 0, \quad x \in (0,1). \tag{2.5}$$

A equação característica para (2.5) é $-\lambda^3 = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Logo as soluções de (2.5) são

$$v_1(y) = 1, \quad v_2(y) = y \quad \text{e} \quad v_3(y) = y^2.$$

Note que o Wronskiano $W(y) \equiv 2 \neq 0$, assim as soluções v_1, v_2 e v_3 são L.I. e a solução geral da equação (2.5) é:

$$v_c(y) = C_1 + C_2 y + C_3 y^2. \tag{2.6}$$

Usando o Método da Variação dos Parâmetros, uma solução particular v_p para a equação do problema (2.3) é dada por

$$v_p(y) = \sum_{j=1}^{3} v_j(y) \int_0^y \frac{W_j(s)}{W} f_1(s) ds,$$

onde $W_j(y), j = 1, 2, 3$; é obtido de $W(y)$ substituindo a j-ésima coluna por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
Efetuando os cálculos, obtemos que

$$W_1(y) = y^2; \quad W_2(y) = -2y; \quad \text{e} \quad W_3(y) = 1.$$

Assim uma solução particular da equação em (2.3) é

$$v_p(y) = \frac{1}{2} \int_0^y f_1(s) s^2 ds - y \int_0^y f_1(s) s ds + \frac{y^2}{2} \int_0^y f_1(s) ds. \tag{2.7}$$

Das igualdades (2.6) e (2.7), a solução procurada é dada por

$$v(y) = C_1 + C_2 y + C_3 y^2 + \frac{1}{2} \int_0^y f_1(s) s^2 ds - y \int_0^y f_1(s) s ds + \frac{y^2}{2} \int_0^y f_1(s) ds. \tag{2.8}$$

Vamos calcular agora as constantes C_1, C_2 e C_3. A partir de (2.8) temos

$$Dv(y) = C_2 + 2C_3 y - \int_0^y f_1(s) s ds + y \int_0^y f_1(s) ds$$

e

$$D^2 v(y) = 2C_3 + \int_0^y f_1(s) ds.$$

Para $y = 0$:

$$v(0) = C_1; \quad Dv(0) = C_2; \quad D^2 v(0) = 2C_3.$$

Para $y = 1$:

$$\begin{aligned} &v(1) = C_1 + C_2 + C_3 + \tfrac{1}{2} \textstyle\int_0^1 (s^2 - 2s + 1) f_1(s) ds; \\ &Dv(1) = C_2 + 2C_3 + \textstyle\int_0^1 (1 - s) f_1(s) ds; \\ &D^2 v(1) = 2C_3 + \textstyle\int_0^1 f_1(s) ds. \end{aligned}$$

Deste modo temos o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} 2C_3 = b_0 C_1 \\ C_2 = -c_0 C_1 \\ a_0 C_1 + (a_0 - a_1) C_2 + (a_0 - 2a_1 - 2) C_3 = -K \end{cases}$$

onde $K = -a_1\int_0^1(1-s)f_1(s)ds + \frac{a_0}{2}\int_0^1(s^2-2s+1)f_1(s)ds - \int_0^1 f_1(s)ds$. Daí, com as condições (1.6) segue que o determinante $M = -b_0(a_0-2a_1-2)+2c_0(a_0-a_1)-2a_0 \neq 0$, e assim obtemos as constantes

$$C_1 = \tfrac{2K}{M}; \quad C_2 = -\tfrac{2c_0K}{M}; \quad C_3 = \tfrac{b_0K}{M}. \tag{2.9}$$

Das igualdades (2.8) e (2.9) mostramos que o problema (2.3) possui uma única solução.

Vamos agora mostrar a estimativa

$$\|v\|_{H^3(0,1)} \leq C\|f_1\|.$$

Temos inicialmente que

$$\begin{aligned}
|K| &\leq |a_1|\int_0^1 |1-s||f_1(s)|ds + \frac{|a_0|}{2}\int_0^1 |s-1|^2|f_1(s)|ds + \int_0^1 |f_1(s)|ds \\
&\leq \left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)\left(\int_0^1 1ds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |f_1(s)|^2ds\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)\|f_1\|.
\end{aligned}$$

Daí

$$|K|^2 \leq \left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)^2 \|f_1\|^2. \tag{2.10}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
|D^2v(y)| &\leq 2|C_3| + \int_0^1 |f_1(s)|ds \\
&\leq 2|C_3| + \|f_1\|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$|D^2v(y)|^2 \leq 6|C_3|^2 + 3\|f_1\|^2.$$

Integrando de 0 à 1 obtemos

$$\|D^2v\|^2 \leq 6|C_3|^2 + 3\|f_1\|^2.$$

Logo por (2.9) e (2.10) chegamos à

$$\|D^2v\|^2 \leq \left[\frac{6b_0^2}{|D|^2}\left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)^2 + 3\right]\|f_1\|^2. \tag{2.11}$$

Analogamente tem-se

$$\begin{aligned}
|Dv(y)| &\leq |C_2| + 2|C_3|y + \int_0^1 |f_1(s)|sds + y\int_0^1 |f_1(s)|ds \\
&\leq |C_2| + 2|C_3|y + \|f_1\| + y\|f_1\|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
|Dv(y)|^2 &\leq |C_2|^2 + 2|C_2|\|f_1\| + \|f_1\|^2 \\
&+ (4|C_2||C_3| + 2|C_2|\|f_1\| + 4|C_3|\|f_1\| + 2\|f_1\|^2)y \\
&+ (4|C_3|^2 + 4|C_3|\|f_1\| + \|f_1\|^2)y^2.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 à 1 e usando a desigualdade de Schwartz temos

$$\|Dv\|^2 \leq \frac{7}{2}|C_2|^2 + 4|C_3|^2 + \frac{11}{2}\|f_1\|^2.$$

Logo por (2.9) e (2.10) chegamos à

$$\|Dv\|^2 \leq \left[\left(\frac{14|c_0|^2 + 4b_0^2}{|D|^2}\right)\left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)^2 + \frac{11}{2}\right]\|f_1\|^2. \tag{2.12}$$

Também

$$\begin{aligned}
|v(y)| &\leq |C_1| + |C_2|y + |C_3|y^2 + \frac{1}{2}\int_0^1 s^2|f_1(s)|ds + y\int_0^1 sds + \frac{y^2}{2}\int_0^1 |f_1(s)|ds \\
&\leq |C_1| + |C_2|y + |C_3|y^2 + \frac{1}{2}\|f_1\| + y\|f_1\| + \frac{y^2}{2}\|f_1\|,
\end{aligned}$$

o que implica

$$\begin{aligned}
|v(y)|^2 &\leq |C_1|^2 + |C_1|\|f_1\| + \frac{1}{4}\|f_1\|^2 \\
&+ (2|C_1||C_2| + 2|C_1|\|f_1\| + |C_2|\|f_1\| + \|f_1\|^2)y \\
&+ (2|C_1||C_3| + |C_1|\|f_1\| + |C_2|^2 + 2|C_2|\|f_1\| + |C_3|\|f_1\| + \frac{3}{2}\|f_1\|^2)y^2 \\
&+ (2|C_2||C_3| + |C_2|\|f_1\| + 2|C_3|\|f_1\| + \|f_1\|^2)y^3 \\
&+ (|C_3|^2 + |C_3|\|f_1\| + \frac{1}{4}\|f_1\|^2)y^4.
\end{aligned}$$

Integrando de 0 à 1 e usando a desigualdade de Schwartz temos

$$\|v\|^2 \leq 3|C_1|^2 + \frac{61}{24}|C_2|^2 + \frac{7}{5}|C_3|^2 + \frac{563}{120}\|f_1\|^2.$$

Novamente por (2.9) e (2.10) chegamos à

$$\|v\|^2 \leq \left[\left(\frac{12}{|D|^2} + \frac{61|c_0|^2}{6|D|^2} + \frac{7b_0^2}{5|D|^2}\right)\left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2} + 1\right)^2 + \frac{563}{120}\right]\|f_1\|^2. \tag{2.13}$$

Além disso temos

$$\|D^3 v\|^2 = \|f_1\|^2. \tag{2.14}$$

Assim, de (2.11) – (2.14) tem-se

$$\|v\|_{H^3(0,1)} \leq C\|f_1\|.$$

Voltando à variável x obtemos

$$\begin{aligned} u(x) &= C_1 + C_2(1-x) + C_3(1-x)^2 + \frac{1}{2}\int_0^{1-x} f(1-s)s^2 ds \\ &+ (x-1)\int_0^{1-x} f(1-s)s ds + \frac{(1-x)^2}{2}\int_0^{1-x} f(1-s) ds, \end{aligned}$$

que é a solução do problema (2.2) e

$$\|u\|_{H^3(0,1)} \leq C\|f\|, \quad \text{para} \quad \zeta = 0.$$

Para $\zeta = 1$:

Temos a seguinte equação

$$D^3 u + \lambda u = f \quad \text{em} \quad (0,1). \tag{2.15}$$

Multiplicando (2.15) por u obtemos

$$(D^3 u, u) + \lambda\|u\|^2 = (f, u). \tag{2.16}$$

Integrando por partes temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 uD^3udx &= uD^2u|_0^1 - \int_0^1 D^2uDudx \\
&= uD^2u\ |_0^1 - \frac{1}{2}(Du)^2\ |_0^1 \\
&= D^2u(1)u(1) - D^2u(0)u(0) - \frac{1}{2}(Du(1))^2 + \frac{1}{2}(Du(0))^2 \\
&= b_0(u(1))^2 - [(a_1Du(0) + a_0u(0))u(0)] - \frac{1}{2}c_0^2(u(1))^2 + \frac{1}{2}(Du(0))^2 \\
&= \left(b_0 - \frac{1}{2}c_0^2\right)(u(1))^2 - a_1Du(0)u(0) - a_0(u(0))^2 + \frac{1}{2}(Du(0))^2.
\end{aligned}$$

Mas

$$-a_1Du(0)u(0) \geq -|a_1|\frac{(Du(0))^2}{2} - |a_1|\frac{(u(0))^2}{2},$$

logo

$$(D^3u, u) \geq \left(b_0 - \frac{1}{2}c_0^2\right)(u(1))^2 + \left(-a_0 - \frac{|a_1|}{2}\right)(u(0))^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{|a_1|}{2}\right)(Du(0))^2.$$

Assim, das condições em (1.6) segue que

$$(D^3u, u) \geq 0. \tag{2.17}$$

Voltando à equação (2.16) tem-se

$$\lambda\|u\|^2 \leq (D^3u, u) + \lambda\|u\|^2 = (f, u) \leq \|f\|\|u\|,$$

donde

$$\|u\| \leq \frac{1}{\lambda}\|f\|. \tag{2.18}$$

Por outro lado, multiplicando D^3u na equação (2.15) e integrando de 0 à 1 obtemos

$$\|D^3u\|^2 + \lambda(D^3u, u) = (f, D^3u).$$

Sendo $(D^3u, u) \geq 0$, devemos ter

$$\|D^3u\|^2 \leq \|D^3u\|^2 + \lambda(D^3u, u) \leq (f, D^3u) \leq \|f\|\|D^3u\|.$$

Deste modo,

$$\|D^3u\| \leq \|f\|. \tag{2.19}$$

Vamos agora estimar as derivadas intermediárias $D^j u, j = 1, 2$. De acordo com a desigualdade de Ehrling, teorema 1.14, temos que

$$\|D^j u\| \leq \delta\varepsilon\|D^3 u\| + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\|u\|, \quad j = 1, 2,$$

onde $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta = \delta(\varepsilon_0) > 0$.

Consequêntemente de (2.18) e (2.19) vem que

$$\|D^j u\| \leq \delta\varepsilon\|f\| + \frac{\delta}{\lambda}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\|f\| = \underbrace{\left(\delta\varepsilon + \frac{\delta}{\lambda}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\right)}_{C_j}\|f\|.$$

Daí,

$$\|D^j u\| \leq C_j\|f\|, \quad j = 1, 2, \tag{2.20}$$

onde $C_j = C_j(\varepsilon, \lambda)$. De (2.18)-(2.20) concluímos que $u \in H^3(0, 1)$, e

$$\|u\|_{H^3(0,1)} \leq C\|f\|,$$

onde $C = \left(\frac{1}{\lambda^2} + C_1^2 + C_2^2 + 1\right)^{\frac{1}{2}} > 0$.

Para $0 < \zeta < 1$:

Temos a seguinte equação

$$D^3 u + \lambda\zeta u = f \quad \text{em} \quad (0, 1). \tag{2.21}$$

Multiplicando a equação (2.21) por $(1 + \gamma x)u$ e integrando de 0 à 1 temos

$$\underbrace{((1 + \gamma x)u, D^3 u)}_{I_1} + \underbrace{((1 + \gamma x)u, \zeta\lambda u)}_{I_2} = \underbrace{((1 + \gamma x)u, f)}_{I_3}.$$

Integrando por partes vem que

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 [(1+\gamma x)u] D^3 u dx = (1+\gamma x)uD^2u|_0^1 - \int_0^1 D^2uD[(1+\gamma x)u]dx \\
&= (1+\gamma x)uD^2u|_0^1 - \int_0^1 [D^2u(1+\gamma x)Du + D^2u\gamma u]dx \\
&= (1+\gamma x)uD^2u|_0^1 - \int_0^1 (1+\gamma x)DuD^2udx - \gamma \int_0^1 D^2uudx \\
&= (1+\gamma x)uD^2u|_0^1 - \int_0^1 (1+\gamma x)\frac{1}{2}D[(Du)^2]dx - \gamma uDu|_0^1 + \gamma \int_0^1 (Du)^2dx \\
&= (1+\gamma x)uD^2u|_0^1 - \gamma uDu|_0^1 - \frac{(1+\gamma x)}{2}(Du)^2|_0^1 + \frac{3\gamma}{2}\int_0^1 (Du)^2dx \\
&= (1+\gamma)u(1)D^2u(1) - u(0)D^2u(0) - \gamma u(1)Du(1) + \gamma u(0)Du(0) \\
&\quad -\frac{(1+\gamma)}{2}(Du(1))^2 + \frac{1}{2}(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \\
&= (1+\gamma)u(1)b_0u(1) - u(0)[a_1Du(0) + a_0u(0)] - \gamma u(1)c_0u(1) + \gamma u(0)Du(0) \\
&\quad -\frac{(1+\gamma)}{2}(c_0u(1))^2 + \frac{1}{2}(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Schwartz obtemos que

$$K_1(u(1))^2 + K_2(u(0))^2 + K_3(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \leq ((1+\gamma x)u, D^3u), \tag{2.22}$$

onde

$$K_1 = \left[(1+\gamma)b_0 - \gamma c_0 - \tfrac{(1-\gamma)}{2}c_0^2\right]; \quad K_2 = \left(-a_0 - \tfrac{|\gamma - a_1|}{2}\right); \quad K_3 = \left(-\tfrac{|\gamma - a_1|}{2} + \tfrac{1}{2}\right).$$

Observe que com as condições em (1.6) e $\gamma > 0$ suficientemente pequeno temos $K_1, K_2, K_3 > 0$. Além disso,

$$I_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad I_3 \leq \varepsilon^2\|u\|^2 + \tfrac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2.$$

Logo

$$K_1(u(1))^2 + K_2(u(0))^2 + K_3(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \leq \varepsilon^2\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2.$$

Mas

$$\begin{aligned}
|u(x)| = |u(0) + \int_0^x D_\xi ud\xi| \leq |u(0)| + \int_0^x |D_\xi u|d\xi \leq |u(0)| + \int_0^1 1|Du|dx \\
\leq |u(0)| + \left(\int_0^1 1dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |Du|^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = |u(0)| + \|Du\|,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$|u(x)|^2 \leq 2(|u(0)|^2 + \|Du\|^2).$$

Integrando a desigualdade acima em $(0,1)$ tem-se

$$\|u\|^2 + \|Du\|^2 \leq 2|u(0)|^2 + 3\|Du\|^2 \leq \overline{c_1}(|u(0)|^2 + \|Du\|^2),$$

onde $3 \leq \overline{c_1} < \infty$. Assim

$$c_1\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq |u(0)|^2 + \|Du\|^2,$$

com $c_1 = \frac{1}{\overline{c_1}}$. Agora seja $m_1 = min\left\{K_2, \frac{3\gamma}{2}\right\}$. Temos $m_1 > 0$ e

$$m_1c_1\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq K_1(u(1))^2 + K_2(u(0))^2 + K_3(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \leq \varepsilon^2\|u\|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2.$$

Mas

$$\varepsilon^2\|u\|^2 \leq \varepsilon^2(\|u\|^2 + \|Du\|^2) = \varepsilon^2\|u\|^2_{H^1(0,1)},$$

assim

$$m_1c_1\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq \varepsilon^2\|u\|^2_{H^1(0,1)} + \frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2 \quad\Rightarrow\quad (m_1c_1 - \varepsilon^2)\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\|f\|^2.$$

Fazendo $\varepsilon^2 = \frac{m_1c_1}{2}$, segue que $m_1c_1 - \frac{m_1c_1}{2} = \frac{m_1c_1}{2} > 0$, logo

$$\frac{m_1c_1}{2}\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq \frac{2}{m_1c_1}\|f\|^2 \quad\Rightarrow\quad \|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq \underbrace{\frac{4}{m_1^2c_1^2}}_{k_1}\|f\|^2.$$

Isto é,

$$\|u\|^2_{H^1(0,1)} \leq k_1\|f\|^2, \tag{2.23}$$

com $k_1 > 0$ independente de ζ.

Agora multiplicando a equação (2.21) por D^3u e integrando de 0 à 1 obtemos

$$\|D^3u\|^2 + \zeta\lambda(D^3u, u) = (D^3u, f).$$

Como $(D^3u, u) \geq 0$ e aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwartz devemos ter

$$\|D^3u\|^2 \leq \|D^3u\|^2 + \zeta\lambda(D^3u, u) = (D^3u, f) \leq \|D^3u\|\|f\|,$$

ou seja,

$$\|D^3u\| \leq \|f\|. \tag{2.24}$$

Resta, agora, estimar $\|D^2u\|^2$. Para isto calculamos

$$\begin{aligned} -(Du, D^3u) &= -\int_0^1 DuD^3udx = -DuD^2u|_0^1 + \int_0^1 (D^2u)^2dx \\ &= -Du(1)D^2u(1) + Du(0)D^2u(0) + \|D^2u\|^2 \\ &= -[c_0u(1)b_0u(1)] + Du(0)[a_1Du(0) + a_0u(0)] + \|D^2u\|^2 \\ &= -c_0b_0(u(1))^2 + a_1(Du(0))^2 + a_0Du(0)u(0) + \|D^2u\|^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|D^2u\|^2 = -(Du, D^3u) + c_0b_0(u(1))^2 - a_1(Du(0))^2 - a_0Du(0)u(0),$$

que pela desigualdade de Cauchy-Schwartz devemos ter

$$\|D^2u\|^2 \leq \|Du\|\|D^3u\| + |c_0b_0(u(1))^2 - a_1(Du(0))^2 - a_0Du(0)u(0)|.$$

Por (2.23) e (2.24) segue que

$$\|D^2u\|^2 \leq \sqrt{k_1}\|f\|^2 + |c_0|b_0(u(1))^2 + \frac{|a_0|}{2}(u(0))^2 + \left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2}\right)(Du(0))^2. \tag{2.25}$$

Sabemos que

$$K_1(u(1))^2 + K_2(u(0))^2 + K_3(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \leq \|u\|^2 + \|f\|^2.$$

Daí por (2.22) temos

$$K_1(u(1))^2 + K_2(u(0))^2 + K_3(Du(0))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2 \leq (k_1 + 1)\|f\|^2.$$

Seja $m_2 = min\{K_1, K_2, K_3\} > 0$, então

$$m_2[(u(1))^2 + (u(0))^2 + (Du(0))^2] \leq (k_1 + 1)\|f\|^2,$$

o que implica

$$(u(1))^2 + (u(0))^2 + (Du(0))^2 \leq \frac{k_1 + 1}{m_2}\|f\|^2.$$

Considerando $m_3 = \max\{|c_0|b_0, |a_1| + \frac{|a_0|}{2}\} > 0$ tem-se

$$|c_0|b_0(u(1))^2 + \frac{|a_0|}{2}(u(0))^2 + \left(|a_1| + \frac{|a_0|}{2}\right)(Du(0))^2 \leq \frac{3m_3(k_1+1)}{m_2}\|f\|^2. \tag{2.26}$$

Logo de (2.25) e (2.26) devemos ter

$$\|D^2u\|^2 \leq \sqrt{k_1}\|f\|^2 + \frac{3m_3(k_1+1)}{m_2}\|f\|^2,$$

o que implica

$$\|D^2u\|^2 \leq \underbrace{\left(\sqrt{k_1} + \frac{3m_3(k_1+1)}{m_2}\right)}_{k_2}\|f\|^2,$$

ou ainda

$$\|D^2u\|^2 \leq k_2\|f\|^2. \tag{2.27}$$

Portanto, de (2.23),(2.24) e (2.27) segue que

$$\|u\|^2_{H^3(0,1)} \leq \underbrace{(k_1 + k_2 + 1)}_{k_3^2}\|f\|^2.$$

E assim temos

$$\|u\|_{H^3(0,1)} \leq k_3\|f\|,$$

onde $k_3 > 0$ independe de ζ e de f. Portanto, pelo Teorema 1.16 o problema (2.1) possui uma única solução $u \in H^3(0,1)$ para todo $f \in L^2(0,1)$.

2.2 Problema de evolução linear

Consideremos o seguinte problema linear de valores inicial e de fronteira:

$$\begin{cases} u_t + D^3u = f, & \text{em} \quad \mathbb{Q}_T; \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1Du(0,t) + a_0u(0,t), \\ D^2u(1,t) = b_0u(1,t), \\ Du(1,t) = c_0u(1,t), \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1); \end{cases} \tag{2.28}$$

onde os escalares a_0, a_1, b_0 e c_0 satisfazem as condições em (1.6).

O resultado principal desta seção é:

Teorema 2.1. *Seja $u_0 \in D(A)$, então para cada $T > 0$ e $f \in C([0,T]; L^2(0,1))$ tal que $f_t \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ o problema (2.28) possui uma única solução $u = u(x,t)$;*

$$u \in L^\infty(0,T; H^3(0,1)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T; L^2(0,1)) \cap L^2(0,T; H^1(0,1)).$$

Demonstração: Para abordar o problema acima usaremos o Método de Semigrupos. Para maiores detalhes, ver [24, 28]. De acordo com o problema estacionário temos que $\forall \lambda > 0$ e $\forall f \in L^2(0,1)$, $\exists! u \in D(A)$ tal que $(\lambda I + A)u = f$, ou seja, o operador $\lambda I + A$ é bijetor, assim $R(\lambda I + A) = L^2(0,1)$. Além disso, de (2.17) provamos que $(Au, u) \geq 0, \forall u \in D(A)$. Resumindo, mostramos que A é um operador m-acretivo. Daí pelo teorema de Lumer-Phillips segue que A é o gerador infinitesimal de um semigrupo de contrações de classe C_0. Recaímos, portanto, no seguinte problema de Cauchy abstrato não homogêneo

$$\begin{cases} u_t + Au = f \\ u(0) = u_0, \end{cases} \tag{2.29}$$

o qual, pelo teorema 1.21, possui uma única solução

$$u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1([0,T]; L^2(0,1)),$$

para todo $f \in C([0,T]; L^2(0,1))$ tal que $f_t \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ e todo $u_0 \in D(A)$.

Derivando formalmente a equação $u_t + Au = f$, tem-se $u_{tt} + Au_t = f_t$. Denotando $v = u_t$ e $F = f_t$ obtemos o seguinte problema

$$\begin{cases} v_t + Av = F \\ v(0) = -Au_0 + f_0, \end{cases} \tag{2.30}$$

onde $f_0(x) = f(x,0)$, $\forall x \in (0,1)$. Como $F \in L^2(0,T; L^2(0,1))$ e $u_0 \in D(A)$, temos por densidade, que existem sequências $(F_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty([0,T]; D(A))$ e $(u_{0m})_{m\in\mathbb{N}} \subset C^\infty(0,1)$ e satisfazendo as condições de fronteira em (2.28) tais que

$$F_m \to F \quad \text{em} \quad L^2(0,T; L^2(0,1)) \tag{2.31}$$

e

$$u_{0m} \to u_0 \quad \text{em} \quad D(A). \tag{2.32}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos os seguintes problemas

$$\begin{cases} (u_m)_t + Au_m = f_m \\ u_m(0) = u_{0m}. \end{cases} \tag{2.33}$$

e

$$\begin{cases} (v_m)_t + Av_m = F_m \\ v_m(0) = -Au_{0m} + f_{0m}. \end{cases} \tag{2.34}$$

A existência de solução clássica u_m de (2.33), para cada $m \in \mathbb{N}$, segue diretamente do teorema 1.21. Por outro lado, sendo $F_m \in C^\infty([0,T];D(A))$ e supondo que $u_{0m} \in D(A^2)$, segue também pelo teorema 1.21 que, para cada $m \in \mathbb{N}$, existe única solução $v_m \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];L^2(0,1))$ do problema (2.34). Assim podemos fazer

$$u_m(t) - u_m(0) = \int_0^t (u_m)_\xi(\xi)d\xi = \int_0^t v_m(\xi)d\xi. \tag{2.35}$$

Derivando (2.35) em relação a t, tem-se $(u_m)_t = v_m$. Derivando novamente em relação a t obtemos

$$(u_m)_{tt} = (v_m)_t,$$

daí

$$\begin{cases} (u_m)_{tt} + A(u_m)_t = (f_m)_t \\ (u_m)_t(0) = -Au_{0m} + f_{0m}. \end{cases} \tag{2.36}$$

Vamos agora, obter algumas estimativas.

ESTIMATIVA I: Multiplicando a equação (2.33) por $(1+\gamma x)u_m$ e integrando sobre $(0,1)$ obtemos

$$\underbrace{((u_m)_t, (1+\gamma x)u_m)(t)}_{I_1} + \underbrace{(D^3 u_m, (1+\gamma x)u_m)(t)}_{I_2} = \underbrace{(f_m, (1+\gamma x)u_m)(t)}_{I_3}.$$

Temos, analogamente a desigualdade (2.22), que

$$I_2 \geq K_1(u_m(1,t))^2 + K_2(u_m(0,t))^2 + K_3(Du_m(0,t))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du_m\|^2(t).$$

Além disso,

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u_m^2)(t)$$

e

$$I_3 \leq \frac{1}{2}(1+\gamma x, u_m^2)(t) + \frac{1}{2}(1+\gamma x, f_m^2)(t),$$

logo

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(1+\gamma x, u_m^2)(t) + K_1(u_m(1,t))^2 + K_2(u_m(0,t))^2 + K_3(Du_m(0,t))^2 \\ +3\gamma\|Du_m\|^2(t) \leq (1+\gamma x, u_m^2)(t) + (1+\gamma x, f_m^2)(t).\end{aligned} \tag{2.37}$$

Pelo lema de Gronwall temos

$$\begin{aligned}(1+\gamma x, u_m^2)(t) &\leq e^T\left[(1+\gamma x, u_m^2)(0) + \int_0^t (1+\gamma x, f_m^2)(s)ds\right] \\ &\leq 2e^T(\|u_{0m}\|^2 + \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}).\end{aligned}$$

Voltando à (2.37) segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u_m^2)(t) + K_1(u_m(1,t))^2 + K_2(u_m(0,t))^2 + K_3(Du_m(0,t))^2 + 3\gamma\|Du_m\|^2(t) \\ \leq 2e^T(\|u_{0m}\|^2 + \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}) + 2\|f_m\|^2(t).\end{aligned}$$

Integrando de 0 à t obtemos

$$\begin{aligned}(1+\gamma x, u_m^2)(t) + \int_0^t [K_1(u_m(1,s))^2 + K_2(u_m(0,s))^2 + K_3(Du_m(0,s))^2 + 3\gamma\|Du_m\|^2(s)]ds \\ \leq 2\|u_{0m}\|^2 + 2Te^T(\|u_{0m}\|^2 + \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}) + 2\|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}.\end{aligned}$$

Seja $\alpha = \frac{1}{\min\{1, K_1, K_2, K_3, 3\gamma\}}$, então

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2(t) + \int_0^t [(u_m(1,s))^2 + (u_m(0,s))^2 + (Du_m(0,s))^2 + \|Du_m\|^2(s)]ds \\ \leq (2\alpha + 2\alpha Te^T)(\|u_{0m}\|^2 + \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}).\end{aligned}$$

Daí, somando e subtraindo $\|u_m\|^2(s)$ sob o sinal de integral na desigualdade acima chegamos à

$$\begin{aligned}\|u_m\|^2(t) + \int_0^t [(u_m(1,s))^2 + (u_m(0,s))^2 + (Du_m(0,s))^2 + \|u_m\|^2_{H^1(0,1)}(s)]ds \\ \leq C_{1T}(\|u_{0m}\|^2 + \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}),\end{aligned}$$

onde $C_{1T} = \max\{2\alpha + 2\alpha Te^T, 2Te^T\}$.

ESTIMATIVA II: Multiplicando a equação (2.36) por $(1+\gamma x)(u_m)_t$ e integrando em $(0,1)$ obtemos

$$\underbrace{((u_m)_{tt}, (1+\gamma x)(u_m)_t)(t)}_{I_1} + \underbrace{(D^3(u_m)_t, (1+\gamma x)(u_m)_t)(t)}_{I_2} = \underbrace{((f_m)_t, (1+\gamma x)(u_m)_t)(t)}_{I_3}.$$

Analogamente à estimativa anterior temos

$$I_2 \geq K_1((u_m)_t(1,t))^2 + K_2((u_m)_t(0,t))^2 + K_3(D(u_m)_t(0,t))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|D(u_m)_t\|^2(t),$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t)$$

e

$$I_3 \leq \frac{1}{2}(1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t) + \frac{1}{2}(1+\gamma x,(f_m)_t^2)(t).$$

Logo

$$\begin{aligned} \tfrac{d}{dt}(1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t) + K_1((u_m)_t(1,t))^2 + K_2((u_m)_t(0,t))^2 + K_3(D(u_m)_t(0,t))^2 \\ +3\gamma\|D(u_m)_t\|^2(t) \leq (1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t) + (1+\gamma x,(f_m)_t^2)(t). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Pelo lema de Gronwall temos

$$\begin{aligned} (1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t) &\leq e^T\left[(1+\gamma x,(u_m)_t^2)(0) + \int_0^t (1+\gamma x,(f_m)_t^2)(s)ds\right] \\ &\leq 2e^T(\|(u_m)_t\|^2(0) + \|(f_m)_t\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}). \end{aligned}$$

Voltando à (2.38) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(1+\gamma x,(u_m)_t^2)(t) + K_1((u_m)_t(1,t))^2 + K_2((u_m)_t(0,t))^2 + K_3(D(u_m)_t(0,t))^2 \\ +3\gamma\|D(u_m)_t\|^2(t) \leq 2e^T(\|(u_m)_t\|^2(0) + \|(f_m)_t\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}) + 2||(f_m)_t||^2(t). \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t obtemos

$$\begin{aligned} \|(u_m)_t\|^2(t) + \int_0^t [((u_m)_s(1,s))^2 + ((u_m)_s(0,s))^2 + (D(u_m)_s(0,s))^2 + \|D(u_m)_s\|^2(s)]ds \\ \leq (2\alpha + 2\alpha T e^T)(\|(u_m)_t\|^2(0) + \|(f_m)_t\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}). \end{aligned}$$

Daí, somando e subtraindo $\|(u_m)_s\|^2(s)$ sob o sinal de integral na desigualdade acima chegamos à

$$\begin{aligned} \|(u_m)_t\|^2(t) + \int_0^t [((u_m)_s(1,s))^2 + ((u_m)_s(0,s))^2 + (D(u_m)_s(0,s))^2 + \|(u_m)_s\|^2_{H^1(0,1)}(s)]ds \\ \leq C_{1T}(\|(u_m)_t\|^2(0) + \|(f_m)_t\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}). \end{aligned}$$

Mas

$$\|(u_m)_t\|^2(0) = \| - D^3u_m + f_m\|^2(0) \leq 2(\|D^3u_{0m}\|^2 + \|f_{0m}\|^2),$$

e portanto

$$\|(u_m)_t\|^2(t) + \int_0^t [((u_m)_s(1,s))^2 + ((u_m)_s(0,s))^2 + (D(u_m)_s(0,s))^2 + \|(u_m)_s\|^2_{H^1(0,1)}(s)]ds$$
$$\leq C_{2T}(\|D^3 u_{0m}\|^2 + \|f_{0m}\|^2 + \|(f_m)_t\|^2_{L^2(\mathbb{Q}_T)}),$$

onde $C_{2T} = 2C_{1T}$.

Assim, das estimativas I, II e das convergências em (2.31) e (2.32) temos que as sequências (u_m) e $(u_m)_t$ são limitadas em $L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$. Daí

$$u_m, (u_m)_t \overset{\star}{\rightharpoonup} u, u_t \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(0,1))$$

e

$$u_m, (u_m)_t \rightharpoonup u, u_t \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H^1(0,1)).$$

Voltando à equação $u_t + D^3u = f$ segue que

$$u \in L^\infty(0,T;H^3(0,1));$$

$$u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1)).$$

2.3 Problema de evolução não-linear. Soluções locais

Nesta seção provaremos a existência de soluções regulares locais para o seguinte problema não-linear:

$$\begin{cases} u_t + D^3u = -Du - uDu, & \text{em} \quad \mathbb{Q}_T; \\ D^2u(0,t) = a_1Du(0,t) + a_0u(0,t), & \\ D^2u(1,t) = b_0u(1,t), & t \in (0,T); \\ Du(1,t) = c_0u(1,t), & \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.39}$$

onde os escalares a_0, a_1, b_0 e c_0 satisfazem as condições em (1.6).

O resultado principal aqui é:

Teorema 2.2. *Seja $u_0 \in H^3(0,1)$. Então existe um real $T_0 > 0$ tal que (2.39) possui uma única solução regular em $\mathbb{Q}_{T_0}$ com*

$$u \in L^\infty(0,T_0;H^3(0,1)) \cap L^2(0,T_0;H^4(0,1))$$

e

$$u_t \in L^\infty(0,T_0;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T_0;H^1(0,1)).$$

Demonstração: Provaremos este teorema usando o Teorema do Ponto Fixo de Banach. Considere

$$X = L^\infty(0,T;H^3(0,1)),$$

$$Y = L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$$

e V o espaço

$$\begin{aligned} V = \{v : [0,1]\times[0,T] \to \mathbb{R} :\ \ & v \in X, v_t \in Y \\ & D^2v(0,t) = a_1Dv(0,t) + a_0v(0,t), \\ & D^2v(1,t) = b_0v(1,t), \\ & Dv(1,t) = c_0v(1,t), \\ & v(x,0) = u_0(x)\} \end{aligned}$$

com a norma

$$\|v\|_V^2 = \sup_{t\in(0,T)} \{\|v\|^2(t) + \|v_t\|^2(t)\} + \int_0^T [\|Dv\|^2(t) + \|Dv_t\|^2(t)]dt. \tag{2.40}$$

O espaço V munido com a norma (2.40) é um espaço de Banach. Agora, definimos a bola

$$B_R = \{v \in V : \|v\|_V \leq 4R\},$$

onde $R > 1$ é tal que

$$\sum_{i=0}^{3} (\|D^iu_0\|^2 + \|u_0Du_0\|^2) \leq R^2. \tag{2.41}$$

Para qualquer $v \in B_R$ consideremos o problema linear

$$\begin{cases} u_t + D^3u = -Dv - vDv, & \text{em} \quad \mathbb{Q}_T; \\ \begin{array}{l} D^2u(0,t) = a_1Du(0,t) + a_0u(0,t) \\ D^2u(1,t) = b_0u(1,t) \\ Du(1,t) = c_0u(1,t) \end{array} & t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in (0,1), \end{cases} \tag{2.42}$$

onde os escalares a_0, a_1, b_0 e c_0 satisfazem (1.6).

Vamos mostrar que $f = -Dv - vDv$ satisfaz

$$f \in C([0,T];L^2(0,1)) \quad \text{e} \quad f_t \in L^2(0,T;L^2(0,1))$$

Notemos inicialmente que

$$\begin{aligned}
\|Dv\|^2(t) &= \|Dv\|^2(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial\tau}\|Dv\|^2(\tau)d\tau \\
&= \|Du_0\|^2 + \int_0^t \int_0^1 \frac{\partial}{\partial\tau}|Dv(x,\tau)|^2 dx\, d\tau \\
&\leq \|Du_0\|^2 + \int_0^t [\|Dv\|^2(\tau) + \|Dv_\tau\|^2(\tau)]d\tau.
\end{aligned}$$

Daí, por (2.40) e (2.41) tem-se

$$\|Dv\|^2(t) \leq R^2 + C_{0R},$$

onde $C_{0R} = 16R^2$. Assim

$$\|Dv\|^2(t) \leq C_{1R}, \quad \text{com} \quad C_{1R} = 17R^2. \tag{2.43}$$

Antes de prosseguirmos, provaremos o seguinte resultado:

Lema 2.3. *Dado $u \in H^1(0,1)$ prova-se que:*

1. *Se para algum $a \in [0,1]$, $u(a) = 0$, então*

$$\sup_{x\in(0,1)} |u(x)| \leq \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|Du\|^{\frac{1}{2}}.$$

2. *Se $u(x) \neq 0$, $\forall x \in [0,1]$, então existe uma constante finita e positiva C_s tal que*

$$\sup_{x\in(0,1)} |u(x)| \leq C_s\|u\|_{H^1(0,1)}.$$

Demonstração: 1. Seja $a \in [0,1]$ tal que $u(a) = 0$. Assim $\forall x \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
u^2(x) &= \int_a^x D_\xi u^2(\xi)d\xi = 2\int_a^x u(\xi)D_\xi u(\xi)d\xi \\
&\leq 2\int_0^1 |u(\xi)D_\xi u(\xi)|d\xi \leq 2\|u\|\|Du\|.
\end{aligned}$$

Logo

$$\sup_{x\in(0,1)} |u(x)| \leq \sqrt{2}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|Du\|^{\frac{1}{2}}.$$

2. Definimos a seguinte extensão

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} (1+x)u(-x), & \text{se} \quad x \in [-1,0], \\ u(x), & \text{se} \quad x \in [0,1]. \end{cases}$$

Temos que $\widetilde{u} \in H^1(-1,1)$ e $\widetilde{u}(-1) = 0$. Daí pelo caso 1 tem-se

$$\sup_{x \in (-1,1)} |\widetilde{u}(x)| \leq \sqrt{2} \|\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^{\frac{1}{2}} \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^{\frac{1}{2}}.$$

Mas $\|\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2} \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^{\frac{1}{2}}$. De fato,

$$\begin{aligned} |\widetilde{u}(x)| &\leq \int_{-1}^{x} |D_\xi \widetilde{u}(\xi)| d\xi \leq \int_{-1}^{1} |D\widetilde{u}(x)| dx \\ &\leq \left(\int_{-1}^{1} 1 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-1}^{1} |D\widetilde{u}(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2} \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$|\widetilde{u}(x)|^2 \leq 2 \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^2.$$

Integrando a desigualdade acima de -1 à 1 obtemos

$$\|\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^2 \leq 4 \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^2.$$

Deste modo

$$\sup_{x \in (-1,1)} |\widetilde{u}(x)| \leq 2 \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}.$$

Mas

$$\begin{aligned} \|D\widetilde{u}\|_{L^2(-1,1)}^2 &= \|Du\|^2 + \|D[(1+x)u(-x)]\|_{L^2(-1,0)}^2 \\ &= \|Du\|^2 + \|u(-x) - (1+x)Du(-x)\|_{L^2(-1,0)}^2 \\ &\leq \|Du\|^2 + 2\|u\|^2 + 2\|Du\|^2 \\ &\leq 3\|u\|_{H^1(0,1)}^2. \end{aligned}$$

Portanto

$$\sup_{x \in (0,1)} |u(x)| \leq 2\sqrt{3} \|u\|_{H^1(0,1)}. \qquad \square$$

Desta maneira, face ao lema anterior tem-se

$$\sup_{x \in (0,1)} |v(x,t)|^2 \leq 12 \|v\|_{H^1(0,1)}^2(t), \tag{2.44}$$

ou ainda, por (2.40) e (2.43) temos

$$\sup_{x \in (0,1)} |v(x,t)|^2 \leq C_{2R}, \tag{2.45}$$

onde $C_{2R} = 12(C_{0R} + C_{1R})$.

Analogamente, tem-se

$$\sup_{x\in(0,1)} |v_t(x,t)|^2 \leq 12\|v_t\|^2_{H^1(0,1)}(t) \leq 12(C_{0R} + \|Dv_t\|^2(t)). \tag{2.46}$$

Provaremos agora, que $f = -Dv - vDv$ é tal que $f, f_t \in L^2(0,T;L^2(0,1))$.

Temos por (2.45) que

$$\int_0^T\int_0^1 |vDv|^2 dx\,dt \leq \sup_{t\in(0,T)}\left(\sup_{x\in(0,1)}|v(x,t)|^2\right)\int_0^T\int_0^1 |Dv|^2 dx\,dt < \infty.$$

Portanto

$$\int_0^T\int_0^1 |f|^2 dx\,dt \leq 2\left[\int_0^T\int_0^1 |Dv|^2 dx\,dt + \int_0^T\int_0^1 |vDv|^2 dx\,dt\right] < \infty.$$

Além disso, por (2.46) e (2.45)

$$\int_0^T\int_0^1 |(vDv)_t|^2 dx\,dt \leq 2\left[\underbrace{\int_0^T\int_0^1 |v_tDv|^2 dx\,dt}_{I_1} + \underbrace{\int_0^T\int_0^1 |vDv_t|^2 dx\,dt}_{I_2}\right],$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \int_0^T\left(\sup_{x\in(0,1)}|v_t(x,t)|^2\int_0^1 |Dv|^2 dx\right)dt \\ &\leq \int_0^T\left(12\|v_t\|^2_{H^1(0,1)}(t)\|Dv\|^2(t)\right)dt < \infty \end{aligned}$$

e

$$I_2 \leq \sup_{t\in(0,T)}\left(\sup_{x\in(0,1)}|v(x,t)|^2\right)\int_0^T\int_0^1 |Dv_t|^2 dx\,dt < \infty.$$

Logo

$$\int_0^T\int_0^1 |f_t|^2 dx\,dt \leq 2\left[\int_0^T\int_0^1 |Dv_t|^2 dx\,dt + \int_0^T\int_0^1 |(vDv)_t|^2 dx\,dt\right] < \infty.$$

Daí, pelo lema 1.10 temos $f = -Dv - vDv \in C([0,T];L^2(0,1))$ tal que $f_t \in L^2(0,T;L^2(0,1))$. Então de acordo com o teorema 2.1 existe uma única solução $u \in L^\infty(0,T;H^3(0,1))$ com $u_t \in L^\infty(0,T;L^2(0,1)) \cap L^2(0,T;H^1(0,1))$ do problema (2.42). Logo pode-se considerar um operador P relacionado a (2.42) definido sobre V tal que $u = Pv$.

Lema 2.4. *Existe um real $0 < T_0 \leq T \leq 1$ tal que o operador P leva B_R em si mesma.*

Demonstração: Para provar este lema faz-se nescessário algumas estimativas:

ESTIMATIVA I: Multiplicando a equação em (2.42) por $(1+\gamma x)u$ e integrando sobre $(0,1)$ tem-se

$$(u_t,(1+\gamma x)u)(t) + (D^3u,(1+\gamma x)u)(t) = (-Dv - vDv,(1+\gamma x)u)(t).$$

Analogamente a desigualdade (2.22) segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1+\gamma x,u^2)(t) + K_1(u(1,t))^2 + K_2(u(0,t))^2 + K_3(Du(0,t))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du\|^2(t)\\ \leq \underbrace{(-vDv,(1+\gamma x)u)(t)}_{I_1} + \underbrace{(-Dv,(1+\gamma x)u)(t)}_{I_2}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}vDv\|(t)\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}u\|(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}vDv\|^2(t) + \frac{1}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}u\|^2(t)\\ &\leq \sup_{x\in(0,1)}|v(x,t)|^2\|Dv\|^2(t) + \frac{1}{2}(1+\gamma x,u^2)(t)\\ &\leq C_{2R}C_{1R} + \frac{1}{2}(1+\gamma x,u^2)(t),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}Dv\|(t)\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}u\|(t)\\ &\leq \frac{1}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}Dv\|^2(t) + \frac{1}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}u\|^2(t)\\ &\leq \|Dv\|^2(t) + \frac{1}{2}(1+\gamma x,u^2)(t)\\ &\leq C_{1R} + \frac{1}{2}(1+\gamma x,u^2)(t),\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}(1+\gamma x,u^2)(t) + K_1(u(1,t))^2 + K_2(u(0,t))^2 + K_3(Du(0,t))^2\\ +3\gamma\|Du\|^2(t) \leq C_{3R} + 2(1+\gamma x,u^2)(t),\end{aligned} \tag{2.47}$$

onde $C_{3R} = 2C_{1R}(C_{2R}+1)$.

Pelo lema de Gronwall temos que

$$\begin{aligned}(1+\gamma x,u^2)(t) &\leq e^{2T}[(1+\gamma x,u^2)(0) + C_{3R}T]\\ &\leq e^{2T}(2\|u_0\|^2 + C_{3R}T).\end{aligned}$$

Considerando $0 < T_1 \leq T$ tal que $e^{2T_1} \leq 2$ e $C_{3R}T_1 \leq R^2$ vemos que

$$(1+\gamma x, u^2)(t) \leq 2(2R^2 + R^2) = 6R^2, \quad t \in (0, T_1).$$

Voltando à (2.47) e sabendo que $K_1, K_2, K_3 > 0$ obtemos

$$\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u^2)(t) + \|Du\|^2(t) \leq (12R^2 + C_{3R})\delta,$$

onde $\delta = \frac{1}{\min\{1, 3\gamma\}}$.

Integrando de 0 à t tem-se

$$(1+\gamma x, u^2)(t) + \int_0^t \|Du\|^2(\tau)d\tau \leq (1+\gamma x, u^2)(0) + (12R^2 + C_{3R})\delta T_1,$$

o que implica

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t \|Du\|^2(\tau)d\tau \leq 2R^2 + (12R^2 + C_{3R})\delta T_1.$$

Tomando $T_1 > 0$ tal que $(12R^2 + C_{3R})\delta T_1 \leq 6R^2$, obtemos

$$\|u\|^2(t) + \int_0^t \|Du\|^2(\tau)d\tau \leq 8R^2. \tag{2.48}$$

ESTIMATIVA II: Derivando a equação em (2.42) com respeito a t, multiplicando por $(1+\gamma x)u_t$ e integrando sobre $(0,1)$ tem-se

$$(u_{tt}, (1+\gamma x)u_t)(t) + (D^3 u_t, (1+\gamma x)u_t)(t) = ((-Dv - vDv)_t, (1+\gamma x)u_t)(t).$$

Analogamente à estimativa anterior temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u_t^2)(t) + K_1(u_t(1,t))^2 + K_2(u_t(0,t))^2 + K_3(Du_t(0,t))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Du_t\|^2(t) \\
&\leq \underbrace{(-v_t Dv, (1+\gamma x)u_t)(t)}_{I_1} + \underbrace{(-vDv_t, (1+\gamma x)u_t)(t)}_{I_2} + \underbrace{(-Dv_t, (1+\gamma x)u_t)(t)}_{I_3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_3 &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} Dv_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} u_t\|^2(t) \\
&\leq \varepsilon^2\|Dv_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t),
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
I_2 &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} v D v_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} u_t\|^2(t) \\
&\leq \varepsilon^2 \sup_{x\in(0,1)} |v(x,t)|^2 \|Dv_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t) \\
&\leq \varepsilon^2 C_{2R}\|Dv_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} v_t D v\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} u_t\|^2(t) \\
&\leq \varepsilon^2 \sup_{x\in(0,1)} |v_t(x,t)|^2 \|Dv\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t) \\
&\leq \varepsilon^2 12(C_{0R} + \|Dv_t\|^2(t))\|Dv\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t) \\
&\leq \varepsilon^2 12 C_{0R}C_{1R} + \varepsilon^2 12 C_{1R}\|Dv_t\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t).
\end{aligned}
$$

Assim

$$
\begin{array}{l}
\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u_t^2)(t) + K_1(u_t(1,t))^2 + K_2(u_t(0,t))^2 + K_3(Du_t(0,t))^2 \\
\quad +3\gamma\|Du_t\|^2(t) \leq \varepsilon^2 C_{4R} + \varepsilon^2 C_{5R}\|Dv_t\|^2(t) + \frac{3}{\varepsilon^2}(1+\gamma x, u_t^2)(t).
\end{array}
\tag{2.49}
$$

onde $C_{4R} = 24C_{0R}C_{1R}$ e $C_{5R} = 2 + 2C_{2R} + 24C_{1R}$.

Pelo lema de Gronwall obtemos

$$
\begin{aligned}
(1+\gamma x, u_t^2)(t) &\leq e^{\frac{3T}{\varepsilon^2}}\left[(1+\gamma x, u_t^2)(0) + \varepsilon^2 C_{5R}\int_0^t \|Dv_\tau\|^2(\tau)d\tau + \varepsilon^2 C_{4R}T\right] \\
&\leq e^{\frac{3T}{\varepsilon^2}}(2\|u_t\|^2(0) + \varepsilon^2 C_{5R}C_{0R} + \varepsilon^2 C_{4R}T) \\
&\leq e^{\frac{3T}{\varepsilon^2}}[6(\|Du_0\|^2 + \|u_0Du_0\|^2 + \|D^3u_0\|^2) + \varepsilon^2 C_{5R}C_{0R} + \varepsilon^2 C_{4R}T].
\end{aligned}
$$

Considerando $0 < T_2 \leq T \leq 1$ tal que $T_2 \leq \frac{\varepsilon^2}{3}$ e $\varepsilon > 0$ tal que $e^{\frac{3T_2}{\varepsilon^2}} \leq 2$ e $\varepsilon^2(C_{5R}C_{0R} + C_{4R}) \leq R^2$, vemos que

$$
(1+\gamma x, u_t^2)(t) \leq 2(6R^2 + R^2) = 14R^2, \quad t \in (0, T_2).
$$

Voltando à (2.49) obtemos

$$
\frac{d}{dt}(1+\gamma x, u_t^2)(t) + \|Du_t\|^2(t) \leq 42\delta\frac{R^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\delta C_{4R} + \varepsilon^2\delta C_{5R}\|Dv_t\|^2(t).
$$

Integrando de 0 à t tem-se

$$
\begin{aligned}
(1+\gamma x, u_t^2)(t) + \int_0^t \|Du_\tau\|^2(\tau)d\tau &\leq (1+\gamma x, u_t^2)(0) + \left(42\delta\frac{R^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\delta C_{4R}\right)T_2 \\
&+ \varepsilon^2\delta C_{5R}\int_0^t \|Dv_\tau\|^2(\tau),
\end{aligned}
$$

o que implica

$$\|u_t\|^2(t) + \int_0^t \|Du_\tau\|^2(\tau)d\tau \ \ \leq \ \ 6R^2 + \left(42\delta\frac{R^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\delta C_{4R}\right)T_2 + \varepsilon^2\delta C_{5R}C_{0R}.$$

Considerando $T_2 \leq \frac{\varepsilon^2}{126}$ e $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(39\delta\frac{R^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2\delta C_{4R}\right)T_2 + \varepsilon^2\delta C_{5R}C_{0R} \leq R^2$$

obtemos

$$\|u_t\|^2(t) + \int_0^t \|Du_\tau\|^2(\tau)d\tau \leq 8R^2. \tag{2.50}$$

Deste modo, tomando $T_0 = \min\{T_1, T_2\}$ devemos ter, de acordo com (2.48) e (2.50) que

$$\|u\|_V \leq 4R.$$

Lema 2.5. *Para $T_0 > 0$ tem-se que o operador P é uma contração de B_R em B_R.*

Demonstração: Para $v_1, v_2 \in B_R$ denotemos

$$u_i = Pv_i,\ i = 1,2, \quad w = v_1 - v_2, \quad \text{e} \quad z = u_1 - u_2.$$

Então z satisfaz o seguinte problema valores inicial e de fronteira

$$\left\{\begin{array}{lll} z_t + D^3z = -\frac{1}{2}D(v_1^2 - v_2^2) - Dw, & \text{em} & \mathbb{Q}_{T_0}; \\ \ D^2z(0,t) = a_1Dz(0,t) + a_0z(0,t), & & \\ \ D^2z(1,t) = b_0z(1,t), & & t \in (0,T_0); \\ \ Dz(1,t) = c_0z(1,t), & & \\ z(x,0) = 0, & & x \in (0,1). \end{array}\right. \tag{2.51}$$

Definimos a métrica

$$\rho^2(v_1,v_2) = \rho^2(w) = \sup_{t\in(0,T_0)} \|w\|^2(t) + \int_0^{T_0} \|Dw\|^2(t)dt.$$

Multiplicando a equação em (2.51) por $(1+\gamma x)z$ e integrando sobre $(0,1)$ tem-se

$$(z_t, (1+\gamma x)z)(t) + (D^3z, (1+\gamma x)z)(t) = (-\frac{1}{2}D(v_1^2 - v_2^2) - Dw, (1+\gamma x)z)(t).$$

Analogamente ao lema anterior, temos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(1+\gamma x, z)(t) + K_1(z(1,t))^2 + K_2(z(0,t))^2 + K_3(Dz(0,t))^2 + \frac{3\gamma}{2}\|Dz\|^2(t)$$
$$\leq \underbrace{(-\frac{1}{2}(v_1+v_2)Dw, (1+\gamma x)z)(t)}_{I_1} + \underbrace{(-\frac{1}{2}wD(v_1+v_2), (1+\gamma x)z)(t)}_{I_2} + \underbrace{(-Dw, (1+\gamma x)z)(t)}_{I_3}.$$

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} Dw\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} z\|^2(t) \\ &\leq \varepsilon^2\|Dw\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \frac{\varepsilon^2}{4}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} wD(v_1+v_2)\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} z\|^2(t) \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\sup_{x\in(0,1)}|w(x,t)|^2\|D(v_1+v_2)\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t) \\ &\leq \varepsilon^2 24C_{1R}(\|w\|^2(t)+\|Dw\|^2(t)) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{\varepsilon^2}{4}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}}(v_1+v_2)Dw\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}\|(1+\gamma x)^{\frac{1}{2}} z\|^2(t) \\ &\leq \frac{\varepsilon^2}{2}\sup_{x\in(0,1)}|(v_1+v_2)(x,t)|^2\|Dw\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t) \\ &\leq \varepsilon^2 2C_{2R}\|Dw\|^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t). \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(1+\gamma x, z^2)(t) + K_1(z(1,t))^2 + K_2(z(0,t))^2 + K_3(Dz(0,t))^2 + 3\gamma\|Dz\|^2(t) \\ &\leq \varepsilon^2 48C_{1R}(\|w\|^2(t)+\|Dw\|^2(t)) + \varepsilon^2(4C_{2R}+2)\|Dw\|^2(t) + \frac{3}{\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t). \end{aligned}$$

Seja $C_{6R} = 2\max\{48C_{1R}, 4C_{2R}+2\}$, então

$$\frac{d}{dt}(1+\gamma x, z^2)(t) + 3\gamma\|Dz\|^2(t) \leq \varepsilon^2 C_{6R}(\|w\|^2(t)+\|Dw\|^2(t)) + \frac{3}{\varepsilon^2}(1+\gamma x, z^2)(t). \quad (2.52)$$

Pelo lema de Gronwall temos

$$\begin{aligned} (1+\gamma x, z^2)(t) &\leq e^{\frac{3T_0}{\varepsilon^2}}\varepsilon^2 C_{6R}\int_0^t [\|w\|^2(\tau)+\|Dw\|^2(\tau)]d\tau \\ &\leq e^{\frac{3T_0}{\varepsilon^2}}\varepsilon^2 C_{6R}\left[t\sup_{t\in(0,T_0)}\|w\|^2(t) + \int_0^t \|Dw\|^2(\tau)d\tau\right]. \end{aligned}$$

Como $0 < T_0 \leq 1$ é tal que $e^{\frac{3T_0}{\varepsilon^2}} \leq 2$ obtemos

$$(1+\gamma x, z^2)(t) \leq \varepsilon^2 2C_{6R}\rho^2(w), \quad t \in (0, T_0).$$

Voltando a (2.52) tem-se

$$\frac{d}{dt}(1+\gamma x, z^2)(t) + \|Dz\|^2(t) \leq \varepsilon^2\delta C_{6R}(\|w\|^2(t)+\|Dw\|^2(t)) + 6\delta C_{6R}\rho^2(w).$$

Integrando de 0 à t temos

$$\|z\|^2(t) + \int_0^t \|Dz\|^2(\tau)d\tau \leq \varepsilon^2 \delta C_{6R}\rho^2(w) + 6\delta C_{6R}T_0\rho^2(w),$$

o que implica

$$\|z\|^2(t) + \int_0^t \|Dz\|^2(\tau)d\tau \leq (\varepsilon^2 \delta C_{6R} + 6\delta C_{6R}T_0)\rho^2(w).$$

Novamente, como $T_0 \leq \frac{\varepsilon^2}{126}$, tomamos $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon^2 = \frac{1}{2\delta(C_{6R}+\frac{6}{126}C_{6R})}$, logo

$$\rho^2(z) \leq \frac{1}{2}\rho^2(w).$$

Portanto P é uma contração de B_R em B_R. Pelo Teorema do Ponto Fixo de Banach existe uma única solução generalizada u do problema (2.39) tal que

$$u, u_t \in L^\infty(0, T_0; L^2(0,1)) \cap L^2(0, T_0; H^1(0,1)).$$

Agora, voltando à equação

$$u_t + D^3u = -Du - uDu, \tag{2.53}$$

temos que, como $u_t \in L^\infty(0, T_0; L^2(0,1))$ e $-Du - uDu \in C([0,T_0]; L^2(0,1))$, então $D^3u \in L^\infty(0, T_0; L^2(0,1))$, o que implica, pela desigualdade de Ehrling, que $u \in L^\infty(0, T_0; H^3(0,1))$. Daí, pelo lema 1.9 segue que $u \in L^2(0, T_0; H^3(0,1))$. Além disso, como $u_t \in L^2(0, T_0; H^1(0,1))$ podemos derivar (2.53) com respeito à x. Assim

$$D^4u = -D^2u - (Du)^2 - uD^2u - Du_t.$$

Estimando

$$\begin{aligned}
\int_0^{T_0}\int_0^1 |uD^2u|^2 dx\, dt &\leq \int_0^{T_0} \left(\sup_{x\in(0,1)} |u(x,t)|^2 \int_0^1 |D^2u|^2 dx \right) dt \\
&\leq \int_0^{T_0} \left(2\sqrt{3}\|u\|^2_{H^1(0,1)}(t)\|D^2u\|^2(t) \right) dt \\
&\leq 2\sqrt{3} \sup_{t\in(0,T_0)} \|D^2u\|^2(t) \int_0^{T_0} \|u\|^2_{H^1(0,1)}(t)dt < \infty,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^{T_0}\int_0^1 |Du|^4 dx\, dt &\leq \int_0^{T_0}\left(\sup_{x\in(0,1)}|Du(x,t)|^2\int_0^1 |Du|^2 dx\right)dt\\
&\leq \int_0^{T_0}\left(2\sqrt{3}\|Du\|^2_{H^1(0,1)}(t)\|Du\|^2(t)\right)dt\\
&\leq 2\sqrt{3}\sup_{t\in(0,T_0)}\|Du\|^2(t)\int_0^{T_0}\|Du\|^2_{H^1(0,1)}(t)dt<\infty,
\end{aligned}
$$

temos $D^4u \in L^2(0,T_0;L^2(0,1))$. Deste modo

$$
u \in L^\infty(0,T_0;H^3(0,1))\cap L^2(0,T_0;H^4(0,1))
$$

é a solução regular do problema (2.39). Provando assim, o teorema 2.2.

Bibliografia

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Departament of Mathematics, Academic Press, United States of America, 1970.

[2] T.B. Benjamin, Lectures on Nonlinear Wave Motion, Lecture Notes in Applied Mathematics 15 (1974), 3-47.

[3] J.L. Bona, Nonlinear Wave Phenomena, 51° Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

[4] J.L. Bona, V.A. Dougalis, An Initial and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 503-502.

[5] J.L. Bona, S.M. Sun, B.-Y. Zhang; A nonhomogeneous boundary-value problem for the Korteweg-de Vries equation posed on a finite domain, Comm. Partial Differential Equations, 28 (2003), 1391-1436.

[6] J. Boussinesq, Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d' un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fund, J. Math. Pures Appl. 17 (1872) 55-108.

[7] H. Brézis, Analyse Fontionelle, Théorie et Applications, Paris, Masson, 1973.

[8] B.A. Bubnov, General Boundary-Value Problems for the Korteweg-de Vries Equation in a Bounded Domain, Differentsial'nye Uravneniya 15(1) (1979), 26-31. Translation in: Differ. Equ. 15 (1979), 17-21.

[9] A. Chapman, George Biddell Airy, F.R.S. (1801-1892): a centenary commemoration. Notes and Records Roy. Soc. London 46 (1)(1992) 103-110.

[10] R.C. Diprima, W.E. Boyce, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 7° Edição, Trad. Valéria de Magalhães Iorio, Ed. LTC, Teresópolis, 2001.

[11] G.G. Doronin, N.A. Larkin, Kawahara Equation in a Bounded Domain, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series B, v10(4)(2008), pp.783-799.

[12] G.G. Doronin, N.A. Larkin, KdV Equation in Domains with Moving Boundaries, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 503-517.

[13] T. Eduardo, Equação KdV com condições de Fronteiras Gerais em um Domínio Não Limitado (Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-Graduação - UEM, 2009.

[14] E. Emmrich, Discrete versions of Gronwall's lemma and their applications to the numerical analysis of parabolic problems, Prepint No 637, July 1999, Prepint Reihe Mathematik Techniche Universitat Berlin, Fachbereich Mathematik.

[15] L.C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 1997.

[16] A.V. Faminskii, On an Initial Boundary Value Problem in a Bounded Domain for the Generalized Korteweg-De Vries Equation, Functional Differential Equations, v8(2001), 183-194.

[17] S. Gindikin, L. Volevich, Mixed problem for partial differential equations with quasi-homogeneous principal part, Translations of Mathematical Monographs, 147, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[18] V.V. Khablov, Some Well-Posed Boundary Value Problems for the Korteweg-De Vries Equation, Preprint, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Acad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1979.

[19] D.J. Korteweg, G. de Vries, On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, Philos. Mag. 39 (1895) 422-443.

[20] O.A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Applied mathematical sciences, New York, 1985.

[21] N.A. Larkin, Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains, J. Math. Anal. Appl. 297(1) (2004), 169-185.

[22] F. Linares, G. Ponce, Introduction to nonlinear Dispersive Equations, Editora IMPA, 2006.

[23] L.A. Lusternik, V.I. Sobolev, Elements of Functional Analysis, Hindustan Publishing Corporation, New York, Delhi, Índia, 1974.

[24] A. Pazy, Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, New York, 1983.

[25] J.S. Russel, Report on waves, Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., 1844, pp. 311-390.

[26] M.A.J. da Silva, Equação de Airy com Condiçõe de Fronteira Gerais em um Domínio não Limitado(Dissertação de Mestrado), Programa de Pós-Graduação - UEM, 2008.

[27] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and its Apllications I, Fixed-Point Theorems, Springer-Verlag, 1985.

[28] S. Zheng, Nonlinear Evolution Equations, Chapman Hill/CRC, 2004.