Cones Invariantes para ações de Semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$

Janete de Paula Ferrareze

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Alexandre Jose Santana *

(*Parcialmente Financiado pela Fundação Araucária Protocolo n° 6240)

Maringá - PR

2007

Cones Invariantes para ações de Semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$

Janete de Paula Ferrareze

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-Pr, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Alexandre José Santana - UEM ....

(Orientador)

Osvaldo Germano do Rocio - UEM ....

Luis Antonio Barrera San Martin - UNICAMP ....

Maringá

Março, 2007

Dedico este trabalho primeiramente a Deus, e depois a meus pais Eduardo e Nair, a minhas irmãs e a meu sobrinho.

Agradecimentos

A Deus pela força e providências e aos meus pais e familiares pelo incentivo.

Ao professor Dr. Alexandre José Santana, pela orientação, atenção e o apoio necessário para o desenvolvimento deste trabalho.

Em especial a todos os meus amigos, pela agradável convivência e pelo apoio sempre que necessário e ao querido Jair pela atenção e carinho.

A todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática da UEM, em especial aos que contribuíram na minha formação acadêmica e humana.

Ao programa CAPES, pelo suporte financeiro durante os dois anos de mestrado.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar um dos principais teoremas de ([9]), ou seja, estudar condições necessárias e suficientes para a existência de cones invariantes para a ação de semigrupos de interior não vazio de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$. Para isto, a principal ferramenta usada é o conceito de tipo parabólico de um semigrupo. Dentre os pré-requisitos para este trabalho demos uma atenção especial para os conjuntos controláveis para ação de semigrupos de interior não vazio e o teorema de existência e unicidade do conjunto controlável invariante para a ação de semigrupos nas variedades $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$. Ainda relacionado com invariança de cones, estudamos o semigrupo de compressão de um cone W, $S_W \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos as relações entre cones e semigrupos do grupo de Lie simples $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Mais precisamente, dado um semigrupo $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, com interior não vazio, conexo e contendo a identidade, estudamos condições (dentro da teoria de controle para semigrupos em grupos de Lie semi-simples) para que S admita cones próprios pontuais e geradores em $\mathbb{R}^n$ invariantes. Estes estudos foram feitos em *Rocio-San Martin-Santana* [9]. Estudamos também relações entre cones euclidianos S-invariantes e cones semigrupos, esses estudos foram feitos em *Gonçalves Filho* [4].

Entre as ferramentas fundamentais para esses estudos destacamos os conjuntos controláveis invariantes para a ação de semigrupos. Eles aparecem como subconjuntos de variedades flags, invariantes para a ação do semigrupo. Consideramos, em especial, o conjunto controlável invariante na variedade projetiva $\mathbb{P}^{n-1}$ para $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, a qual é um quociente de $\mathbb{R}^n$. E mais as propriedades algébricas e geométricas dos conjuntos controláveis descrevem vários aspectos topológicos, geométricos e dinâmicos dos semigrupos o que são fundamentais para compreender o comportamento de certos cones de $\mathbb{R}^n$, quando sujeitos a ação do semigrupo.

A motivação principal para este estudo de cones invariantes para semigrupos vem da teoria de sistemas de controle, como pode ser visto em [9] e que superficialmente descrevemos a seguir. O estudo de cones invariantes para semigrupos do grupo associado ao sistema é uma importante ferramenta pois uma forma natural de ver que um sistema de controle não é controlável é encontrando algum subconjunto próprio invariante no espaço onde o sistema age.

Esta questão, no caso de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, foi efetivamente proposta em *Sachkov* [10], da seguinte forma:

Dado um sistema de controle

$$\dot{x} = Ax + uBx, x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, u \in \mathbb{R}$$

onde A é uma matriz $n \times n$, $B = \mathrm{diag}(b_1, \cdots, b_n)$ e o sistema satisfaz a condição do rank, então o sistema acima é controlável se e somente se não existem octantes positivos e negativos invariantes? Em [9] foi mostrado a partir de um exemplo, que a resposta para essa pergunta é negativa. Mais ainda, foi apresentado uma condição necessária e suficiente para a existência de cones pontuais, geradores e invariantes para semigrupos em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, sendo o conceito de tipo parabólico de semigrupos essencial para esses resultados.

Nossa dissertação se estrutura em três capítulos. No primeiro iniciamos apresentando alguns conceitos e definições de álgebras de Lie, depois estudamos com detalhes os conjuntos controláveis para a ação de semigrupos com interior não vazio em grupos de Lie semi-simples, onde as referências principais foram os artigos *San Martin* [13] e *San Martin-Tonelli* [17]. Temos ainda, como principal resultado deste capítulo, o teorema de existência e unicidade do conjunto controlável invariante na variedade flag $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$, onde P é um subgrupo parabólico. Apesar destes tópicos terem sido estudados em outras dissertações, o fato da teoria de conjuntos controláveis serem essenciais para nossos estudos justifica seu detalhamento neste capítulo.

No segundo e principal capítulo começamos definindo o conceito de tipo parabólico de um semigrupo de interior não vazio, $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, o qual daremos uma atenção especial, pois é fundamental para os resultados principais de nossa dissertação. O tipo parabólico de S é dado pelo subconjunto $\Theta(S)$ do sistema simples de raizes de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$, ou seja, dado a projeção entre as variedades flag de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, $\pi : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_{\Theta(S)}$, o subconjunto $\Theta(S)$ é aquele maximal tal que a imagem inversa, por π, do conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ é exatamente o conjunto controlável invariante para S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$, e desta forma dizemos que o tipo parabólico de S é dado por $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$. Na sequência do capítulo demonstramos o resultado principal de nossa dissertação: "Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo próprio, com interior não vazio, conexo e contendo a identidade. Temos que S deixa invariante um cone próprio e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $F_{\Theta(S)}$ projeta-se em $\mathbb{P}^{n-1}$". Finalizando o capítulo, mostramos que se W é um cone, como descrito acima, então seu semigrupo de compressão,

$$S_W := \{g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}); gW \subset W\},$$

tem interior não vazio e é maximal conexo.

No terceiro e último capítulo, trazemos inicialmente uma breve noção de álgebra tensorial. Depois definimos cones-semigrupos que, além de ser semigrupos com o produto usual de matrizes, são cones no espaço de matrizes, ou seja, fechados topologicamente e fechados para combinações lineares com escalares não negativos. Definimos também um caso particular de cone-semigrupo, o fecho do cone convexo gerado por S, o qual denotamos por $K(S)$. Em seguida, depois de alguns resultados preliminares, demonstramos o principal resultado deste capítulo: " Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo de interior não vazio. Suponha que $K(S)$ é um cone próprio no espaço das matrizes. Então S deixa invariante um cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$". Ele nos dá uma outra condição, para a existência de cones $W \subset \mathbb{R}^n$ S-invariantes, estes resultados foram originalmente desenvolvidos em [4].

Capítulo 1

Conjuntos Controláveis

Apresentamos neste capítulo um estudo detalhado sobre conjuntos controláveis que são ferramentas fundamentais para o estudo de cones invariantes para ações de semigrupos. O principal resultado deste capítulo é o que garante a existência e unicidade do conjunto controlável invariante para a ação do semigrupo nas variedade flags, as quais definimos na seção de preliminares deste capítulo, juntamente com um estudo superficial das álgebras de Lie semi-simples e suas decomposições.

1.1 Preliminares

O intuito desta seção é introduzir as variedades Flag para $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e verificar que elas são espaços homogêneos da forma $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$, onde P é um subgrupo parabólico. Além disso, veremos que as variedades flag são compactas. Assim, para um melhor entendimento de como são estes subgrupos, começamos a seção com um estudo superficial sobre algumas decomposições de uma álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ semi-simples, para encontrarmos as subálgebras parabólicas, e consequentemente os subgrupos parabólicos.

Para isso, apresentamos alguns conceitos básicos da teoria de Lie. Indicamos a referência [11] para maiores detalhes.

Definição 1.1 *Sejam* $\mathfrak{g}$ *uma álgebra de Lie, e* $ad : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}l(\mathfrak{g})$ *sua representação* *adjunta. Associado a esta representação existe uma forma bilinear simétrica, denotada* $<,>$*, definida por*

$$< X, Y >= tr(adXadY),$$

para $X, Y \in \mathfrak{g}$ *a qual denominamos forma de Cartan-Killing.*

Definição 1.2 *Uma álgebra de Lie* $\mathfrak{g}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *é dita compacta se sua forma de Cartan-Killing for negativa definida.*

Definição 1.3 *Seja* E *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$*. Dado um elemento não nulo* $\alpha \in E$ *uma reflexão em relação a* α *é uma transformação linear invertível* $r : E \longrightarrow E$ *que satisfaz:*

i) $r(\alpha) = -\alpha$

ii) O conjunto dos pontos fixos de r *é um hiperplano de* E

Definição 1.4 *Um conjunto* $\triangle \subset E$ *é um sistema de raízes se satisfaz:*

i) $\triangle$ *é finito, gera* E *e não contém* 0*.*

ii) Para todo $\alpha \in \triangle$ *existe uma reflexão* r_α *em relação a* α *tal que* $r_\alpha(\triangle) = \triangle$*.*

iii) Para todo $\alpha, \beta \in \triangle$*,* $r_\alpha(\beta) - \beta$ *é um múltiplo inteiro de* α*.*

Definição 1.5 *O grupo de Weyl de um sistema de raízes* $\triangle$*, que denotaremos por* W*, é o grupo gerado pelas reflexões* r_α *,* $\alpha \in \triangle$*.*

Definição 1.6 *Dado um sistema de raízes* $\triangle \subset E$*, o conjunto dos elementos regulares em* E *é definido como:*

$$\overline{E} = \{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0 \ \ \textit{para todo} \ \ \alpha \in \triangle\}.$$

Como o complementar de $\overline{E}$ é a união dos núcleos de um número finito de funcionais lineares não nulos temos, que o conjunto dos elementos regulares é aberto e denso em E. Ainda mais, cada uma de suas componentes conexas é um cone convexo em E.

Definição 1.7 *Uma câmara de Weyl é uma componente conexa do conjunto dos elementos regulares.*

Definição 1.8 *Uma raiz $\alpha \in \triangle$ é simples em relação a uma ordem fixada se*

i) $\alpha > 0$

ii) Não existem $\beta, \gamma \in \triangle$ tais que β e γ são positivas e

$$\alpha = \beta + \gamma$$

ou seja, as raízes simples não podem ser escritas como soma de duas raízes positivas.

Definição 1.9 *Um sistema simples de raízes é um subconjunto $\Pi \subset \triangle$ satisfazendo:*

1. Π *é base de* E.

2. *Toda raiz $\beta \in \triangle$ pode ser escrita como*

$$\beta = n_1\alpha_1 + \cdots + n_s\alpha_s$$

com coeficientes inteiros de mesmo sinal.

Teorema 1.10 *A forma de Cartan-Killing de $\mathfrak{g}$ não é degenerada se e só se $\mathfrak{g}$ é semi-simples.*

A partir de agora, vamos estudar superficialmente algumas das decomposições de uma álgebra de Lie semi-simples. De maneira geral dado um grupo de Lie G semi-simples, temos que sua álgebra $\mathfrak{g}$ se decompõe da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{s}$$

onde $\mathfrak{k}$ é uma subálgebra maximal compacta, e $\mathfrak{s}$ é o subespaço dado pelo complemento ortogonal em relação à forma de Cartan Killing. Essa decomposição é conhecida como decomposição de Cartan. Ela não é única, mas temos que se $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_1 \oplus \mathfrak{s}_1$ *e* $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_2 \oplus \mathfrak{s}_2$, então existe um automorfismo Φ tal que $\Phi(\mathfrak{k}_1) = \mathfrak{k}_2$ *e* $\Phi(\mathfrak{s}_1) = \mathfrak{s}_2$ (para tais detalhes ver *San Martin* [11]).

A partir da decomposição de Cartan, selecionamos um subespaço abeliano maximal $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{s}$, temos que $\mathfrak{a}$ se decompõe em câmaras de Weyl onde escolhemos uma, denotada por $\mathfrak{a}^+$. Associado a $\mathfrak{a}^+$ existe o sistema de raízes Π e o sistema de raízes positivas $\Pi^+ \subset \Pi$. Denotamos por Σ o subconjunto de Π^+ formado pelas raízes simples, a demonstração da existência de sistema simples de raízes pode ser encontrada no Capítulo 6 de [11]. Sejam $\alpha \in \Pi$ e $\mathfrak{g}_\alpha$ seu espaço de raízes correspondentes. Considere $\mathfrak{n}^+ = \Sigma_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$, então temos a decomposição de Iwasawa para $\mathfrak{g}$,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{a}^+ \oplus \mathfrak{n}^+,$$

e assim, a decomposição global de Iwasawa correspondente para G,

$$G = KAN^+,$$

onde K é o subgrupo compacto dado por $K = \exp \mathfrak{k}$, $N^+ = \exp \mathfrak{n}^+$ e $A = \exp \mathfrak{a}^+$.

Denotemos por M o centralizador de $\mathfrak{a}$ em K, isto é,

$$\begin{aligned} M &= \{u \in K; Ad(u)H = H, \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}\} \\ &= \{u \in K; uhu^{-1} = h, \text{ para todo } h \in A\} \end{aligned}$$

e $\mathfrak{m}$ sua álgebra de Lie.

O subespaço $\mathfrak{p} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{n}^+$ é uma subálgebra de $\mathfrak{g}$ chamada subálgebra parabólica minimal. Ela é a subálgebra associada ao subgrupo de Lie $P = MAN^+ \subset G$, que é chamado de subgrupo parabólico minimal. Temos que $P = \{\sigma \in G; Ad(\sigma)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$ (para mais detalhes sugerimos [11] e *G. Warner* [20]).

No caso de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ temos $P = \{B \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}); B\mathfrak{p}B^{-1} = \mathfrak{p}\}$.

Além da subálgebra parabólica minimal, podemos encontrar outras subálgebras parabólicas, e assim, através delas obter outros subgrupos parabólicos. Descreveremos abaixo, como são determinados tais subálgebras e subgrupos.

Selecionamos no conjunto de raízes simples, Σ, um subconjunto Θ. Denotemos por $\langle\Theta\rangle$ o conjunto gerado pelas raízes $\alpha \in \Theta$ e por $\langle\Theta\rangle^+$ o conjunto dado pela interseção de Π^+ com $\langle\Theta\rangle$. Consideremos $\mathfrak{n}_\Theta^+ = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_\alpha$ e $\mathfrak{n}_\Theta^- = \sum_{\alpha\in\langle\Theta\rangle^+} \mathfrak{g}_{-\alpha}$ que são subálgebras de $\mathfrak{n}^+$ e $\mathfrak{n}^-$, respectivamente.

A subálgebra parabólica associada a $\Theta \subset \Sigma$ é definida como

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}_\Theta^- \oplus \mathfrak{p}.$$

Segue que se $\Theta_1 \subset \Theta_2$ então $\mathfrak{p}_{\Theta_1} \subset \mathfrak{p}_{\Theta_2}$ e também que $\mathfrak{p}_\emptyset = \mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{g}$.

Para essas subágebras podemos obter seus subgrupos parabólicos. Para isso, é preciso normalizar a subálgebra parabólica, ou seja,

$$P_\Theta = \{g \in G; Ad(g)\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{p}_\Theta\}.$$

Seja $\mathfrak{a}_\Theta = \{H \in \mathfrak{a}; \alpha(H) = 0 \text{ para todo } \alpha \in \Theta\}$. Denotemos por L_Θ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em G, ou seja, $L_\Theta = \{g \in G; Ad(g)H = H \text{ para todo } H \in \mathfrak{a}_\Theta\}$ e denotemos por $M_\Theta(K) = L_\Theta \cap K$ o centralizador de $\mathfrak{a}_\Theta$ em K. Uma outra decomposição de $\mathfrak{p}_\Theta$ que pode ser encontrada em [20] é a seguinte

$$\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{m}_\Theta \oplus \mathfrak{a}_\Theta \oplus \mathfrak{n}_\Theta^+,$$

onde $\mathfrak{m}_\Theta$ é a álgebra de Lie do subgrupo conexo M_Θ^0 o qual é a componente conexa da identidade de $M_\Theta(K)$ e $\mathfrak{n}_\Theta^-$ é como vimos anteriormente.

Vejamos agora algumas definições, de caráter mais geral, que serão necessários para enunciarmos o próximo teorema.

Recordemos que dado M uma variedade e G um grupo de Lie, uma aplicação C^∞ $\eta : G \times M \to M$ é uma ação à esquerda de G em M se:

(a) $\eta(e, m) = m$, para todo $m \in M$;

(b) $\eta(\sigma\tau, m) = \eta(\sigma, \eta(\tau, m))$, para todo $\sigma, \tau \in G$ e para todo $m \in M$.

Dizemos que η é transitiva, se para quaisquer dois elementos $m, n \in M$, existir $\sigma \in G$ tal que $\eta_\sigma(m) = n$, onde $\eta_\sigma = \eta|_{\sigma \times M}$.

Definição 1.11 *Seja $m_0 \in M$. Temos que $H = \{\sigma \in G; \eta_\sigma(m_0) = m_0\}$ é um subgrupo fechado de G, chamado de grupo de isotropia de m_0.*

Ainda na teoria de variedades homogêneas temos o seguinte teorema

Teorema 1.12 *Seja $\eta : G \times M \to M$ uma ação transitiva à esquerda do grupo de Lie G na variedade M. Seja $m_0 \in M$ e H o grupo de isotropia de m_0. Defina a aplicação*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{\beta}: & G/H & \longrightarrow & M \\ & \sigma H & \longmapsto & \eta_\sigma(m_0). \end{array}$$

Então, $\tilde{\beta}$ é um difeomorfismo.

Vamos agora estudar um pouco sobre as variedades "flag"para $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ que serão os ambientes onde estudaremos os principais resultados de nossa dissertação.

Fixada uma sequência de inteiros $r_1 < r_2 < \ldots < r_k$, considere o conjunto de flags do tipo $(V_{r_1} \subset V_{r_2} \subset \ldots \subset V_{r_k})$, onde cada V_{r_i} é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ tal que $\dim V_{r_i} = r_i$. Como veremos este conjunto é uma variedade diferenciável compacta, a qual chamamos de variedade flag, e denotamos por $\mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$.

Temos que o grupo de Lie $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ age canonicamente em cada flag de $\mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$ da seguinte forma:

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}^n(r_1, \cdots, r_k) & \longrightarrow & \mathbb{F}^n(r_1, \cdots, r_k) \\ & (g, (V_{r_1} \subset V_{r_2} \subset \cdots \subset V_{r_k})) & \longmapsto & (gV_{r_1} \subset gV_{r_2} \subset \cdots \subset gV_{r_k}). \end{array}$$

De fato, dados $g_1, g_2 \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e $b \in \mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$, temos que $(g_1 g_2)b = g_1(g_2 b)$ e ainda dado 1, a matriz identidade, $1b = b$.

E mais, $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ age transitivamente, observemos a proposição abaixo.

Proposição 1.13 *A ação de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$ *é transitiva, isto é, dados dois flags* $b_1, b_2 \in \mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$*, existe* $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *tal que* $gb_1 = b_2$*.*

Demonstração: É suficiente mostrar que dado $b \in \mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$ existe $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ com $gb_0 = b$, onde b_0 é um flag fixado. De fato, se $g_1b_0 = b_1$ e $g_2b_0 = b_2$ então $(g_2g_1^{-1})b_1 = b_2$.

Escolha uma base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ e b_0 o flag canônico associado a ela, ou seja,

$$b_0 = (\langle e_1,\ldots,e_{r_1}\rangle \subset \langle e_1,\ldots,e_{r_2}\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1,\ldots,e_{r_k}\rangle)$$

e seja $b = (V_{r_1} \subset \ldots \subset V_{r_k})$ um flag arbitrário. Escolha uma base $\{f_1,\ldots,f_n\}$ adaptada para b, isto é, a qual satisfaz $f_1,\ldots,f_{r_1} \in V_{r_1}$, $f_{r_1+1},\ldots,f_{r_2} \in V_{r_2}$, e assim por diante.

Seja $g' : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a transformação linear dada por $g'(e_i) = f_i$, então g' é inversível, ou seja, $\det g' \neq 0$. Temos que $g'(b_0) = b$. De fato,

$$\begin{aligned} g'(b_0) &= g'(\langle e_1,\ldots,e_{r_1}\rangle \subset \langle e_1,\ldots,e_{r_2}\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1,\ldots,e_{r_k}\rangle) \\ &= (\langle g'e_1,\ldots,g'e_{r_1}\rangle \subset \langle g'e_1,\ldots,g'e_{r_2}\rangle \subset \ldots \subset \langle g'e_1,\ldots,g'e_{r_2}\rangle) \\ &= (\langle f_1,\ldots,f_{r_1}\rangle \subset \ldots \subset \langle f_1,\ldots,f_{r_2}\rangle \subset \ldots \subset \langle f_1,\ldots,f_{r_k}\rangle) = b. \end{aligned}$$

Eventualmente, poderemos ter $\det g' \neq 1$. Sem perda de generalidade podemos assumir positivo, caso não seja, trocamos o sinal de algum elemento da base $\{f_i\}$ para que as duas bases tenham a mesma orientação, e assim teremos $\det g' > 0$. Então, seja $g = (\det g')^{-\frac{1}{n}} g'$. Assim, $\det g = 1$ e ainda $gb_0 = b$, ou seja, existe $g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tal que $gb_0 = b$, como queríamos demonstrar. □

Esta ação transitiva permite equipar $\mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$ com estrutura diferenciável, tal que a ação η seja uma aplicação analítica. Isto é devido ao fato de que $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ é um grupo de Lie, e a ação transitiva induz uma bijeção entre $\mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$ e um espaço quociente $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})/P$, onde P é um subgrupo fechado da forma

$$P = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}); gb = b, \text{ com } b \in \mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)\},$$

e qualquer espaço quociente de um grupo de Lie é uma variedade analítica.

A partir disso, podemos determinar o subgrupo de isotropia P dos flags de $\mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$. Então, dado uma base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, consideremos o flag canônico em relação a essa base, ou seja,

$$b_0 = (\langle e_1, \ldots, e_{r_1}\rangle \subset \langle e_1, \ldots, e_{r_2}\rangle \subset \ldots \subset \langle e_1, \ldots, e_{r_k}\rangle).$$

A isotropia neste flag é o subgrupo de aplicações lineares as quais nesta base são triangulares superiores em blocos.

Não é difícil ver que o subgrupo isotrópico de b_0 é

$$\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & * & \ldots & * \\ 0 & A_2 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \ldots & A_K \end{pmatrix} \right\},$$

onde cada A_i tem dimensão r_i.

Considerando agora a variedade flag maximal, $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$, os subgrupos de isotropia nos elementos canônicos tem a forma

$$\tilde{P} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & \ldots & * \\ 0 & * & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \ldots & * \end{pmatrix} \right\},$$

que é exatamente o subgrupo parabólico minimal P, de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, onde $P = MAN^+$, com $M = \{I, -I\}$, onde I é a matriz identidade de ordem n,
$A = \{\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \text{ com } \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n = 1\}$ e

$$N^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \ldots & * \\ 0 & 1 & \ddots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Se calcularmos os subgrupos parabólicos, $P_\Theta \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, associado aos subconjuntos $\Theta \subset \Sigma$, eles serão dados por matrizes triangulares superiores com blocos na diagonal principal, que é como aparecem os subgrupos de isotropia em flags canônicos. Daí temos

$$\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})/P_\Theta \approx \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})/\tilde{P} \approx \mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k).$$

O próximo resultado mostra que as variedades flag são compactas.

Proposição 1.14 *Seja* $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ *o grupo de matrizes ortogonais com determinante* 1*. Então* $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ *é transitivo em qualquer flag* $\mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k)$*.*

Demonstração: Nosso objetivo é a construção de uma matriz ortogonal a qual leva o flag canônico em qualquer outro flag.

Analogamente ao caso de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$, consideremos $\{e_1,\ldots,e_n\}$ e $\{f_1,\ldots,f_n\}$ bases de $\mathbb{R}^n$, mas neste caso ortonormais.

Temos que a matriz da transformação que leva base ortonormal em base ortonormal é uma matriz ortogonal. Assim a matriz g' tal que $g'(e_i)=f_i$ é ortogonal. Logo $\det g' = \pm 1$. Como antes, é possível escolher uma orientação positiva de forma que o determinante de g' seja positivo, então teremos $\det g' = 1$, ou melhor, temos $g' \in \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ e $g'b_0 = b$, onde b_0 é o flag gerado por $\{e_1,\ldots,e_n\}$ e b é o flag gerado por $\{f_1,\ldots,f_n\}$. Concluindo assim o que queríamos. □

Esse resultado nos diz que as variedades flag podem ser vistas também como espaços homogêneos de $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$. Como este grupo é compacto, as variedades flag são compactas.

Explicitamente, o espaço homogêneo é

$$\mathbb{F}^n(r_1,\ldots,r_k) = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R})/M$$

onde $M = \mathrm{SO}(n,\mathbb{R}) \cap \tilde{P}$, com $\tilde{P}$ sendo as matrizes triangulares superiores em blocos, citado anteriormente. Assim,

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & A_K \end{pmatrix}$$

com $(A_i)_{r_i \times r_i}$ - matrizes ortogonais satisfazendo $\det A_1 \dots \det A_K = 1$.

Observação 1.15 *Como as variedades flag são difeomorfas a variedades homogêneas do tipo* $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P_\Theta$*, temos que se*

$$\mathbb{F}^n(1, \dots, n-1) \approx \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P_1$$

e

$$\mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_k) \approx \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P_2,$$

então $P_1 \subset P_2$*. Mais geralmente, se* $(s_1, \dots, s_l) \subset (r_1, \dots, r_k)$*, então* $\mathbb{F}(r_1, \dots, r_k)$ *projeta sobre* $\mathbb{F}(s_1, \dots, s_l)$*.*

De fato, temos que $P_1 \approx \tilde{P}_1$ *e* $P_2 \approx \tilde{P}_2$*, onde* $\tilde{P}_1$ *e* $\tilde{P}_2$ *são subgrupos de isotropia dos elementos canônicos* $b_1 \in \mathbb{F}^n(1, \dots, n-1)$ *e* $b_2 \in \mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_k)$*, respectivamente. Temos que os elementos de* $\mathbb{F}^n(1, \dots, n-1)$ *são da forma*

$$b = (V_1 \subset \dots \subset V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k} \subset \dots \subset V_{n-1})$$

e os elementos de $\mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_k)$ *são da forma*

$$\tilde{b} = (V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k}).$$

Deste modo, se $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ *fixa* b*, ou seja, se* $gb = b$*, então*

$$\begin{aligned} &(gV_1 \subset \dots \subset gV_{r_1} \subset \dots \subset gV_{r_k} \subset \dots \subset gV_{n-1}) \\ &= (V_1 \subset \dots \subset V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k} \subset \dots \subset V_{n-1}) \end{aligned}$$

assim, $gV_i = V_i$ *para todo* $i = 1, \dots, n-1$*, daí,*

$$\begin{aligned} g(\tilde{b}) &= g(V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k}) = (gV_{r_1} \subset \dots \subset gV_{r_k}) \\ &= (V_{r_1} \subset \dots \subset V_{r_k}) = \tilde{b}, \end{aligned}$$

o que mostra que g *fixa* $\tilde{b}$*. Então* $\tilde{P}_1 \subset \tilde{P}_2$*. Portanto,* $P_1 \subset P_2$*.*

1.2 Conjuntos Controláveis

Nesta seção estudamos detalhadamente conjuntos controláveis para a ação de semigrupos com interior não vazio de um grupo de Lie Semi-Simples, bem como condições para sua existência. Através da projeção canônica equivariante, estudamos relações existentes entre esses conjuntos em diferentes variedades homogêneas. Apresentamos também nesta seção, alguns exemplos de conjuntos controláveis para a ação de semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Ao longo desta seção, consideremos G um grupo de Lie Semi-Simples e M uma variedade diferenciável. A menos que seja mencionado o contrário, assumimos que G age transitivamente sobre a variedade M. Assim podemos pensar em M como um espaço homogêneo de G. Estudamos especificamente a ação de semigrupos (com certas hipóteses naturais) de G em M. A partir desta ação surge um conceito fundamental da teoria de semigrupos de grupos de Lie semi-simples, os conjuntos controláveis. Apesar de estes assuntos serem encontrados em várias dissertações achamos importante reproduzí-los neste capítulo preliminar por serem fundamentais na teoria em que esta dissertação está imersa. Citamos alguns dos artigos originais destes assuntos, por exemplo, *San Martin* [12], [13], [14], e *San Martin-Tonelli* [17] e [18].

Como nossos estudos são especificamente para ação de semigrupos de interior não vazio do grupo de Lie G, comentado acima, definimos então o que é um semigrupo de G e destacamos, em seguida, algumas propriedades deste.

Definição 1.16 *Um semigrupo do grupo de Lie G é um subconjunto não vazio $S \subset G$ fechado para a operação do grupo.*

Definição 1.17 *Um semigrupo S é acessível a partir de $x \in M$ se* $\mathrm{int}(Sx) \neq \emptyset$ *e é acessível se for acessível a partir de todo $x \in M$.*

Observação 1.18 *Com a hipótese de que o semigrupo S possui pontos interiores,*

e que a aplicação $g \mapsto gx \in M$ *é aberta e diferenciável, temos que os semigrupos* S *e* $S^{-1} := \{x^{-1} : x \in S\}$ *são acessíveis, visto que* $(\mathrm{int}S)x \subset \mathrm{int}(Sx)$ *e que* $(intS)x$ *é aberto. Para ver isto, tome* $y \in (intS)x$. *Então existe* $g \in intS$ *tal que* $gx = y$. *Como* $g \in intS$, *existe um aberto* A *contendo* g, *tal que* $A \subset intS$. *Assim,* Ax *é um aberto contendo* y *e que está contido em* Sx. *Logo* $y \in int(Sx)$ *e portanto* $(intS)x \subset int(Sx)$.
(respectivamente $(\mathrm{int}S^{-1})x$ *é um aberto contido em* $\mathrm{int}(S^{-1}x)$*).*

Lema 1.19 *O interior de um semigrupo* S *é ideal em* S.

Definição 1.20 *Um semigrupo* S *é controlável a partir de* $x \in M$ *se* $Sx = M$ *e é controlável sobre* M *se for controlável a partir de todo* $x \in M$.

Muitas vezes, quando não se tem a controlabilidade total de S sobre M, segundo a definição acima, o estudo de regiões da variedade onde se tem controlabilidade mostra-se muito importante na descrição de propriedades do semigrupo. Assim, definimos agora os conjuntos controláveis para a ação de semigrupos, lembrando que, a menos de menção contrária sempre assumiremos que o semigrupo tem interior não vazio.

Definição 1.21 *Um conjunto controlável para a ação de um semigrupo* S *de um grupo de Lie* G *que age transitivamente em uma variedade* M *é um subconjunto* $D \subset M$ *satisfazendo:*

i) $\mathrm{int}D \neq \emptyset$

ii) $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$ *para todo* $x \in D$

iii) D *é maximal com relação as propriedades (i) e (ii), ou seja, se* $D^{'} \supset D$ *e satisfaz (i) e (ii), então* $D^{'} = D$.

Exemplo 1.22 *Seja* $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ *e* $S = \mathrm{Sl}^{+}(3, \mathbb{R}) \subset G$. *Veremos mais adiante que* S *é um semigrupo de interior não vazio. Consideremos a ação de* $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ *em* $\mathbb{P}^2$

dada por:

$$\begin{array}{rcll} \eta: & \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})\times\mathbb{P}^2 & \longrightarrow & \mathbb{P}^2 \\ & (g,[v]) & \longmapsto & \eta(g,[v]) = [gv] \end{array}$$

onde $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$ *e* $[v]$ *denota a reta de* $\mathbb{R}^3$ *gerada por* v.

Considere o conjunto

$$C = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}^2; x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}.$$

Vamos mostrar que C *é um conjunto controlável para* S. *De fato, primeiramente temos que* $\mathrm{int} C \neq \emptyset$.

Depois, tomamos $x = (x_1, x_2, x_3)$ *e* $y = (y_1, y_2, y_3)$ *elementos de* $\mathbb{R}^3$. *Se* $[x], [y] \in \mathrm{int}(C)$ *então* $x_i, y_i > 0$ *para todo* $i = 1, 2, 3$. *O elemento*

$$g = \frac{x_1x_2x_3}{y_1y_2y_3}\begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{x_3} \end{pmatrix}$$

pertence a S *e*

$$\begin{aligned} g[x] &= [gx] = \left[\frac{x_1x_2x_3}{y_1y_2y_3}\begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{x_3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right] \\ &= \left[\frac{x_1x_2x_3}{y_1y_2y_3}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}\right] = \frac{x_1x_2x_3}{y_1y_2y_3}[y] = [y], \end{aligned}$$

ou seja, $[y] \in S[x]$. *Como* $[x]$ *e* $[y]$ *são arbitrários, temos que* $\mathrm{int}(C) \subset S[x]$ *para todo* $[x] \in \mathrm{int}(C)$.

Tomemos agora, $[x] \in (C - \mathrm{int}(C))$. *Então* x *deve ter pelo menos uma das coordenadas nula, mas não todas, digamos* x_3. *considere o elemento*

$$g = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in S, \text{ com } a_{ij} > 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} g[x] &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= [(a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2, a_{31}x_1 + a_{32}x_2)] \end{aligned}$$

pertence a $\text{int}(C)$ *pois todas as coordenadas são estritamente positivas. Logo, dado* $[x] \in C - \text{int}C$*, temos que existe* $g_0 \in S$ *tal que* $g_0[x] \in \text{int}(C)$*, digamos* $g_0[x] = [y_0]$*, e já vimos anteriormente que para quaisquer dois elementos* $[y], [y_0] \in \text{int}C$ *existe* $g \in S$ *tal que* $g[y_0] = [y]$*. Então temos que dado* $[y] \in \text{int}C$ *existe uma matriz* $gg_0 \in S$ *tal que* $gg_0[x] = [y]$*.*

Desse fato segue que $\text{int}C \subset S[x]$ *para todo* $[x] \in C$

Então temos que $C = \text{fe}(\text{int}(C)) \subset \text{fe}(S[x])$*, para todo* $[x] \in C$*, satisfazendo assim, a segunda condição da definição de conjunto controlável.*

E por último, temos que C *é maximal em relação a (i) e (ii) de 1.21, pois qualquer outro conjunto* D *tal que* $C \subsetneq D$ *contém um elemento da forma* $[x] = [(x_1, x_2, x_3)]$ *com algum* $x_i < 0$*. Assim,* D *não está contido em* $\text{fe}(S[y])$ *para* y *com coordenadas estritamente positivas.*

Observação 1.23 *Os mesmos agumentos usados no exemplo anterior valem para* $n > 2, 3$.

De agora até o final desta seção demonstraremos vários resultados que permitem entender melhor os conjuntos controláveis. Apresentaremos também vários exemplos de conjuntos controláveis.

Lema 1.24 *Sejam* $a, b, c \in M$ *tais que* $a \in \text{fe}(Sb)$ *e* $b \in \text{fe}(Sc)$*. Então* $a \in \text{fe}(Sc)$*.*

Demonstração: Consideremos as seqüências (g_n), (h_n) de pontos de S tais que $g_n b \longrightarrow a$ e $h_n c \longrightarrow b$. Então, para toda vizinhança V de a, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} b \in V$. Como a ação é contínua e $h_n c \longrightarrow b$ temos que $g_{n_0} h_n c \longrightarrow g_{n_0} b$. Assim, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $g_{n_0} h_{n_1} c \in V$, pois $g_{n_0} b \in V$. Portanto, $a \in \text{fe}(Sc)$. $\square$

A próxima proposição estabelece que dois conjuntos controláveis não se interceptam.

Proposição 1.25 *Dois conjuntos controláveis D e D' são coincidentes ou são disjuntos.*

Demonstração: Suponhamos que $D \cap D' \neq \emptyset$ e tomemos $x \in D \cap D'$. Consideremos o conjunto $D \cup D'$. Como $\mathrm{int} D \neq \emptyset$, temos que $\mathrm{int}(D \cup D') \neq \emptyset$.

Sejam $a\,, b \in D \cup D'$ elementos quaisquer. Como $x \in D$ e $x \in D'$ e ainda, estes são conjuntos controláveis, temos que $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$ e $D' \subset \mathrm{fe}(Sx)$. Assim, $a \in \mathrm{fe}(Sx)$. Temos também, que $x \in \mathrm{fe}(Sy)$ para todo $y \in D \cup D'$, o que implica em $x \in \mathrm{fe}(Sb)$. Pelo Lema 1.24, $a \in \mathrm{fe}(Sb)$. Como a, b são arbitrários, temos que $D \cup D' \subset \mathrm{fe}(Sb)$, para todo $b \in D \cup D'$.

Pelo que vimos acima, $D \cup D'$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.21 e ainda, $D \cup D' \supset D$, assim pela maximalidade de D como conjunto controlável temos que $D \cup D' = D$. Como $D \cup D' = D$, então $D \supset D'$, e agora, pela maximalidade de D' como conjunto controlável, temos que $D = D'$. $\square$

Proposição 1.26 *Todo subconjunto $D \subset M$ satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 1.21 está contido em um conjunto controlável.*

Demonstração: Tome a família

$$\mathcal{F} = \{C \subset M : D \subset C \text{ e } C \text{ satisfazem (i) e (ii) da Definição 1.21}\}$$

ordenada pela inclusão.

Consideremos em $\mathcal{F}$ uma cadeia arbitrária $\{C_\alpha\}_{\alpha \in I}$ e seja $U = \bigcup_{\alpha \in I} C_\alpha$. Temos que $\mathrm{int} U \neq \emptyset$, pois $\mathrm{int} C_\alpha \neq \emptyset$ para cada α.

Se x,y $\in U$, então existem $\alpha_1\,, \alpha_2 \in I$ tais que $x \in C_{\alpha_1}$ e $y \in C_{\alpha_2}$. Como $C_{\alpha_1} \subset C_{\alpha_2}$ ou $C_{\alpha_2} \subset C_{\alpha_1}$ então $y \in \mathrm{fe} Sx$. Como x,y são arbitrários, temos que $U \subset \mathrm{fe}(Sx)$, para todo $x \in U$.

Pela definição de U, e pelo fato que este satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.21, temos que $U \in \mathcal{F}$. Logo todo conjunto totalmente ordenado de $\mathcal{F}$ é limitado superiormente. Pelo lema de Zorn, $\mathcal{F}$ possui elementos maximais. Seja C_M um desses elementos maximais. Então $D \subset C_M$ e C_M é o conjunto controlável procurado.

Portanto todo conjunto satisfazendo as condições (i) e (ii) da Definição 1.21 está contido em um conjunto controlável. $\square$

Proposição 1.27 *Sejam S um semigrupo de interior não vazio de um grupo de Lie G e G/P uma variedade homogênea. Consideremos $g \in \mathrm{int}S$. Então os pontos fixos por g estão contidos em interiores de conjunto controláveis para S.*

Demonstração: Seja $x \in G/P$ um ponto fixo por g. Então $(\mathrm{int}S)x$ e $(\mathrm{int}S^{-1})x$ são vizinhanças abertas de x em G/P, pois $g \in \mathrm{int}S$ e $x = gx$ o que implica em $x \in (\mathrm{int}S)x$ e ainda $x = g^{-1}x$. Logo $x \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$.

Tomamos $C = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S^{-1})x$. Temos que C satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.21. De fato, $\mathrm{int}C \neq \emptyset$, pois C é aberto. Agora sejam $y_1,\ y_2 \in C$, então pela definição de C existem $h_1,\ h_2 \in \mathrm{int}S$ tais que $y_1 = h_1x$ e $y_2 = h_2^{-1}x$, ou melhor, $x = h_2y_2$. Logo, $y_1 \in Sx \subset \mathrm{fe}(Sx)$ e $x \in Sy_2 \subset \mathrm{fe}(Sy_2)$, o que implica em $y_1 \in \mathrm{fe}(Sy_2)$. Como y_1, e y_2 são arbitrários, temos que $C \subset \mathrm{fe}(Sy)$ para todo $y \in C$.

Pela Proposição 1.26, temos que C está contido em um conjunto controlável. Portanto concluímos o desejado. $\square$

Observação 1.28 *Note que usamos a homogenidade de G/P para assegurar que se U é um aberto de G e x um ponto em G/P então Ux é um aberto em G/P.*

A próxima proposição nos mostra que tanto o interior, quanto o fecho, da órbita Sx, é invariante para a ação de S.

Proposição 1.29 *Com as mesmas notações e hipóteses anteriores, se $x \in M$ então $S\mathrm{int}(Sx) \subset \mathrm{int}(Sx)$ e $S\mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}(Sx)$.*

Demonstração: Sejam $g \in S$ e $z \in \text{int}(Sx)$. Como $z \in \text{int}(Sx)$, então existe um aberto $U \subset M$ tal que $z \in U \subset Sx$. Logo $gU \subset Sx$ é um aberto contendo gz, ou seja, existe um aberto gU contendo gz, que está contido em Sx, assim $gz \in \text{int}(Sx)$. Portanto $S\text{int}(Sx) \subset \text{int}(Sx)$.

Agora se $g \in S$ e $y \in \text{fe}(Sx)$, então existe uma seqüência $(a_n x)$ em Sx convergindo para y. Como a ação, de S sobre M, é contínua, temos que $ga_n x \to gy$. Com isto, temos que $gy \in \text{fe}(Sx)$. Portanto $S\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}(Sx)$. □

A transitividade de S nos conjuntos controláveis, em geral, não é total, no entanto, estes contém um subconjunto com esta propriedade, o qual definimos a seguir.

Definição 1.30 *Seja D um conjunto controlável para o semigrupo S. O conjunto de transitividade para D é o subconjunto D_0 definido por:*

$$D_0 := \{x \in D : \text{ existe } g \in \text{int}S \text{ tal que } gx = x\}.$$

Proposição 1.31 *Seja D um conjunto controlável para o semigrupo S e seja D_0 o seu conjunto de transitividade. Então:*

(i) $D_0 = (\text{int}S)D \cap D$.

(ii) Se $D_0 \neq \emptyset$, então $D \subset (\text{int}S)^{-1}x$ para qualquer $x \in D_0$.

Demonstração: (i) Seja $x_0 \in D_0$. Então $x_0 \in (\text{int}S)x_0 \cap D \subset (\text{int}S)D \cap D$. Logo $x_0 \in (\text{int}S)D \cap D$. Assim $D_0 \subset (\text{int}S)D \cap D$.

Agora, seja $x_0 \in (\text{int}S)D \cap D$. Então existem $h \in (\text{int}S)$ e $y \in D$ tais que $hy = x_0$. Como $D \subset \text{fe}(Sx_0)$ e D possui pontos interiores então $Sx_0 \cap D \neq \emptyset$. Seja $z \in Sx_0 \cap D$. Temos que $D \cap (\text{int}S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$, pois $x_0 = hy$ o que implica em $y = h^{-1}x_0 \in (\text{int}S)^{-1}x_0$ e $y \in D$.

Agora como $D \subset \text{fe}(Sz)$ e $(\text{int}S)^{-1}x_0 \cap D \neq \emptyset$, então $Sz \cap (\text{int}S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$. De fato, tome $d \in (\text{int}S)^{-1}x_0 \cap D$. Então $d \in \text{fe}(Sz) = Sz \cup (Sz)'$

- Se $d \in Sz$, então $(\text{int}S)^{-1}x_0 \cap Sz \neq \emptyset$.

- Se $d \in (Sz)'$, então existe uma seqüência de elementos de Sz convergindo para d. Em outras palavras, todo aberto contendo d, contém elementos, pelo menos um, de Sz. Como $(\text{int}S)^{-1}$ é aberto, então $(\text{int}S)^{-1}x_0$ é aberto e ainda, é um aberto contendo d, assim, como d é ponto de acumulção de Sz, temos que existe pelo menos um elemento de Sz em $(\text{int}S)^{-1}x_0$, isto é, $(\text{int}S^{-1})x_0 \cap Sz \neq \emptyset$.

Deste modo, como $Sz \cap (\text{int}S)^{-1}x_0 \neq \emptyset$, então existem $g \in S$ e $h \in \text{int}S$ tais que $gz = h^{-1}x_0$. Assim, $x_0 = hgz$ e como $z \in Sx_0$, temos $z = sx_0$, o que implica em $x_0 = hgsx_0$ com $(hgs) \in \text{int}S$. Visto que $x_0 \in D$, então pela definição de D_0 concluímos que $x_0 \in D_0$. Portanto $D_0 = (\text{int}S)D \cap D$.

(ii) Tomemos $x \in D_0$ e $y \in D$. Pelo item anterior $D_0 = (\text{int}S)D \cap D$, assim, existem $h \in \text{int}S$ e $z \in D$ tal que $x = hz$, o que implica em $z = h^{-1}x$. Logo $(\text{int}S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Como $y \in D$ temos $D \subset \text{fe}(Sy)$. Assim (como já feito no item anterior) $D \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset$ e $D \subset \text{fe}(Sy) \Rightarrow Sy \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset$. Logo existem $g \in S$ e $h \in \text{int}S$ tais que $gy = h^{-1}x \Rightarrow y = g^{-1}h^{-1}x$. Como $g^{-1}h^{-1} \in (\text{int}S)^{-1}$ então $y \in (\text{int}S)^{-1}x$.

Portanto, se $D_0 \neq \emptyset$, então $D \subset (\text{int}S)^{-1}x$ para qualquer $x \in D_0$ $\square$

Proposição 1.32 *Com as mesmas hipóteses da proposição anterior:*

(i) Se $D_0 \neq \emptyset$, então $D_0 = (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$.

(ii) Para todo $x,y \in D_0$, existe $g \in \text{int}S$ com $gx = y$.

(iii) Se $D_0 \neq \emptyset$, então D_0 é denso em D.

Demonstração: (i) Sejam $x\,,y \in D_0$. Pelo item (ii) da Proposição 1.31, $y \in (\text{int}S)^{-1}x$ e $x \in (\text{int}S)^{-1}y$. Assim, existe $h \in \text{int}S$ tal que $x = h^{-1}y$ o que implica em $y = hx$. Deste modo, $y \in (\text{int}S)x$ o que resulta em $y \in (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$. Logo, $D_0 \subset (\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x$.

Agora fixemos $x \in D_0$ e seja $y \in (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Então existem g,$h \in \mathrm{int}S$ tais que $y = gx$ e $y = h^{-1}x$., o que implica que $x = hy$, então $y = g(hy)$, ou seja, $y \in (\mathrm{int}S)y$. Resta mostrar que $y \in D$. Para isto, mostraremos que $D^{'} = D \cup \{y\}$ satisfaz as duas primeiras condições de conjunto controlável. Daí, como D é um conjunto controlável, e $D \subset D^{'}$, concluiremos pela maximalidade de D que $D = D^{'}$, e assim teremos $y \in D$. Primeiramente $\mathrm{int}D^{'} \neq \emptyset$, pois $\mathrm{int}D \neq \emptyset$. Agora tomemos $z \in D^{'}$. Então $z \in D$ ou $z = y$. Se $z \in D$, então $D \subset \mathrm{fe}(Sz)$. Tomando $x \in D_0$, citado anteriormente, temos que $y = gx$, com $g \in \mathrm{int}S$. Desta forma, $y \in Sx \subset \mathrm{fe}(Sx)$ e como $x \in D$, temos que $x \in \mathrm{fe}(Sz)$, logo $y \in \mathrm{fe}(Sz)$. Assim, $D^{'} \subset \mathrm{fe}(Sz)$ para todo $z \in D$. Se $z = y$, novamente, com $x \in D_0$ fixado anteriormente, temos que $y = h^{-1}x$, com $h \in \mathrm{int}S$. Assim, $x = hy$, ou seja, $x \in Sy \subset \mathrm{fe}(Sy)$. Tomando $w \in D$, temos que $w \in \mathrm{fe}(Sx)$, pois $x \in D$. Daí, como $w \in \mathrm{fe}(Sx)$ e $x \in \mathrm{fe}(Sy)$, temos pelo Lema 1.24 que $w \in \mathrm{fe}(Sy)$, para todo $w \in D$. E ainda, como $y = ghy$, temos que $y \in Sy \subset \mathrm{fe}(Sy)$. Deste modo, $D^{'} = D \cup \{y\} \subset \mathrm{fe}(Sy)$. Logo, $D^{'} \subset \mathrm{fe}(Sz)$, para todo $z \in D^{'}$. Assim temos que $D^{'}$ satisfaz as duas primeiras condições da definição de conjuntos controláveis e assim concluindo o desejado.

(ii) Considerando que $x, y \in D_0$, temos que $D_0 \neq \emptyset$. Temos pelo item anterior, que $D_0 = (\mathrm{int}S)x_0 \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x_0$ para todo $x_0 \in D_0$. Sendo assim, $y \in (\mathrm{int}S)x$, então existe $h \in (\mathrm{int}S)$ tal que $y = hx$

(iii) Como $D_0 \neq \emptyset$, tome $x \in D_0$. Pelo item (i) desta proposição, temos que $D_0 = (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Sabemos que $(\mathrm{int}S)x$ e $(\mathrm{int}S)^{-1}x$ são abertos. Tome $y \in \mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Então existe uma seqüência $(h_nx) \in (\mathrm{int}S)x$ tal que $h_nx \to y$. Como $h_nx \to y$, temos que para qualquer aberto contendo y, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$, implica que h_nx pertence a este aberto. Desta forma, a partir de um certo n_0, $h_nx \in (\mathrm{int}S)^{-1}x$, pois este é um aberto contendo y, ou seja, $h_nx \in (\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x$. Então, $y \in \mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x) = \mathrm{fe}D_0$. Logo,

$$[\mathrm{fe}((\mathrm{int}S)x) \cap (\mathrm{int}S)^{-1}x] \subset \mathrm{fe}D_0$$

Pelo item (ii) da Proposição 1.31, $D \subset (\text{int}S)^{-1}x$. Além disso, $D \subset \text{fe}(Sx) \subset \text{fe}((\text{int}S)x)$. De fato, temos que dado $y \in Sx$, $y = gx$, com $g \in S$, e pelo fato de $x \in D_0$, $x = hx$, com $h \in \text{int}S$, assim $y = ghx$, e como $(gh) \in \text{int}S$, temos que $y \in (\text{int}S)x$, então $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}((\text{int}S)x)$. Logo $D \subset (\text{fe}((\text{int}S)x) \cap (\text{int}S)^{-1}x) \subset \text{fe}D_0$. Assim, $D = \text{fe}D_0 \cap D = \overline{D_0}^D$. Portanto D_0 é denso em D. □

Proposição 1.33 *Com as mesmas hipóteses da Proposição 1.31:*

(i) D_0 é S-invariante em D no seguinte sentido:

se $h \in S, x \in D_0$ e $hx \in D$ então $hx \in D_0$.

(ii) Se $SD \subset D$ ou se $S^{-1}D \subset D$, então $D_0 \neq \emptyset$. No segundo caso, $D_0 = D$.

Demonstração: (i) Tomemos $h \in S$ e $x \in D_0$, então existe $g \in (\text{int}S)$ tal que $gx = x$. Logo $hx = hgx$ e assim, $hx \in (\text{int}S)x$. Temos por hipótese que $hx \in D$. Pelo item (ii) da Proposição 1.31, $D \subset (\text{int}S)^{-1}x$, assim $hx \in (\text{int}S)^{-1}x$. Logo, $hx \in ((\text{int}S)x \cap (\text{int}S)^{-1}x) = D_0$. Portanto, $hx \in D_0$.

(ii) Se $SD \subset D$, então $(\text{int}S)D \subset D$ e conseqüentemente $(\text{int}S)D \cap D \neq \emptyset$. Pelo item (i) da Proposição 1.31, temos que $D_0 = (\text{int}S)D \cap D$, logo temos que $D_0 \neq \emptyset$. Agora, se $S^{-1}D \subset D$, então $(\text{int}S)^{-1}D \subset D$, de fato, para qualquer $h \in S$, temos $h^{-1}x \subset D$, para todo $x \in D$, inclusive para $h \in \text{int}S$, então $(\text{int}S)^{-1}D \subset D$ e assim, $(\text{int}S)^{-1}D \cap D \neq \emptyset$. Tome $x \in (\text{int}S)^{-1}D \cap D$, então existem $h \in \text{int}S$ e $y \in D$ tais que $h^{-1}y = x$, o que implica em $y = hx$. Logo $y \in (\text{int}S)x \subset (\text{int}S)D$ e $y \in D$, o que implica que $y \in (\text{int}S)D \cap D$, logo $D_0 \neq \emptyset$. Fixemos $x \in D$. Temos então que $(\text{int}S)^{-1}x$ é um aberto e está contido em D, pois $(\text{int}S)^{-1}D \subset D$. Assim $(\text{int}S)^{-1}x \cap D \neq \emptyset$. Desta forma,

$$(\text{int}S)^{-1}x = (\text{int}S)^{-1}x \cap D \subset D \subset \text{fe}(Sx).$$

Como $(\text{int}S)^{-1}x$ é aberto, não pode estar contido apenas na fronteira de Sx, então $Sx \cap (\text{int}S)^{-1}x \neq \emptyset$. Assim, existem $g \in S$, $h \in \text{int}S$ tais que $gx = h^{-1}x$, ou seja,

$hgx = x$, com $hg \in (\text{int}S)$. Logo $x \in D_0$, consequentemente $D \subset D_0$. Portanto $D_0 = D$. $\square$

Exemplo 1.34 *Sob as mesmas hipóteses do Exemplo 1.22, vamos encontrar C_0, o conjunto de transitividade de C.*

Como vimos anteriormente, $SC \subset C$, então por (ii) da Proposição 1.33, $C_0 \neq \emptyset$, assim, por (iii) da Proposição 1.32, temos que C_0 é denso em C, logo C_0 intercepta int$C$. *Temos que $\mathbb{P}^2$ é um espaço homogêneo compacto, então por (ii) da Proposição 1.45, temos que $C_0 = S[x]$ para todo $[x] \in C_0$. Tomemos $[x] \in C_0 \cap \text{int}C$. Então $[x] = [(x_1, x_2, x_3)]$ com todas as coordenadas positivas. Portanto,*

$$\begin{aligned} C_0 = S[x] &= \left[\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \right] \\ &= [(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3)] \\ &= \text{int}C. \end{aligned}$$

Definição 1.35 *Se o conjunto de transitividade D_0 de um conjunto controlável D é não vazio então D é dito conjunto controlável efetivo.*

Introduzimos agora, uma relação de ordem entre os conjuntos controláveis. Seja S um semigrupo e denotemos por $\Gamma(S)$ o conjunto de todos os conjuntos controláveis para a ação de S.

Definição 1.36 *Sejam D_1,$D_2 \in \Gamma(S)$. Definimos $D_1 \leq D_2$ se existir $x \in D_1$ tal que* $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$.

Exemplo 1.37 *Seja D o complementar, em $\mathbb{P}^2$, do conjunto controlável C do Exemplo 1.22. Mostraremos, mais adiante, que D é também um conjunto controlável para* $\text{Sl}^+(n, \mathbb{R})$. *Temos que $D \leq C$ com respeito a ordem definida acima. De fato, consideremos uma matriz*

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S$$

e $[x] = [(1,1,-1)] \in D$, *então*

$$\begin{aligned} g[x] &= g[(1,1,-1)] = [g(1,1,-1)] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \in \mathrm{int}C, \end{aligned}$$

ou seja, para tal elemento, $S[x] \cap \mathrm{int}C \neq \emptyset$, *ou seja, temos que* $\mathrm{fe}(S[x]) \cap C \neq \emptyset$, *logo pela Definição 1.36,* $D \leq C$, *mas já sabemos que eles são diferentes, então temos* $D < C$.

Proposição 1.38 *Se* D_1,$D_2 \in \Gamma(S)$ *e* $D_1 \leq D_2$, *então* $D_2 \cap \mathrm{fe}(Sx) \neq \emptyset$ *para todo* $x \in D_1$.

Demonstração: Como $D_1 \leq D_2$, então existe $x_0 \in D_1$ tal que $\mathrm{fe}(Sx_0) \cap D_2 \neq \emptyset$. Seja $y \in D_2 \cap \mathrm{fe}(Sx_0)$. Tome $x \in D_1$ arbitrário. Temos pelo item (ii) da Definição 1.21 que $x_0 \in \mathrm{fe}(Sx)$ e como $y \in \mathrm{fe}(Sx_0)$, temos pelo Lema 1.24 que $y \in \mathrm{fe}(Sx)$. Portanto $D_2 \cap \mathrm{fe}(Sx) \neq \emptyset$, para todo $x \in D_1$. □

Proposição 1.39 *A relação "*$\leq$*" em* $\Gamma(S)$ *é uma relação de ordem parcial.*

Demonstração:

i) A relação "$\leq$" é reflexiva: Se D é um conjunto controlável, então $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$, assim, $D \cap \mathrm{fe}(Sx) \neq \emptyset$. Logo $D \leq D$.

ii) A relação "$\leq$" é transitiva: Sejam D_1,D_2,$D_3 \in \Gamma(S)$ com $D_1 \leq D_2$ e $D_2 \leq D_3$. Então existem $x \in D_1$ e $y \in D_2$ tais que $\mathrm{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$ e $\mathrm{fe}(Sy) \cap D_3 \neq \emptyset$. Tomemos $z \in \mathrm{fe}(Sx) \cap D_2$. Pela proposição anterior $\mathrm{fe}(Sz) \cap D_3 \neq \emptyset$. Mas, $z \in \mathrm{fe}(Sx)$, então seja $y \in \mathrm{fe}(Sz)$, como $z \in \mathrm{fe}(Sx)$, temos que $y \in \mathrm{fe}(Sx)$, o que implica em $\mathrm{fe}(Sz) \subset \mathrm{fe}(Sx)$. Assim $\mathrm{fe}(Sx) \cap D_3 \neq \emptyset$. Logo $D_1 \leq D_3$.

iii) A relação "$\leq$" é anti-simétrica: Sejam D_1,$D_2 \in \Gamma(S)$ e suponhamos que $D_1 \leq D_2$ e $D_2 \leq D_1$. Pela proposição anterior temos que, para todo $x \in D_1$,

$\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$ e, para todo $y \in D_2$, $\text{fe}(Sy) \cap D_1 \neq \emptyset$. Mostraremos que $D_1 \cup D_2$ satisfaz as condições (i) e (ii) da definição de conjunto controlável. Claramente $\text{int}(D_1 \cup D_2) \neq \emptyset$, pois $\text{int}(D_1) \cap \emptyset$. Assim, (i) está satisfeita. Tome $x \in D_1 \cup D_2$, então $x \in D_1$ ou $x \in D_2$. Se $x \in D_1$, então $D_1 \subset \text{fe}(Sx)$ e como $D_1 \leq D_2$ temos que $\text{fe}(Sx) \cap D_2 \neq \emptyset$. Tomemos $y \in D_2 \cap \text{fe}(Sx)$. Então $D_2 \subset \text{fe}(Sy)$. Assim $D_2 \subset \text{fe}(Sy) \subset \text{fe}(Sx)$. Logo $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx)$, para todo $x \in D_1$. Se $x \in D_2$, é mostrado analogamente ao anterior que $D_1 \cup D_2 \subset \text{fe}(Sx)$. Assim $D_1 \cup D_2$ satisfaz (i) e (ii) da Definição 1.21. Como $D_1 \subset D_1 \cup D_2$ e D_1 é maximal, temos que $D_1 = D_1 \cup D_2$. Assim, $D_2 \subset D_1$, mas também pela maximalidade de D_2, temos $D_1 = D_2$ e a prova está concluída. □

Um conjunto de controle maximal é um conjunto $D \in \Gamma(S)$ que satisfaz a seguinte propriedade. Se $C \in \Gamma(S)$ e $D \leq C$ então $C = D$.

Definição 1.40 *Um conjunto controlável invariante para S é um subconjunto não vazio $C \subset M$ satisfazendo:*

i) Para todo $x \in C$, $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C$

ii) C é maximal satisfazendo a propriedade (i).

Exemplo 1.41 *Vamos mostrar que o conjunto C do Exemplo 1.22 é um conjunto controlável invariante para $\text{Sl}^+(3, \mathbb{R})$.*

Já vimos que $C \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in C$. Como $\text{fe}C = C$, temos

$$\text{fe}C \subset \text{fe}(Sx) \text{ para todo } x \in C.$$

Para a inclusão oposta, temos que dado $g \in S$ e $[x] \in C$, então $g[x] \in C$, pois todas as entradas de g são não negativas, assim $S[x] \subset C$ para todo $[x] \in C$ e conseqüentemente, $\text{fe}(S[x]) \subset \text{fe}(C) = C$, para todo $[x] \in C$. Logo, $\text{fe}(S[x]) = \text{fe}(C)$ para todo $[x] \in C$ e como C é fechado temos que C é um conjunto controlável invariante (ver Proposição 1.47).

Como em geral estamos trabalhando com semigrupo de interior não vazio, os próximos resultados nos dão algumas características dos conjuntos controláveis invariantes.

A próxima proposição nos mostra que quando $\text{int}S \neq \emptyset$, temos algumas propriedades topológicas do conjunto controlável invariante para a ação de S.

Proposição 1.42 *Se S é acessível, então todo conjunto controlável invariante para S é fechado. Além disso, se C é um desses conjuntos então* $\text{int}C \neq \emptyset$, $\text{fe}(\text{int}C) = C$.

Demonstração: Sejam C um conjunto controlável invariante e $x \in \text{fe}C$. Tomando $y \in C$, temos que $\text{fe}(Sy) = \text{fe}C$, então $x \in \text{fe}(Sy)$. Pela Proposição 1.29, temos que $S(\text{fe}(Sy)) \subset \text{fe}(Sy)$, então $Sx \subset \text{fe}(Sy) = \text{fe}C$. Como $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$, temos que Sx possui pontos interiores, logo nao pode estar contido apenas na fronteira de C. Assim, $Sx \cap C \neq \emptyset$. Seja então $x^{'} \in (Sx \cap C)$. Temos que

$$\text{fe}C = \text{fe}(Sx^{'}) \subset \text{fe}(Sx) \subset \text{fe}C.$$

Assim, $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C = \text{fe}(\text{fe}C)$, para todo $x \in \text{fe}C$, ou seja, $\text{fe}C$ satisfaz (i) da Definição 1.40 e ainda, $C \subset \text{fe}C$. Como C é maximal em relação a (i) da definição de conjuntos controláveis invariantes, temos que $C = \text{fe}C$, ou seja, C é fechado. Observe também que $Sx \subset \text{fe}C = C$, e como $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$ e é um aberto em C, temos que $\text{int}C \neq \emptyset$.

Agora vamos mostrar que $\text{int}C$ é denso em C.

Sabemos que $C = \text{fe}C$ (pois é fechado) e obviamente $\overline{\text{int}C} \subset \overline{C} = C$. Precisamos apenas mostrar a inclusão contrária. Tomemos $x \in C$. Como $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C = C$, temos que $Sx \subset C$. Daí, $\text{int}Sx \subset Sx \subset C$, então $\text{int}Sx$ é um aberto não vazio contido em C. Assim, dado $sx \in \text{int}Sx$, temos que $\text{int}Sx$ é um aberto contendo sx e contido em C, logo $sx \in \text{int}C$ e portanto

$$\text{int}Sx \subset \text{int}C. \tag{1.1}$$

Mas intSx é denso em Sx (ver Apêndice A de *F. Colonius* e *W. Kliemann* [3]) e Sx é denso em C, pela definição de conjunto controlável invariante (fe$(Sx) = C$). Daí, intSx é denso em C. Portanto

$$\text{fe}C = C = \text{fe}(\text{int}Sx) \subset \text{fe}(\text{int}C),$$

sendo a última inclusão devido a (1.1), concluindo assim, que int$C$ é denso em C. $\square$

A próxima proposição justifica o fato do conjunto C de 1.22, exemplificar tanto um conjunto controlável, quanto um conjunto controlável invariante, é que para S acessível, todo conjunto controlável invariante é também um conjunto controlável.

Proposição 1.43 *Se S é acessível, então todo conjunto controlável invariante para S também é um conjunto controlável para S.*

Demonstração: Seja C um conjunto controlável invariante para a ação de S. Temos que int$C \neq \emptyset$ e C é fechado, pela Proposição 1.42. Logo $C \subsetneqq \text{fe}C = \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in C$. Resta provar a maximalidade de C como conjunto controlável. Suponha que existe D contendo C tal que $D \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$. Então $\text{fe}(Sz) = \text{fe}C \subset \text{fe}D$ para todo $z \in C$.

Considere agora, $z \in D \setminus C$. Tomemos $y \in \text{fe}(Sz)$ e $x \in C$. Como $C \subset D$, temos que $z \in D \subset \text{fe}(Sx)$. Desta forma, $y \in \text{fe}(Sz)$ e $z \in \text{fe}(Sx)$, então $y \in \text{fe}(Sx) = \text{fe}C$. Logo $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}C \subset \text{fe}D$, ou seja, $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}D$ para todo $z \in D$,e como por hipótese temos $D \subset \text{fe}(Sz) \Rightarrow \text{fe}D \subset \text{fe}(Sz)$, então $\text{fe}(Sz) = \text{fe}D$, para todo $z \in D$, logo D satisfaz a condição (i) da Definição 1.40. Mas $C \subset D$ e é maximal como conjunto controlável invariante, portanto $C = D$. $\square$

Proposição 1.44 *Se D é um conjunto controlável invariante para S e S é acessível, então D é maximal com respeito a relação de ordem parcial definida anteriormente.*

Demonstração: Seja D' um conjunto controlável tal que $D \leq D'$. Então, $\mathrm{fe}(Sx) \cap D' \neq \emptyset$ para algum $x \in D$. Como D é um conjunto controlável invariante, temos que $\mathrm{fe}(Sx) = \mathrm{fe}D = D$, a última igualdade vem do fato de S ser acessível. Assim $D \cap D' \neq \emptyset$. Como dois conjuntos controláveis são disjuntos ou são iguais (pela Proposição 1.25), temos que $D = D'$. $\square$

Assim temos a seguinte observação: Com respeito a esta ordem, um elemento de $\Gamma(S)$ é maximal se ele é um conjunto controlável invariante para S e é minimal se ele é S^{-1}-invariante. Uma outra observação é que veremos na Proposição 1.54 um tipo de recíproca para este resultado.

Vejamos agora algumas propriedades do conjunto de transitividade de um conjunto controlável invariante em um espaço homogêneo compacto.

Proposição 1.45 *Suponha que $M = G/L$ seja um espaço homogêneo compacto e seja S um semigrupo de G com interior não vazio. Sejam C um conjunto controlável invariante para a ação de S sobre M e $C_0 = (\mathrm{int}S)C$ o seu conjunto de transitividade. Então:*

(i) $C_0 = \mathrm{int}(Sx)$, *para todo* $x \in C_0$

(ii) $SC_0 \subset C_0 = Sy = (\mathrm{int}S)y$, *para todo* $y \in C_0$

(iii) $\mathrm{fe}C_0 = C$

(iv) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in \mathrm{int}S \text{ com } gx = x\}$

(v) $C_0 = \{x \in C : \exists g \in \mathrm{int}S \text{ com } g^{-1}x \in C\}$

Demonstração:

(i) Como S é acessível, temos pela Proposição 1.42 que C é fechado. Em particular, C é S-invariante (pois $\mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}C = C$, para todo $x \in C$). Assim, $C_0 = (\mathrm{int}S)C \subset C$. Como $\mathrm{fe}(Sy) = \mathrm{fe}C = C$ para todo $y \in C_0$, temos que Sy é denso em C para todo $y \in C_0$. Temos também que $(\mathrm{int}S)^{-1}y$ é um aberto interceptando C, pois se $y \in C_0$, então $y = hx$ com $h \in \text{int}S$ e $x \in C$, assim, $h^{-1}y = x \in C$ e conseqüentemente $(\text{int}S)^{-1}y \cap C \neq \emptyset$. Como Sy é denso em C, temos que $(\text{int}S)^{-1}y \cap Sy \neq \emptyset$. Assim, existe $h \in \text{int}S$ e $g \in S$ tais que $h^{-1}y = gy$, isto mostra que $y \in (\text{int}S)Sy$ e

$$\text{int}(Sy) \subset Sy \subset S((\text{int}S)Sy) \subset (\text{int}S)y \subset \text{int}(Sy).$$

sendo a última inclusão justificada pelo seguinte fato: seja $x \in (\text{int}S)y$, então $x = hy$, com $h \in (\text{int}S)$, assim existe $V \subset S$, vizinhança de h, tal que $Vy \subset Sy$ é vizinhança de hy, logo $hy \in \text{int}(Sy)$, ou seja, $x \in \text{int}(Sy)$. Com as inclusões acima temos que $\text{int}(Sy) = (\text{int}S)y = Sy$, assim $\text{int}(Sy)$ é aberto, S-invariante pois $(\text{int}S)y$ o é e denso em C já que Sy o é. Tomemos x,$y \in C_0$. Temos que $(\text{int}S)^{-1}z \cap C \neq \emptyset$ e Sy é denso em C, então $(\text{int}S)^{-1}z \cap Sy \neq \emptyset$. Tomemos $h \in \text{int}S$ e $g \in S$ tais que $h^{-1}z = gy$, então $z = hgy$ e assim

$$z \in (\text{int}S)Sy \subset (\text{int}S)y \subset \text{int}(Sy) \subset Sy.$$

Logo, $\text{int}(Sz) = Sz \subset Sy = \text{int}(Sy)$.

Analogamente temos que $\text{int}(Sy) \subset \text{int}(Sz)$. Assim $\text{int}(Sz) = \text{int}(Sy)$. Desta forma, dado $z \in C_0$, então $z \in \text{int}(Sy)$, para todo $y \in C_0$ e reciprocamente, dado $z \in \text{int}(Sy)$, então $z \in (\text{int}S)y$, o que implica em $z \in (\text{int}S)C = C_0$. Portanto $C_0 = \text{int}(Sx)$, para todo $x \in C_0$.

(ii) Se $y \in C_0$, já mostramos que $Sy = (\text{int}S)y$, então $Sy \subset (\text{int}S)y \subset (\text{int}S)C$. Logo, $SC_0 \subset C_0$. Por (i), temos que $C_0 = \text{int}(Sy) = (\text{int}S)y = Sy$. Portanto $SC_0 \subset C_0 = Sy = (\text{int}S)y$.

(iii) Dado $x \in C_0$, temos que $C_0 = Sx$, Então $\text{fe}C_0 = \text{fe}(Sx) = \text{fe}C = C$

(iv) Tomemos $x \in C_0$, então $C_0 = \text{int}(Sx) \subset (\text{int}S)x$. Assim, $x \in (\text{int}S)x$. Reciprocamente, se $x \in C$ e $x \in (\text{int}S)x$, então, $x \in (\text{int}S)C = C_0$. Portanto temos a igualdade.

(v) Se $x \in C_0$, então $x = gy$, com $y \in C$ e $g \in \text{int}S$, assim, $g^{-1}x = y \in C$. Agora, se $x \in C$ e $g^{-1}x \in C$, com $g \in (\text{int}S)$, seja $y \in C$ tal que $g^{-1}x = y$, então, temos que $x = gy$, ou seja, $x \in (\text{int}S)C = C_0$. Portanto temos $C_0 = \{x \in C;$ existe $g \in \text{int}S$, com $g^{-1}x \in C\}$. $\square$

Observação 1.46 *Notemos que como estamos trabalhando com semigrupos com pontos interiores então para conjunto controlável invariante seu conjunto de transitividade C_0 é sempre diferente do vazio, ou seja, o conjunto controlável invariante é sempre efetivo.*

O próximo resultado garante que para que um subconjunto fechado $C \subset M$ seja um conjunto controlável invariante, basta que ele satisfaça $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C$, para todo $x \in C$.

Proposição 1.47 *Se um subconjunto não vazio $C \subset M$ satisfaz a condição (i) da definição de conjunto controlável invariante e C é fechado então C é um conjunto controlável invariante para S*

Demonstração: Basta mostrar a maximalidade de C. Suponha então que exista C' satisfazendo a condição (i) da Definição 1.40 tal que $C \subset C'$. Dado $x \in C$, temos que $x \in C'$, e assim, como $\text{fe}(Sx) = \text{fe}C'$, temos que

$$C' \subset \text{fe}C' = \text{fe}(Sx) = \text{fe}C = C.$$

Como já temos que $C \subset C'$, segue que $C' = C$. $\square$

Nem sempre o conjunto controlável invariante é único. Podemos observar isto mais adiante no Exemplo 1.60.

Vejamos um exemplo de conjunto controlável invariante para a ação de um semigrupo associado a campos de vetores:

Exemplo 1.48 *Seja $M = \mathbb{R}^2$ e considere o sistema de controle definido pelo conjunto de campos $\mathcal{V} = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$, onde $X_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, X_3 = -\frac{\partial}{\partial x_2}$ e $X_4 = -x_1 \frac{\partial}{\partial x_1}\Big|_A$, com $A = \{x \in \mathbb{R}^2; x_1 > 0\}$.*

Observemos que as trajetórias dos campos X_i são definidas pelos fluxos $\varphi_i(t, x)$ para $i = 1, 2, 3, 4$, onde

$$\begin{aligned}
\varphi_1(t,x) &= (t + x_1, x_2) \text{ é solução do sistema } \left\{\begin{array}{lcl} x_1' &=& 1 \\ x_2' &=& 0 \end{array}\right. \\
\varphi_2(t,x) &= (x_1, t + x_2) \text{ é solução do sistema } \left\{\begin{array}{lcl} x_1' &=& 0 \\ x_2' &=& 1 \end{array}\right. \\
\varphi_3(t,x) &= (x_1, -t + x_2) \text{ é solução do sistema } \left\{\begin{array}{lcr} x_1' &=& 0 \\ x_2' &=& -1 \end{array}\right. \\
\varphi_4(t,x) &= (x_1 e^{-t}, x_2) \text{ é solução do sistema } \left\{\begin{array}{lcr} x_1' &=& -x_1 \\ x_2' &=& 0 \end{array}\right.
\end{aligned}$$

Notemos que as direções das trajetórias são verticais e horizontais. Através de $\varphi_1(t, x)$ e $\varphi_4(t, x)$ percorremos a direção horizontal da esquerda para a direita e da direita para a esquerda, respectivamente, e através de $\varphi_3(t, x)$ e $\varphi_2(t, x)$ percorremos a direção vertical de cima para baixo e de baixo para cima, respectivamente.

Sabemos que a composição desses fluxos, obtemos um grupo de Lie, e considerando apenas $t \geq 0$ obtemos um semigrupo S agindo em $\mathbb{R}^2$.

Considere

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_1 \geq 0\}.$$

Vamos mostrar que D é um conjunto controlável invariante para a ação de S. De fato, tomemos $x = (x_1, x_2) \in D$ e $y = (y_1, y_2) \in \mathrm{int}D$. Escolhendo $t_i's$ adequados para cada caso ($x_i > y_i$, $x_i < y_i$ ou $x_i = y_i$), podemos encontrar $g = \varphi_i(t_i, x) \circ \varphi_j(t_j, x) \in S$ tal que $gx = y$. Disto nos resulta que $\mathrm{int}D \subset Sx$, para todo $x \in D$. Como $\mathrm{fe}D = D = \mathrm{fe}(\mathrm{int}D)$, obtemos

$$\mathrm{fe}D \subset \mathrm{fe}(Sx), \text{ para todo } x \in D.$$

Notemos ainda que $Sx \subset D$, já que o limite do fluxo $\varphi_4(t, x)$ é o eixo x_2. Logo,

$$\mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}D.$$

Portanto

$$\text{fe}(Sx) = \text{fe}D, \ \textit{para todo } x \in D. \tag{1.2}$$

Agora mostremos que D é maximal com esta propriedade.

Suponhamos que exista $D' \supsetneq D$, tal que D' seja um conjunto controlável invariante para S. Tomemos $y \in (D' - D)$, então $y = (y_1, y_2)$ com $y_1 < 0$. Escolha $x = (x_1, x_2)$ com $x_1 > 0$, temos que $x \in D'$, porém y não pertence a $\text{fe}(Sx)$, então D' não satisfaz a primeira propriedade de conjunto controlável invariante. Logo D é maximal com a propriedade (1.2), e portanto D é um conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{R}^2$.

Temos que o conjunto de transitividade, D_0, é o interior de D, de fato, dados quaisquer dois pontos $x, y \in \text{int}D$ existe $g \in S$ tal que $gx = y$, o que não ocorre com elementos da fronteira, pois se $x \in \text{int}D$ e $y \in \partial D$, então não conseguimos atingir y pela órbita Sx.

Proposição 1.49 *Sejam G um grupo de Lie, S um semigrupo de G com interior não vazio e $M = G/L$ um espaço homogêneo de G. Se $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$, então C é um conjunto controlável invariante para S e é único.*

Demonstração: Como C é a intersecção de fechados, temos que C é fechado. Então pela proposição anterior, basta mostrar que $\text{fe}(Sx) = C$ para todo $x \in C$. Tomemos $y \in C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx)$. Em particular $y \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in C$, assim, $C \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in C$. Agora, seja $y \in \text{fe}(Sz)$ para um z qualquer pertencente a C. Como $z \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in M$, temos que $y \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in M$. Logo,

$$y \in \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) = C,$$

o que implica em $\text{fe}(Sz) \subset C$, para todo $z \in C$. Logo temos que $\text{fe}(Sz) = C = \text{fe}C$ para todo $z \in C$.

Resta provar a unicidade. Como C intercepta o fecho de todas as S-órbitas, então C interceptaria qualquer outro conjunto controlável invariante para a ação de S sobre M. Daí, como dois conjuntos controláveis são disjuntos ou são iguais, temos que C é único. $\square$

No próximo teorema veremos que se a variedade é compacta então podemos mostrar a existência e unicidade do conjunto controlável invariante.

Teorema 1.50 *Se M é uma variedade compacta, então existe ao menos um conjunto controlável invariante para a ação de S sobre M.*

Demonstração: Temos que esse teorema é conseqüência direta do próximo lema. $\square$

Lema 1.51 *Se $N \subset M$ é um subconjunto compacto e invariante sob a ação de S então,* $\mathrm{fe}(Sx)$ *contém um conjunto controlável invariante para todo $x \in N$.*

Demonstração: Fixemos $x \in N$ e consideremos a família

$$\mathfrak{F} = \{\mathrm{fe}(Sy) : \mathrm{fe}(Sy) \subset \mathrm{fe}(Sx)\ , y \in M\}.$$

Temos que $\mathfrak{F}$ é não vazia, pois $\mathrm{fe}(Sx) \in \mathfrak{F}$. Munimos $\mathfrak{F}$ com a relação de ordem parcial dada pela inclusão de conjuntos e tomemos uma cadeia arbitrária $\{\mathrm{fe}(Sy)\}_{y \in I \subset M}$ em $\mathfrak{F}$. Temos que $Sx \subset N$ e $\mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}(N) = N$.

Assim, a cadeia tomada forma uma seqüência de subconjuntos compactos encaixados. Logo, $\bigcap_{y \in I \subset M} \mathrm{fe}(Sy) \neq \emptyset$. Tomando $z \in \bigcap_{y \in I \subset M} \mathrm{fe}(Sy)$, temos que $\mathrm{fe}(Sz) \in \mathfrak{F}$ e $\mathrm{fe}(Sz) \subset \mathrm{fe}(Sy)$ para todo $y \in I$. Logo $\mathrm{fe}(Sz)$ é um limitante inferior da cadeia. Pelo lema de Zorn, $\mathfrak{F}$ possui algum elemento minimal, digamos $C = \mathrm{fe}(Sw)$. Tomando $h \in C$ e $a \in \mathrm{fe}(Sh)$ temos que $a \in \mathrm{fe}(Sh)$ e $h \in \mathrm{fe}(Sw)$, então $a \in \mathrm{fe}(Sw) = C$. Logo $\mathrm{fe}(Sh) \subset C$. Como $\mathrm{fe}(Sh) \in \mathfrak{F}$ e C é minimal em

$\mathfrak{F}$, devemos ter $\text{fe}(Sh) = C = \text{fe}C$, para todo $h \in C$. Portanto C é um conjunto controlável invariante. $\square$

Já na próxima proposição temos o primeiro resultado envolvendo controlabilidade.

Proposição 1.52 *Suponhamos que $C = \bigcap_{x \in M} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$ seja o único conjunto controlável invariante para a ação de S e que exista um conjunto controlável invariante para S^{-1}, digamos C^-, tal que $(\text{int}C) \cap (\text{int}C^-) \neq \emptyset$. Então S age transitivamente em M.*

Demonstração: Temos que C é fechado e também que $Sx \subset \text{fe}(Sx)$, para todo $x \in C$, então $SC \subset \bigcup_{x \in C} \text{fe}(Sx) = \text{fe}C = C$. Daí pelo item (ii) da Proposição 1.33, temos que $C_0 \neq \emptyset$. Se $x \in C_0$, então pelo item (i) da Proposição 1.32, $x \in (\text{int}S)^{-1}x$ e uma vez que $x \in C$, temos pela definição de C que $x \in \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in M$. Assim $x \in (\text{int}S)^{-1}x \cap \text{fe}(Sy)$. Logo, existe uma seqüência $(a_n y)$ em Sy tal que $a_n y \to x \in (\text{int}S)^{-1}x$. Assim existe um número natural n_0 tal que se $n > n_0$. então $a_n y \in (\text{int}S)^{-1}x$. Assim, $a_n y = g^{-1}x$ para algum $g \in (\text{int}S)$, ou seja, $x = g a_n y$, o que significa que se $x \in C_0$ e $y \in M$, então $x \in Sy$. Conseqüentemente, para todo $y \in M$, existe $s \in S$ tal que $sy = x$. Então $s^{-1}x = y$ para todo $y \in M$, logo $S^{-1}x = M$. Pelo item (iii) da Proposição 1.32 C_0 é denso em C. Desta forma $(\text{int}C^-) \cap C_0 \neq \emptyset$. Tomemos $x \in (\text{int}C^-) \cap C_0$. Como $x \in C_0$, temos que $S^{-1}x = M$, e uma vez que $S^{-1}x \subset C^-$ (pois C^- é S^{-1}-invariante) temos que $M \subset C^-$, logo $C^- = M$.

Já que $SC^- \subset M = C^-$, ou seja, $(S^{-1})^{-1}C^- \subset C^-$, temos pelo item (ii) da Proposição 1.33, que $C_0^- = C^- = M$. Assim, $S^{-1}x = M$ para todo $x \in M$, ou seja, dados x,$y \in M$ quaisquer, existe $g \in S$ tal que $g^{-1}x = y$, (ou equivalentemente) $gy = x$.

Portanto S age transitivamente em M. $\square$

Veremos, no exemplo abaixo, que existem variedades onde um semigrupo não possui conjunto controlável invariante.

Exemplo 1.53 *Seja $G = (\mathbb{R}, +)$ e tomemos $S = \mathbb{R}^+$, o semigrupo constituído dos números reais positivos. Considere a ação*

$$\begin{array}{rccc} \eta: & G \times G & \longrightarrow & G \\ & (x,y) & \longmapsto & x+y. \end{array}$$

Em G não existe conjuntos controláveis para a ação de S. De fato, suponda que D seja um conjunto controlável para ação de S, então temos que $D \subset \mathrm{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$. Como $\mathrm{intD} \neq \emptyset$, existe um intervalo aberto e limitado da reta contido em D. Como estamos em $\mathbb{R}$, podemos encontrar o ponto médio m desse intervalo e assim, tomando qualquer x_0 desse intervalo tal que $x_0 > m$, temos que $\mathrm{fe}(Sx_0) = \{y \in \mathbb{R} : y \geq x_0\}$. Assim $D \subset \mathrm{fe}(Sx_0)$, pois no intervalo considerado acima, que está contido em D, temos elementos menores que x_0.

Portanto, não existe conjunto controlável para a ação de S.

Agora veremos que o conjunto controlável invariante em uma variedade compacta é o maximal com relação à ordem definida em 1.36. Notemos que a compacidade é condição essencial para isso.

Proposição 1.54 *Seja M uma variedade compacta e D um conjunto controlável para a ação do semigrupo $S \subset G$. Se D é maximal com respeito a ordem $\leq$, então D é um conjunto controlável invariante.*

Demonstração: Temos que a maximalidade de D como conjunto controlável invariante vem da maximalidade de D como conjunto controlável. De fato, se $C \supseteq D$ satisfaz $\mathrm{fe}(Sx) = \mathrm{fe}C$ para todo $x \in C$, então $C \subset \mathrm{fe}C = \mathrm{fe}(Sx) = \mathrm{fe}D$ para todo $x \in C$. Assim, $\mathrm{fe}(Sx) \cap C \neq \emptyset$ para todo $x \in D$, o que implica em $D \leqq C$. Mas D é um conjunto controlável maximal, logo temos $C = D$.

Resta provar que $\text{fe}(Sx) = \text{fe}D$ para todo $x \in D$. Como D é um conjunto controlável, temos que $D \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$, então $\text{fe}D \subset \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in D$.

Suponha, por absurdo, que exista $x_0 \in D$ tal que $\text{fe}(Sx_0) \not\subseteq \text{fe}D$, e considere $z \in (\text{fe}(Sx_0) - \text{fe}D)$. Temos que $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$. De fato, se $\text{fe}(Sz) \cap D \neq \emptyset$, então tomando $D \cup \{z\}$, temos:

$\triangleright$ $\text{int}(D \cup \{z\}) \neq \emptyset$, pois $\text{int}D \neq \emptyset$.

$\triangleright$ $(D \cup \{z\}) \subset \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in (D \cup \{z\})$. De fato, se $y \in D \cup \{z\}$, então $y \in D$ ou $y = z$.

Se $y \in D$, temos que $D \subset \text{fe}(Sy)$. Além disso, $z \in \text{fe}(Sx_0)$ e $x_0 \in \text{fe}(Sy)$, assim $z \in \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in D$, logo $D \cup \{z\} \subset \text{fe}(Sy)$ para todo $y \in D$. Se $y = z$, então tomemos $a \in \text{fe}(Sz) \cap D$. Assim $x \in \text{fe}(Sa)$ para todo $x \in D$ e $a \in \text{fe}(Sz)$, então $x \in \text{fe}(Sz)$ para todo $x \in D$ e ainda $z \in \text{fe}(Sx_0)$. Como $x_0 \in D$, acabamos de ver que $x_0 \in \text{fe}(Sz)$, então $z \in \text{fe}(Sz)$. Logo, $(D \cup \{z\}) \subset \text{fe}(Sz)$.

Desta forma, $D \cup \{z\}$ satisfaz as condições (i) e (ii) da Definição 1.21. Logo, pela maximalidade de D, $(D \cup \{z\}) = D$, então $z \in D$, o que é uma contradição. Portanto $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$ para todo $z \in (\text{fe}(Sx_0) - \text{fe}D)$. Como M é compacta, temos que $\text{fe}(Sz)$ é compacto e é invariante para a ação de S pela Proposição 1.29. Então, $\text{fe}(Sz)$ contém um conjunto controlável invariante, e portanto controlável, $D^{'}$ que é disjunto de D pois $\text{fe}(Sz) \cap D = \emptyset$. Mas $z \in \text{fe}(Sx_0)$, então $\text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx_0)$ e assim $D^{'} \cap \text{fe}(Sx_0) \neq \emptyset$, com $x_0 \in D$ pois $D^{'} \subset \text{fe}(Sz) \subset \text{fe}(Sx_0)$. Assim, pela Definição 1.36 $D \leq D^{'}$, o que contraria o fato de D ser um conjunto controlável maximal com relação a "$\leq$", pois $D \neq D_{'}$. Portanto, $\text{fe}(Sx) \subset \text{fe}D$ para todo $x \in D$, concluindo assim o desejado. $\square$

Veremos que a noção de projeção é muito importante no estudo de semigrupos neste contexto, pois permite que usemos dados sobre os conjuntos S-controláveis de uma variedade M_1 para obtermos informações sobre os conjuntos S-controláveis de uma variedade M_2 onde M_1 se projeta. Daí surgem questões sobre a relação entre os conjuntos controláveis de duas variedades "ligadas"por uma aplicação canônica. Sendo assim, vamos definir esta aplicação. Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G. Definamos a projeção $\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2$ dada por $gL_1 \longmapsto gL_2$, onde a principal característica é a equivariança $g\pi(x) = \pi(gx)$. De fato, sejam η_1 e η_2, definidas abaixo, a ação de G em G/L_1 e G/L_2, respectivamente

$$\begin{array}{rccc} \eta_1 : & G \times G/L_1 & \rightarrow & G/L_1 \\ & (g, hL_1) & \mapsto & (gh)L_1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \eta_2 : & G \times G/L_2 & \rightarrow & G/L_2 \\ & (g, hL_2) & \mapsto & (gh)L_2 \end{array}$$

Tomemos $hL_1 \in G/L_1$ e $g \in G$, temos que:

$$\eta_2(g, \pi(hL_1)) = \eta_2(g, hL_2) = (gh)L_2 = \pi((gh)L_1) = \pi(\eta_1(g, hL_1)).$$

Portanto π é equivariante.

Para dar continuidade nos resultados, precisamos de alguns resutados da teoria de fibrados. Esses resultados nos garantem o "bom" comportamento das fibras em um espaço quociente da forma G/L, onde L é um subgrupo fechado de G. Mais precisamente, para demonstrar (iii) de 1.57 utilizamos o conceito de seção local, para garantir uma convergência de pontos a partir de uma convergência de fibras. Sendo assim, comecemos definindo fibrado principal.

Definição 1.55 *Sejam P e M variedades diferenciáveis e G um grupo de Lie. Um fibrado principal de classe C^k de espaço total P, espaço base M e grupo estrutural G, consiste das variedades diferenciáveis P e M de classe C^k, do grupo de Lie G e de uma ação à direita*

$$\begin{array}{rccc} \eta : & P \times G & \longrightarrow & P \\ & (p, g) & \longmapsto & pg \end{array}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(i) A ação é livre.

(ii) O espaço das órbitas desta ação é M. Ou seja, existe uma submersão $\pi : P \rightarrow M$

tal que as órbitas de G são os subconjuntos $\pi^{-1}(x)$, denominados fibras.

(iii) P é localmente trivial, isto é, cada ponto $x \in M$ possui uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfo a $U \times G$ no sentido de que existe um difeomorfismo $\psi : \pi^{-1}(U) \to U \times G$ tal que $\psi(u) = (\pi(u), \phi(u))$, onde $\phi : \pi^{-1}(U) \to G$ é uma aplicação que satisfaz: $\phi(ua) = \phi(u)a,\ a \in G$.

Um fibrado principal será denotado por $P(M, G)$ ou simplesmente por P. Observe também que se u é um ponto de $\pi^{-1}(x)$, então $\pi^{-1}(x) = \{ua; a \in G\} = uG$. Assim cada fibra é difeomorfa a G.

Um fibrado de particular importância para nós é o chamado fibrado associado, que definiremos agora.

Seja $P(M, G)$ um fibrado principal e F uma variedade na qual G age à esquerda: $(a, \xi) \in G \times F \to a\xi \in F$. Vamos construir um fibrado $E(M, F, G, P)$ associado a P com fibra tipo F. Na variedade produto $P \times F$ definimos a ação à direita de G como segue: um elemento $a \in G$ aplica $(u, \xi) \in P \times F$ em $(ua, a^{-1}\xi) \in P \times F$. O espaço quociente de $P \times F$ por esta ação do grupo é denotado por $E = P \times_G F$. Uma estrutura diferenciável será introduzida em E depois, e neste momento, E é somente um conjunto. A aplicação $P \times F \to M$ a qual aplica (u, ξ) em $\pi(u)$, induz a aplicação π_E, chamada a projeção de E em M. Para cada $x \in M$, o conjunto $\pi^{-1}(x)$ é chamada a fibra de E sobre x. Todo ponto $x \in M$ tem uma vizinhança U tal que $\pi^{-1}(U)$ é isomorfa a $U \times G$. Identificando $\pi^{-1}(U)$ com $U \times G$, vemos que a ação de G em $\pi^{-1}(U) \times F$ à direita é dada por $(x, a, \xi) \mapsto (x, ab, b^{-1}\xi)$ para $(x, a, \xi) \in U \times G \times F$ e $b \in G$.

Segue que o isomorfismo $\pi^{-1}(U) \approx U \times G$ induz um isomorfismo $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$. Podemos além disso introduzir uma estrutura diferenciável em E requerendo que $\pi^{-1}(U)$ seja uma subvariedade aberta de E a qual é difeomorfa com $U \times F$ sob o isomorfismo $\pi_E^{-1}(U) \approx U \times F$. A projeção π_E é então uma aplicação diferenciável de E em M. Chamamos E ou mais precisamente $E(M, F, G, P)$ o fibrado sobre a base M, com fibra F e grupo G, que está **associado** com o fibrado principal P.

Vamos agora estudar um pouco a seguinte situação particular de fibrado associado que nos será útil a seguir.

Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G. Temos que $\pi : G \to G/L_2$ é um fibrado principal. Consideremos a ação natural de L_2 em G e em L_2/L_1. Assim podemos construir o fibrado associado $E(M, F, G, P)$, onde nesta notação tomamos M como sendo G/L_2, o grupo G tomamos como sendo L_2, P como sendo G e $F = L_2/L_1$, ou seja, $E(G/L_2, L_2/L_1, L_2, G)$. Daí $E = G \times_{L_2} L_2/L_1$ é uma variedade diferenciável e pode-se mostrar que $G \times_{L_2} L_2/L_1$ é difeomorfo à G/L_2. Vamos apenas esboçar uma idéia desta identificação (para maiores detalhes ver Proposição 5.23 em *San Martin* [15]).

Pela proposição 5.23 de [15], $G \times_{L_2} L_2/L_1$ é identificado com G/L_2 da seguinte maneira,

$$gL_1 \in G/L_1 \leftrightarrow g \cdot 1H \in G \times_{L_2} L_2/L_1,$$

já que $1H \in L_2/L_1$. Se $U \times L_2 \approx \pi^{-1}(U)$ é uma trivialização local de G, então obtém-se uma ação à direita de L_1 em $U \times L_2$ que por definição é dada por

$$(z, g)L_1 \in (U \times L_2)/L_1 \mapsto (z, 1) \cdot gL_1 \in (U \times L_2) \times_{L_2} L_2/L_1$$

onde $(z, 1) \cdot gl_1 = (z \cdot gl_1, gl_1) = (z, gl_1)$, sendo a última igualdade vinda do fato de que z é um elemento de G/L_2 e $gl_1 \in L_2$. Do fato de $G(G/L_2, L_2)$ ser um fibrado principal diferenciável, temos que G/L_1 é difeomorfo a $G \times_{L_2} L_2/L_1$. Como $G \times_{L_2} L_2/L_1 \to G/L_2$ é fibrado principal, tem-se a seção local, ou seja, considerando $y \in G/L_2$ e uma vizinhança V_y de y, seja $\tilde{x} \in \pi_E^{-1}(y)$, então existe um difeomorfismo $\sigma : V_y \to \sigma(V_y) \subset \pi_E^{-1}(y)$ que satisfaz: $\sigma(y) = \tilde{x}$ e $\pi_E^{-1}(z) \cap \sigma(V_y)$ é um único ponto para todo $z \in V_y$. Temos que σ é chamado de "seção local". Seja φ o difeomorfismo existente entre G/L_1 e $G \times_{L_2} L_2/L_1$ então temos um difeomorfismo $\tilde{\pi_E}$ entre vizinhanças de G/L_1 e G/L_2 com $\tilde{\pi_E} = \sigma^{-1} \circ \varphi^{-1}$. Desta forma, dado $x \in G/L_1$, para toda vizinhança V_x de x existe vizinhança $V_{\tilde{x}} \subset G \times_{L_2} L_2/L_1$ de $\tilde{x}$

tal que $\varphi(V_{\tilde{x}}) \subset V_x$, e para toda vizinhança $V_{\tilde{x}}$ de $\tilde{x}$ existe vizinhança $V_y \subset G/L_2$ de y tal que $\sigma(V_y) \subset V_{\tilde{x}}$. Então, para toda vizinhança V_x de x existe vizinhança V_y de y tal que $\pi_E^{-1}(V_y) \subset V_x$.

Tudo isso que acabamos de comentar significa que as fibras em G/L_1 são bem comportadas, ou seja, é possível obter uma sequência de pontos convergindo para um $x \in \pi^{-1}(y)$, a partir de uma sequência de fibras convergindo para $\pi^{-1}(y)$.

No próximo resultado veremos uma propriedade muito útil, que conjunto de transitividade projeta em conjunto de transitividade pela projeção equivariante.

Proposição 1.56 *Seja $D \subset G/L_1$ um conjunto controlável efetivo para S e seja D_0 o seu conjunto de transitividade. Então, existe um conjunto de controle efetivo $E \subset G/L_2$ com $\pi(D_0) \subset E_0$.*

Demonstração: Seja $x \in D_0$. Pela Definição 1.30 existe $g \in \text{int}S$ com $gx = x$. Como π é equivariante, temos $g\pi(x) = \pi(gx) = \pi(x)$. Pela proposição anterior, os pontos fixos por g estão no interior de conjuntos controláveis. Assim $\pi(x) \in E$ para algum conjunto controlável E.

Tomemos agora $y \in D_0$. Pelo item (ii) da Proposição 1.32 existem g_1,$g_2 \in \text{int}S$ tais que $g_1 y = x$ e $g_2 x = y$. Logo,

$$g_1\pi(y) = \pi(g_1 y) = \pi(x) \text{ e } g_2\pi(x) = \pi(g_2 x) = \pi(y).$$

Desta forma, $\pi(y) \in \text{fe}(S\pi(x))$ e $\pi(x) \in \text{fe}(S\pi(y))$. Conseqüentemente

$$\text{fe}(S\pi(x)) = \text{fe}(S\pi(y)).$$

Como $\pi(y)$ também pertencente ao interior de algum conjunto controlável, digamos E', devemos ter E,$E' \subset \text{fe}(S\pi(x)) = \text{fe}(S\pi(y))$.

Mas isto implica que $E \cup E'$ satisfaz as duas primeiras condições de conjunto controlável. De fato, $E \cup E' \subset \text{fe}(Sz)$ para todo $z \in E \cup E'$, pois se $z \in E$, então

$\pi(x) \in \text{fe}(Sz)$, logo $E \cup E' \subset \text{fe}(S\pi(x)) \subset \text{fe}(Sz)$, analogamente se $z \in E'$. Então pela maximalidade de E e E' como conjuntos controláveis, temos $E = E'$.

Agora $\pi(D_0) \subset E_0$, pois dado $x \in D_0$, existe $g \in \text{int}S$, com $gx = x$ e deste modo $\pi(x) = \pi(gx) = g\pi(x)$, o que implica em $\pi(x) \in E_0$.

Como $D_0 \neq \emptyset$, temos $\pi(D_0) \neq \emptyset$, logo $E_0 \neq \emptyset$ e portanto, E é de fato efetivo. $\square$

A proposição abaixo complementa a anterior. É um resultado bastante usado em nosso trabalho, principalmente para garantir que o conjunto controlável invariante da variedade flag maximal se projeta sobre o conjunto controlável invariante de uma outra variedade flag.

Proposição 1.57 *Sejam $L_1 \subset L_2$ subgrupos fechados de G com G/L_1 compacto. Consideremos a fibração canônica*

$$\pi : G/L_1 \longrightarrow G/L_2,$$

com $\pi(gL_1) = gL_2$. Temos que:

(i) Se $C_1 \subset G/L_1$ é um conjunto controlável invariante, então $C_2 = \pi(C_1)$ é um conjunto controlável invariante para S em G/L_2.

(ii) Se $C_2 \subset G/L_2$ é um conjunto controlável invariante, então existe um conjunto controlável invariante $C_1 \subset G/L_1$ com $\pi(C_1) = C_2$.

(iii) Se C_1 e C_2 são como em (i) desta proposicão e para algum $y \in C_2$, tivermos $\pi^{-1}(y) \subset C_1$, então $C_1 = \pi^{-1}(C_2)$.

Demonstração: (i) Como G/L_1 é compacto, π é contínua e G/L_2 é Hausdorff, temos que π é uma aplicação fechada.

Para $x \in C_1$ temos que

$$\text{fe}(S\pi(x)) = \text{fe}(\pi(Sx)) = \pi(\text{fe}(Sx)) = \pi(C_1) = C_2 = \text{fe}C_2.$$

a última igualdade vem do fato de C_2 ser fechado, pois é imagem de C_1 que é fechado (pela Proposição 1.42).

Como C_2 é fechado e satisfaz a condição (i) da Definição 1.40, temos que C_2 é um conjunto controlável invariante.

(ii) Dados $x \in \pi^{-1}(C_2)$ e $g \in S$, temos que $\pi(gx) = g\pi(x) \in C_2$, pois C_2 é S-invariante. Assim, $gx \in \pi^{-1}(C_2)$, ou seja, $\pi^{-1}(C_2)$ é S-invariante. Além disso, como C_2 é fechado, $\pi^{-1}(C_2)$ é fechado e está contido em G/L_1 que é compacto, logo $\pi^{-1}(C_2)$ é compacto.

Temos que $\pi^{-1}(C_2)$ é um subconjunto compacto e S-invariante, logo pelo Lema 1.51, ele contém um conjunto controlável invariante, denotemos por C_1. Tomando $x \in C_1$, temos que

$$\pi(C_1) = \pi(\mathrm{fe}(Sx)) = \mathrm{fe}(\pi(Sx)) = \mathrm{fe}(S\pi(x)) = \mathrm{fe}C_2 = C_2.$$

(iii) Seja y conforme estabelecido e tomemos $z \in (C_2)_0$. Por (ii) da Proposição 1.31, existe $g \in (\mathrm{int}S)$ tal que $y = g^{-1}z$. Assim, $z = gy$, e $\pi^{-1}(z) = \pi^{-1}(gy) = g\pi^{-1}(y)$. Por hipótese, $\pi^{-1}(y) \subset C_1$ e, como C_1 é invariante, $\pi^{-1}(z) \subset C_1$. Assim,

$$\pi^{-1}((C_2)_0) \subset C_1. \tag{1.3}$$

Vamos mostrar que $\pi^{-1}(C_2) = C_1$.

Tomemos $x \in \pi^{-1}(\overline{(C_2)_0}) = \pi^{-1}(C_2)$. Então existe $y \in \overline{(C_2)_0}$ tal que $\pi(x) = y$. Como $y \in \overline{(C_2)_0}$, temos que existe uma seqüência (z_n) em $(C_2)_0$ tal que $z_n \to y$. Mas $(\pi^{-1}(z_n)) \subset C_1$ pois $z_n \subset (C_2)_0$ e vale (1.3). Como π é um fibrado, temos que existe uma seção local $\sigma : V_y \to G/L_1$ tal que $\sigma(z) = x$ para algum $z \in V_y \subset C_2$, isto é, existe uma seção local de G/L_1 passando por x. Tomemos a sequência $x_n = \pi^{-1}(y_n) \cap \sigma(V_y)$ em C_1. Notemos que $x_n \to x$ com $\{x_n\} \subset C_1$. Daí como C_1 é fechado, temos que $x \in C_1$. Logo $\pi^{-1}(C_2) \subset C_1$.

A inclusão contrária, $C_1 \subset \pi^{-1}(C_2)$, vem do fato de que $\pi(C_1) = C_2$. Suponha que exista $x \in C_1$ tal que x não pertença à $\pi^{-1}(C_2)$. Então $\pi(x)$ não pertence a C_2 e daí, $\pi(C_1)$ não está contido em C_2, o que é uma contradição. $\square$

Já citamos alguns exemplos de conjuntos controláveis para $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ tendo assumido que este é um semigrupo de interior não vazio. Então, vejamos na observação abaixo que isso realmente acontece.

Observação 1.58 *Um dos semigrupos de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *que aparece várias vezes neste trabalho, é o subconjunto das matrizes reais com entradas não negativas que denotaremos por* $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$. *Temos que este é um semigrupo de interior não vazio em* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$. *De fato, consideremos o cone*

$$O^+ = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0 \textit{ para todo } i = 1,\ldots,n\},$$

ou seja, o octante positivo de $\mathbb{R}^n$. *Mostraremos agora que* $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *é o semigrupo de compressão (o qual definimos na introdução desta dissertação) do cone* O^+, *ou seja,*

$$\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}) = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}); gO^+ \subset O^+\},$$

e mais a frente, no capítulo 2, mostraremos que se S_W *é o semigrupo de compressão de um cone* $W \subset \mathbb{R}^n$ *pontual e gerador, então* S_W *tem interior não vazio. Denotemos por* S_{O^+} *o semigrupo de compressão de* O^+. *Vamos mostrar que*

$$\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}) = S_{O^+}.$$

Tomemos $g \in \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *e* $x \in O^+$. *Como as entradas de* g *são não negativas bem como as coordenadas de* x, *temos que* $gx \in O^+$. *Agora, seja* $h \in S_{O^+}$, *então* $hy \in O^+$ *para todo* $y \in O^+$. *Em particular, vale para os elementos da base canônica* $\{e_1,\ldots,e_n\}$. *Consideremos*

$$h = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

então

$$he_j = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}.$$

Mas $he_j \in O^+$, assim $a_{ij} \geq 0$ para todo $i = 1, \dots, n$. Agora, variando j teremos que $a_{ij} \geq 0$ para todo $i, j = 1, \dots, n$, ou seja, $h \in \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$. Assim, $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ é o semigrupo de compressão de cone O^+.

Vejamos agora, mais alguns exemplos:

Exemplo 1.59 *Seja $G = \mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ e $S = \mathrm{Sl}^+(3, \mathbb{R}) \subset G$. Vimos acima que S é um semigrupo de interior não vazio. Consideremos a ação de $\mathrm{Sl}(3, \mathbb{R})$ em $\mathbb{P}^2$ como no Exemplo 1.22. Vimos ainda, no Exemplo 1.41 que*

$$C = \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{P}^2; x_i \geq 0, i = 1, 2, 3\}.$$

é um conjunto controlável invariante para S.

Mostraremos a seguir que o conjunto complementar de C em $\mathbb{P}^2$, que denotamos em 1.37 por D, é um conjunto controlável para a ação de S. No entanto, D não é um conjunto controlável invariante, pois D é aberto, e como $\mathrm{int}S \neq \emptyset$, os conjuntos controláveis invariantes são fechados, pela Proposição 1.42.

A condição (i) de conjunto controlável é satisfeita, pois D é aberto, e então $\mathrm{int}D \neq \emptyset$.

Devemos mostrar então a condição (ii) da definição de conjunto controlável, isto é, $D \subset \mathrm{fe}(S[x])$ para todo $x \in D$. Assim, sejam os subconjuntos:

$$\begin{aligned} D_1 &= \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{R}P^2; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 < 0 \textit{ e } x_1, x_2 \textit{ não} \\ &\qquad \textit{simultaneamente nulos}\} \\ D_2 &= \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{R}P^2; x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 \leq 0\} \\ D_3 &= \{[(x_1, x_2, x_3)] \in \mathbb{R}P^2; x_1 > 0, x_2 < 0, x_3 > 0\} \end{aligned}$$

Temos que $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$. *Vejamos separadamente a condição (ii) de conjunto controlável.*

Sejam $[x] = [(x_1, x_2, x_3)], [y] = [(y_1, y_2, y_3)] \in D_2$. *Se* $[x]$ *pertence a* $(D_2 - \mathrm{int}D_2)$, *então* $[x] = [(x_1, x_2, 0)]$, *com* $x_1 > 0$ *e* $x_2 < 0$. *Consideremos o elemento*

$$g = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & \frac{y_3}{x_2} & \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \end{pmatrix} \in S.$$

Temos que

$$g[x] = \left[\begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & \frac{y_3}{x_2} & \frac{x_1 x_2}{y_1 y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = [(y_1, y_2, y_3)] = [y]$$

como $[y]$ *é arbitrário, temos que* $D_2 \subset S[x]$ *para todo* $x \in (D_2 - \mathrm{int}D_2)$, *o que implica em* $D_2 \subset \mathrm{fe}(Sx)$ *para todo* $x \in (D_2 - \mathrm{int}D_2)$.

Agora tomando quaisquer elementos $[x], [y] \in D_2$ *que não pertençam a fronteira podemos considerar* g *da seguinte forma:*

$$g = \frac{x_1 x_2 x_3}{y_1 y_2 y_3} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{y_2}{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{y_3}{x_3} \end{pmatrix} \in S,$$

e assim teremos $g[x] = [y]$, *ou seja,* $\mathrm{int}D_2 \subset S[x]$ *para todo* $x \in \mathrm{int}D_2$. *Assim* $D_2 = \overline{\mathrm{int}D_2} \subset \mathrm{fe}(Sx)$ *para todo* $[x] \in \mathrm{int}D_2$.

Podemos então garantir que $D_2 \subset \mathrm{fe}(Sx)$ *para todo* $x \in D_2$.

Observemos que embora a propriedade (ii) da Definição 1.21 seja satisfeita, D_2 *não é um conjunto controlável. De fato,* $D_2 \subset D$ *e mostraremos que* D *também satisfaz a propriedade (ii).*

Seguindo o mesmo raciocínio podemos mostrar que D_1 *e* D_3 *também satisfazem à esta propriedade de* D_2, *basta tomar* g *como acima. Vamos mostrar que é possível "passar" de qualquer subconjunto desses para outro pela ação de* S.

Se $[x_1] = [(1, 1, -1)] \in D_1$ *então considere o elemento* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S$. *Assim,* $g[x_1] = [(1, -1, -2)] \in D_2$.

Se $[x_2] = [(1,-1,-2)] \in D_2$ *então escolha* $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in S$. *Assim* $g[x_2] = [(1,-1,1)] = [x_3] \in D_3$.

Como vimos D_2 *satisfaz a condição (ii) da Definição 1.21 e o mesmo acontece com os conjuntos* D_1 *e* D_3.

Como $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ *temos que* D *satisfaz a condição (ii) da Definição 1.21. De fato, tomemos* $[x] \in D$, *então* $[x] \in D_1$ *ou* $[x] \in D_2$ *ou* $[x] \in D_3$. *Suponha que* $[x] \in D_1$, *então*

$$D_1 \subset \mathrm{fe}S[x].$$

Considerando $[x_1], [x_2]$ *e* $[x_3]$ *como acima e usando a Proposição 1.29, temos:*

$$\begin{array}{lll} [x_1] \in \mathrm{fe}(S[x]) & \textit{então} & S[x_1] \subset \mathrm{fe}(S[x]) \textit{ o que implica em } \mathrm{fe}(S[x_1]) \subset \mathrm{fe}(S[x]); \\ [x_2] \in \mathrm{fe}(S[x_1]) & \textit{então} & \mathrm{fe}(S[x_2]) \subset \mathrm{fe}(S[x_1]) \textit{ e} \\ [x_3] \in \mathrm{fe}(S[x_2]) & \textit{então} & \mathrm{fe}(S[x_3]) \subset \mathrm{fe}(S[x_2]). \end{array}$$

Assim,

$$\begin{array}{c} D_2 \subset \mathrm{fe}(S[x_2]) \subset \mathrm{fe}(S[x_1]) \subset \mathrm{fe}(S[x]) \textit{ e} \\ D_3 \subset \mathrm{fe}(S[x_3]) \subset \mathrm{fe}(S[x_2]) \subset \mathrm{fe}(S[x]), \end{array}$$

ou seja, $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \subset \mathrm{fe}(S[x])$ *para todo* $[x] \in D_1$, *é feito analogamente se* $[x] \in D_2$ *ou* $[x] \in D_3$.

Logo D *satisfaz a condição (ii) da definição de conjunto controlável.*

Por fim temos que o conjunto D *é maximal para as propriedades (i) e (ii) da Definição 1.21. De fato,* D *é o conjunto complementar do conjunto controlável invariante* C *e pela Proposição 1.25 segue que* D *é maximal e portanto é um conjunto controlável.*

Consideremos uma matriz

$$g = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in S$$

e $[x] = [(1,1,-1)] \in D$, *então*

$$\begin{aligned} g[x] &= g[(1,1,-1)] = [g(1,1,-1)] \\ &= \left[\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in \mathrm{int}C, \end{aligned}$$

ou seja, para tal elemento, $S[x] \cap \mathrm{int}C \neq \emptyset$ *o que implica em* $\mathrm{fe}(S[x]) \neq \mathrm{fe}D$. *Portanto* D *não é um conjunto controlável invariante.*

Vejamos um exemplo de que o conjunto controlável invariante nem sempre é único.

Exemplo 1.60 *Ainda com* $G = \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *e* $S = \mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$, *tomemos a variedade* $M = S^{n-1}$ *considerada como o conjunto de raios em* $\mathbb{R}^n$ *começando na origem, ou seja, dado um vetor* $v \in S^{n-1}$, *qualquer múltiplo positivo de* v, λv, *com* $\lambda > 0$, *representa o mesmo elemento.*

Podemos verificar, usando o exemplo 1.22, que $C^+ = O^+$, *isto é, a parte de* S^{n-1} *contida no octante positivo, é um conjunto controlável invariante para* S. *De fato, como já vimos,* $SC^+ \subset C^+$, *então*

$$\mathrm{fe}(Sx) \subset \mathrm{fe}C^+ = C^+ \text{ para todo } x \in C^+.$$

Por outro lado, tomemos $x, y \in \mathrm{int}O^+$. *Então como no exemplo 1.22, existe* $g \in S$ *tal que* $gx = \lambda y$, *com* $\lambda > 0$. *Assim, como estamos considerando* $\lambda y = y$ *em* S^{n-1} *temos que* $gx = y$. *Logo,* $\mathrm{int}C^+ \subset \mathrm{fe}(Sx)$, *para todo* $x \in \mathrm{int}C^+$.

Temos também que para $x \in (C^+ - \mathrm{int}C^+)$, *existe* $g \in S$ *tal que* $gx \in \mathrm{int}C^+$ *e como anteriormente, existe* $h \in S$ *tal que* $h(gx) = y$. *Então,* $\mathrm{int}C^+ \subset \mathrm{fe}(Sx)$, *para todo* $x \in C^+$, *o que implica em*

$$\mathrm{fe}C^+ = \mathrm{fe}(\mathrm{int}C^+) \subset \mathrm{fe}(Sx), \text{ para todo } x \in C^+.$$

Logo,

$$\mathrm{fe}C^+ = \mathrm{fe}(Sx), \text{ para todo } x \in C^+.$$

e como C^+ é fechado, temos pela Proposição 1.47, que C^+ é um conjunto controlável invariante para $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *em* S^{n-1}.

Similarmente mostra-se que

$$C^- = \{(x_1,\ldots,x_n) \in S^{n-1}; x_i \leq 0, \ \ com\ i = 1,\ldots n\}$$

é também um conjunto controlável invariante para S em S^{n-1}, pois já que temos $g \in S$ tal que $gx = y$, para $x \in C^+$ e $y \in \mathrm{int}C^+$, temos que $g(-x) = -y$, ou seja, vale para os elementos de C^-.

Agora seja $\pi : S^{n-1} \to \mathbb{P}^{n-1}$ a aplicação que identifica as antípodas. Temos que

$$C_{\Theta_{\mathbb{P}}} = \pi(C^+) = \pi(C^-)$$

é o único conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{P}^{n-1}$. Desta forma temos que C^+ e C^- são os únicos conjuntos controláveis invariantes para S em S^{n-1}. De fato, suponhamos que exista $D \subset S^{n-1}$ um conjunto controlável invariante para S, então $\pi(D)$ é um conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{P}^{n-1}$, mas $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ é o único, logo $\pi(D) = C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ e portanto $D = C^+$ ou $D = C^-$.

Observação 1.61 *Os resultados apresentados no Exemplo 1.59 generalizam-se para $\mathbb{P}^{n-1}$. O octante com todas as coordenadas não negativas é um conjunto controlável invariante para a ação de* $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *em $\mathbb{P}^{n-1}$ e o seu complementar é o outro conjunto controlável (não invariante).*

Porém, não vale, em geral, para outras variedades, por exemplo em 1.60, temos para S^{n-1} dois conjuntos controláveis invariantes e um não invariante.

O próximo exemplo mostra que o conjunto controlável invariante para $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ na variedade flag maximal é imagem inversa do conjunto controlável invariante para $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ no projetivo, via aplicação projeção.

Exemplo 1.62 *Seja S o semigrupo de matrizes com entradas positivas em $Sl(n,\mathbb{R})$. Através do Exemplo 1.59, notamos que o único S-i.c.s, dito $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, no espaço projetivo é o conjunto correspondendo ao octante positivo em $\mathbb{R}^n - \{0\}$.*

Seja C o conjunto controlável invariante para S na variedade flag maximal $\mathbb{F}^n(1,\ldots,n-1)$. Temos que $\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = C$, onde $\pi : \mathbb{F}^n(1,\ldots,n-1) \to \mathbb{R}P^{n-1}$ é a fibração canônica.

Para ver isto, denotamos por b_β o flag gerado pelo conjunto linearmente independente $\beta = \{v_1,\ldots,v_{n-1}\}$, isto é, $b_\beta = (V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1})$, onde $V_i =< v_1,\ldots,v_i >, i = 1,\ldots,n-1$.

Seja $v_{i1},\ldots,v_{in}$, as coordenadas de v_i em relação à base canônica de $\mathbb{R}^n$ e considere o conjunto

$$D = \{b_\beta; \beta = \{v_1,\ldots,v_{n-1}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ é l.i. com } v_{ij} \geq 0 \text{ para todo i,j }\}.$$

Temos que

$$\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = \{(V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1}) \text{ tal que } V_1 =< v_1 >, \text{ com } v_{1j} \geq 0\}.$$

Vamos mostrar que $\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = D$.

Já que $V_1 \subset V_2$, existe v_2 com coordenadas não negativas tal que $\{v_1, v_2\}$ é base para V_2. Procedendo desta forma, chegamos que $V_i =< v_1,\ldots,v_i >$, onde as coordenadas dos $v_i's$ são não negativas, o que implica em $\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) \subset D$. Temos ainda que se $b_\beta \in D$, então V_1 é gerado por algum v_1 com coordenadas não negativas, assim $b_\beta \in \pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}})$, já que $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ é o conjunto correspondente ao octante positivo de $\mathbb{R}^n - \{0\}$. Logo $D \subset \pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}})$ o que nos resulta $\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = D$.

Como $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ é fechado, e $D = \pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}})$, temos que D é fechado, e já que a variedade $\mathbb{F}^n(1,\ldots,n-1)$ é compacta, temos que D é compacto.

Vamos verificar que $C = D$.

Notemos que $gb_\beta = b_{g\beta}$, com $g \in Sl(n,\mathbb{R})$ e $g\beta = \{gv_1,\ldots,gv_{n-1}\}$. De fato, *como* $V_i =< v_1, \ldots, v_i >$ *temos que* $gV_i =< gv_1, \ldots, gv_i >$, *assim*

$$gb_\beta = (gV_1 \subset gV_2 \subset \ldots \subset gV_{n-1}) = b_{g\beta}.$$

Assim temos que se $b_\beta \in D$, *então* $b_{g\beta} \in D$, *para todo* $g \in S$ *(pois os vetores de* g_β *continuarão tendo coordenadas positivas), então* $gb_\beta \in D$. *Desta forma temos que* D *é* S*-invariante. Como* D *é compacto, então ele contém um* S*-i.c.s e como este é único em* $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$, *temos* $C \subset D$.

Por outro lado, denotemos por $\mathcal{C} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^n$ *e seja* b_0 *o flag gerado por ela. Então* $b_0 \in C$, *pois sabemos que para* b *em um subconjunto aberto e denso de* $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$, *temos que* $b_0 = \lim h^k b$ *quando* $k \to \infty$, *onde* $h = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, *com* $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$, *ou seja,*

$$b_0 \in \bigcap_{x \in \mathbb{F}^n(1,\ldots,n-1)} \mathrm{fe}(Sx) = C.$$

Vamos mostrar usando esses fatos que $\mathrm{int}D \subset C$.

Pegue $\beta = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ *com coordenadas positivas (em relação à base canonica,* $v_i = (v_{1i}, \ldots, v_{ni})$*), então* $b_\beta \in \mathrm{int}D$, *e escolha* w *no octante positivo tal que* $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, w\}$ *é uma base orientada positivamente com relação à base canônica. Então a matriz*

$$g' = \begin{pmatrix} v_{11} & \ldots & v_{1i} & \ldots & w_1 \\ v_{21} & \ldots & v_{2i} & \ldots & w_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \ldots & v_{ni} & \ldots & w_n \end{pmatrix} = (v_1, \ldots, v_{n-1}, w)$$

tem entradas positivas e determinante positivo.

Sendo $g = ((\mathrm{det}g')^{-1}v_1, v_2, \ldots, v_{n-1}, w)$, *temos que* $\mathrm{det}g = (\mathrm{det}g')^{-1}\mathrm{det}g' = 1$. *Assim* $g \in S$

Como b_0 *é o flag gerado pela base canônica, ou seja,*

$$b_0 = (< e_1 > \subset < e_1, e_2 > \subset \ldots \subset < e_1, \ldots, e_{n-1} >)$$

então,

$$\begin{aligned} gb_0 &= (< ge_1 > \subset < ge_1, ge_2 > \subset \ldots \subset < ge_1, \ldots, ge_{n-1} >) \\ &= (< (\det g')v_1 > \subset < (\det g')v_1, v_2 > \subset \ldots \subset < (\det g')v_1, \ldots, v_{n-1} >) \\ &= (< v_1 > \subset < v_1, v_2 > \subset \ldots \subset < vi, \ldots, v_{n-1} >) = b_\beta. \end{aligned}$$

Como $b_0 \in C$ e C é S-invariante, temos que $gb_0 \in C$, logo $b_\beta \in C$. O que mostra que $\mathrm{int}D \subset C$.

Vamos mostrar que $\mathrm{int}D$ *é denso em D, e daí teremos que*

$$D = \overline{(\mathrm{int}D)} \subset \overline{C} = C.$$

De fato, tomemos $b_\beta \in D$, então $\beta = \{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$, com coordenadas de cada v_i não negativas, $v_{ij} \geq 0$. Temos que uma vizinhança de b_β é da seguinte forma:

$$U = U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1}$$

onde cada U_i é um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ que é vizinhança do subespaço gerado por v_i.

Temos que qualquer vizinhança de v_i contém u_i cujas coordenadas u_{ij} são positivas (pois para toda vizinhança U_{ij} de v_{ij} em $\mathbb{R}$ existe $u_{ij} \in U_{ij}$ com $u_{ij} > 0$), desta forma, qualquer vizinhança do subespaço gerado por v_i contém um subespaço gerado por u_i descrito acima. Podemos desta forma encontrar um subconjunto $\gamma = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ l.i, de coordenadas positivas, ou seja, $b_\gamma \in$ $\mathrm{int}D$, *tal que b_γ pertença à vizinhança de b_β.*

Para mostrar isso, vamos construir uma vizinhança de b_β contida em U, contendo um elemento da forma de b_γ citado acima.

É possível tomar W_1 uma vizinhança de v_1 em $\mathbb{R}^n$ e W_2 uma vizinhança de v_2 em $\mathbb{R}^n$ tal que

$$X_2 = \{\pi \subset \mathbb{R}^n \text{ tal que } \pi = \mathrm{ger}\{v, w\}, \text{ com } v \in W_1 \text{ e } w \in W_2\}$$

é uma vizinhança de $V_2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ *contida em* U_2*. Temos ainda que* X_2 *contém um elemento* $\tilde{\pi}$ *de forma que* $\tilde{\pi} = \mathrm{ger}\{u_1\}$*, onde* u_1 *e* u_2 *tem coordenadas estritamente positivas.*

Podemos também tomar W_3 *vizinhança de* v_3 *em* $\mathbb{R}^n$ *tal que*

$$X_3 = \{\Gamma \subset \mathbb{R}^n \ \textit{tal que}\ \Gamma = \mathrm{ger}\{\pi, z\},\ \textit{com}\ \pi \in X_2\ \textit{e}\ z \in W_3\}$$

é uma vizinhança de $V_3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ *contida em* U_3*.*

Procedendo assim, podemos encontrar uma vizinhança de b_β *da forma*

$$(X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{n-1}) \subset (U_1 \subset U_2 \subset \ldots \subset U_{n-1})$$

que contém um elemento b_γ*, pois cada vizinhança* W_i *de* v_i *contém um vetor* u_i *com coordenadas todas positivas.*

Logo $\mathrm{int}D$ *é denso em* D*.*

Desta forma temos que $C = D$ *e portanto,*

$$\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = C.$$

O próximo exemplo nos mostra que no espaço projetivo o conjunto controlável invariante para $(\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R}))^{-1}$ complementa o conjunto controlável invariante para $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$. Mas veremos que não acontece nas variedades flag em geral.

Exemplo 1.63 *O conjunto controlável invariante para* $S^{-1} = \{g^{-1}; g \in \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})\}$ *em* $\mathbb{P}^{n-1}$*, o qual denotaremos por* $C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$*, é o complementar do interior de* $\mathbb{P}O^+$*, o subconjunto de* $\mathbb{P}^{n-1}$ *correspondente ao octante positivo na aplicação canônica* $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$*, o qual sabemos ser o conjunto controlável invariante para* $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ *em* $\mathbb{P}^{n-1}$*, que denotaremos por* $C(S, \mathbb{P}^{n-1})$*, ou seja,*

$$C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1}) = (\mathrm{int}C(S, \mathbb{P}^{n-1}))^c.$$

Denotemos por $[v]$ *a classe de* $v \in \mathbb{R}^n - \{0\}$ *em* $\mathbb{P}^{n-1}$ *e seja* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *a base canônica de* $\mathbb{R}^n$*.*

Começamos notando que $[e_i] \in C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$. *De fato, por exemplo para* $i = 1$, *tomemos* $H = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ *com* $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 0$ *e* $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$. *Então*

$$\exp(tH) = \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \in S \cap S^{-1},$$

pois $e^{t\lambda_1} > 0$, *para todo* $t \in \mathbb{R}$ *e* $(e^{t\lambda_1})^{-1} = e^{-t\lambda_1} > 0$.

Consideremos $\Omega = \{[(x_1, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^{n-1}; x_1 > 0\}$, *temos que este subconjunto é aberto e denso em* $\mathbb{P}^{n-1}$. *Notemos que* $\lim\limits_{t\to\infty}(\exp(tH))[x] = [e_1]$ *para todo* $x \in \Omega$. *Com efeito, seja* $[x] = [(x_1, \ldots, x_n)] \in \Omega$, *então*

$$\begin{aligned} \exp(tH)[x] &= \begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{t\lambda_n} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} e^{t\lambda_1} x_1 \\ \vdots \\ e^{t\lambda_n} x_n \end{pmatrix}\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \frac{e^{t\lambda_n}}{e^{t\lambda_1}} x_n \end{pmatrix}\right], \end{aligned}$$

então

$$\lim_{t\to\infty}(\exp(tH))[x] = \lim_{t\to\infty} \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \frac{e^{t\lambda_n}}{e^{t\lambda_1}} x_n \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}\right] = [e_1].$$

Isto mostra que $[e_1] \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$, *para todo* $x \in \Omega$. *A partir disso, como* $\mathrm{int} S^{-1} \neq \emptyset$, *conseguimos mostrar que* $[e_1] \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$, *para todo* $x \in \mathbb{P}^{n-1}$, *pois dado* x *na fronteira de* Ω *temos que* $S^{-1}x$ *tem interior não vazio em* $\mathbb{P}^{n-1}$. *Logo* $S^{-1}x$ *intercepta* Ω, *daí se* $x_0 \in S^{-1}x \cap \Omega$, *temos que* $[e_1] \in \mathrm{fe}(S^{-1}x_0)$ *e* $x_0 \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$, *então pelo Lema 1.24,* $[e_1] \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$. *Portanto*

$$[e_1] \in \bigcap_{x \in \mathbb{P}^{n-1}} \mathrm{fe}(S^{-1}x) = C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1}).$$

Aplicando argumento similar para os outros elementos da base encontramos que $[e_i] \in C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$ *para todo* $i = 1, \ldots, n$.

Agora seja A o grupo de matrizes diagonais em $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$. *Ele tem* 2^{n-1} *órbitas abertas em* $\mathbb{P}^{n-1}$ *que correspondem ao interior dos octantes. Temos que sua união é densa em* $\mathbb{P}^{n-1}$.

Como $A \subset S^{-1}$, *então* $C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$ *é uma união de octantes pois caso contrário teríamos apenas partes de octantes formando o conjunto controlável invariante, o que não pode acontecer, já que a órbita de* A *atinge todo o interior do octante.*

Vamos estabelecer algumas notações que utilizaremos a partir de agora.

O^{n-1} *e* O^n *representam algum octante de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *e algum octante de* $\mathbb{R}^n$, *respectivamente.* $(O^{n-1})^+ = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}; x_i \geq 0$ *para todo* $i = 1, \ldots, n-1\}$ *representa um octante positivo de* $\mathbb{R}^{n-1}$ *e* $(O^n)^+$ *o octante positivo de* $\mathbb{R}^n$.

Desta forma afirmamos que: Se para qualquer octante $O^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, *a menos de* $(O^{n-1})^+$, *existem* $g \in S^{-1}$ *e* $x \in O^{n-1}$ *tal que* $ge_1 = v_x$ *onde* $v_x = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, *então vale o exemplo.*

Para começarmos a demonstração da afirmação, precisamos da seguinte observação. O conjunto $\sigma = \{[v_x] \in \mathbb{P}^{n-1}; x \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ *é aberto e denso em* $\mathbb{P}^{n-1}$. *Dai notamos que* σ *encontra todo octante de* $\mathbb{P}^{n-1}$.

Fixemos um octante qualquer $O^n \subset \mathbb{R}^n$ *com* $O^n \neq (O^n)^+$ *e consideremos* $[y] \in \mathrm{int}([O^n])$. *Como* σ *é denso no espaço projetivo e* $[y]$ *está no interior do octante, podemos encontrar um representante para* $[y]$ *em* σ, *ou seja, podemos encontrar* $[v_x]$ *tal que*

$$[y] = [v_x] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \right], \text{ com } x \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Tomemos o octante $O^{n-1} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ *que contém tal* x.

Pela hipótese da afirmação existem $g \in S^{-1}$ *e* $x \in O^{n-1}$ *tal que* $ge_1 = v_x$. *Temos ainda que existe* $h \in A \subset S^{-1}$ *tal que* $h[v_x] = [y]$ *pois* A *é transitivo em cada octante de* $\mathbb{R}^n$. *Então* $[y] \in \mathrm{fe}(S^{-1}[v_x])$ *e* $[v_x] \in \mathrm{fe}(S^{-1}[e_1])$, *daí pelo Lema 1.24,* $[y] \in \mathrm{fe}(S^{-1}[e_1])$. *Como* $[y] \in \mathrm{fe}(S^{-1}[e_1])$ *e* $[e_1] \in \mathrm{fe}(S^{-1}x)$, *para todo* $x \in \mathbb{P}^{n-1}$ *temos* *que*

$$[y] \in \bigcap_{x \in \mathbb{P}^{n-1}} \mathrm{fe}(S^{-1}x) = C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1}).$$

Disso e do fato, já mostrado, que $[e_i] \in C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$ *temos que fica demonstrada a afirmação.*

Portanto resta-nos mostrar que para qualquer octante $O^{n-1} \in \mathbb{R}^n$ *a menos do* $(O^{n-1})^+$ *existem* $g \in S^{-1}$ *e* $x \in O^{n-1}$ *tais que* $ge_1 = v_x$.

Isto é feito por indução sobre o número $i = 0, \ldots, n-2$ *de entradas positivas dos elementos de* O^{n-1}.

Para $i = 0$, *tomemos* $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ *com todas as entradas estritamente negativas. Então*

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \in S^{-1}, \ \textit{pois } g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -x & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R}).$$

Assim

$$ge_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} = v_x.$$

Suponhamos que existam $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ *tal que suas entradas sejam estritamente positivas, a menos de duas, ditas* x_r *e* x_s *que são negativas e* $g \in S^{-1}$ *tais que* $ge_1 = v_x$.

Agora provaremos a tese de indução.

Para $k, l = 1, \ldots, n$, *seja* E_{kl} *o elemento canônico das matrizes* $n \times n$, *ou seja, a entrada* (k, l) *é* 1 *e as demais são zeros.*

Temos que

$$(1 + aE_{kl})^{-1} = 1 - aE_{kl}, k \neq l$$

Desta forma, $g_1 = (1 + aE_{kl}) \in S^{-1}$ *se* $a \leq 0$, *pois* $(1 - aE_{kl}) \in \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ *é o inverso de* g_{1}.

Tomando x como antes e $g_1 = (1 + aE_{r+1,s+1})$, temos que

$$g_1 v_x = (1 + aE_{r+1,s+1})v_x = (1 + aE_{r+1,s+1}) \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \vdots \\ x_s \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_r + ax_s \\ \vdots \\ x_s \\ \vdots \\ x_{n-1} \end{pmatrix} = v_y,$$

onde as entradas de y são as mesmas de x a menos da r-ésima a qual é $x_r + ax_s$. Já que $x_r, x_s < 0$ existe $a < 0$ tal que $x_r + ax_s > 0$.

Assim existe $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ com apenas uma entrada negativa, e $h = (g_1 g) \in S^{-1}$ tal que $he_1 = v_y$, concluindo a tese.

Agora sim veremos que o fato ocorrido no exemplo anterior não é regra geral.

Exemplo 1.64 *Sejam $O^+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0,\ \text{com}\ i = 1, \ldots, n\}$, $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ o semigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com entradas não negativas, $\mathbb{P}O^+$, $C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$, $C(S, \mathbb{P}^{n-1})$ definidos no exemplo acima e consideremos a aplicação π como sendo a projeção de $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$ em $\mathbb{P}^{n-1}$ dada por $\pi((V_1 \subset \ldots \subset V_{n-1})) = (V_1)$.*

Contrário ao caso bidimensional, temos que o conjunto controlável invariante para S^{-1} em $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$, para $n \geq 3$, o qual denotaremos por $C(S^{-1})$, não é o fecho do complementar do conjunto controlável invariante para S, o qual denotaremos por $C(S)$.

Para ver isso, tomemos $x \in (\mathbb{P}O^+)^c \subset (\mathrm{int}\mathbb{P}O^+)^c = C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$. Notemos que

$$\pi^{-1}(x) = \{x \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1};\ \textit{onde}\ V_{i=1,\ldots,n-1} \textit{são os subespaços}$$
$$\textit{i-dimensionais satisfazendo as inclusões anteriores}\ \}$$

é diferente de $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$.

É claro que existe um subespaço bidimensional V_2 *contendo* x *tal que* $V_2 \cap O^+ = \emptyset$. *Se* $V_2 \cap O^+ = \emptyset$, *então* $S^{-1}V_2 \cap O^+ = \emptyset$, *pois* $[V_2] \subset C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$. *Alias isto vale para os* $V_i's$ *que não interceptam o octante positivo.*

Assim, existem flags da forma $b = (x \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1})$ *tais que* V_i, $i = 2, \ldots, n-1$ *não interceptam* O^+ *e tal que* $S^{-1}b \cap O^+ = \emptyset$, *ou seja, os subespaços encaixados que formam* $s^{-1}b$, *com* $s \in S$, *não interceptam o octante positivo. Chame de* D *o subconjunto de* $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$ *formado por elementos do tipo*

$$(x \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1})$$

com $V_i \cap O^+ = \emptyset$ *e* $x \in (\mathbb{P}O^+)^c$.

Temos que $S^{-1}D \cap O^+ = \emptyset$. *De fato, como* $S^{-1}V_i \cap O^+ = \emptyset$, *e como* $S^{-1}x \cap O^+ = \emptyset$, *pois* $x \in C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})$, *temos que* $S^{-1}D \cap O^+ \neq \emptyset$, *e mais* $S^{-1}D \subset D$.

Notemos que $\pi^{-1}(\mathbb{P}O^+)$, *o conjunto controlável invariante para* S *na variedade flag* $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$ *(ver Exemplo 1.62), é o conjunto*

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1}); V_1 \in \mathbb{P}O^+\}$$

e $(\pi^{-1}(\mathbb{P}O^+))^c$ *é o conjunto*

$$\{(V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1}); V_1 \notin \mathbb{P}O^+\}$$

Consideremos $w = \alpha e_1 + \alpha e_2 + \ldots + \alpha e_n$ *e* $\widetilde{w} = -\alpha e_1 - \alpha e_2 - \ldots + \alpha e_n$, *com* $\alpha > 0$. *Tomemos o subespaço* W_2 *gerado por* w *e* $\widetilde{w}$. *Notemos que*

$$\widetilde{b} = (\widetilde{w} \subset W_2 \subset \ldots \subset W_n) \in (\pi^{-1}(\mathbb{P}O^+))^c,$$

onde W_2 *intercepta* O^+. *Notemos também* $(\pi^{-1}(\mathbb{P}O^+))^c$ *contém propriamente o conjunto* D, $S^{-1}-$*invariante, e mais*

$$D \subsetneq \pi^{-1}((\text{int}\mathbb{P}O^+)^c) = \pi^{-1}(C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1})).$$

Para ver que é diferente basta tomar o elemento $\widetilde{b} = (\widetilde{w} \subset W_2 \subset \ldots \subset W_n)$, *temos que* $\widetilde{b} \in \pi^{-1}(C(S^{-1}, \mathbb{P}^{n-1}))$ *mas* $\widetilde{b} \notin D$, *pois é possível tomar uma vizinhança de* W_2

tal que todos os elementos, espaços bidimensionais, desta vizinhança interceptam O^+.

Portanto, $C(S^{-1})$ *não complementa* $\pi^{-1}(\mathbb{P}O^+) = C(S)$*, o conjunto controlável invariante para* S *em* $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$.

1.3 Existência e Unicidade do Conjunto Controlável Invariante na Variedade $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$

O objetivo principal desta seção é mostrar que para um semigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio, existe somente um conjunto controlável invariante na variedade $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$. Começamos demonstrando que é sempre possível tomar um elemento diagonalizável, com autovalores reais positivos e distintos, no interior do semigrupo descrito acima. A partir disso, demonstramos o principal resultado deste capítulo, que garante existência e unicidade do conjunto controlável invariante para a ação de um semigrupo de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ nas variedades flag.

Consideremos S um semigrupo com interior não vazio contido no grupo de Lie $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Um ambiente natural para a ação de S é o das variedades homogêneas $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})/P$, onde P é um subgrupo parabólico.

Como já comentamos acima, precisamos garantir a existência de elementos regulares em $\mathrm{int}S$, ou melhor dizendo, semelhantes a elementos diagonalizáveis com autovalores reais positivos distintos, para a demonstração do teorema principal, e para mostrar isso, temos o seguinte lema.

Lema 1.65 *Seja* S *um semigrupo de interior não vazio de* $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$*. Então* $\mathrm{int}(S)$ *contém elementos diagonalizáveis, com autovalores reais positivos e distintos, ou seja, existe* $g \in \mathrm{int}S$ *tal que* $g = PhP^{-1}$*, onde* h *é uma matriz diagonal com autovalores reais positivos distintos.*

Demonstração: Para uma demonstração mais elegante do que aqui faremos, ver

Corolário 3.6 em *Ayala-Kliemann-San Martin* [1].

Seja $g \in \operatorname{int}(S)$. Usando a forma canônica de Jordan e sabendo que $\operatorname{int}(S)$ é aberto, podemos supor, sem perda de generalidade, que g é semelhante um elemento $g_2 \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com autovalores distintos. Mais ainda, podemos supor que g_2 possui a seguinte forma:

$$g_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & J_{r+1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & J_n \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq r$, e $J_l = \begin{pmatrix} a_l & -b_l \\ b_l & a_l \end{pmatrix}$, com $a_l, b_l \in \mathbb{R}$, $\det(J_l) \neq 0$, para $r+1 \leq l \leq n$, e ainda, cada bloco J_l se expressa como

$$J_l = \exp(\rho_l) \begin{pmatrix} \cos(\theta_l) & \operatorname{sen}(\theta_l) \\ \operatorname{sen}(\theta_l) & \cos(\theta_l) \end{pmatrix},$$

onde $\rho_l = a_l^2 + b_l^2$.

Aproximando $\theta_l/2\pi$ por números racionais nk_l/k_l podemos supor ainda que

$$J_l = \exp(\rho_l) \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi n k_l}{k_l}) & \operatorname{sen}(\frac{2\pi n k_l}{k_l}) \\ \operatorname{sen}(\frac{2\pi n k_l}{k_l}) & \cos(\frac{2\pi n k_l}{k_l}) \end{pmatrix}.$$

Com isto,

$$J_l^{k_l} = \exp(k_l \rho_l) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_l & 0 \\ 0 & \lambda_l \end{pmatrix}$$

onde $\lambda_l = \exp(k_l \rho_l)$.

Como $g = P g_2 P^{-1}$ para alguma matriz inversível P e como $\operatorname{int}(S)$ é um ideal de S para $k = k_{r+1} \ldots k_n$ teremos que

$$g^k = P g_2^k P^{-1} \in \operatorname{int}(S)$$

e portanto podemos supor que

$$g_2^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & \\ & & \lambda_r & & & & & \\ & & & \lambda_{r+1} & & & & \\ & & & & \lambda_{r+1} & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & \lambda_n & \\ & & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Aproximando novamente g_2^k por matrizes com autovalores distintos temos então que existe $g_3 \in \mathrm{int}(S)$ onde

$$g_3 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

é semelhante a g.

Finalmente, tomando uma potência par de g obteremos que os autovalores de g_3 podem ser considerados como sendo positivos. □

O próximo resultado é o principal desta seção. Ele garante que mediante hipóteses estabelecidas, o semigrupo S possui somente um conjunto controlável invariante sobre a variedade $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})/P$.

Teorema 1.66 *Seja P um subgrupo parabólico de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ *e S um semigrupo de interior não vazio de* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$*. Então existe um único conjunto controlável invariante para S em* $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})/P$*.*

Demonstração: Pelo lema anterior, existe $g \in (\mathrm{int}S)$ semelhante a um elemento diagonal com autovalores reais e distintos.

Tomando a base da subálgebra de Cartan como sendo a base de semelhança, ou seja, a base na qual o elemento semelhante a g é diagonal, podemos supor, sem perda de generalidade, que $(\mathrm{int}S)$ contém um elemento h, com autovalores reais e distintos. Suponhamos então que

$$h = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \in \text{int}(S)$$

onde $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n > 0$.

Vamos primeiramente fazer a demonstração no caso em que $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/P = \mathbb{P}^{n-1}$.

Considere $\tilde{C} = \{[(x_1, \ldots, x_n)]; x_1 > 0\}$.

Notemos que $\tilde{C}$ é aberto e denso em $\mathbb{P}^{n-1}$. De fato, sejam $b_0 = (< e_1 >)$, onde $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$ e N^- o subgrupo das matrizes triangulares inferior com $1's$ na diagonal principal. Temos que $b_0 = (V_1)$, onde $V_1 = \{(x, 0, \ldots, 0); x \in \mathbb{R}^*_+\}$, (podemos considerar $x > 0$ pois em $\mathbb{P}^{n-1}$ basta considerarmos o semi-espaço).

Vejamos que

$$N^- b_0 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} x \\ a_{21}x \\ \vdots \\ a_{n1}x \end{pmatrix} \right] = \tilde{C}$$

Desta forma, como $N^- b_0$ é um conjunto aberto e denso, (ver e.g. [17]), então temos que $\tilde{C}$ também o é.

Sendo assim tomemos $x \in \tilde{C}$, então $x = [(x_1, x_2, \ldots, x_n)]$ com $x_1 > 0$. Temos que $hx = [h(x_1, \ldots, x_n)] = [(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_n x_n)] = [(x_1, \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x_2, \ldots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1} x_n)]$. Mais geralmente, $h^k x = h^k[(x_1, \ldots, x_n)] = [(x_1, (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k x_2, \ldots, (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k x_n)]$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$. Assim, quando $k \to \infty$, temos que $(\frac{\lambda_i}{\lambda_1})^k \to 0$ para $i = 2, \ldots, n$.

Então, $\lim_{k \to \infty} h^k x = [(x_1, 0, \ldots, 0)] = [(1, 0, \ldots, 0)]$. Segue que $[(1, 0, \ldots, 0)]$ pertence a $\text{fe}(Sx)$ para todo $x \in \tilde{C}$.

Agora, se x pertence a fronteira de $\tilde{C}$, $\partial\tilde{C}$, então $x = [(0, x_2, \ldots, x_n)]$. Como $(\text{int}S)$ é não vazio, temos que Sx tem interior não vazio e ainda $Sx \subset \mathbb{R}P^{n-1}$. Do fato de $\tilde{C}$ ser denso em $\mathbb{R}P^{n-1}$ e de $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$ temos que $Sx \cap \tilde{C} \neq \emptyset$.

Tomemos $x_0 \in Sx \cap \tilde{C}$. Então, pelo que vimos acima, $[(1, 0, \ldots, 0)] \in \text{fe}(Sx_0)$, pois $x_0 \in \tilde{C}$. Como $x_0 \in \text{fe}(Sx)$, pois $x_0 \in Sx$, temos pelo Lema 1.24 que $[(1,0,\ldots,0)] \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in \partial\tilde{C}$.

Assim, $[(1,0,\ldots,0)] \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in \tilde{C} \cup \partial\tilde{C} = \overline{\tilde{C}} = \mathbb{R}P^{n-1}$, ou seja, $[(1,0,\ldots,0)] \in \bigcap_{x \in \mathbb{R}P^{n-1}} \text{fe}(Sx)$. Tomando $C = \bigcap_{x \in \mathbb{R}P^{n-1}} \text{fe}(Sx)$, temos pela Proposição 1.49 que C é o único conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{R}P^{n-1}$.

Vamos agora fazer a demonstração no caso da variedade flag maximal $\mathbb{F}^n(1,2,\ldots,n-1)$.

Seja $b_0 = (V_1 \subset V_2 \subset \ldots \subset V_{n-1})$ onde $V_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle$. Já sabemos que $N^- b_0$ é aberto e denso em $\mathbb{F}^n(1,2,\ldots,n-1)$.

Seja $x \in N^- b_0$ um elemento arbitrário. Então $x = nb_0$ onde $n \in N^-$ e temos também que $hx = hnb_0 = hn(h^{-1}b_0) = (hnh^{-1})b_0$.

Mas

$$\begin{aligned}
hnh^{-1} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}\lambda_2 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\lambda_n & a_{n2}\lambda_n & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2^{-1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}\frac{\lambda_2}{\lambda_1} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}\frac{\lambda_n}{\lambda_1} & a_{n2}\frac{\lambda_n}{\lambda_2} & \ldots & 1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

e

$$h^k n h^{-k} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21}(\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k & a_{n2}(\frac{\lambda_n}{\lambda_2})^k & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Novamente, quando $k \to \infty$, $(\frac{\lambda_j}{\lambda_i})^k \to 0$ para $1 \leq i < j \leq n$. Assim

$$h^k n h^{-k} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Logo, $h^k x = h^k n b_0 = (h^k n h^{-k}) b_0 = (h^k n h^{-k}) b_0 \to 1 b_0 = b_0$. O que mostra que $b_0 \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in N^- b_0$.

Considere agora, $x \in \partial(N^- b_0)$. Já sabemos que $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$ e ainda temos que $Sx \subset \mathbb{F}^n(1, \dots, n-1)$. Como $N^- b_0$ é denso em $\mathbb{F}^n(1, \dots, n-1)$ e $\text{int}(Sx)$ é um aberto de $\mathbb{F}^n(1, \dots, n-1)$, temos que $Sx \cap N^- b_0 \neq \emptyset$, para todo $x \in \partial(N^- b_0)$. Deste modo, tomemos $x_0 \in Sx \cap N^- b_0$, com $x \in \partial(N^- b_0)$. Assim, $b_0 \in \text{fe}(Sx_0)$, pois $x_0 \in N^- b_0$ e também $x_0 \in \text{fe}(Sx)$ pois $x_0 \in Sx$. Então, pelo Lema 1.24, $b_0 \in \text{fe}(Sx)$ para todo $x \in \partial(N^- b_0)$.

Logo,

$$b_0 \in \text{fe}(Sx) \text{ para todo } x \in (N^- b_0 \cup \partial(N^- b_0)) = \overline{N^- b_0} = \mathbb{F}^n(1, \dots, n-1),$$

ou seja, $b_0 \in \bigcap_{x \in \mathbb{F}^n(1,\dots,n-1)} \text{fe}(Sx)$. Tomando $C = \bigcap_{x \in \mathbb{F}^n(1,\dots,n-1)} \text{fe}(Sx) \neq \emptyset$, e usando os mesmos argumentos anteriores, temos que C é o único conjunto controlável invariante para a ação de S em $\mathbb{F}^n(1, 2, \dots, n-1)$.

Para concluir a demonstração do teorema no caso geral, consideremos a fibração equivariante

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathbb{F}^n(1, 2, \dots, n-1) & \longrightarrow & \mathbb{F}^n(r_1, r_2, \dots, r_k) \\ & (V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_{n-1}) & \longmapsto & (V_{r_1} \subset V_{r_2} \subset \dots \subset V_{r_k}) \end{array}$$

Consideremos $\mathbb{F}^n(1, \dots, n-1) \approx \text{Sl}(n, \mathbb{R})/P_1$ e $\mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_k) \approx \text{Sl}(n, \mathbb{R})/P_2$. Já vimos que P_1 está contido em P_2, eles são subgrupos fechados de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ e ainda $\text{Sl}(n, \mathbb{R})/P_1$ é compacto. Então pela Proposição 1.57, item (i), temos que $\pi(C) = C_1$ é um conjunto controlável invariante na variedade flag intermediária $\mathbb{F}^n(r_1, \dots, r_k)$. A unicidade é garantida pelo item (ii) da mesma proposição. De fato, suponha que exista $C_2 \subset \mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$ um conjunto controlável invariante para a ação de S, então por (ii) da proposição citada acima, temos que existe um conjunto controlável invariante $D \subset \mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$ com $\pi(D) = C_2$. Mas sabemos que o conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{F}^n(1, \ldots, n-1)$ é único, e é C, então $D = C$, o que implica em $C_2 = \pi(C) = C_1$.

Portanto, existe um único conjunto controlável invariante para a ação de S em $\mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$. $\square$

Capítulo 2

Cones Invariantes

Este é o principal capítulo desta dissertação. Começamos definindo e exemplificando o conceito de tipo parabólico de um semigrupo, o qual é fundamental para nossos estudos de cones invariantes. Em seguida, demonstramos os principais resultados, que através do conceito de tipo parabólico, nos dão condições necessárias e suficientes para a existência de cones $W \subset \mathbb{R}^n$ próprios invariantes para a ação de semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Esses estudos foram originalmente desenvolvidos em [9]. Por último estudamos um pouco de conexidade e maximalidade de semigrupos de compressão $S_W \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ de um cone $W \subset \mathbb{R}^n$.

2.1 Tipo Parabólico de um Semigrupo

Nesta seção apenas enunciaremos os resultados fundamentais para a definição de tipo parabólico de um semigrupo, o qual é um conceito fundamental para nossos estudos, e daremos como exemplos os tipos parabólicos para $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ e S^{-1}. Faremos aqui uma exposição específica para semigrupos em $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Para um aprofundamento deste assunto citamos, por exemplo, os artigos [12] e [17].

Seja $S \subsetneq G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo com interior não vazio. Consideremos a variedade flag maximal $\mathbb{F} = \mathbb{F}_\emptyset$, que denotaremos simplesmente por $\mathbb{F}$. Denotemos por $\mathbb{F}_\Theta$ a variedade flag associada ao subconjunto Θ do conjunto de raízes simples, ou seja, $\mathbb{F}_\Theta = G/P_\Theta$.

No capítulo 1, utilizamos a notação $\mathbb{F}^n(r_1, \ldots, r_k)$ para representar as variedades flag, as quais são espaços homogêneos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e aqui estamos utilizando a notação $\mathbb{F}_\Theta$, mas podemos observar através de cálculos análogos aos que faremos abaixo, que para cada $\Theta \subset \Sigma$ temos uma sequência $\mathbf{r}$ tal que $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{F}^n(\mathbf{r})$.

Como exemplo consideremos a variedade flag $\mathbb{F}^7(1,3,6)$, e $b_0 = (V_1 \subset V_2 \subset V_3)$, com $V_1 = \langle e_1 \rangle$, $V_2 = \langle e_1, e_2, e_3 \rangle$ e $V_3 = \langle e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6 \rangle$. Temos que o subgrupo de isotropia de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ em b_0 é

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Sabendo que associado a P está a subálgebra $\mathfrak{p}_\Theta$, podemos encontrar Θ tal que $\mathbb{F}^7(1,3,6) = \mathbb{F}_\Theta$. Lembrando que $\mathfrak{p}_\Theta = \mathfrak{n}^-(\Theta) \oplus \mathfrak{p}$, onde $\mathfrak{p}$ é a subálgebra parabólica minimal e $\mathfrak{n}^-(\Theta) = \sum \mathfrak{g}_{-\alpha},\ \alpha \in \langle \Theta \rangle^+$, temos que para $\Theta = \{\alpha_{23}, \alpha_{45}, \alpha_{56}\}$ obtemos $\langle \Theta \rangle^+ = \{\alpha_{23}, \alpha_{45}, \alpha_{46}, \alpha_{56}\}$. Então

$$\mathfrak{p}_\Theta = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \oplus \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}.$$

Assim, P_Θ é exatamente o grupo de isotropia P descrito acima, ou seja,

$$\mathbb{F}^7(1,3,6) = \mathbb{F}_\Theta.$$

Como antes, temos as projeções de uma variedade flag em outra. Desde que Θ_1 esteja contido em Θ_2, temos que $\mathbb{F}_{\Theta_1}$ se projeta sobre $\mathbb{F}_{\Theta_2}$, daí podemos considerar a projeção canônica $\pi^{\Theta_1}_{\Theta_2} : \mathbb{F}_{\Theta_1} \to \mathbb{F}_{\Theta_2}$. E no caso específico da projeção de $\mathbb{F}$ em $\mathbb{F}_\Theta$ usamos a notação $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$.

Denotemos por C o conjunto controlável invariante para S na variedade flag maximal $\mathbb{F}$ e por C_Θ o conjunto controlável invariante para a ação de S na variedade flag $\mathbb{F}_\Theta$. Vimos no primeiro capítulo que $\pi_\Theta(C) = C_\Theta$, no entanto nem sempre $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = C$, e quando esse fenômeno acontece surge uma situação muito interessante para estudar o semigrupo S. Desta forma os subconjuntos Θ onde $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = C$ recebem uma definição própria.

O próximo teorema é um resultado muito importante para nossos estudos. Apesar de não termos demonstrado, ele é primordial para os resultados principais desta dissertação, pois motiva a definição de tipo parabólico, o qual é um conceito fundamental em nossos estudos, pois através dele temos uma condição necessária e suficiente para a existência de cones invariantes para a ação de semigrupos, o principal assunto tratado neste trabalho. Usando o conceito de tipo parabólico foi possível responder questões da teoria de controle, como podemos ver em [9]. Além do mais, ele caracteriza a topologia dos semigrupos, como por exemplo homotopias feito em *San Martin-Santana* [16] e conexidade (ver *Rocio-San Martin* [8]), temos ainda, resultados sobre maximalidade de semigrupos como podemos ver em [14].

Sendo assim, enunciemos o teorema:

Teorema 2.1 *Suponha S nas condições enunciadas no início desta seção. Então existem variedades flag $\mathbb{F}_\Theta$ tais que $C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta)$. Entre estas variedades flag, existe exatamente uma, dita $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$, onde $\Theta(S)$ é maximal, isto é, se*

$$C = \pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = \pi_{\Theta(S)}^{-1}(C_{\Theta(S)}),$$

então $\Theta \subset \Theta(S)$.

Demonstração: Ver Teorema 4.3 em [17]. $\square$

Com isto temos a definição de tipo parabólico:

Definição 2.2 *A variedade flag $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$ do teorema anterior é chamada tipo parabólico ou tipo flag de S. Também dizemos que $\Theta(S)$ é o tipo parabólico de S.*

Exemplo 2.3 *A partir desta definição, temos que o tipo parabólico de* $S = \mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ *é dado pelo espaço projetivo* $\mathbb{P}^{n-1}$, *pois vimos no Exemplo 1.62 que* $\pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = C$, *onde* $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ *e* C *são os conjuntos controláveis invariantes para* $\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R})$ *em* $\mathbb{P}^{n-1}$ *e* $\mathbb{F}$, *respectivamente e por ser* $\mathbb{P}^{n-1}$ *uma variedade flag minimal.*

Observação 2.4 *Alternativamente, denotamos o tipo parabólico de* S *pela correspondente variedade flag* $\mathbb{F}(S) = \mathbb{F}_{\Theta(S)}$ *e dizemos que o tipo parabólico de* S *é* $\mathbb{F}_{\Theta(S)}$.

Notemos que uma vez que conhecemos o conjunto controlável invariante $C_{\Theta(S)} \subset \mathbb{F}_{\Theta(S)}$ então os conjuntos controláveis invariantes de qualquer $\mathbb{F}_\Theta$ podem ser descritos por $C_{\Theta(S)}$, pois para qualquer Θ temos

$$C = \pi^{-1}_{\Theta(S)}(C_{\Theta(S)}) \text{ e } C_\Theta = \pi_\Theta(C).$$

Ainda considerando $G = \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, seja $\mathbf{r} = (r_1 < \ldots < r_m)$ uma sequência de inteiros com $1 \leq r_1$ e $r_m \leq n-1$ e denotemos por $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$ a variedade dos flags $(V_1 \subset \ldots \subset V_m)$ com $\dim V_i = r_i$. Denotemos por $\bar{\mathbf{r}}$ a sequência de inteiros $\bar{\mathbf{r}} = (n - r_m < \ldots < n - r_1)$. Então $\mathbb{F}^n(\bar{\mathbf{r}})$ é chamada de variedade flag dual de $\mathbb{F}^n(\mathbf{r})$. Por exemplo, a grassmanniana $\mathrm{Gr}_{n-k}(n)$ é dual à grassmanniana $\mathrm{Gr}_k(n)$.

A proposição abaixo garante que o tipo parabólico do semigrupo S^{-1} é dual ao tipo parabólico do semigrupo S.

Proposição 2.5 *Dado um semigrupo* $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ *com interior não vazio temos que se o tipo parabólico de* S *é dado pela variedade* $\mathbb{F}^n(\boldsymbol{r})$ *então o tipo parabólico de* S^{-1} *é dado pela variedade* $\mathbb{F}^n(\bar{\boldsymbol{r}})$.

Demonstração: Ver [14]. □

Usando a proposição acima podemos determinar o tipo parabólico para $(\mathrm{Sl}^+(n, \mathbb{R}))^{-1}$. Observemos o próximo exemplo.

Exemplo 2.6 *Usando a proposição acima, temos que o tipo parabólico para o semigrupo* $(\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}))^{-1}$ *é* $\mathbb{F}^n(n-1)$*, pois vimos no Exemplo 2.3 que o tipo parabólico para* $\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R})$ *é a variedade projetiva* $\mathbb{P}^{n-1} = \mathbb{F}^n(1)$*, ou seja, o tipo parabólico para* $(\mathrm{Sl}^+(n,\mathbb{R}))^{-1}$ *é a grassmaniana* $Gr_{n-1}(n)$*.*

Apresentamos agora, mais um exemplo em que o complementar do conjunto controlável invariante não é um conjunto controlável, utilizando para isso, o conceito de tipo parabólico.

Exemplo 2.7 *Consideremos o caso onde* $G = \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$*. Temos que existem três variedades flag para* $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$*. Uma maximal,* $\mathbb{F}^3(1,2)$*, e duas minimais, a projetiva* $\mathbb{P}^2$*, e a grassmanniana* $Gr_2(3)$*. Existem três possibilidades para* $W(S)$*, onde consideremos o fato de que* $W(S) = W_\Theta$ *para algum* $\Theta \subset \Sigma$*, logo as possibilidades são:*

$$W_{\Theta_1} = \{1\}, W_{\Theta_2} = \{1,(2,3)\} \text{ e } W_{\Theta_3} = \{1,(1,2)\}$$

que estão associadas respectivamente a $\mathbb{F}^3(1,2)$*,* $\mathbb{R}P^2$ *e* $Gr_2(3)$*.*

De fato, temos que em $\mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$*,* $\Sigma = \{\alpha_{12},\alpha_{23}\}$*, logo podemos fazer três escolhas para* Θ*, são elas:*

$$\Theta_1 = \emptyset, \Theta_2 = \{\alpha_{23}\} \text{ e } \Theta_3 = \{\alpha_{12}\}.$$

Temos que W_Θ *é o subgrupo gerado pelas reflexões definidas pelas raízes em* Θ*, logo:*

- $W_{\Theta_1} = \{1\}$ *porque neste caso não há reflexão;*

- $W_{\Theta_2} = \{1,(2,3)\}$ *pois a reflexão ortogonal em relação a raiz* α_{23} *leva um elemento* (x_1,x_2,x_3) *em* (x_1,x_3,x_2)*, e;*

- $W_{\Theta_3} = \{1,(1,2)\}$ *pois a reflexão ortogonal em relação a raiz* α_{12} *associa um elemento* (x_1,x_2,x_3) *a* (x_2,x_1,x_3)*.*

Temos que $P_{\Theta_1} = P_\emptyset = P$*.*

Para Θ_2 *temos que* $\mathfrak{p}_{\Theta_2} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-_{\Theta_2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$*, logo* $P_{\Theta_2} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\}$

e para Θ_3 *temos que* $\mathfrak{p}_{\Theta_3} = \mathfrak{p} \oplus \mathfrak{n}^-_{\Theta_3} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$, *logo* $P_{\Theta_3} = \left\{ \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} \right\}$.

Assim W_{Θ_1}, W_{Θ_2} *e* W_{Θ_3} *estão associados a* $\mathbb{F}^3(1,2)$, $\mathbb{R}P^2$ *e* $Gr_2(3)$ *respectivamente.*

Suponha que $W(S) = W_{\Theta_1}$. *Notemos que* $W(S)\backslash W$ *representa os elementos do tipo* $W(S)w$, $w \in W$ *e* $W(S)\backslash W$ *dá exatamente o número de conjuntos controláveis em* G/P_Θ, $\Theta \subset \Sigma$.

No caso de $\Theta = \Theta_1$ *o número de conjuntos controláveis em* $\mathbb{R}P^2$ *é* $|W(S)\backslash W| = 3!/2! = 3$, *e mais, em* $\mathbb{F}^3(1,2)$ *este é o número de conjuntos controláveis. Sendo um destes o* S*-i.c.s. e os outros são conjuntos controláveis disjuntos, como já sabemos.*

Assim, neste caso, o complementar do conjunto controlável invariante para a ação de S *em* $\mathbb{F}^3(1,2)$ *não é um conjunto controlável para* S *em* $\mathbb{F}^3(1,2)$.

2.2 Cones Invariantes

Nesta seção apresentamos os principais resultados desta dissertação. O primeiro garante, a partir de certas hipóteses sobre o semigrupo, que se o tipo parabólico se projeta em $\mathbb{P}^{n-1}$ então existem cones invariantes para a ação do semigrupo em $\mathbb{R}^n$. O segundo é uma recíproca deste, ou seja, garante que se existem cones invariantes, pontuais e geradores em $\mathbb{R}^n$ para a ação do semigrupo, então o tipo parabólico se projeta em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Desta forma, comecemos definindo cones em $\mathbb{R}^n$ e estabelecendo algumas notações.

Definição 2.8 *Um subconjunto* $W \subset \mathbb{R}^n$ *é chamado um cone se ele satisfaz as seguintes condições:*

1. $W + W \subset W$;

2. $\mathbb{R}^+ W \subset W$ *e*

3. fe$W = W$.

Tomemos o grupo de Lie semi-simples $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. No decorrer desta seção $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ denotará um semigrupo próprio, conexo, com interior não vazio e contendo a identidade. Seja Σ o sistema simples de raízes canônico da álgebra $\mathfrak{s}l(n, \mathbb{R})$ e denotemos por $\Theta_{\mathbb{P}} \subset \Sigma$ o subconjunto correspondente ao espaço projetivo $\mathbb{F}^n(1) = \mathbb{P}^{n-1}$. A notação usual $[U]$ denota a projeção de $U \subset \mathbb{R}^n - \{0\}$ em $\mathbb{P}^{n-1}$, isto é,

$$[U] = \{[(x_1, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^{n-1}; (x_1, \ldots, x_n) \in U\}.$$

Apresentamos a seguir um lema que será importante para a demonstração dos principais teoremas desta seção.

Lema 2.9 *Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo com interior não vazio. Se $W \subset \mathbb{R}^n$, com $W \neq \{0\}$, é um cone próprio S-invariante, então W é pontual, isto é, $W \cap -W = \{0\}$ e W é gerador ($\mathrm{int}W \neq \emptyset$).*

Demonstração: Seja $H = W \cap -W$. Então H é um subespaço vetorial invariante por S. De fato, temos que $0 \in H$. Se $w \in H$ então $w \in W$ e $w \in -W$, o que implica que $w = -u$, com u em W, assim dado $\lambda \in \mathbb{R}$ temos: se $\lambda \geq 0$ então $\lambda w \in W$ e $\lambda w = -\lambda u$ o qual pertence a $-W$ já que $\lambda u \in W$; se $\lambda < 0$ então $-\lambda w \in W$ o que implica em $\lambda w \in -W$. Isso ocorre porque $-\lambda > 0$, temos ainda que $\lambda w = \lambda(-u) = -\lambda u \in W$, já que $u \in W$ e $-\lambda > 0$. Desta forma, para qualquer λ real temos que λw está em $W \cap -W = H$, logo H é subespaço vetorial.

Agora tomemos $x \in -W$ e $g \in S$ temos que $-x \in W$ então $g(-x) = -gx \in W$ o que implica em $gx \in -W$, ou seja, $-W$ é S-invariante, e como W já é S-invariante, temos que H também o é.

Afirmamos que $H = \{0\}$. Caso contrário, teríamos SH com interior não vazio em $\mathbb{R}^n$, pois S tem interior não vazio e a aplicação dada por $g \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R}) \mapsto gx$, onde $x \in \mathbb{R}^n$, é aberta. Como $SH \subset H$, teríamos $\mathrm{int}H \neq \emptyset$. Mas temos que $\mathrm{dim}H < n$, pois W é próprio, o que contradiz o fato de que qualquer subespaço vetorial próprio de $\mathbb{R}^n$ tem interior vazio. Logo $H = \{0\}$ e portanto W é pontual.

Por fim mostremos que W é gerador.

Notemos que para qualquer $x \neq 0$, com $x \in W$, temos $Sx \subset W$ e $\text{int}(Sx) \neq \emptyset$. De fato, novamente pela aplicação $g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}) \mapsto gx$, temos que $(\text{int}S)x$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$, além disso, $(\text{int}S)x \subset Sx \subset W$, logo $\text{int}W \neq \emptyset$ e portanto W é gerador. $\square$

O teorema a seguir nos garante que se o tipo parabólico de S se projeta sobre $\mathbb{P}^{n-1}$, então existem cones invariantes para a ação de S.

Teorema 2.10 *Suponha S como descrito no início desta seção. Se o tipo parabólico $\Theta(S) \subset \{\alpha_{23}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\} = \Theta_{\mathbb{P}}$ então S tem algum cone $W \subset \mathbb{R}^n$, invariante, pontual e gerador.*

Demonstração: Seja M o semi-espaço de $\mathbb{R}^n$ que representa o espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$. Sem perda de generalidade, podemos considerar $M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n \geq 0\}$. Como S é próprio e $\text{int}S \neq \emptyset$, temos que $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \neq \mathbb{P}^{n-1}$ (ver Teorema 6.2 de [17]).

Defina $M_1 = \{v \in M; [v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}\}$. Notemos que $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} = \{[v]; v \in M_1\}$. Tomemos $[x] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Então $[x] \in [M]$ o que implica em $x \in M$ ou $-x \in M$: se $x \in M$ então $x \in M_1$; se $-x \in M$,temos que $[x] \in \{[v]; v \in M_1\}$ pois $-x \in M_1$ e ainda $[x] = [-x]$. Agora, se $[x] \in \{[v]; v \in M_1\}$, então $[x] = [v]$ com $v \in M_1$, desta forma, pela definição de M_1, $[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Logo, $[x] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Temos que M_1 é fechado. De fato, pegue uma seqüência $(v_i) \in M_1$ tal que $v_i \to v$ em M. Sabemos que $[v_i] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, para todo i. Como $[v_i] \to [v]$, pois a projeção é uma aplicação contínua, e $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ é fechado, temos $[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, ou seja, $v \in M$ e $[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, logo $v \in M_1$, concluindo assim a afirmação.

Pela Proposição 4.8 de [17], $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ está contido na célula aberta de Bruaht, a qual podemos considerar como sendo o conjunto

$$\{[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] \in \mathbb{P}^{n-1}; x_n > 0\}.$$

Agora, denotemos a n-esfera unitária por S^n e defina $D = M_1 \cap S^n$. Notemos que D é fechado, pois é interseção de fechados e como S^n é limitada, D também o é, então D é compacto. Vejamos que $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} = \{[v]; v \in D\}$. Pegue $[x] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, então $[x] = [u]$, para algum $u \in M_1$. Temos que $\frac{u}{\|u\|} \in M_1 \cap S^n = D$ e também $\left[\frac{u}{\|u\|}\right] = [u]$. Logo, $[x] = \left[\frac{u}{\|u\|}\right] \in \{[v]; v \in D\}$. Reciprocamente, seja $[x] \in \{[v]; v \in D\}$. Então $[x] = [v]$, com $v \in D$. Como $v \in D$, então $v \in M_1$ o que implica em $[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Logo $[x] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$.

Considere W o cone gerado por M_1. Então W é gerado por D. De fato, como é gerado por M_1, dado $w \in W$ temos que $w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_l w_l$, com $\lambda_i \geq 0$ e $w_i \in M_1$. Assim, $w = \lambda_1 \|w_1\| \frac{w_1}{\|w_1\|} + \ldots + \lambda_l \|w_l\| \frac{w_l}{\|w_l\|}$. Como $w_i \in M_1$, então $\frac{w_i}{\|w_i\|} \in M_1$ e ainda $\frac{w_i}{\|w_i\|}$ é unitário, ou seja, $\frac{w_i}{\|w_i\|} \in D$. Logo, w é gerado por D, pois $\lambda_i \|w_i\| \in \mathbb{R}_+$. Portanto W é gerado por D.

Vamos mostrar agora, que W é S-invariante.

Como S e M_1 são conexos e a ação $\eta : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é C^∞, temos que SM_1 é conexo em $\mathbb{R}^n$. Notemos que $SM_1 \subset M$. De fato, como $1 \in S$ temos que $M_1 \subset SM_1$. Suponha, por absurdo, que SM_1 não esteja contido em M. Então, como $[M_1] = C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ e $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ é S-invariante, temos que $S[M_1] \subset [M_1]$. Assim, os vetores de SM_1 que não estão em M devem ser opostos de vetores de M_1, mas temos que o vetor nulo não pertence a M_1, o que nos dá uma contradição, pois isso torna SM_1 desconexo. Logo $SM_1 \subset M$, e mais, $SM_1 \subset M_1$. Agora tomemos $v \in M_1$. Assim $[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ e também $S[v] \subset C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Então tomando $g \in S$, temos $[gv] = g[v] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$. Logo $[gv] = [u]$ para algum $u \in M_1$, ou melhor, $gv = \lambda u$, com $\lambda \in \mathbb{R}$. Conhecendo que $g \in S$ e $v \in M_1$ temos que $gv \in M$ e como $[gv] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$, a última coordenada de gv pode ser considerada não nula e ainda positiva. Assim, $\lambda > 0$. Isso mostra que $\lambda u \in \langle M_1 \rangle$, ou seja, $gv \in W$. Logo $SM_1 \subset W$ e desta forma $SW \subset W$, isto é, o cone W é

S-invariante e portanto, pelo Lema 2.9, W é pontual e gerador. $\square$

O próximo teorema pode ser pensado como um tipo de recíproca do anterior, ou ainda, como uma classificação dos semigrupos de $\mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ que deixam cone invariante, mas antes dele, temos um lema usado em sua demonstração.

Lema 2.11 *Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone o qual é S-invariante. Então $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset [W]$.*

Demonstração: Como W é fechado e a aplicação projeção é fechada, temos que $[W] \subset \mathbb{P}^{n-1}$ é fechado, e assim, compacto. E mais, como W é S-invariante, $[W]$ também o é. Então pelo Lema 1.51, $[W]$ contém um conjunto controlável invariante para a ação de S. Mas em $\mathbb{P}^{n-1}$ existe exatamente um conjunto controlável invariante. Portanto, $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset [W]$. $\square$

Teorema 2.12 *Considere S como antes. Se $S \subset \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R})$ tem algum cone $W \subset \mathbb{R}^n$ invariante, pontual e gerador, então o tipo parabólico de S é $\Theta \subset \Theta_{\mathbb{P}}$.*

Demonstração: Suponha que Θ, o tipo parabólico de S, não está contido em $\Theta_{\mathbb{P}}$. Tomemos as projeções equivariantes $\pi_\Theta : \mathbb{F} \to \mathbb{F}_\Theta$ e $\pi_1 : \mathbb{F} \to \mathbb{R}P^{n-1}$, onde $\mathbb{F}$ é a variedade flag maximal. Considere também os conjuntos controláveis invariantes, $C \subset \mathbb{F}$, $C_\Theta \subset \mathbb{F}_\Theta$ e $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset \mathbb{P}^{n-1}$.

Seja $W \subset \mathbb{R}^n$ um cone S-invariante e gerador. Então pelo Lema 2.11 $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset [W]$. Como $\Theta \not\subseteq \Theta_{\mathbb{P}}$ e $\mathrm{int} C_\Theta \neq \emptyset$, existe um subespaço vetorial l-dimensional $L \subset \mathbb{R}^n$, com $l > 1$, tal que $(L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L) \in C_\Theta$. Por abuso de notação, como L é o subespaço de maior dimensão da seqüência de encaixados, vamos dizer, $L \subset C_\Theta$. Já que o tipo parabólico de S é Θ, segue que $\pi_\Theta^{-1}(C_\Theta) = C$. Então

$$\pi_1(\pi_\Theta^{-1}(L)) \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset [W].$$

Isso nos diz que existem subespaços $L_i's \subset L$ tais que $[L_i's] \subset [W]$. Temos que para v pertencente a algum dos subespaços mencionados acima, $\mathbb{R}^+ v \subset W$ ou $-\mathbb{R}^+ v \subset W$.

Deste modo, $V = L \cap W \neq \emptyset$ é um cone. Notemos que $L = V \cup -V$. De fato, seja $v \in L$. Então $v \in W$ ou $-v \in W$, o que implica em $v \in W \cup -W$. Assim $v \in L \cap W$ ou $v \in L \cap -W$, ou seja, $v \in V$ ou $v \in -V$. Logo $v \in V \cup -V$. Agora, considere $v \in V \cup -V$. Então $v \in V$ ou $v \in -V$: se $v \in V$ então $v \in L$; se $v \in -V$ então $-v \in V$, assim $-v \in L$, o que implica que $v \in L$, pois L é subespaço vetorial. Logo, em qualquer um dos casos, $v \in L$ e portanto $L = V \cup -V$. Notemos que V não é pontual, pois caso contrário, existiriam vetores $v_1 \in V$ e $v_2 \in -V$ tais que v_1+v_2 não pertenceria a $V \cup -V$, o que contraria o fato de $V \cup -V$ ser um subespaço vetorial. Como $V \subset W$, concluímos que W não é pontual. O que é uma contradição, pois W é próprio e S-invariante, e pelo Lema 2.9 W deve ser gerador e pontual. Portanto temos que $\Theta \subset \Theta_{\mathbb{P}}$. □

Podemos unificar os dois últimos teoremas no seguinte resultado.

Teorema 2.13 *Seja $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo próprio, com interior não vazio, conexo e contendo a identidade. Temos que S deixa invariante um cone próprio e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$ se, e somente se, $F_{\Theta(S)}$ projeta-se em $\mathbb{P}^{n-1}$".*

Corolário 2.14 *Seja S como no teorema acima, com $\Theta(S) = \{r_1, \ldots, r_k\}$. Então existe um cone próprio S^{-1}-invariante se, e somente se, $r_k = n - 1$.*

Demonstração: Como $\Theta(S) = \{r_1, \ldots, r_k\}$, temos pela Proposição 2.5 que $\Theta(S^{-1}) = \{n - r_k, \ldots, n - r_1\}$. Pelo Teorema 2.13, S^{-1} deixa cone invariante em $\mathbb{R}^n$ se, e somente se, $n - r_k = 1$, e isso acontece se, e somente se, $r_k = n - 1$. □

Finalizando esta seção faremos algumas observações do resultado principal em dimensões baixa.

- Se $n = 2$, a única possibilidade para o tipo parabólico de um semigrupo é $\Theta(S) = \{1\}$. Assim, por 2.13 , um semigrupo S com hipóteses definidas acima, sempre deixa cone invariante em $\mathbb{R}^2$ implicando que S não é controlável neste espaço. Lembramos que em *Braga Barros-Ribeiro-Rocio-San Martin* [2] foi mostrado que "$S \subset \mathrm{Sl}(2,\mathbb{R})$ não é controlável se, e somente se, ele deixa um cone de $\mathbb{R}^2$ invariante".

- Se $n = 3$, temos como possibilidades para o tipo parabólico: (i) $\Theta(S) = \{1\}$, (ii) $\Theta(S) = \{2\}$ e (iii) $\Theta(S) = \{1, 2\}$. Nos casos (i) e (iii), temos que o tipo parabólico projeta-se sobre $\mathbb{P}^2$. Então, por 2.13, S deixa cone invariante em $\mathbb{R}^3$, e portanto não é controlável. No caso (ii), temos pela Proposição 2.5 que $\Theta(S^{-1}) = \{1\}$. Assim, pelo Teorema 2.13, S^{-1} deixa cone invariante em $\mathbb{R}^3$. Temos ainda neste caso o seguinte resultado: "Assuma que $S \subset \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ é um semigrupo conexo com interior não vazio. Então S é controlável se, e somente se, nem S e nem S^{-1} deixa invariante um cone próprio $W \subset \mathbb{R}^3$". De fato, se S é controlável, então S não deixa cone invariante. Assim, pelo Teorema 2.13, $\Theta(S) = \{2\}$. Suponhamos, por contradição, que S^{-1} deixa cone invariante. Então S^{-1} não é controlável. Como S^{-1} é controlável se, e somente se, S é controlável, temos que S não é controlável, o que é uma contradição. Reciprocamente, assuma que nem S e nem S^{-1} deixam cone invariante em $\mathbb{R}^3$ e suponha que S não seja controlável. Então, S é próprio e pelo resultado principal deste trabalho, $\Theta(S) = \{2\}$ e $\Theta(S^{-1}) = \{2\}$, mas se $\Theta(S) = \{2\}$, temos por 2.5 que $\Theta(S^{-1}) = \{1\}$, o que nos dá uma contradição.

  Logo, podemos concluir que se $S \subset \mathrm{Sl}(3,\mathbb{R})$ tem hipóteses como em 2.13, então S não é controlável no espaço ($\mathbb{R}^3$).

- Se $n = 4$, temos que não vale a afirmação: "$S \subset \mathrm{Sl}(4,\mathbb{R})$ é controlável se, e somente se, S não deixa cones invariantes em $\mathbb{R}^4$". Para ver isso temos o seguinte exemplo citado no artigo [9]:

$$\text{As matrizes } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B = \mathrm{diag}(1, 4, -2, -3)$$

satisfazem a condição do rank, o semigrupo de $\mathrm{Sl}(4,\mathbb{R})$, gerado por A e B, tem interior não vazio e é próprio implicando que o sistema não é controlável. No entanto foi mostrado que não existem nem cones invariantes.

2.3 S_W é conexo

Nosso objetivo nesta seção é mostrar que o semigrupo de compressão

$$S_W = \{g \in \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}); gW \subset W\},$$

de um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ pontual e gerador, é maximal conexo. Mostraremos ainda, no final desta seção, uma espécie de recíproca para esse resultado, ou melhor, mostraremos que se um semigrupo é maximal conexo de tipo projetivo, então ele é de compressão para algum cone $W \subset \mathbb{R}^n$.

Para isso, definamos por

$$L(S_W) := \{X \in \mathrm{sl}(n,\mathbb{R});\ \text{para todo } t \geq 0,\ \exp(tX) \in S_W\}$$

o cone de Lie associado a S_W e enunciamos uma proposição que será necessária para a demonstração do Teorema 2.19.

Proposição 2.15 *Seja $g \in \mathrm{int}S_W$. Então, existe uma base $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ com $f_1 \in \mathrm{int}W$ e tal que $\mathrm{ger}\{f_2, \ldots, f_n\} \cap W = \{0\}$ de tal forma que a matriz de g nessa base se escreve em blocos 1×1 e $(n-1) \times (n-1)$ como*

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix},$$

com $\lambda > 0$, $\det h > 0$ e tal que os módulos dos autovalores de h são todos estritamente menores que λ. Em outras palavras, g tem um autovalor dominante real e de multiplicidade um. O autovetor correspondente está no interior de W e a soma dos outros auto-espaços tem interseção nula com W.

Demonstração: Para ver sua demonstração citamos [4]. □

Como havíamos dito no capítulo 1, S_W tem interior não vazio, é o que mostra a proposição abaixo.

Proposição 2.16 *O semigrupo de compressão S_W tem interior não vazio em* $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Como W tem interior não vazio, podemos tomar $f_1 \in \mathrm{int}W$ e completar a uma base $\beta = \{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ de tal forma que $\{f_2, \ldots, f_n\} \subset V$, onde V é um subespaço de $\mathbb{R}^n$ de codimensão um, com $V \cap W = \{0\}$.

Tomemos uma matriz diagonal $H = \mathrm{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$ em relação à base β. Vamos mostrar que $\exp(tH) \in \mathrm{int}S_W$, para todo $t > 0$, e $H \in \mathrm{int}L(S_W)$.

De fato, temos que o conjunto $(f_1 + V) \cap W$ contém todos os vetores "direção"do cone W. Desta forma, tomemos $y \in W$, com $y \neq 0$, então

$$y = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n,$$

onde $\alpha_1 > 0$, pois caso contrário y não pertenceria a W. Daí,

$$\frac{1}{\alpha_1} y = f_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} f_2 + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_1} f_n \in W.$$

Logo, a menos de múltiplos positivos, os elementos de W podem ser tomados na forma

$$x = f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n.$$

O conjunto $(f_1 + V) \cap W$ pode ser descrito pelos elementos desta forma, ou melhor dizendo, por

$$B = \{x \in W; x = f_1 + a_2 f_2 + \ldots + a_n f_n.\}$$

É fácil notar que esse conjunto é fechado e limitado, portanto compacto.

Usando o fato que $Hf_1 = (n-1)f_1$ e $Hf_i = -f_i$, para $i = 2, \ldots, n$, temos que

$$Hx = (n-1)f_1 - a_2 f_2 - \ldots - a_n f_n = nf_1 - x,$$

ou seja, $Hx \in W - x$. Assim

$$(tH)x = (tnf_1 - tx) \in (W - \mathbb{R}^+ x), \text{ para todo } t \geq 0$$

para todo x escrito na forma acima. Seja $w \in W$ um elemento qualquer não nulo, então $w = \alpha x$ para algum x na forma acima. Temos que

$$\begin{aligned}(tH)w &= (tH)\alpha x = \alpha(tH)x = \alpha(tnf_1 - tx) \\ &= (\alpha tnf_1 - t\alpha x) = (\alpha tnf_1 - tw) \in (W - \mathbb{R}^+ w).\end{aligned}$$

Assim, $(tH)W \subset W$ para todo $t \geq 0$. Como $tH \in \mathrm{sl}(n, \mathbb{R})$ e

$$\exp(tH) = Id + tH + \frac{1}{2!}(tH)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}(tH)^n + \ldots$$

temos que $\exp(tH) \in \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ e ainda $\exp(tH)w \in W$, para todo $w \in W$ e $t \geq 0$. Logo,

$$\exp(tH) \in S_W, \text{ para todo } t \geq 0.$$

Definamos a aplicação contínua

$$\begin{array}{rccc}\varphi: & \mathrm{sl}(n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (A, x) & \longmapsto & \frac{x + Ax}{n}\end{array}.$$

Notemos que

$$\varphi(H, x) = \frac{x + Hx}{n} = \frac{x + nf_1 - x}{n} = f_1$$

para todo $x \in B$.

Como φ é contínua, temos que para toda vizinhança $U \subset W$ de f_1, existe uma vizinhança V de (H, x) tal que $\varphi(V) \subset U$. A partir disto, existem vizinhanças A_x contendo H e C_x contendo x tal que para todo $y \in C_x$ e para todo $A \in A_x$ temos que $y + Ay \in U \subset W$.

Temos que $B \subset \bigcup_{x \in B} C_x$ e como B é compacto, existe uma quantidade finita de C_{x_i}, $i = 1, 2, \ldots, m$ tal que $B \subset \bigcup_{i=1}^m C_{x_i}$. Assim, $H \in A_{x_i}$ para todo $i = 1, 2, \ldots, m$ e tomando $D = \bigcap_{i=1}^m A_{x_i}$, temos que $H \in D$ e $x + Ax \in U$, para todo $A \in D$. Como $U \subset W$, temos $x + Ax \in W$ então $Ax \in (W - x)$ o que implica em

$$(tA)x \in (W - \mathbb{R}^+ x) \text{ para todo } t \geq 0 \text{ e } x \in W.$$

Assim, pelas mesmas justificativas anteriores, W é invariante sob (tA) com $A \in D$ e consequentemente, $\exp(tA)W \subset W$, com $A \in D$. Logo

$$D \subset L(S_W) = \{X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}); \exp(tX) \in S_W \text{ para todo } t \geq 0\}.$$

Desta forma, D é uma vizinhança de H em $L(S_W)$, isto é, $H \in \text{int}L(S_W)$. Logo, $\exp(tH) \in \text{int}S_W$, para todo $t > 0$, o que mostra que $\text{int}S_W$ é não vazio. □

A observação abaixo mostra que S_W é fechado, e o próximo lema garante que $\text{fe}(\text{int}S_W) = S_W$, os quais ajudará a demonstrar que S_W é conexo.

Observação 2.17 *O semigrupo S_W é fechado. De fato, seja (g_i) uma sequência em S_W, convergindo para g. Tomemos $w \in W$. Temos que $g_i w \in W$ e como W é fechado, $(g_i w)$ converge em W. Mas sabemos que $g_i w$ converge para gw, o que implica em $gw \in W$. Como $w \in W$ é arbitrário, temos que $gw \in W$, para todo $w \in W$. Logo, $g \in S_W$ e portanto S_W é fechado.*

Lema 2.18 *O semigrupo de compressão de um cone, S_W, satifaz:*

$$\text{fe}(\text{int}S_W) = \text{fe}(S_W) = S_W.$$

Demonstração: Como S_W é fechado, temos que $\text{fe}(\text{int}S_W) \subset S_W$.

Mostremos que $S_W \subset \text{fe}(\text{int}S_W)$.

Tomemos $f_1 \in \text{int}W$ e $H = \text{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$ citado anteriormente, então temos que $\exp(tH) \in \text{int}S_W$ para todo $t > 0$. Seja $t \mapsto \exp_H(t)$ o único subgrupo a um parâmetro de G o qual o tangente em 0 é $H(e)$. Sabemos por [19] que

$$\exp(tH) = \exp_H(t).$$

Como $\exp_H(t)$ é contínua, para toda vizinhança U de 1 existe uma vizinhança V de $0 \in \mathbb{R}$ tal que $\exp_H(V) \subset U$. Então, U contém elementos da forma $\exp(tH)$ para

$t > 0$, ou seja, U contém elementos de intS_W. Pelo fato de U ser uma vizinhança qualquer da identidade, temos que $1 \in$ fe(intS_W).

Agora seja $g \in S_W$ e U_g uma vizinhança qualquer de g. Considere a aplicação contínua

$$\begin{array}{rccc} \xi: & \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{Sl}(n,\mathbb{R}) \\ & x & \longmapsto & gx \end{array}$$

Notemos que $g = g \cdot 1$, então para vizinhança U_g de g existe uma vizinhança V de 1 tal que $gV \subset U_g$. Tomemos $V' = V \cap \mathrm{int}S_W$. Temos que $V' \neq \emptyset$, pois qualquer aberto contendo a identidade intercepta intS_W, assim, $gV' \neq \emptyset$. Observemos que $gV' \subset gV \subset U_g$ e $gV' \subset g(\mathrm{int}S_W) \subset \mathrm{int}S_W$, já que int$S_W$ é ideal em S_W. Então, $gV' \subset U_g \cap (\mathrm{int}S_W)$, ou seja $U_g \cap (\mathrm{int}S_W) \neq \emptyset$. Desta forma, como U_g é arbitrário, temos que todo aberto contendo g intercepta (intS_W), logo $g \in$ fe(intS_W) e portanto

$$\mathrm{fe}(\mathrm{int}S_W) = S_W.$$

$\square$

O próximo teorema garante a conexidade do semigrupo S_W (ver [5]).Este resultado foi generalizado em [8].

Teorema 2.19 *Se W é um cone pontual e gerador, então S_W é conexo.*

Demonstração: Para mostrar que S_W é conexo, basta mostrar intS_W é conexo, já que $S_W = \mathrm{fe}(\mathrm{intS_W})$, e o fecho de um conexo é conexo.

Seja $S_{inf} = \langle \exp L(S_W) \rangle$ o semigrupo gerado por $L(S_W)$. Notemos que intS_{inf} está contido em intS_W. Temos que intS_{inf} é uma subvariedade aberta e conexa por caminhos, ver *Hofmann-Ruppert* [6] e *Neeb* [7].

Então basta mostrar que existe um caminho contido em intS_W ligando qualquer $g \in (\mathrm{int}S_W)$ a $(\mathrm{int}S_{inf})$, pois suponha que existam $g, h \in (\mathrm{int}S_W - S_{inf})$ e que existam caminhos $\gamma, \delta : [0,1] \to \mathrm{int}S_W$ tais que $\gamma(0) = g$, $\delta(0) = h$ e $\gamma(1), \delta(1) \in$

intS_{inf}. Como intS_{inf} é conexo por caminhos e está contido em intS_W, existe um caminho $\alpha : [0,1] \to \text{int}S_{inf} \subseteq \text{int}S_W$ tal que $\alpha(0) = \gamma(1)$ e $\alpha(1) = \delta(1)$, assim temos que o caminho $\eta : [0,1] \to \text{int}S_W$ dado por

$$\eta(s) = \begin{cases} \gamma(3s), & \text{se } s \in [0, \frac{1}{3}] \\ \alpha(3s-1), & \text{se } s \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \delta(3s-2), & \text{se } s \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

liga g a h em intS_W, o que mostra que intS_W é conexo por caminhos.

Vamos então encontrar esses caminhos, para isso, fixemos $g \in \text{int}S_W$ e uma base B de $\mathbb{R}^n$ como em 2.15. Seja $P \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ o subgrupo cujas matrizes nessa base se escrevem como

$$\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix},$$

com $\mu > 0$ e $Q \in \text{Gl}^+(n-1, \mathbb{R})$. Por construção, $g \in (\text{int}S_W) \cap P$. Mais ainda, seja $H = \text{diag}\{n-1, -1, \dots, -1\}$ nessa base, vimos na demonstração da Proposição 2.16 que $H \in \text{int}L(S_W)$ e portanto $\exp(tH) \in \text{int}S_{inf} \cap P$ para todo $t > 0$, já que $S_{inf} = \langle \exp L(S_W) \rangle$ e

$$\exp(tH) = \begin{pmatrix} e^{t(n-1)} & & & \\ & e^{-t} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-t} \end{pmatrix} \in P.$$

Portanto, $\Gamma := (\text{int}S_{inf}) \cap P$ é um semigrupo de interior não vazio de P, pois Γ é um aberto não vazio de P (topologia de subespaço), ou seja, interseção de um aberto de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ com P.

Seja agora $\Phi : P \to \text{Sl}(n-1, \mathbb{R})$ a aplicação definida por

$$\Phi\left(\begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix}\right) = (\text{det}Q)^{-\frac{1}{n-1}} Q = \mu^{\frac{1}{n-1}} Q,$$

sendo a última igualdade do fato que $\mu \text{det}Q = 1$. Temos que essa aplicação é um homomorfismo sobrejetor. De fato, dado $A \in \text{Sl}(n-1, \mathbb{R})$, tomemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix} \in P$$

então
$$\Phi\left(\left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & A \end{array}\right]\right) = (\det A)^{-\frac{1}{n-1}} A = A,$$
logo Φ é sobrejetor, e homomorfismo pois dados
$$A = \left[\begin{array}{cc} \mu_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{array}\right], B = \left[\begin{array}{cc} \mu_2 & 0 \\ 0 & B_1 \end{array}\right] \in P$$
temos que
$$AB = \left[\begin{array}{cc} \mu_1\mu_2 & 0 \\ 0 & A_1B_1 \end{array}\right],$$
então
$$\begin{aligned} \Phi(A,B) &= \Phi\left(\left[\begin{array}{cc} \mu_1\mu_2 & 0 \\ 0 & A_1B_1 \end{array}\right]\right) = (\det A_1B_1)^{-\frac{1}{n-1}} A_1B_1 \\ &= (\det A_1 \det B_1)^{-\frac{1}{n-1}} A_1B_1 = \det A_1^{-\frac{1}{n-1}} \det B_1^{-\frac{1}{n-1}} A_1B_1 \\ &= \det A_1^{-\frac{1}{n-1}} A_1 \det B_1^{-\frac{1}{n-1}} B_1 = \Phi(A)\Phi(B). \end{aligned}$$

Temos que Φ é uma aplicação aberta, pois é uma projeção dos elementos de P em $\mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$. De todas essas informações, nos resulta que $\Phi(\Gamma)$ é um semigrupo de interior não vazio em $\mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$. De fato, tomemos $X, Y \in \Phi(\Gamma)$, então $X = \Phi(A)$ e $Y = \Phi(B)$, com $A, B \in \Gamma$. Observe que $XY = \Phi(A)\Phi(B) = \Phi(AB)$, daí, como Γ é um semigrupo, $AB \in \Gamma$, então $XY \in \Phi(\Gamma)$, logo $\Phi(\Gamma)$ é um semigrupo. O motivo pelo qual $\Phi(\Gamma)$ tem interior não vazio, vem do fato de que Φ é aberta, e Γ tem interior não vazio.

Além disso, $\exp(tH) \in \Gamma$ para todo $t > 0$ e $\exp(tH) = \mathrm{diag}\{e^{t(n-1)}, e^{-t}, \ldots, e^{-t}\}$. Então
$$\Phi(\exp(tH)) = (e^{(n-1)(-t)})^{-\frac{1}{n-1}} \cdot \begin{pmatrix} e^{-t} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$
Daí, segue que $1 \in \Phi(\Gamma)$ que é aberto, ou seja, $1 \in \mathrm{int}\Phi(\Gamma)$, e como $\mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$ é conexo, isso mostra que $\Phi(\Gamma) = \mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$, ver Proposição 3.18 em [19].

Essa última afirmação, nos diz que para todo $h' \in \mathrm{Sl}(n-1,\mathbb{R})$, existe $g' \in \Gamma$ que está contido em $\mathrm{int}S_{inf}$ tal que $\Phi(g') = h'$. Então existe $a > 0$ tal que
$$g' = \left[\begin{array}{cc} a & 0 \\ 0 & a^{-\frac{1}{n-1}} h' \end{array}\right] \in \Gamma \subset \mathrm{int}S_{inf}, \tag{2.1}$$

pois $\Phi(g') = a^{\frac{1}{n-1}} a^{-\frac{1}{n-1}} h' = h'$.

Voltando ao elemento $g \in (\text{int}S_W)$ previamente fixado, ele pode ser reescrito pela Proposição 2.15 como

$$\begin{aligned} g &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\det h)^{\frac{1}{n-1}} (\det h)^{-\frac{1}{n-1}} h \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\det h)^{\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

onde $\tilde{h} = (\det h)^{-\frac{1}{n-1}} h \in \text{Sl}(n-1, \mathbb{R})$. A última igualdade vem do fato que $\lambda \det h = 1$.

Em particular, para $\tilde{h} \in \text{Sl}(n-1, \mathbb{R})$ existe $g' \in \text{int}S_{inf}$ da forma descrita em 2.1. Assim, temos duas possibilidades a considerar: $\lambda \leq a$ e $\lambda > a$.

- $\lambda \leq a$.

  Como a aplicação exponencial percorre todos os valores reais positivos, existe $T \geq 0$ tal que $e^{(n-1)T}\lambda = a$. Então, se $H = \text{diag}\{n-1, -1, \ldots, -1\}$ temos que

$$\begin{aligned} \exp(TH)g &= \begin{bmatrix} e^{(n-1)T} & & & \\ & e^{-T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{(n-1)T}\lambda & 0 \\ 0 & e^{-T}\lambda^{-\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(n-1)T}\lambda & 0 \\ 0 & (e^{(n-1)T})^{-\frac{1}{n-1}} \lambda^{-\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-\frac{1}{n-1}} \tilde{h} \end{bmatrix} = g' \in \text{int}S_{inf}. \end{aligned}$$

  Mas $\exp(tH)g \in \text{int}S_W$ para todo $t \geq 0$, pois $\exp(tH)g = g \in \text{int}S_W$ para $t = 0$ e para $t > 0$, vimos na demonstração da Proposição 2.16 que $\exp(tH) \in \text{int}S_W$. Assim, temos um caminho entre $g \in \text{int}S_W$ e $g' \in \text{int}S_{inf}$ sem sair de $\text{int}S_W$.

- $\lambda > a$.

  Bem como no primeiro caso, existe $T > 0$ tal que $ae^{(n-1)T} = \lambda$. Disto temos $a^{-\frac{1}{n-1}} e^{-T} = \lambda^{-\frac{1}{n-1}}$. Assim

$$\exp(TH)g' = \begin{bmatrix} e^{(n-1)T} & & & \\ & e^{-T} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{-T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-\frac{1}{n-1}} h' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ae^{(n-1)T} & 0 \\ 0 & e^{-T}a^{-\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-\frac{1}{n-1}}h' \end{bmatrix} = g,$$

e o caminho $(\exp tH)g'$, com $t \geq 0$ liga $g' \in \text{int}S_{inf}$ e $g \in \text{int}S_W$ sem sair de $\text{int}S_W$, já que $\exp(tH) \in \text{int}S_W$ para todo $t > 0$, $g' \in \text{int}S_{inf} \subset \text{int}S_W$, que é ideal em S_W. Para $t = 0$, $(\exp tH)g' = g' \in \text{int}S_{inf} \subseteq \text{int}S_W$.

Logo, em qualquer um dos casos, construímos um caminho ligando g a $\text{int}S_{inf}$. Assim, $\text{int}S_W$ é conexo por caminhos, logo é conexo. Portanto S_W é conexo. □

A observação abaixo nos diz que no espaço projetivo encontramos dois conjuntos de controle para um semigrupo com mesmas condições da seção anterior, sendo um maximal e o outro minimal. Precisaremos deste fato para demonstrar o próximo teorema.

Observação 2.20 *O espaço projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$ tem dois conjuntos controláveis para S. Chamamos de C o conjunto controlável invariante para S, o qual é maximal com respeito a ordem definida em 1.36, e D o conjunto controlável para S, o qual é minimal com relação a mesma ordem. E mais, D é o maximal para S^{-1}, ou seja, D é o conjunto controlável invariante para S^{-1} (ver [17]).*

O próximo resultado mostra que um semigrupo de compressão, S_W, de um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ pontual e gerador é maximal entre os conexos.

Teorema 2.21 *O semigrupo de compressão S_W é maximal conexo em* $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$.

Demonstração: Seja T semigrupo conexo com interior não vazio contendo propriamente S_W. Notemos primeiramente que T não está contido em

$$S[W] := \{g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}); g[W] \subset [W]\}.$$

Para mostrar isso, vamos supor que $T \subset S[W]$. Então $Tx \subset W \cup -W$, para todo $x \in W$. Entretanto T é conexo, de modo que se tomarmos $x \neq 0$ pertencente a W, então Tx está em uma das componentes conexas de $(W \cup -W) - \{0\}$. Como T contém a identidade, Tx é um conexo contendo x, ou seja, Tx intercepta a componente conexa W, o que nos resulta em $Tx \subset W$. Assim $T \subset S_W$, o que contraria a hipótese de S_W ser um subconjunto próprio de T.

Agora como foi visto na demonstração da Proposição 2.16, dado um elemento f_1 no interior de W, podemos tomar uma matriz diagonal H na qual f_1 é autovetor associado ao primeiro autovalor de H, assim f_1 é autovetor de $\exp(H) \in \mathrm{int}S_W$. Disto temos que qualquer reta em $\mathrm{int}[W]$ é gerada por um autovetor de $\exp(H)$ para algum $H \in \mathrm{int}L(S_W)$ que significa que qualquer elemento em $\mathrm{int}[W]$ é ponto fixo de algum elemento regular $h \in \mathrm{int}S_W$. Então $\mathrm{int}[W] \subset (C_{\Theta_{\mathbb{P}}})_0$ e assim, pelos Teoremas 3.1 de [12] e 3.1 de [17] e pelo item (ii) da Proposição 1.45, temos que $(C_{\Theta_{\mathbb{P}}})_0 = (\mathrm{int}S_W)x$ para todo $x \in (C_{\Theta_{\mathbb{P}}})_0$. Então tomando $x \in \mathrm{int}[W]$, temos $(C_{\Theta_{\mathbb{P}}})_0 = (\mathrm{int}S_W)x \subset [W]$, o que implica em

$$C_{\Theta_{\mathbb{P}}} = \mathrm{fe}((C_{\Theta_{\mathbb{P}}})_0) \subset \mathrm{fe}([W]) = [W],$$

logo $C_{\Theta_{\mathbb{P}}} = [W]$, e o conjunto de controle minimal é $\mathbb{P}^{n-1} - [W]$ (ver item 2 do Exemplo 4.10 em [12]).

Usando o fato que T não está contido em $S[W]$, temos que existe $g \in T$ e algum $x \in \mathrm{int}[W]$ tal que gx não está contido em $W \cup -W$, isto é, $gx \in \mathbb{P}^{n-1} - [W]$. Isto nos resulta que $[W] = C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subsetneq C_T$, onde C_T é o conjunto controlável invariante para T em $\mathbb{P}^{n-1}$.

Sabemos pela Observação 2.20 que no projetivo $C_{S_W^{-1}} = \mathrm{fe}(\mathbb{P}^{n-1} - [W])$. Assim C_T intercepta $\mathbb{P}^{n-1} - [W] \subset C_{S_W^{-1}}$, ou seja,

$$C_T \cap \mathrm{int}C_{S_W^{-1}} \neq \emptyset.$$

Do fato de $S_W \subset T$, temos que $S_W^{-1} \subset T^{-1}$. Então $C_{S_W^{-1}} \subset C_{T^{-1}}$ e $\mathrm{int}C_{S_W^{-1}} \subset$

$\text{int}C_{T^{-1}}$. Assim,

$$C_T \cap \text{int}C_{T^{-1}} \neq \emptyset.$$

Como $\text{int}C_T$ é denso em C_T, qualquer aberto que intercepta C_T intercepta também $\text{int}C_T$. Daí obtemos

$$(\text{int}C_T) \cap (\text{int}C_{T^{-1}}) \neq \emptyset$$

e pela Proposição 1.52, T age transitivamente em $\mathbb{P}^{n-1}$. Portanto, pelo Teorema 6.4 de [18], $T = \text{Sl}(n, \mathbb{R})$. □

Com os resultado obtidos na Proposição 2.16 e nos Teoremas 2.19 e 2.21, temos que se W é um cone pontual e gerador em $\mathbb{R}^n$, então o semigrupo de compressão S_W tem interior não vazio e é maximal conexo.

Agora temos com o resultado abaixo, uma "espécie" de recíproca do teorema anterior. O teorema abaixo no diz que se um semigrupo de $\text{Sl}(n, \mathbb{R})$ é maximal entre os conexos e de tipo projetivo, então ele é o semigrupo de compressão de algum cone $W \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2.22 *Seja $S \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo maximal entre os conexos, de tipo projetivo e com $\text{int}S \neq \emptyset$. Então, existe $W \subset \mathbb{R}^n$, um cone pontual e gerador, tal que $S = S_W$, e mais, S contém a identidade.*

Demonstração: Comecemos observando que $C_{\Theta_\mathbb{P}} \subsetneq \mathbb{P}^{n-1}$, o conjunto controlável invariante para S em $\mathbb{P}^{n-1}$, é fechado. Então $C_{\Theta_\mathbb{P}} = \text{fe}(Sx)$, para todo $x \in C_{\Theta_\mathbb{P}}$. Daí, podemos concluir que $C_{\Theta_\mathbb{P}}$ é conexo (pois Sx o é), compacto (já que é fechado em uma variedade compacta) e está contido em um semi-espaço (ver Proposição 4.8 de [17]).

Temos que $S \subset S_{C_{\Theta_\mathbb{P}}} = \{g \in \text{Sl}(n, \mathbb{R}); gC_{\Theta_\mathbb{P}} \subset C_{\Theta_\mathbb{P}}\}$, pois dado $g \in S$ e $x \in C_{\Theta_\mathbb{P}}$, $gx \in \text{fe}(Sx) = C_{\Theta_\mathbb{P}}$.

Considere $\pi : \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}$ a projeção canônica que associa a cada vetor não nulo de $\mathbb{R}^n$ o subespaço gerado por ele.

Seja $D = \pi^{-1}(C_{\Theta_{\mathbb{P}}}) = D^+ \cup D^-$, com D^+ e D^- suas componentes conexas. Por $C_{\Theta_{\mathbb{P}}}$ estar contido em um semi-espaço e ser compacto temos que $D^+ \cap D^- = \{0\}$, assim tomando $W \subset \mathbb{R}^n$ o cone convexo gerado por D^+, então $-W$ é o cone convexo gerado por D^-. Desta forma, W e $-W$ são cones pontuais.

Agora, seja $g \in S$. Então $gD^+ \subset D^+$ ou $gD^+ \subset D^-$. De fato, suponha que gD^+ não esteja contido em D^- e tomemos $x \in D^+$. Sabemos que

$$g[x] = [gx] \in C_{\Theta_{\mathbb{P}}} \subset [D^+ \cup D^-].$$

Então $gx \in D^+$ ou $gx \in D^-$. Como supomos que não está em D^-, concluímos que $gx \in D^+$.

Temos que se $gD^+ \subset D^+$, então $gW \subset W$. Com efeito, tomemos $w \in W$ e $g \in S$. Então $w = \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_m a_m$, com $\lambda_i \geq 0$ e $a_i \in D^+$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} gw &= g(\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_m a_m) \\ &= \lambda_1(ga_1) + \cdots + \lambda_m(ga_m) \\ &= (\lambda_1 d_1 + \cdots + \lambda_m d_m) \in W, \end{aligned}$$

pois $d_i = ga_i \in D^+$. De modo análogo mostramos que se $gD^+ \subset D^-$, então $gW \subset -W$.

No entanto, afirmamos que se $g \in S$, então

$$gW \subset W \text{ e } g(-W) \subset -W.$$

De fato, seja $W_0 := (W - \{0\})$ e suponha por absurdo que exista $g \in S$ tal que $gW_0 \subset -W_0$. Temos que $g^2 \in S$ e

$$g^2 W_0 = g(gW_0) \subset g(-W_0) = -g(W_0) \subset -(-W_0) = W_0.$$

Daí, temos que $gW_0 \subset -W$ e $g^2 W_0 \subset W_0$, o que é um absurdo, pois como a interseção $W_0 \cap -W$ é vazia, temos uma desconexão de SW_0 que é conexo. Logo, $SW \subset W$ e $S(-W) \subset -W$.

Assim, $S \subset S_W$. Mas S é maximal conexo, e como S_W também é conexo e $S_W \neq \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, temos que

$$S = S_W,$$

e portanto contém a identidade. □

Corolário 2.23 *Se $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ é um semigrupo maximal conexo com interior não vazio e de tipo projetivo, então S deixa invariante algum cone pontual e gerador.*

Observação 2.24 *Notemos que para S nas condições do Teorema 2.10, ou seja, S é um semigrupo próprio de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$, conexo, com interior não vazio, contendo a identidade e de tipo projetivo, temos que S deixa invariante um cone $W \subset \mathbb{R}^n$ pontual e gerador. Notemos ainda que S satisfaz todas as condições para chegarmos ao passo da demonstração de 2.22 que afirma que $S \subset S_W$, ou melhor dizendo, um semigrupo $S \subsetneq \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ conexo, com interior não vazio, contendo a identidade e de tipo projetivo sempre está contido em um semigrupo de compressão de algum cone $W \subset \mathbb{R}^n$ que seja pontual e gerador.*

Capítulo 3

Cones invariantes e cones-semigrupos

O principal objetivo deste capítulo é estudar uma condição alternativa, em vista do capítulo anterior, para a existência de cones pontuais e geradores invariantes para a ação de semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$. Para isso, apresentamos definições e resultados sobre cones-semigrupos, que nos auxiliam nesta questão.

Antes de começar os estudos sobre cones-semigrupos e cones invariantes para a ação dos primeiros, vamos trazer um breve resumo sobre álgebra tensorial seguido de algumas observações que nos serão úteis. Nossos estudos de cones invariantes para a ação de cones-semigrupos de $\mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ foram originalmente desenvolvidos na tese de doutorado [4].

3.1 Álgebra Tensorial

Apresentamos nesta seção um breve resumo sobre álgebra tensorial, com objetivo de mostrar que dado um subconjunto $A = \{(v, \alpha); v \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \Gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*\}$ com interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, então o subconjunto

$$B = \{(v \otimes \alpha); v \in U \subset \mathbb{R}^n \text{ e } \alpha \in \Gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*\}$$

tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$, pois será utilizado em um dos lemas da próxima seção.

Sendo assim, comecemos estabelecendo algumas notações.

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$. O produto tensorial entre V e W, $V \otimes W$ é o espaço (vetorial sobre $\mathbb{K}$) das aplicações bilineares

$$f : V^* \times W^* \longrightarrow \mathbb{K}$$

onde V^* e W^* são os duais de V e W, respectivamente.

Dados $v \in V$ e $w \in W$, o seu produto tensorial $v \otimes w$ é o funcional bilinear cujo valor em $(\alpha, \beta) \in V^* \times W^*$ é dado por

$$(v \otimes w)(\alpha, \beta) = \alpha(v)\beta(w).$$

O conjunto $\{v \otimes w; v \in V \text{ e } w \in W\}$ gera $V \otimes W$ e se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ são bases de V, e W respectivamente, então

$$\{v_i \otimes w_j; 1 \leq i \leq n \text{ e } 1 \leq j \leq m\}$$

é base de $V \otimes W$ e portanto $\dim(V \otimes W) = \dim V \dim W$.

Existem diversos isomorfismos naturais entre diferentes produtos tensoriais e outros espaços vetoriais. Alguns deles são:

- O produto tensorial é associativo

$$(V \otimes W) \otimes U \approx V \otimes (W \otimes U) \approx V \otimes W \otimes U$$

  com os isomorfismos dados por

$$(v \otimes w) \otimes u \leftrightarrow v \otimes (w \otimes u) \leftrightarrow v \otimes w \otimes u$$

- O produto tensorial é comutativo

$$V \otimes W \approx W \otimes V$$

  com o isomorfismo dado por $v \otimes w \leftrightarrow w \otimes v$

- O espaço das transformações lineares de V em W é isomorfo a $V^* \otimes W$. O isomorfismo é obtido associando a $(\alpha \otimes w) \in V^* \otimes W$ a transformação linear $T : V \longrightarrow W$ definida por $T(u) = \alpha(u)w$.

Fixando bases δ e γ de V e W, o último isomorfismo citado acima é dado por um produto de matrizes. De fato, a matriz $[\alpha]_\delta$, do funcional α em relação a base δ, é uma matriz linha com $n = \dim V$ colunas, já a matriz $[w]_\gamma$, das coordenadas de w em relação a base γ, é uma matriz coluna com $m = \dim W$ linhas. Portanto, está bem definido o produto $[w]_\gamma[\alpha]_\delta$ que é uma matriz $m \times n$, e ainda mais, é a matriz de T:

$$[T]^\delta_\gamma = [w]_\gamma[\alpha]_\delta.$$

Esses isomorfismos são chamados naturais, pois eles dependem apenas das definições dos espaços envolvidos e não requerem escolha adicional.

Observação 3.1 *No caso em que $V = W = \mathbb{R}^n$, temos que*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* & \approx & (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n \\ (\mathbb{R}^n)^* \otimes \mathbb{R}^n & \approx & \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \end{array}$$

Como já sabemos que $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \approx M_n(\mathbb{R})$. Então temos através desses isomorfismos uma identificação entre $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ e $M_n(\mathbb{R})$.

Vamos agora identificar $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ com $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$.

Seja $\mathfrak{C}$ a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \varphi_{\mathfrak{C}} : & \mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & (v \otimes \alpha) & \longmapsto & [v]_{\mathfrak{C}}[\alpha]_{\mathfrak{C}} \end{array}$$

o isomorfismo citado acima. Consideremos em $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ a topologia induzida por $\varphi_{\mathfrak{C}}$, ou seja, os abertos de $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$ são imagem inversa de abertos de $M_n(\mathbb{R})$ por $\varphi_{\mathfrak{C}}$. Assim temos que $\varphi_{\mathfrak{C}}$ é contínua.

Agora consideremos a aplicação abaixo:

$$\begin{array}{rccc} \psi_{\mathfrak{C}} : & \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & (v, \alpha) & \longmapsto & [v]_{\mathfrak{C}}[\alpha]_{\mathfrak{C}}. \end{array}$$

Vamos mostrar que a imagem de um subconjunto com interior não vazio de $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$, por $\psi_{\mathfrak{C}}$, tem interior não vazio em $M_n(\mathbb{R})$.

Tomemos um subconjunto A de interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Então temos que int$A$ é um aberto em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Identificando $(\mathbb{R}^n)^*$ com o próprio $\mathbb{R}^n$, podemos obter um aberto contido em (int$A$) da forma:

$$V \times W = (V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n) \times (W_1 \times W_2 \times \ldots \times W_n)$$

onde os $V_i's$ e $W_i's$ são abertos da reta.

Notemos que

$$\psi_{\mathfrak{C}}(V \times W) = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1 & W_2 & \ldots & W_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1W_1 & V_1W_2 & \ldots & V_1W_n \\ V_2W_1 & V_2W_2 & \ldots & V_2W_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ V_nW_1 & V_nW_2 & \ldots & V_nW_n \end{bmatrix}$$

Como em $\mathbb{R}$ o produto de abertos é aberto, temos que V_iW_j é aberto, para todo $1 \leq i, j \leq n$. Então $\psi_{\mathfrak{C}}(V \times W)$ é um aberto no conjunto de matrizes, contido em $\psi_{\mathfrak{C}}(A)$, e portanto a imagem de A, por $\psi_{\mathfrak{C}}$, tem interior não vazio.

Proposição 3.2 *A partir dos comentários feitos acima, dado um subconjunto*

$$A = \{(v, \alpha); v \in U \subset \mathbb{R}^n \ e \ \alpha \in \Gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*\}$$

com interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$*, então*

$$B = \{(v \otimes \alpha); v \in U \subset \mathbb{R}^n \ e \ \alpha \in \Gamma \subset (\mathbb{R}^n)^*\}$$

tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \otimes (\mathbb{R}^n)^*$*.*

Demonstração: De fato, $B = \varphi_{\mathfrak{C}}^{-1}(\psi_{\mathfrak{C}}(A))$. Como já visto, $\psi_{\mathfrak{C}}(A)$ tem interior não vazio, ou seja, contém um aberto e como $\varphi_{\mathfrak{C}}$ é contínua, temos que $\varphi_{\mathfrak{C}}^{-1}(\psi_{\mathfrak{C}}(A))$ contém um aberto, logo B tem interior não vazio. $\square$

3.2 Cone-semigrupo

Apresentamos nesta seção o principal resultado deste capítulo, o qual nos dá uma condição alternativa para a existência de cones invariantes para a ação de semigrupos $S \subset \mathrm{Sl}(n, \mathbb{R})$ com interior não vazio. Apresentamos também, alguns lemas, observações e definições necessárias para a demonstração deste resultado.

Comecemos com a definição de cone-semigrupo, um elemento importante para os estudos deste capítulo.

Definição 3.3 *Um conjunto de transformações lineares K é dito um cone-semigrupo se:*

(i) K é fechado na topologia usual das transformações lineares;

(ii) K é fechado por combinações cônicas: se $A_1, \ldots, A_r \in K$ e $a_1, \ldots, a_r \geq 0$ então $a_1 A_1 + \ldots + a_r A_r \in K$;

(iii) K é fechado pelo produto associativo de matrizes: se $A, B \in K$ então $AB \in K$.

O nome escolhido é justamente pelo fato de K ser um cone no espaço das transformações lineares, por (i) e (ii), e de K ser um semigrupo, por (iii).

Definimos também o cone-semigrupo gerado por um semigrupo $S \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Definição 3.4 *Seja $S \subset \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo, denotemos por $K(S)$ o fecho do cone convexo gerado por S no espaço de todas as matrizes, isto é,*

$$K(S) = \mathrm{fe}(\mathrm{co}(S))$$

onde $\mathrm{co}(S) = \{a_1 g_1 + \ldots + a_l g_l; a_i \geq 0 \text{ e } g_i \in S\}$.

Proposição 3.5 *$K(S)$ definido acima é um cone-semigrupo.*

Demonstração: Primeiramente notemos que $K(S)$ é fechado na topologia usual das transformações lineares, pela sua própria definição.

Segundo, $K(S)$ é fechado por combinações cônicas. De fato, seja

$$a_1A_1 + \cdots + a_rA_r, \text{ com } a_i \geq 0 \text{ e } A_i \in K(S).$$

Então existem sequências $(A_i^j)_{j=1,\ldots}$ tais que $A_i^j \to A_i$ quando $j \to \infty$, com os elementos $A_i^j \in \text{co}(S)$. Assim os elementos da forma $(a_1A_1^j + \cdots + a_rA_r^j) \in \text{co}(S)$ para cada j, e quando $j \to \infty$, a sequência $(a_1A_1^j + \cdots + a_rA_r^j) \to (a_1A_1 + \cdots + a_rA_r)$, ou seja,

$$(a_1A_1 + \cdots + a_rA_r) \in \text{fe}(\text{co}(S)) = K(S).$$

Terceiro, $K(S)$ é fechado para o produto de matrizes. Notemos que se $A, B \in \text{co}(S)$, então $AB \in \text{co}(S)$. De fato, seja $A = a_1g_1 + \cdots + a_rg_r$ e $B = b_1h_1 + \cdots + b_lh_l$, tomemos $n = \max\{r, l\}$. Então

$$AB = (\sum_{i,j=1}^{n} a_ib_jg_ih_j) \in \text{co}(S),$$

pois $g_ih_j \in S$, pelo fato de S ser semigrupo, e ainda $a_ib_j \geq 0$. Por outro lado, se $A, B \in K(S)$, existem sequências $A_n \to A$ e $B_n \to B$, com $A_n, B_n \in \text{co}(S)$, então $A_nB_n \in \text{co}(S)$ e como a multiplicação de matrizes é uma aplicação contínua, temos que $A_nB_n \to AB$, logo $AB \in K(S)$ e portanto, $K(S)$ é um cone-semigrupo. $\square$

Apresentamos agora algumas observações que nos permitem adaptar um cone próprio do espaço de matrizes às condições dos lemas utilizados na demonstração do teorema principal desta seção, os quais encontramos mais adiante.

Observações:

1. Para um cone próprio K no espaço de matrizes, existe um semi-espaço em $M_n(\mathbb{R})$ que o contém. Para nós aqui, um semi-espaço em $M_n(\mathbb{R})$ é um conjunto

do tipo

$$\{A \in M_n(\mathbb{R}) \text{ tal que } \gamma(A) \geq 0 \text{ para algum funcional linear } \gamma\},$$

com $\gamma : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$.

2. Como a forma traço,

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Tr}: & M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (A, B) & \longmapsto & \mathrm{tr}(AB) \end{array}$$

é não degenerada, existe $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}(XY) \geq 0$, para todo $Y \in K$, já que todo funcional linear é da forma $Y \mapsto \mathrm{tr}(XY)$, para algum X.

3. Dado $v \in \mathbb{R}^n$, Kv é um cone em $\mathbb{R}^n$ que é invariante por K.

(i) Tomemos $w_1 = gv$ e $w_2 = hv$ em Kv. Então $g, h \in K$. Temos que $w_1 + w_2 = gv + hv = (g+h)v$. Como K é um cone semigrupo, $(g+h) \in K$ e assim $(g+h)v \in Kv$. Logo $Kv + Kv \subset Kv$.

(ii) Seja $\alpha \in \mathbb{R}_+$, então se $g \in K$ temos $\alpha g \in K$, assim $\alpha(gv) = (\alpha g)v \in Kv$, o que implica em $\mathbb{R}_+ Kv \subset Kv$.

(iii) Seja $u \in \mathbb{R}^n$, tal que $u \in \mathrm{fe}(Kv)$. Então existe uma sequência $(g_n v) \in Kv$ tal que $g_n v \to u$, onde g_n é uma sequência em K, convergente. Como K é fechado, $g_n \to g \in K$, então $g_n v \to gv$. Pela unicidade do limite temos que $u = gv \in Kv$. Assim $\mathrm{fe}(Kv) \subset Kv$ e como $Kv \subset \mathrm{fe}(Kv)$, temos que $\mathrm{fe}(Kv) = Kv$, logo Kv é fechado.

Portanto, de (i), (ii) e (iii) temos que Kv é um cone em $\mathbb{R}^n$

Kv é invariante por K. Com efeito, dados $(gv) \in Kv$ e $h \in K$ temos $h(gv) = (hg)v \in Kv$, pois $(hg) \in K$ por este ser um cone-semigrupo.

4. Se K tem interior não vazio em $M_n(\mathbb{R})$, então Kv é gerador.

Considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & A & \longmapsto & Av \end{array}$$

Temos que Ψ é aberta. De fato, seja $U \subset M_n(\mathbb{R})$ um subconjunto aberto, temos que $\Psi(U) = Uv$. Vamos mostrar que Uv é aberto em $\mathbb{R}^n$. Tomemos $uv \in Uv$. Como U é aberto, existe uma vizinhança V de u tal que $V \subset U$. Então $Vv \subset Uv$ é uma vizinhança de uv. Logo Uv é aberto.

Agora, como $\text{int}K$ é um aberto em K, temos que $\Psi(\text{int}K)$ é um aberto em $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, $\Psi(\text{int}K) = (\text{int}K)v \subset Kv$. Logo, como Kv contém um subconjunto aberto, temos que $\text{int}(Kv) \neq \emptyset$. Portanto, Kv é um cone gerador em $\mathbb{R}^n$.

O teorema a seguir é o principal resultado deste capítulo e dá uma condição alternativa à vista do capítulo anterior para a existência de cones $W \subset \mathbb{R}^n$ invariantes para a ação de S.

Teorema 3.6 *Seja $S \subset \text{Sl}(n, \mathbb{R})$ um semigrupo de interior não vazio. Suponha que $K(S)$ é um cone próprio no espaço das matrizes. Então, S deixa invariante um cone pontual e gerador $W \subset \mathbb{R}^n$.*

Para demonstrar este teorema, precisamos de alguns comentários, definições e resultados, os quais apresentamos a partir de agora.

Consideremos a partir de agora, K como sendo um cone-semigrupo próprio de interior não vazio. Pelas Observações 3, e 4, anteriores temos que Kv é um cone invariante por K e gerador em $\mathbb{R}^n$.

Agora, pelo Lema 2.9, nosso problema se resume em encontrar um $v \in \mathbb{R}^n$ tal que Kv seja próprio. O Lema 3.13, que veremos mais adiante, garante que se existir um par $(v \otimes \alpha) \in K$ tal que $\text{tr}(X(v \otimes \alpha)) > 0$, com $X \in M_n(\mathbb{R})$ e $\text{tr}(XY) \geq 0$ para todo $Y \in K$, onde K é um cone-semigrupo, então Kv é um cone próprio. Assim, nosso trabalho se resume a encontrar tal par (v, α).

Então nesse sentido, trazemos as observações, definições e lemas que nos permitem encontrar tal par.

Observações:

- Temos que $(\text{int}K)$ intercepta $\text{Sl}(n,\mathbb{R})$.

  Para demonstrar, começamos afirmando que $(\text{int}K) \cap \text{Gl}^+(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. De fato, se $g \in K$ temos que $\det g \neq 0$ (pois se $g \in K$ então $g^{-1} \in -K$, já que K é um semigrupo com respeito ao produto de matrizes, assim como g é inversível, tem determinante não nulo), daí $g^2 \in K \cap \text{Gl}^+(n,\mathbb{R})$, pois $g^2 \in K$ e $\det(g^2) = (\det g)^2 > 0$. Como K é gerador, existe $g \in (\text{int}K)$, tal que $\det g \neq 0$, então seguindo a explicação acima existe $g_1 \in (\text{int}K)$ tal que $\det g_1 > 0$ e assim $(\text{int}K) \cap \text{Gl}^+(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$. Como conseqüência, temos que $(\text{int}K) \cap \text{Sl}(n,\mathbb{R}) \neq \emptyset$, pois tomando $g_1 \in (\text{int}K) \cap \text{Gl}^+(n,\mathbb{R})$ podemos escrever $h = (\sqrt[n]{\det g_1})^{-1} g_1$, daí, $\det h = 1$ e assim $h \in (\text{int}K) \cap \text{Sl}(n,\mathbb{R})$.

- Seja $S_K := K \cap \text{Sl}(n,\mathbb{R})$. Temos que S_K é um semigrupo de interior não vazio em $\text{Sl}(n,\mathbb{R})$.

  De fato, notemos que $(\text{int}K) \cap \text{Sl}(n,\mathbb{R})$ é um aberto de S_K em $\text{Sl}(n,\mathbb{R})$, pois é aberto de $\text{Sl}(n,\mathbb{R})$ contido em S_K. Logo $\text{int}S_K \neq \emptyset$. É um semigrupo pois dados $g,h \in S_K$ então $g,h \in K$ o que implica em $gh \in K$ e também como $g,h \in \text{Sl}(n,\mathbb{R})$, temos que $gh \in \text{Sl}(n,\mathbb{R})$. Assim $gh \in K \cap \text{Sl}(n,\mathbb{R}) = S_K$.

Para o que vem a seguir, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.7 *Um vetor $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, é dito ser S_K-compatível com o funcional linear $\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*$ se $\alpha(v) > 0$ e se existe uma matriz diagonalizável $h \in (\text{int}S_K)$, com auto-valores $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n$ tal que v é auto-vetor associado a λ_1 e os demais auto-vetores estão contidos no hiperplano $ker(\alpha)$.*

O lema a seguir garante que o conjunto dos pares (v,α) que são S_K-compatíveis tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$.

Lema 3.8 *Seja $C_{\theta_{\mathbb{P}}}$ o conjunto controlável invariante para S_K em $\mathbb{P}^{n-1}$ e seja C_0 seu conjunto de transitividade. Tomemos $[v] \in C_0$. Então o conjunto*

$$\mathcal{C}(S_K, v) = \{\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*; \alpha \textit{ é } S_K - \textit{compatível com } v\}$$

tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$.

Demonstração: Como $[v] \in C_0$, pelo Teorema 3.4 de [13], existe $h \in \text{int}(S_K)$ diagonalizável com auto-valores $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots \lambda_n > 0$ tal que v é auto-vetor associado a λ_1.

Denotemos por $B = \{v, v_2, \dots, v_n\}$ uma base de auto-vetores de h. Agora tomemos o funcional linear de tal forma que $\alpha(v) > 0$ e $\ker\alpha = \langle v_2, \dots, v_n\rangle$, por exemplo $[\alpha]_B = (1\ 0 \dots 0)$. Temos que α é S_K-compatível com v pela sua própria definição, então $\mathcal{C}(S_K, v) \neq \emptyset$.

Para mostrar que int$\mathcal{C}(S_K, v) \neq \emptyset$, seja N o grupo das transformações lineares n tais que $[n]_B$ é triangular superior com $1's$ na diagonal principal, ou seja,

$$[n]_B = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Considerando a ação de N em $(\mathbb{R}^n)^*$ definida por

$$\begin{array}{ccc} N \times (\mathbb{R}^n)^* & \longrightarrow & (\mathbb{R}^n)^* \\ (n, \alpha) & \longmapsto & \alpha \circ n^{-1}, \end{array}$$

temos os seguintes resultados:

1. Seja $U \subset N$ aberto, então $U\alpha = \{n\alpha \in (\mathbb{R}^n)^*; n \in U\}$ gera o cone $\mathbb{R}^+(U\alpha)$ que tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$.

   De fato, tomemos α como anteriormente, ou seja, $[\alpha]_B = (1\ 0 \dots 0)$. Notemos que

   $$[n\alpha] = [\alpha \circ n^{-1}] = [\alpha]_B[n^{-1}]_B = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Então a órbita $N\alpha$ é da forma $N\alpha = (1\ a_2\ \dots\ a_n)$ com $a_i \in \mathbb{R}$ e $i = 1, 2 \dots, n$. Como $(\mathbb{R}^n)^*$ pode ser identificado com o próprio $\mathbb{R}^n$, podemos projetar $(\mathbb{R}^n)^*$ no espaço projetivo, da mesma forma que projetamos $\mathbb{R}^n$, ou seja, dado um vetor de $(\mathbb{R}^n)^*$ a projeção é a reta que une esse vetor à origem. Assim, temos que a órbita $N\alpha$ projeta sobre um conjunto aberto e denso do espaço projetivo de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Além do mais, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \xi : & N & \longrightarrow & N\alpha \\ & n & \longmapsto & n\alpha \end{array}$$

é aberta, logo $U\alpha$ é um aberto de $N\alpha$ que se projeta num aberto do espaço projetivo de $(\mathbb{R}^n)^*$ (pois a projeção é uma aplicação aberta) que tem interior não vazio em $\mathbb{P}^{n-1}$, pois a projeção de $N\alpha$ é densa em $\mathbb{P}^{n-1}$, como vimos acima.

Portanto o cone $\mathbb{R}^+(U\alpha)$ é gerador, ou seja, tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$.

2. Existe um aberto $U \subset N$, vizinhança da identidade tal que $(nhn^{-1}) \in \text{int}S_K$ para todo $n \in U$. De fato, temos que

$$\begin{array}{rccc} \phi : & N & \longrightarrow & \text{Sl}(n, \mathbb{R}) \\ & n & \longmapsto & nhn^{-1} \end{array}$$

é contínua. Como $h = ehe^{-1}$ e ainda h pertence ao aberto $\text{int}S_K$, temos que $\phi^{-1}(\text{int}S_K)$ é um aberto que contém a identidade, ou seja, podemos tomar U, uma vizinhança da identidade contida em $\phi^{-1}(\text{int}S_K)$.

3. Se $nhn^{-1} \in \text{int}S_K$, com $n \in N$, então $n\alpha$ é S_K-compatível com v.

Primeiro observe que $nv = v$ para todo $n \in N$.

$$\begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(matrizes em relação a base B) e que nhn^{-1} é uma matriz diagonalizável, com autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$.

Vamos agora mostrar que se $(nhn^{-1}) \in \text{int}S_K$, então $n\alpha$ é S_K-compatível com v.

(i) $n\alpha(v) = \alpha \circ n^{-1}(v) = \alpha(n^{-1}v) = \alpha(v) > 0$, pois $n^{-1} \in N$.

(ii) Temos que nhn^{-1} é a matriz que realiza a compatibilidade, pois:

- $(nhn^{-1}) \in \text{int}S_K$;
- (nhn^{-1}) é diagonalizável, com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$;
- v é auto-vetor associado a λ_1. De fato,

  $nhn^{-1}(v) = nh(n^{-1}v) = nh(v) = n(\lambda_1 v) = \lambda_1 nv = \lambda_1 v.$
- Os demais auto-vetores são $nv_i,\ i = 2, \ldots, n$ e estão contidos no hiperplano $\ker(n\alpha)$. De fato, temos que $\ker(n\alpha) = n\ker\alpha$, pois

  $(n\alpha)(w) = 0 \Leftrightarrow (\alpha \circ n^{-1})(w) = 0 \Leftrightarrow \alpha(n^{-1}(w)) - 0 \Leftrightarrow n^{-1}(w) \in \ker\alpha$

  $\Leftrightarrow n^{-1}v = u,$ com $u \in \ker\alpha \Leftrightarrow v = nu \Leftrightarrow v \in (n\ker\alpha)$.

  Como $\ker\alpha = \langle v_2, \ldots, v_n \rangle$, temos que $n\ker\alpha = \langle nv_2, \ldots, nv_n \rangle$, que são os demais auto-vetores, pois $(nhn^{-1})(nv_j) = nh(v_j) = n(\lambda_j v_j) = \lambda_j(nv_j)$.

Assim, tomando U como em 2, temos por 3 que os elementos de $U\alpha$ são S_K-compatíveis com v e por 1. temos que o cone gerado por $U\alpha$, $\mathbb{R}^+(U\alpha)$, tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$ e os elementos deste cone, são também S_K-compatíveis com v, pois eles são da forma $(\lambda n\alpha)$, com $\lambda > 0$ e $n \in U$. Com isso temos

$$(\lambda n\alpha)(v) = \lambda(n\alpha(v)) > 0$$

e a matriz de compatibilidade é (λnhn^{-1}), com auto-valores $\lambda\lambda_j,\ j = 1, \ldots, n$.

Deste modo, o cone $\mathbb{R}^+(U\alpha)$ está contido em $\mathcal{C}(S_K, v)$ e portanto $\mathcal{C}(S_K, v)$ tem interior não vazio em $(\mathbb{R}^n)^*$. □

Corolário 3.9 *O conjunto dos pares (v, α) que são S_K-compatíveis tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$.*

Demonstração: Já sabemos que para cada $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $[v] \in C_0$ temos um aberto $W \subset (\mathbb{R}^n)^*$ tal que v é S_k compatível com α para todo $\alpha \in W$.

Desta forma, precisamos mostrar que existe uma vizinhança $V_v \times W_\alpha$ de (v, α) tal que todos $(u, \beta) \in V_v \times W_\alpha$ são S_k-compatíveis.

Como $\alpha(v) > 0$, por continuidade de $T : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}$ onde $T(u, \gamma) = \gamma(u)$, temos que existe uma vizinhança $V_v \times W_\alpha$ de (v, α) tal que $\beta(u) > 0$ para todo $(u, \beta) \in V_v \times W_\alpha$. Pela definição de S_K-compatível existe $h \in \text{int}S_k$ diagonal com autovalores $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ tal que $h(v) = \lambda_1 v$ e os demais autovalores $\{v_2, \ldots, v_n\}$ estão no $Ker(\alpha)$, ou seja,

$$[h]_{B_1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde $B_1 = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$.

Consideremos então a transformação $\widetilde{h}$ tal que

$$[\widetilde{h}]_{B_2} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde $B_2 = \{u, u_2, \ldots, u_n\}$ próxima de B_1 e u na vizinhança V_v de v. Defina β tal que $\ker\beta = \text{ger}\{u_2, \ldots, u_n\}$ e $\beta \in W_\alpha \subset W$. Como B_2 é uma base próxima de B_1 temos que a matriz mudança de base de B_2 para B_1, M, é uma pequena pertubação da matriz identidade. Assim, como

$$[\widetilde{h}]_{B_1} = M^{-1}[\widetilde{h}]_{B_2} M,$$

temos que $\widetilde{h} \in \text{int}S_K$. Portanto por construção temos que (u, β) é S_K-compatível.
$\square$

O lema abaixo, mostra que existe um par $(v \otimes \alpha)$ tal que $\text{tr}(X(v \otimes \alpha))$ é não nulo.

Lema 3.10 *Se $X \neq 0$ então existe um par (v, α) que é S_K-compatível e tal que $\text{tr}(X(v \otimes \alpha)) \neq 0$.*

Demonstração: Considere o conjunto dos elementos

$$D = \{(v \otimes \alpha); v \in \mathbb{R}^n,\ \alpha \in (\mathbb{R}^n)^*\}$$

Vimos na Observação 3.1 que podemos identificar D com o espaço de matrizes, e assim, como X é não nulo, temos que a forma traço não se anula identicamente em D.

Agora, pelo Corolário 3.9, o conjunto dos pares (v, α) que são S_K-compatíveis tem interior não vazio em $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$. Então, pela Proposição 3.2 temos que o conjunto

$$\mathcal{C}(S_K) = \{(v \otimes \alpha) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*; v \text{ e } \alpha \text{ são } S_K\text{-compatíveis}\}$$

tem interior não vazio em D.

Temos que a aplicação traço,

$$\begin{array}{rccc} \text{tr}: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a_{ij})_{ij} & \longmapsto & \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ii} \end{array}$$

"leva"um subconjunto de interior não vazio, de $M_n(\mathbb{R})$, em um subconjunto de interior não vazio, de $\mathbb{R}$. De fato, considere um subconjunto $\Omega \subset M_n(\mathbb{R})$ com interior não vazio. Tomemos uma matriz $B \in \text{int}\Omega$, então existe uma vizinhança V de B tal que $V \subset \Omega$. Suponha $B = (b_{ij})_{ij}$, então conseguimos uma vizinhança de B da forma

$$(B_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nn} \end{pmatrix} \subset V$$

(matriz de vizinhanças), onde B_{ij} é uma vizinhança de b_{ij} em $\mathbb{R}$. Temos que

$$\text{tr}((B_{ij})_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} B_{ij},$$

é aberto em $\mathbb{R}$, pois é uma soma finita de abertos, e ainda $\mathrm{tr}((B_{ij})_{ij}) \subset \mathrm{tr}(\Omega)$, logo, $\mathrm{tr}(\Omega)$ tem interior não vazio.

Notemos que o subconjunto

$$\delta = \{X(v \otimes \alpha); (v \otimes \alpha) \in \mathcal{C}(S_K)\}$$

tem interior não vazio, então pela justificativa dada acima, temos que $\mathrm{tr}(\delta) \subset \mathbb{R}$ tem interior não vazio, logo $\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha))$ não se anula identicamente para $(v \otimes \alpha) \in \mathcal{C}(S_K)$.

Portanto, existe um par (v, α) que é S_K-compatível tal que $\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha)) \neq 0$. $\square$

O lema a seguir, vem garantir que o par encontrado no lema anterior pertence a K.

Lema 3.11 *Suponha que v e α são S_K-compatíveis. Então $(v \otimes \alpha) \in K(S_K)$.*

Demonstração: Tomemos $h \in \mathrm{int}S_K$ com auto-valores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, que existe pela Definição 3.7, com base $B = \{v, v_2, \ldots, v_n\}$.

Temos que α é do tipo $[\alpha]_B = (x\ 0\ \ldots\ 0)$ para algum $x \geq 0$, pois

$$\alpha(v) = \begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = x \geq 0$$

e

$$\alpha(v_j) = \begin{pmatrix} x & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

com $j \neq 1$ e o elemento 1 da matriz de coordenadas de v_j está na i-ésima linha. Se alguma outra coordenada de α for não nula, teríamos algum v_j não pertencente a $\ker\alpha$.

Sem perda de generalidade, podemos considerar $x = 1$. Então temos $[\alpha]_B = (1\ 0\ \ldots\ o)_B$. Já que

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

temos que a matriz que representa $(v \otimes \alpha)$ é $\mathrm{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}$.

Por outro lado,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^k} h^k = \lim_{k\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & (\frac{\lambda_2}{\lambda_1})^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & (\frac{\lambda_n}{\lambda_1})^k \end{pmatrix} = \mathrm{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}$$

e esse limite está em $K(S_K)$, pois $\frac{1}{\lambda_1^k} h^k \in K(S_K)$ e $K(S_K)$ é fechado por definição.

Agora, como $(\mathrm{diag}\{1, 0, \ldots, 0\}) \in K(S_K)$, temos que $(\mathrm{diag}\{x, 0, \ldots, 0\}) \in K(S_K)$, pela própria definição de $K(S_K)$ (este elemento representa todos os $(v \otimes \alpha)'s$, na base B, tais que v e α são S_K-compatíveis). $\square$

Observação 3.12 *Temos que $K(S_K) \subset K$, pois por definição $K(S_K) = \mathrm{fe}(\mathrm{co}(S_K))$, $S_K \subset K$ e K é fechado topologicamente e fechado para combinações cônicas.*

Através da Observação 2, garantimos a existência de um par (v, α) satisfazendo as condições do lema abaixo, o qual nos mostra que para tal v, o cone Kv é próprio.

Lema 3.13 *Tomemos $X \in M_n(\mathbb{R})$ tal que $\mathrm{tr}(XY) \geq 0$ para todo $Y \in K$. Suponha que exista em K um elemento da forma $v \otimes \alpha$ tal que $\mathrm{tr}(X(v \otimes \alpha)) > 0$. Então, Kv é um cone próprio invariante por K.*

Demonstração: Como

$$((v \otimes \alpha) \circ Z)(u) = v \otimes \alpha(Zu) = \alpha(Zu)v = v \otimes (\alpha \circ Z)(u)$$

temos que $(v \otimes \alpha) \circ Z = v \otimes (\alpha \circ Z)$.

Notemos que para qualquer $u \otimes \phi$, $\text{tr}(u \otimes \phi) = \phi(u)$. Agora consideremos $[\phi]_B = (a_1\ a_2\ \ldots\ a_n)$ a matriz do funcional linear ϕ em relação a alguma base B e $(u_1\ u_2\ \ldots\ u_n)_B$ as coordenadas de u em relação à mesma base. Então

$$\phi(u) = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} = a_1u_1 + a_1u_1 + \ldots + a_1u_1.$$

e ainda

$$u \otimes \phi = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1u_1 & a_2u_1 & \ldots & a_nu_1 \\ a_1u_2 & a_2u_2 & \ldots & a_nu_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1u_n & a_2u_n & \ldots & a_nu_n \end{pmatrix}$$

logo,

$$\text{tr}(u \otimes \phi) = a_1u_1 + a_1u_1 + \ldots + a_1u_1 = \phi(u).$$

Daí,

$$\langle v \otimes \alpha, Z \rangle = \text{tr}((v \otimes \alpha)Z) = \text{tr}(v \otimes (\alpha \circ Z)) = (\alpha \circ Z)(v) = \alpha(Zv).$$

Já que $\text{tr}(XY) = \text{tr}(YX)$, temos $\text{tr}(X(v \otimes \alpha)) = \alpha(Xv)$.

Seja $g \in K$, então $g(v \otimes \alpha) \in K$, pois K é semigrupo. Mas,

$$g(v \otimes \alpha)(u) = g((v \otimes \alpha)(u)) = g(\alpha(u)v) = \alpha(u)gv = (gv \otimes \alpha)(u),$$

ou seja, $(gv \otimes \alpha) = g(v \otimes \alpha) \in K$.

Por hipótese temos que $\alpha(Xgv) = \text{tr}(X(gv \otimes \alpha)) \geq 0$, pois $gv \otimes \alpha \in K$.

Agora defina $\beta = \alpha \circ X$, ou melhor,

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & v & \longmapsto & \alpha(Xv). \end{array}$$

Temos que β é um funcional linear não nulo. De fato, é linear pois é composição de transformações lineares. É não nulo pois dado v do enunciado,

$$\beta(v) = (\alpha \circ X)(v) = \alpha(Xv) = \text{tr}(X(v \otimes \alpha)) > 0$$

e como todo funcional linear não nulo é sobrejetor, temos que β o é.

Notemos que $\beta(gv) = \alpha(Xgv) \geq 0$. Como $g \in K$ é arbitrário, segue que

$$\beta(Kv) \geq 0.$$

Logo Kv não pode ser todo o $\mathbb{R}^n$, porque assim $\beta(Kv)$ seria igual a $\mathbb{R}$.

Portanto, Kv é um cone próprio. $\square$

Agora sim, juntando os resultados obtidos ao longo desta seção, temos a demonstração do teorema principal deste capítulo.

Demonstração do Teorema 3.6: Como

$$\text{co}(S) = \{a_1 g_1 + \ldots + a_l g_l; a_i \geq 0 \text{ e } g_i \in S\},$$

temos que $S \subset \text{co}(S)$. Logo, $S \subset \text{fe}(\text{co}(S)) = K(S)$.

Temos pela Proposição 3.5 que K(S) é um cone-semigrupo, por hipótese $K(S)$ é próprio e ainda, tem interior não vazio pois contém S que tem interior não vazio, então os resultados e observações que vimos anteriormente valem em particular para $K(S)$.

Já sabemos que $K(S)v \subset \mathbb{R}^n$ é um cone invariante por $K(S)$ e gerador, e ainda, que se ele for próprio será também pontual, então nosso trabalho se resume a encontrar $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $K(S)v$ seja próprio.

Então, tomemos X como na Observação (2.). Temos que

$$X \neq 0 \text{ e ainda } \text{tr}(XY) \geq 0 \text{ para todo } Y \in K(S). \tag{3.1}$$

Assim, pelo Lema 3.10 existe um par (v, α) que é $S_K(S)$-compatível tal que

$$\text{tr}(X(v \otimes \alpha)) \neq 0. \tag{3.2}$$

Então, como pelo Lema 3.11 e Observação 3.12 $(v \otimes \alpha) \in K(S)$, temos de (3.1) e (3.2) que $\text{tr}(X(v \otimes \alpha)) \geq 0$.

Destas informações nos resulta que existe em $K(S)$ um elemento da forma $(v\otimes\alpha)$ tal que $\mathrm{tr}(X(v\otimes\alpha)) > 0$. Logo, pelo Lema 3.13, temos que $K(S)v$ é um cone próprio.

Portanto, para v nessas condições, temos que $K(S)v \subset \mathbb{R}^n$ é um cone pontual,gerador e invariante por $K(S)$, o qual denotaremos por W.

Novamente, pelo fato de S estar contido em $K(S)$, temos que S deixa invariante o cone W, concluindo assim a demonstração.

Bibliografia

[1] *V. Ayala*, *W. Kliemann* e *L.A.B. San Martin*, Control Sets and Total Positivity. Semigroup Forum, vol. 69 (2004), 113-140.

[2] *C.J. Braga Barros*, *J.G. Ribeiro*, *O.G. do Rocio* e *L.A.B. San Martin*, Controllability of two-dimensional bilinear systems. Proyecciones **15** (1975), No. 2. 111-139.

[3] *F. Colonius* e *W. Kliemann*, The Dynamics of Control. Birkhäuser (2000).

[4] *J.R. Gonçalves Filho*, Tese de Doutorado. IMECC - Unicamp (2001).

[5] *J.R. Gonçalves Filho* e *L.A.B. San Martin*,The compression semigroup of a cone is connected. Portugal. Math., vol. 60, No. 3. (2003), 305-317.

[6] *K.H. Hofmann* and *W.A.F. Ruppert*, On the interior of subsemigroups of Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 169-179.

[7] *K.-H. Neeb*, On the fundamental group of a Lie semigroup. Glasg. Math. J. 34 (1992), 379-394.

[8] *O.G. do Rocio* e *L.A.B. San Martin*, Connected components of open semigroups in semi-simple Lie groups. Semigroup Forum **69** (2004), 1-29.

[9] *O.G. do Rocio*, *L.A.B. San Martin* e *A.J. Santana*, Invariant cones and convex sets for bilinear control systems and parabolic type of semigroups. J. Dynam. Control Systems **3**, vol. 12, (2006), 419-432.

[10] *Yu.L. Sachkov*, On invariant orthants of bilinear systems. J. Dynam. Control Systems **4** (1998), No. 1, 137-147.

[11] *L.A.B. San Martin*, Álgebras de Lie. Editora da Unicamp (1999).

[12] *L.A.B. San Martin*, Control sets and semigroups in semisimple Lie groups. Semigroups in Algebra, Geometry and Analysis, Eds.: Hofmann/Lawson/Vinberg. Walter de Gruyter & Co., Berlin New York 1995.

[13] *L.A.B. San Martin*, Invariant Control Sets on Flag Manifolds. Mathematics of Control, Signals and Systems **6** (1993), 41-61.

[14] *L.A.B. San Martin*, Maximal semigroups in semi-simple Lie groups. Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5165-5184.

[15] *L.A.B. San Martin*, Notas de um curso de Grupos de Lie. www.ime.unicamp.br/smartin/cursos.

[16] *L.A.B. San Martin* e *A.J. Santana*, The Homotopy Type of Lie Semigroups in Semi-Simple Lie Groups. Monatshefte Mathematik **136** (2002), 151-173.

[17] *L.A.B. San Martin* e *P.A. Tonelli*, Semigroup actions on homogeneous spaces. Semigroup Forum **50** (1995), 59-88.

[18] *L.A.B. San Martin* e *P.A. Tonelli*, Transitive Actions of Semigroups in Semisimple Lie Groups. Semigroup Forum **58** (1999), 142-151.

[19] *F.W. Warner*, Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Company, 1971.

[20] *G. Warner* , Harmonic analysis on semi-simple Lie groups. Springer-Verlag, 1972.