# Hipersuperfícies Homogêneas em Formas Espaciais Reais

**Jean Venato Santos**

Centro de Ciências Exatas
Universidade Estadual de Maringá
Programa de Pós-Graduação em Matemática
(Mestrado)

Orientador: Ryuichi Fukuoka
Co-orientador: Armando Caputi

Maringá - PR
2007

# Hipersuperfícies Homogêneas em Formas Espaciais Reais

**Jean Venato Santos**

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Ryuichi Fukuoka - UEM (Orientador) ..................................................

Prof. Armando Caputi - UEM (Co-orientador) ..................................................

Prof. Ruy Tojeiro de Figueiredo Júnior - UFSCar ..................................................

Prof. Osvaldo Germano Rocio - UEM ..................................................

Maringá - PR
Março de 2007

Aos meus pais e à minha avó (in memorian)

# Agradecimentos

Agradeço à Deus, fonte de toda sabedoria.

Aos meus pais e irmã pelo constante apoio em toda minha vida.

À Catiana Casonatto pela presença, companheirismo e cada momento compartilhado.

Aos professores Armando Caputi e Ryuichi Fukuoka pela preciosa disponibilidade, excelente orientação e paciência em atender tantos questionamentos.

Ao professor Mario Dávila pelo importante incentivo.

Aos professores do DMA-UEM.

Aos colegas do mestrado pela jornada compartilhada.

Agradeço aos companheiros e singulares amigos de república pelos duradouros ensinamentos: Edgar, Edson, Alexandre Grossi, Aysser, Adalberto, Talarico, Leonardo Bonato, Denis, Leonardo Muniz, Vinícius, Ricardo Nunes, Danilo, Hugo, Rodrigo, Narlan, Klaiker, Anderson, Wender, Ricardo de Oliveira, Leandro e Guto.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

# Resumo

Neste trabalho estudamos as hipersuperfícies homogêneas conexas, com número tipo diferente de dois, imersas nas formas espaciais reais. Nas esferas tratamos somente os casos em que a hipersuperfície possui no máximo duas curvaturas principais distintas em algum ponto. Os principais resultados são baseados no artigo do Ryan [33].

# Abstract

In this work we study connected homogenous hypersurfaces in real space forms with type number different from two. When the ambient space is the sphere we treat only the cases of hypersurfaces that have at most two distinct principal curvatures at some point. The main results are based on a Ryan's paper [33].

# Conteúdo

# Introdução

Em 1958, Kobayashi [20] mostrou que uma hipersuperfície homogênea conexa compacta no espaço euclidiano é isométrica à esfera. No ano seguinte, Nagano e Takahashi [29] mostraram que uma hipersuperfície homogênea conexa (compacta ou não) no espaço euclidiano é isométrica ao produto riemanniano de uma esfera e um espaço euclidiano, sempre que o posto da segunda forma fundamental (conhecido por número tipo) for diferente de 2 em algum ponto. A partir daí, foram surgindo resultados no intuito de classificar as hipersuperfícies homogêneas também no espaço hiperbólico e na esfera, assim como aquelas que possuiam número tipo igual a 2.

Nesse sentido, Ryan [33], em 1969, além de obter o resultado do artigo [29] no espaço euclidiano de uma outra maneira, o generalizou para formas espaciais de curvatura não nula. Em outras palavras, ele estudou também as hipersuperfícies homogêneas, com número tipo diferente de 2, no espaço hiperbólico e na esfera. No último caso ele assume, como hipótese adicional, que em algum ponto da hipersuperfície existem no máximo duas curvaturas principais distintas.

Em 1970, Takahashi [38] tratou o caso do número tipo igual a 2 nos espaços euclidiano e hiperbólico. Na realidade, ele mostrou que não é possível obter uma hipersuperfície homogênea $M$ de dimensão $n \geq 4$ com número tipo 2 no espaço hiperbólico e que no espaço euclidiano $M$ é isométrica ao produto riemanniano da esfera de dimensão 2 com o espaço euclidiano de dimensão $n-2$. No ano seguinte, este mesmo autor em [39] demonstrou a existência e deu uma classificação para as hipersuperfícies homogêneas de dimensão 3, com número tipo 2, no espaço hiperbólico.

Sobre as hipersuperfícies homogêneas no caso em que o ambiente é a esfera, um estudo detalhado é realizado por Takagi e Takahashi [37] em 1972, em particular, eles notaram que a classificação destas hipersuperfícies na esfera dada por Hsiang e Lawson [18] resolve a classificação das hipersuperfícies homogêneas com curvaturas principais constantes na esfera.

Neste trabalho apresentaremos um estudo sobre as hipersuperfícies homogêneas conexas nas formas espaciais reais com número tipo diferente de dois, baseado no artigo do Ryan [33]. Com este propósito, no segundo capítulo, revisaremos alguns conceitos e resultados da geometria riemanniana tais como: variedades diferenciáveis, métricas e conexões riemannianas, operador curvatura, curvatura seccional e imersões isométricas.

No terceiro capítulo, introduziremos o conceito de hipersuperfícies, deduziremos as equações de Gauss e Codazzi e enunciaremos o teorema fundamental das subvariedades para este caso de imersões isométricas. Em seguida, daremos uma lista de exemplos de hipersuperfícies nas formas espaciais reais e uma série de resultados que serão aplicados nos teoremas das hipersuperfícies homogêneas.

No último capítulo constará os principais resultados deste trabalho, onde estudaremos as hipersuperfícies homogêneas conexas, com número tipo diferente de dois, nas formas espaciais reais. Finalmente, daremos um rápido panorama de três caminhos que surgiram da classificação das hipersuperfícies homogêneas nas formas espaciais reais.

Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo apresentamos conceitos e resultados da geometria riemanniana que serão utilizados ao longo deste trabalho. Começamos com definições relacionadas às variedades diferenciáveis, tais como: espaço tangente, imersões, mergulhos, campos vetoriais, colchete entre campos vetoriais e distribuições. Em seguida, introduzimos as variedades riemannianas, que são variedades diferenciáveis equipadas com uma métrica, além dos conceitos de conexão de Levi-Civita, geodésicas, variedades completas, operador curvatura, curvatura seccional e as formas espaciais. Por serem considerados básicos, a maior parte dos resultados, nestas duas seções, estão em forma de afirmações no decorrer do texto e sem demonstrações. Estas afirmações e suas respectivas demonstrações podem ser encontradas na literatura básica de geometria tais como [8] e [40]. Quanto ao sinal adotado para o operador curvatura, seguimos a convenção de Dajczer [15] que é oposta à de Manfredo [8]. Na terceira seção definimos imersões isométricas, obtemos suas equações básicas e enunciamos o teorema fundamental das subvariedades. Finalizamos o capítulo apresentando alguns resultados sobre as imersões totalmente geodésicas e as imersões umbílicas, os quais serão úteis no decorrer deste trabalho.

## 1.1 Variedades Diferenciáveis

Uma *variedade diferenciável* de *dimensão* $n$ é um conjunto $M$ e uma família de aplicações injetoras $\varphi_\beta : U_\beta \subset \mathbb{R}^n \to M$ de abertos $U_\beta$ de $\mathbb{R}^n$ em $M$ tais que:

i) $\bigcup_\beta \varphi_\beta (U_\beta) = M$.

ii) Para todo par $\beta$, $\varsigma$, com $\varphi_\beta (U_\beta) \cap \varphi_\varsigma (U_\varsigma) = W \neq \varnothing$, os conjuntos $\varphi_\beta^{-1} (W)$ e $\varphi_\varsigma^{-1} (W)$ são abertos em $\mathbb{R}^n$ e as aplicações $\varphi_\varsigma^{-1} \circ \varphi_\beta$ são diferenciáveis.

iii) A família $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ é máxima em relação às condições i) e ii).

Dizemos que uma aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ é diferenciável quando ela possui derivadas contínuas de todas as ordens e neste caso dizemos que $f$ é de classe $C^\infty$.

O par $(U_\beta, \varphi_\beta)$ (ou a aplicação $\varphi_\beta$) com $p \in \varphi_\beta(U_\beta)$ é chamada uma *parametrização (ou sistema de coordenadas)* de $M$ em $p$; $\varphi_\beta(U_\beta)$ é então chamada uma *vizinhança coordenada* em $p$. Uma família $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ satisfazendo i) e ii) é chamada uma *estrutura diferenciável* em $M$.

Dada uma variedade diferenciável $M$, utilizaremos um índice $(M^n)$ para indicar a dimensão $n$ de $M$. Considere em $M$ a topologia induzida pela estrutura diferenciável. No decorrer deste trabalho, as variedades diferenciáveis serão sempre *de Hausdorff* e com *base enumerável.* Isto significa que dados dois pontos distintos de $M$ existem vizinhanças destes dois pontos que não se intersectam e que $M$ pode ser coberta por uma quantidade enumerável de vizinhanças coordenadas.

Sejam $M^n$ e $\widetilde{M}^m$ variedades diferenciáveis. Uma aplicação $f : M^n \to \widetilde{M}^m$ é *diferenciável em* $p \in M$ se dada uma parametrização $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \to \widetilde{M}$ em $f(p)$, existe uma parametrização $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em $p$ tal que $f(\phi(U)) \subset \varphi(V)$ e a aplicação

$$\varphi^{-1} \circ f \circ \phi : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

é diferenciável em $\phi^{-1}(p)$. $f$ é *diferenciável em um aberto* de $M$ se é diferenciável em todos os pontos deste aberto.

Uma aplicação diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M^n$ é chamada uma *curva* diferenciável em $M^n$. Suponha que $\gamma(0) = p \in M$, e seja $C^\infty(M)$ o conjunto das funções diferenciáveis em $M$ (na realidade, para esta definição, bastar tomar funções de $M$ diferenciáveis em $p$). O *vetor tangente* à curva $\gamma$ em $t = 0$ é a função $\gamma'(0) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ dada por

$$\gamma'(0)g = \left.\frac{d(g \circ \gamma)}{dt}\right|_{t=0}, \quad g \in C^\infty(M).$$

Um *vetor tangente a* $M$ *em* $p$ é o vetor tangente em $t = 0$ de alguma curva $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$. O conjunto dos vetores tangentes a $M$ em $p$ será indicado por $T_pM$. Pode-se mostrar que esse conjunto, com as operações de soma e produto por escalar, forma um espaço vetorial de dimensão $n$, e ainda que a escolha de uma parametrização $\varphi : U \to M$ determina uma base *associada* em $T_pM$. O espaço vetorial $T_pM$ será chamado de *espaço tangente* de $M$ em $p$.

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^m$ uma aplicação diferenciável entre variedades diferenciáveis. Para cada $p \in M$ e cada $X \in T_pM$, escolha uma curva diferenciável $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$ com $\gamma(0) = p$ e $\gamma'(0) = X$. Faça $\zeta = f \circ \gamma$. É possível verificar que a aplicação $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$, dada por $df_p(X) = \zeta'(0)$ é uma aplicação linear que não depende da escolha da $\gamma$. Tal aplicação é chamada *diferencial de* $f$ *em* $p$.

Quando $f$ é diferenciável, bijetora e sua inversa $f^{-1}$ é diferenciável dizemos que $f$ é um *difeomorfismo.* $f$ é um *difeomorfismo local em* $p$ se existem vizinhanças $U$ de $p$ e $V$ de $f(p)$ tais que $f : U \to V$ é um difeomorfismo. A noção de difeomorfismo é a noção natural de equivalência entre variedades diferenciáveis.

Uma aplicação diferenciável $f : M^n \to \widetilde{M}^m$ é uma *imersão* se $df_p : T_pM \to T_{f(p)}\widetilde{M}$ é injetora para todo $p \in M$. Se, além disso, $f$ é um homeomorfismo sobre sua imagem $f(M) \subset \widetilde{M}$, onde $f(M)$ tem a topologia induzida por $\widetilde{M}$, chamamos $f$ de *mergulho*. Se $M \subset \widetilde{M}$ e a inclusão $i : M \hookrightarrow \widetilde{M}$ é um mergulho, dizemos que $M$ é uma *subvariedade* de $\widetilde{M}$. Note que se $f : M^n \to \widetilde{M}^m$ é uma imersão, então $m \geq n$, a diferença $m - n$ é chamada de *codimensão* da imersão. Pode-se mostrar que toda imersão é localmente um mergulho.

Seja $M$ uma variedade diferenciável. Dizemos que $M$ é *orientável* se $M$ admite uma estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ tal que: "para todo par $\beta$, $\varsigma$, com $\varphi_\beta(U_\beta) \bigcap \varphi_\varsigma(U_\varsigma) \neq \varnothing$, a diferencial da mudança de coordenadas $\varphi_\varsigma \circ \varphi_\beta^{-1}$ tem determinante positivo". Caso contrário, diz-se que $M$ é *não-orientável.* Se $M$ é orientável, a escolha de uma estrutura diferenciável que satisfaz a condição acima é chamada uma *orientação* de $M$. Duas estruturas diferenciáveis que satisfazem tal condição *determinam a mesma orientação* se a união delas ainda a satisfaz.

Seja $M^n$ uma variedade diferenciável com estrutura diferenciável $\{(U_\beta, \varphi_\beta)\}$ e considere o conjunto

$$TM = \{(p, X);\ p \in M,\ X \in T_pM\}\,.$$

Indicareremos por $(x_1^\beta, ..., x_n^\beta)$ as coordenadas de $U_\beta$ e por $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_1^\beta}, ..., \dfrac{\partial}{\partial x_n^\beta}\right\}$ as bases associadas nos espaços tangentes de $\varphi_\beta(U_\beta)$. Para cada $\beta$, defina $\phi_\beta : U_\beta \times \mathbb{R}^n \to TM$, por

$$\phi_\beta(x_1^\beta, ..., x_n^\beta, u_1, ..., u_n) = \left(\varphi_\beta(x_1^\beta, ..., x_n^\beta), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\beta}\right),$$

onde $(u_1, ..., u_n) \in \mathbb{R}^n$. Pode ser verificado que $\{(U_\beta \times \mathbb{R}^n, \phi_\beta)\}$ define uma estrutura diferenciável em $TM$. Com tal estrutura, $TM$ é uma variedade diferenciável de dimensão $2n$ chamada *fibrado tangente.*

Um *campo de vetores*[1] $X$ em uma variedade diferenciável $M$ é uma correspondência que a cada ponto $p \in M$ associa um vetor tangente $X(p) \in T_pM$. Em termos de aplicações, $X$ é uma aplicação de $M$ no fibrado tangente $TM$. O campo é *diferenciável* se a aplicação $X : M \to TM$ é diferenciável, denotaremos por $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos vetoriais diferenciáveis em $M$. O campo vetorial definido por $[X, Y] = XY - YX$ é diferenciável se $X$ e $Y$ o são, e é chamado de *colchete* de $X$ e $Y$. É possível mostrar que esta operação entre campos satisfaz as seguintes propriedades:

i) $[X, Y] = -[Y, X]$ (anticomutatividade),

ii) $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ e $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$ (bi-linearidade),

iii) $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (identidade de Jacobi),

[1] Note que estamos utilizando a mesma notação $X$ para vetores tangentes e campos de vetores, isto não trará confusão pois no contexto ficará claro a que objeto estamos nos referindo.

iv) $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$,
para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$.

Uma *distribuição* $\Delta$, de dimensão $m \leq n$, numa variedade diferenciável $M^n$ é uma escolha de um subespaço $\Delta(p)$ de $T_pM$, com dimensão $m$, para cada $p \in M$. $\Delta$ é *diferenciável* se para cada $p \in M$, existir uma vizinhança $U$ de $p$ e $m$ campos vetoriais $X_1, ..., X_m$ de classe $C^\infty$ em $U$ que geram $\Delta$ em cada ponto de $U$. Dizemos que um campo de vetores diferenciável $X$ em $M$ *pertence à distribuição* $\Delta$, e denotamos $X \in \Delta$, se $X(p) \in \Delta(p)$ para todo $p \in M$. Além disso, se $[X, Y] \in \Delta$ sempre que $X, Y \in \Delta$, diremos que $\Delta$ é *involutiva*, ou, *completamente integrável*. Dada uma distribuição $\Delta$, uma subvariedade $N \subset M$ é uma *variedade integral* de $\Delta$ se $T_pN = \Delta(p)$ para todo $p \in N$. Pode-se mostrar que uma distribuição diferenciável $\Delta$ ser involutiva é condição necessária e suficiente para que possua uma variedade integral. A necessidade é um tanto direta, mas a demonstração da suficiência é mais complicada e é dada pelo importante resultado a seguir:

**Teorema 1.1** ***(Frobenius)*** *Seja $\Delta$ uma distribuição diferenciável, involutiva e de dimensão $m$ em uma variedade diferenciável $M^n$. Então, para cada $p \in M$, existe uma variedade integral de $\Delta$ passando por $p$. Mais ainda, existe um sistema de coordenadas $(U, \varphi)$ em $p$, com coordenadas $(x_1, ...x_n)$ tal que as fatias*

$$x_i = constante, \quad para\ todo \quad i \in \{m+1, ..., n\},$$

*são variedades integrais de $\Delta$.*

Uma variedade integral conexa $N$ de $\Delta$ é dita *maximal* se $N$ não for subconjunto próprio de qualquer variedade integral conexa de $\Delta$. Outro resultado importante é que se $\Delta$ é uma distribuição diferenciável e involutiva, dado $p \in M$, existe uma única variedade integral maximal de $\Delta$ passando por $p$. Além disso, qualquer variedade integral que passa por $p$ está contida nesta maximal.

**Proposição 1.2** *Se $M^n$ é uma variedade diferenciável, $\Delta_1$ e $\Delta_2$ são distribuições diferenciáveis e involutivas em $M^n$ tais que $TM = \Delta_1 \oplus \Delta_2$, então para cada ponto $p \in M$ existe um sistema de coordenadas em uma vizinhança de $p$ tal que, para qualquer conjunto de constantes reais $\{c_1, ..., c_n\}$, a equação $x_i = c_i$, $1 \leq i \leq k$ (respectivamente $x_j = c_j$, $k+1 \leq j \leq n$), define uma variedade integral de $\Delta_1$ (respectivamente de $\Delta_2$).*

**Dem.:** Sendo $\Delta_1$ involutiva, pelo teorema 1.1 (de Frobenius), existe um sistema de coordenadas local $y_1, ..., y_k, x_{k+1}, ..., x_n$ centrado em $p$ tal que $x_j = c_j$, $k+1 \leq j \leq n$, define uma variedade integral de $\Delta_1$. Analogamente, existe um sistema de coordenadas $x_1, ..., x_k, z_{k+1}, ..., z_n$ centrado em $p$ tal que as equações $x_i = c_i$, $1 \leq i \leq k$, definem uma variedade integral para $\Delta_2$. Portanto,

$x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_n$ forma um sistema de coordenadas com a propriedade desejada.

□

## 1.2 Variedades Riemannianas

Uma *métrica riemanniana* em uma variedade diferenciável $M$ é uma correspondência que associa a cada ponto $p$ de $M$ um produto interno $\langle\, ,\, \rangle_p$, no espaço tangente $T_pM$, que varia diferenciavelmente no seguinte sentido: se $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de $p$, com $\varphi(x_1, ..., x_n) = q \in \varphi(U)$ e $\dfrac{\partial}{\partial x_i}(q) = d\varphi(0, ..., 1, ..., 0)$, então

$$\left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \right\rangle_q = g_{ij}(x_1, ..., x_n)$$

é uma função diferenciável em $U$, para todo $i, j = 1, ..., n$. Chamamos de *variedade riemanniana* qualquer variedade diferenciável com uma métrica riemanniana.

Um difeomorfismo $f : M \to \widetilde{M}$ entre variedades riemannianas é uma *isometria* se, para todo $p \in M$ e $X, Y \in T_pM$, temos

$$\langle X, Y \rangle_p = \langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)}\,. \tag{1.1}$$

A definição de isometria traz a noção de equivalência entre variedades riemannianas. Dizemos que $f$ é uma *isometria local em* $p \in M$, quando existir uma vizinhança $U \subset M$ de $p$ tal que $f : U \to f(U) \subset \widetilde{M}$ é um difeomorfismo sastisfazendo (1.1).

Dada uma variedade diferenciável $M$, definimos uma *conexão afim* $\nabla$, em $M$, como uma aplicação

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

indicada por $(X, Y) \overset{\nabla}{\to} \nabla_X Y$ e que satisfaz as seguintes propriedades, para $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $f, g \in C^\infty(M)$:

i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

ii) $\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

iii) $\nabla_X(fY) = X(f)Y + f\nabla_X Y$.

Seja $\nabla$ uma conexão afim em uma variedade diferenciável $M$. É possível mostrar que existe uma única correspondência que associa a um campo vetorial $X$ ao longo da curva diferenciável $\gamma : I \to M$ (sendo $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo) um outro campo vetorial $\frac{DX}{dt}$ ao longo de $\gamma$, denominado *derivada covariante* de $X$ ao longo de $\gamma$, tal que:

i) $\frac{D}{dt}(X+Y) = \frac{DX}{dt} + \frac{DY}{dt}$, onde $Y$ é um campo de vetores ao longo de $\gamma$,

ii) $\frac{D}{dt}(fX) = \frac{df}{dt}X + f\frac{DX}{dt}$, onde $f$ é uma função diferenciável em $I$,

iii) Se $X$ é induzido por um campo de vetores $Z \in \mathfrak{X}(M)$, isto é, $X(t) = Z(\gamma(t))$, então $\frac{DX}{dt} = \nabla_{\gamma'}Z$.

Tomando uma parametrização $\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \to M$ em um ponto $p \in M$ e escrevendo $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$ e $Y = \sum_{i=1}^n b_i X_i$, onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $a_i$, $b_i$ são funções diferenciáveis em $U$, obtemos

$$\begin{aligned}
\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^n a_i \nabla_{X_i}\left(\sum_{j=1}^n b_i X_j\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j \nabla_{X_i} X_j + \sum_{i,j=1}^n a_i X_i(b_j) X_i \\
&= \sum_{l=1}^n \left(\sum_{i,j=1}^n a_i b_j \Gamma_{ij}^l + X(b_l)\right) X_l,
\end{aligned}$$

onde $\nabla_{X_i} X_j = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l X_l$ e $\Gamma_{ij}^l$ são os *símbolos de Christoffel* da conexão $\nabla$.

Dizemos que uma conexão afim $\nabla$ em uma variedade riemanniana $M$ é *compatível com a métrica* se $X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$, $\forall\, X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Uma conexão afim é *simétrica* quando $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, $\forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Dado um sistema de coordenadas $(U, \varphi)$, o fato de $\nabla$ ser simétrica implica que $\nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = [X_i, X_j] = 0$, onde $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i, j = 1, ..., n$. Uma conexão simétrica e compatível com a métrica em uma variedade riemanniana é chamada de conexão *riemanniana* ou de *Levi-Civita.* Um teorema, devido a Levi-Civita, garante a existência e unicidade da conexão riemanniana em uma variedade riemanniana. Desse resultado é possível concluir que se $M = M_1 \times M_2$ é um produto de variedades riemannianas $M_1$ e $M_2$ com métricas $\langle\, ,\, \rangle_1$ e $\langle\, ,\, \rangle_2$, respectivamente, então a conexão de Levi-Civita da métrica produto $\langle\, ,\, \rangle$ de $M$ é

$$\nabla^M_{X_1+Y_1}(X_2+Y_2) = \nabla^{M_1}_{X_1} X_2 + \nabla^{M_2}_{Y_1} Y_2, \tag{1.2}$$

onde $X_1, X_2 \in TM_1$ e $Y_1, Y_2 \in TM_2$.

Considere $M$ uma variedade riemanniana com sua conexão de Levi-Civita. Uma curva parametrizada $\gamma : I \to M$ é uma *geodésica em* $t_0 \in I$ se $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right) = 0$ no ponto $t_0$. Se $\gamma$ é geodésica em todo $t \in I$, dizemos que $\gamma$ é uma *geodésica.* Por abuso de linguagem, é comum chamar de geodésica à imagem $\gamma(I)$ de uma geodésica $\gamma$. Seja $G$ um campo vetorial no fibrado tangente $TM$, cujas trajetórias são da forma $t \to (\gamma(t), \gamma'(t))$, onde $\gamma$ é uma geodésica em $M$. Pode-se mostrar a existência e unicidade de tal campo que é conhecido por *campo geodésico* em $TM$. Já o seu fluxo, é denominado por *fluxo geodésico* de $TM$.

Dado $p \in M$ e $0 < a \in \mathbb{R}$, é possível mostrar que existem uma vizinhança $V$ de $p$ em $M$, um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação diferenciável, $\gamma : (-a, a) \times U \to M$, onde

$$U = \{(q, X) \in TM;\ q \in V,\ X \in T_qM,\ |X| < \epsilon\},$$

tal que $t \to \gamma(t, q, X)$, $t \in (-a, a)$, é a única geodésica de $M$ que no instante $t = 0$ passa por $q$ com velocidade $X$, para cada $q \in V$ e $X \in T_qM$, com $|X| < \epsilon$. Com isto, podemos definir a aplicação $\exp : U \to M$ por

$$\exp(q, X) = \gamma(1, q, X) = \gamma\left(|X|, q, \frac{X}{|X|}\right), \quad (q, X) \in U,$$

chamada *aplicação exponencial* em $U$. Como $\gamma$ é diferenciável, temos que exp também o é. Frequentemente, é utilizada a restrição de exp a um aberto do espaço tangente $T_qM$, isto é, a aplicação

$$\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_qM \to M,$$

definida por $\exp_q(X) = \exp(q, X)$, onde $B_\epsilon(0)$ é a bola aberta de raio $\epsilon$ e centro na origem 0 de $T_qM$. É imediato verificar que $\exp_q(X)$ é diferenciável e $\exp_q(0) = q$. Geometricamente, $\exp_q(X)$ é o ponto de $M$ obtido percorrendo um comprimento $|X|$, a partir de $q$, sobre a geodésica que passa por $q$ com velocidade $\frac{X}{|X|}$.

**Proposição 1.3** *Seja $M$ uma variedade riemanniana e $p \in M$. Então, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_p : B_\epsilon(0) \subset T_pM \to M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de $M$.*

Uma variedade riemanniana $M$ é (geodesicamente) *completa* se para todo $p \in M$, a aplicação $\exp_p$ está definida para todo $X \in T_pM$, isto é, se as geodésicas $\gamma(t)$ que partem de $p$ estão definidas para todos os valores do parâmetro $t \in \mathbb{R}$. Se $M$ é conexa, dados $p, q \in M$, a *distância* $d(p, q)$ entre os pontos $p$ e $q$, é definida como o ínfimo dos comprimentos de todas as curvas $\gamma_{pq}$, onde $\gamma_{pq}$ é uma curva diferenciável por partes ligando $p$ a $q$. Relacionado a estes conceitos temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.4** ***(Hopf e Rinow)*** *Se $M$ uma variedade riemanniana e $p \in M$, então as seguintes afirmações são equivalentes:*

*i)* $\exp_p$ *está definida em todo o $T_pM$.*

*ii) Os limitados e fechados de $M$ são compactos.*

*iii) $M$ é completa como espaço métrico.*

*iv) $M$ é geodesicamente completa.*

*Além disso, cada uma das afirmações acima implica que* *v) Para todo $p, q$ em uma mesma componente conexa de $M$, existe uma geodésica $\gamma$ ligando $p$ a $q$ com $l(\gamma) = d(p, q)$, onde $l(\gamma)$ denota o comprimento da curva $\gamma$ entre $p$ e $q$.*

A *curvatura* $R$ de uma variedade riemanniana $M$ é uma correspondência que associa a cada par $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ um operador $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$, conhecido como *operador curvatura*, definido por

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z,$$

onde $\nabla$ é a conexão riemanniana de $M$. Não é difícil ver que se $M = \mathbb{R}^n$, então $R(X, Y)Z = 0$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$. Isso nos faz pensar em $R$ como uma maneira de medir o quanto $M$ deixa de ser euclidiana.

Pode-se mostrar que a curvatura $R$ goza das seguintes propriedades, para $g, h \in C^\infty(M)$ e $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$:

i) $R$ é $C^\infty(M)$-bilinear em $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$, isto é,

$$\begin{array}{rcl} R(gX + hY, Z) & = & gR(X, Z) + hR(Y, Z), \\ R(X, gY + hZ) & = & gR(X, Y) + hR(X, Z), \end{array}$$

ii) O operador curvatura $R(X, Y) : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ é $C^\infty(M)$-linear, ou seja,

$$R(X, Y)(gZ + hW) = gR(X, Y)Z + hR(X, Y)W,$$

iii) *Primeira Identidade de Bianchi*:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$$

iv) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(Y, X)Z, W\rangle$,

v) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = -\langle R(X, Y)W, Z\rangle$,

vi) $\langle R(X, Y)Z, W\rangle = \langle R(Z, W)X, Y\rangle$.

Em relação a um sistema de coordenadas $(U, \varphi)$ em torno de um ponto $p \in M$, indicando $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, temos

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_{l=1}^{n} R_{ijk}^l X_l.$$

Assim, $R_{ijk}^l$ são as componentes da curvatura $R$ em $(U, \varphi)$. Se $X = \sum_{i=1}^n a_i X_i$, $Y = \sum_{j=1}^n b_j X_j$ e $Z = \sum_{k=1}^n c_k X_k$, obtemos pela linearidade de $R$,

$$R(X, Y)Z = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} R_{ijk}^l a_i b_j c_k X_l.$$

A expressão de $R^s_{ijk}$ em termos dos coeficientes $\Gamma^k_{ij}$ da conexão riemanniana é dada por:

$$R^s_{ijk} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{ik}\Gamma^s_{jl} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma^l_{jk}\Gamma^s_{il} + \frac{\partial}{\partial x_j}\Gamma^s_{ik} - \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma^s_{jk}.$$

Sejam $\sigma \subset T_pM$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_pM$ e $X, Y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Pode-se mostrar que

$$K(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2}, \tag{1.3}$$

onde $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2\,|Y|^2 - \langle X, Y\rangle}$, não depende da escolha dos vetores $X, Y \in \sigma$. Chamamos de *curvatura seccional* de $\sigma$ em $p \in M$, o número real $K(X,Y) = K(\sigma)$, definido em (1.3), onde $\{X, Y\}$ é uma base qualquer de $\sigma$.

**Lema 1.5** *Se $M = M_1 \times M_2$ é um produto de variedades riemannianas $M_1$ e $M_2$ com métricas $\langle\, , \rangle_1$ e $\langle\, , \rangle_2$, respectivamente, então*

*i)* $K_M(\sigma) = K_{M_i}(\sigma)$ *se* $\sigma = ger\,\{X, Y\}$ *e* $X, Y \in TM_i$,

*ii)* $K_M(\sigma) = 0$ *se* $\sigma = ger\,\{X, Y\}$ *com* $X \in TM_1$ *e* $Y \in TM_2$.

**Dem.:** i) Se $\sigma = ger\,\{X, Y\}$ e $X, Y \in TM_i$, sendo $TM_i$ involutiva temos que $[X, Y] \in TM_i$. Assim,

$$K_M(X,Y) = \frac{\langle R(X,Y)Y, X\rangle}{|X \wedge Y|^2} = K_{M_i}(X,Y)$$

onde a última igualdade segue da definição de operador curvatura $R(X, Y)$ e pela igualdade 1.2.

ii) Se $\sigma = ger\,\{X, Y\}$ com $X \in TM_1$ e $Y \in TM_2$, pela igualdade 1.2 temos que $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X = 0$ e $\nabla_X Z = 0$ para todo $Z \in TM_2$. Portanto, da definição de curvatura seccional segue que $K_M(X, Y) = 0$.

□

É possível verificar que uma variedade riemanniana $M$ tem curvatura seccional constante igual a $K_0$ num ponto $p \in M$ se, e somente se,

$$R(X,Y)Z = K_0(\langle Y, Z\rangle X - \langle X, Z\rangle Y), \quad \forall\ X, Y, Z \in T_pM.$$

Uma variedade riemanniana de curvatura constante, conexa, simplesmente conexa e completa é chamada *forma espacial real*. As formas espaciais reais são:

1. O *espaço euclideano* $\mathbb{E}^n$, que consiste no $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Esta é a forma espacial de curvatura nula.

2. Para o *espaço hiperbólico real* $\mathbb{H}^n(c)$ existem diferentes modelos. Nesse trabalho iremos utilizar dois: o *modelo do semi-espaço* do $\mathbb{R}^n$ dado por $\{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ com a métrica $g_{ij}(x_1, ..., x_n) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$. O outro, é conhecido por *modelo de Lorentz*. Para obtê-lo, considere o *espaço de Lorentz*, que consiste no $\mathbb{R}^{n+1}$ com a *métrica lorentziana* dada por

$$\langle\langle X, Y\rangle\rangle = X_1Y_1 + ... + X_nY_n - X_{n+1}Y_{n+1}.$$

   O espaço hiperbólico pode ser visto como o conjunto de pontos cuja métrica (lorentziana) é $-1$ e a última coordenada é positiva. Geometricamente, é uma das folhas do $n$-hiperbolóide de duas folhas. Assim, o modelo de Lorentz pode ser visto como a projeção dessa folha com o plano $x_{n+1} = 0$. Tomando uma parametrização de tal folha pelo sistema de coordenadas $(x_1, ..., x_n)$ e calculando os termos $g_{ij}$ da métrica nesse sistema de coordenadas, obtemos a seguinte expressão:

$$g_{ij} = \delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{1 + (x_1^2 + ... + x_n^2)}.$$

   Em ambos os casos, a curvatura seccional é $c = -1$. No que segue, quando nada for mencionado, o modelo adotado para o $\mathbb{H}^n$ será o do semi-espaço.

3. A esfera $S^n(c)$ de raio $a$ no espaço euclidiano com a métrica induzida de $\mathbb{E}^{n+1}$, $c = 1/a^2 > 0$.

Em relação às formas espaciais reais, temos o seguinte resultado, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [8] pg. 181:

**Teorema 1.6** *Seja $M^n$ uma variedade riemanniana completa e de curvatura seccional constante c. Então o recobrimento universal $\hat{M}$ de $M$, com a métrica do recobrimento, é isométrico a:*

*i)* $\mathbb{H}^n(c)$, *se* $c < 0$,

*ii)* $\mathbb{E}^n$, *se* $c = 0$,

*iii)* $S^n(c)$, *se* $c > 0$.

## 1.3 Imersões Isométricas

Uma imersão $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ entre duas variedades riemannianas $M$ e $\widetilde{M}$ é uma *imersão isométrica* se

$$\langle X, Y\rangle_p = \langle df_pX, df_pY\rangle_{f(p)},$$

para todo $p$ de $M$ e todo $X, Y \in T_pM$. Note que se $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ é uma imersão e $\widetilde{M}$ é uma variedade riemanniana, podemos definir uma métrica em $M$ fazendo em cada ponto $p \in M$

$$\langle X, Y \rangle_p := \langle df_pX, df_pY \rangle_{f(p)},$$

de tal forma que a imersão $f$ se torne uma imersão isométrica.

Já mencionamos que uma imersão $f$ é localmente um mergulho, ou seja, para cada $p$ em $M$ existe uma vizinhança $U$ de $p$ tal que $f|_U : U \to \widetilde{M}$ é um mergulho. Nesse sentido, podemos identificar $U$ com sua imagem $f(U)$, isto é, interpretaremos $f$ localmente como a aplicação inclusão. Assim, para cada $p$ em $M$ o espaço tangente $T_pM$ será considerado um subespaço de $T_p\widetilde{M}$ de dimensão $n$ e isto induz à seguinte decomposição:

$$T_p\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp},$$

onde $T_pM^{\perp}$ é o complemento ortogonal de $T_pM$ em $T_p\widetilde{M}$. O espaço $T_pM^{\perp}$ tem dimensão $k$ (que é a codimensão da imersão $f$) e é chamado de *espaço normal* a $M$ em $p$. Assim como temos o fibrado tangente $TM$, definimos o *fibrado normal* $TM^{\perp} = \{(p, \xi); p \in M \text{ e } \xi \in T_pM^{\perp}\}$.

Em relação à decomposição acima temos as aplicações

$$\begin{array}{rl} (\ )^{\top} : & T\widetilde{M} \to TM \\ (\ )^{\perp} : & T\widetilde{M} \to TM^{\perp} \end{array}$$

chamadas projeção tangencial e projeção normal, respectivamente.

Tome agora campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Como $f|_U$ é um mergulho, existem extensões $\widetilde{X}$ e $\widetilde{Y}$ de $X$ e $Y$ numa vizinhança de $U$ (em $\widetilde{M}$). Seja $\widetilde{\nabla}$ a conexão riemanniana de $\widetilde{M}$, faz sentido calcular $\widetilde{\nabla}_{\widetilde{X}}\widetilde{Y}$, ou, $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{Y}$. É possível provar que $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{Y}$ não depende da extensão de $Y$. Por simplicidade, denotaremos $\widetilde{\nabla}_X\widetilde{Y}$ por $\widetilde{\nabla}_XY$ e temos então

$$\widetilde{\nabla}_XY = (\widetilde{\nabla}_XY)^{\top} + (\widetilde{\nabla}_XY)^{\perp}.$$

Com relação à $(\widetilde{\nabla}_XY)^{\top}$, pode-se mostrar que é uma conexão afim, simétrica e compatível com a métrica de $M$. Por unicidade, $(\widetilde{\nabla}_XY)^{\top}$ é a conexão riemanniana de $M$ a qual denotaremos por $\nabla_XY$.

Por outro lado, definimos a *segunda forma fundamental* da imersão (isométrica) $f$ por

$$\alpha(X, Y) = (\widetilde{\nabla}_XY)^{\perp}.$$

Pelas propriedades das conexões riemannianas $\nabla$ e $\widetilde{\nabla}$ temos que $\alpha : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$ é uma forma bilinear e simétrica sobre o anel $C^{\infty}(M)$ das funções diferenciáveis em $M$. Em particular, para qualquer ponto $p$ em $M$ e campos vetoriais $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a aplicação $\alpha_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$, dada por $\alpha_p(X,Y) = \alpha(X,Y)(p)$, depende somente dos valores de $X$ e $Y$ em $p$.

Assim, obtemos a **Fórmula de Gauss**

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X,Y), \;\; \forall\, X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.4}$$

Sejam agora $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$:

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\top} + (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

Com relação à componente normal, definimos

$$\nabla^{\perp}_X \xi := (\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\perp}.$$

Note que $\nabla^{\perp}$ é uma conexão afim em $TM^{\perp}$ no seguinte sentido:

$$\nabla^{\perp} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^{\perp} \to \mathfrak{X}(M)^{\perp}$$

é $C^{\infty}(M)$-linear em $X$, $\mathbb{R}$-linear em $\xi$ e para toda $h \in C^{\infty}(M)$, $\nabla^{\perp}_X(h\xi) = h\nabla^{\perp}_X \xi + X(h)\xi$. Além disto, $\nabla^{\perp}$ é compatível com a métrica, ou seja, se $\eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, $X\langle \xi, \eta\rangle = \left\langle \nabla^{\perp}_X \xi, \eta \right\rangle + \left\langle \xi, \nabla^{\perp}_X \eta \right\rangle$, onde $\langle\, ,\, \rangle$ é a métrica de $\widetilde{M}$. Chamaremos $\nabla^{\perp}$ de *conexão normal* da imersão $f$.

Quanto à parte tangente, definimos a aplicação $A_\xi : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ por

$$A_\xi X := -(\widetilde{\nabla}_X \xi)^{\top}.$$

Dado $p \in M$, $A_{\xi_p} : T_pM \to T_pM$ é um operador linear simétrico (ou auto-adjunto), isto é, $\langle A_\xi X, Y\rangle_p = \langle X, A_\xi Y\rangle_p$. Com efeito, se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, temos

$$\begin{aligned}
\langle A_\xi X, Y\rangle &= \left\langle -\widetilde{\nabla}_X \xi, Y \right\rangle = \left\langle \xi, \widetilde{\nabla}_X Y \right\rangle = \langle \xi, \nabla_X Y + \alpha(X,Y)\rangle = \langle \xi, \alpha(X,Y)\rangle = \langle \xi, \alpha(Y,X)\rangle \\
&= \langle \xi, \nabla_Y X + \alpha(Y,X)\rangle = \left\langle \xi, \widetilde{\nabla}_Y X \right\rangle = \left\langle -\widetilde{\nabla}_Y \xi, X \right\rangle = \langle A_\xi Y, X\rangle .
\end{aligned}$$

Em particular, $\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X,Y), \xi\rangle$. O operador $A_\xi$ é chamado de *operador de forma*, ou *operador de Weingarten*, ou ainda com certo abuso de linguagem, de *segunda forma fundamental* da imersão $f$.

Temos, assim, a **fórmula de Weingarten**

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla^\perp_X \xi, \ \ \forall\, X \in \mathfrak{X}(M) \text{ e } \xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp. \tag{1.5}$$

Agora, usando as fórmulas de Gauss e Weingarten vamos obter as equações fundamentais de uma imersão isométrica, a saber, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Sejam $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $R$ e $\widetilde{R}$ os operadores curvatura de $M$ e $\widetilde{M}$, respectivamente:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \text{ e} \\ \widetilde{R}(X,Y)Z &= \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z - \widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z\ . \end{aligned}$$

Das fórmulas de Gauss (1.4) e Weingarten (1.5),

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X\widetilde{\nabla}_Y Z &= \widetilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z + \alpha(Y,Z)) = \widetilde{\nabla}_X\nabla_Y Z + \widetilde{\nabla}_X\alpha(Y,Z) \\ &= \nabla_X\nabla_Y Z + \alpha(X,\nabla_Y Z) - A_{\alpha(Y,Z)}X + \nabla^\perp_X\alpha(Y,Z). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\widetilde{\nabla}_Y\widetilde{\nabla}_X Z = \nabla_Y\nabla_X Z + \alpha(Y,\nabla_X Z) - A_{\alpha(X,Z)}Y + \nabla^\perp_Y\alpha(X,Z).$$

E por fim,

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z + \alpha([X,Y],Z).$$

Tomando a parte tangencial do operador curvatura de $\widetilde{M}$ temos:

$$\begin{aligned} (\widetilde{R}(X,Y)Z)^\top &= \nabla_X\nabla_Y Z - A_{\alpha(Y,Z)}X - \nabla_Y\nabla_X Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - \nabla_{[X,Y]}Z \\ &= R(X,Y)Z + A_{\alpha(X,Z)}Y - A_{\alpha(Y,Z)}X. \end{aligned}$$

Assim, para todo $W \in \mathfrak{X}(M)$, obtemos a **equação de Gauss**

$$\left\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W \right\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \left\langle A_{\alpha(X,Z)}Y, W\right\rangle - \left\langle A_{\alpha(Y,Z)}X, W\right\rangle, \tag{1.6}$$

que pode também ser expressa por

$$\left\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, W \right\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle + \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W)\rangle - \langle \alpha(Y,Z), \alpha(X,W)\rangle. \tag{1.7}$$

Em particular, se $K(X,Y) = \langle R(X,Y)Y, X\rangle$ e $\widetilde{K}(X,Y) = \left\langle \widetilde{R}(X,Y)Y, X\right\rangle$ denotam as curvaturas seccionais em $M$ e $\widetilde{M}$ do plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_pM$, a equação de Gauss se torna

$$K(X,Y) = \widetilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2 . \tag{1.8}$$

Tome agora a componente normal de $\widetilde{R}(X,Y)Z$:

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = \alpha(X, \nabla_y Z) + \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \nabla^\perp_Y \alpha(X,Z) - \alpha([X,Y],Z).$$

Usando o fato da conexão em $M$ ser simétrica, ou seja, $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$ e denotando por $(\nabla^\perp_U \alpha)(V,W) = \nabla^\perp_U \alpha(V,W) - \alpha(\nabla_U V, W) - \alpha(V, \nabla_U W)$, obtemos da igualdade acima a **equação de Codazzi**

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^\perp = (\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) - (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z). \tag{1.9}$$

Considere o operador de curvatura normal $R^\perp : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)^\perp \to \mathfrak{X}(M)^\perp$ definido por

$$R^\perp(X,Y)\xi = \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi - \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi - \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi.$$

Dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, temos

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi = \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \xi - \widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X \xi - \widetilde{\nabla}_{[X,Y]} \xi,$$

onde, pelas fórmulas de Gauss e de Weingarten,

$$\widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \xi = -\widetilde{\nabla} A_\xi Y - \alpha(X, A_\xi Y) - A_{\nabla^\perp_Y \xi} X + \nabla^\perp_X \nabla^\perp_Y \xi,$$

$$\widetilde{\nabla}_Y \widetilde{\nabla}_X \xi = -\widetilde{\nabla} A_\xi X - \alpha(Y, A_\xi X) - A_{\nabla^\perp_X \xi} Y + \nabla^\perp_Y \nabla^\perp_X \xi \text{ e}$$

$$\widetilde{\nabla}_{[X,Y]} \xi = -A_\xi [X,Y] + \nabla^\perp_{[X,Y]} \xi.$$

Tomando a projeção normal de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^\perp = R^\perp(X,Y)\xi + \alpha(Y, A_\xi X) - \alpha(X, A_\xi Y).$$

Se $\eta \in \mathfrak{X}(M)^\perp$, então

$$\left\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \left\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \right\rangle + \langle A_\xi X, A_\eta Y \rangle - \langle A_\eta X, A_\xi Y \rangle ,$$

ou denotando $A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$ por $[A_\xi, A_\eta]$ obtemos a **equação de Ricci**

$$\left\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \left\langle R^\perp(X,Y)\xi, \eta \right\rangle - \langle [A_\xi, A_\eta] X, Y \rangle . \tag{1.10}$$

Dados $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, observe que $\left\langle \widetilde{R}(X,Y)\xi, Z \right\rangle = -\left\langle \widetilde{R}(X,Y)Z, \xi \right\rangle$ (propriedade de $\widetilde{R}$). Assim, uma forma equivalente da *equação de Codazzi* obtém-se tomando a parte tangencial de $\widetilde{R}(X,Y)\xi$:

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A)(X,\xi) - (\nabla_X A)(Y,\xi), \tag{1.11}$$

onde $(\nabla_V A)(U,\xi) = \nabla_V A_\xi U - A_\xi \nabla_V U - A_{\nabla_V^{\perp}\xi} U$.

A seguir, obtemos as equações de uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}(c)$, onde $\widetilde{M}^{n+k}(c)$ é uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante $c$. Neste caso o tensor curvatura de $\widetilde{M}$ é dado por

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = c(X \wedge Y)Z,$$

onde $(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y,\ \forall\ X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\widetilde{M})$.

Assim, para $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)^{\perp}$, as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são, respectivamente:

$$\langle R(X,Y)Z, W \rangle = c\,\langle (X \wedge Y)Z, W \rangle + \langle \alpha(Y,Z), \alpha(X,W) \rangle - \langle \alpha(X,Z), \alpha(Y,W) \rangle\,, \tag{1.12}$$

$$(\nabla_X^{\perp}\alpha)(Y,Z) = (\nabla_Y^{\perp}\alpha)(X,Z), \text{ ou equivalentemente, } (\nabla_X A)(Y,\xi) = (\nabla_Y A)(X,\xi), \tag{1.13}$$

$$R^{\perp}(X,Y)\xi = \alpha(X, A_\xi Y) - \alpha(Y, A_\xi X), \text{ ou, } \left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle\,. \tag{1.14}$$

Da álgebra linear, dados dois operadores simétricos $A, B : V \to V$, sobre um espaço vetorial de dimensão finita, sabemos que $AB = BA$ se, e somente se, $A$ e $B$ são simultaneamente diagonalizáveis. Portanto, da equação de Ricci (1.14) para ambientes $(\widetilde{M})$ de curvatura constante, segue que $R^{\perp} \equiv 0$ se, e só se, para todo $p$ em $M$ existe uma base de $T_pM$ que diagonaliza $A_\xi$ para todo $\xi \in T_pM^{\perp}$.

Vejamos alguns exemplos de imersões isométricas com suas respectivas segundas formas fundamentais:

**Exemplo 1.7** A aplicação $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+p}$ dada por $f(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, 0, ..., 0)$ é uma imersão isométrica com $\alpha \equiv 0$, pois $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$

**Exemplo 1.8** Considere a inclusão $i : S^n(r) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, onde $S^n(r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x| = r \right\}$. Vamos calcular sua segunda forma fundamental. Para isto, tome o campo de vetores normal unitário $N(x) = -\frac{1}{r}x$. Pela fórmula de Weingarten, para todo $X \in TS^n$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N.$$

Por um lado, $\langle N, N \rangle = 1$ implica que $X \langle N, N \rangle = 2 \left\langle \widetilde{\nabla}_X N, N \right\rangle = 0$, isto é, $\nabla_X^{\perp} N = 0$. Por outro, $\widetilde{\nabla}_X N = -\frac{1}{r}\widetilde{\nabla}_X x = -\frac{1}{r}X$. Portanto, $A_N = \frac{1}{r}Id$.

Observe agora que sendo a imersão de codimensão 1, temos que

$$\alpha(X,Y) = (\widetilde{\nabla}_X Y)^{\perp} = \langle \alpha(X,Y), N\rangle N = \langle A_N X, Y\rangle N = \frac{1}{r}\langle X,Y\rangle N,$$

ou seja,

$$\alpha_x(X,Y) = -\frac{1}{r^2}\langle X,Y\rangle x, \quad \forall \ \ x \in S^n \ \text{ e } \ \forall \ \ X,Y \in T_xM.$$

**Exemplo 1.9** Seja $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(s,u) = (x(s), y(s), u)$ onde $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ é uma curva regular parametrizada por comprimento de arco e homeomorfa a $\mathbb{R}$. Observe que uma seção normal é dada por $N(s,u) = (-y'(s), x'(s), 0)$. Considerando os campos tangentes coordenados $\frac{\partial}{\partial s}$ e $\frac{\partial}{\partial u}$, temos

$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial s}} N = (-y''(s), x''(s), 0) = -K(s)(x'(s), y'(s), 0) = -k(s)\frac{\partial}{\partial s}$, onde $K(s)$ é a curvatura de $\gamma$,

e

$\widetilde{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial u}} N = 0.$

Como $A_N X = -\widetilde{\nabla}_X N$, pois $\nabla^{\perp}_X N = 0$, para todo $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, temos que a matriz do operador de forma $A_N(s,u)$ na base $\left\{\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial u}\right\}$ é

$$\begin{bmatrix} K(s) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, dados $X, Y \in T\mathbb{R}^2$, e escrevendo $X = X_h\frac{\partial}{\partial s} + X_v\frac{\partial}{\partial u}$ e $Y = Y_h\frac{\partial}{\partial s} + Y_v\frac{\partial}{\partial u}$, obtemos

$$\alpha(X,Y) = \langle \alpha(X,Y), N\rangle N = \langle A_N X, Y\rangle N = \left\langle K(s)X_h\frac{\partial}{\partial s}, Y\right\rangle N = K(s)X_hY_hN.$$

Vimos acima que as equações de Gauss, Codazzi e Ricci são satisfeitas para qualquer imersão isométrica $f: M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$. O *teorema fundamental das subvariedades* nos dá uma recíproca local deste fato quando $\widetilde{M}^{n+k} = Q^{n+k}(c)$, onde $Q^{n+k}(c)$ denota a forma espacial de dimensão $n+k$ e curvatura constante $c$. Mais adiante, enunciaremos este teorema no caso de $M$ ser simplesmente conexa, no qual o resultado é global. Porém antes, serão necessárias outras definições.

Sejam $E$ e $M$ variedades diferenciáveis e $\pi: E \to M$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que $\pi: E \to M$ é um *fibrado vetorial diferenciável de posto* $k$, ou simplesmente *fibrado vetorial*, quando para cada ponto $p \in M$

i) $\pi^{-1}(p)$ é um espaço vetorial real de dimensão $k$,

ii) existe uma vizinhança $U$ de $p$ em $M$ e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$ cuja restrição a $\pi^{-1}(q)$ é um isomorfismo sobre $\{q\} \times \mathbb{R}^k$ para cada $q \in U$.

Dado um fibrado vetorial $\pi : E \to M$, para cada $p \in M$ chamamos o espaço (vetorial) $E_p = \pi^{-1}(p)$ de *fibra* de $\pi$ sobre $p$. Uma *seção local* sobre um conjunto aberto $U \subset M$ é uma aplicação diferenciável $\xi : M \to E$ tal que $\pi \circ \xi = id_U$. Se $U = M$ dizemos que $\xi : M \to E$ é uma *seção global*, ou simplesmente uma *seção* de $\pi$, denotaremos por $\Gamma(\pi)$ o conjunto das seções de $\pi$. Dado $e \in E$ existe uma seção $\xi$ tal que $\xi(\pi(e)) = e$. De fato, se $e \in E$ temos $\pi(e) = p \in M$ e, pela definição de fibrado vetorial, existe uma vizinhança $U \subset M$ de $p$ e um difeomorfismo $\varphi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^k$. Note que $\varphi(e) = (p, v_0)$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^k$. Definindo $\eta : U \to U \times \mathbb{R}^k$ por $\eta(q) = (q, v_0)$ e fazendo $\xi : U \to E$ como $\xi(p) = \varphi^{-1} \circ \eta$, temos que $\xi$ é diferenciável e $\xi \circ \pi(e) = \varphi^{-1} \circ \eta \circ \pi(e) = \varphi^{-1} \circ \eta(p) = e$, como queríamos encontrar. Em particular, isto mostra que $\Gamma(\pi)$ é não vazio.

Sejam $\pi_1 : E^1 \to M$ e $\pi_2 : E^2 \to M$ fibrados vetoriais. Considerando $Hom(E^1, E^2)$ como a união disjunta dos espaços das aplicações lineares de $E^1_p$ em $E^2_p$, $p \in M$, definimos uma projeção $\pi : Hom(E^1, E^2) \to M$ por $\pi^{-1}(p) = Hom(E^1_p, E^2_p)$. Dotando $Hom(E^1, E^2)$ com a estrutura diferenciável induzida pela projeção ele se torna um fibrado vetorial, chamado fibrado de homomorfismos. Em [25] pg. 32-34, Milnor e Stasheff indicam como construir tal estrutura diferenciável para $Hom(E^1, E^2)$.

Dados dois fibrados vetoriais $\pi_1 : E^1 \to M_1$ e $\pi_2 : E^2 \to M_2$, e um difeomorfismo $\phi : M_1 \to M_2$, dizemos que a aplicação diferenciável $\bar{\phi} : E^1 \to E^2$ é um *isomorfismo de fibrados vetoriais relacionado a* $\phi$ se, para todo $p \in M_1$, temos

i) $\pi_2 \circ \bar{\phi} = \phi \circ \pi_1$ e $\bar{\phi}(\pi_1^{-1}(p)) = \pi_2^{-1}(\phi(p))$,

ii) a restrição $\bar{\phi}_p : \pi_1^{-1}(p) \to \pi_2^{-1}(\phi(p))$ de $\bar{\phi}$ à fibra $\pi_1^{-1}(p)$ é um isomorfismo de espaços vetoriais.

Segue da definição que $\bar{\phi}$ é um difeomorfismo. Além disto, para cada seção $\xi$ de $\pi_1$ obtemos uma seção $\bar{\phi}(\xi)$ de $\pi_2$ definindo $\bar{\phi}(\xi) = \bar{\phi} \circ \xi \circ \phi^{-1}$.

Uma *métrica riemanniana* $g$ em um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ é uma aplicação

$$g : \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to C^\infty(M),$$

bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em $M$, simétrica e positiva definida. É consequência da existência de partição da unidade o fato de qualquer fibrado vetorial possuir uma métrica riemanniana. Um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ munido de uma métrica riemanniana é chamado *fibrado vetorial riemanniano.*

Sejam $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial e $\mathfrak{X}(M)$ o conjunto dos campos diferenciáveis em $M$. Uma *conexão linear* sobre $\pi : E \to M$ é uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ que leva o par ordenado $(X, \xi)$ em $\nabla_X \xi$ e satisfaz, para cada $f \in C^\infty(M)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi \in \Gamma(\pi)$, as propriedades

i) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X\xi$,

ii) $\nabla_X(f\xi) = X(f)\xi + f\nabla_X\xi$.

De i) segue que a aplicação $X \mapsto \nabla_X\xi$ é $C^\infty(M)$-linear e consequentemente, o valor de $\nabla_X\xi$ em $p \in M$ depende do valor de $X$ somente no ponto $p$. Por outro lado, de ii) concluimos que o operador $\nabla_X : \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ é tal que o valor de $\nabla_X\xi$ em $p \in M$ depende do valor de $\xi$ numa vizinhança de $p$.

Considere agora um fibrado vetorial riemanniano $\pi : E \to M$ e $g$ uma métrica de $M$. Uma conexão linear $\nabla$ é dita *compatível com a métrica* $g$ quando

$$Xg(\xi, \eta) = g(\nabla_X\xi, \eta) + g(\xi, \nabla_X\eta)$$

para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ e $\xi, \eta \in \Gamma(\pi)$.

O *tensor curvatura* de um fibrado vetorial $\pi : E \to M$ com a conexão linear $\nabla$ é a aplicação $\mathbb{R}$-trilinear $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \to \Gamma(\pi)$ definida por

$$R(X, Y)\xi = \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi.$$

É fácil verificar que $R$ é trilinear sobre $C^\infty(M)$. Quando o fibrado vetorial é riemanniano, podemos associar a $R$ outro tensor $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(\pi) \times \Gamma(\pi) \to \mathbb{R}$ dado por

$$R(X, Y, \xi, \eta) = g(R(X, Y)\xi, \eta),$$

onde $g$ é a métrica em $E$.

Agora estamos aptos a enunciar o *teorema fundamental das subvariedades*:

**Teorema 1.10** *i) Seja $M^n$ uma variedade riemanniana simplesmente conexa, $\pi : E \to M$ um fibrado vetorial riemanniano de posto $p$ com uma conexão compatível $\nabla'$ e seja $\alpha$ uma seção simétrica do fibrado de homomorfismos $Hom(TM \times TM, E)$. Defina, para cada seção local $\xi$ de $E$, uma aplicação $A_\xi : TM \to TM$ por*

$$\langle A_\xi X, Y\rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi\rangle, \quad X, Y \in TM.$$

*Se $\alpha$ e $\nabla'$ satisfazem as equações de Gauss, Codazzi e Ricci para o caso de curvatura seccional constante $c$, então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q^{n+p}(c)$ e um iso-*

*morfismo de fibrados vetoriais* $\widetilde{f} : E \to TM^{\perp}$ *ao longo de* $f$*, tal que para todos* $X, Y \in TM$ *e todas seções locais* $\xi, \eta$ *de* $E$

$$\left\langle \widetilde{f}(\xi), \widetilde{f}(\eta) \right\rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

$$\widetilde{f}\alpha(X,Y) = \widetilde{\alpha}(X,Y)$$

$$\widetilde{f}\nabla'_X \xi = \nabla^{\perp}_X \widetilde{f}(\xi),$$

*onde* $\widetilde{\alpha}$ *e* $\nabla^{\perp}$ *são a segunda forma fundamental e a conexão normal da imersão* $f$*, respectivamente.*

*ii) Suponha que* $f$ *e* $g$ *sejam imersões isométricas de uma variedade conexa* $M^n$ *em* $Q^{n+p}(c)$*. Denote por* $TM_f^{\perp}$*,* $\alpha_f$ *e* $\nabla_f^{\perp}$ *o fibrado normal, a segunda forma fundamental e a conexão normal de* $f$*, respectivamente, e sejam* $TM_g^{\perp}$*,* $\alpha_g$ *e* $\nabla_g^{\perp}$ *os correspondentes objetos de* $g$*. Se existe um isomorfismo de fibrados vetoriais* $\widetilde{\phi} : TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$ *tal que, para todo* $X, Y \in TM$ *e todo* $\xi, \eta \in TM_f^{\perp}$

$$\left\langle \widetilde{\phi}(\xi), \widetilde{\phi}(\eta) \right\rangle = \langle \xi, \eta \rangle$$

$$\widetilde{\phi}\alpha_f(X,Y) = \alpha_g(X,Y)$$

$$\widetilde{\phi}\nabla'_{fX}\xi = \nabla^{\perp}_{gX}\widetilde{\phi}(\xi),$$

*então existe uma isometria* $\tau : Q^{n+p}(c) \to Q^{n+p}(c)$ *tal que*

$$g = \tau \circ f \quad e \quad d\tau|_{TM_f^{\perp}} = \widetilde{\phi}.$$

**Observação:** Quando $M^n$ admite duas imersões isométricas $f$ e $g$ em $\widetilde{M}^{n+k}$ e existe uma isometria $\tau$ do ambiente $\widetilde{M}^{n+k}$ tal que $g = \tau \circ f$, dizemos que as imersões $(M^n, f)$ e $(M^n, g)$ são *congruentes*.

Uma demonstração desse teorema para o caso $c = 0$ é dada em [15].

## 1.4 Imersões totalmente geodésicas e imersões umbílicas

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Dizemos que $f$ é *totalmente geodésica em* $p \in M$ se a segunda forma fundamental $\alpha_p : T_pM \times T_pM \to T_pM^{\perp}$ for identicamente nula, isto é, $\alpha_p(X,Y) = 0,\ \forall\ X, Y \in T_pM$. Dizemos ainda que $f$ é *totalmente geodésica* se o for para todo $p \in M$. No exemplo 1.7 temos uma imersão totalmente geodésica.

**Proposição 1.11** *Uma imersão* $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ *é totalmente geodésica se, e somente se, as geodésicas de* $M$ *são as geodésicas de* $\widetilde{M}$ *contidas em* $M$*.*

**Dem.:** Seja $\gamma$ uma geodésica de $\widetilde{M}$ contida em $M$, então $\gamma$ é uma geodésica de $M$ e isto independe do fato de ser $f$ totalmente geodésica, basta observar que $\nabla_X Y = (\widetilde{\nabla}_X Y)^{\top}$.

Por outro lado, se $\gamma$ é uma geodésica de $M$ parametrizada por comprimento de arco, então $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$. Logo, pela fórmula de Gauss assumindo que a imersão $f$ é totalmente geodésica, temos $\widetilde{\nabla}_{\gamma'}\gamma' = \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0$, ou seja, $\gamma$ é geodésica de $\widetilde{M}$.

Sendo $\alpha_p$ uma aplicação $\mathbb{R}$-bilinear tal que $\alpha_p(X,X) = 0$ para todo $X \in T_pM$ temos que $\alpha_p$ é identicamente nula e isto mostra a recíproca.

$\square$

Observe que se $\widetilde{M}$ tem curvatura seccional constante $c$ e $f$ é totalmente geodésica então $M$ também possui curvatura constante $c$ e $R^{\perp} \equiv 0$. Tais fatos seguem diretamente da equação de Gauss

$$K(X,Y) = \widetilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2 = c$$

e da equação de Ricci

$$\left\langle R^{\perp}(X,Y)\xi, \eta \right\rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle = 0,$$

para todo $p \in M$, $X, Y \in T_pM$ e $\xi, \eta \in T_pM^{\perp}$.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$, denominamos de *primeiro espaço normal*, da imersão $f$ em $p \in M^n$, o conjunto $N_1(p)$ definido por $N_1^{\perp}(p) = \left\{\xi \in T_{f(p)}^{\perp}M;\ A_\xi = 0\right\}$.

**Lema 1.12** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ uma imersão isométrica. Suponha que exista um subfibrado $E$ de $TM^{\perp}$ paralelo na conexão normal, (ou seja, $\nabla_X^{\perp}\xi \in E$, $\forall \xi \in E$ e $\forall X \in TM$), tal que $N_1(p) \subset E(p)$ para todo $p \in M^n$. Então $E^{\perp}(p)$ é um subespaço constante $H$ de $\mathbb{R}^{n+k}$ e $f(M^n) \subset f(p) + H^{\perp}$.*

**Dem.:** Se $\xi \in E^{\perp}$, então $\xi \in N_1^{\perp}$. Assim, $\widetilde{\nabla}_X\xi = -A_\xi X + \nabla_X^{\perp}\xi = \nabla_X^{\perp}\xi \in E^{\perp}$, isto é, $E^{\perp}(p)$ é um subespaço constante $H$ de $R^{n+k}$.

Observe agora que, fixado $p \in M^n$,

$$X_q \langle f(x) - f(p), v \rangle = \langle df X_q, v \rangle = 0,\ \forall q \in M,\ \forall X_q \in T_qM,\ \forall v \in H,$$

pois $H \subset T_q^{\perp}M$. Além disso, a função $\langle f(x) - f(p), v \rangle$ é nula em $p$, portanto $\langle f(x) - f(p), v \rangle = 0$ para todo $x \in M^n$. Logo $f(M^n) \subset f(p) + H^{\perp}$.

$\square$

**Corolário 1.13** *Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ é totalmente geodésica, com $M$ conexa, então $f(M)$ é um aberto de um $n$-subespaço afim do $\mathbb{R}^{n+k}$.*

**Dem.:** Aplicando o Lema 1.12 para $E(p) = 0$ para cada $p$ em $M^n$, concluímos que $f(M^n)$ está contida num $n$-subespaço afim $f(p) + H$ de $\mathbb{R}^{n+k}$. Além disso, como aplicação $f : M^n \to f(p) + H^\perp$ é uma isometria local, em particular um difeomorfismo local. Logo, $f : M^n \to f(p) + H^\perp$ é uma aplicação aberta, e portanto $f(M^n)$ é um subconjunto aberto de $f(p) + H^\perp$.

$\square$

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$, definimos o *vetor curvatura média* de $f$ em $p \in M$ do seguinte modo: tome $\{X_1, ..., X_n\}$ uma base ortonormal de $T_pM$ e ponha

$$H(p) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha(X_i, X_i).$$

Esta definição não depende da escolha da base. De fato, escolhendo uma base ortonormal $\{\xi_1, ..., \xi_k\}$ de $T_pM^\perp$, temos que

$$H(p) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\langle\alpha(X_i, X_i), \xi_j\rangle\,\xi_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\left(\sum_{i=1}^{n}\langle A_{\xi_j}X_i, X_i\rangle\right)\xi_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(trA_{\xi_j})\xi_j$$

e como $trA_{\xi_j}$ é invariante por mudança de base, concluímos o desejado.

Uma imersão isométrica $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ é *umbílica em* $p \in M$ se para todo $\xi \in T_pM^\perp$ o operador de forma relacionado a $\xi$ for um múltiplo real da identidade, ou seja, $A_\xi X = \lambda_\xi X$, com $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$, para todo $X \in T_pM$. Dizemos que $f$ é *totalmente umbílica*, ou somente *umbílica*, se for umbílica em todo ponto $p$ de $M$.

**Lema 1.14** *Dada $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}$ uma imersão isométrica, as seguintes afirmações são equivalentes:*

*i) $f$ é umbílica em $p \in M$;*

*ii) $A_\xi = \langle H(p), \xi\rangle\, I$, em $T_pM$, $\forall\ \xi \in T_pM^\perp$;*

*iii) $\alpha_p(X, Y) = \langle X, Y\rangle\, H(p)$.*

**Dem.:** i) $\Rightarrow$ ii) Dado $\xi \in T_pM^\perp$, temos que $A_\xi = \lambda_\xi I$. Tome $\xi_1 = \xi/\|\xi\|, \xi_2, ..., \xi_k$ base ortonormal de $T_pM^\perp$. Assim, $H(p) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}(trA_{\xi_j})\xi_j$ implica que

$$\langle H(p), \xi\rangle = \frac{1}{n}trA_{\xi_1}\langle\xi_1, \xi\rangle = \frac{1}{n}tr\left(\frac{1}{\|\xi\|}A_\xi\right)\|\xi\| = \lambda_\xi,$$

ou seja, $A_\xi = \langle H(p), \xi\rangle\, I$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Dados $X, Y \in T_pM$ e $\xi_1, ..., \xi_k$ uma base ortonormal de $T_pM^\perp$, a segunda forma fundamental pode ser expressa por $\alpha_p(X,Y) = \sum\limits_{j=1}^{k} \langle \alpha_p(X,Y), \xi_j \rangle \xi_j$. Logo,

$$\alpha_p(X,Y) = \sum_{j=1}^{k} \left\langle A_{\xi_j} X, Y \right\rangle \xi_j = \sum_{j=1}^{k} \langle \langle H(p), \xi_j \rangle X, Y \rangle \xi_j = \langle X, Y \rangle \sum_{j=1}^{k} \langle H(p), \xi_j \rangle \xi_j = \langle X, Y \rangle H(p).$$

iii) $\Rightarrow$ i) Sejam $X, Y \in T_pM$ e $\xi_1, ..., \xi_k$ uma base ortonormal de $T_pM^\perp$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{k} \left\langle A_{\xi_j} X, Y \right\rangle \xi_j = \alpha_p(X,Y) = \langle X, Y \rangle H(p) = \langle X, Y \rangle \sum_{j=1}^{k} \langle H(p), \xi_j \rangle \xi_j = \sum_{j=1}^{k} \langle \langle H(p), \xi_j \rangle X, Y \rangle \xi_j.$$

Ou seja, $\sum\limits_{j=1}^{k} \left\langle \left( A_{\xi_j} - \langle H(p), \xi_j \rangle \right) X, Y \right\rangle \xi_j = 0$, para todo $X, Y \in T_pM$ e $\xi_i \in T_pM^\perp$, e isso implica que $A_{\xi_j} = \langle H(p), \xi_j \rangle I$, mostrando que a imersão é umbílica.

$\square$

**Lema 1.15** *Se $\widetilde{M}^{n+k}(c)$ é uma variedade riemanniana de curvatura seccional constante $c$ e $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}(c)$ é umbílica, com $n \geq 2$, então $R^\perp \equiv 0$ e $H$ é $\nabla^\perp$-paralelo, isto é, $\nabla^\perp_X H = 0$ para todo $X \in TM$.*

**Dem.:** Da equação de Ricci para todo $X, Y \in TM$ e $\xi \in TM^\perp$,

$$R^\perp(X,Y)\xi = \alpha(A_\xi Y, X) - \alpha(A_\xi X, Y) = \langle A_\xi Y, X \rangle H - \langle A_\xi X, Y \rangle H,$$

concluímos que $R^\perp \equiv 0$.

Considere agora a equação de Codazzi $(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) = (\nabla^\perp_Y \alpha)(X,Z)$, para todo $X, Y, Z \in TM$ e note que

$$\begin{aligned}
(\nabla^\perp_X \alpha)(Y,Z) &= \nabla^\perp_X \alpha(Y,Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) \\
&= \nabla^\perp_X (\langle Y, Z \rangle H) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle H - \langle Y, \nabla_X Z \rangle H \\
&= X \langle Y, Z \rangle H + \langle Y, Z \rangle \nabla^\perp_X H - \langle \nabla_X Y, Z \rangle H - \langle Y, \nabla_X Z \rangle H \\
&= \langle Y, Z \rangle \nabla^\perp_X H.
\end{aligned}$$

Desenvolvendo, de maneira análoga, o outro membro da equação de Codazzi obtemos $\langle Y, Z \rangle \nabla^\perp_X H = \langle X, Z \rangle \nabla^\perp_Y H$. Tomando $Y = Z$ e $X \perp Z$, resulta $\langle Y, Y \rangle \nabla^\perp_X H = 0$, ou seja, $\nabla^\perp_X H = 0$, $\forall\, X \in TM$.

$\square$

**Corolário 1.16** *Se $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+k}(c)$ é umbílica, $n \geq 2$, então*

*i)* $\|H\|$ *é constante;*

*ii)* $M$ *tem curvatura seccional constante* $c + \|H\|^2$*;*

*iii)* $A_H = \|H\|^2 I$.

**Dem.:** i) $X \langle H, H \rangle = 2 \left\langle \nabla^{\perp}_X H, H \right\rangle = 0$, para todo $X \in TM$.

ii) Dados $X, Y \in TM$ ortonormais, pela equação de Gauss,

$$\begin{aligned} K(X,Y) &= \widetilde{K}(X,Y) + \langle \alpha(X,X), \alpha(Y,Y) \rangle - \|\alpha(X,Y)\|^2 \\ &= c + \left\langle \|X\|^2 H, \|Y\|^2 H \right\rangle - \| \langle X, Y \rangle H \|^2 \\ &= c + \|H\|^2. \end{aligned}$$

iii) Para todo $\xi \in TM^{\perp}$, $A_\xi = \langle H, \xi \rangle I$ e isto implica que $A_H = \|H\|^2 I$.

□

**Proposição 1.17** *Seja $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ umbílica, $M$ conexa e $n \geq 2$.*

*i) Se $\|H\| = 0$, então $f$ é totalmente geodésica e $f(M)$ é um aberto de um $n$-espaço afim $\mathbb{E}^n \subset \mathbb{R}^{n+k}$.*

*ii) Se $\|H\| \neq 0$, então $f(M)$ está contida num $(n+1)$-subespaço afim $\mathbb{E}^{n+1}$, e não está contida em nenhum $n$-subespaço afim.*

**Dem.:** i) Sendo a imersão umbílica e $\|H\| = 0$ temos $\alpha(X,Y) = \langle X, Y \rangle H = 0$, ou seja, $f$ é totalmente geodésica. E neste caso já vimos no corolário 1.13 que $f(M)$ é um aberto de um $n$-subespaço afim $\mathbb{E}^n \subset R^{n+k}$.

ii) Basta observar que, pelo Lema 1.15, o subfibrado $E(p) = gerH(p)$ é paralelo na conexão normal $\nabla^{\perp}$ e usar o lema 1.12.

□

**Teorema 1.18** *Se $f : M^n \to \mathbb{R}^{n+k}$ é umbílica, $M$ conexa, $n \geq 2$ e $\|H\| \neq 0$, então $f(M)$ é um aberto de uma $n$-esfera de raio $r = 1/\|H\|$.*

**Dem.:** Defina $N(p) = \dfrac{H(p)}{\|H(p)\|}$, para todo $p$ em $M$ e a função $h : M \to \mathbb{R}^{n+k}$ por $h(p) = f(p) + rN(p)$.

Para cada $X \in TM$, temos

$$X(h) = X(f(p) + rN(p)) = X + r\widetilde{\nabla}_X N.$$

Mas,

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N = -\frac{1}{\|H\|} A_H X = -\|H\| X = -\frac{1}{r} X.$$

Logo,

$$X(h) = X + r\left(-\frac{1}{r}X\right) = 0.$$

Assim, sendo $M$ conexa, $h$ é constante ao longo de $M$. Fazendo $h(p) = C \in \mathbb{R}^{n+k}$ temos que $\|f(p) - C\| = \|rN(p)\| = r$, para todo $p \in M$. Logo, $f(M) \subset S^{n+k-1}(C, r)$ (esfera de dimensão $n+k-1$, de centro $C$ e raio $r$).

$\square$

Capítulo 2

# Hipersuperfícies

Neste capítulo estudaremos as *hipersuperfícies* que são imersões isométricas de co-dimensão um. No espaço euclidiano, as hipersuperfícies constituem uma generalização natural das superfícies em $\mathbb{R}^3$ e consequentemente, muitas de suas propriedades se estendem às hipersuperfícies. Inicialmente determinaremos suas equações básicas e enunciaremos o teorema fundamental das subvariedades, como foi feito anteriormente para o caso de imersões de co-dimensão qualquer. Em seguida, daremos uma lista de hipersuperfícies que aparecerão nos teoremas de classificação. Por fim demonstraremos alguns resultados de fundamental importância no estudo das hipersuperfícies homogêneas realizado no próximo capítulo.

## 2.1 Equações Básicas e Teorema Fundamental das Subvariedades

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica (hipersuperfície) e $p \in M$. Escolha um campo vetorial diferenciável unitário normal $\xi \in TM^{\perp}$ definido numa vizinhança $U$ de $p$, isto é, $\langle \xi_y, \xi_y \rangle = 1$ para todo $y \in U$. Como o espaço normal tem dimensão um, só há duas possibilidades de escolha para $\xi$. Dados $X \in T_pM$ e um campo diferenciável $Y \in TM$ temos

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y) = \nabla_X Y + \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle \xi,$$

ou seja,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\xi X, Y \rangle \xi,$$

que é a **fórmula de Gauss** para as hipersuperfícies. Por outro lado, como $\xi$ é um campo vetorial unitário, temos $\left\langle \widetilde{\nabla}_X \xi, \xi \right\rangle = 0$, isto implica que $\nabla^{\perp}_X \xi = 0$ para todo $X \in TM$. Portanto, a **fórmula de Weingarten** torna-se

$$\widetilde{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Dados $X, Y, Z \in TM$, usando o fato de que $\alpha(X, Y) = \langle A_\xi X, Y \rangle \xi$ e tomando as componentes tangenciais de $\widetilde{R}(X,Y)Z$ obtemos a **equação de Gauss**

$$R(X,Y)Z = (\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\top} + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z, \tag{2.1}$$

onde $(A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z = \langle A_\xi Y, Z\rangle A_\xi X - \langle A_\xi X, Z\rangle A_\xi Y$.

A **equação de Codazzi**, nesse caso, é

$$(\widetilde{R}(X,Y)\xi)^{\top} = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y, \tag{2.2}$$

onde por definição $(\nabla_X A_\xi)Y = \nabla_X(A_\xi Y) - A_\xi \nabla_X Y$.

Observe que a **equação de Ricci** (1.10) para as hipersuperfícies é naturalmente satisfeita. Com efeito, por definição, $R^{\perp}(X,Y) \equiv 0$ e como $\eta = \pm\xi$ para todo campo normal unitário $\eta \in TM^{\perp}$ temos que $[A_\xi, A_\eta] \equiv 0$. Logo tal equação se anula em ambos membros.

No caso de $\widetilde{M}^{n+1}$ ter curvatura seccional constante $c$, as equações de Gauss e Codazzi ficam, respectivamente,

$$R(X,Y) = c(X \wedge Y) + A_\xi X \wedge A_\xi Y$$

e

$$(\nabla_Y A_\xi)X = (\nabla_X A_\xi)Y.$$

Sejam $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ e $g : M \to \widetilde{M}^{n+1}$ duas hipersuperfícies conexas em $\widetilde{M}^{n+1}$ e suponha que $\widetilde{M}^{n+1}$ seja orientável. Sob essas condições, vamos construir um isomorfismo isométrico de fibrados $\widetilde{\phi} : TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$. Para isto, fixe uma orientação de $\widetilde{M}^{n+1}$. Assim, para cada $p \in M$, escolha uma base ordenada $X_1, ..., X_n$ em $T_pM$ e um vetor unitário normal $\xi_p^1 \in TM_f^{\perp}$, tal que a base ordenada $dfX_1, ..., dfX_n, \xi_p^1$ é positivamente orientada em $T_{f(p)}\widetilde{M}$. Como há um único campo normal unitário $\xi_p^2 \in T_pM_g^{\perp}$ tal que a base $dgX_1, ..., dgX_n, \xi_p^2$ é positivamente orientada em $T_{g(p)}\widetilde{M}$, definimos o isomorfismo mencionado como a aplicação que satisfaz $\widetilde{\phi}(\xi_p^1) = \xi_p^2$ e é linear nas fibras. Observe que $\widetilde{\phi}$ e $-\widetilde{\phi}$ são as únicas tais aplicações.

Finalizamos esta seção enunciando o *teorema fundamental das subvariedades* para as hipersuperfícies:

**Teorema 2.1** *i) Seja $M^n$ uma variedade riemanniana simplesmente conexa e $A : TM \to TM$ um tensor simétrico satisfazendo as equações de Gauss e Codazzi no caso de curvatura seccional constante $c$. Então existe uma imersão isométrica $f : M^n \to Q^{n+1}(c)$, onde $Q^{n+1}(c)$ é a forma espacial real de curvatura $c$, tal que $A = A_\xi$ para algum campo vetorial normal unitário $\xi \in TM^{\perp}$, onde $A_\xi$ denota a segunda forma fundamental da imersão $f$.*

*ii) Sejam $f : M^n \to Q^{n+1}(c)$ e $g : M^n \to Q^{n+1}(c)$ hipersuperfícies conexas e $\widetilde{\phi} : TM_f^{\perp} \to TM_g^{\perp}$*

*um dos dois isomorfismos de fibrados vetoriais. Suponha que*

$$\alpha_g(X,Y) = \widetilde{\phi}\alpha_f(X,Y)$$

*ou*

$$\alpha_g(X,Y) = -\widetilde{\phi}\alpha_f(X,Y)$$

*para todo $X,Y \in TM$, onde $\alpha_f$ e $\alpha_g$ denotam, respectivamente, as segunda formas fundamentais de $f$ e $g$. Então existe uma isometria do ambiente*

$$\tau : Q^{n+1}(c) \to Q^{n+1}(c)$$

*tal que $g = \tau \circ f$ e $d\tau = \widetilde{\phi}$ ou $d\tau = -\widetilde{\phi}$ em $TM^{\perp}$.*

## 2.2 Exemplos

A seguir veremos alguns exemplos de hipersuperfícies que vão aparecer na classificação realizada no último capítulo.

Para o caso do espaço euclidiano $\mathbb{E}^{n+1}$ como ambiente da imersão temos:

**Exemplo 2.2** ***Hiperplanos:*** *são obtidos pela aplicação inclusão $i : M \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$, onde $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+1};\ p_{n+1} = 0\}$. Do exemplo 1.7 temos que tal hipersuperfície é totalmente geodésica e portanto seu operador de forma é A=0. Veja ainda que $M \cong \mathbb{E}^n$, isto é, a variedade riemannina $M$ com a métrica induzida pela imersão acima é isométrica ao espaço euclidiano $\mathbb{E}^n$.*

**Exemplo 2.3** ***Esferas:*** *dadas pela inclusão $i : M \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ tal que $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+1};\ \|p\|^2 = 1/c\}$. Neste caso, $A = \sqrt{c}I$ (como foi visto no exemplo 1.8) e $M \cong S^n(c)$.*

**Exemplo 2.4** ***Cilindros sobre esferas:*** *obtidas pela aplicação $i : M \hookrightarrow \mathbb{E}^{n+1}$ sendo $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+1};\ p_1^2 + ... + p_k^2 = 1/c\}$ e $1 < k < n$. Tomando a seção normal unitária $N(p) = -\sqrt{c}(p_1, ..., p_k, 0, ..., 0)$ e calculando $\widetilde{\nabla}_X N$, podemos concluir que $A = \sqrt{c}I_{k-1} \oplus 0$.*

**Exemplo 2.5** ***Cilindros sobre curvas planas completas:*** *Seja $M^1$ uma variedade riemanniana unidimensional completa. Assim, $M^1$ é isométrica à $S^1$ ou $E$. Seja $\gamma : M^1 \to \mathbb{E}^2$ imersão isométrica. Então, $\gamma \times i : M^1 \times \mathbb{E}^{n-1} \to \mathbb{E}^{n+1}$ é uma hipersuperfície completa e pode-se calcular $A = KI_1 \oplus 0$, onde $K$ é a curvatura de $\gamma$.*

Exemplos de hipersuperfícies na esfera $S^{n+1}(\widetilde{c})$:

**Exemplo 2.6** ***Grandes esferas:*** *obtidas com a inclusão $i : M \hookrightarrow S^{n+1}(\widetilde{c})$ onde $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+2};\ \|p\|^2 = 1/\widetilde{c},\ p_{n+2} = 0\}$. Nesse caso, a imersão é totalmente geodésica, ou seja, $A = 0$ e $M \cong\ S^n(\widetilde{c})$.*

**Exemplo 2.7** ***Pequenas esferas:*** *dadas pela aplicação inclusão* $i : M \hookrightarrow S^{n+1}(\widetilde{c})$ *com* $M = \left\{p \in \mathbb{E}^{n+2};\ \|p\|^2 = 1/\widetilde{c},\ p_{n+2} = \sqrt{1/\widetilde{c} - 1/c}\right\}$*. Como* $M$ *é uma variedade riemanniana de curvatura constante* $c > \widetilde{c}$*, temos* $M \cong S^n(c)$*. O operador de forma desta hipersuperfície é* $A = \sqrt{c - \widetilde{c}}I$*.*

**Exemplo 2.8** ***Produto de esferas:*** *obtido pela inclusão da variedade*

$$M = \left\{(p,q) \in \mathbb{E}^{n+2};\ \|p\|^2 = 1/c_1,\ \|q\|^2 = 1/c_2,\ p \in \mathbb{E}^{k+1},\ q \in \mathbb{E}^{n-k+1},\ 1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c},\right\}$$

*onde* $1 < k < n-1$*, em* $S^{n+1}(\widetilde{c})$*. Neste caso,* $M \cong S^k(c_1) \times S^{n-k}(c_2)$ *e o operador de forma é* $A = (1/\sqrt{c_1 + c_2})(c_1 I_k \oplus c_2 I_{n-k})$*.*

**Exemplo 2.9** *Seja* $M = \mathbb{E}^1 \times S^{n-1}(c_2)$ *e considere a imersão* $f : M \to S^{n+1}(\widetilde{c}) \subset \mathbb{E}^{n+2}$ *dada por* $f(t,p) = ((1/\sqrt{c_1})\cos t, (1/\sqrt{c_1}) sen t, p)$*, onde* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c}$*. O operador de forma é análogo ao do exemplo anterior, ou seja,* $A = (1/\sqrt{c_1 + c_2})(c_1 I_1 \oplus c_2 I_{n-1})$*.*

Por conveniência, denotaremos uma circunferência isométrica à circunferência de raio $1/\sqrt{c}$ em $\mathbb{R}^2$ por $S^1(c)$.

**Exemplo 2.10** *Seja* $M = S^1(c_1/l^2) \times S^{n-1}(c_2)$*. Considere a imersão* $f : M \to \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *dada por* $f(t,p) = (f_1(t), p)$*, onde* $f_1 : S^1(c_1/l^2) \to S^1(c_1)$ *é a aplicação que consiste em enrolar a esfera* $S^1(c_1/l^2)$ $l$ *vezes na esfera* $S^1(c_1)$*. Note que a imagem de* $f$ *é isométrica a* $S^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ *com* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c}$*.*

Hipersuperfícies no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$. Usaremos a notação $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ para a "fronteira" do espaço hiperbólico no modelo do semi-espaço.

**Exemplo 2.11** ***Hiperplanos:*** *são obtidos pela imersão* $i : M \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *sendo que* $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+1};\ p_{n+1} > 0 \text{ e } p_1 = 0\}$ *ou* $M = \{p \in \mathbb{E}^{n+1};\ p_{n+1} > 0,\ \|p - p'\|^2 = 1/d,\ p'_{n+1} = 0\}$*, onde* $p'$ *é um ponto fixo em* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *e a norma é a euclidiana. Geometricamente, são as intersecções de hiperplanos de* $\mathbb{E}^{n+1}$ *ortogonais à* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *ou de esferas euclidianas de centro em* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *com* $\mathbb{H}^{n+1}$*. Estas hipersuperfícies são totalmente geodésicas, isto é,* $A = 0$ *e* $M \cong \mathbb{H}^n(\widetilde{c})$*.*

No final da presente seção mostraremos que as hipersuperfícies apresentadas a seguir são de fato umbílicas do espaço hiperbólico. Além disso, em cada caso, vamos calcular a curvatura principal $\lambda$ da imersão, o que nos fornece o operador de forma $A = \lambda I$ e as respectivas curvaturas seccionais $c$.

**Exemplo 2.12** ***Umbílicas:*** *Nos exemplos que seguem* $p'$ *é um ponto fixo de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *e a norma* $\|\ .\ \|$ *é a euclidiana.*

*i)* ***Esferas Geodésicas:*** *obtidas com a inclusão, em* $\mathbb{H}^{n+1}$, *de*

$$M = \left\{ p \in \mathbb{E}^{n+1};\ \|p - p'\|^2 = 1/d,\ p'_{n+1} > 1/\sqrt{d} \right\}.$$

*Tais hipersuperfícies são esferas do* $\mathbb{E}^{n+1}$ *de centro euclidiano* $p'$ *totalmente contidas em* $\mathbb{H}^{n+1}$ *e possuem curvatura seccional* $c$ *positiva.*

*ii)* ***Horoesferas:*** *dadas pela aplicação* $i : M \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *tal que*

$$M = \left\{ p \in \mathbb{E}^{n+1};\ \|p - p'\|^2 = 1/d,\ p'_{n+1} = 1/\sqrt{d} \right\}.$$

*Essas hipersuperfícies são obtidas pela inclusão de esferas euclidianas, com centro em* $p'$, *tangenciando* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *e têm curvatural seccional nula. Pode-se mostrar que tais esferas são isométricas, em* $\mathbb{H}^{n+1}$, *a um hiperplano* $P$ *de* $\mathbb{E}^{n+1}$ *paralelo à* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$. *Como a métrica induzida em* $P$ *por* $\mathbb{H}^{n+1}$ *é múltiplo da métrica euclidiana,* $P$ *é uma variedade de curvatura constante nula e o mesmo se passa com sua imagem isométrica* $M$, *isto é,* $c = 0$ *é, de fato, a curvatura seccional dessa hipersuperfície.*

*iii)* ***Hipersuperfícies equidistantes:*** *são obtidas pela aplicação* $i : M \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *onde*

$$M = \left\{ p \in \mathbb{E}^{n+1};\ \|p - p'\|^2 = 1/d,\ -1/\sqrt{d} < p'_{n+1} < 1/\sqrt{d} \text{ e } p'_{n+1} \neq 0 \right\}.$$

*Ou seja, são intersecções com* $\mathbb{H}^{n+1}$ *de esferas euclidianas que cortam* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *segundo um ângulo* $\alpha \in (0, \pi/2)$. *Denotando tal intersecção por* $\Sigma$, *é possível mostrar a existência de uma isometria (do espaço* $\mathbb{H}^{n+1}$*) que leva* $\Sigma$ *na intersecção com* $\mathbb{H}^{n+1}$ *de um hiperplano* $P$ *de* $\mathbb{E}^{n+1}$ *que corta* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *pelo mesmo ângulo* $\alpha$. *Agora, considere o hiperplano* $Q$ *que é ortogonal a* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$ *e contém* $P \cap \partial\mathbb{H}^{n+1}$. *Pode-se mostrar que* $P$, *e portanto sua imagem isométrica* $\Sigma$, *é uma hipersuperfície equidistante da hipersuperfície totalmente geodésica* $Q$. *Além disso, sua curvatura seccional* $c$ *é negativa.*

Nos exemplos seguintes consideramos o modelo de Lorentz para o espaço hiperbólico.

**Exemplo 2.13** *Considere a aplicação inclusão* $i : M \hookrightarrow \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *onde*

$$M = \left\{ (p, q) \in \mathbb{E}^{n+1};\ p \in S^k(c_1),\ q \in \mathbb{H}^{n-k}(c_2),\ 1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c} \right\}$$

*e* $k \neq 1$. *Nesse caso,* $M \cong S^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$.

**Exemplo 2.14** *Seja* $M = \mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ *e considere a hipersuperfície* $f : M \to \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *dada por* $f(t, p) = ((1/\sqrt{c_1}) cos \sqrt{c_1} t, (1/\sqrt{c_1}) sen \sqrt{c_1} t, p)$. *A imagem* $f(M)$ *é isométrica a* $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ *com* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c}$.

**Exemplo 2.15** *Seja* $M = S^1(c_1/l^2) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ *e considere a hipersuperfície* $f : M \to \mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$ *dada por* $f(t,p) = (f_1(t), p)$*, onde* $f_1 : S^1(c_1/l^2) \to S^1(c_1)$ *é a aplicação que consiste em enrolar a esfera* $S^1(c_1/l^2)$ $l$ *vezes na esfera* $S^1(c_1)$*. A imagem* $f(M)$ *é isométrica a* $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ *com* $1/c_1 + 1/c_2 = 1/\widetilde{c}$*.*

Mais tarde, quando estivermos classificando hipersuperfícies a menos de isometria, a afirmação "$(M, f)$ é uma grande esfera", por exemplo, significa que a imersão $(M, f)$ é congruente à hipersuperfície descrita acima como **grande esfera**.

Vamos agora mostrar que as hipersuperfícies do espaço hiperbólico apresentadas no exemplo 2.12 são realmente umbílicas. Para isto, vamos precisar de alguns resultados relacionados ao conceito de métrica conforme. Dizemos que duas métricas riemannianas $\langle\, ,\, \rangle_g$ e $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{g}}$, de uma variedade $M$, são *conformes* se existe uma função positiva $u : M \to \mathbb{R}$ tal que $\langle X, Y \rangle_{\bar{g}} = u \langle X, Y \rangle_g$ para todo $X, Y \in TM$.

**Lema 2.16** *Sejam* $M$ *uma variedade diferenciável,* $\langle\, ,\, \rangle_g$ *e* $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{g}}$ *duas métricas riemannianas conformes de* $M$*. Se* $\nabla$ *e* $\bar{\nabla}$ *são as conexões riemannianas de* $\langle\, ,\, \rangle_g$ *e* $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{g}}$*, respectivamente, então*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + S(X, Y),$$

*onde* $S(X,Y) = \dfrac{1}{2u}\Big[(Xu)Y + (Yu)X - \langle X, Y \rangle_g \operatorname{grad} u\Big]$ *e* $\operatorname{grad} u$ *é calculado na métrica* $\langle\, ,\, \rangle_g$*, isto é,* $X(u) = \langle X, \operatorname{grad} u \rangle_g$*.*

**Dem.:** Sejam $X, Y, Z \in TM$. Defina

$$\widetilde{\nabla}_X Y := \nabla_X Y + S(X, Y).$$

Vamos mostrar que $\widetilde{\nabla}$ é a conexão riemanniana de $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{g}}$, portanto $\widetilde{\nabla} = \bar{\nabla}$ e o resutado segue. Como $S(X,Y)$ é simétrico, segue facilmente que $\widetilde{\nabla}$ é simétrica. Basta mostrar que $\widetilde{\nabla}$ é compatível com a métrica $\langle\, ,\, \rangle_{\bar{g}}$, ou seja,

$$X \langle Y, Z \rangle_{\bar{g}} = \left\langle \widetilde{\nabla}_X Y, Z \right\rangle_{\bar{g}} + \left\langle Y, \widetilde{\nabla}_X Z \right\rangle_{\bar{g}}.$$

O membro esquerdo dessa igualdade é

$$X(u \langle Y, Z \rangle_g) = X(u) \langle Y, Z \rangle_g + u \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + u \langle \nabla_X Z, Y \rangle_g,$$

e o direito é

$$u \langle \nabla_X Y, Z \rangle_g + u \langle Y, \nabla_X Z \rangle_g + u \langle S(X,Y), Z \rangle_g + u \langle Y, S(X,Z) \rangle_g$$

Assim, basta mostrar

$$X(u)\left\langle Y,Z\right\rangle_g = u\left\langle S(X,Y),Z\right\rangle_g + u\left\langle Y,S(X,Z)\right\rangle_g. \tag{2.3}$$

Note que

$$\begin{aligned}
u\left\langle S(X,Y),Z\right\rangle_g + u\left\langle Y,S(X,Z)\right\rangle_g &= u\left\langle \frac{1}{2u}\left[X(u)Y+Y(u)X-\left\langle X,Y\right\rangle_g \operatorname{grad} u\right],Z\right\rangle_g \\
&\quad + u\left\langle Y,\frac{1}{2u}\left[X(u)Z+Z(u)X-\left\langle X,Z\right\rangle_g \operatorname{grad} u\right]\right\rangle_g \\
&= \frac{1}{2}[X(u)\left\langle Y,Z\right\rangle_g + Y(u)\left\langle X,Z\right\rangle_g - \left\langle X,Y\right\rangle_g \left\langle \operatorname{grad} u, Z\right\rangle_g \\
&\quad + X(u)\left\langle Y,Z\right\rangle_g + Z(u)\left\langle Y,X\right\rangle_g - \left\langle X,Z\right\rangle_g (X,Z)\left\langle Y,\operatorname{grad} u\right\rangle_g] \\
&= X(u)\left\langle Y,Z\right\rangle_g.
\end{aligned}$$

Ou seja, a igualdade (2.3) é verdadeira, e o lema está provado.

□

**Lema 2.17** *Sejam $(\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_g)$ uma variedade riemanniana, $\nabla$ sua conexão de Levi-Civita e $f : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_g)$ uma hipersuperfície umbílica. Se a métrica $\langle\, , \,\rangle_g$ for mudada para a métrica $\langle\, , \,\rangle_{\bar{g}} = u\langle\, , \,\rangle_g$, conforme a $\langle\, , \,\rangle_g$, então a hipersuperfície $f : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_{\bar{g}})$ continua umbílica e*

$$\left\langle \bar{\nabla}_X\left(\frac{\eta}{\sqrt{u}}\right), Y\right\rangle_{\bar{g}} = \frac{-2\lambda u + \eta(u)}{2u\sqrt{u}}\left\langle X,Y\right\rangle_{\bar{g}}, \tag{2.4}$$

*onde $X, Y \in TM$, $\eta$ é um campo unitário normal a $f(M)$ em relação à métrica $\langle\, , \,\rangle_g$, $\bar{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de $(\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_{\bar{g}})$ e $A = \lambda I$, sendo $A$ o operador de forma da imersão $f : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_g)$.*

**Dem.:** Sejam $X, Y, Z \in TM$ e $\bar{\eta} = \dfrac{\eta}{\sqrt{u}}$ um campo unitário normal $f(M)$ em relação a $\langle\, , \,\rangle_{\bar{g}}$. Observe que $f : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \,\rangle_{\bar{g}})$ ser umbílica ($\bar{A} = \bar{\lambda} I$) é equivalente a

$$\bar{\lambda}(p)\left\langle X,Y\right\rangle_{\bar{g}}(p) = \left\langle A_{\bar{\eta}}X,Y\right\rangle_{\bar{g}}(p) = -\left\langle \bar{\nabla}_X\bar{\eta},Y\right\rangle_{\bar{g}}(p),$$

para todo $p \in M$. Portanto, basta mostrar a igualdade (2.4). O que passamos a fazer:

$$
\begin{aligned}
\left\langle \bar{\nabla}_X \left( \frac{\eta}{\sqrt{u}} \right), Y \right\rangle_{\bar{g}} &= \left\langle X \left( \frac{1}{\sqrt{u}} \right) \eta, Y \right\rangle_{\bar{g}} + \left\langle \frac{1}{\sqrt{u}} \bar{\nabla}_X \eta, Y \right\rangle_{\bar{g}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u}} \left\langle \nabla_X \eta + S(X,Y), Y \right\rangle_{\bar{g}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{u}} \left[ -\lambda \left\langle X, Y \right\rangle_{\bar{g}} + \left\langle \frac{1}{2u}((Xu)\eta + (\eta(u))X - \left\langle X, \eta \right\rangle_{\bar{g}} \operatorname{grad} u), Y \right\rangle_{\bar{g}} \right] \\
&= -\frac{1}{\sqrt{u}} \lambda \left\langle X, Y \right\rangle_{\bar{g}} + \frac{1}{2u\sqrt{u}} \eta(u) \left\langle X, Y \right\rangle_{\bar{g}} \\
&= \frac{-2u\lambda + \eta(u)}{2u\sqrt{u}} \left\langle X, Y \right\rangle_{\bar{g}} .
\end{aligned}
$$

Note que, da equação (2.4), podemos obter a curvatura principal $\bar{\lambda} = \dfrac{2\lambda u - \eta(u)}{2u\sqrt{u}}$ da hipersuperfície $f : M^n \to (\widetilde{M}^{n+1}, \langle\, , \rangle_{\bar{g}})$.

□

**Proposição 2.18** *As hipersuperfícies umbílicas completas (não totalmente geodésicas) do espaço hiperbólico são as esferas geodésicas, as horoesferas e as hipersuperfícies equidistantes.*

**Dem.:** Pela proposição 1.17 e teorema 1.18, concluímos que as hipersuperfícies umbílicas do espaço euclidiano $\mathbb{E}^{n+1}$ estão contidas em $n$-planos ou em $n$-esferas. Assim, as hipersuperfícies umbílicas do semi-espaço superior de $\mathbb{E}^{n+1}$, estão contidas nas intersecções de tal espaço com $n$-planos ou $n$-esferas de $\mathbb{E}^{n+1}$.

Considerando o modelo do semi-espaço superior para o espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$, que é o semi-espaço superior de $\mathbb{E}^{n+1}$ com a métrica $\langle\, , \rangle_{\bar{g}} = \dfrac{1}{p_{n+1}^2} \langle\, , \rangle_g$, conforme à métrica euclidiana $\langle\, , \rangle_g$. Pelo lema 2.17, concluímos que as imersões umbílicas de $\mathbb{H}^{n+1}$ estão contidas nas intersecções deste espaço com os $n$-planos ou $n$-esferas de $\mathbb{E}^{n+1}$. Ou seja, as hipersuperfícies umbílicas completas do $\mathbb{H}^{n+1}$ são as mencionadas no enunciado.

□

**Proposição 2.19** *Seja* $\Sigma = S^n \bigcap \mathbb{H}^{n+1}$ *a intersecção de* $\mathbb{H}^{n+1}$ *com uma* $n$*-esfera euclidiana* $S^n \subset \mathbb{E}^{n+1}$ *de raio 1 e centro em* $\mathbb{H}^{n+1}$*. Então a curvatura principal* $\lambda$ *da hipersuperfície umbílica* $\Sigma$ *em* $\mathbb{H}^{n+1}$ *coincide, a menos de sinal, com a altura do centro euclidiano de* $\Sigma$ *em relação à* $\partial\mathbb{H}^{n+1}$*.*

**Dem.:** Pelo lema 2.17, a curvatura principal de $\Sigma$ no espaço hiperbólico é

$$\bar{\lambda} = \frac{2\lambda u - \eta(u)}{2u\sqrt{u}}. \tag{2.5}$$

Em nosso caso, $u(p) = \dfrac{1}{p_{n+1}^2}$, $\lambda = -1$ e $\eta : \Sigma \to T\Sigma^{\perp}$ é a seção normal unitária para fora da esfera no semi-espaço superior de $\mathbb{E}^{n+1}$.

Para calcular $\eta(u) = du(\eta)$, observe que basta considerar a derivação de $u(p) = \dfrac{1}{p_{n+1}^2}$ na direção do eixo $x_{n+1}$, pois em relação às outras direções a derivada se anula. Tomando a projeção de $\eta(p)$ no eixo $x_{n+1}$ obtemos $\cos\theta$, onde $\theta$ é ângulo entre $\eta(p)$ e tal eixo. Assim,

$$\eta(u)|_p = \cos\theta \left.\frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}\right|_p = \frac{-2}{p_{n+1}^3}\cos\theta.$$

Substituindo estes dados em (2.5) temos

$$\bar{\lambda}(p) = -p_{n+1} + \cos\theta.$$

Agora note que geometricamente (a constante) $\bar{\lambda}$ representa, a menos de sinal, a altura do centro euclidiano de $\Sigma$ em relação à fronteira $\partial\mathbb{H}^{n+1}$.

□

**Corolário 2.20** *Na notação da proposição anterior e sendo $c$ a curvatura seccional de $\Sigma$ temos:*

*i)* $c > 0$ *se $\Sigma$ é uma hiperesfera;*

*ii)* $c = 0$ *se $\Sigma$ é uma horoesfera;*

*iii)* $\widetilde{c} < c < 0$ *se $\Sigma$ é uma hipersuperfície equidistante.*

**Dem.:** Pela equação de Gauss a curvatura seccional de $\Sigma$ é dada por $c = \bar{\lambda}^2 + \widetilde{c} = \bar{\lambda}^2 - 1$. Assim, se $\Sigma$ é uma hiperesfera $|\bar{\lambda}| > 1$ e $c > 0$. Se for uma horoesfera, $|\bar{\lambda}| = 1$ e $c = 0$. No caso de ser $\Sigma$ uma hipersuperfície equidistante, então $|\bar{\lambda}| < 1$ e $\widetilde{c} < c < 0$

□

## 2.3 Alguns Resutados Sobre Hipersuperfícies

Nesta seção mostraremos uma série de resultados que serão usados na classificação das hipersuperfícies homogêneas feita no capítulo seguinte.

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Denominaremos o posto do operador de forma $A_p$ de *número tipo* da hipersuperfície em $p$ e denotaremos $t(p)$.

**Proposição 2.21** *Dada uma hipersuperfície $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$. Se $t(p) \geq 2$, então*

$$\ker A_p = \{X \in T_pM;\ R(X,Y) = \widetilde{c}X \wedge Y,\ \forall\ Y \in T_pM\}.$$

**Dem.:** Denote o último conjunto por $T_0(p)$. No decorrer desta demonstração $A$ representará $A_p$. Dado $X \in \ker A$, temos $AX = 0$ e $AX \wedge AY = 0$, para todo $Y \in T_pM$. Pela equação de Gauss para curvatura seccional constante, $R(X,Y) = \widetilde{c}X \wedge Y + AX \wedge AY = \widetilde{c}X \wedge Y$. Logo, $X \in T_0(p)$.

Seja agora $X \in T_0(p)$. Tome $Y \in T_pM$ tal que $AY \neq 0$ e $\langle AX, AY\rangle = 0$. Note que isto é possível, pois o posto de $A$ é maior ou igual a dois. Por hipótese, $AX \wedge AY = 0$, isto implica que $\langle AX, AX\rangle AY = \langle AY, AX\rangle AX = 0$. Assim, $\langle AX, AX\rangle = 0$ e $X \in \ker A$. Ou seja, $T_0(p) = \ker A$.

□

**Proposição 2.22** *Sejam $f$ e $\widetilde{f}$ imersões isométricas de $M^n$ como hipersuperfície em $\widetilde{M}^{n+1}$. Se $t(p) \geq 3$ para $f$ em todo $p \in M^n$, então $A = \pm\widetilde{A}$, onde $\widetilde{A}$ é a segunda forma fundamental de $\widetilde{f}$.*

**Dem.:** Inicialmente, verificaremos que $t(p) = \widetilde{t}(p)$. Suponha que $\widetilde{t}(p) \leq 1$, então $\widetilde{A}X \wedge \widetilde{A}Y = 0$, $\forall\ X,Y \in T_pM$, pois nesse caso, $\widetilde{A}X = a\widetilde{A}Y$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Assim, teríamos $T_0(p) = \{X \in T_pM;\ R(X,Y) = \widetilde{c}X \wedge Y,\ \forall\ Y \in T_pM\}$ com dimensão $n$ e isto contradiz o fato de ser $t(p) \geq 3$ que é equivalente a $\dim T_0(p) \leq n-3$. Portanto, $\widetilde{t}(p) \geq 2$, $\forall\ p \in M$ e, pela proposição 2.21, $\ker A = \ker \widetilde{A} = T_0(p)$. Como $A$ e $\widetilde{A}$ são operadores simétricos, temos $\mathrm{Im}A=\mathrm{Im}\widetilde{A}=T_0^{\perp}(p)$. Em particular, $t(p) = \widetilde{t}(p)$.

Vejamos agora que $AX \wedge \widetilde{A}X = 0$. Com efeito, se supormos que $AX \wedge \widetilde{A}X \neq 0$, podemos escolher $Y \in T_pM$ tal que $AX \wedge \widetilde{A}X \wedge \widetilde{A}Y \neq 0$. Mas, $AX \wedge AY = \widetilde{A}X \wedge \widetilde{A}Y = R(X,Y) - \widetilde{c}X \wedge Y$, pois o último membro não depende da imersão. Logo, $AX \wedge AX \wedge AY \neq 0$ o que é absurdo.

Assim, podemos afirmar que para cada $X \in T_pM$, $AX = a\widetilde{A}X$, onde $a \in \mathbb{R}$ possivelmente depende de $X$. Mais especificamente, temos $\left\langle \widetilde{A}X, AX\right\rangle AX = \langle AX, AX\rangle \widetilde{A}X$.

Por outro lado, dados $X_1, X_2 \in T_0^{\perp}(p)$ linearmente independentes, temos $AX_1 = a_1\widetilde{A}X_1$, $AX_2 = a_2\widetilde{A}X_2$ e $A(X_1 + X_2) = a_3\widetilde{A}(X_1 + X_2)$. Temos então

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = a_1\widetilde{A}X_1 + a_2\widetilde{A}X_2 = a_3\widetilde{A}(X_1 + X_2) = a_3\widetilde{A}X_1 + a_3\widetilde{A}X_2,$$

ou, $(a_1 - a_3)\widetilde{A}X_1 + (a_2 - a_3)\widetilde{A}X_2 = 0$, que implica $a_1 = a_2 = a_3$.

Conclui-se que $AX = a\widetilde{A}X$ onde $a$ independe de $X$. Como tal igualdade vale para $X \in \ker A$ temos

$$\widetilde{A}X \wedge \widetilde{A}Y = AX \wedge AY = a^2\widetilde{A}X \wedge \widetilde{A}Y,$$

ou seja, $a = \pm 1$ e $A_p = \pm\widetilde{A}_p$.

□

Pelo teorema fundamental das subvariedades 2.1, duas hipersuperfícies $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ e $\widetilde{f} : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ são congruentes sempre que possuem a mesma segunda forma fundamental. Observe que sobre as hipóteses da proposição anterior, podemos escolher a seção normal $\xi$ de tal maneira que $A = \widetilde{A}$. Isto prova o seguinte

**Teorema 2.23** *Sejam $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ e $\widetilde{f} : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ hipersuperfícies. Se $t(p) \geq 3$ para todo $p \in M$, então $(M^n, f)$ e $(M^n, \widetilde{f})$ são congruentes.*

Os resultados a seguir, tratam das possibilidades de imergir variedades riemannianas $M^n$ de curvatura seccional constante $c$ como hipersuperfícies de espaços de curvatura constante $\widetilde{c}$.

**Proposição 2.24** *Seja $M^n(c)$ uma hipersuperfície em $\widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ com $\widetilde{c} \neq c$ e $n > 2$. Então $c > \widetilde{c}$, o posto de $A$ é $n$ e a imersão é umbílica.*

**Dem.:** Dado $p \in M$, tome uma base $\{e_1, ..., e_n\}$ de $T_pM$, formada por autovetores ortonormais do operador de forma $A_p$ e sejam $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$ os respectivos autovalores. Pela equação de Gauss,

$$R(e_i, e_j) = \widetilde{c}e_i \wedge e_j + Ae_i \wedge Ae_j = (\widetilde{c} + \lambda_i\lambda_j)e_i \wedge e_j.$$

Como $M$ tem curvatura constante $c$, $\lambda_i\lambda_j + \widetilde{c} = c$ para $i \neq j$. Concluímos então que todos $\lambda_i$'s são iguais e não nulos. De fato, para $i \neq j \neq k \neq i$ temos $\lambda_i\lambda_j + \widetilde{c} = \lambda_i\lambda_k + \widetilde{c}$, o que implica $\lambda_j = \lambda_k = \lambda$, para todo $k, j = 1, ..., n$, e $\lambda^2 = c - \widetilde{c}$. Portanto, $c > \widetilde{c}$, posto de $A$ é igual a $n$ e $A^2 = (c - \widetilde{c})I$.

□

**Corolário 2.25** *Sejam $f$ e $\widetilde{f}$ duas imersões de $M^n(c)$ como hipersuperfícies em uma forma espacial $\widetilde{Q}^{n+1}(\widetilde{c})$. Se $n > 2$ e $c \neq \widetilde{c}$, então $(M^n, f)$ e $(M^n, \widetilde{f})$ são congruentes.*

**Dem.:** Sendo $n > 2$ e $c \neq \widetilde{c}$, pela proposição anterior a imersão é umbílica com autovalor de $A$ não nulo, em particular, $t(p) = n$ para todo $p \in M$. Aplicando o teorema 2.23 concluímos o resultado.

□

O caso $c = \widetilde{c}$ é um pouco mais difícil e por este motivo usamos um teorema de O'Neill e Stiel [30] o qual pode ser apresentado como

**Teorema 2.26** *Uma hipersuperfície completa $M^n(c)$ de $\widetilde{M}^{n+1}(c)$ é totalmente geodésica sempre que $c > 0$.*

**Proposição 2.27** *Sejam $f$ e $\widetilde{f}$ imersões totalmente geodésicas de $M^n$ em uma forma espacial $Q^{n+1}(\widetilde{c})$. Então $(M^n, f)$ e $(M^n, \widetilde{f})$ são congruentes.*

**Dem.:** Sendo os operadores de formas $A$ e $\widetilde{A}$ ambos nulos, o resultado segue através do teorema das subvariedades 2.1.

□

**Proposição 2.28** *Seja $(M^n, f)$ uma hipersuperfície em uma forma espacial real $Q^{n+1}(\widetilde{c})$ tal que $t(p) \geq 3$ ou $t(p) = 0$ para todo $p \in M^n$. Então para toda isometria $\phi$ de $M^n$, existe uma isometria $\tau$ de $Q^{n+1}(\widetilde{c})$ tal que $f \circ \phi = \tau \circ f$.*

**Dem.:** Basta aplicar o teorema 2.23, se $t(p) \geq 3$, ou a proposição 2.27, caso $t(p) = 0$, às imersões $f$ e $f \circ \phi$.

□

O seguinte resultado será fundamental nos teoremas de classificação. Porém, antes de enunciá-lo vamos relembrar alguns conceitos e resultados sobre espaços de recobrimento: dada uma variedade riemanniana $M^n$, considere o seu recobrimento universal riemanniano $\pi : \hat{M}^n \to M^n$ (no qual $\hat{M}$ é simplesmente conexo). Há um resultado clássico que garante a existência e unicidade (a menos de isomorfismos de recobrimentos) de tal recobrimento, veja, por exemplo, [22]. Observe que $\hat{M}^n$ herda a estrutura diferenciável de $M^n$ através da aplicação de recobrimento $\pi$. Além disto, definimos a métrica riemanniana em $\hat{M}^n$ por

$$\langle X, Y \rangle_p := \langle d\pi X, d\pi Y \rangle_{\pi(p)}, \tag{2.6}$$

para todo $p \in \hat{M}$ e $X, Y \in T_p\hat{M}$.

**Observações:**

1. A aplicação de recobrimento associada $\pi$ é uma isometria local. Com efeito, $\pi$ é um difeomorfismo local, em partiular $d\pi$ é injetora e por (2.6) $d\pi$ preserva produto interno.
2. Se $(M^n, f)$ é uma hipersuperfície de $\widetilde{M}^{n+1}$, então o é $(\hat{M}^n, f \circ \pi)$, por ser composição de imersões isometricas e por manter co-dimensão 1.

Denotando a segunda forma fundamental da última hipersuperfície por $\hat{A}$ para algum campo normal unitário $\xi$. A proposição seguinte mostra como $A$ e $\hat{A}$ estão relacionados.

**Proposição 2.29** *Em cada $p \in \hat{M}$, $\hat{A}_p = \pm d\pi^{-1} A_{\pi(p)} d\pi$.*

**Dem.:** Seja $X$ um campo vetorial em $\hat{M}$. Assim,

$$\widetilde{\nabla}_X \hat{\xi} = -d(f \circ \pi)\hat{A}X = -df d\pi \hat{A}X,$$

onde $\hat{\xi}$ é um campo vetorial unitário em $\widetilde{M}$ sobre $f \circ \pi$. Por outro lado, todo campo em $M$ é localmente da forma $d\pi(X)$ para algum $X \in T\hat{M}$, pois $\pi$ é uma isometria local.

Considerando $\xi$ um campo vetorial umitário em $\widetilde{M}$ sobre $f$ temos

$$\widetilde{\nabla}_{d\pi X} \xi = -df A(d\pi X).$$

Como $d(f \circ \pi)(T_p\hat{M}) = df(d\pi(T_p\hat{M})) = df(T_{\pi(p)}M)$, temos que $\hat{\xi}_p = \pm \xi_{\pi(p)}$. Portanto, para cada $p \in \hat{M}$,

$$(\widetilde{\nabla}_X \hat{\xi})_p = (\widetilde{\nabla}_{d\pi X}(\pm\xi))_{\pi(p)} = \pm(\widetilde{\nabla}_{d\pi X}\xi)_{\pi(p)},$$

ou seja, $df d\pi \hat{A}_p X = \pm df A_{\pi(p)} d\pi X$.

Como $df$ é injetora, $d\pi \hat{A}_p X = \pm A_{\pi(p)} d\pi X$, para todo $X \in T\hat{M}$ e Sendo $d\pi$ injetora obtemos

$$\hat{A}_p X = \pm d\pi^{-1} A_{\pi(p)} d\pi X.$$

□

Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}$ uma hipersuperfície. Chamamos de *curvaturas principais* de $M$ em $p$ os autovalores de $A_p$ e de *vetores principais* os autovetores de $A_p$ associados. O lema seguinte, nos diz que as curvaturas principais variam continuamente em $M$.

**Lema 2.30** *Seja $M^n$ uma variedade riemanniana e $A_p$ um operador simétrico variando diferenciavelmente com $p \in M^n$. Então existem $n$ funções contínuas $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ tais que para cada $p$, $\{\lambda_1(p), ..., \lambda_n(p)\}$ são os autovalores de $A_p$.*

**Dem.:** Seja $h(t,p) = t^n + a_1 t^{n-1} + ... + a_n$ o polinômio característico de $A_p$. Note que cada $a_i$ é uma função diferenciável de $p$. Suponha que $\mu_1, ..., \mu_r$ são os autovalores distintos de $A_{p_0}$ e seja $m_i$, $i = 1, ..., r$, suas respectivas multiplicidades. Assuma que $\mu_1 > \mu_2 > ... > \mu_r$. Sejam $\epsilon_0$ arbitrário e

$$\epsilon = \text{mín}\left\{\epsilon_0,\ \frac{1}{2},\ \text{mín}\,|\mu_i - \mu_j|\right\}.$$

Considere a esfera complexa $C_i = \{z \in \mathbb{C};\ |z-\mu_i| = \epsilon\}$. Observe que $\epsilon$ foi determinado de tal maneira que $C_i$ não contenha nenhuma raiz de $h(t,p_0)$, ou seja, $h(z,p_0) \neq 0$, para todo $z \in C_i$.

Escolha $\delta_0 > 0$ tal que se $d(p,p_0) < \delta_0$, então $h(z,p) \neq 0$ em $C_i$, onde $d$ é a função distância em $M$ induzida pela métrica riemanniana. A escolha de um tal $\delta_0$ é sempre possível, pois $h(z,p)$ é uma função polinomial, em particular, contínua em seu domínio. Logo,

$$m_i = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_i} \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} dz.$$

De fato, $h(z,p_0) = (z-\mu_i)^{m_i} R(z,p_0)$, onde $R(\mu_i,p_0) \neq 0$, e $h'(z,p_0) = m_i(z-\mu_i)^{m_i-1}R(z,p_0) + (z-\mu_i)R'(z,p_0)$. Assim,

$$\int_{C_i} \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} dz = \int_{C_i} \left( \frac{m_i}{(z-\mu_i)} + \frac{R'(z,p_0)}{R(z,p_0)} \right) dz = (2\pi i) m_i,$$

onde a última igualdade vem do fato de $\frac{R'(z,p_0)}{R(z,p_0)}$ ser analítica num aberto de $\mathbb{C}$ contendo $C_i$.

Agora note que,

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \left( \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right) dz \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \left| \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right| |dz|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{C_i} \sup_{z \in C_i} \left| \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right| |dz| \leq \epsilon \sup_{z \in C_i} \left| \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right|.$$

Como a função $\dfrac{h'(z,p)}{h(z,p)}$ é contínua (e portanto uniformemente contínua) em $C_i \times \bar{V}_{p_0}$, onde $\bar{V}_{p_0}$ é o fecho de uma vizinhança de $p_0$, concluímos que $\frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)}$ converge para 0 quando $p \to p_0$, para todo $z \in C_i$. Portanto, existe $\delta < \delta_0$ tal que $d(p,p_0) < \delta$ implica

$$\sup_{z \in C_i} \left| \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right| < 1.$$

Com isso, obtemos

$$\left| m_i - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} dz \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_i} \left( \frac{h'(z,p_0)}{h(z,p_0)} - \frac{h'(z,p)}{h(z,p)} \right) dz \right| < \epsilon \leq \frac{1}{2}, \tag{2.7}$$

sempre que $d(p,p_0) < \delta$.

Mas a integral do primeiro membro em (2.7) é um múltiplo inteiro de $2\pi i$, na realidade é o número de zeros de $h(z,p)$, no interior de $C_i$, multiplicado por $2\pi i$. De onde temos que $h(z,p)$ tem $m_i$ zeros no interior de $C_i$.

Em nosso caso, $\lambda_i$ é real e portanto se $d(p, p_0) < \delta$ então $|\lambda_i(p) - \lambda_i(p_0)| < \epsilon \leq \epsilon_0$.
□

**Proposição 2.31** *Seja $A$ como no lema 2.30 e suponha que exatamente dois autovalores $\lambda > \mu$ são distintos em cada ponto. Então $\lambda$ e $\mu$ têm multiplicidades constantes e são diferenciáveis.*

**Dem.:** Dado $p_0 \in M$, sejam

$$\lambda_1(p_0) = ... = \lambda_k(p_0) = \lambda_0 > \mu_0 = \lambda_{k+1}(p_0) = ... = \lambda_n(p_0).$$

Pela continuidade de cada $\lambda_i$, existe uma vizinhança de $p_0$ tal que

$$\lambda_i > \frac{\lambda_0 + \mu_0}{2} > \lambda_j, \text{ para } 1 \leq i \leq k \text{ e } k + 1 \leq j \leq n.$$

Como apenas dois autovalores são distintos em cada ponto, $\lambda_1 = ... = \lambda_k = \lambda > \mu = \lambda_k + 1 = ... = \lambda_n$ nesta vizinhança. Isto mostra que para cada inteiro $k$,

$$U_k = \{p \in M^n; \text{ multiplicidade de } \lambda(p) = k\}$$

é aberto.

Como $1 \leq k < n$, $M$ é a união disjunta de abertos $U_k$ e conexa (ou seja, só admite cisão trivial) concluímos que $M = U_k$ para algum $k$. Isso mostra que as multiplicidades dos autovalores $\lambda$ e $\mu$ são constantes em $M$.

Seja $k$ a multiplicidade do maior autovalor $\lambda$. Defina as funções auxiliares $f, g : M \to \mathbb{R}$ por

$$f(p) = k\lambda(p) + l\mu(p) \quad \text{e} \quad g(p) = k(k-1)\lambda^2(p) + 2kl\lambda(p)\mu(p) + l(l-1)\mu^2(p),$$

onde $l = n - k$. Observe que ambas são coeficientes do polinômio característico de $A$

$$r(t) = (t - \lambda)^k (t - \mu)^{n-k}.$$

Mais especificamente, $f$ e $g$ são os coeficientes dos termos $t^{n-1}$ e $t^{n-2}$, respectivamente. Isto implica que $f$ e $g$ são diferenciáveis. De fato, o polinômio característico $r(t) = det(A_p - tI)$ é dado por somas de produtos de elementos da matriz $A_p - tI$. Como $A_p$ varia diferenciavelmente em relação a $p$, os coeficientes de $r(t)$ serão funções diferenciáveis de $p$.

Observando que $f^2 = k^2\lambda^2 + 2kl\lambda\mu + l^2\mu^2$, temos $k\lambda^2 + l\mu^2 = f^2 - g$ e $(l\mu)^2 = (f - k\lambda)^2$. Estas duas últimas igualdades implicam que

$$kn\lambda^2 - 2kf\lambda + f^2 - l(f^2 - g) = 0.$$

Defina outra função auxiliar por $h(t,p) = knt^2 - 2kft + (1-l)f^2 + lg$ e observe que $h(\lambda(p),p) = 0$, $h$ é $C^\infty$ e $\dfrac{\partial h}{\partial t} = 2knt - 2kf = 2k(nt - k\lambda - l\mu)$. Assim,

$$\frac{\partial h}{\partial t}(\lambda_0, p_0) = 2k(n\lambda_0 - k\lambda_0 - l\mu_0) = 2kl(\lambda_0 - \mu_0) \neq 0.$$

Para facilitar a notação, escrevamos a função $h$ como $h(t,p) = a(p)t^2 + b(p)t + c(p)$, de onde obtemos

$$\lambda(p) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Como $\dfrac{\partial h}{\partial t}(\lambda_0, p_0) \neq 0$, temos $b^2 - 4ac > 0$. Isso implica que $\lambda(p)$ é $C^\infty$.

Sendo $\mu(p) = (\text{traço} A_p - k\lambda(p))/l$, concluímos que $\mu$ é $C^\infty$.

□

**Proposição 2.32** *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\tilde{c})$ uma hipersuperfície. Se em cada ponto de $M$, exatamente duas curvaturas principais são distintas e $\lambda$ é uma dessas curvaturas, então a distribuição $T_\lambda = \{X \in TM;\ AX = \lambda X\}$ é diferenciável e involutiva. Se $dim T_\lambda > 1$, então $X\lambda = 0$ para todo $X \in T_\lambda$.*

**Dem.:** Inicialmente, vamos mostrar que $T_\lambda$ é $C^\infty$. Dado $p_0 \in M$ e supondo $\lambda > \mu$ em $p_0$, escolha uma vizinhança $U$ de $p_0$ tal que o campo normal unitário $\xi$ está definido e $\lambda > \mu$. Pela proposição 2.31, $\lambda$ e $\mu$ são diferenciáveis e de multiplicidades constantes.

Agora tome campos diferenciáveis $X_1, ..., X_n$ em $U$ tais que $X_1, ..., X_k$ geram $T_\lambda$ e $X_{k+1}, ..., X_n$ geram $T_\mu$ em $p_0$. Defina

$$Y_i = \begin{cases} (A-\mu)X_i & \text{para} \quad i = 1, ..., k \\ (A-\lambda)X_i & \text{para} \quad i = k+1, ..., n \end{cases}.$$

Note que $Y_i$ é um campo diferenciável em $U$ para cada $i = 1, ..., n$. Além disso, $Y_1, ..., Y_n$ são linearmente independentes. Vamos mostrar que $Y_1, ..., Y_k$ gera $T_\lambda$, para isto basta que $Y_i \in T_\lambda$ para todo $i = 1, ..., k$. Mas,

$$(A-\lambda)Y_i = (A-\lambda)(A-\mu)X_i = (A^2 - (\lambda+\mu)A + \lambda\mu)X_i = 0,$$

pois $t^2 - (\lambda+\mu)t + \lambda\mu$ é o polinômio mínimo de $A$. Portanto, $T_\lambda$ é $C^\infty$.

Vejamos agora que $T\lambda$ é involutiva. Dados $X, Y \in T_\lambda$ temos

$$A[X,Y] = A(\nabla_X Y - \nabla_Y X) = A(\nabla_X Y) - A(\nabla_Y X).$$

A equação de Codazzi $\nabla_X(AY) - A(\nabla_X Y) = \nabla_Y(AX) - A(\nabla_Y X)$ implica que

$$A[X,Y] = \nabla_X(AY) - \nabla_Y(AX) = \nabla_X(\lambda Y) - \nabla_Y(\lambda X) = X(\lambda)Y - Y(\lambda)X + \lambda[X,Y],$$

ou ainda,

$$(A-\lambda)[X,Y] = X(\lambda)Y - Y(\lambda)X.$$

O membro esquerdo da última igualdade pertence à $T_\mu$ e o direito pertence à $T_\lambda$, logo são ambos nulos e $A[X,Y] = \lambda[X,Y]$, isto é, $[X,Y] \in T_\lambda$ e $T_\lambda$ é involutiva.

Se $\dim T_\lambda > 1$, dado $X \in T_\lambda$ escolha $Y \in T_\lambda$ tal que $X$ e $Y$ sejam linearmente independentes. Assim, $X(\lambda)Y - Y(\lambda)X = 0$ implica $X(\lambda) = 0$.

$\square$

Dada uma variedade riemanniana $M^n$ com a conexão de Levi-Civita $\nabla$, uma distribuição $\Delta$ em $M$ é dita *totalmente geodésica*, ou, *auto-paralela*, se $\nabla_X Y \in \Delta$ para quaisquer $X, Y \in \Delta$. Se $\nabla_X Y \in \Delta$ para quaisquer $X \in TM$ e $Y \in \Delta$ a distribuição é chamada *paralela*.

**Proposição 2.33** *Se $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ é uma hipersuperfície com duas curvaturas principais distintas e constantes $\lambda$ e $\mu$, então as distribuições $T_\lambda$ e $T_\mu$, definidas na proposição 2.32, são paralelas.*

**Dem.:** Vamos mostrar primeiro que se $X_i \in T_\lambda$ e $X_j \in T_\mu$ então $\nabla_{X_j} X_i \in T_\lambda$ e $\nabla_{X_i} X_j \in T_\mu$. Pela equação de Codazzi, $\nabla_{X_i}(\mu X_j) - \nabla_{X_j}(\lambda X_i) = A\nabla_{X_i} X_j - A\nabla_{X_j} X_i$. Como $\lambda$ e $\mu$ são constantes, obtemos

$$(A-\lambda)\nabla_{X_j} X_i = (A-\mu)\nabla_{X_i} X_j.$$

O lado esquerdo desta igualdade está em $T_\mu$ e o lado direito em $T_\lambda$. Portanto ambos são nulos, isto é, $\nabla_{X_j} X_i \in T_\lambda$ e $\nabla_{X_i} X_j \in T_\mu$.

Para mostrar que $\nabla_{X_{i'}} X_i \in T_\lambda$ se $X_i, X_{i'} \in T_\lambda$, basta observar que dado $Y \in T_\mu$ temos $g(\nabla_{X_{i'}} X_i, Y) = -g(X_i, \nabla_{X_{i'}} Y) = 0$, pois como vimos acima $\nabla_{X_{i'}} Y \in T_\mu$. De forma análoga concluímos que $\nabla_{X_{j'}} X_j \in T_\mu$ para $X_j, X_{j'} \in T_\mu$.

Desta forma, mostramos que se $X \in T_\lambda$ e $Y \in T_\mu$ então $\nabla_Z X \in T_\lambda$ e $\nabla_Z Y \in T_\mu$ para todo $Z \in TM$.

$\square$

**Proposição 2.34** *Se $M = M_1 \times M_2$ é uma variedade diferenciável produto e $g$ é uma métrica riemanniana em $M$ com respeito à qual as distribuições $TM_1$ e $TM_2$ são totalmente geodésicas, então $g$ é o produto das métricas riemannianas $g_i$ de $M_i$, $1 \leq i \leq 2$.*

**Dem.:** Como as distribuições $TM_1$ e $TM_2$ são totalmente geodésicas, são também involutivas. Pela proposição 1.2, existe um sistema de coordenadas $x_1, ..., x_n$, numa vizinhança de $p$, tal que as equações $x_i = 0$, $1 \leq i \leq k$, (respectivamente $x_j = 0$, $k+1 \leq j \leq n$) definem uma variedade integral de $TM_2$ (respectivamente $TM_1$).

Agora, defina uma vizinhança $V$ de $p$ tomando $|x_i| < \delta$, $1 \leq i \leq n$, onde $\delta > 0$ é suficientemente pequeno para que o sistema de coordenadas $x_1, ..., x_n$ seja um homeomorfismo de $V$ com o cubo $|x_i| < \delta$ em $\mathbb{R}^n$. Seja $V_1$ (respectivamente $V_2$) o subconjunto de $V$ definido por $|x_i| < \delta$ se $1 \leq i \leq k$ e $x_j = 0$ se $k+1 \leq j \leq n$ (respectivamente $|x_j| < \delta$ se $k+1 \leq j \leq n$ e $x_i = 0$ se $1 \leq i \leq k$).

Note que $V_1$ e $V_2$ são variedades integrais de $TM_1$ e $TM_2$, respectivamente, passando por $p$. Além disto, $V_1$ e $V_2$ são vizinhanças de $p$ das variedades integrais maximais $M_1$ e $M_2$, e mais ainda, $V = V_1 \times V_2$.

Denotando $X_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, ..., n$. Vamos mostrar que a métrica riemanniana de $V$ é o produto direto das métricas em $V_1$ e $V_2$. Para isto, mostraremos que

i) $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ são independentes de $x_{k+1}, ..., x_n$ para $1 \leq i, j \leq k$,

ii) $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ são independentes de $x_1, ..., x_k$ para $k+1 \leq i, j \leq n$ e

iii) $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle = 0$ quando $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq n$.

A última afirmação segue dos fatos de $TM_1$ e $TM_2$ serem ortogonais, $X_i \in TM_1$ se $1 \leq i \leq k$ e $X_j \in TM_2$ se $k+1 \leq j \leq n$.

Vamos mostrar a afirmação i) e a prova de ii) é inteiramente análoga. Sejam $1 \leq i \leq k$ e $k+1 \leq j \leq n$. Da proposição 2.33 temos $\nabla_{X_j} X_i \in TM_1$ e $\nabla_{X_i} X_j \in TM_2$. Pela simetria da conexão, $\nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_i} X_j = [X_i, X_j]$ e como o colchete entre campos coordenados é nulo, obtemos $\nabla_{X_j} X_i - \nabla_{X_i} X_j = 0$. Além disto, como $\nabla$ é compatível com $\langle \, , \, \rangle$ concluímos que

$$X_j(g_{il}) = \left\langle \nabla_{X_j} X_i, X_l \right\rangle + \left\langle X_i, \nabla_{X_j} X_l \right\rangle = 0,$$

para $1 \leq i, l \leq k$, o que prova a afirmação i).

$\square$

**Teorema 2.35** *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ uma hipersuperfície cujas curvaturas principais são constantes. Se exatamente duas são distintas, então $M$ é localmente isométrica ao produto de dois espaços de curvatura constantes ou ao produto de um espaço unidimensional com outro de curvatura constante. Além disso,*

$$\lambda\mu + \widetilde{c} = 0,$$

*onde $\lambda$ e $\mu$ são as curvaturas principais distintas.*

**Dem.:** Suponha, sem perda de generalidade, que $\lambda > \mu$. Pela proposição 2.32, $T_\lambda$ e $T_\mu$ são distribuições diferenciáveis e involutivas. Da proposição 2.33 temos que $T_\lambda$ e $T_\mu$ são distribuições paralelas.

Da proposição 2.34, segue ainda que $M$ é localmente isométrica ao produto riemanniano das variedades integrais maximais $M_\lambda$ e $M_\mu$ de $T_\lambda$ e $T_\mu$, respectivamente. Se $\dim M_\lambda > 1$, pelo item i) do lema 1.5 e a equação de Gauss, temos que a curvatura seccional de $M_\lambda$ é constante e igual a $\lambda^2 + \widetilde{c}$. O mesmo ocorre para $M_\mu$. Se $\dim M_\lambda = 1$ então $M$ é localmente isométrica ao produto entre o espaço unidimensional $M_\lambda$ e o espaço $M_\mu$ de curvatura constante $\mu^2 + \widetilde{c}$.

Pelo segundo item do lema 1.5 e a equação de Gauss de $f$, dados $X \in T_\lambda$ e $Y \in T_\mu$, temos $\lambda\mu + \widetilde{c} = K_M(X, Y) = 0$.

□

No próximo resultado demonstraremos uma importante relação denominada fórmula fundamental de Cartan. Em seguinda, vamos utilizá-la para demonstrar um teorema devido a Cartan [9], segundo o qual, a hipótese no teorema 2.35 de se ter no máximo duas curvaturas principais distintas, não traz nenhuma restrição quando o ambiente da hipersuperfície for de curvatura negativa ou nula.

**Teorema 2.36** ***(Fórmula Fundamental de Cartan)*** *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ uma hipersuperfície com curvaturas principais constantes. Então*

$$\sum_{\substack{j=1 \\ \lambda_j \neq \lambda_i}}^{l} m_j \frac{\widetilde{c} + \lambda_i \lambda_j}{\lambda_i - \lambda_j} = 0, \quad \forall\ i = 1, ..., l, \tag{2.8}$$

*onde $l$ denota o número de curvaturas principais distintas $\lambda_1, ..., \lambda_l$ da hipersuperfície e $m_1, ..., m_l$ suas respectivas multiplicidades.*

**Dem.:** Sejam $X_1, ..., X_n$ campos diferenciáveis definidos em um aberto $U$ de $M$, formando uma base do espaço tangente em cada ponto de $U$ e tais que $AX_i = \lambda_i X_i$, para $i = 1, ..., n$. Observe que para $\lambda_i \neq \lambda_j$,

$$\langle (\nabla_{X_k} A) X_i, X_j \rangle = \langle \nabla_{X_k} (AX_i), X_j \rangle - \langle A \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle = (\lambda_i - \lambda_j) \langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle .$$

Assim, pela equação de Codazzi e por ser $\nabla_X A$ auto-adjunta

$$\langle \nabla_{X_k} X_i, X_j \rangle = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)} \langle (\nabla_{X_k} A) X_i, X_j \rangle = \frac{1}{(\lambda_i - \lambda_j)} \left\langle (\nabla_{X_j} A) X_i, X_k \right\rangle , \tag{2.9}$$

que se anula quando $\lambda_k = \lambda_i \neq \lambda_j$.

Analogamente,

$$\langle \nabla_{X_k} X_j, X_i \rangle = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)} \langle (\nabla_{X_k} A) X_j, X_i \rangle = \frac{1}{(\lambda_j - \lambda_i)} \left\langle (\nabla_{X_j} A) X_i, X_k \right\rangle, \tag{2.10}$$

que também se anula se $\lambda_k = \lambda_i \neq \lambda_j$.

Usando as equações (2.9) e (2.10) junto às equações de Gauss e Codazzi, para $i, j = 1, ..., n$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} + \lambda_i \lambda_j &= \langle R(X_i, X_j) X_j, X_i \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} \nabla_{X_j} X_j, X_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{X_j} \nabla_{X_i} X_j, X_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X_i, X_j]} X_j, X_i \right\rangle \\
&= X_i \left\langle \nabla_{X_j} X_j, X_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{X_j} X_j, \nabla_{X_i} X_i \right\rangle \\
&\quad - X_j \langle \nabla_{X_i} X_j, X_i \rangle + \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X_i, X_j]} X_j, X_i \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \left\langle \nabla_{[X_i, X_j]} X_j, X_i \right\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{c} + \lambda_i \lambda_j &= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \left\langle (\nabla_{[X_i, X_j]} A) X_j, X_i \right\rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \langle (\nabla_{X_i} A) X_j, [X_i, X_j] \rangle \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \left( \langle (\nabla_{X_i} A) X_j, \nabla_{X_i} X_j \rangle - \left\langle (\nabla_{X_i} A) X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle \right) \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} \left( \left\langle (\nabla_{X_j} A) X_i, \nabla_{X_i} X_j \right\rangle - \left\langle (\nabla_{X_i} A) X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle \right) \\
&= \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle - \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i} (\lambda_i - \lambda_j) \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \nabla_{X_j} X_i \right\rangle \\
&= 2 \left\langle \nabla_{X_i} X_j, \sum_{k=1}^{n} \left\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \right\rangle X_k \right\rangle \\
&= 2 \sum_{k=1}^{n} \langle \nabla_{X_i} X_j, X_k \rangle \left\langle \nabla_{X_j} X_i, X_k \right\rangle \\
&= 2 \sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \neq \lambda_i, \lambda_j}}^{n} \frac{\langle (\nabla_{X_k} A) X_i, X_j \rangle^2}{(\lambda_j - \lambda_k)(\lambda_i - \lambda_k)}.
\end{aligned}$$

(Observe que a sétima igualdade só é válida quando a base $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é ortonormal.)

Isto implica que

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_i}}^{n} \frac{\widetilde{c}+\lambda_i\lambda_j}{(\lambda_i-\lambda_j)} &= 2\sum_{\substack{j,k=1\\ \lambda_k\neq\lambda_i\neq\lambda_j\neq\lambda_k}}^{n} \frac{\langle(\nabla_{X_k}A)X_i,X_j\rangle^2}{(\lambda_i-\lambda_j)(\lambda_j-\lambda_k)(\lambda_i-\lambda_k)}\\ &= -\sum_{\substack{k=1\\ \lambda_k\neq\lambda_i}}^{n} \frac{\widetilde{c}+\lambda_i\lambda_k}{(\lambda_i-\lambda_k)}.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\sum_{\substack{j=1\\ \lambda_j\neq\lambda_i}}^{l} m_j\frac{\widetilde{c}+\lambda_i\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}=0,$$

□

**Teorema 2.37** *Seja $M^n$ uma hipersuperfície em $\widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$, onde $\widetilde{c}\leq 0$, cujas curvaturas principais são constantes. Então no máximo duas delas são distintas.*

**Dem.:** Considere primeiro que $\widetilde{c}=0$. Sejam $\lambda_1,...,\lambda_n$ as curvaturas principais da hipersuperfície. Fazendo uma mudança no campo normal, se necessário, podemos assumir que existe alguma curvatura principal positiva. Defina

$$\gamma := \min\{\lambda_i;\ \lambda_i>0\}.$$

Note que se existir $\lambda_j<0$, então $\dfrac{\lambda_j\gamma}{\lambda_j-\gamma}>0$. Por outro lado, se houver $\lambda_j>\gamma$, então $\dfrac{\lambda_j\gamma}{\lambda_j-\gamma}>0$. Logo, por (2.8), se houver mais que uma curvatura principal distinta então haverá exatamente duas e $\lambda_1\lambda_2=0$.

Considere agora o caso $\widetilde{c}<0$, sem perda de generalidade, suponha $\widetilde{c}=-1$. Podemos assumir que existe $\lambda_i>0$. Sejam

$$\lambda := \max\{\lambda_i; 0<\lambda_i\leq 1\} \quad \text{e} \quad \mu := \min\{\lambda_i;\lambda_i>1\}.$$

Se $\lambda$ existe, assuma inicialmente que não existe curvatura principal no intervalo aberto $(\lambda,1/\lambda)$. Então,

$$\frac{-1+\lambda\lambda_j}{\lambda_j-\lambda}=\lambda\frac{\lambda_j-1/\lambda}{\lambda_j-\lambda}$$

é positivo para todo $\lambda_j\neq\lambda$, exceto possivelmente para $\lambda_j=1/\lambda$. Portanto, se existe mais que uma curvatura principal distinta, por (2.8), então há exatamente duas e $\lambda_1\lambda_2=1$. Assuma agora que exista alguma curvatura principal em $(\lambda,1/\lambda)$. Assim, $\mu\in(\lambda,1/\lambda)$ e não existe nenhuma curvatura principal em $(1/\mu,\mu)$. Podemos portanto aplicar o argumento acima para $\mu$ ao invés de $\lambda$.

Finalmente, se não existir $\lambda_i \in (0,1]$, então $\mu$ existe e novamente $(1/\mu, \mu)$ não contém qualquer $\lambda_i$.

$\square$

Se $\widetilde{c}$ for positivo no teorema acima, a afirmação é falsa. De fato, podem haver 1, 2, 3, 4 ou 6 curvaturas distintas, como provado por Münzner em [27] e [28].

**Teorema 2.38** *Seja $M^n$ uma variedade riemanniana, conexa, simplesmente conexa e completa. Se $M_\lambda$ e $M_\mu$ são as variedades integrais maximais das distribuições $T_\lambda$ e $T_\mu$, respectivamente, definidas na demonstração do teorema 2.35. Então $M$ é isométrica ao produto $M_\lambda \times M_\mu$*

Para uma demonstração deste teorema veja [21] pg 187.

Capítulo 3

# Hipersuperfícies Homogêneas

Uma variedade riemanniana é dita *homogênea* se seu grupo de isometrias é transitivo. Neste capítulo apresentamos uma classificação das hipersuperfícies homogêneas conexas, com $t(p) \neq 2$, nas formas espaciais reais $\mathbb{E}^{n+1}$, $\mathbb{H}^{n+1}$ e $S^{n+1}$. Na esfera $S^{n+1}$, tal classificação se restringirá ao caso em que a imersão possui no máximo duas curvaturas principais distintas. Para as hipersuperfícies homogêneas em $\mathbb{E}^{n+1}$ e $\mathbb{H}^{n+1}$, devido ao teorema 2.37, não é necessário adicionar tal hipótese. Para uma classificação mais detalhada das homogêneas na esfera indicamos [37].

## 3.1 Resultados Principais

**Teorema 3.1** *Toda variedade riemanniana homogênea é (geodesicamente) completa.*

**Dem.:** Seja $M$ uma variedade riemanniana homogênea e $p_0 \in M$. Iremos mostrar que uma geodésica $\gamma = p_t$ partindo de $p_0$ está definida para todos os valores de seu parâmetro $t \in \mathbb{R}$.

Dados $p$ um ponto qualquer de $M$ e $\gamma : [0, a] \to M$ uma geodésica $\gamma(t) = p_t$ parametrizada por comprimento de arco. Observe que os pontos inicial e final dessa geodésica são $\gamma(0) = p_0$ e $\gamma(a) = p_a$. Tome uma isometria $\phi$ de $M$ tal que $\phi(p) = p_a$. Pela proposição 1.3, existe $\epsilon > 0$ tal que, para todo vetor unitário $X \in T_pM$, a geodésica $\exp(tX)$ está definida para $|t| \leq \epsilon$.

Afirmamos que $\gamma$ pode ser estendida para o intervalo $[0, a + \epsilon]$. Com efeito, note que $d\phi^{-1}$ transforma o vetor unitário $\gamma'(a)$ em um vetor unitário $X \in T_pM$, isto é, $X = d\phi^{-1}(\gamma'(a))$. Como $\exp(tX)$ é uma geodésica passando por $p$, $\phi(\exp(tX))$ será uma geodésica que passa em $p_a$ com vetor tangente $\gamma'(a)$ nesse ponto. Tal geodésica pode ser escrita por

$$p_{a+t} = \phi(\exp(tX)), \quad 0 \leq t \leq \epsilon.$$

Assim, podemos definir $\gamma(t) = p_t$ para $t \in [0, a + \epsilon]$ de tal maneira que $\gamma$ continue uma geodésica. Analogamente, podemos estender $\gamma(t) = p_t$ para $t < 0$. Aplicando o mesmo raciocínio recursivamente é possível definir tal geodésica para todo $t \in \mathbb{R}$.

$\square$

**Observação 3.2** *Se $M$ é uma variedade riemanniana, $\nabla$ sua conexão de Levi-Civita e $\phi$ uma isometria de $M$. Dado $p \in M$, então*

$$d\phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\phi X} d\phi Y, \quad \forall \quad X, Y \in T_pM.$$

*De fato, sendo $\phi : M \to M$ uma imersão isométrica, pela identificação feita no início da seção 1.3 (sobre imersões isométricas), dados $X, Y \in TM$ temos a igualdade $d\phi(\nabla_X Y) = \nabla_X Y$. Por outro lado, como a codimensão da imersão é zero, a componente normal é nula e podemos escrever $\nabla_{d\phi X} d\phi Y = \nabla_X Y$. Portanto, $d\phi(\nabla_X Y) = \nabla_{d\phi X} d\phi Y$, $\forall \ X, Y \in TM$.*

**Teorema 3.3** *Seja $f : M^n \to \widetilde{M}^{n+1}(\widetilde{c})$ uma hipersuperfície homogênea. Então $t(p) \leq 1$ para todo $p \in M$ ou $t(p)$ é constante em $M$.*

**Dem.:** Pela proposição 2.21, se $t(p) \geq 2$ então

$$\ker A_p = T_0(p) = \{X \in T_pM;\ R(X, Y) = \widetilde{c} X \wedge Y,\ \forall\ Y \in T_pM\}.$$

Seja $q$ outro ponto de $M$ e $\phi$ uma isometria de $M$ tal que $\phi(p) = q$, a qual existe por ser $M$ homogênea. Sabemos que $d\phi$ é um isomorfismo de $T_pM$ sobre $T_qM$ que preserva produto interno. Portanto,

$$\begin{aligned} d\phi(T_0(p)) &= \{d\phi X \in T_qM;\ R(X, Y) = \widetilde{c} X \wedge Y,\ \forall\ Y \in T_pM\} \\ &= \{d\phi X \in T_qM;\ R(d\phi X, d\phi Y) = \widetilde{c}(d\phi X \wedge d\phi Y),\ \forall\ Y \in T_pM\} \\ &= T_0(q). \end{aligned}$$

Note que a segunda igualdade segue da seguinte equivalência, que é facilmente demonstrada com a ajuda da observação 3.2:

$$R(X, Y) = \widetilde{c} X \wedge Y,\ \forall Y \in T_pM \iff R(d\phi X, d\phi Y) = \widetilde{c}(d\phi X \wedge d\phi Y)\ \forall Y \in T_pM.$$

Sendo $d\phi$ isomorfismo temos $\dim T_0(p) = \dim T_0(q)$, ou seja, $\dim\ker A_p = \dim\ker A_q$ o que implica $t(p) = t(q)$.

No caso $t(p) \leq 1$, para algum $p$, temos $\dim T_0(p) = n$ pois $AX \wedge AY = 0$, para todo $X, Y \in T_pM$. Assim, por argumento análogo ao realizado acima, $\dim T_0(p) = \dim T_0(q)$ para qualquer $q \in M$, logo $AX \wedge AY = 0$, para todo $X, Y \in T_qM$, isto é, $t(q) \leq 1$ para todo $a \in M$. □

**Teorema 3.4** *Seja $(M^n, f)$ uma hipersuperfície homogênea de uma forma espacial real $Q^{n+1}(\widetilde{c})$. Se $t(p) \geq 3$ para algum $p \in M$, então as curvaturas principais de $M$ são constantes.*

**Dem.:** Sejam $p, q \in M$ e uma isometria $\phi$ de $M$ tal que $\phi(p) = q$. Pela proposição 2.28, $\phi$ pode ser estendida à uma isometria $\tau$ de $Q$, isto é, $\tau \circ f = f \circ \phi$. Note que dado um campo normal unitário $\xi$ em uma vizinhança de $p$, então $d\tau\xi$ é um campo normal unitário numa vizinhança de $q$. De fato, $\tau \circ f = f \circ \phi$ implica que o espaço tangente $T_{f(p)}M$ é levado (isometricamente) a $T_{f(\phi(p))}M$ por $d\tau$.

Agora, observe que

$$d\tau\left(\widetilde{\nabla}_{dfX}\xi\right) = -d\tau df AX = -df d\phi AX,$$

por outro lado,

$$\widetilde{\nabla}_{d\tau dfX} d\tau\xi = \widetilde{\nabla}_{df d\phi X} d\tau\xi = \pm df A d\phi X.$$

Pela observação 3.2, $d\tau\widetilde{\nabla}_X\xi = \widetilde{\nabla}_{d\tau X} d\tau\xi$, logo temos que

$$-df d\phi A_p X = \pm df A_q d\phi X \quad \Rightarrow \quad A_q = \pm d\phi A_p d\phi^{-1}.$$

Assim, $A_q^2 = d\phi A_p^2 d\phi^{-1}$ implicando que $A_q^2$ e $A_p^2$ possuem os mesmos autovalores. Ou seja, o quadrado das curvaturas principais $\lambda_i : M \to \mathbb{R}$, $i = 1, ..., n$, são constantes em $M$. Pelo lema 2.30, as curvaturas principais $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n$ são funções contínuas em $M$. Portanto, $\lambda_i$, $i = 1, ..., n$ são funções localmente constantes e como $M$ é conexa, afirmamos que tais funções são constantes em $M$. Com efeito, o conjunto

$$U = \{p \in M;\ \lambda_i(p) = \lambda_i(q) \text{ fixado } q \in M, i = 1, ..., n\}$$

é aberto por serem $\lambda_i$, $i = 1, ..., n$ funções localmente constantes e é fechado por conter seus pontos de acumulação. Sendo $M$ conexa, concluímos que $U = M$, o que prova o teorema.

□

**Teorema 3.5** *Seja $M^n$ uma hipersuperfície homogênea em uma forma espacial $Q^{n+1}(\widetilde{c})$ onde $\widetilde{c} \leq 0$ e $t(p) \neq 2$ para algum $p \in M$. Então um dos seguintes casos ocorre:*

*i)* *$M^n$ é um espaço de curvatura constante $\widetilde{c}$ e $t(p) \leq 1$ para todo $p$,*

*ii)* *$M^n$ é um espaço de curvatura constante $c > \widetilde{c}$, $t(p) = n$ para todo $p \in M$ e a imersão é umbílica,*

*iii)* *$M^n$ é localmente isométrica ao produto riemanniano de variedades de curvatura constante $M_1^k(\lambda^2 + \widetilde{c}) \times M_2^{n-k}(\mu^2 + \widetilde{c})$ onde $\lambda\mu + \widetilde{c} = 0$ e $1 < k < n - 1$,*

*iv)* *$M^n$ é localmente isométrica a $M_1^1 \times M_2^{n-1}(\mu^2 + \widetilde{c})$ para alguma constante $\mu$.*

**Dem.:** Pelo teorema 3.3 exatamente uma das seguintes situações ocorre: $t(p) \leq 1$ para todo $p$, ou, $t(p) \geq 3$ é constante em $M$.

Se a primeira ocorre, então $M$ é um espaço de curvatura constante $\widetilde{c}$. De fato, da equação de Gauss temos

$$R(X,Y) = \widetilde{c}X \wedge Y, \quad \forall \;\; X, Y \in T_pM,$$

pois $AX \wedge AY = 0$.

Se $t(p) \geq 3$, pelo teorema 3.4, as curvaturas principais são constantes. Assim, pelo teorema 2.37 existem no máximo duas curvaturas principais distintas. Se todas essas curvaturas são iguais e não nulas, a imersão é umbílica, $t(p) = n$ e pela proposição 1.16 $M$ tem curvatura constante $c > \widetilde{c}$.

Se as curvaturas principais não são todas idênticas, existem exatamente duas distintas, sejam $\lambda > \mu$. Portanto, do teorema 2.35, concluímos que $M$ é localmente isométrica ao produto de dois espaços de curvaturas constantes como está descrito nos itens iii) e iv) do enunciado.

$\square$

**Teorema 3.6** *Seja $(M^n, f)$ uma hipersuperfície homogênea em $\mathbb{E}^{n+1}$, tal que $t(p) \neq 2$ para algum $p \in M$. Então, uma das seguintes afirmações ocorre:*

*i) $M \cong \mathbb{E}^n$ e $(M, f)$ é um hiperplano,*

*ii) $M \cong S^1 \times \mathbb{E}^{n-1}$ e $(M, f)$ é um cilindro sobre uma curva plana fechada,*

*iii) $M \cong S^k(c) \times \mathbb{E}^{n-k}$ onde $c > 0$ e $2 < k < n$. $(M, f)$ é um cilindro sobre uma esfera,*

*iv) $M \cong S^n(c)$, $c > 0$ e $(M, f)$ é uma esfera.*

**Dem.:** Pelo teorema 3.3 $t(p) \leq 1$, ou, $t(p)$ é constante para todo $p \in M$. No primeiro caso, temos que $M^n$ é uma variedade riemanniana flat, isto é, localmente isométrica à $\mathbb{E}^n$. Com efeito, $AX \wedge AY = 0$, para todo $X, Y \in T_pM$, implica $R(X,Y) = 0$. Além disso, pela proposição 3.1 $M$ é completa. Logo, pelo teorema de Hartman-Nirenberg (cf. [15], pg.72), $M$ é isométrica a um cilindro sobre uma curva plana, $C^\infty$ e regular. Sendo uma variedade unidimensional, tal curva é difeomorfa à $\mathbb{R}$ ou $S^1$ e isométrica à $(a, \infty)$, $(a, b)$, $(-\infty, \infty)$, ou, $S^1$, onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $a < b$. Como nos dois primeiros casos o cilindro não é completo e consequentemente não homogêneo, concluímos que $M$ é isométrica à $E^n$ ou $S^1 \times \mathbb{E}^{n-1}$, caso seja ou não simplesmente conexa, respectivamente.

Considere agora o caso $t(p) \geq 3$ e constante. Pela proposição 2.29, a hipersuperfície de recobrimento universal $(\hat{M}, f \circ \pi)$ é tal que $\hat{A}_q = \pm d\pi^{-1} A_{\pi(q)} d\pi$, para todo $q \in \hat{M}$, onde $\hat{A}$ é a segunda forma fundamental de imersão $(\hat{M}, f \circ \pi)$.

Assim, se $t(p) = n$, pelo item ii) do teorema 3.5, $M$ e portanto $\hat{M}$ é um espaço de curvatura constante $c > 0$. Por ser, completa e simplesmente conexa, pelo teorema 1.6, $\hat{M}$ é isométrica à $S^n(c)$.

Se $t(p) = k < n$, existe um campo unitário normal $\xi$ definido globalmente em $\hat{M}$ (pois $\hat{M}$ é orientável por ser simplesmente conexa) e portanto $T_\lambda = \{X \in TM;\ AX = \lambda X\}$ e $T_0 = \{X \in TM;\ AX = 0\}$ estão definidos em todo $\hat{M}$.

Pelo teorema 2.38, $\hat{M}$ é isométrica ao produto riemanniano das variedades integrais maximais das distribuições $T_\lambda$ e $T_0$, denotadas por $M_\lambda$ e $M_0$. Isto é, $\hat{M} = M_\lambda \times M_0$. Como $\hat{M}$ é completa e simplesmente conexa, o mesmo ocorrerá com $M_\lambda$ e $M_0$. De fato, se $M_\lambda$ ou $M_0$ não for completa, é fácil ver que $M_\lambda \times M_0$ também não será. E como o grupo fundamental de $\hat{M}$ é o produto dos grupos fundamentais de $M_\lambda$ e $M_0$, temos que os grupos fundamentais dessas variedades devem ser triviais. Pelo teorema 2.35, $M_\lambda$ e $M_0$ são ainda espaços de curvaturas constantes $\lambda^2$ e 0, respectivamente. Ou seja, $\hat{M}$ é isométrica à $S^k \times \mathbb{E}^{n-k}$.

De 2.23 temos, em cada caso, que a hipersuperfície de recobrimento $(\hat{M}, f \circ \pi)$ é congruente aos espaços modelos correspondentes (veja exemplos das esferas e cilindros sobre esferas no espaço $\mathbb{E}^{n+1}$). Assim, em particular, $f \circ \pi$ e consequentemente $\pi$ são injetoras. Sendo aplicação de recobrimento e injetora, $\pi$ é uma isometria, $M$ é simplesmente conexa e o resultado segue.

□

**Teorema 3.7** *Seja $(M^n, f)$ uma hipersuperfície homogênea em $\mathbb{H}^{n+1}(\widetilde{c})$, $\widetilde{c} < 0$, tal que, para algum $p \in M$, $t(p) \neq 2$. Então, uma das seguintes afirmações ocorre:*

*i) $M$ é um espaço de curvatura constante $\widetilde{c}$,*

*ii) $M$ é um espaço de curvatura constante $c > \widetilde{c}$ e a imersão é umbílica,*

*iii) $M$ é o produto $S^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$, onde $1 < k < n$ e $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{\widetilde{c}}$,*

*iv) $M$ é localmente isométrica a $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ para uma certa constante $c_2$. Se $M$ é simplesmente conexa, a hipersuperfície é congruente à imersão de $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ sobre $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ dada no exemplo 2.14. Se $M$ não for simplesmente conexa, a hipersuperfície é congruente à imersão do exemplo 2.15. A imagem $f(M)$ é isométrica a $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ com $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{\widetilde{c}}$.*

**Dem.:** Por 3.3, $t(p) \leq 1$, ou, $3 \leq t(p) =$constante, para todo $p \in M$. Se o primeiro ocorre, $M$ é um espaço de curvatura seccional constante $\widetilde{c}$. Se $t(p) \geq 3$ para todo $p$, então as curvaturas principais são constantes e no máximo duas são distintas (3.4 e 2.37), quais sejam $\lambda \geq \mu$. Se $\lambda = \mu$, $M$ é um espaço de curvatura constante $c = \lambda^2 + \widetilde{c} > \widetilde{c}$ e a imersão é umbílica. Se $\lambda > \mu$, aplicando o teorema 2.35, temos que $M$ é localmente isométrica ao produto riemanniano

$M^k(\widetilde{c}+\lambda^2) \times M^{n-k}(\widetilde{c}+\mu^2)$. Se $k \neq 1$, por um raciocínio análogo ao da demonstração anterior, concluímos que $M \cong S^k(\widetilde{c}+\lambda^2) \times \mathbb{H}^{n-k}(\widetilde{c}+\mu^2)$.

Se $k=1$, $M$ é localmente isométrica a $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(\widetilde{c}+\mu^2)$. Além disto, se $M$ é simplesmente conexa, por 2.23, $(M,f)$ é congruente à imersão de $\mathbb{E}^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ sobre $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$ apresentada no exemplo 2.14 e $f(M)$ é isométrica à $S^1(c_1) \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$. Se não for simplesmente conexa, $M$ é isométrica a $S^1 \times \mathbb{H}^{n-1}(c_2)$, onde $S^1$ é isométrica a uma circunferência cujo raio é múltiplo inteiro de $\frac{1}{\sqrt{c_1}}$. De fato, considerando somente a parte da imersão que leva $S^1$ em $S^1(c_1)$, temos um homeomorfismo de um espaço de Hausdorff compacto em um espaço de Hausdorff que portanto é uma aplicação de recobrimento. Pela classificação dos recobrimentos em $S^1(c_1)$ temos que $S^1$ é isométrica a uma circunferência de raio múltiplo inteiro de $1/c_1$ e portanto a imersão é congruente à do exemplo 2.15.

□

Vale ressaltar que no artigo [33] do Ryan, o item iii) do teorema acima diz apenas que *"$M^n$ é localmente isométrica à $M_1^k(\lambda^2+\widetilde{c}) \times M_2^{n-k}(\mu^2+\widetilde{c})$ onde $\lambda\mu+\widetilde{c}=0$ e $1<k<n-1$"*. Contudo, através do trabalho do Takahashi [38] foi possível refinar melhor este item e concluir que $M$ é o produto $S^k(c_1) \times \mathbb{H}^{n-k}(c_2)$, onde $1<k<n$ e $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{\widetilde{c}}$,

Observe ainda, que para o caso $t(p) \leq 1$ no teorema 3.6, em que o ambiente era $\mathbb{E}^{n+1}$, foi possível classificar as imersões através do teorema de Hartman-Nirenberg. Tal classificação ainda não existe para o espaço hiperbólico, na realidade a geometria hiperbólica é bastante rica neste sentido, havendo infinitas maneiras de se obter hipersuperfícies com $t(p) \leq 1$ em $\mathbb{H}^{n+1}$.

**Teorema 3.8** *Seja $(M^n, f)$ uma hipersuperfície homogênea em $S^{n+1}(\widetilde{c})$ tal que $t(p) \neq 2$ para algum $p \in M$. Assuma, além disso, que em algum ponto $p$ no máximo duas curvaturas prinicipais são distintas. Então uma das seguintes conclusões é verdadeira:*

*i) $M$ é um espaço de curvatura constante $\widetilde{c}$ e $(M,f)$ é uma grande esfera,*

*ii) $M$ é um espaço de curvatura constante $c>\widetilde{c}$ e $(M,f)$ é uma pequena esfera,*

*iii) $M$ é localmente isométrica a $M_1^k(\lambda^2+\widetilde{c}) \times M_2^{n-k}(\mu^2+\widetilde{c})$ onde $1<k<n-1$ e $\lambda\mu+\widetilde{c}=0$ e $(M,f)$ é um produto de esferas,*

*iv) $M$ é localmente isométrica a $M_1^1 \times M_2^{n-1}(\mu^2+\widetilde{c})$ para alguma constante $\mu$. Nesse caso, se $M$ for simplesmente conexa, $(M,f)$ é congruente à imersão de $\mathbb{E}^1 \times S^{n-1}(c_2)$ sobre $S^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ e $f(M) \cong S^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ onde $\frac{1}{c_1}+\frac{1}{c_2}=\frac{1}{\widetilde{c}}$.*

**Dem.:**

Por 3.3, $t(p) \leq 1$ para todo $p$, ou, $3 \leq t(p)$ =constante. Se $t(p) \leq 1$, $M$ é um espaço de curvatura constante $\widetilde{c}$. Pelo teorema 3.1, $M$ é completa, assim, por 2.26, $(M^n,f)$ é totalmente geodésica. Considerando a hipersuperfície de recobrimento universal $(\hat{M}^n, f \circ \pi)$ de $M$, pela proposição 2.29 tal imersão é também totalmente geodésica e $\hat{M}$ possui curvatura constante $\widetilde{c}$. Por 1.6, $\hat{M}$ é isométrico à $S^n(\widetilde{c})$, assim, pelo teorema 2.23, $(\hat{M}^n, f \circ \pi)$ é uma *grande esfera*.

Se $t(p) \geq 3$ e constante, assuma que há no máximo 2 curvaturas prinicipais distintas, quais sejam $\lambda \geq \mu$. No caso $\lambda = \mu$, pelo item i) do teorema 3.8, a imersão é umbílica e temos que $M$ e consequentemente $\hat{M}$ (por 2.29) são espaços de curvatura constante $c > \widetilde{c}$. Aplicando o teorema 1.6, concluímos que $\hat{M}$ é isométrico à $S^n(c)$. Por 2.23, $(\hat{M}, f \circ \pi)$ é uma *pequena esfera*.

Consideremos agora o caso em que duas curvaturas principais são distintas $(\lambda > \mu)$. Sendo simplesmente conexa, $\hat{M}$ é orientável. Portanto, é possível definir um campo normal unitário global $\xi$ e as distribuições $T_\lambda = \{X \in TM;\ AX = \lambda X\}$ e $T_\mu = \{X \in TM;\ AX = \mu X\}$ em todo $\hat{M}$. Por 2.38, $\hat{M}$ é isométrico à $M_1^k(\lambda^2 + \widetilde{c}) \times M_2^{n-k}(\mu^2 + \widetilde{c})$ se $1 < k < n-1$.

Como $M_1$ e $M_2$ são completas, simplesmente conexas e de curvaturas constantes $c_1 = \lambda^2 + \widetilde{c} > 0$ e $c_2 = \mu^2 + \widetilde{c} > 0$, pelo teorema 1.6, podemos dizer que $\hat{M}$ é isométrico à $S^k(c_1) \times S^{n-k}(c_2)$. Novamente, por 2.23, $(\hat{M}, f \circ \pi)$ é congruente ao *produto de esferas* em $S^{n+1}(\widetilde{c})$.

Note que nos três casos acima, usando o teorema 2.23 e o mesmo argumento na demonstração do teorema 3.1, concluímos que $\pi$ é uma isometria entre $\hat{M}$ e $M$. Isto é, $M$ é uma grande esfera, uma pequena esfera, ou, um produto de esferas.

Falta analisar o caso $k = 1$. Pelo teorema 2.35, $M$ é localmente isométrico à $M_1^1 \times M_2^{n-1}(c_2)$. Além disso, se $M$ é simplesmente conexa, pelo teorema 2.38, $M$ é isométrica à $M_1^1 \times M_2^{n-1}(c_2)$. Logo, $M$ é isométrica à $\mathbb{E}^1 \times S^{n-1}(c_2)$ e pelo teorema 2.23, $(M, f)$ é congruente à imersão de $\mathbb{E}^1 \times S^{n-1}(c_2)$ sobre $S^1(c_1) \times S^{n-1}(c_2)$ apresentada no exemplo 2.9, no qual $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{\widetilde{c}}$.

□

## 3.2 Resultados posteriores

Na introdução deste trabalho vimos que os artigos [20], [29], [33], [38], [39] e [37], dão uma classificação das hipersuperfícies homogêneas em formas espaciais reais. Observe que esses artigos não dão a classificação completa dessas hipersuperfícies, pois ficam faltando algumas homogêneas na esfera. Relacionados a estes estudos, sobre hipersuperfícies homogêneas, emergiram três caminhos a serem percorridos: o estudo das hipersuperfícies homogêneas de formas espaciais complexas; o das subvariedades homogêneas de codimensão 2 de formas espaciais reais e o das hipersuperfícies de co-homogeneidade 1 de formas espaciais reais.

Em relação ao primeiro caminho, já se tem a classificação das hipersuperfícies reais homogêneas no espaço projetivo complexo, a qual foi estudada em: [36], [32], [35], [14] e [19]. Uma importante consequência do trabalho de Takagi [36], é que cada hipersuperfície homogênea no espaço projetivo complexo é uma hipersuperfície Hopf (não é necessário entrar em detalhes em tal definição). Em 1989, Berndt [5] classificou as hipersuperfícies homogêneas Hopf no espaço hiperbólico complexo ($\mathbb{CH}^n$). Por algum tempo acreditou-se que, assim como no caso do espaço projetivo complexo, toda hipersuperfície homogênea no $\mathbb{CH}^n$ era Hopf. Mas Lohnherr [23] construiu, em 1998, um contra-exemplo: a hipersuperfície regrada real $W^{2n-1}$ em $\mathbb{CH}^n$ que é homogênea porém não Hopf. Recentemente Berndt e Tamaru [7] obtiveram a classificação das hypersuperfícies homogêneas em $\mathbb{CH}^n$.

Sobre as subvariedades homogêneas de codimensão 2 do espaço euclidiano há os trabalhos [3] e [10]. Em 2002, Castro e Noronha obtiveram em [11] uma melhora destes resultados, mas ainda no espaço euclidiano. Em [12], os mesmos autores classificam parcialmente as imersões isométricas de codimensão 2 não rígidas de variedades riemannanianas homogêneas na esfera e no espaço hiperbólico real.

Antes de comentarmos o terceiro caminho, vejamos de maneira sucinta a definição de co-homogeneidade 1. Sejam $M^n$ uma variedade riemanniana e $G \subset Iso(M)$ um subgrupo fechado e conexo do grupo das isometrias de $M$. Considerando a ação isométrica $G \times M \to M$, diremos que $M$ é uma *G-variedade riemanniana*. Dizemos que a ação de $G$ (ou a variedade $M$) é de *co-homogeneidade 1* se a codimensão mínima das órbitas for 1.

Quanto às hipersuperfícies de co-homogeneidade 1 de formas espaciais reais, em [31] e [4] são dadas condições suficientes para que uma hipersuperfície compacta de co-homogeneidade 1 do espaço euclidiano seja de revolução. Já em [34], Seixas estende esses resultados para variedades completas. Em [2], Caputi obteve resultado análogo ao de Seixas para hipersuperfícies de co-homogeneidade 1 do espaço hiperbólico. Esse mesmo problema foi tratado por Almeida, em [1], no caso de hipersuperfícies da esfera.

O conceito de exemplo padrão generaliza o conceito de hipersuperfícies de revolução. A grosso modo, dizemos que uma hipersuperfície de co-homogeneidade 1 é um exemplo padrão se o seu grupo de isometrias pode ser identificado com um grupo de isometrias do ambiente. Em [17], Fukuoka obteve condições para que hipersuperfícies de co-homogeneidade 1 fossem exemplos padrões. Em [24], os autores provam que sob condições naturais, as hipersuperfícies de co-homogeneidade 1 são exemplos padrões.

Ampliando o enfoque, o trabalho [26] é o mais recente no assunto. Ele trata ações polares (dentre as quais se encontram aquelas de co-homogeneidade 1) sobre hipersuperfícies compactas do espaço euclidiano.

# Bibliografia


[1] ALMEIDA. J. C. L, *"Hipersuperfícies de revolução nas esferas"*, Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, 2002.

[2] ASPERTI, A. C. ; CAPUTI, A. *"Cohomogeneity one hypersurfaces of the hyperbolic space"*, Annals of Global Analysis and Geometry, v. 24, n. 4, p. 351-373, 2003.

[3] ASPERTI, A. C., CASTRO, H. P. and NORONHA, M. H. *"Compact homogeneous Einstein manifolds in codimension two"*, Note di Matematica, 16(1), 9-19, 1996.

[4] ASPERTI, A. C., MERCURI F. and NORONHA, M. H. *"Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of revolution"*, Boll. Un. Mat. Ital. B(7),11(2,suppl.), 199-215, 1997.

[5] BERNDT, J. *"Real hypersurfaces with constant principal curvatures in complex hyperbolic space"*, J. Reine Angew. Math, 395, 132-141, 1989.

[6] BERNDT, J. *"Homogeneous hypersurfaces in hyperbolic spaces"*, Math Z., 229, 589-600, 1998.

[7] BERNDT, J. and TAMARU H. *"Cohomogeneity one actions on noncompact symmetric spaces of rank one"*, to appear in Trans. Amer. Math. Soc., preprint arXiv:math.DG/0505490.

[8] CARMO, M. P. *"Geometria Riemanniana"*. $3^a$ edição, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2005.

[9] CARTAN, E. *"Sur quelques familles remarquables d'hipersuperfícies"*, C. R. Math. Lieg., 30-41, 1939; Oeuvres complètes Tome III, Vol. 2, p.1481.

[10] CASTRO, H. P. and NORONHA, M. H. *"Homogeneous submanifolds of codimension two"*, Geom. Dedicata, 78(1), 89-110, 1999.

[11] CASTRO, H. P. and NORONHA, M. H. *"Homogeneous manifolds in codimension two revisited"*, Note di Matematica, 21(1), 49-57, 2002.

[12] CASTRO, H. P. and NORONHA, M. H. *"Codimension two homogeneous submanifolds of space forms"*, Note di Matematica, 21(2), 71-97, 2002/2003.

[13] CHEN, B. -Y. *"Geometry of submanifolds"*, Pure and Aplied Mathematics, Marcl Dekker, Inc., New York, New York, 1973.

[14] CHOE, Y. -W., KIM, H. S., KIM, I. -B. and TAKAGI, R. *"Rigidity theorems for real hypersurfaces in a complex projective space"*, Hokkaido Math J., 25(3), 433-451, 1996.

[15] DAJCZER, M. *"Rigidity of submanifolds"*. Mathematics Lecture Series n. 13, Publish or Perish, Inc. Houston, Texas, 1986.

[16] FERUS, D. *"Notes on isoparametric hypersurfaces"*, Escola de Geometria Diferencial, Campinas-SP, 1980.

[17] FUKUOKA, R. *"Hipersuperfícies no Espaço Euclideano com condições sobre a geometria intrínseca"*, Tese de Doutorado, IMECC - UNICAMP, 1999.

[18] HSIANG, W. Y. and LAWSON, H. B. *"Minimal submanifolds of low cohomogeneity"*, J. Diff. Geom. 5, 1-38, 1971.

[19] KIM, I. -B, KIM, H. S. and TAKAGI, R. *"The rigidity for real hypersurfaces in a complex projective sapce"*, Tohoku Math J. (2), 50(4), 531-536, 1998.

[20] KOBAYASHI, S. *"Compact homogeneous hypersurfaces"*, Trans. Amer. Math. Soc., 88, 137-143, 1958.

[21] KOBAYASHI, S. and NOMIZU, K. *"Foundations of differential geometry"*. Vol I, Wiley Interscience, New York, 1963.

[22] LIMA, E. L. *"Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento"*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 1977.

[23] LOHNHERR, M. *"On ruled real hypersurfaces of complex space forms"*, PhD Thesis, University of Cologne, 1998.

[24] MERCURI, F., PODESTÁ, F., SEIXAS, J. A. P. and TOJEIRO, R. *"Cohomogeneity one hypersurfaces of euclidean spaces"*, Commentarii Mathematici Helvetici, Suiça, v. 81, 471-479, 2006.

[25] MILNOR, J. W. and STASHEFF, J. D. *"Characteristic classes"*, Princeton University Press, Annals of mathematics studies, n. 76, New Jersey, 1974.

[26] MOUTINHO, I. and TOJEIRO, R. *"Polar actions on compact Euclidean hypersurfaces"*, 2006 (Preprint submetido).

[27] MÜNZNER, H. F. *"Isoparametrische Hiperflächen in Sphären I"*, Math. Ann., 251, 57-71, 1980.

[28] MÜNZNER, H. F. *"Isoparametrische Hiperflächen in Sphären II"*, Math. Ann., 256, 215-232, 1981.

[29] NAGANO, T. and TAKAHASHI, T. *"Homogeneous hypersurfaces in Euclidean spaces"*, J. Math. Soc. Japan, 12, 1-7, 1960.

[30] O'NEILL, B., and STIEL, E. *"Isometric immersions of constant curvature manifolds"*, Mich. Math. J., 10, 335-339, 1963.

[31] PODESTÁ, F. and SPIRO, A. *"Cohomogeneity one manifolds and hypersurfaces of the Euclidean space"*, Ann. Global Anal. Geom., 13(2), 169-184, 1995.

[32] PODESTÁ, F. and THORBERGSSON, G. *"Polar actions on rank-one symmetric spaces"*, J. Differential Geom., 53(1), 131-175, 1999.

[33] RYAN, P. J. *"Homogeneity and some curvature conditions for hypersufaces"*, Tohoku Math. J. 21, 363-388, 1969.

[34] SEIXAS, J. A. P. ; MERCURI, F. *"Hypersurface of cohomogeneity one and hypersurface od revolution"*, Differential Geometry and its Applications, v. 20, p. 225-239, 2004.

[35] SUH, Y. J. and TAKAGI, R. *"A rigidity theorem for real hypersurfaces in a complex projective space"*, Tôhoku Math J. (2), 43(4), 501-507, 1991.

[36] TAKAGI, R. *"On homogeneous real hypersurfaces in a complex projective space"*, Osaka J. Math, 10, 495-506, 1973.

[37] TAKAGI, R., and TAKAHASHI, T. *"On the principal curvatures of homegeneuos hypersurfaces in a sphere"*, Tokyo, 469-481, 1972.

[38] TAKAHASHI, T. *"Homogeneous hypersurfaces in spaces of constant curvature"*, J. Math. Soc. Japan, 22, 395-410, 1970.

[39] TAKAHASHI, T. *"An isometric immersion of a homogeneous Riemannian manifold of dimension 3 in the hyperbolic space"*, J. Math. Soc. Japan, 23, 649-661, 1971.

[40] WARNER, F. W. *"Fundations of differentiable manifolds and Lie groups"*, Scott, Foresman and Company, Glenview, Illinois, 1971.