UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

JÉSSICA BUZATTO PRUDENCIO

Formas Normais e Ações de Grupos no Estudo de Sistemas Hamiltonianos

Maringá-PR
2018

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Formas Normais e Ações de Grupos no Estudo de Sistemas Hamiltonianos

JÉSSICA BUZATTO PRUDENCIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática Pura.

Orientadora: Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli.

Maringá-PR
2018

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

Prudencio, Jéssica Buzatto
P971f Formas normais e ações de grupos no estudo de sistemas Hamiltonianos / Jéssica Buzatto Prudencio. – Maringá, 2018.
105 f. : il.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Patrícia Hernandes Baptistelli.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2018.

1. Formas normais. 2. Sistemas Hamiltonianos. 3. Invariantes. 4. Grupos de Lie lineares. 5. Geometria simplética. 6. Normal forms. 7. Hamiltonian systems. 8. Invariants. 9. Linear Lie groups. 10. Symplectic geometry. I. Baptistelli, Patrícia Hernandes, orient. II. Universidade Estadual de Maringá, Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 515.39
Edilson Damasio CRB9-1.123

JESSICA BUZATTO PRUDENCIO

FORMAS NORMAIS E AÇÕES DE GRUPOS NO ESTUDO DE SISTEMAS HAMILTONIANOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

COMISSÃO JULGADORA:

HBaptistelli

Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)

Acomereu

Profa. Dra. Ana Cristina de Oliveira Mereu
Universidade Federal de São Carlos – Campus Sorocaba

Prof. Dr. Alexandre José Santana
DMA/Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 20 de fevereiro de 2018.
Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

Aos meus amados pais e esposo.

Agradecimentos

Agradeço ao meu amado companheiro de vida Guilherme Romano dos Santos por, além de esposo, se mostrar amigo e parceiro, por ser suporte para mim durante estes dois anos, me encorajando, sonhando, acreditando e intercedendo constantemente por mim. Cada palavra e abraço em momentos difíceis foram como injeções de ânimo e suas exultações em minhas conquistas as tornaram ainda mais prazerosas.

Aos meus pais, Nilda Buzatto Prudencio e Gelson Prudencio, por serem base sólida, conselheiros sábios, fontes de inspiração, modelos a imitar. Sou grata por toda a estrutura sólida que me ofereceram, por confiarem e sempre acreditarem em mim.

Àqueles da minha comunidade de fé que torceram, se importaram e oraram por mim. Sem excluir alguns, destaco minha gratidão à Rosilene e ao Heitor que foram grandes mestres e bem como a Daniele, o Fernando e o Vinicius, se mostraram verdadeiros amigos.

Aos meus companheiros de estudos, conversas, risadas, conselhos e desespero, que muito me ensinaram durante este período. Não podendo mencionar a todos, gostaria de destacar àqueles cuja presença foi mais constante: Estela, Marcelo, Priscila e Renan.

À minha orientadora e mentora Profa. Dra. Patrícia Hernandes Baptistelli por aceitar compartilhar seus conhecimentos comigo e fazê-lo de forma competente, acolhedora e amiga. Sou profundamente grata pela oportunidade de trabalharmos juntas e por tê-la tido como exemplo de profissional.

A todos os professores da minha caminhada por me mostrarem o caminho do conhecimento e serem influenciadores na escolha da minha carreira.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A Deus por me sustentar, me capacitar e me inspirar. Por acima de tudo colocar em minha vida as pessoas acima citadas, demonstrando, por meio delas, todo o Seu cuidado e amor por mim e me fazendo enxergar a beleza de Sua criação.

"Só o desejo inquieto, que não passa,

Faz o encanto da coisa desejada...

E terminamos desdenhando a caça

Pela doida aventura da caçada."

Mário Quintana - Espelho Mágico.

Resumo

O objetivo central deste trabalho é o desenvolvimento da teoria de formais normais para Hamiltonianos definidos em um espaço vetorial simplético de dimensão finita. Para alcançá-lo, desenvolvemos o método do operador adjunto e um método algébrico alternativo que leva em consideração um grupo S de matrizes dado em termos da parte linear do sistema Hamiltoniano associado. Nesse processo, utilizamos ferramentas da teoria de representação e da teoria invariante de grupos de Lie lineares, assim como da geometria simplética. Exemplificamos os métodos com a obtenção de formas normais de Hamiltonianos específicos, inclusive sob a ação de um grupo de Lie linear. Nesse último caso, a forma normal pode herdar as simetrias do Hamiltoniano original, implicando que as simetrias do campo Hamiltoniano associado também são preservadas.

Palavras-chave: formas normais, Hamiltoniano, grupos de Lie lineares, invariantes, geometria simplética.

Abstract

The central goal of this work is the development of the normal forms theory for Hamiltonians defined in a finite-dimensional symplectic vector space. To achieve this, we develop the adjoint operator method and an alternative algebraic method which takes into account a given group S of matrices in terms of the linear part of the associated Hamiltonian system. In this process, we use tools from the representation theory and invariant theory of linear Lie groups, as well as from the symplectic geometry. We exemplify the methods by obtaining normal forms of specific Hamiltonians, even under the action of a linear Lie group. In this last case, the normal form can inherit the symmetries of the original Hamiltonian, implying that the symmetries of the associated Hamiltonian field are also preserved.

Keywords: normal forms, Hamiltonian, linear Lie groups, invariants, symplectic geometry.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Sistemas dinâmicos não-lineares são notoriamente difíceis de atacar por meios analíticos. Uma das poucas abordagens que tem sido efetiva nas últimas décadas é a teoria da perturbação. Os sistemas estudados nesta teoria são aqueles que, em um sentido apropriado, podem ser vistos como perturbações de um dado sistema com propriedades dinâmicas "bem conhecidas". Nessa direção, a teoria de formas normais é uma ferramenta indispensável. Na maioria dos casos, as formas normais são simplificações de uma série de potências de um sistema dinâmico em um ponto de equilíbrio, por meio de sucessivas mudanças de coordenadas. O truncamento da série em uma dada ordem geralmente pertence a uma classe de sistemas "bem conhecidos" e o sistema original pode então ser visto localmente como uma perturbação do sistema truncado.

O termo "forma normal" é amplamente utilizado na matemática e seu significado é muito apropriado para o contexto. No caso de operadores lineares definidos em um determinado espaço vetorial, por exemplo, uma escolha adequada de base fornece a forma canônica de Jordan. Essa forma normal, de configuração simples, exibe certas propriedades importantes do operador quanto ao seu espectro, nulidade, posto, entre outras.

Neste trabalho, nossa atenção está voltada à teoria de formas normais aplicada a sistemas Hamiltonianos não-lineares. Tais sistemas são de grande interesse em diversos campos de pesquisa da física e da matemática, já que muitos processos físicos podem ser formulados por um sistema Hamiltoniano. Suas aplicações estão presentes, por exemplo, no estudo de estruturas biológicas, semicondutividade, supercondutividade, na física dos plasmas, farmacologia e mecânica celeste. Nosso objetivo é simplificar esses sistemas perto de pontos de equilíbrio por meio de escolhas adequadas de coordenadas, de maneira a tornar possível uma melhor exibição de suas propriedades dinâmicas locais. Essa normalização é efetuada por uma simplificação gradual da série de Taylor do Hamiltoniano que gera o sistema dinâmico.

Há décadas, a importância das formas normais despertou o interesse de vários autores como Belitskii [5, 6], Birkhoff [7], Elphick et al. [17] e Poincaré [33], que desenvolveram a teoria de formas normais para campos vetoriais como uma ferramenta para o estudo local do comportamento qualitativo desses. Outros autores têm usado essa teoria em diferentes contextos para o estudo de ciclos limites, famílias de órbitas periódicas, equilíbrios relativos e soluções periódicas relativas, como por exemplo [13, 26, 29, 31, 39]. Para o caso Hamiltoniano, além de Poincaré e Birkhoff, outros nomes importantes que contribuíram para a teoria são Broer et al. [9], Gustavon [21], Sanders et al. [36] e Van der Meer [41]. O caso canônico foi mais amplamente discutido por Galin [18], Hoveijin [24] e Koçak [25].

Em 1994, Chow, Li e Wang [14] propuseram uma teoria de formas normais alternativa para os sistemas Hamiltonianos canônicos, que consiste na obtenção de formas normais para o Hamiltoniano que gera o campo. Tal abordagem pode ser facilitadora na prática, uma vez que trabalhar com funções é, em geral, mais simples do que trabalhar com aplicações. Seguimos essa referência para o estudo das formas normais apresentado no Capítulo 3.

Uma das dificuldades no cálculo das formas normais do Hamiltoniano, assim como das do campo de vetores, é a resolução de uma equação diferencial parcial associada, o que faz com que a forma normal seja truncada em um grau baixo. Elphick et al. [17] propuseram um método algébrico que dispensa esse cálculo no caso dos campos, mas leva em consideração um grupo S de matrizes definido em termos da parte linear do sistema e que introduz simetrias ao mesmo.

O interesse em sistemas dinâmicos com presença de simetrias (equivariâncias) e antissimetrias (reversibilidades) é recente e as principais técnicas aplicadas nesse contexto derivam da teoria de representação de grupos, como em [2, 3, 20, 27, 39]. As equações que descrevem um sistema físico ou biológico podem ter simetrias (ou antissimetrias) como resultado da geometria do sistema, das hipóteses da modelagem ou de uma simplificação decorrente de uma forma normal. De fato, o método de Elphick et al. dado em [17] nos garante que, mesmo em um contexto originalmente sem simetrias, uma forma normal pode ser escolhida equivariante (no caso de campos) com respeito a um grupo de Lie linear S. Seguindo essa ideia, vamos apresentar na Subseção 3.4.2

um método algébrico alternativo para o cálculo das formas normais do Hamiltoniano e que leva em consideração o mesmo grupo S.

O texto está organizado como segue. No Capítulo 1, apresentamos notações e definições preliminares referentes à teoria de grupos de Lie lineares com alguns exemplos importantes usados no Capítulo 3. Introduzimos também a teoria invariante e equivariante desses grupos. Destacamos dentre os resultados apresentados o Teorema de Hilbert-Weyl e o Teorema 1.27, que garantem a existência de uma base de Hilbert para o anel dos polinômios invariantes e um conjunto finito de geradores para o módulo dos equivariantes sobre o anel dos invariantes, respectivamente. Do fato de as funções semi-invariantes e de as aplicações reversíveis-equivariantes poderem ser vistas como uma aplicação equivariante, garantimos que tais resultados seguem também para esses dois últimos casos.

O Capítulo 2 está dedicado à geometria simplética, ambiente onde se define matematicamente os sistemas Hamiltonianos. Os resultados apresentados na Seção 2.2 justificam a restrição aos sistemas Hamiltonianos canônicos, sem que se perca a generalidade da teoria. Nas Seções 2.3 e 2.4 definimos o grupo simplético $Sp(n)$ e sua álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n)$ em dimensão $2n$, respectivamente, associados via uma exponencial de matrizes. Os resultados apresentados na Seção 2.4 são preliminares ao desenvolvimento da teoria de formas normais apresentada no Capítulo 3, já que a matriz da parte linear de um sistema Hamiltoniano pertence a $\mathfrak{sp}(n)$. Na Seção 2.5 introduzimos o conceito de ações semissimpléticas, tornando possível relacionar as simetrias do campo de vetores com as simetrias do Hamiltoniano no capítulo seguinte.

No Capítulo 3, apresentamos a teoria de formas normais para sistemas Hamiltonianos não-lineares. Nas Seções 3.1 e 3.2 discorremos uma breve introdução sobre sistemas dinâmicos e sistemas Hamiltonianos, respectivamente. Em particular, no Teorema 3.11 é dada a generalização de um resultado apresentado em [1], que relaciona as simetrias de um campo Hamiltoniano com as simetrias de seu Hamiltoniano dependendo da ação do grupo no espaço simplético. As Seções 3.3 e 3.4 são dedicadas à sistemas Hamiltonianos lineares e não-lineares, respectivamente. Nessa última, apresentamos o método clássico para a obtenção de formas normais para Hamiltonianos, conhecido como método do operador adjunto, e um método algébrico que reduz o cálculo da forma normal de um Hamiltoniano à obtenção dos geradores de um anel de invariantes sob a ação de um grupo de Lie linear S. Finalizamos com a Seção 3.5 exibindo exemplos de formas normais no contexto com simetrias, ou seja, quando o sistema Hamiltoniano é equivariante ou reversível-equivariante sob a ação de um grupo de Lie linear.

Capítulo 1

Teoria Invariante e Equivariante

As simetrias e antissimetrias de um sistema dinâmico regido por equações diferenciais ordinárias são especificadas em termos de um grupo de transformações que preservam a estrutura das equações. Desta forma, a descrição formal da ocorrência de simetrias e antissimetrias em um modelo matemático se dá por meio da teoria de representação de grupos e, por isso, se fazem necessárias preliminares a respeito desse assunto. Trabalhamos com os grupos de Lie lineares, pois esses possuem propriedades algébricas e topológicas importantes.

Iniciamos este capítulo com dois tópicos principais que foram divididos nas Seções 1.1 e 1.2: grupos de Lie lineares e ações desses grupos em um espaço vetorial, respectivamente. Assumimos familiaridade com os conceitos teóricos de grupos como o de subgrupos, subgrupos normais e homomorfismos, bem como com conceitos topológicos em $\mathbb{R}^n$, como conjuntos abertos, fechados e compacidade. Nossa principal referência para essas duas seções é [20] e para maiores detalhes veja também [8, 22, 35].

Na Seção 1.3, apresentamos conceitos e resultados referentes à teoria invariante de grupos de Lie lineares, que fornece uma base teórica para a teoria equivariante descrita nas Seções 1.4 e 1.5 e para o método alternativo no cálculo das formas normais apresentado na Subseção 3.4.2. Um dos teoremas mais importantes deste capítulo, como já mencionamos, é o Teorema de Hilbert-Weyl, que garante a existência de um conjunto finito de geradores para o anel dos invariantes. A versão para germes desse teorema também é apresentada, incluindo sua variação para os equivariantes. Nossas principais referências nas Seções 1.3, 1.4 e 1.5 são [2, 19, 20].

1.1 Grupos de Lie Lineares

Um grupo de Lie, em termos gerais, é uma variedade diferenciável que é também um grupo e cujas operações produto e inversão são diferenciáveis. Embora essa definição seja mais abrangente, vamos trabalhar apenas com os grupos de Lie lineares, pois além de serem menos abstratos, são também suficientes para o que estudamos aqui.

Consideremos o conjunto $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ das matrizes quadradas de ordem n com entradas reais. Visto que esse conjunto pode ser identificado com $\mathbb{R}^{n^2}$, existe nele uma estrutura topológica bem estabelecida e, assim, conceitos como subconjuntos abertos e fechados de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ podem ser utilizados. Notemos que, com a operação de multiplicação de matrizes, o subconjunto de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ formado por todas as matrizes não singulares, denotado por **GL**(n), possui estrutura de grupo.

Para os nossos propósitos, temos a seguinte definição:

Definição 1.1. *Um **grupo de Lie linear** Γ é um subgrupo fechado de **GL**(n) para algum $n \in \mathbb{N}$, ou seja, é um subconjunto fechado de **GL**(n) com estrutura de grupo. Dizemos que Γ é **compacto** se ele é compacto como um subconjunto de $\mathbb{R}^{n^2}$.*

Daqui em diante, cometemos um abuso de notação quando usamos o termo "grupos de Lie lineares" para conjuntos que na verdade não são subgrupos de **GL**(n). Nesses casos, estamos nos referindo ao subgrupo de **GL**(n) isomorfo a tal conjunto.

Vejamos agora alguns exemplos importantes de grupos de Lie lineares. No que segue, I_n representa a matriz identidade de ordem n, A^t é a matriz transposta de A e det é a função contínua

$$\begin{array}{rccc} det: & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & A & \longmapsto & detA \end{array}.$$

Exemplo 1.2. O **grupo n-dimensional ortogonal** $O(n)$ de todas as matrizes quadradas A de ordem n satisfazendo $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$, juntamente com a operação de multiplicação de matrizes, é um grupo de Lie linear compacto. De fato, considerando a função contínua

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & AA^t \end{array},$$

temos que $O(n) = f^{-1}(\{I_n\})$. Como $\{I_n\}$ é fechado em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, segue que $O(n)$ também é fechado em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Ainda, se $A \in O(n)$, então

$$(detA)^2 = detA \cdot detA^t = det(A \cdot A^t) = det(I_n) = 1,$$

ou seja, $detA = \pm 1$. Assim, $O(n) \subseteq$ **GL**(n), implicando que $O(n) = O(n) \cap$**GL**(n) é fechado também em **GL**(n). Isso mostra que $O(n)$ é um grupo de Lie linear. Ainda, sendo $O(n)$ um subgrupo fechado de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, para que ele seja compacto basta mostrar que as entradas das matrizes que o definem são limitadas. Mas se $A \in O(n)$, segue que $A \cdot A^t = A^t \cdot A = I_n$, de onde os vetores coluna (ou linha) da matriz A são ortonormais. Logo, se $A = (a_{ij})$, para cada $i \in 1, \cdots, n$ temos $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2} = 1$ e, assim, $|a_{ij}| \leq 1$ para todos $i, j \in 1, \cdots, n$, o que mostra que $O(n)$ é compacto.

Exemplo 1.3. O **grupo especial ortogonal** $SO(n)$ de todas as matrizes $A \in O(n)$ tais que $detA = 1$ é um grupo de Lie linear compacto. De fato, como $SO(n)$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, pois $SO(n) = det^{-1}(\{1\}) \cap O(n)$, e como $SO(n) \subset$ **GL**(n), segue que $SO(n)$ é fechado em **GL**(n). Ainda, como $SO(n) \subseteq O(n)$, as entradas das matrizes que o definem são limitadas, e portanto, concluímos que $SO(n)$ é um grupo de Lie linear compacto.

Observação 1.4. O grupo $SO(n)$ definido no exemplo acima é também frequentemente chamado de grupo de rotação n-dimensional. O nome é inspirado no fato de $SO(2)$ consistir precisamente das rotações planares

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

com $\theta \in [0, 2\pi)$. De fato, claramente $R_\theta \in SO(2)$, para todo $\theta \in [0, 2\pi)$. Agora, se

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in SO(2) \subseteq O(2),$$

então $a^2 + b^2 = c^2 + d^2 = 1$, $ac + bd = 0$ e $detA = ad - bc = 1$. Assim, existem $\phi, \varphi \in [0, 2\pi)$ tais que $a = \cos\phi$, $b = \sin\phi$, $c = \sin\varphi$ e $d = \cos\varphi$. Ainda,

$$1 = ad - bc = \cos\phi\cos\varphi - \sin\phi\sin\varphi = \cos(\phi + \varphi)$$

e

$$0 = ac + bd = \cos\phi\sin\varphi + \sin\phi\cos\varphi = \sin(\phi + \varphi).$$

Então $\phi + \varphi = 0$ ou $\phi + \varphi = 2\pi$. Logo,

$$A = \begin{bmatrix} \cos(-\varphi) & \sin(-\varphi) \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(2\pi-\varphi) & \sin(2\pi-\varphi) \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = R_\varphi,$$

mostrando que todo elemento de $SO(2)$ é uma rotação planar. Dessa forma, podemos ainda identificar $SO(2)$ com $S^1 = \{e^{i\theta} \in \mathbb{C}; \theta \in [0, 2\pi)\}$, que pode também ser identificado com o intervalo $[0, 2\pi)$, por meio de $R_\theta \mapsto e^{i\theta} \mapsto \theta$. Tais identificações serão usadas de forma natural em todo o texto. De maneira análoga, podemos mostrar que $O(2)$ é gerado por $SO(2)$ e κ, onde

$$\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

já que se $A \in O(2)\backslash SO(2)$, então existe $\theta \in [0, 2\pi)$ tal que $A = \kappa R_\theta$.

Exemplo 1.5. Todo grupo finito é um grupo de Lie linear compacto. De fato, seja G um grupo finito com n elementos e com a operação $*$. Denotemos $G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ e consideremos a função

$$\begin{array}{rcccccl} \psi: & G & \longrightarrow & S_G & & & \\ & a_i & \longmapsto & \sigma_i: & G & \longrightarrow & G \\ & & & & a_j & \longmapsto & a_i * a_j \end{array},$$

onde S_G é o grupo das permutações de G em G. Vamos, primeiramente, mostrar que ψ é um homomorfismo de grupos. Sejam a_i, $a_k \in G$. Como G é grupo, existe $l \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $a_i * a_k = a_l$. Assim, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\sigma_l(a_j) = a_l * a_j = (a_i * a_k) * a_j = a_i * (a_k * a_j) = a_i * \sigma_k(a_j) = (\sigma_i \circ \sigma_k)(a_j),$$

ou seja,

$$\psi(a_i * a_k) = \psi(a_l) = \sigma_l = \sigma_i \circ \sigma_k = \psi(a_i) \circ \psi(a_k),$$

mostrando que ψ é um homomorfismo de grupos. Além disso, ψ é uma função injetora, pois se $a_i,\ a_k \in G$ são tais que $\psi(a_i) = \psi(a_k)$, então $\sigma_i = \sigma_k$, isto é, $\sigma_i(a_j) = \sigma_k(a_j)$, para todo $j \in \{1, \cdots, n\}$, inclusive para j_0 tal que a_{j_0} é o elemento neutro de G. Logo, $a_i * a_{j_0} = a_k * a_{j_0}$, donde, $a_i = a_k$. Assim, $\psi : G \to H = \psi(G)$ é um isomorfismo de grupos. Mostremos agora que H é isomorfo a um subgrupo de **GL**(n) . Consideremos a função

$$\begin{array}{rcl} \xi : H & \longrightarrow & \boldsymbol{GL}(n) \\ \sigma_k & \longmapsto & P^{\sigma_k} = (P_{ij}^{\sigma_k}) \end{array},$$

onde

$$P_{ij}^{\sigma_k} = \delta_{a_i \sigma_k(a_j)} = \begin{cases} 1, \text{ se } a_i = \sigma_k(a_j) \\ 0, \text{ se } a_i \neq \sigma_k(a_j) \end{cases}.$$

Observemos que como cada σ_k é uma bijeção, se $a_i = \sigma_k(a_j)$, então $\sigma_k(a_l) \neq a_i$, para todo $l \in \{1, \cdots, n\}$ com $l \neq j$. Ainda, $\sigma_k(a_j) \neq a_t$ para todo $t \in \{1, \cdots, n\}$ com $t \neq i$. Assim, P^{σ_k} é uma permutação das colunas (ou linhas) da matriz identidade, donde $det(P^{\sigma_k}) = \pm 1$ para todo $k \in \{1, \cdots, n\}$, mostrando que $P^{\sigma_k} \in$ **GL**(n) . Logo, ξ está bem definida. Para provar que ξ é um homomorfismo, tomemos $\sigma_k,\ \sigma_l \in H$. Então

$$\xi(\sigma_k \circ \sigma_l) = P^{\sigma_k \circ \sigma_l} = (P_{ij}^{\sigma_k \circ \sigma_l}) = (\delta_{a_i\ \sigma_k(\sigma_l(a_j))}),$$

donde $P_{ij}^{\sigma_k \circ \sigma_l} = 1$ se $a_i = \sigma_k(\sigma_l(a_j))$ e $P_{ij}^{\sigma_k \circ \sigma_l} = 0$ caso contrário. Além disso, por definição de multiplicação de matrizes, $\xi(\sigma_k) \cdot \xi(\sigma_l) = C$ para $C = (c_{ij})$, onde

$$c_{ij} = \sum_{t=1}^{n} P_{it}^{\sigma_k} \cdot P_{tj}^{\sigma_l} = \sum_{t=1}^{n} \delta_{a_i \sigma_k(a_t)} \cdot \delta_{a_t \sigma_l(a_j)}.$$

Assim, $c_{ij} = 1$ se $a_i = \sigma_k(\sigma_l(a_j))$ e $c_{ij} = 0$ caso contrário. Portanto, $\xi(\sigma_k \circ \sigma_l) = C = \xi(\sigma_k) \cdot \xi(\sigma_l)$, mostrando que ξ é um homomorfismo de grupos. Para a injetividade, se $\sigma_k,\ \sigma_l \in H$ são tais que $\xi(\sigma_k) = \xi(\sigma_l)$, então

$$\delta_{a_i \sigma_k(a_j)} = P_{ij}^{\sigma_k} = P_{ij}^{\sigma_l} = \delta_{a_i \sigma_l(a_j)},$$

para todos $i,\ j \in \{1, \cdots, n\}$. Mas se existe $j \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\sigma_k(a_j) \neq \sigma_l(a_j)$, então existe $t \in \{1, \cdots, n\}$ tal que $\sigma_k(a_j) = a_t \neq \sigma_l(a_j)$, donde

$$1 = \delta_{a_t \sigma_k(a_j)} \neq \delta_{a_t \sigma_l(a_j)} = 0,$$

o que não ocorre. Portanto, ξ é um homomorfismo injetor e podemos concluir que H é isomorfo a $\xi(H)$, donde segue que G é isomorfo a $\xi(H)$. Ademais, como o conjunto gerado pelas permutações das colunas da matriz I_n é finito e $\mathbb{R}^{n^2}$ é Hausdorff, $\xi(H)$ é um grupo de Lie linear. A compacidade de $\xi(H)$ segue pois cada P^{σ_k} possui apenas entradas 1 e 0. Portanto, G é um grupo de Lie linear compacto.

Exemplo 1.6. Segue diretamente do exemplo anterior que o grupo cíclico $\mathbb{Z}_n$ e o grupo diedral D_n são grupos de Lie lineares compactos. O grupo diedral D_n possui $2n$ elementos e é gerado por $\mathbb{Z}_n$ juntamente com um elemento de ordem dois que não comuta com $\mathbb{Z}_n$. Identificamos D_n com o grupo das matrizes de ordem dois gerado pela rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ e por κ, dados na Observação 1.4.

Exemplo 1.7. O toro n-dimensional $\mathbf{T}^n = S^1 \times \cdots \times S^1$ (n vezes) é um grupo de Lie linear compacto. De fato, é fácil ver que a função

$$\begin{array}{rccc} \psi: & S^1 \times \cdots \times S^1 & \longrightarrow & \boldsymbol{GL}(2n) \\ & (\theta_1, \cdots, \theta_n) & \longmapsto & \begin{bmatrix} R_{\theta_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R_{\theta_n} \end{bmatrix} \end{array}$$

é um isomorfismo de grupos sobre sua imagem. Ainda, como S^1 é fechado e limitado em $\mathbb{M}_2(\mathbb{R})$, por construção $\psi(S^1 \times \cdots \times S^1)$ é fechado e limitado em $\mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$. Mas como $\psi(S^1 \times \cdots \times S^1) \subseteq \mathbf{GL}(2n)$, $\psi(S^1 \times \cdots \times S^1)$ é fechado também em $\mathbf{GL}(2n)$ e portanto $\mathbf{T}^n$ é um grupo de Lie linear compacto.

Exemplo 1.8. Existe um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ no grupo de matrizes da forma

$$\begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \in \boldsymbol{GL}(n+1),$$

onde $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, que é fechado em $\mathbf{GL}(n+1)$. Portanto $\mathbb{R}^n$ é um grupo de Lie linear.

1.2 Representações e Ações de Grupos de Lie Lineares

Estamos interessados agora em determinar como um grupo de Lie linear Γ transforma um dado espaço vetorial. Formalizamos essa ideia com os conceitos de ação e representação de grupos, que nos permitem representar os elementos de Γ em termos de operadores lineares e reduzir nossa abordagem à álgebra linear.

Daqui em diante, exceto em menção contrária, V é um espaço vetorial real de dimensão finita. Além disso, se Γ é um grupo com a operação $*$ e $x,\ y \in \Gamma$, escrevemos $x * y = xy$ e denotamos por e_Γ o elemento neutro de Γ.

Definição 1.9. *Seja Γ um grupo de Lie linear. Dizemos que Γ age (linearmente) em V se existe uma aplicação contínua (que chamamos de **ação**)*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ & (\gamma, v) & \longmapsto & \gamma \cdot v \end{array}$$

tal que $e_\Gamma \cdot v = v$ e para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \rho_\gamma : & V & \longrightarrow & V \\ & v & \longmapsto & \gamma \cdot v \end{array}$$

é linear e satisfaz $\rho_{\gamma_1} \circ \rho_{\gamma_2} = \rho_{\gamma_1 \gamma_2}$ para todos $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$.

Notemos que para cada $\gamma \in \Gamma$ a aplicação ρ_γ é invertível. De fato,

$$\rho_\gamma \circ \rho_{\gamma^{-1}} = \rho_{\gamma\gamma^{-1}} = \rho_{e_\Gamma} = I,$$

onde I é o operador identidade. Logo, $\rho_\gamma \in \mathbf{GL}(V)$, para todo $\gamma \in \Gamma$, onde $\mathbf{GL}(V)$ é o grupo dos operadores lineares invertíveis em V.

Definição 1.10. *Seja Γ um grupo de Lie linear. Se $\rho : \Gamma \to \boldsymbol{GL}(V)$ é um homomorfismo de grupos, dizemos que ρ é uma **representação de** Γ **em** V.*

Contas simples nos mostram que dada uma ação $\cdot : \Gamma \times V \to V$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \rho : & \Gamma & \longrightarrow & \mathbf{GL}(V) \\ & \gamma & \longmapsto & \rho_\gamma \end{array}$$

é uma representação de Γ no espaço V e que dada uma representação $\rho : \Gamma \to \mathbf{GL}(V)$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ & (\gamma, v) & \longmapsto & \rho(\gamma)(v) \end{array}$$

é uma ação de Γ em V. Assim, sempre que nos referirmos a uma ação, temos uma representação associada e vice-versa.

Vejamos alguns exemplos que iremos usar no decorrer do texto:

Exemplo 1.11. Como cada grupo de Lie linear Γ é um grupo de matrizes em $\mathbf{GL}(n)$, podemos definir uma **ação natural** de Γ em $\mathbb{R}^n$ por

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \Gamma \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ & (M, v) & \longmapsto & Mv \end{array}$$

onde Mv é a multiplicação da matriz M pelo vetor v. Podemos definir também a **ação trivial** de Γ em V por

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ & (M, v) & \longmapsto & v \end{array}.$$

Exemplo 1.12. Se $\Gamma = S^1$ e $V = \mathbb{C}$, podemos definir para cada $k \in \mathbb{Z}$ a ação

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & S^1 \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\theta, z) & \longmapsto & e^{ik\theta} z \end{array}.$$

De fato, claramente a aplicação definida acima é contínua (pois é uma multiplicação de funções contínuas). Ainda, dados $\theta_1, \theta_2 \in S^1$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

(i) $e_\Gamma \cdot z_1 = 0 \cdot z_1 = e^0 z_1 = z_1$;

(ii) $\rho_{\theta_1}(z_1 + \lambda z_2) = e^{ik\theta_1}(z_1 + \lambda z_2) = e^{ik\theta_1} z_1 + \lambda e^{ik\theta_1} z_2 = \rho_{\theta_1}(z_1) + \lambda \rho_{\theta_1}(z_2)$;

(iii) $(\rho_{\theta_1} \circ \rho_{\theta_2})(z_1) = \rho_{\theta_1}(e^{ik\theta_2} z_1) = e^{ik\theta_1}(e^{ik\theta_2} z_1) = e^{ik(\theta_1+\theta_2)} z_1 = \rho_{(\theta_1+\theta_2)}(z_1)$,

mostrando que a aplicação "$\cdot$" é uma ação. Notemos que se $k = 0$ a ação é a trivial.

Exemplo 1.13. Considerando $\Gamma = O(2)$ e $V = \mathbb{C}$, para cada $k \in \mathbb{Z}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \cdot: & O(2) \times \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (\gamma, z) & \longmapsto & \gamma \cdot z = \begin{cases} e^{ik\theta} z, \text{ se } \gamma = R_\theta \in SO(2) \\ e^{-ik\theta} \overline{z}, \text{ se } \gamma = \kappa R_\theta \in \kappa SO(2) \end{cases} \end{array}$$

é uma ação. De fato, $O(2) = SO(2) \dot{\cup} \kappa SO(2)$ onde $\kappa SO(2) = \{\kappa R_\theta;\ \theta \in [0, 2\pi)\}$ e κ é como definido na Observação 1.4. Como $SO(2)$ e $\kappa SO(2)$ são fechados em $O(2)$, pelo lema da colagem a aplicação "$\cdot$" é contínua. Ainda, do fato de $\kappa(e^{ik\theta}z) = e^{-ik\theta}\overline{z}$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$, as outras condições da definição de ação também são verificadas.

1.3 Funções Invariantes

É sabido que toda função par em uma variável é uma função de x^2. Este é um exemplo trivial de funções em um anel invariante pela ação de um grupo de Lie linear com base de Hilbert $\{u\}$ onde $u(x) = x^2$. A teoria que dá suporte a tal afirmação será discutida nesta seção. Comecemos com a seguinte definição:

Definição 1.14. *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $v_0 \in V$. Consideremos o conjunto de todas as aplicações $f : U \subseteq V \to W$ de classe C^∞, definidas em alguma vizinhança U do ponto v_0. Dizemos que as aplicações $f_1 : U_1 \subseteq V \to W$ e $f_2 : U_2 \subseteq V \to W$ desse conjunto estão relacionadas, e denotamos $f_1 \sim f_2$, se existe uma vizinhança $U_0 \subseteq U_1 \cap U_2$ de v_0 tal que $f_1|_{U_0}$ e $f_2|_{U_0}$ coincidem. As classes de equivalência por essa relação são chamadas **germes** em v_0. Se f é um representante de um germe em v_0, denotamos $f : (V, v_0) \to W$.*

Comumente, confundimos um germe com seu representante. Sem perda de generalidade, assumimos v_0 sendo a origem do espaço vetorial V.

Definição 1.15. *Seja Γ um grupo de Lie linear agindo em V por meio da ação "$\cdot$". Dizemos que uma função a valores reais $f : V \to \mathbb{R}$ é invariante sob Γ ou é **Γ-invariante** se*

$$f(\gamma \cdot v) = f(v)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo $v \in V$.

Um polinômio Γ-invariante é definido da mesma forma tomando f como uma função polinomial. Se Γ for finitamente gerado, como toda representação é um homomorfismo, basta verificar a condição de invariância para um conjunto de geradores de Γ.

Denotamos o conjunto dos polinômios Γ-invariantes a valores reais por $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e dos germes Γ-invariantes de classe C^∞ de V em $\mathbb{R}$ por $\mathcal{E}_V(\Gamma)$. Como a função nula é Γ-invariante e subtração e produto de polinômios (ou germes) Γ-invariantes é ainda um polinômio (ou germe) Γ-invariante, $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ são subanéis do anel dos polinômios e dos germes, respectivamente. Assim, $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ têm estrutura de anel.

Definição 1.16. *Dizemos que um conjunto finito $\{u_1, \cdots, u_s\}$ de funções polinomiais Γ-invariantes gera $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se todo $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser escrito como uma função polinomial de $\{u_1, \cdots, u_s\}$, ou seja, se existe $h : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}$ polinomial tal que*

$$f(x) = h(u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

*com $x \in V$. Esse conjunto é chamado **Base de Hilbert** para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.*

Teorema 1.17 (Teorema de Hilbert-Weyl)**.** *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V. Então existe uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$.*

A prova do teorema acima, que é omitida neste trabalho, utiliza ferramentas de álgebra comutativa e pode ser encontrada em [20, XII, §6]. Devido a Schwarz, um resultado semelhante ao teorema anterior é válido para germes de funções Γ-invariantes e sua prova também pode ser encontrada em [20, XII, §6].

Teorema 1.18 (Teorema de Schwarz)**.** *Sejam Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V, $\{u_1, \cdots, u_s\}$ uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $f \in \mathcal{E}_V(\Gamma)$. Então existe um germe $F \in \mathcal{E}_s$ tal que*

$$f(x) = F(u_1(x), \cdots, u_s(x)),$$

onde $\mathcal{E}_s$ denota o anel dos germes de funções $F : (\mathbb{R}^s, 0) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞. Nesse caso, dizemos que $\{u_1, \cdots, u_s\}$ gera o anel $\mathcal{E}_V(\Gamma)$.

Vejamos alguns exemplos de funções invariantes.

Exemplo 1.19. Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \equiv \{-1, 1\}$ agindo em $V = \mathbb{R}$ como $-1 \cdot x = -x$ e $1 \cdot x = x$. Então f é $\mathbb{Z}_2$-invariante se, e somente se, $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, se f é uma função par. Logo, se f é um polinômio $\mathbb{Z}_2$-invariante, existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = h(x^2)$. Nesse caso, definindo $u(x) = x^2$, temos que $\{u\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$. Pelo Teorema de Schwarz, $\{u\}$ também gera o anel $\mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)$ dos germes $\mathbb{Z}_2$-invariantes.

Exemplo 1.20. Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ por meio da ação $\theta \cdot z = e^{i\theta} z$ definida no Exemplo 1.12 tomando $k = 1$. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é S^1-invariante se

$f(e^{i\theta}z) = f(z)$ para todo $\theta \in S^1$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Como $\theta \mapsto e^{i\theta}$ determina um círculo de raio 1 centrado na origem, as funções S^1-invariantes são aquelas que são constantes no círculo de raio $|z|$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Vamos mostrar que se f é um polinômio S^1-invariante, então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\overline{z})$, o que implica que $\{u\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)$, onde $u(z) = z\overline{z}$. De fato, podemos escrever

$$f(z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta, \tag{1.1}$$

com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$. Como $f(z) \in \mathbb{R}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, temos $f = \overline{f}$ e, portanto, $\overline{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}$. Ainda,

$$f(e^{i\theta}z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(e^{i\theta}z)^\alpha(\overline{e^{i\theta}z})^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\theta\alpha} z^\alpha e^{-i\theta\beta}\overline{z}^\beta = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} e^{i\theta(\alpha-\beta)} z^\alpha \overline{z}^\beta.$$

Pela condição de invariância, $a_{\alpha\beta}e^{i\theta(\alpha-\beta)} = a_{\alpha\beta}$, o que ocorre se $\alpha = \beta$ ou $a_{\alpha\beta} = 0$. Logo,

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}(z\overline{z})^\alpha,$$

com $\overline{a}_{\alpha\alpha} = a_{\alpha\alpha}$, ou seja, $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$. Tomando $h(x) = \sum_\alpha a_{\alpha\alpha}x^\alpha$, temos o desejado. Notemos ainda que, pelo Teorema de Schwarz, $\{u\}$ gera também o anel $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(S^1)$ dos germes S^1-invariantes.

Exemplo 1.21. Seja $\Gamma = O(2)$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ por meio da ação definida no Exemplo 1.13 tomando $k = 1$. Uma função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ é $O(2)$-invariante se $f(e^{i\theta}z) = f(z)$ e $f(e^{-i\theta}\overline{z}) = f(z)$ para todo $\theta \in [0, 2\pi)$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, f é em particular S^1-invariante e, pelo exemplo anterior, temos

$$f(z) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}(z\overline{z})^\alpha, \tag{1.2}$$

com $a_{\alpha\alpha} \in \mathbb{R}$. Percebamos que

$$f(e^{-i\theta}\overline{z}) = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}(e^{-i\theta}\overline{z}e^{i\theta}z)^\alpha = \sum_{\alpha} a_{\alpha\alpha}(z\overline{z})^\alpha = f(z),$$

isto é, toda função $O(2)$-invariante é da forma (1.2). Portanto o conjunto $\{u\}$, com

$u(z) = z\overline{z}$, é também uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))$ e, pelo Teorema de Schwarz, gera o anel $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(O(2))$ dos germes $O(2)$-invariantes.

Exemplo 1.22. Seja $\Gamma = D_n$ agindo em $V = \mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$ por meio da ação $R_{\frac{2\pi}{n}} \cdot z = e^{\frac{2\pi i}{n}} z$ e $\kappa \cdot z = \overline{z}$. Então para toda $f \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $f(z) = h(z\overline{z}, z^n + \overline{z}^n)$, isto é, $\{u_1,\ u_2\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$, onde $u_1(z) = z\overline{z}$ e $u_2(z) = z^n + \overline{z}^n$. De fato, como no Exemplo 1.20, escrevamos f como em (1.1), com $a_{\alpha\beta} \in \mathbb{C}$ e

$$\overline{a}_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.3}$$

Pela invariância de f em relação à rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$, temos que

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta}(e^{\frac{2\pi i}{n}(\alpha-\beta)}) z^\alpha \overline{z}^\beta = f(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = f(z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta,$$

donde

$$a_{\alpha\beta}(e^{\frac{2\pi i}{n}(\alpha-\beta)}) = a_{\alpha\beta}. \tag{1.4}$$

Pela invariância de f em relação à κ,

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \overline{z}^\alpha z^\beta = f(\overline{z}) = f(\kappa z) = f(z) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} z^\alpha \overline{z}^\beta,$$

donde

$$a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha}. \tag{1.5}$$

Assim, de (1.3) e (1.5) obtemos que $a_{\alpha\beta} = \alpha_{\beta\alpha} \in \mathbb{R}$ e, então, podemos reescrever f em (1.1) como

$$f(z) = \sum_{\alpha \leq \beta} A_{\alpha\beta}(z^\alpha \overline{z}^\beta + \overline{z}^\alpha z^\beta),$$

com $A_{\alpha\beta} = \begin{cases} a_{\alpha\beta}, & \text{se } \alpha \neq \beta \\ \dfrac{a_{\alpha\beta}}{2}, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases}$, donde $A_{\alpha\beta} \in \mathbb{R}$. Ainda, de (1.4) temos $a_{\alpha\beta} = 0$ ou

$\alpha \equiv \beta (mod\, n)$. Logo,

$$f(z) = \sum_{\alpha \leq \beta} A_{\alpha\beta}(z\overline{z})^{\alpha}(\overline{z}^{\beta-\alpha} + z^{\beta-\alpha}) = \sum_{j,k} B_{jk}(z\overline{z})^{j}(\overline{z}^{kn} + z^{kn}),$$

com $j,\ k \in \mathbb{N}$ e $B_{jk} \in \mathbb{R}$. Finalmente, usando indutivamente na igualdade acima a identidade

$$(z^{kn} + \overline{z}^{kn}) = (z^{n} + \overline{z}^{n})(z^{(k-1)n} + \overline{z}^{(k-1)n}) - (z\overline{z})^{n}(z^{(k-2)n} + \overline{z}^{(k-2)n}),$$

que é verdadeira para $k \geq 2$, obtemos

$$f(z) = \sum_{l,m} C_{lm}(z\overline{z})^{l}(z^{n} + \overline{z}^{n})^{m}$$

onde $C_{lm} \in \mathbb{R}$ com $l, m \in \mathbb{N}$. Definindo $h(x,y) = \sum_{l,m} C_{lm}x^{l}y^{m}$, temos o desejado. Pelo Teorema de Schwarz, $\{u_1, u_2\}$ também gera o anel $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}(D_n)$ dos germes D_n-invariantes.

Exemplo 1.23. Seja $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ por meio da ação diagonal

$$\theta \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta}z_1, e^{i\theta}z_2).$$

Se $f : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial S^1-invariante, então existe uma função polinomial $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(z_1, z_2) = h(|z_1|^2, |z_2|^2, Re(z_1\overline{z}_2), Im(z_1\overline{z}_2)),$$

ou seja, definindo $v_1(z_1,z_2) = |z_1|^2$, $v_2(z_1,z_2) = |z_2|^2$, $v_3(z_1,z_2) = Re(z_1\overline{z}_2)$ e $v_4(z_1,z_2) = Im(z_1\overline{z}_2)$, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ constitui uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$, sendo o mesmo conjunto gerador para $\mathcal{E}_{\mathbb{C}^2}(S^1)$. De fato, escrevamos f como

$$f(z_1, z_2) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^{\alpha}\overline{z}_1^{\beta} z_2^{\gamma}\overline{z}_2^{\delta}, \tag{1.6}$$

onde $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{C}$ e $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$. Como f toma valores reais, ou seja, $f = \overline{f}$, segue que

$\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$. Além disso, como $f(\theta \cdot (z_1, z_2)) = f(z_1, z_2)$ então

$$\sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} e^{i\theta(\alpha-\beta+\gamma-\delta)} z_1^{\alpha} \overline{z}_1^{\beta} z_2^{\gamma} \overline{z}_2^{\delta} = \sum_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} z_1^{\alpha} \overline{z}_1^{\beta} z_2^{\gamma} \overline{z}_2^{\delta},$$

para todo $\theta \in S^1$ e todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, e isso ocorre se $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou se $\alpha - \beta + \gamma - \delta = 0$. Portanto, $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = 0$ ou $\alpha - \beta = \delta - \gamma$. Logo, se $a_{\alpha\beta\gamma\delta} \neq 0$ então

$$\begin{cases} \alpha \geq \beta \Rightarrow \delta - \gamma \geq 0 \Rightarrow \delta \geq \gamma \\ \alpha < \beta \Rightarrow \delta - \gamma < 0 \Rightarrow \delta < \gamma \end{cases}$$

e assim, fatorando as potências de $z_1\overline{z}_1$ e $z_2\overline{z}_2$ em (1.6), obtemos

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} \overline{z}_1^{\beta-\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} z_2^{\gamma-\delta} + \sum_{\alpha\geq\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\beta} z_1^{\alpha-\beta} (z_2\overline{z}_2)^{\gamma} \overline{z}_2^{\delta-\gamma} \\ &= \sum_{\alpha<\beta} a_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} \overline{z}_1^{\beta-\alpha} z_2^{\gamma-\delta} + \sum_{\alpha\leq\beta} a_{\beta\alpha\delta\gamma} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} z_1^{\beta-\alpha} \overline{z}_2^{\gamma-\delta}, \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade segue renomeando as potências da segunda parcela da soma. Escrevendo $\beta - \alpha = \gamma - \delta = p$, $a_{\alpha\beta\gamma\delta} = x_{\alpha\beta\gamma\delta} + iy_{\alpha\beta\gamma\delta}$ com $x_{\alpha\beta\gamma\delta}, y_{\alpha\beta\gamma\delta} \in \mathbb{R}$ e lembrando que $\overline{a_{\alpha\beta\gamma\delta}} = a_{\beta\alpha\delta\gamma}$, a equação acima torna-se

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{\alpha<\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} + iy_{\alpha\beta\gamma\delta}) (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} (\overline{z}_1 z_2)^{p} \\ &\quad + \sum_{\alpha\leq\beta} (x_{\alpha\beta\gamma\delta} - iy_{\alpha\beta\gamma\delta}) (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} (z_1 \overline{z}_2)^{p} \\ &= \sum_{\alpha<\beta} x_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} ((\overline{z}_1 z_2)^{p} + (z_1\overline{z}_2)^{p}) \\ &\quad + \sum_{\alpha<\beta} iy_{\alpha\beta\gamma\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta} ((\overline{z}_1 z_2)^{p} - (z_1\overline{z}_2)^{p}) \\ &\quad + x_{\alpha\alpha\delta\delta} (z_1\overline{z}_1)^{\alpha} (z_2\overline{z}_2)^{\delta}, \end{aligned}$$

onde a parcela referente à $\alpha = \beta$ segue pois $p = \beta - \alpha = 0$ e, como $\overline{a_{\alpha\alpha\delta\delta}} = a_{\alpha\alpha\delta\delta}$, $y_{\alpha\alpha\delta\delta} = 0$. Observemos que se z é um número complexo qualquer, então para $p \geq 2$ temos

$$z^p + \overline{z}^p = (z + \overline{z})(z^{p-1} + \overline{z}^{p-1}) - (z\overline{z})(z^{p-2} + \overline{z}^{p-2})$$

e

$$i(z^p - \overline{z}^p) = i(z - \overline{z})(z^{p-1} + \overline{z}^{p-1}) + i(z\overline{z})(z^{p-2} - \overline{z}^{p-2}).$$

Portanto, usando $z = \overline{z}_1 z_2$ nas identidades acima, podemos reescrever f como

$$f(z_1, z_2) = \sum_{j,k,l,m} A_{jklm}(z_1\overline{z}_1)^j(z_2\overline{z}_2)^k(\overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2)^l(i(\overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2))^m,$$

onde $A_{jklm} \in \mathbb{R}$. Como $i(\overline{z}_1 z_2 - z_1\overline{z}_2) = 2Im(z_1\overline{z}_2)$ e $(\overline{z}_1 z_2 + z_1\overline{z}_2) = 2Re(z_1\overline{z}_2)$, temos, finalmente,

$$\begin{aligned} f(z_1, z_2) &= \sum_{j,k,l,m} B_{jklm}(z_1\overline{z}_1)^j(z_2\overline{z}_2)^k(Re(z_1\overline{z}_2))^l(Im(z_1\overline{z}_2))^m \\ &= \sum_{j,k,l,m} B_{jklm}|z_1|^{2j}|z_2|^{2k}(Re(z_1\overline{z}_2))^l(Im(z_1\overline{z}_2))^m, \end{aligned}$$

com $B_{jklm} \in \mathbb{R}$ e $j, k, l, m \in \mathbb{N}$, como desejado. Em coordenadas reais, via o isomorfismo $z_1 \simeq (x, y)$ e $z_2 \simeq (z, w)$ obtemos

$$f(x, y, z, w) = \sum_{j,k,l,m} B_{jklm}(x^2 + y^2)^j(z^2 + w^2)^k(xz + yw)^l(yz - xw)^m,$$

com $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$, $B_{jklm} \in \mathbb{R}$ e $j, k, l, m \in \mathbb{N}$. Portanto, o conjunto $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$, com $u_1(x, y, z, w) = x^2 + y^2$, $u_2(x, y, z, w) = z^2 + w^2$, $u_3(x, y, z, w) = xz + yw$ e $u_4(x, y, z, w) = yz - xw$, forma uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^4}(S^1)$.

Determinar uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ pode ser extremamente difícil e, em muitos casos, envolve manipulação de combinações algébricas e cálculos extensos. Quando Γ é um grupo finitamente gerado, o software Singular [16] é uma ferramenta facilitadora, já que exibe uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se fornecidos ao programa os geradores de Γ em sua forma matricial.

1.4 Aplicações Equivariantes

Apresentamos agora um conjunto com estrutura de módulo sobre o anel dos invariantes $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e que é a base para a descrição formal da ocorrência de simetrias em sistemas dinâmicos. Esse módulo é formado pelas aplicações ditas equivariantes com relação à ação de um grupo Γ no espaço V.

Definição 1.24. *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e assuma que o grupo de Lie linear Γ age em V por meio da ação "$\cdot$" e em W por meio da ação "$*$". Dizemos que uma* *aplicação $F : V \to W$ comuta com Γ ou é Γ-**equivariante** , se*

$$F(\gamma \cdot v) = \gamma * (F(v)).$$

*para todo $v \in V$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Se $W = V$ e a ação "$*$"coincidir com a ação "$\cdot$", dizemos que F é **puramente** Γ-**equivariante**.*

Uma aplicação polinomial Γ-equivariante é definida da mesma forma tomando F polinomial em cada entrada. Denotamos por $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ o conjunto das aplicações polinomiais Γ-equivariantes de V em W e por $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ o conjunto dos germes de aplicações Γ-equivariantes de classe C^∞ de V em W. Quando as aplicações são puramente equivariantes, denotamos $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ simplesmente por $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V}(\Gamma)$, respectivamente.

Proposição 1.25. *Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e consideremos o grupo de Lie linear Γ agindo em V por meio da ação "$\cdot$" e em W por meio da ação "$*$". Se $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, então $fg \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$, onde $fg : V \to W$ é a aplicação produto.*

Demonstração: Para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo $v \in V$, como $f(v) \in \mathbb{R}$ e a ação de Γ em W é linear, temos

$$\begin{aligned} (fg)(\gamma \cdot v) &= f(\gamma \cdot v)g(\gamma \cdot v) \\ &= f(v)(\gamma * g(v)) \\ &= \gamma * (f(v)g(v)) \\ &= \gamma * (fg)(v), \end{aligned}$$

mostrando que fg é Γ-equivariante. □

Analogamente, nas mesmas condições da proposição acima, se $f \in \mathcal{E}_V(\Gamma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$, então $fg \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$. Com isto, é fácil verificar que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ são módulos sobre os anéis $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{E}_V(\Gamma)$, respectivamente. Assim, a seguinte definição faz sentido:

Definição 1.26. *Dizemos que as aplicações polinomiais Γ-equivariantes $g_1, \cdots, g_r$ geram o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ se cada aplicação $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ pode ser escrita como*

$$g = f_1 g_1 + \cdots + f_r g_r,$$

para certos $f_1, \cdots, f_r \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma) = \mathcal{P}_V(\Gamma)\{g_1, \cdots, g_r\}$.

De modo análogo, definimos geradores do módulo $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{E}_V(\Gamma)$.

O teorema seguinte é a versão equivariante de uma junção dos Teoremas de Hilbert-Weyl e de Schwarz. Sua prova também será omitida no texto e pode ser encontrada em [20, XII, §6].

Teorema 1.27. *Seja Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V e em W. Então:*

(i) Existe um conjunto finito de aplicações polinomiais Γ-equivariantes $\{g_1, \cdots, g_r\}$ que gera o módulo $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$;

(ii) Se $\{g_1, \cdots, g_r\}$ é um conjunto que gera $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, então $\{g_1, \cdots, g_r\}$ é um conjunto de geradores para o módulo $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$ sobre o anel $\mathcal{E}_V(\Gamma)$. Nesse caso, escrevemos $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma) = \mathcal{E}_V(\Gamma)\{g_1, \cdots, g_r\}$.

Encerramos esta seção com alguns exemplos para o teorema acima no caso em que os módulos são puramente equivariantes.

Exemplo 1.28. Consideremos $\Gamma = \mathbb{Z}_2$ agindo em $V = \mathbb{R}$ sob a ação dada no Exemplo 1.19. Temos que se $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é $\mathbb{Z}_2$-equivariante, então $g(-x) = -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, g é uma função ímpar. Logo, $g(x) = h(x^2)x$ com $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Como $u(x) = x^2$ é $\mathbb{Z}_2$-invariante e $g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g_1(x) = x$ é $\mathbb{Z}_2$-equivariante, segue que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) = \mathcal{P}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)\{g_1\}$. Ainda, aplicando o item (ii) do Teorema 1.27, segue que $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2) = \mathcal{E}_{\mathbb{R}}(\mathbb{Z}_2)\{g_1\}$.

Exemplo 1.29. Consideremos $\Gamma = S^1$ agindo em $V = \mathbb{C}$ sob a ação dada no Exemplo 1.20 tomando $k = 1$. Vamos mostrar que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(S^1) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(S^1)\{g_1, g_2\}$, onde $g_1,\ g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são tais que $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = iz$ e, consequentemente, $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(S^1) = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(S^1)\{g_1, g_2\}$. Para isso, tomemos $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial S^1-equivariante e a escrevamos da forma

$$g(z) = \sum_{j,l} b_{jl} z^j \overline{z}^l \tag{1.7}$$

com $b_{jl} \in \mathbb{C}$. Temos que $g(\theta \cdot z) = \theta \cdot g(z)$ para todo $\theta \in S^1$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Assim, como

$$g(\theta \cdot z) = g(e^{i\theta} z) = \sum_{j,l} b_{jl} (e^{i\theta j} z^j)(\overline{e^{i\theta l} z^l}) = \sum_{j,l} b_{jl} e^{i\theta(j-l)} z^j \overline{z}^l,$$

segue que

$$\sum_{j,l} b_{jl} e^{i\theta(j-l)} z^j \overline{z}^l = g(\theta \cdot z) = \theta \cdot g(z) = e^{i\theta} \sum_{j,l} b_{jl} z^j \overline{z}^l = \sum_{j,l} b_{jl} e^{i\theta} z^j \overline{z}^l,$$

donde $b_{jl} e^{i\theta(j-l)} = b_{jl} e^{i\theta}$ para todos $j, l \in \mathbb{N}$ e todo $\theta \in S^1$. Logo, $b_{jl} = 0$ ou $j = l+1$, implicando que

$$g(z) = \sum_{l} b_{l+1\ l} (z\overline{z})^l z,$$

com $b_{l+1\ l} \in \mathbb{C}$. Escrevendo $b_{l+1\ l} = x_l + iy_l$ com $x_l, y_l \in \mathbb{R}$, obtemos

$$g(z) = \sum_{l} x_l (z\overline{z})^l z + \sum_{l} y_l (z\overline{z})^l iz.$$

Portanto, tomando $p, q : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como $p(z) = \sum_{l} x_l (z\overline{z})^l$ e $q(z) = \sum_{l} y_l (z\overline{z})^l$, com $x_l, y_l \in \mathbb{R}$, escrevemos $g(z) = p(z)z + q(z)iz$. Do Exemplo 1.20 e do fato de $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dadas por $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = iz$ serem S^1-equivariantes, segue o desejado.

Exemplo 1.30. Seja $\Gamma = D_n$ agindo em $V = \mathbb{C}$ por meio da ação dada no Exemplo 1.22. Vamos mostrar que $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{\mathbb{C}}(D_n) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)\{g_1, g_2\}$, onde $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são tais que $g_1(z) = z$ e $g_2(z) = \overline{z}^{n-1}$ (observemos que g_1 e g_2 definidas desta forma são D_n-equivariantes), o que implica em $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{\mathbb{C}}(D_n) = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(D_n)\{g_1, g_2\}$. Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial D_n-equivariante. Podemos escrevê-la como em (1.7), com $b_{jl} \in \mathbb{C}$. Pela equivariância de g em relação à κ, vale que

$$\sum_{j,l} b_{jl} \overline{z}^j z^l = g(\overline{z}) = g(\kappa \cdot z) = \kappa \cdot g(z) = \overline{g(z)} = \sum_{j,l} \overline{b}_{jl} \overline{z}^j z^l,$$

donde $b_{jl} = \overline{b}_{jl}$, ou seja, $b_{jl} \in \mathbb{R}$. Ainda, pela equivariância de g em relação à rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$, temos que

$$\sum_{j,l} b_{jl} (e^{\frac{2\pi i}{n}(j-l)}) z^j \overline{z}^l = g(e^{\frac{2\pi i}{n}} z) = g(R_{\frac{2\pi}{n}} \cdot z) = R_{\frac{2\pi}{n}} \cdot g(z) = e^{\frac{2\pi i}{n}} \sum_{j,l} b_{jl} z^j \overline{z}^l = \sum_{j,l} b_{jl} e^{\frac{2\pi i}{n}} z^j \overline{z}^l,$$

donde $b_{jl} = 0$ ou $j - l \equiv 1 (mod\, n)$. Logo, fatorando $z\overline{z}$ em (1.7), segue que

$$g(z) = \sum_{l \leq j} b_{jl} (z\overline{z})^l z^{j-l} + \sum_{j<l} b_{jl} (z\overline{z})^j \overline{z}^{l-j} = \sum_{l,k} c_{lk} (z\overline{z})^l z^{nk+1} + \sum_{j,t} d_{jt} (z\overline{z})^j \overline{z}^{nt-1},$$

para $c_{lk}, d_{jt} \in \mathbb{R}$ com $l, k, j, t \in \mathbb{N}$ e $t \geq 1$. Das identidades

$$z^{nk+1} = (z^n + \overline{z}^n)z^{n(k-1)+1} - (z\overline{z})^n z^{n(k-2)+1}, \text{ para } k \geq 2$$

e

$$\overline{z}^{nt-1} = (z^n + \overline{z}^n)\overline{z}^{n(t-1)-1} - (z\overline{z})^n \overline{z}^{n(t-2)-1}, \text{ para } t \geq 3,$$

observamos que os termos z^{nk+1} e $\overline{z}^{nt-1}$ são redutíveis para $k \geq 2$ e para $t \geq 3$, respectivamente. Além disso, para $k = 1$ e $t = 2$, temos

$$z^{n+1} = (z^n + \overline{z}^n)z - (z\overline{z})\overline{z}^{n-1} \quad \text{e} \quad \overline{z}^{2n-1} = (z^n + \overline{z}^n)\overline{z}^{n-1} - (z\overline{z})^{n-1}z.$$

Portanto,

$$g(z) = \sum_{r,s} A_{rs}(z\overline{z})^r(z^n + \overline{z}^n)^s z + \sum_{u,v} B_{uv}(z\overline{z})^u(z^n + \overline{z}^n)^v \overline{z}^{n-1}, \tag{1.8}$$

com $A_{rs}, B_{uv} \in \mathbb{R}$ e $r, s, u, v \in \mathbb{N}$. Pelo Exemplo 1.22, as funções $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ dadas por $f_1(z) = \sum_{r,s} A_{rs}(z\overline{z})^r(z^n + \overline{z}^n)^s$ e $f_2(z) = \sum_{u,v} B_{uv}(z\overline{z})^u(z^n + \overline{z}^n)^v$ estão em $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ e temos, portanto, o desejado.

1.5 Semi-invariantes e Reversíveis-Equivariantes

Como já mencionado, nosso objetivo é desenvolver a teoria de formas normais para Hamiltonianos de campos vetoriais definidos em um espaço vetorial simplético. Eventualmente, tais sistemas podem possuir simetrias e antissimetrias e, nesse caso, os Hamiltonianos do campo podem herdar a estrutura simétrica do contexto, o que reflete em sua forma normal. Tal estudo será apresentado na Seção 3.5 e um primeiro passo nessa direção é a determinação das funções semi-invariantes e das aplicações reversíveis-equivariantes sob a ação do grupo formado por todas as simetrias e antissimetrias presentes no sistema.

Nesta seção, Γ é um grupo de Lie linear agindo no espaço vetorial V de dimensão finita por meio da ação "$\cdot$". Seja

$$\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$$

um homomorfismo de grupos, onde $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ com a operação de multiplicação induzida de $\mathbb{R}$. Vamos denotar por Γ_+ o núcleo de σ e por Γ_- o complementar de Γ_+ em Γ. Assim, Γ_+ é um subgrupo normal de Γ, que é próprio se σ é sobrejetor. Obviamente, o grupo Γ_+ depende da escolha de σ, caso existam mais de um homomorfismo de Γ em $\mathbb{Z}_2$.

Definição 1.31. *Seja $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos. Uma função $f : V \to \mathbb{R}$ é chamada Γ_σ-**semi-invariante**, se*

$$f(\gamma \cdot x) = \sigma(\gamma) f(x),$$

*para todo $x \in V$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Uma aplicação $g : V \to V$ é dita Γ_σ-**reversível-equivariante** se*

$$g(\gamma \cdot x) = \sigma(\gamma)(\gamma \cdot g(x)),$$

*para todo $x \in V$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Em particular, se $\gamma \in \Gamma$ é tal que $\sigma(\gamma) = 1$, dizemos que f é γ-**invariante** e g é γ-**equivariante**. No caso em que $\sigma(\gamma) = -1$, dizemos que f é γ-**anti-invariante** e g é γ-**reversível**.*

Denotamos por $\mathcal{Q}_V(\Gamma_\sigma)$ o conjunto das funções polinomiais Γ_σ-semi-invariantes, por $\mathcal{F}_V(\Gamma_\sigma)$ o conjunto dos germes de funções $f : (V, 0) \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ que são Γ_σ-semi-invariantes, por $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_\sigma)$ o conjunto das aplicações polinomiais Γ_σ-reversíveis-equivariantes e por $\overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma_\sigma)$ o conjunto dos germes de aplicações $g : (V, 0) \to V$ de classe C^∞ que são Γ_σ-reversíveis-equivariantes.

Na Definição 1.31, se tivéssemos considerado σ como o homomorfismo trivial, f se resumiria a uma função Γ-invariante e g a uma aplicação puramente Γ-equivariante. Além disso, quando σ é um epimorfismo, podemos enxergar uma função Γ_σ-semi-invariante e uma aplicação Γ_σ-reversível-equivariante como aplicações Γ-equivariantes entre espaços com ações distintas de Γ. De fato, consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \cdot_\sigma : & \Gamma \times V & \longrightarrow & V \\ & (\gamma, v) & \longmapsto & \gamma \cdot_\sigma v = \sigma(\gamma)(\gamma \cdot v) \end{array}.$$

Notemos que "$\cdot_\sigma$" define uma ação de Γ em V, chamada de **ação σ-dual** de Γ. Assim, se $g : V \to V$ é uma aplicação Γ_σ-reversível-equivariante, então

$$g(\gamma \cdot v) = \sigma(\gamma)(\gamma \cdot g(v)) = \gamma \cdot_\sigma g(v),$$

para todo $\gamma \in \Gamma$ e todo $v \in V$, ou seja, g é uma aplicação Γ-equivariante tomando $W = V$ e $* = \cdot_\sigma$ na Definição 1.24. Da mesma forma, podemos definir a ação de Γ em $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccl} \star_\sigma : & \Gamma \times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\gamma, x) & \longmapsto & \gamma \star_\sigma x \ = \sigma(\gamma)x \end{array}$$

de modo que se f é uma função Γ_σ-semi-invariante, então

$$f(\gamma \cdot v) = \sigma(\gamma) f(v) = \gamma \star_\sigma f(v),$$

implicando que f é uma aplicação Γ-equivariante tomando $W = \mathbb{R}$ e $* = \star_\sigma$ na Definição 1.24.

Logo, dos resultados válidos para aplicações Γ-equivariantes, segue que $\mathcal{Q}_V(\Gamma_\sigma)$, $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_\sigma)$ têm estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $\mathcal{F}_V(\Gamma_\sigma)$, $\overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma_\sigma)$ têm estrutura de módulo sobre o anel $\mathcal{E}_V(\Gamma)$ herdadas de $\overrightarrow{\mathcal{P}}_{V,W}(\Gamma)$ e de $\overrightarrow{\mathcal{E}}_{V,W}(\Gamma)$, respectivamente. Assim sendo, podemos enunciar o próximo teorema, que é consequência imediata do Teorema 1.27.

Teorema 1.32. *Sejam Γ um grupo de Lie linear compacto agindo em V e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos. Então:*

(i) Os módulos $\mathcal{Q}_V(\Gamma_\sigma)$ e $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_\sigma)$ são finitamente gerados sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$;

(ii) Se $\{g_1, \cdots, g_r\}$ gera o módulo $\mathcal{Q}_V(\Gamma_\sigma)$ (respectivamente $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_\sigma)$) sobre o anel $\mathcal{P}_V(\Gamma)$, então $\{g_1, \cdots, g_r\}$ é um conjunto de geradores para o módulo $\mathcal{F}_V(\Gamma_\sigma)$ (respectivamente $\overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma_\sigma)$) sobre o anel $\mathcal{E}_V(\Gamma)$.

Dado esse formalismo algébrico, podemos enunciar a seguinte definição:

Definição 1.33. *Sejam Γ um grupo de Lie linear e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo de grupos. Consideremos $f \in \mathcal{Q}_V(\Gamma_\sigma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_V(\Gamma_\sigma)$ (respectivamente, $f \in \mathcal{F}_V(\Gamma_\sigma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{F}}_V(\Gamma_\sigma)$). Se $\gamma \in \Gamma_+ = \ker \sigma$, dizemos que γ é uma **simetria** de f e de g. Se $\gamma \in \Gamma_- = \Gamma \backslash \Gamma_+$, dizemos que γ é uma **antissimetria** de f e de g.*

Uma adaptação dessa definição pode ser feita para o caso em que $f \in \mathcal{P}_V(\Gamma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{P}}_V(\Gamma)$ (respectivamente $f \in \mathcal{E}_V(\Gamma)$ e $g \in \overrightarrow{\mathcal{E}}_V(\Gamma)$). Nesse caso, dizemos que f e g possuem apenas simetrias, ou seja, todo $\gamma \in \Gamma$ é uma simetria de f e de g.

Do fato de σ ser um homomorfismo de grupos, segue que:
(i) o produto de duas simetrias ou de duas antissimetrias é uma simetria;
(ii) o produto de uma simetria por uma antissimetria é uma antissimetria;
(iii) o inverso de uma simetria (antissimetria) é uma simetria (antissimetria).

Logo, para cada $\gamma \in \Gamma_+$, temos $\gamma\Gamma_+ = \Gamma_+$ e para cada $\delta \in \Gamma_-$, temos $\delta\Gamma_+ \subseteq \Gamma_-$. Ainda, se $\gamma \in \Gamma_-$ então $\gamma = \delta(\delta^{-1}\gamma) \in \delta\Gamma_+$. Daí, $\Gamma_- = \delta\Gamma_+$ para cada $\delta \in \Gamma_-$ fixado. Assim, se $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ é um epimorfismo, existem duas classes laterais de Γ_+ em Γ, a saber, Γ_+ e Γ_-.

Exemplo 1.34. Consideremos a ação de $\Gamma = O(2)$ em $V = \mathbb{C}$ definida no Exemplo 1.13 tomando $k = 1$. Definamos $\sigma : O(2) \to \mathbb{Z}_2$ o epimorfismo tal que $\sigma(\kappa R_\theta) = -1$ e $\sigma(R_\theta) = 1$ para todo $R_\theta \in SO(2)$, ou seja, $\ker \sigma = SO(2)$. Vamos mostrar que $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}(O(2)_\sigma) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(O(2))\{g_1\}$ e, consequentemente, $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}(O(2)_\sigma) = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(O(2))\{g_1\}$, onde $g_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é tal que $g_1(z) = iz$. Seja $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial $O(2)_\sigma$-reversível-equivariante, ou seja,

$$g(\kappa \cdot z) = -\kappa \cdot g(z) \ \text{ e } \ g(R_\theta \cdot z) = R_\theta \cdot g(z),$$

para todo $R_\theta \in SO(2)$ e todo $z \in \mathbb{C}$. Podemos escrever g na forma (1.7), com $b_{jl} \in \mathbb{C}$. Cálculos diretos nos mostram que, como $g(\kappa \cdot z) = -\kappa \cdot g(z)$, então b_{jl} é um imaginário puro. Ainda, para todo $R_\theta \in SO(2)$ e todo $z \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{j,l} b_{jl} e^{i\theta(j-l)} z^j \overline{z}^l = g(R_\theta \cdot z) = R_\theta \cdot g(z) = \sum_{j,l} b_{jl} e^{i\theta} z^j \overline{z}^l,$$

implicando que $j = l + 1$ ou $b_{jl} = 0$. Logo, de (1.7) e escrevendo $b_{l+1\ l} = a_l i$, temos

$$g(z) = \sum_l a_l i z^{l+1} \overline{z}^l = \sum_l a_l (z\overline{z})^l iz,$$

com $a_l \in \mathbb{R}$. Tomando $p : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por $p(z) = \sum_l a_l (z\overline{z})^l$, que é $O(2)$-invariante pelo Exemplo 1.21, escrevemos $g(z) = p(z)iz$. E como $g_1 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $g_1(z) = iz$ é $O(2)_\sigma$-reversível-equivariante, segue o desejado.

Exemplo 1.35. Seja $\Gamma = D_n$ agindo em $V = \mathbb{C}$ por meio da ação dada no Exemplo 1.22. Definamos o epimorfismo $\sigma : D_n \to \mathbb{Z}_2$ de maneira que $\sigma(\kappa) = -1$ e $\sigma(R_{\frac{2\pi}{n}}) = 1$, ou seja, $\ker\sigma = \mathbb{Z}_n$. Se tomarmos $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma aplicação polinomial $(D_n)_\sigma$-reversível-equivariante, temos que

$$g(\kappa \cdot z) = -\kappa \cdot g(z) \ \text{ e } \ g(R_{\frac{2\pi}{n}} \cdot z) = R_{\frac{2\pi}{n}} \cdot g(z),$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como no exemplo anterior, escrevendo g como em (1.7), a reversibilidade com respeito à κ nos dá que b_{jl} é um imaginário puro. A equivariância de g com respeito à rotação $R_{\frac{2\pi}{n}}$ nos fornece as mesmas contas que as do Exemplo 1.30, apenas fazendo a adaptação $b_{jl} = a_{jl}i$, com $a_{jl} \in \mathbb{R}$. Assim, g é como em (1.8) com A_{rs}, B_{uv} imaginários puros, o que nos dá

$$g(z) = f_1(z)iz + f_2(z)i\overline{z}^{n-1},$$

para $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$ como definidos no Exemplo 1.30. Portanto, $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}((D_n)_\sigma) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)\{g_1, g_2\}$ onde $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são tais que $g_1(z) = iz$ e $g_2(z) = i\overline{z}^{n-1}$ (observemos que g_1 e g_2 definidas dessa forma são $(D_n)_\sigma$-reversíveis-equivariantes). Mais ainda, pelo Teorema 1.32 segue também que $\overrightarrow{\mathcal{F}}_{\mathbb{C}}((D_n)_\sigma) = \mathcal{E}_{\mathbb{C}}(D_n)\{g_1, g_2\}$.

No caso em que n é par, o grupo diedral D_n admite outro epimorfismo $\sigma : D_n \to \mathbb{Z}_2$ de modo que $\sigma(\kappa) = 1$ e $\sigma(R_{\frac{2\pi}{n}}) = -1$. Nesse caso, $\Gamma_+ = \ker\sigma = D_{\frac{n}{2}}$ e a forma geral de uma aplicação $(D_n)_\sigma$-reversível-equivariante é diferente da obtida no exemplo anterior, implicando em um conjunto distinto de geradores para $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}((D_n)_\sigma)$ sobre $\mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$. De fato, é possível mostrar, com contas análogas às dos exemplos anteriores, que se $g \in \overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}((D_n)_\sigma)$ com $\sigma : D_n \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker\sigma = D_{\frac{n}{2}}$, então

$$g(z) = \sum_{r,s} A_{rs}(z\overline{z})^r(z^n + \overline{z}^n)^s z^{\frac{n}{2}+1} + \sum_{u,v} B_{uv}(z\overline{z})^u(z^n + \overline{z}^n)^v \overline{z}^{\frac{n}{2}-1},$$

com $A_{rs}, B_{uv} \in \mathbb{R}$, $r, s, u, v \in \mathbb{N}$ e n par. Se definirmos $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como no Exemplo 1.30, temos

$$g(z) = f_1(z)z^{\frac{n}{2}+1} + f_2(z)\overline{z}^{\frac{n}{2}-1},$$

com $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)$. Portanto, $\overrightarrow{\mathcal{Q}}_{\mathbb{C}}((D_n)_\sigma) = \mathcal{P}_{\mathbb{C}}(D_n)\{g_1, g_2\}$, onde $g_1, g_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ são dadas por $g_1(z) = z^{\frac{n}{2}+1}$ e $g_2(z) = \overline{z}^{\frac{n}{2}-1}$.

CAPÍTULO 2

UMA INTRODUÇÃO À GEOMETRIA SIMPLÉTICA

A geometria simplética é um ramo da geometria diferencial com raízes na formulação geométrica da mecânica clássica conhecida como "formalismo Hamiltoniano". Seus desenvolvimentos recentes são agora frutos de sua relação com diversas áreas da matemática, como a topologia simplética, a dinâmica e a teoria de representação de grupos, além de áreas da física-matemática. Fortemente marcada por essa interdisciplinaridade, a geometria simplética tornou-se interesse central no contexto da matemática atual a partir do desenvolvimento de métodos modernos que nos permitiram compreender melhor a estrutura dos chamados sistemas Hamiltonianos. Nessa direção, destacamos o colchete de Poisson, originado nos trabalhos clássicos de Poisson, Jacobi, Lie e Hamilton, e que tem um ponto de destaque em nosso estudo.

Neste capítulo, nosso objetivo é fazer uma introdução elementar à geometria simplética. Nesse trajeto discutimos a noção de espaços simpléticos, simplectomorfismos, grupo simplético e sua álgebra de Lie e ações semissimpléticas. Nossas principais referências aqui são [12, 23, 37, 42].

2.1 Álgebra Linear Simplética

No decorrer desta seção, apresentamos alguns conceitos e resultados de álgebra linear básica, os quais podem ser encontradas em [15]. Assumimos V um espaço vetorial real de dimensão finita e denotamos o $\mathbb{R}$-espaço vetorial das formas bilineares $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ por $B(V, \mathbb{R})$.

Lembremos que a matriz associada à forma bilinear Ω com relação a uma base $\beta = \{v_1, \cdots, v_n\}$ é definida por $[\Omega]_\beta = [a_{ij}]$, onde para cada $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ temos

$a_{ij} = \Omega(v_i, v_j)$. Além disso, dados $u, v \in V$, podemos escrever $\Omega(u,v) = [u]^t_\beta[\Omega]_\beta[v]_\beta$, onde $[u]_\beta$ e $[v]_\beta$ são as matrizes coluna formadas pelas coordenadas dos vetores u e v em relação à base β, respectivamente.

Exemplo 2.1. Sejam β uma base para $V = \mathbb{R}^{2n}$ e $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ com coordenadas $(u_1, \cdots, u_{2n})$ e $(v_1, \cdots, v_{2n})$ nessa base, respectivamente. A aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega_0 : & \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (u_i v_{i+n} - u_{i+n} v_i) \end{array}$$

é uma forma bilinear cuja matriz na base β é $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.2. Consideremos $V = W \times W^*$ onde W é um espaço vetorial de dimensão n e W^* é o seu dual. Tomemos $\{v_1, \cdots, v_n\}$ uma base de W e $\{g_1, \cdots, g_n\}$ a base dual associada. Então $\beta = \{(v_1, 0), \cdots, (v_n, 0), (0, g_1), \cdots, (0, g_n)\}$ é uma base de V e a aplicação

$$\begin{array}{rccl} \Omega : & V \times V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((h,h^*),(k,k^*)) & \longmapsto & k^*(h) - h^*(k) \end{array}$$

é uma forma bilinear cuja matriz com relação à base β é $\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.3. A aplicação $\Omega : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ dada por

$$\Omega((u_1,u_2,u_3,u_4),(v_1,v_2,v_3,v_4)) = -u_2v_1 - 2u_4v_1 + u_1v_2 + u_3v_2 - u_2v_3 - u_4v_3 + 2u_1v_4 + u_3v_4$$

é uma forma bilinear e sua matriz com relação à base canônica de $\mathbb{R}^4$ é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Definição 2.4. *Seja $\Omega \in B(V, \mathbb{R})$. Dizemos que Ω é **antissimétrica** se $\Omega(u,v) = -\Omega(v,u)$ para todos $u, v \in V$.*

Se V tem dimensão n, o subconjunto de $B(V,\mathbb{R})$ formado por todas as formas bilineares antissimétricas é um subespaço vetorial isomorfo ao subespaço de $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ formado pelas matrizes antissimétricas, via o isomorfismo $\Omega \mapsto [\Omega]_\beta$ segundo uma base fixada β de V. As formas bilineares dos Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 são todas antissimétricas, pois suas matrizes associadas com relação a uma base (e portanto com relação a todas) são antissimétricas.

O teorema seguinte prova a existência de uma base específica para todo espaço vetorial munido com uma forma bilinear antissimétrica, base essa que facilitará alguns cálculos no decorrer deste trabalho.

Teorema 2.5. *Seja $\Omega \in B(V,\mathbb{R})$ uma forma antissimétrica. Então existe uma base $\mathfrak{B} = \{u_1, \cdots u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ de V tal que*
(i) $\Omega(u_i, v) = 0$ para todo $i \in \{1, \cdots, k\}$ e todo $v \in V$;
(ii) $\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0$ para todos $i, j \in \{1, \cdots, n\}$;
(iii) $\Omega(e_i, f_j) = 1$ se $i = j$ e $\Omega(e_i, f_j) = 0$ se $i \neq j$, para todos $i, j \in \{1, \cdots, n\}$.

Demonstração: Consideremos o subespaço de V dado por

$$U = \{u \in V; \Omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}$$

e escolha para ele uma base $\{u_1, \cdots, u_k\}$. Se $U = V$, então $\Omega \equiv 0$ e o resultado segue tomando $n = 0$. Se $U \neq V$, então existe um subespaço vetorial $W \neq \{0\}$ de V tal que $V = U \oplus W$. Tomemos $e_1 \in W$ tal que $e_1 \neq 0$. Então $e_1 \notin U$ de modo que existe $f_1 \in W$ tal que $\Omega(e_1, f_1) \neq 0$. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Definamos W_1 como o subespaço vetorial de V gerado por e_1 e f_1 e consideremos o conjunto

$$W_1^\Omega = \{w \in W;\ \Omega(w, v) = 0, \forall v \in W_1\}.$$

Temos que $W = W_1 \oplus W_1^\Omega$. De fato, por construção, $W \supseteq W_1 + W_1^\Omega$. Agora, se $v \in W$, então podemos escrever

$$v = (-\Omega(v, e_1)f_1 + \Omega(v, f_1)e_1) + (v + \Omega(v, e_1)f_1 - \Omega(v, f_1)e_1)$$

com $-\Omega(v, e_1)f_1 + \Omega(v, f_1)e_1 \in W_1$ e $v + \Omega(v, e_1)f_1 - \Omega(v, f_1)e_1 \in W_1^\Omega$, uma vez que Ω é antissimétrica e $\Omega(e_1, f_1) = 1$. Além disso, se $v \in W_1 \cap W_1^\Omega$, então $v = ae_1 + bf_1$, com $a,\ b \in \mathbb{R}$, e $\Omega(v, e_1) = 0 = \Omega(v, f_1)$. Assim, $a\Omega(e_1, e_1) - b\Omega(e_1, f_1) = 0 = a\Omega(e_1, f_1) + b\Omega(f_1, f_1)$, implicando que $a = b = 0$, já que $\Omega(e_1, e_1) = \Omega(f_1, f_1) = 0$. Logo $v = 0$. Seja agora $e_2 \in W_1^\Omega$ tal que $e_2 \neq 0$ (caso exista). Novamente, existe $f_2 \in W_1^\Omega$ tal que $\Omega(e_2, f_2) \neq 0$ e assumimos $\Omega(e_2, f_2) = 1$. Tomemos agora W_2 o subespaço gerado por e_2 e f_2 e

$$W_2^\Omega = \{w \in W_1^\Omega;\ \Omega(w, v) = 0, \forall v \in W_2\}.$$

De maneira análoga à que fizemos acima, mostramos que $W_1^\Omega = W_2 \oplus W_2^\Omega$. Seguindo indutivamente com este processo, como a dimensão de V é finita, obtemos

$$V = U \oplus W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n, \tag{2.1}$$

onde W_i é o subespaço gerado pelos elementos e_i e f_i. Com essa construção, o conjunto $\mathfrak{B} = \{u_1, \cdots, u_k, e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$ é a base desejada. □

Embora a base $\mathfrak{B}$ do teorema acima não seja única, tradicionalmente ela é chamada de base canônica. Além disso, a matriz associada à Ω com relação à $\mathfrak{B}$ é a matriz antissimétrica de ordem $k + 2n$ dada por

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_n \\ 0 & -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Observação 2.6. As bases consideradas nos Exemplos 2.1 e 2.2 satisfazem as condições do Teorema 2.5, para $k = 0$. Observemos que no Exemplo 2.1 a base tomada foi fixada, porém de forma arbitrária. Assim qualquer base de $\mathbb{R}^{2n}$ satisfaz as condições do Teorema 2.5 para Ω_0 como definida no Exemplo 2.1, inclusive a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$.

Definição 2.7. *Seja $\Omega \in B(V, \mathbb{R})$ uma forma antissimétrica. Dizemos que Ω é **simplética** (ou não degenerada) quando $\Omega(u, v) = 0$ para todo $v \in V$ implicar que $u = 0$. Nesse caso, chamamos o espaço vetorial V munido com a forma simplética Ω de **espaço vetorial simplético** e o denotamos por (V, Ω).*

Observemos que cada forma bilinear $\Omega \in B(V, \mathbb{R})$ pode ser associada à transformação linear $\widetilde{\Omega} : V \to V^*$ dada por

$$\widetilde{\Omega}(u)(v) = \Omega(u, v). \tag{2.2}$$

Assim, uma forma bilinear antissimétrica é simplética se, e somente se, $\ker(\widetilde{\Omega}) = 0$, o que ocorre se, e somente se, $\widetilde{\Omega}$ é um isomorfismo. Observemos também que o conjunto U construído na demonstração do Teorema 2.5 é justamente o núcleo de $\widetilde{\Omega}$. Portanto, se Ω é simplética, $U = \{0\}$ e V admite uma base $\mathfrak{B} = \{e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_n\}$, chamada de **base simplética**, que satisfaz as condições (ii) e (iii) do Teorema 2.5. Nesse caso, V tem dimensão par e a matriz associada à Ω com respeito à base $\mathfrak{B}$ é da forma

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}.$$

Daqui em diante, sempre que usarmos a notação J_0 estaremos nos referindo à matriz quadrada descrita acima.

Temos a seguinte caracterização para as formas simpléticas:

Teorema 2.8. *Uma forma bilinear antissimétrica $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ é simplética se, e somente se, sua matriz associada (com relação a qualquer base de V) é invertível.*

Demonstração: Seja $\mathfrak{B} = \{v_1, \cdots, v_m\}$ uma base de V fixada, porém arbitrária. Primeiramente, notemos que a matriz $[\Omega]_{\mathfrak{B}}$ é a transposta da matriz da transformação linear $\tilde{\Omega}$ definida em (2.2), com respeito à base $\mathfrak{B}$ e sua base dual. De fato, sejam $v \in V$ e $\mathfrak{B}^* = \{f_1, \cdots, f_m\}$ a base dual à $\mathfrak{B}$, ou seja, $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Então $v = \sum_{j=1}^{m} f_j(v)v_j$ e, para todo $i \in \{1, \cdots, m\}$, temos

$$\tilde{\Omega}(v_i)(v) = \Omega(v_i, v) = \Omega(v_i, \sum_{j=1}^{m} f_i(v)v_j) = \sum_{j=1}^{m} \Omega(v_i, v_j) f_j(v),$$

donde

$$[\tilde{\Omega}]_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}^*} = \begin{bmatrix} \Omega(v_1, v_1) & \cdots & \Omega(v_m, v_1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega(v_1, v_m) & \cdots & \Omega(v_m, v_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega(v_1, v_1) & \cdots & \Omega(v_1, v_m) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Omega(v_m, v_1) & \cdots & \Omega(v_m, v_m) \end{bmatrix}^t = [\Omega]_{\mathfrak{B}}^t.$$

Agora, sabemos que Ω é simplética se, e somente se, $\tilde{\Omega}$ é um isomorfismo, o que ocorre se, e somente se, a matriz $[\tilde{\Omega}]_{\mathfrak{B},\mathfrak{B}^*}$ é invertível. Portanto, Ω é simplética se, e somente se, $[\Omega]_{\mathfrak{B}}$ é invertível. $\square$

Observação 2.9. As formas bilineares antissimétricas dos Exemplos 2.1, 2.2 e 2.3 são simpléticas, visto que suas matrizes com relação a uma base (e portanto com relação a todas) são invertíveis. O espaço vetorial $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ com Ω_0 definida no Exemplo 2.1 é chamado **espaço vetorial simplético canônico**. Lembremos, pela Observação 2.6, que a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ é uma base simplética de $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

2.2 Simplectomorfismos

Assim como no caso de espaços vetoriais com produto interno, em espaços simpléticos também existem transformações que preservam a estrutura do espaço, as chamadas transformações simpléticas.

Definição 2.10. *Sejam (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) espaços vetoriais simpléticos. Uma transformação linear $A : V_1 \to V_2$ é chamada **simplética** se*

$$\Omega_2(A(u), A(v)) = \Omega_1(u, v),$$

*para todos $u, v \in V_1$. Nesse caso, quando A é um isomorfismo, A é chamada de **simplectomorfismo** e (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) são ditos **simplectomorfos.***

Exemplo 2.11. Consideremos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \Omega_1 : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (u, v) & \longmapsto & [u]_\beta^t(-2J_0)[v]_\beta \end{array},$$

onde $[u]_\beta, [v]_\beta$ denotam as coordenadas de $u, v \in \mathbb{R}^2$ com relação a uma base β de $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Como $[\Omega_1]_\beta = -2J_0$, segue pelo Teorema 2.8 que Ω_1 é uma forma simplética. Consideremos agora a forma simplética Ω_0 definida no Exemplo 2.1 para $n = 1$ e o isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} A : & (\mathbb{R}^2, \Omega_0) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^2, \Omega_0) \\ & (x, y) & \longmapsto & (-\frac{1}{2}x, y) \end{array}.$$

Dados $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\Omega_0((x, y), (z, w)) = xw - yz = \Omega_1\left(\left(-\frac{1}{2}x, y\right), \left(-\frac{1}{2}z, w\right)\right) = \Omega_1(A(x, y), A(z, w)),$$

o que prova que A é um simplectomorfismo e, portanto, $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ e $(\mathbb{R}^2, \Omega_1)$ são simplectomorfos. Esse exemplo pode ser generalizado, como mostramos no teorema abaixo.

Teorema 2.12. *Todo espaço vetorial simplético é simplectomorfo a* $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ *para algum* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Sejam (V, Ω) um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ e $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ o espaço vetorial simplético canônico. Consideremos $\{f_1, \cdots, f_{2n}\}$ uma base qualquer de $\mathbb{R}^{2n}$ e $\{e_1', \cdots, e_n', f_1', \cdots, f_n'\}$ uma base simplética de V (que existe pelo Teorema 2.5). Definamos $A : \mathbb{R}^{2n} \to V$ como o isomorfismo linear que satisfaz $A(f_i) = e_i'$ e $A(f_{i+n}) = f_i'$, para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$. Tomando $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, existem $u_1, \cdots, u_{2n}, v_1, \cdots, v_{2n} \in \mathbb{R}$ tais que $u = \sum_{i=1}^{2n} u_i f_i$ e $v = \sum_{i=1}^{2n} v_i f_i$. Assim, da bilinearidade de Ω, da linearidade de A e das condições (ii) e (iii) do Teorema 2.5 satisfeitas pela base simplética de V, temos que

$$
\begin{aligned}
\Omega(A(u), A(v)) &= \Omega\left(\sum_{i=1}^{2n} u_i A(f_i), \sum_{i=1}^{2n} v_i A(f_i)\right) \\
&= \Omega\left(\sum_{i=1}^{n} (u_i e_i' + u_{i+n} f_i'), \sum_{i=1}^{n} (v_i e_i' + v_{i+n} f_i')\right) \\
&= \Omega\left(\sum_{i=1}^{n} u_i e_i', \sum_{i=1}^{n} v_{i+n} f_i'\right) + \Omega\left(\sum_{i=1}^{n} u_{i+n} f_i', \sum_{i=1}^{n} v_i e_i'\right) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} u_i v_{j+n} \Omega(e_i', f_j') + \sum_{i,j=1}^{n} u_{i+n} v_j \Omega(f_i', e_j') \\
&= \sum_{i=1}^{n} (u_i v_{i+n} - u_{i+n} v_i) \\
&= \Omega_0(u, v),
\end{aligned}
$$

mostrando que A é um simplectomorfismo. □

Notemos que o teorema acima é válido para qualquer base fixada de $\mathbb{R}^{2n}$, inclusive para a canônica, que é uma base simplética para a forma Ω_0 (Observação 2.6). Assim, os simplectomorfismos definem uma relação de equivalência no conjunto dos espaços vetoriais simpléticos de mesma dimensão. Desse modo, via um simplectomorfismo, podemos considerar um espaço vetorial simplético de dimensão $2n$ como o espaço simplético canônico $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ com a base simplética fixada sendo a base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$.

2.3 Grupo Simplético

Nesta seção, nos restringimos aos simplectomorfismos de $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ com o objetivo de analisarmos a estrutura algébrica do chamado grupo simplético, que pode ser identificado com o grupo das transformações de coordenadas que mantêm a matriz simplética J_0. Tal grupo surge de forma natural no estudo da mecânica clássica e, neste trabalho, servirá de preliminar para a abordagem apresentada na Seção 2.4.

Seja $A : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ um simplectomorfismo e consideremos α e β bases do domínio e da imagem de A, respectivamente. Denotemos também por A a matriz do simplectomorfismo com relação às bases α e β. Então $A \in \mathbf{GL}(2n)$ e para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, temos $\Omega_0(A(u), A(v)) = \Omega_0(u, v)$, isto é,

$$[u]_\alpha^t A^t J_0 A [v]_\alpha = [A(u)]_\beta^t J_0 [A(v)]_\beta = [u]_\alpha^t J_0 [v]_\alpha,$$

com $[\,\cdot\,]_\alpha$ e $[\,\cdot\,]_\alpha$ denotando as coordenadas dos vetores nas bases α e β, respectivamente. Disto segue que $A^t J_0 A = J_0$. Reciprocamente, se $A \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ é tal que $A^t J_0 A = J_0$, então $\det A = \pm 1$, implicando que A define um isomorfismo linear que satisfaz $\Omega_0(A(u), A(v)) = \Omega_0(u, v)$ para todos $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, A define um simplectomorfismo de $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

Dados esses fatos, definimos o conjunto

$$Sp(n) = \{A \in \mathbf{GL}(2n);\ A^t J_0 A = J_0\}, \tag{2.3}$$

o qual tem estrutura de grupo de Lie linear. De fato, $Sp(n) \neq \emptyset$, pois $I_{2n} \in Sp(n)$. Ainda, se $A, B \in Sp(n)$ então $A^t J_0 A = J_0$ e $B^t J_0 B = J_0$, de onde $J_0 = (A^t)^{-1} J_0 A^{-1}$ e $(AB)^t J_0 (AB) = B^t (A^t J_0 A) B = B^t J_0 B = J_0$. Logo, $A^{-1}, AB \in Sp(n)$. Isto prova que $Sp(n)$ é um subgrupo de $\mathbf{GL}(2n)$. Para concluir que $Sp(n)$ é um conjunto fechado de $\mathbf{GL}(2n)$ (via identificação com $\mathbb{R}^{(2n)^2}$), definimos $\phi : \mathbf{GL}(2n) \to \mathbf{GL}(2n)$ por $\phi(A) = A^t J_0 A$. Tal aplicação é contínua pois cada entrada das matrizes na imagem é polinomial. Ademais, $Sp(n) = \phi^{-1}(\{J_0\})$ e como $\{J_0\}$ é fechado em $\mathbf{GL}(2n)$, então $Sp(n)$ também o é. Portanto, $Sp(n)$ é um grupo de Lie linear.

Observemos que se $A \in Sp(n)$ então $A^t \in Sp(n)$, visto que como $J_0^2 = -I_{2n}$, temos

$J_0^{-1} = -J_0$. Assim,

$$-J_0 = J_0^{-1} = ((A^t)^{-1} J_0 A^{-1})^{-1} = A(-J_0)A^t = -AJ_0A^t,$$

ou seja, $J_0 = (A^t)^t J_0 A^t$. Deste modo, podemos também escrever $Sp(n)$ como

$$Sp(n) = \{A \in \mathbf{GL}(2n);\ AJ_0A^t = J_0\}.$$

Definição 2.13. *O grupo $Sp(n)$ definido em (2.3) é chamado de* ***grupo simplético*** *e seus elementos são chamados de* ***matrizes simpléticas.***

Podemos então concluir que dada uma matriz simplética temos um simplectomorfismo $A : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ associado a ela. Reciprocamente, a matriz associada a um simplectomorfismo $A : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ é simplética independentemente das bases consideradas no domínio e na imagem, o que nem sempre ocorre quando trabalhamos com simplectomorfismos de $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_1)$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_2)$, onde Ω_1 e Ω_2 não são ambas a forma canônica Ω_0. Vejamos o exemplo a seguir:

Exemplo 2.14. Consideremos a forma simplética Ω_1 e o simplectomorfismo $A : (\mathbb{R}^2, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^2, \Omega_1)$ dados no Exemplo 2.11. Tomemos tanto no domínio quanto na imagem de A a base canônica de $\mathbb{R}^2$. Então a matriz associada a A é $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, que não é uma matriz simplética, já que

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observemos que a base canônica de $\mathbb{R}^2$ não é uma base simplética para $(\mathbb{R}^2, \Omega_1)$, pois $\Omega_1(e_1, e_2) = -2 \neq 1$.

Contudo, a matriz associada a um simplectomorfismo $A : (V_1, \Omega_1) \to (V_2, \Omega_2)$ é simplética desde que consideremos em (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) bases simpléticas α e β, respectivamente. Nesse caso, denotando também por A a matriz associada ao simplectomorfismo A com relação à α e β, temos

$$[u]_\alpha^t A^t J_0 A [v]_\alpha = [A(u)]_\beta^t J_0 [A(v)]_\beta = \Omega_2(A(u), A(v)) = \Omega_1(u, v) = [u]_\alpha^t J_0 [v]_\alpha$$

para todos $u, v \in V_1$. Logo, $A \in \mathbf{GL}(2n)$ e $A^t J_0 A = J_0$, implicando que $A \in Sp(n)$. Portanto, dado um simplectomorfismo $A : (V_1, \Omega_1) \to (V_2, \Omega_2)$ sempre existe uma matriz associada a A que é simplética.

Outro fato bastante interessante é que os vetores cujas coordenadas são as colunas de uma matriz simplética formam uma base simplética para $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. Isto porque tomando $\alpha = \{f_1, \cdots, f_{2n}\}$ uma base de $\mathbb{R}^{2n}$, se $A \in Sp(n)$, a k-ésima coluna de A é dada pelas coordenadas do vetor $A(f_k)$ e, sendo A invertível, temos que $\{A(f_1), \cdots, A(f_{2n})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^{2n}$. Agora, pela definição de Ω_0 dada no Exemplo 2.1, toda base de $\mathbb{R}^{2n}$ é simplética.

Reciprocamente, seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz cuja k-ésima coluna é formada pelas coordenadas do vetor $u_k = (a_{1k}, \cdots, a_{2nk})$ de maneira que $\beta = \{u_1, \cdots, u_{2n}\}$ é uma base simplética para $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$. Então $A \in Sp(n)$. De fato, denotando por e_i o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$ e por $\langle\ ,\ \rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{2n}$, para todos $i, j \in \{1, \cdots, n\}$, temos

$$\begin{aligned}
0 = \Omega_0(u_i, u_j) &= \langle(\langle u_i, -e_{n+1}\rangle, \cdots, \langle u_i, -e_{2n}\rangle, \langle u_i, e_1\rangle, \cdots, \langle u_i, e_n\rangle), u_j\rangle;\\
0 = \Omega_0(u_{i+n}, u_{j+n}) &= \langle(\langle u_{i+n}, e_1\rangle, \cdots, \langle u_{i+n}, e_n\rangle, \langle u_{i+n}, -e_{n+1}\rangle, \cdots, \langle u_{i+n}, -e_{2n}\rangle), u_{j+n}\rangle;\\
\delta_{ij} = \Omega_0(u_i, u_{n+j}) &= \langle(\langle u_i, -e_{n+1}\rangle, \cdots, \langle u_i, -e_{2n}\rangle, \langle u_i, e_1\rangle, \cdots, \langle u_i, e_n\rangle), u_{n+j}\rangle;\\
-\delta_{ij} = \Omega_0(u_{i+n}, u_j) &= \langle(\langle u_{i+n}, e_1\rangle, \cdots, \langle u_{i+n}, e_n\rangle, \langle u_{i+n}, -e_{n+1}\rangle, \cdots, \langle u_{i+n}, -e_{2n}\rangle), u_j\rangle.
\end{aligned}$$

Com tediosos cálculos, é possível mostrar que

$$A^t J_0 A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{2n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{12n} & \cdots & a_{2n2n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ & \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n1} & \cdots & a_{2n2n} \end{bmatrix} = [b_{rs}],$$

onde $b_{rs} = \Omega_0(u_r, u_s)$, para todos $r, s \in \{1, \cdots, 2n\}$. Logo, $A^t J_0 A = [b_{rs}] = J_0$ e, portanto, A é uma matriz simplética.

Exemplo 2.15. A matriz $\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ é simplética, já que

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = J_0.$$

Logo, $\left\{-\frac{1}{2}e_1, -2e_2\right\}$ é uma base simplética de $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

Exemplo 2.16. Consideremos $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$, onde

$$B_1 = \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Temos que $B^t = B$ e $B_1B_2 = B_2B_1 = I_4$. Assim,

$$B^tJ_0B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I_4 \\ -I_4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & B_1 \\ -B_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} = J_0.$$

Logo $B \in Sp(4)$ e, assim, o conjunto dos vetores cujas coordenadas formam as colunas de B é uma base simplética para $(\mathbb{R}^8, \Omega_0)$.

Uma maneira simples de saber se uma matriz de ordem dois é simplética é calculando seu determinante, pois $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é simplética se, e somente se, A é invertível e

$$J_0 = A^tJ_0A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \det A \\ -\det A & 0 \end{bmatrix},$$

ou seja, $\det A = 1$. Temos então a seguinte proposição:

Proposição 2.17. *$A \in Sp(1)$ se, e somente se, $\det A = 1$.*

No entanto, tal equivalência não é válida em geral para matrizes de ordem $2n$, com $n > 1$. Consideremos, por exemplo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Notemos que $\det A = 1$, mas

$$A^t J_0 A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

isto é, $A^t J_0 A = -J_0 \neq J_0$, implicando que A não é simplética. Contudo, uma das implicações é sempre verdadeira, como nos mostra o próximo resultado. Sua prova será omitida, pois requer ferramentas da teoria de formas diferenciais, e poderá ser consultada em [42, Proposition V.4].

Lema 2.18. *Se $A \in Sp(n)$ então $\det A = 1$.*

Embora os próximos resultados desta seção sejam interessantes, eles não fazem parte do núcleo básico deste trabalho e podem ser omitidos sem perda de continuidade.

Vamos agora analisar os autovalores de uma matriz simplética. Para isso usaremos a teoria de formas canônicas de Jordan, que pode ser encontrada em [15, Seção 5]. Lembremos que os autovalores de uma matriz $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ são as raízes do polinômio característico

$$p_A(x) = \det(xI_n - A).$$

Além disso, como o determinante de uma matriz associada à uma transformação linear é invariante por base, considerando a forma de Jordan de A, temos que

$$\det A = (\lambda_1)^{m_1} \cdots (\lambda_k)^{m_k}$$

onde $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são todos os autovalores distintos de A e $m_1, \cdots, m_k$ são suas respectivas multiplicidades algébricas. Em particular, se A é uma matriz simplética, então 0 não é autovalor de A, visto que $\det A = 1 \neq 0$.

Proposição 2.19. *Sejam $A \in Sp(n)$ e $\lambda \neq 0$ um autovalor de A. Então λ^{-1}, $\overline{\lambda}$ e $\overline{\lambda}^{-1}$ também são autovalores de A, todos com a mesma multiplicidade algébrica de λ. Em particular, se ± 1 é autovalor de A então sua multiplicidade algébrica é par.*

Demonstração: Se $\lambda \neq 0$ é autovalor complexo de A, então $p_A(\lambda) = 0$ e, como $p_A(x)$

tem coeficientes reais, $p_A(\overline{\lambda}) = \overline{p_A(\lambda)} = 0$, ou seja, $\overline{\lambda}$ também é autovalor de A, com a mesma multiplicidade algébrica de λ. Basta então mostrar que o mesmo é válido para λ^{-1}. Sabemos que $\det A = \det A^{-1} = 1$ e que $\det J_0 = \det J_0^{-1} = 1$, já que $J_0 \in Sp(n)$. Além disso, a igualdade $A^t J_0 A = J_0$ nos dá $J_0 A J_0^{-1} = (A^{-1})^t$. Assim, o polinômio característico de A para $x \neq 0$ é dado por

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= \det(xI_{2n} - A) \\
&= (\det J_0)\det(xI_{2n} - A)(\det J_0^{-1}) \\
&= \det[J_0(xI_{2n} - A)J_0^{-1}] \\
&= \det(J_0 x I_{2n} J_0^{-1} - J_0 A J_0^{-1}) \\
&= \det(xI_{2n} - J_0 A J_0^{-1}) \\
&= \det[(xI_{2n})^t - (A^{-1})^t] \\
&= \det[(xI_{2n} - A^{-1})^t] \\
&= \det(xI_{2n} - A^{-1}) \\
&= \det[(-xA^{-1})(x^{-1}I_{2n} - A)] \\
&= \det(-xA^{-1})\det(x^{-1}I_{2n} - A) \\
&= (-x)^{2n}\det(A^{-1})\det(x^{-1}I_{2n} - A) \\
&= x^{2n} p_A(x^{-1}).
\end{aligned}$$

Logo, $0 = p_A(\lambda) = \lambda^{2n} p_A(\lambda^{-1})$ e como $\lambda \neq 0$, então $p_A(\lambda^{-1}) = 0$, mostrando que λ^{-1} é autovalor de A.

Agora suponhamos que a multiplicidade algébrica de λ seja k. Então podemos escrever $p_A(x) = (x - \lambda)^k p_1(x)$ onde $p_1(\lambda) \neq 0$. Assim, para $x \neq 0$, temos

$$\begin{aligned}
p_A(x) &= x^{2n} p_A(x^{-1}) \\
&= x^{2n}(x^{-1} - \lambda)^k p_1(x^{-1}) \\
&= x^{2n}(x^{-1} - \lambda)^k p_1(x^{-1}) \frac{(\lambda x^{-1})^k}{(\lambda x^{-1})^k} \\
&= \lambda^k x^{2n-k} \left(\frac{x^{-1} - \lambda}{\lambda x^{-1}}\right)^k p_1(x^{-1}) \\
&= \lambda^k x^{2n-k}(\lambda^{-1} - x)^k p_1(x^{-1}) \\
&= (\lambda^{-1} - x)^k p_2(x),
\end{aligned}$$

com $p_2(x) = \lambda^k x^{2n-k} p_1(x^{-1})$ satisfazendo $p_2(\lambda^{-1}) \neq 0$, já que

$$p_2(\lambda^{-1}) = \lambda^k (\lambda^{-1})^{2n-k} p_1(\lambda) = \lambda^{2(k-n)} p_1(\lambda).$$

Logo, λ^{-1} também tem multiplicidade algébrica k.

Finalmente, suponhamos que $\lambda_1, \lambda_1^{-1}, \cdots, \lambda_k, \lambda_k^{-1}$ sejam todos os autovalores de A diferentes de ± 1 e que m seja a multiplicidade algébrica de 1 e l de -1. Então

$$2n = \dim \mathbb{R}^{2n} = m + l + 2k.$$

Se 1 for autovalor de A e -1 não, então $m = 2(n-k)$, que é par. Se -1 for autovalor de A e 1 não, então $l = 2(n-k)$, que também é par. Agora, se ambos são autovalores de A, então

$$1 = \det A = \lambda_1 \cdot \lambda_1^{-1} \cdot \ldots \cdot \lambda_k \cdot \lambda_k^{-1} \cdot (1)^m \cdot (-1)^l = (-1)^l,$$

donde l é par. Consequentemente, $m = 2(n-k) - l$ também é par, concluindo a demonstração. $\square$

Notemos que quando $A \in Sp(n)$ é diagonalizável (sobre $\mathbb{R}$), então existe uma base de $\mathbb{R}^{2n}$ na qual A é dada por

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_n & & & \\ & & & \lambda_1^{-1} & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

e tal matriz é ainda simplética.

2.4 A Álgebra de Lie do Grupo Simplético

A álgebra de Lie é uma ferramenta indispensável na teoria de grupos de Lie, uma vez que a estrutura do grupo pode ser determinada a partir de sua álgebra. Além disso, a álgebra de Lie tem estrutura de espaço vetorial, o que nos permite entendê-la usando apenas teoria de álgebra linear. No contexto de grupos de Lie lineares, a exponencial de uma matriz também desempenha um papel importante, pois é o mecanismo de conexão entre um grupo de Lie linear e sua álgebra de Lie. Um estudo mais detalhado do assunto pode ser encontrado em [22, Chapter 2].

Definição 2.20. *Seja $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Definimos a exponencial de X, denotada por e^X ou $\exp(X)$, como sendo a série de potências*

$$e^X := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} X^m.$$

Segue de [22, Proposition 2.1] que se $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$, então $e^X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Além disso, de [22, Proposition 2.3] temos que $(e^X)^t = e^{X^t}$, $e^{0_n} = I_n$ e se $X,\ Y \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ e $XY = YX$ então

$$e^{X+Y} = e^X e^Y = e^Y e^X, \tag{2.5}$$

onde t denota a transposta da matriz e 0_n é a matriz nula de ordem n. Ainda, por [22, Proposition 2.4], a aplicação $s \mapsto e^{sX}$, com $s \in \mathbb{R}$, é diferenciável com derivada

$$\frac{d}{ds} e^{sX} = X e^{sX} = e^{sX} X. \tag{2.6}$$

Definição 2.21. *A álgebra de Lie de um grupo de Lie linear $\Gamma \subseteq \boldsymbol{GL}(n)$ é o conjunto*

$$\mathfrak{d} = \{X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R});\ e^{sX} \in \Gamma,\ \forall s \in \mathbb{R}\}.$$

Existem definições mais gerais para álgebras de Lie (não necessariamente associadas a um grupo de Lie) que podem ser encontradas em [22, Section 2.8, Appendix C.2]. A Definição 2.21 é equivalente a essas, quando restritas ao contexto de grupos de Lie lineares.

Denotemos por $\mathfrak{h}$ a álgebra de Lie do grupo de Lie linear *Sp*(n). Afirmamos que $\mathfrak{h} = \mathfrak{sp}(n)$, onde

$$\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R});\ J_0 A^t J_0 = A\}. \tag{2.7}$$

De fato, seja $X \in \mathfrak{h} = \{X \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R});\ e^{sX} \in Sp(n),\ \forall s \in \mathbb{R}\}$. Então $X \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ e

$(e^{sX})^t J_0 e^{sX} = J_0$. Desta forma,

$$J_0 = e^{sX^t} J_0 e^{sX}.$$

Derivando tal igualdade em $s = 0$, segue que

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{d}{ds}(e^{sX^t} J_0 e^{sX})|_{s=0} \\ &= [X^t e^{sX^t} J_0 e^{sX} + e^{sX^t} J_0 X e^{sX}]|_{s=0} \\ &= X^t e^{0_n} J_0 e^{0_n} + e^{0_n} J_0 X e^{0_n} \\ &= X^t J_0 + J_0 X, \end{aligned}$$

o que é equivalente a $X^t J_0 = -J_0 X$. Como $J_0^2 = -I_{2n}$, temos que $J_0 X^t J_0 = X$. Logo, $X \in \mathfrak{sp}(n)$. Por outro lado, se $A \in \mathfrak{sp}(n)$, então dado $s \in \mathbb{R}$ temos $J_0(sA^t)J_0 = sA$. Além disso, como $J_0^{-1} = -J_0$, segue que $(-J_0 B J_0)^m = -J_0 B^m J_0$ para qualquer matriz $B \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ e qualquer $m \in \mathbb{N}$. Consequentemente,

$$e^{-J_0 B J_0} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-J_0 B J_0)^m = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(-J_0 B^m J_0) = -J_0 \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} B^m \right) J_0 = -J_0 e^B J_0,$$

para toda matriz $B \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$, em particular para $B = -sA^t$, com $s \in \mathbb{R}$. Logo, lembrando que $sA = J_0(sA^t)J_0$ e que $J_0^2 = -I_{2n}$, temos

$$\begin{aligned} e^{sA^t} J_0 e^{sA} &= e^{sA^t} J_0 e^{J_0(sA^t)J_0} \\ &= e^{sA^t} J_0 e^{-J_0(-sA)^t J_0} \\ &= e^{sA^t} J_0(-J_0) e^{-sA^t} J_0 \\ &= e^{sA^t} e^{-sA^t} J_0 \\ &= e^{sA^t - sA^t} J_0 \\ &= e^{0_{2n}} J_0 \\ &= J_0, \end{aligned}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$, provando que $A \in \mathfrak{h}$. Portanto, $\mathfrak{sp}(n)$ é a álgebra de Lie de $Sp(n)$, que pode ser reescrita como $\mathfrak{sp}(n) = \{A \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R});\ A^t J_0 + J_0 A = 0_{2n}\}$.

Definição 2.22. *Os elementos da álgebra de Lie $\mathfrak{sp}(n)$ são chamados de **matrizes hamiltonianas.***

Exemplo 2.23. A matriz $A = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ é hamiltoniana já que $A^t J_0 + J_0 A = 0_2$. De fato,

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 3 & -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -8 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Logo, $A \in \mathfrak{sp}(1)$.

Exemplo 2.24. A matriz $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix}$ é hamiltoniana visto que

$$B^t J_0 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & -7 & 3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 4 & -1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & -7 \\ 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

e

$$J_0 B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -7 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 & 7 \\ -2 & -3 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 7 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

implicam em $B^t J_0 + J_0 B = 0_4$. Logo, $B \in \mathfrak{sp}(2)$.

Observemos que as matrizes hamiltonianas dos dois exemplos anteriores têm traço nulo. Isso acontece em geral, como veremos no Corolário 2.26.

Proposição 2.25. *Sejam A, B, C e $D \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Uma matriz $H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \in \mathfrak{sp}(n)$ se, e somente se, $A = -D^t$, $B = B^t$ e $C = C^t$.*

Demonstração: Sabemos que H é hamiltoniana se, e somente se, $H^t J_0 + J_0 H = 0_{2n}$. Logo,

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 0_n & 0_n \\ 0_n & 0_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} A^t & C^t \\ B^t & D^t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -C^t & A^t \\ -D^t & B^t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C & D \\ -A & -B \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} C - C^t & A^t + D \\ -(A + D^t) & B^t - B \end{bmatrix},
\end{aligned}
$$

e isto ocorre se, e somente se, $A = -D^t$, $B = B^t$ e $C = C^t$, como queríamos. □

Corolário 2.26. *Se $H \in \mathfrak{sp}(n)$, então seu traço é zero.*

Demonstração: Seja $H \in \mathfrak{sp}(n)$ escrita em blocos de matrizes de ordem n como

$$
H = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}.
$$

Pela proposição anterior, H é hamiltoniana se, e somente se,

$$
H = \begin{bmatrix} -D^t & B \\ C & D \end{bmatrix}.
$$

Logo, o traço de H é a soma dos traços de $-D^t$ e D e, como o traço de $-D^t$ coincide com o traço de $-D$, segue o resultado. □

Assim como fizemos para as matrizes simpléticas, vamos analisar os autovalores de uma matriz hamiltoniana. Embora os resultados a seguir relacionados à tais autovalores sejam interessantes, eles não fazem parte do núcleo básico deste trabalho e também podem ser omitidos sem perda de continuidade.

Proposição 2.27. *Sejam $H \in \mathfrak{sp}(n)$ e λ um autovalor de H. Então $-\lambda$, $\overline{\lambda}$ e $-\overline{\lambda}$ são também autovalores de H, todos eles com a mesma multiplicidade algébrica de λ. Em particular, se 0 é autovalor de H, então sua multiplicidade algébrica é par.*

Demonstração: De modo análogo ao que fizemos na demonstração da Proposição 2.19, se λ é autovalor complexo de H, então $\overline{\lambda}$ também é, com a mesma multiplicidade algébrica de λ. Resta mostrar que o mesmo vale para $-\lambda$. Sabemos que $J_0 H^t J_0 = H$, ou seja, $H^t = -J_0^{-1} H J_0$, uma vez que $J_0^{-1} = -J_0$. Dessa forma, o polinômio característico de H é dado por

$$\begin{aligned}
p_H(x) &= \det(xI_{2n} - H) \\
&= (\det J_0^{-1})(\det(xI_{2n} - H))(\det J_0) \\
&= \det(J_0^{-1} x I_{2n} J_0 - J_0^{-1} H J_0) \\
&= \det(xI_{2n} + H^t) \\
&= \det[(xI_{2n})^t + H^t] \\
&= \det[(xI_{2n} + H)^t] \\
&= \det(xI_{2n} + H) \\
&= (-1)^{2n} \det(xI_{2n} + H) \\
&= \det[(-1)(xI_{2n} + H)] \\
&= \det[(-x)I_{2n} - H] \\
&= p_H(-x),
\end{aligned}$$

implicando que se λ é autovalor de H, então $-\lambda$ também o é. Além disso, se k é a multiplicidade algébrica de λ, então podemos escrever $p_H(x) = (x - \lambda)^k p_1(x)$, com $p_1(\lambda) \neq 0$. Daí,

$$\begin{aligned}
p_H(-x) &= (-x - \lambda)^k p_1(-x) \\
&= (-1)^{2k} (-x - \lambda)^k p_1(-x) \\
&= (-1)^k [(-1)(-x - \lambda)]^k p_1(-x) \\
&= (-1)^k p_1(-x)(x + \lambda)^k \\
&= (x + \lambda)^k p_2(x),
\end{aligned}$$

onde $p_2(x) = (-1)^k p_1(-x)$. Logo, como $p_1(\lambda) \neq 0$, temos $p_2(-\lambda) = (-1)^k p_1(\lambda) \neq 0$ e portanto k também é a multiplicidade algébrica de $-\lambda$. Finalmente, suponhamos que $\lambda_1, -\lambda_1, \cdots, \lambda_k, -\lambda_k$ sejam todos os autovalores distintos e não nulos de H e que m seja a multiplicidade algébrica de 0. Então

$$2n = \dim \mathbb{R}^{2n} = m + 2k.$$

Assim, se 0 é autovalor de H, então $m = 2(n - k)$, concluindo a demonstração. $\square$

Corolário 2.28. *Se $H \in \mathfrak{sp}(n)$, então seu polinômio característico $p_H(x)$ deve ser o produto de fatores da forma x^2, $x^2 - \alpha^2$, $x^2 + \alpha^2$ e $((x-\alpha)^2 + \beta^2)((x+\alpha)^2 + \beta^2)$, onde α e β são números reais positivos.*

Demonstração: Sabemos que se $\lambda_1, \cdots, \lambda_k$ são todos os autovalores de um operador linear, então o polinômio característico desse operador é da forma

$$p(x) = (x - \lambda_1). \cdots .(x - \lambda_k).$$

Sejam $H \in \mathfrak{sp}(n)$, $p_H(x)$ seu polinômio característico e consideremos α e β números reais positivos. Se 0 é autovalor de H, então sua multiplicidade algébrica é par e $p_H(x)$ tem pelo menos um fator da forma x^2. Se α é autovalor de H, pela proposição anterior $-\alpha$ também é, e daí, $x^2 - \alpha^2$ é fator de $p_H(x)$. Se αi é autovalor de H, $-\alpha i$ também é e $x^2 + \alpha^2$ é fator de $p_H(x)$. Se $\alpha + \beta i$ é autovalor de H, então $\alpha - \beta i$, $-\alpha - \beta i$ e $-\alpha + \beta i$ também são e

$$(x - (\alpha + \beta i))(x - (\alpha - \beta i))(x + \alpha + \beta i)(x + \alpha - \beta i) = ((x-\alpha)^2 + \beta^2)((x+\alpha)^2 + \beta^2)$$

é fator de $p_H(x)$. □

2.5 Antissimplectomorfismos e Ações Semissimpléticas

Como vimos, os simplectomorfismos são isomorfismos que preservam a forma simplética, cujas matrizes associadas formam o chamado grupo simplético. Nesta seção, introduzimos as transformações que, ao contrário dos simplectomorfismos, revertem a forma simplética e cujas matrizes associadas não formam um conjunto com estrutura de grupo. Um exemplo de uma transformação com essa propriedade é o isomorfismo associado à matriz (2.4). Nesta seção consideramos também grupos de Lie lineares agindo sobre um espaço simplético, cujos elementos preservam e revertem a forma simplética do espaço.

Definição 2.29. *Sejam (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2) espaços simpléticos. Um isomorfismo $A : V_1 \to V_2$ que satisfaz*

$$\Omega_2(A(u), A(v)) = -\Omega_1(u, v),$$

para todos $u, v \in V_1$, é chamado antissimplectomorfismo.

De modo análogo ao que fizemos na Seção 2.3, mostramos agora que $A : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ é um antissimplectomorfismo se, e somente se, sua matriz associada A satisfaz a igualdade $A^t J_0 A = -J_0$. Para isso, consideremos α e β bases do domínio e da imagem de A, respectivamente. Então $A \in \mathbf{GL}(2n)$ e para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, temos $\Omega_0(A(u), A(v)) = -\Omega_0(u, v)$, ou seja,

$$[u]_\alpha^t A^t J_0 A[v]_\alpha = [A(u)]_\beta^t J_0 [A(v)]_\beta = -[u]_\alpha^t J_0 [v]_\alpha,$$

para todos $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, $A^t J_0 A = -J_0$. Reciprocamente, se $A \in \mathbf{GL}(2n)$ é tal que $A^t J_0 A = -J_0$, então A define um antissimplectomorfismo $A : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$.

Mais geralmente, dado um antissimplectomorfismo $A : (V_1, \Omega_1) \to (V_2, \Omega_2)$, se consideramos α e β as bases simpléticas de (V_1, Ω_1) e (V_2, Ω_2), respectivamente (que existem pelo Teorema 2.5), então a matriz $A \in \mathbf{GL}(2n)$ satisfaz $A^t J_0 A = -J_0$.

Ao contrário do grupo simplético, o conjunto

$$ASp(n) = \{A \in \mathbf{GL}(2n);\ A^t J_0 A = -J_0\}$$

não tem estrutura de grupo, pois não é fechado para a operação de multiplicação de matrizes. Entretanto, tal conjunto satisfaz algumas propriedades interessantes. Dentre elas, se $A \in ASp(n)$ então $A^{-1} \in ASp(n)$, pois $A^t J_0 A = -J_0$ implica em

$$-J_0 = (A^t)^{-1} J_0 A^{-1} = (A^{-1})^t J_0 A^{-1}.$$

Desse fato e da igualdade $J_0^2 = -I_{2n}$, segue ainda que

$$\begin{aligned} J_0 &= (-J_0)^{-1} \\ &= ((A^t)^{-1} J_0 A^{-1})^{-1} \\ &= A J_0^{-1} A^t \\ &= -A J_0 A^t, \end{aligned}$$

implicando que $A^t \in ASp(n)$. Dessa forma, o conjunto $ASp(n)$ pode ser reescrito como $ASp(n) = \{A \in \mathbf{GL}(2n);\ A J_0 A^t = -J_0\}$.

Definição 2.30. *Sejam Γ um grupo de Lie linear e $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ um epimorfismo. Dizemos que* *uma ação "$\cdot$" de Γ em um espaço simplético (V, Ω) é σ-**semissimplética** se*

$$\Omega(\gamma \cdot x, \gamma \cdot y) = \sigma(\gamma)\Omega(x, y),$$

*para todos $x, y \in V$ e todo $\gamma \in \Gamma$. Se σ for o homomorfismo trivial, dizemos apenas que a ação é **simplética**.*

Lembremos que se σ é um epimorfismo, pelo Primeiro Teorema do Isomorfismo, $\ker \sigma$ é um subgrupo de Γ de índice dois. Logo, se Γ não admite subgrupo de índice dois, então não é possível obter uma ação desse grupo em um espaço vetorial simplético que seja σ-semissimplética.

Observemos ainda que se a ação de Γ em (V, Ω) é simplética, Γ contém apenas simplectomorfismos, cujas representações matriciais são matrizes simpléticas. Além disso, como σ é um homomorfismo de grupos e a ação de Γ em V é linear, para mostrar que uma ação é simplética ou σ-semissimplética, basta verificar que é simplética ou σ-semissimplética em um conjunto de geradores de Γ.

Para o que segue, Ω_0 é a forma canônica definida no Exemplo 2.1.

Exemplo 2.31. Seja $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \equiv \{-1, 1\}$ agindo em $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ por meio da ação "$\cdot$" definida como $-1 \cdot x = -x$. Dados $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$, temos

$$\Omega_0(-1 \cdot u, -1 \cdot v) = \Omega_0(-u, -v) = [-u]^t J_0[-v] = [u]^t J_0[v] = \Omega_0(u, v).$$

Portanto, a ação de $\mathbb{Z}_2$ em $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ é simplética.

Exemplo 2.32. Consideremos o grupo especial ortogonal $SO(2)$ agindo em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Segue da Proposição 2.17 que $SO(2) \subset Sp(1)$, ou seja, toda matriz de $SO(2)$ é simplética e, portanto, induz um simplectomorfismo. Logo, $\Omega_0(\gamma \cdot u, \gamma \cdot v) = \Omega_0(u, v)$, para todo $\gamma \in SO(2)$ e todos $u, v \in \mathbb{R}^2$, mostrando que a ação de $SO(2)$ em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ é simplética.

Exemplo 2.33. Consideremos agora o grupo ortogonal $O(2)$ agindo em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ também por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Da Observação 1.4, sabemos que $O(2)$ é gerado por $SO(2)$ e $\kappa = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Pelo exemplo anterior, todos os elementos de $SO(2)$ preservam Ω_0, bastando então analisar a ação de κ na forma simplética. Dados $u = (u_1, u_2),\ v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned}
\Omega_0(\kappa \cdot u, \kappa \cdot v) &= \Omega_0((u_1, -u_2), (v_1, -v_2)) \\
&= -u_1 v_2 + u_2 v_1 \\
&= -(u_1 v_2 - u_2 v_1) \\
&= -\Omega_0((u_1, u_2), (v_1, v_2)) \\
&= -\Omega_0(u, v).
\end{aligned}$$

Logo, definindo $\sigma : O(2) \to \mathbb{Z}_2$ de forma que $\sigma(\gamma) = 1$ para todo $\gamma \in SO(2)$ e $\sigma(\kappa) = -1$, temos para todos $u, v \in \mathbb{R}^2$ que $\Omega_0(\gamma \cdot u, \gamma \cdot v) = \sigma(\gamma)\Omega_0(u, v)$ e, portanto, a ação de $O(2)$ em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ é σ-semissimplética.

Exemplo 2.34. Consideremos o grupo ortogonal $O(4)$ agindo em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ pela ação natural de multiplicação de matriz por vetor e tomemos

$$\gamma = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in O(4).$$

Se $u = (u_1, u_2, u_3, u_4),\ v = (v_1, v_2, v_3, v_4) \in \mathbb{R}^4$, então

$$\begin{aligned}
\Omega_0(\gamma \cdot u, \gamma \cdot v) &= \Omega_0((-u_1, -u_2, -u_3, u_4), (-v_1, -v_2, -v_3, v_4)) \\
&= u_1 v_3 - u_2 v_4 - u_3 v_1 + u_4 v_2 \\
&\neq \pm\Omega_0(u, v).
\end{aligned}$$

Portanto, a ação de $O(4)$ em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ não é simplética, nem σ-semissimplética, para qualquer epimorfismo $\sigma : O(4) \to \mathbb{Z}_2$.

Observação 2.35. Observemos que uma ação de um grupo de Lie linear Γ é σ-semissimplética, se, e somente se, as matrizes das representações ρ_γ de cada $\gamma \in \Gamma$ pertencem a $Sp(n) \cup ASp(n)$, mais especificamente, para cada $\gamma \in \Gamma$

$$[\rho_\gamma]^t J_0 [\rho_\gamma] = \sigma(\gamma) J_0,$$

onde $\sigma : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ é um epimorfismo.

CAPÍTULO 3

FORMAS NORMAIS PARA SISTEMAS HAMILTONIANOS

Como já mencionamos, a teoria de formas normais é uma ferramenta importante na análise qualitativa local de sistemas dinâmicos e o seu desenvolvimento para sistemas Hamiltonianos é o foco principal deste capítulo. O método clássico para encontrar formas normais consiste em aplicar sucessivas mudanças de coordenadas na série de Taylor do Hamiltoniano do campo (Definição 3.8) em torno de uma singularidade. O objetivo é anular tantos termos quanto possíveis do Hamiltoniano original, obtendo assim um Hamiltoniano convenientemente mais simples.

O método desenvolvido por Belitskii [4] para a obtenção de formas normais de campos vetoriais reduz o problema ao cálculo do núcleo do chamado operador homológico. Similarmente, para os Hamiltonianos dos campos de vetores o problema pode ser reduzido ao cálculo do núcleo do adjunto de um operador linear associado à forma quadrática da série de Taylor do Hamiltoniano. Tal procedimento é chamado de método do operador adjunto e está descrito na Subseção 3.4.1.

Um método algébrico alternativo, análogo ao método de Elphick et al. [17] para campos de vetores, é apresentado na Subseção 3.4.2, o qual identifica o núcleo do operador adjunto com o anel das funções polinomiais reais invariantes pelo grupo de Lie linear

$$S = \overline{\{e^{sA^t};\ s \in \mathbb{R}\}},$$

onde A é a matriz da parte linear do campo Hamiltoniano. Mais especificamente, pelo Teorema 3.35, uma forma normal do Hamiltoniano pode ser escolhida invariante por S, introduzindo, de certa forma, simetrias ao sistema. Na Seção 3.5, consideramos sistemas Hamiltonianos com simetrias (e possivelmente antissimetrias) a fim de obter formas normais dos respectivos Hamiltonianos preservando suas propriedades simétricas.

Iniciamos este capítulo com uma breve abordagem sobre sistemas dinâmicos e campos Hamiltonianos, descrita respectivamente nas Seções 3.1 e 3.2. A Seção 3.3 está dedicada à discussão de sistemas Hamiltonianos lineares e apresenta resultados preliminares ao método do operador adjunto descrito posteriormente.

3.1 Sistemas Dinâmicos

Para nossos propósitos, é suficiente a definição de campo de vetores em um aberto de $\mathbb{R}^n$, que em casos mais gerais é dada sobre uma variedade M. As definições aqui feitas podem ser facilmente estendidas para espaços vetoriais arbitrários de dimensão finita via isomorfismos. Com um abuso de notação, vamos nos referir nas seções seguintes a campos de vetores definidos em espaços vetoriais. Boas referências para este estudo são [32, 34, 38].

Entende-se por **campo de vetores** em um aberto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ uma correspondência $X : U \to \mathbb{R}^n$ que a cada ponto $x \in U$ associa um vetor $X(x)$ em $\mathbb{R}^n$. Dizemos que o campo de vetores é diferenciável ou de classe C^r, com $r \geq 1$, se tal correspondência é uma aplicação diferenciável ou de classe C^r, respectivamente.

Definição 3.1. *Sejam $(G, *)$ um grupo e e_G seu elemento neutro. Um* ***fluxo*** *em $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de aplicações $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com $t \in G$, satisfazendo $\phi_{r*s} = \phi_r \circ \phi_s$ e com ϕ_{e_G} sendo a aplicação identidade.*

Notemos que todo fluxo induz uma aplicação $\phi : G \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi(t, x) = \phi_t(x)$. Chamamos o trio $(\mathbb{R}^n, G, \phi)$ de **sistema dinâmico**, que é dito **discreto** se $G = \mathbb{Z}$ e **contínuo** se $G = \mathbb{R}$.

Exemplo 3.2. Consideremos o conjunto $\mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{R}^{n^2}$, o grupo $G = \mathbf{GL}(n)$ das matrizes invertíveis de ordem n munido com a operação de multiplicação de matrizes e a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbf{GL}(n) \times \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{M}_n(\mathbb{R}) \\ & (A, X) & \mapsto & AXA^{-1} \end{array}.$$

Para cada $A \in \mathbf{GL}(n)$, definamos $\phi_A(X) = \phi(A, X)$, para toda $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Então

$\phi_{I_n}(X) = I_n X I_n^{-1} = X$ e

$$\phi_{AB}(X) = ABX(AB)^{-1} = A(BXB^{-1})A^{-1} = A(\phi_B(X))A^{-1} = (\phi_A \circ \phi_B)(X),$$

para toda matriz $X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$. Isso mostra que $(\mathbb{M}_n(\mathbb{R}), \mathbf{GL}(n), \phi)$ é um sistema dinâmico.

Exemplo 3.3. Consideremos $\theta \in [0, 2\pi)$ e o grupo aditivo $G = \mathbb{Z}$. Tomemos, para cada $n \in \mathbb{Z}$, a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi_n : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) & \mapsto & R_\theta^n(x, y), \end{array}$$

onde R_θ é a rotação planar de ângulo θ mencionada na Observação 1.4. Temos que

$$\phi_0(x, y) = I_2(x, y) = (x, y)$$

e

$$\phi_{r+s}(x, y) = R_\theta^{r+s}(x, y) = R_\theta^r R_\theta^s(x, y) = R_\theta^r(R_\theta^s(x, y)) = (\phi_r \circ \phi_s)(x, y).$$

Assim, $(\mathbb{R}^2, \mathbb{Z}, \phi)$, com $\phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a aplicação induzida de ϕ_n, é um sistema dinâmico.

Todo campo de vetores $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ induz um sistema de equações diferenciais ordinárias dado por

$$\frac{d}{dt}x = X(x).$$

Se X é um campo de vetores diferenciável, então para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe uma única curva $\overline{\phi}_x : (\alpha_x, \beta_x) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, com $0 \in (\alpha_x, \beta_x)$, que é solução para esse sistema com condição inicial $\overline{\phi}_x(0) = x_0$. Assim, para cada $t \in \bigcup_{x \in \mathbb{R}^n} (\alpha_x, \beta_x)$, podemos induzir uma aplicação $\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de maneira que $\phi_t(x) = \overline{\phi}_x(t)$. Tal aplicação é um difeomorfismo local e satisfaz as condições da definição de fluxo. Uma prova detalhada dessas afirmações pode ser encontrada em [34, Seção 5.3]. Concluímos assim que um campo de vetores diferenciável em $\mathbb{R}^n$ induz um sistema de equações diferenciais ordinárias, que por sua vez induz um sistema dinâmico.

Reciprocamente, dado um fluxo diferenciável em $\mathbb{R}^n$ constituído por aplicações

$\phi_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, com $t \in G$, podemos definir

$$X(x) = \frac{d}{dt}\phi_t(x)\bigg|_{t=0}.$$

Geometricamente, dado $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\phi_t(x_0)$ é uma curva em $\mathbb{R}^n$ passando por x_0 e $X(x_0)$ é o vetor tangente a essa curva em x_0. Logo, um fluxo diferenciável induz um campo de vetores em $\mathbb{R}^n$, que por sua vez induz um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Exemplo 3.4. Consideremos para cada $t \in \mathbb{R}$ a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \phi_t : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(xe^t, \dfrac{y}{1-yt}\right) \end{array}.$$

Contas simples nos mostram que ϕ_0 é a aplicação identidade e que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$, para todos $t, s \in \mathbb{R}$, ou seja, $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, \phi)$ é um sistema dinâmico, onde $\phi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a aplicação induzida pelo fluxo. O campo de vetores induzido por esse fluxo é dado por

$$X(x,y) = \frac{d}{dt}\phi_t(x,y)\bigg|_{t=0} = (x, y^2).$$

Definição 3.5. *Sejam X um campo de vetores diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dizemos que x_0 é uma **singularidade** (ou um ponto crítico, ou um ponto de equilíbrio) de X se $X(x_0) = 0$. Caso contrário, x_0 é um **ponto regular.***

Como a aplicação $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $\psi(x) = x_0 - x$ é um difeomorfismo isométrico[1] de classe C^∞, podemos sempre supor que ao menos uma das singularidades de um campo de vetores (caso haja alguma) está na origem.

Exemplo 3.6. Consideremos o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X(x,y) = (-2x, y + y^3 + y^5).$$

Então $X(x,y) = (0,0)$ se, e somente se $(x,y) = (0,0)$. Logo, $(0,0)$ é a única singularidade de X.

[1]Difeomorfismo que preserva a norma do espaço.

Exemplo 3.7. Consideremos o campo vetorial em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X(x, y) = (y, x - x^2).$$

Então $X(x, y) = (0, 0)$ se, e somente se $(x, y) = (0, 0)$ ou $(x, y) = (1, 0)$. Logo, $(0, 0)$ e $(1, 0)$ são as singularidades de X.

3.2 Sistemas Hamiltonianos

A teoria de sistemas Hamiltonianos teve início após a formulação da mecânica clássica segundo Hamilton. Lagrange já havia libertado a mecânica clássica Newtoniana da exigência de um sistema de coordenadas inercial e Hamilton adaptou essa ideia passando a usar um espaço $2n$-dimensional. Iniciou-se então o desenvolvimento da geometria simplética, apresentada no capítulo anterior, que hoje é trabalhada independente de motivações físicas.

Na matemática, sistemas Hamiltonianos são sistemas de equações diferenciais que podem ser escritos na forma das equações de Hamilton como em (3.4). Tais sistemas são formulados em termos dos campos de vetores Hamiltonianos definidos em um espaço vetorial simplético e cujo Hamiltoniano contém toda a informação dinâmica do sistema.

Nesta seção, com o intuito de facilitar o entendimento, usamos a notação [.] para nos referirmos à representação matricial de uma transformação linear e, igualmente, à representação em forma de coluna das coordenadas de um vetor. Também assumimos V um espaço vetorial de dimensão finita igual a $2n$. As referências utilizadas são [28, 30].

Definição 3.8. *Dizemos que um campo de vetores $X_H : V \to V$ é **Hamiltoniano** se existem uma forma simplética $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ e uma função $H : V \to \mathbb{R}$ de classe C^r, com $r \geq 1$, tais que*

$$\widetilde{\Omega}(X_H(x)) = dH_x,$$

*para todo $x \in V$, onde $\widetilde{\Omega} : V \to V^*$ é a transformação linear associada à Ω definida em (2.2) e dH_x é a diferencial da função H no ponto x. Nesse caso, chamamos H de **Hamiltoniano** do campo X_H.*

Claramente, um sistema Hamiltoniano é um sistema de equações da forma $\frac{d}{dt}x = X_H(x)$, onde X_H é um campo Hamiltoniano. Assim, todo Hamiltoniano H determina um sistema Hamiltoniano e vice-versa.

Podemos obter uma definição equivalente à Definição 3.8 e que, muitas vezes, facilitará na demonstração dos resultados e no desenvolvimento deste capítulo. Para isso, consideremos $\mathfrak{B}$ uma base qualquer do espaço simplético (V, Ω). Notemos que a matriz $[dH_x]$ da transformação dH_x na base $\mathfrak{B}$ satisfaz

$$[dH_x] = [\nabla H(x)]^t, \tag{3.1}$$

onde ∇H é o vetor gradiente da função $H : V \to \mathbb{R}$. Da definição de campo Hamiltoniano temos que, para todos $x, y \in V$,

$$\Omega(X_H(x), y) = dH_x(y),$$

o que matricialmente nos dá

$$[X_H(x)]^t J[y] = [dH_x][y],$$

onde J é a matriz associada à forma bilinear Ω com relação à base $\mathfrak{B}$. Como y é arbitrário e vale (3.1), segue que

$$[X_H(x)]^t J = [\nabla H(x)]^t,$$

ou seja,

$$J^t[X_H(x)] = [\nabla H(x)],$$

para todo $x \in V$. Sendo Ω simplética, J é antissimétrica e, do Teorema 2.8, J é inversível. Assim, $(J^t)^{-1} = (-J)^{-1}$, donde segue que

$$[X_H(x)] = -J^{-1}[\nabla H(x)]. \tag{3.2}$$

Portanto, um campo X_H é Hamiltoniano se satisfaz (3.2), para todo $x \in V$ e para alguma função $H : V \to \mathbb{R}$ de classe C^r, com $r \geq 1$.

Se considerarmos $\mathfrak{B}$ uma base simplética de (V, Ω), então a matriz J é a matriz

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{bmatrix},$$

que satisfaz $J_0 = -J_0^{-1}$. Nesse caso, um campo Hamiltoniano pode ainda ser escrito na forma

$$[X_H(x)] = J_0[\nabla H(x)] \tag{3.3}$$

e a ele podemos associar o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} &= \dfrac{\partial H}{\partial v}(u,v) \\ \\ \dfrac{dv}{dt} &= -\dfrac{\partial H}{\partial u}(u,v) \end{cases}, \tag{3.4}$$

onde $x = (u, v) = (u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n) \in V$. As equações em (3.4) são usualmente chamadas de **equações de Hamilton**, em homenagem ao matemático irlandês William Rowan Hamilton, e o sistema é chamado de **sistema Hamiltoniano canônico.**

Exemplo 3.9. O sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= x \\ \\ \dfrac{dy}{dt} &= \sin x - y \end{cases}$$

é um sistema Hamiltoniano canônico. De fato, suponhamos que exista $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$x = \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \text{ e } \sin x - y = -\frac{\partial H}{\partial x}(x,y).$$

Então existem funções $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $xy + f_1(x) = H(x,y) = \cos x + yx + f_2(y)$. Assim, $f_1(x) = \cos x$ e $f_2 \equiv 0$ e, portanto, $H(x,y) = \cos x + xy$, que é uma função de classe C^∞.

Exemplo 3.10. Sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e consideremos o campo de vetores em $\mathbb{R}^4$ dado por $X(x_1, x_2, y_1, y_2) = (\alpha x_2, -\alpha x_1, \beta y_2, -\beta y_1)$. Esse campo é Hamiltoniano pois, para a matriz antissimétrica e invertível

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

que induz uma forma simplética Ω em $\mathbb{R}^4$, existe uma função $H : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, dada por

$$H(x_1, x_2, y_1, y_2) = \frac{\alpha}{2}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2}(y_1^2 + y_2^2),$$

tal que $[X_H(x_1, x_2, y_1, y_2)] = -J^{-1}[\nabla H(x_1, x_2, y_1, y_2)] = J[\nabla H(x_1, x_2, y_1, y_2)]$.

Mostrar que um campo é Hamiltoniano nem sempre é uma tarefa fácil e muitos resultados nesse contexto se devem à estrutura simplética de V. Outros resultados importantes são obtidos quando o campo Hamiltoniano X_H admite certas simetrias. Veremos na próxima subseção que dada uma ação de um grupo Γ no espaço simplético (V, Ω), os elementos de Γ podem agir de quatro formas distintas, dependendo se Γ age simpleticamente ou antissimpleticamente em V.

3.2.1 Tipos de Simetrias em Sistemas Hamiltonianos

Começamos relacionando as simetrias do campo Hamiltoniano X_H com as simetrias do Hamiltoniano H que gera o campo. Uma das implicações da demonstração do teorema a seguir é dada em [1, Lemma 2.2.9] para o caso em que a forma simplética é a canônica e a matriz da representação de Γ em V é ortogonal. Entretanto, além de provar a reciprocidade de tal resultado, generalizamo-lo para formas simpléticas quaisquer e sem a hipótese da matriz da representação ser ortogonal.

Teorema 3.11. *Seja Γ um grupo de Lie linear agindo no espaço simplético (V, Ω). Consideremos $\sigma, \chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ dois epimorfismos distintos, X_H um campo Hamiltoniano sobre V e suponhamos que a ação de Γ em (V, Ω) seja χ-semissimplética. Se X_H for um campo Γ_σ-reversível-equivariante e $H(0) = 0$, então o Hamiltoniano H é $\Gamma_{\sigma\chi}$-semi-invariante. Reciprocamente, se o Hamiltoniano H é Γ_σ-semi-invariante, então X_H é $\Gamma_{\sigma\chi}$-reversível-equivariante.*

Demonstração: Sejam $x, y \in V$ e $\gamma \in \Gamma$. Consideremos $\rho : \Gamma \to \mathbf{GL}(V)$ a representação de Γ em V e $\mathfrak{B}$ uma base qualquer de V. Chamemos de J a matriz associada à forma simplética Ω na base $\mathfrak{B}$. Do fato de a ação de Γ em (V, Ω) ser χ-semissimplética, temos que

$$\Omega(\rho(\gamma)X_H(x), \rho(\gamma)y) = \chi(\gamma)\Omega(X_H(x), y).$$

Escrevendo a igualdade acima matricialmente com relação à base $\mathfrak{B}$, temos

$$[\rho(\gamma)X_H(x)]^t J[\rho(\gamma)y] = \chi(\gamma)[X_H(x)]^t J[y],$$

o que implica em

$$[\rho(\gamma)X_H(x)]^t J[\rho(\gamma)] = \chi(\gamma)[X_H(x)]^t J. \tag{3.5}$$

Suponhamos primeiramente que X_H seja Γ_σ-reversível-equivariante e $H(0) = 0$. Então $\rho(\gamma)X_H(x) = \sigma(\gamma)X_H(\rho(\gamma)x)$ e (3.5) torna-se

$$[\sigma(\gamma)(X_H(\rho(\gamma)x))]^t J[\rho(\gamma)] = \chi(\gamma)[X_H(x)]^t J.$$

Da definição de campo Hamiltoniano dada em (3.2), temos

$$\sigma(\gamma)(-J^{-1}[\nabla H(\rho(\gamma)x)])^t J[\rho(\gamma)] = \chi(\gamma)(-J^{-1}[\nabla H(x)])^t J,$$

isto é,

$$\sigma(\gamma)[\nabla H(\rho(\gamma)x)]^t(-J^{-1})^t J[\rho(\gamma)] = \chi(\gamma)[\nabla H(x)]^t(-J^{-1})^t J.$$

Visto que J é antissimétrica, então $(-J^{-1})^t = J^{-1}$, de onde

$$\sigma(\gamma)[\nabla H(\rho(\gamma)x)]^t[\rho(\gamma)] = \chi(\gamma)[\nabla H(x)]^t.$$

Agora, usando (3.1) e o fato de $d(\rho(\gamma))_x = \rho(\gamma)$ (pois $\rho(\gamma)$ é um operador linear para cada $\gamma \in \Gamma$), segue que

$$\sigma(\gamma)[dH_{\rho(\gamma)x}d(\rho(\gamma))_x] = \chi(\gamma)[dH_x],$$

ou seja,

$$\sigma(\gamma)d(H \circ \rho(\gamma))_x = \chi(\gamma)dH_x.$$

Assim, $\sigma(\gamma)H(\rho(\gamma)x) = \chi(\gamma)H(x) + c$, onde c é uma constante. Como $H(0) = 0$, então

$$H(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)\chi(\gamma)H(x) = \sigma\chi(\gamma)H(x),$$

onde $\sigma\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ é o epimorfismo dado pelo produto de σ por χ. Então H é $\Gamma_{\sigma\chi}$-semi-invariante.

Reciprocamente, suponhamos que X_H seja um campo Hamiltoniano tal que H é Γ_σ-semi-invariante. Então

$$H(\rho(\gamma)x) = \sigma(\gamma)H(x).$$

Como $\sigma(\gamma)^2 = 1$ para todo $\gamma \in \Gamma$, derivando a igualdade acima com respeito a x e aplicando em y, temos

$$dH_x(y) = \sigma(\gamma)dH_{\rho(\gamma)x}(d(\rho(\gamma))_x(y)) = \sigma(\gamma)dH_{\rho(\gamma)x}(\rho(\gamma)y),$$

onde a última igualdade segue do fato de $\rho(\gamma)$ ser um operador linear. Matricialmente temos

$$[dH_x] = \sigma(\gamma)[dH_{\rho(\gamma)x}][\rho(\gamma)].$$

Ainda, de (3.1) segue que

$$[\nabla H(x)]^t = \sigma(\gamma)[\nabla H(\rho(\gamma)x)]^t[\rho(\gamma)].$$

Por outro lado, da definição dada em (3.2), temos

$$[\nabla H(x)]^t = -[X_H(x)]^t J^t$$

e, do mesmo modo,

$$[\nabla H(\rho(\gamma)x)]^t = -[X_H(\rho(\gamma)x)]^t J^t.$$

Assim, do fato de J ser antissimétrica segue que

$$[X_H(x)]^t J = \sigma(\gamma)[X_H(\rho(\gamma)x)]^t J[\rho(\gamma)],$$

o que implica em

$$\chi(\gamma)[X_H(x)]^t J = \sigma(\gamma)\chi(\gamma)[X_H(\rho(\gamma)x)]^t J[\rho(\gamma)].$$

Comparando a igualdade acima com (3.5), devemos ter

$$\sigma(\gamma)\chi(\gamma)[X_H(\rho(\gamma)x)]^t = [\rho(\gamma)X_H(x)]^t,$$

o que em coordenadas torna-se

$$X_H(\rho(\gamma)x) = \sigma\chi(\gamma)\rho(\gamma)X_H(x),$$

onde $\sigma\chi : \Gamma \to \mathbb{Z}_2$ é o epimorfismo dado pelo produto de σ por χ. Isso prova que o campo X_H é $\Gamma_{\sigma\chi}$-reversível-equivariante, concluindo a demonstração. $\square$

Observação 3.12. O teorema acima continua válido para o caso em que σ ou χ são homomorfismos triviais, ou ainda são iguais, bastando apenas uma adaptação de terminologias. Nesse caso, se σ é o homomorfismo trivial, então X_H é Γ-equivariante se, e somente se, H é Γ_χ-semi-invariante. Do mesmo modo, se χ é o homomorfismo trivial, então a ação de Γ em (V, Ω) é simplética e X_H é Γ_σ-reversível-equivariante se, e somente se, H é Γ_σ-semi-invariante. Ainda, se $\sigma = \chi$ (epimorfismos ou não), então X_H é Γ_σ-reversível-equivariante (ou Γ-equivariante, caso σ não seja um epimorfismo) se, e somente se, H é Γ-invariante.

Observação 3.13. Na primeira parte do Teorema 3.11, pedimos que $H(0) = 0$. Notemos que essa hipótese não enfraquece nosso resultado, uma vez que dado um campo Hamiltoniano, sempre existe um Hamiltoniano H de maneira que $H(0) = 0$. De fato, se X é um campo Hamiltoniano, então existe um Hamiltoniano H tal que $X(x) = -J^{-1}\nabla H(x)$. Se $H(0) = c \neq 0$, podemos tomar $\overline{H}$ de modo que para cada x tenhamos $\overline{H}(x) = H(x) - c$. Então $\overline{H}(0) = 0$ e, além disso, $\nabla\overline{H}(x) = \nabla H(x)$. Assim, $\overline{H}$ é um Hamiltoniano para o campo X que se anula em 0.

Assim, no contexto Hamiltoniano reversível-equivariante existem quatro tipos de simetrias. Para ver isso, consideremos $H : V \to \mathbb{R}$ o Hamiltoniano que gera o campo Hamiltoniano X_H e suponhamos que Γ seja um grupo de Lie linear agindo em V.

Nas condições do Teorema 3.11 temos o seguinte: se X_H é Γ_σ-reversível-equivariante, dizemos que $\gamma \in \Gamma_+ = \ker\sigma$ é uma simetria de X_H e $\gamma \in \Gamma_- = \Gamma\backslash\Gamma_+$ é uma antissimetria de X_H. Podem então ocorrer quatro casos:

(i) Caso Equivariante Simplético (ES): $\gamma \in \Gamma_+$ age simpleticamente em V. Nesse caso, $\chi(\gamma) = 1$ e H é γ-invariante;

(ii) Caso Equivariante Antissimplético (EA): $\gamma \in \Gamma_+$ age antissimpleticamente em V. Nesse caso, $\chi(\gamma) = -1$ e H é γ-anti-invariante;

(iii) Caso Reversível Simplético (RS): $\gamma \in \Gamma_-$ age simpleticamente em V. Nesse caso, $\chi(\gamma) = 1$ e H é γ-anti-invariante;

(iv) Caso Reversível Antissimplético (RA): $\gamma \in \Gamma_-$ age antissimpleticamente em V. Nesse caso, $\chi(\gamma) = -1$ e H é γ-invariante.

De forma particular, se X_H é Γ-equivariante (quando σ é trivial), então todos os elementos de Γ são simetrias de X_H e podem ocorrer apenas os casos ES (quando $\chi(\gamma) = 1$) e EA (quando $\chi(\gamma) = -1$).

Resumimos tais informações na tabela abaixo:

Tipos de Simetrias	σ	χ	$\sigma\chi$
ES	1	1	1
EA	1	-1	-1
RS	-1	1	-1
RA	-1	-1	1

Tabela 3.1: Possíveis tipos de simetrias em sistemas Hamiltonianos.

3.3 Sistemas Hamiltonianos Lineares

Nesta seção, apresentamos importantes resultados sobre campos Hamiltonianos lineares que serão usados no estudo das formas normais da próxima seção. Nossa principal referência aqui é [14].

Sabemos que dado um sistema de equações diferenciais lineares

$$\frac{d}{dt}x = A(x),$$

onde $A : V \to V$ é um operador linear e V é um espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$, podemos, sem mudar a estrutura topológica do espaço, considerar o caso em que A está na sua forma canônica de Jordan. Existe um estudo semelhante referente à formas normais para sistemas Hamiltonianos lineares que mantém a hamiltoneidade do campo. Esse estudo foi desenvolvido por Burgoyne e Cushman [11] e não será feito aqui, visto que nosso objetivo é trabalhar com formas normais para campos Hamiltonianos não-lineares.

Comecemos relembrando duas definições de álgebra linear:

Definição 3.14. *Sejam V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial e $\Omega : V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear. Uma* ***forma quadrática*** *em V é uma função $q : V \to \mathbb{R}$ que satisfaz*

$$q(v) = \Omega(v, v)$$

para todo $v \in V$. Além disso, dizemos que Ω é ***simétrica*** *se $\Omega(u, v) = \Omega(v, u)$, para todos $u, v \in V$.*

Assim como no caso das formas bilineares antissimétricas, a matriz de uma forma bilinear simétrica com relação a qualquer base do espaço é simétrica e, além disso, existe um isomorfismo entre o espaço das formas bilineares simétricas e o espaço das matrizes simétricas em $\mathbb{M}_n(\mathbb{R})$.

Proposição 3.15. *Se q é uma forma quadrática em V então existe uma forma bilinear simétrica Ω_S tal que $q(v) = \Omega_S(v, v)$, para todo $v \in V$.*

Demonstração: Seja q uma forma quadrática em V. Então existe Ω uma forma bilinear tal que $q(v) = \Omega(v, v)$ para todo $v \in V$. Consideremos a aplicação $\Omega_S : V \times V \to \mathbb{R}$ definida por

$$\Omega_S(u, v) = \frac{1}{2}(\Omega(u, v) + \Omega(v, u)).$$

Do fato de Ω ser uma forma bilinear segue que Ω_S também é e, claramente, podemos ver que Ω_S é simétrica. Além disso, $\Omega_S(v, v) = \Omega(v, v)$. Assim, $q(v) = \Omega_S(v, v)$ para todo $v \in V$, mostrando o desejado. $\square$

Pelo Teorema 2.12, sempre que estivermos trabalhando em espaços vetoriais simpléticos podemos supor, sem perda de generalidade, que ele é da forma $(\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$, considerando em $\mathbb{R}^{2n}$ a base canônica usual. Assim, a partir daqui, consideramos apenas campos Hamiltonianos da forma (3.3), ou seja,

$$X_H(x) = J_0 \nabla H(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}. \tag{3.6}$$

Se a aplicação H for uma forma quadrática, então pela proposição anterior existe uma forma simétrica Ω_S tal que $H(x) = \Omega_S(x,x)$. Tomando a matriz simétrica $B = 2[\Omega_S]$, temos que

$$H(x) = \frac{1}{2}\langle x, B(x)\rangle,$$

onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{2n}$. A recíproca também é verdadeira, isto é, se $H(x) = \frac{1}{2}\langle x, B(x)\rangle$, então H é uma forma quadrática. Para ver isso, basta definir a forma bilinear $\Omega(x,y) = [x]^t \frac{1}{2} B[y]$ de modo que $H(x) = \Omega(x,x)$.

Vamos então calcular $\nabla H(x)$ para o caso em que H é uma forma quadrática, ou seja, para o caso em que $H(x) = \frac{1}{2}\langle x, B(x)\rangle$ com B uma matriz simétrica. Escrevendo $x = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ e $B = (b_{ij})$, notemos que

$$B(x) = \left(\sum_{i=1}^{2n} b_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{2n} b_{2i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{2n} b_{2ni}x_i \right).$$

Além disso,

$$\nabla H(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\langle x, B(x)\rangle, \frac{\partial}{\partial x_2}\langle x, B(x)\rangle, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_{2n}}\langle x, B(x)\rangle \right).$$

Agora, como para cada $j \in \{1, \cdots, 2n\}$ temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_j}\langle x, B(x)\rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} x, B(x) \right\rangle + \left\langle x, \frac{\partial}{\partial x_j} B(x) \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{2n} b_{ji}x_i + \langle (x_1, x_2, \cdots, x_{2n}), (b_{1j}, b_{2j}, \cdots, b_{2nj}) \rangle \\
&= \sum_{i=1}^{2n} b_{ji}x_i + \sum_{i=1}^{2n} b_{ij}x_i
\end{aligned}$$

e como B é simétrica, segue que

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\langle x, B(x)\rangle = 2\sum_{i=1}^{2n} b_{ji}x_i.$$

Logo,

$$\nabla H(x) = \left(\sum_{i=1}^{2n} b_{1i}x_i, \sum_{i=1}^{2n} b_{2i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{2n} b_{2ni}x_i \right) = B(x).$$

Dessa forma, para tal H podemos reescrever o campo Hamiltoniano (3.6) como

$$X_H(x) = J_0 B(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

onde B é uma matriz simétrica. Estamos aptos agora a demonstrar o próximo resultado.

Proposição 3.16. *Um sistema linear de equações*

$$\frac{d}{dt}x = A(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{3.7}$$

é Hamiltoniano se, e somente se, a matriz A é hamiltoniana, ou seja, $A \in \mathfrak{sp}(n)$.

Demonstração: Suponhamos que o sistema (3.7) seja Hamiltoniano. Então existe uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ de classe C^r, com $r \geq 1$, tal que

$$\frac{d}{dt}x = X_H(x) = J_0 \nabla H(x).$$

Como o sistema é linear, a função H tem grau dois e, portanto, é uma forma quadrática. Assim, da discussão feita anteriormente, $A = J_0 B$ para alguma matriz simétrica B. Logo, $BJ_0 = J_0^{-1} A J_0 = -J_0 A J_0$ uma vez que $J_0^2 = -I_{2n}$ e, como $J_0^t = -J_0$, temos

$$A = J_0 B = -J_0^t B^t = -(BJ_0)^t = -(-J_0 A J_0)^t = J_0^t A^t J_0^t = (-J_0)A^t(-J_0) = J_0 A^t J_0,$$

provando que $A \in \mathfrak{sp}(n)$. Reciprocamente, suponhamos $A = J_0 A^t J_0$ e definamos $B = J_0^{-1} A = J_0^t A$. Assim,

$$B = J_0^{-1} A = J_0^{-1} J_0 A^t J_0 = A^t J_0 = (J_0^t A)^t = B^t,$$

isto é, B é simétrica. Definindo $H(x) = \dfrac{1}{2}\langle x, B(x) \rangle$, onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$, seguem que H é uma aplicação de classe C^∞ e $\nabla H(x) = B(x)$ (como mostrado na discussão anterior à proposição). Logo

$$\frac{d}{dt}x = A(x) = J_0B(x) = J_0\nabla H(x),$$

mostrando que o sistema (3.7) é Hamiltoniano. □

Definição 3.17. *Se $M : (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0) \to (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0)$ é um simplectomorfismo, então chamamos $x = M(y)$, com $y \in \mathbb{R}^{2n}$, de* ***mudança de variáveis simplética****.*

Proposição 3.18. *Toda mudança de variáveis simplética $x = M(y)$ transforma um sistema Hamiltoniano linear em um sistema Hamiltoniano linear.*

Demonstração: Seja $x = M(y)$ uma mudança de variáveis simplética e consideremos

$$\frac{d}{dt}x = A(x), \quad x \in \mathbb{R}^{2n},$$

um sistema Hamiltoniano linear. Como M é um simplectomorfismo, a matriz de M pertence a *Sp*(n), ou seja, $MJ_0M^t = J_0$. Como vimos na demonstração da proposição anterior, $A = J_0B$ para alguma matriz simétrica B. Então vamos aplicar a mudança de variáveis $x = M(y)$ no sistema Hamiltoniano linear

$$\frac{d}{dt}x = J_0B(x).$$

Temos que $M\frac{d}{dt}y = J_0BM(y)$ e, assim,

$$\frac{d}{dt}y = M^{-1}J_0BM(y) = J_0M^tBM(y) = J_0\widetilde{B}(y),$$

onde $\widetilde{B} = M^tBM$. Além disso, o fato de B ser simétrica implica que $\widetilde{B}$ também é simétrica e, portanto,

$$\frac{d}{dt}y = J_0\widetilde{B}(y)$$

é ainda um campo Hamiltoniano linear. De fato, definindo $H : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ como $H(y) = \frac{1}{2}\langle y, \widetilde{B}(y)\rangle$, onde $\langle\ ,\ \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$, temos que $\nabla H(y) = \widetilde{B}(y)$, provando o desejado. □

3.4 Formas Normais de Sistemas Hamiltonianos Não-Lineares

O objetivo desta seção é desenvolver a teoria de formas normais para sistemas Hamiltonianos não-lineares no nível do Hamiltoniano H. Ao contrário do caso linear, os resultados apresentados nesta seção são locais e não garantem a unicidade da forma normal. Apesar disso, tal teoria é uma ferramenta útil e tem a finalidade de facilitar o estudo local de campos Hamiltonianos não-lineares na vizinhança de uma singularidade.

Como mencionamos na Introdução, a simplificação do Hamiltoniano se dá por meio de uma escolha adequada de mudanças de coordenadas que é aplicada sucessivamente em sua série de Taylor. Essas mudanças de coordenadas são difeomorfismos simpléticos na forma de séries formais e somente em poucos casos tais séries são convergentes (veja [10]). Do ponto de vista das aplicações, termos de ordem alta são desprezados e essa é a principal razão pela qual consideramos aqui apenas formas normais até uma certa ordem.

Nesta seção, nossa principal referência continua sendo [14]. Faremos uso do espaço vetorial real P_{2n}^k das funções polinomiais reais homogêneas de grau k com variáveis em $\mathbb{R}^{2n}$. Também faremos uso constante das notações $O(x^r)$ e $O_{2n}(x^r)$. A primeira será usada para denotar uma soma infinita de polinômios homogêneos de grau maior ou igual a r e a segunda para denotar uma $2n$-upla em que cada entrada é da forma $O(x^r)$. Em toda esta seção, U denotará uma vizinhança da origem em $\mathbb{R}^{2n}$.

Uma base para P_{2n}^k é

$$\{F_k^\alpha;\ |\alpha| = k\},$$

onde $F_k^\alpha(x) = x^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n})$ é um multi-índice com inteiros $\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n}$ não negativos, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \dots x_{2n}^{\alpha_{2n}}$ e $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_{2n}$. Podemos definir um produto interno em P_{2n}^k como segue:

Definição 3.19. *Sejam $F_k, G_k \in P_{2n}^k$. Então $F_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^\alpha$ e $G_k(x) = \sum_{|\beta|=k} g_\beta x^\beta$, onde $f_\alpha, g_\beta \in \mathbb{R}$. Definimos um* ***produto interno em*** *P_{2n}^k como a função $\langle\ ,\ \rangle_1 : P_{2n}^k \times P_{2n}^k \to \mathbb{R}$*

dada por

$$\langle F_k, G_k \rangle_1 = \sum_{\substack{\alpha=\beta,\\ |\alpha|=k}} f_\alpha g_\beta \alpha!,$$

onde $\alpha! = \alpha_1! \dots \alpha_{2n}!$.

Consideremos agora um sistema Hamiltoniano de equações

$$\frac{d}{dt}x = J_0 \nabla H(x), \quad x \in U \subset \mathbb{R}^{2n},$$

onde H é de classe C^∞, $H(0) = 0$ e $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é ponto crítico de H. Fixando $r \geq 3$, troquemos H por sua expansão em série de Taylor em torno da origem dada por

$$H_2(x) + H_3(x) + \dots + H_r(x) + O(x^{r+1}),$$

onde para todo $k \in \{2, \cdots, r\}$ temos $H_k \in P^k_{2n}$. Para fazer sentido o estudo que será feito aqui, vamos supor que H_2 não é identicamente nula. Além disso, com abuso de notação, escrevemos

$$H(x) = H_2(x) + H_3(x) + \dots + H_r(x) + O(x^{r+1}). \tag{3.8}$$

Definição 3.20. *Um difeomorfismo $D : U \subseteq \mathbb{R}^{2n} \to D(U) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$ é chamado de **difeomorfismo simplético** se a matriz da diferencial $dD_y : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ é simplética para todo $y \in U$, isto é, se*

$$[dD_y]^t J_0 [dD_y] = J_0.$$

*Nesse caso, $x = D(y)$, com $y \in U$, é chamado de **mudança de variáveis difeomorficamente simplética.***

O próximo resultado nos diz que simplificar um sistema Hamiltoniano por meio de uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética é equivalente a simplificar seu Hamiltoniano compondo-o com essa mudança.

Teorema 3.21. *Uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética $x = D(y)$, com $y \in U$, transforma um sistema Hamiltoniano em $\widetilde{U} = D(U)$ com Hamiltoniano H em um sistema Hamiltoniano em U com Hamiltoniano $H \circ D$.*

Demonstração: Novamente, usamos a notação $[\cdot]$ para nos referirmos à representação matricial de um operador e das coordenadas de um vetor. Consideremos $x = D(y)$, com $y \in U$, uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética e

$$\frac{d}{dt}x = J_0 \nabla H(x), \quad x \in \widetilde{U} = D(U),$$

um sistema Hamiltoniano, onde H é de classe C^∞. Substituindo a mudança de variáveis na igualdade acima e usando a regra da cadeia, temos

$$[dD_y]\left[\frac{d}{dt}y\right] = \left[\frac{d}{dt}(D(y))\right] = J_0[\nabla H(D(y))], \quad y \in U. \tag{3.9}$$

Agora, de (3.1) temos que $[\nabla H(D(y))]^t = [dH_{D(y)}]$ e $[\nabla(H \circ D)(y)]^t = [d(H \circ D)_y]$, e pela regra da cadeia segue que $dH_{D(y)} dD_y = d(H \circ D)_y$. Assim,

$$\begin{aligned} [\nabla H(D(y))]^t &= [dH_{D(y)}] \\ &= [d(H \circ D)_y][dD_y]^{-1} \\ &= [\nabla(H \circ D)(y)]^t [dD_y]^{-1} \\ &= (([dD_y]^t)^{-1} \, [\nabla(H \circ D)(y)])^t. \end{aligned}$$

Logo, (3.9) torna-se

$$\left[\frac{d}{dt}y\right] = [dD_y]^{-1} J_0 ([dD_y]^t)^{-1} [\nabla(H \circ D)(y)], \quad y \in U. \tag{3.10}$$

Além disso, do fato de $x = D(y)$ ser uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética e de $J_0^{-1} = -J_0$, temos que

$$[dD_y]^{-1} J_0 ([dD_y]^t)^{-1} = J_0, \quad \forall\, y \in U.$$

Logo, em coordenadas (3.10) torna-se

$$\frac{d}{dt}y = J_0 \nabla(H \circ D)(y), \quad y \in U. \tag{3.11}$$

Notemos que $H \circ D$ é ainda de classe C^∞ e, portanto, (3.11) é um sistema Hamiltoniano com Hamiltoniano $H \circ D$. □

Portanto, é natural agora restringirmos a teoria de formas normais ao Hamiltoniano do campo de vetores via uma mudança de variáveis conveniente. Em [14, Section

2.7, Lemmas 7.3-7.7] os autores garantem que toda mudança de variáveis difeomorficamente simplética próxima à identidade é da forma

$$x = y + J_0 \nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k), \quad y \in U, \tag{3.12}$$

para alguma $F_k \in P_{2n}^k$, com $k \geq 3$ e $O_{2n}(y^k)$ se aproximando da origem de $\mathbb{R}^{2n}$ conforme y também se aproxima. Reciprocamente, toda mudança de variáveis próxima à identidade da forma (3.12) é difeomorficamente simplética, para U uma vizinhança suficientemente pequena da origem. Para o que segue, vamos assumir tais fatos sem apresentar suas provas.

Lema 3.22. *Se H_2 é uma forma quadrática em $\mathbb{R}^{2n}$, então para todo $k \geq 3$ e toda $F_k \in P_{2n}^k$, os termos de ordem k da expansão de $H_2(y + J_0 \nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k))$ são dados por*

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F_k}{\partial y_{n+i}}(y) \frac{\partial H_2}{\partial y_i}(y) - \frac{\partial H_2}{\partial y_{n+i}}(y) \frac{\partial F_k}{\partial y_i}(y) \right).$$

Demonstração: Seja $H_2 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma forma quadrática. Como vimos na seção anterior, existe $B \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ uma matriz simétrica (com igual notação para o operador linear associado) tal que $H_2(x) = \dfrac{1}{2}\langle x, B(x) \rangle$, onde $\langle \ , \ \rangle$ é o produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$, e $\nabla H_2(x) = B(x)$. Observemos que como B é um operador linear, quando aplicado à uma $2n$-upla cujas entradas são polinômios homogêneos, a ordem de tais polinômios é mantida. Além disso, o produto interno canônico de duas $2n$-uplas onde cada entrada i da primeira $2n$-upla é um polinômio de grau l_i e da segunda de grau k_i, com $i \in \{1, \cdots, 2n\}$, resulta em um polinômio cujos monômios são nulos ou de grau no mínimo $min_{i \in \{1, \cdots, 2n\}}\{l_i + k_i\}$. Dessa forma, como $F_k \in P_{2n}^k$, temos

$$\langle y, O_{2n}(y^k) \rangle + \langle J_0 \nabla F_k(y), B J_0 \nabla F_k(y) \rangle + \langle J_0 \nabla F_k(y), O_{2n}(y^k) \rangle = O(y^{k+1})$$

e

$$\langle O_{2n}(y^k), B(y) + B J_0 \nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k) \rangle = O(y^{k+1}).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
& H_2(y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k)) \\
= \;& \frac{1}{2}\langle y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k), B(y) + BJ_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k)\rangle \\
= \;& \frac{1}{2}\langle y, B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle y, BJ_0\nabla F_k(y)\rangle + O(y^{k+1}) \\
= \;& H_2(y) + \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle y, BJ_0\nabla F_k(y)\rangle + O(y^{k+1}). \qquad (3.13)
\end{aligned}
$$

Portanto, os termos de ordem k de $H_2(y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k))$ são dados por

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle y, BJ_0\nabla F_k(y)\rangle \\
= \;& \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle B(y), J_0\nabla F_k(y)\rangle \\
= \;& \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle + \frac{1}{2}\langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle \\
= \;& \langle J_0\nabla F_k(y), B(y)\rangle \\
= \;& \langle J_0\nabla F_k(y), \nabla H_2(y)\rangle \\
= \;& \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial F_k}{\partial y_{n+i}}(y)\frac{\partial H_2}{\partial y_i}(y) - \frac{\partial H_2}{\partial y_{n+i}}(y)\frac{\partial F_k}{\partial y_i}(y)\right), \qquad (3.14)
\end{aligned}
$$

onde a primeira igualdade segue pois B é simétrica (e portanto $B^* = B$) e a segunda igualdade é devida à propriedade de simetria do produto interno em $\mathbb{R}$. $\square$

Definição 3.23. *Sejam $P, Q : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe C^1. Definimos o* ***colchete de Poisson*** *entre P e Q como a função $[P, Q] : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$[P, Q](x) = \langle J_0\nabla P(x), \nabla Q(x)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P}{\partial x_{n+i}}(x)\frac{\partial Q}{\partial x_i}(x) - \frac{\partial Q}{\partial x_{n+i}}(x)\frac{\partial P}{\partial x_i}(x)\right).$$

Definição 3.24. *Dada uma forma quadrática $q : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$, definimos o operador linear $ad_q^k : P_{2n}^k \to P_{2n}^k$ por*

$$ad_q^k(F) = [q, F].$$

É importante notar que se H_2 e F_k são como no Lema 3.22, então por (3.13) e por (3.14) segue que

$$H_2(y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k)) = H_2(y) + [F_k, H_2](y) + O(y^{k+1}).$$

Como $[F_k, H_2] = -[H_2, F_k] = -ad^k_{H_2}(F_k)$, temos que

$$H_2(y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k)) = H_2(y) - ad^k_{H_2}(F_k)(y) + O(y^{k+1}). \tag{3.15}$$

Observação 3.25. Observemos que para todo $k \in \{3, \cdots, r\}$, podemos escrever $H_k \in P^k_{2n}$ como

$$H_k(x) = \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \left(h_\alpha \prod_{i=1}^{2n} x_i^{\alpha_i} \right),$$

onde $h_\alpha \in \mathbb{R}$. Logo, fixado $r \geq 3$ e dada $F_r \in P^r_{2n}$, temos

$$\begin{aligned}
H_k(y + J_0\nabla F_r(y) + O_{2n}(y^r)) &= \sum_{|\alpha|=k} \left(h_\alpha \prod_{i=1}^{2n} (y_i + (J_0\nabla F_r(y))_i + (O_{2n}(y^r))_i)^{\alpha_i} \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \left(h_\alpha \prod_{i=1}^{2n} (y_i + O(y^{r-1}))^{\alpha_i} \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \left(h_\alpha \prod_{i=1}^{2n} \left[\sum_{t=0}^{\alpha_i} \begin{pmatrix} \alpha_i \\ t \end{pmatrix} y_i^{\alpha_i - t} O(y^{r-1})^t \right] \right) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} \left(h_\alpha \prod_{i=1}^{2n} y_i^{\alpha_i} \right) + O(y^{r+1}) \\
&= \sum_{|\alpha|=k} h_\alpha y^\alpha + O(y^{r+1}) \\
&= H_k(y) + O(y^{r+1}),
\end{aligned}$$

onde a quarta igualdade segue pois $|\alpha| = k \geq 3$.

Para o próximo resultado, denotaremos por $\mathfrak{D}^k$ qualquer subespaço complementar a $ad^k_{H_2}(P^k_{2n})$, ou seja, $\mathfrak{D}^k$ é um subespaço de P^k_{2n} que satisfaz

$$P^k_{2n} = ad^k_{H_2}(P^k_{2n}) \oplus \mathfrak{D}^k. \tag{3.16}$$

Teorema 3.26. *Fixemos um inteiro $r \geq 3$. Seja $H : U \subset \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de classe C^∞ tal que $H(0) = 0$ e $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ é um ponto crítico de H. Então existem $U_r \subset U_{r-1} \subset \cdots \subset U_3 \subset U$ vizinhanças da origem suficientemente pequenas tais que a sequência de mudanças de variáveis difeomorficamente simpléticas próximas à identidade*

$$x = D_k(y) = y + J_0\nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k), \quad y \in U_k, \ F_k \in P^k_{2n},$$

com $k \in \{3, \cdots, r\}$, quando aplicadas consecutivamente a partir da equação (3.8), nos fornece um Hamiltoniano da forma

$$K(y) = H_2(y) + K_3(y) + \cdots + K_r(y) + O(y^{r+1}), \quad y \in U_r, \tag{3.17}$$

onde $K_k \in \mathfrak{D}^k$ para todo $k \in \{3, \cdots, r\}$.

Demonstração: Faremos a prova por indução em k. Para $k = 3$ tomemos $U_3 \subset U$ uma vizinhança de $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ e $F_3 \in P^3_{2n}$ de forma que

$$x = D_3(y) = y + J_0 \nabla F_3(y) + O_{2n}(y^3), \quad y \in U_3, \tag{3.18}$$

seja uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética próxima à identidade. Aplicando (3.18) em (3.8) e usando (3.15), temos

$$\begin{aligned} K^3(y) &= (H \circ D_3)(y) \\ &= H_2(D_3(y)) + H_3(D_3(y)) + \cdots + H_r(D_3(y)) + O(y^{r+1}) \\ &= H_2(y) - ad^3_{H_2}(F_3)(y) + O(y^4) + H_3(D_3(y)) + \cdots + H_r(D_3(y)) + O(y^{r+1}) \end{aligned}$$

com $y \in U_3$. Pelo Teorema 3.21, K^3 é o Hamiltoniano que gera o campo Hamiltoniano resultante após a mudança de variáveis (3.18). Notemos que para cada $k \in \{3, \cdots, r\}$, $H_k \circ D_3 \in P^k_{2n} \oplus P^{k+1}_{2n} \oplus \cdots \oplus P^r_{2n} \oplus O(y^{r+1})$. Reordenando então as parcelas da soma de $K^3(y)$, podemos escrevê-lo como

$$K^3(y) = H_2(y) - ad^3_{H_2}(F_3)(y) + H^3_3(y) + \cdots + H^3_r(y) + O(y^{r+1}),$$

onde $y \in U_3$ e $H^3_k \in P^k_{2n}$ para todo $k \in \{3, \cdots, r\}$. Agora, como $H^3_3 \in P^3_{2n}$ e também $ad^3_{H_2}(F_3) \in ad^3_{H_2}(P^3_{2n})$, podemos escolher apropriadamente o complementar $\mathfrak{D}^k$ em (3.16) para $k = 3$ de modo que $K_3 = H^3_3 - ad^3_{H_2}(F_3) \in \mathfrak{D}^3$. Logo,

$$K^3(y) = H_2(y) + K_3(y) + H^3_4(y) + \cdots + H^3_r(y) + O(y^{r+1}), \quad y \in U_3,$$

com $K_3 \in \mathfrak{D}^3$.

Suponhamos agora que o teorema seja válido para $r - 1$. Então existem vizinhanças

$U_{r-1} \subset \cdots \subset U_3 \subset U$ da origem tais que, para $k \in \{3, \cdots, r-1\}$,

$$x = D_k(y) = y + J_0 \nabla F_k(y) + O_{2n}(y^k), \quad y \in U_k,\ F_k \in P_{2n}^k,$$

é uma sequência de mudanças de variáveis difeomorficamente simpléticas próximas à identidade, as quais quando aplicadas consecutivamente a partir da equação (3.8) resulta em um Hamiltoniano da forma

$$K^{r-1}(x) = H_2(x) + K_3(x) + \cdots + K_{r-1}(x) + H_r^{r-1}(x) + O(x^{r+1}), \quad x \in U_{r-1} \tag{3.19}$$

com $K_k \in \mathfrak{D}^k$ para todo $k \in \{3, \cdots, r-1\}$ e $H_r^{r-1} \in P_{2n}^r$.

Seja $U_r \subset U_{r-1}$ uma vizinhança da origem de maneira que

$$x = D_r(y) = y + J_0 \nabla F_r(y) + O_{2n}(y^r), \quad y \in U_r,\ F_r \in P_{2n}^r,$$

seja uma mudança de variáveis difeomorficamente simplética próxima à identidade. Aplicando-a em (3.19) e usando (3.15), temos

$$\begin{aligned}
& K^r(y) \\
= \ & (K^{r-1} \circ D_r)(y) \\
= \ & H_2(D_r(y)) + K_3(D_r(y)) + \cdots + K_{r-1}(D_r(y)) + H_r^{r-1}(D_r(y)) + O(y^{r+1}) \\
= \ & H_2(y) - ad_{H_2}^r(F_r)(y) + O(y^{r+1}) + K_3(D_r(y)) + \cdots + H_r^{r-1}(D_r(y)) + O(y^{r+1}) \\
= \ & H_2(y) - ad_{H_2}^r(F_r)(y) + K_3(D_r(y)) + \cdots + K_{r-1}(D_r(y)) + H_r^{r-1}(D_r(y)) + O(y^{r+1}),
\end{aligned}$$

com $y \in U_r$. Pelo Teorema 3.21, K^r é o Hamiltoniano que gera o campo Hamiltoniano resultante após as sucessivas mudanças de variáveis. Pela Observação 3.25, a última igualdade pode ser reescrita como

$$K^r(y) = H_2(y) - ad_{H_2}^r(F_r)(y) + K_3(y) + \cdots + K_{r-1}(y) + H_r^{r-1}(y) + O(y^{r+1}),$$

onde $K_k \in \mathfrak{D}^k$ para todo $k \in \{3, \cdots, r-1\}$ e $H_r^{r-1} \in P_{2n}^r$. Além disso, como $ad_{H_2}^r(F_r) \in ad_{H_2}^r(P_{2n}^r)$, podemos escolher apropriadamente o complementar $\mathfrak{D}^k$ em (3.16) para $k = r$ de modo que $K_r = H_r^{r-1} - ad_{H_2}^r(F_r) \in \mathfrak{D}^r$. Portanto,

$$K^r(y) = H_2(y) + K_3(y) + \cdots + K_r(y) + O(y^{r+1}),$$

com $K_k \in \mathfrak{D}^k$ para todo $k \in \{3, \cdots, r\}$, mostrando o desejado. □

Definição 3.27. *Seja H um Hamiltoniano nas condições do teorema anterior. Definimos a **forma normal de ordem** $r \geq 3$ de H como sendo a decomposição $H_2 + K_3 + \cdots + K_r$, onde H_2 é a parte quadrática de H e $K_k \in \mathfrak{D}^k$ para cada $k \in \{3, \cdots, r\}$.*

Portanto, para encontrar uma forma normal de ordem $r \geq 3$ de um Hamiltoniano, é suficiente determinar a estrutura de um subespaço complementar $\mathfrak{D}^k$ à imagem de $ad^k_{H_2} : P^k_{2n} \to P^k_{2n}$, para cada $k \in \{3, \cdots, r\}$, subespaço esse que não é único. Além disso, os elementos $K_k \in \mathfrak{D}^k$ podem ser escolhidos arbitrariamente. Assim, para cada $r \geq 3$ fixado, a forma normal do Hamiltoniano não é única, o que implica na não unicidade das formas normais de um sistema Hamiltoniano.

Nas duas subseções que seguem, apresentamos dois métodos que estabelecem subespaços complementares convenientes para o cálculo da forma normal de um Hamiltoniano. Para isso, introduzimos uma nova notação. Começamos notando que se $A(x) = J_0 \nabla H_2(x)$ é um campo Hamiltoniano, onde $H_2 : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é uma forma quadrática, então o sistema Hamiltoniano associado é linear. Nesse caso, dada $F \in P^k_{2n}$, temos

$$ad^k_{H_2}(F)(x) = [H_2, F](x) = \langle J_0 \nabla H_2(x), \nabla F(x) \rangle = \langle A(x), \nabla F(x) \rangle,$$

onde $\langle \, , \, \rangle$ é o produto interno canônico em $\mathbb{R}^{2n}$. Definimos então o operador $ad^k_A : P^k_{2n} \to P^k_{2n}$ por

$$ad^k_A(F)(x) = \langle A(x), \nabla F(x) \rangle, \quad F \in P^k_{2n}, \tag{3.20}$$

para cada $k \geq 3$, ou seja, $ad^k_A \equiv ad^k_{H_2}$.

Daqui em diante, usamos o operador ad^k_A ao invés de $ad^k_{H_2}$ no estudo das formas normais de um sistema Hamiltoniano.

3.4.1 O Método do Operador Adjunto

Descrevemos nesta subseção o método clássico para encontrar formas normais para Hamiltonianos de sistemas não-lineares. Começamos com o seguinte resultado:

Teorema 3.28. *Consideremos o produto interno $\langle \, , \, \rangle_1$ da Definição 3.19. Sejam $A : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ um operador linear e $A^* : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ seu operador adjunto com relação ao produto interno* *canônico* $\langle\ ,\ \rangle$ *em* $\mathbb{R}^{2n}$*. Então* $ad^k_{A^*} : P^k_{2n} \to P^k_{2n}$ *é o operador adjunto de* ad^k_A*, definido em (3.20), com relação ao produto interno* $\langle\ ,\ \rangle_1$*.*

Demonstração: Nessa demonstração, vamos confundir as funções polinomiais com seus polinômios associados. Sejam $F,\ G \in P^k_{2n}$ dados por $F(x) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^\alpha$ e $G(x) = \sum_{|\beta|=k} g_\beta x^\beta$, com $g_\beta \in \mathbb{R}$, onde $f_\alpha,\ g_\beta \in \mathbb{R}$. Então

$$ad^k_A(F)(x) = \langle A(x), \nabla F(x)\rangle = \langle A(x), \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \nabla x^\alpha\rangle = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \langle A(x), \nabla x^\alpha\rangle$$

e

$$ad^k_{A^*}(G)(x) = \langle A^*(x), \nabla G(x)\rangle = \langle A^*(x), \sum_{|\beta|=k} g_\beta \nabla x^\beta\rangle = \sum_{|\beta|=k} g_\beta \langle A^*(x), \nabla x^\beta\rangle,$$

o que implica em

$$\langle ad^k_A(F), G\rangle_1 = \sum_{|\alpha|=k}\sum_{|\beta|=k} f_\alpha g_\beta \langle\langle A(x), \nabla x^\alpha\rangle, x^\beta\rangle_1$$

e

$$\langle F, ad^k_{A^*}(G)\rangle_1 = \sum_{|\alpha|=k}\sum_{|\beta|=k} f_\alpha g_\beta \langle x^\alpha, \langle A^*(x), \nabla x^\beta\rangle\rangle_1,$$

pela bilinearidade do produto interno $\langle\ ,\ \rangle_1$. Assim, para provar o teorema basta mostrar que

$$\langle\langle A(x), \nabla x^\alpha\rangle, x^\beta\rangle_1 = \langle x^\alpha, \langle A^*(x), \nabla x^\beta\rangle\rangle_1 \tag{3.21}$$

para quaisquer dois monômios x^α e x^β em P^k_{2n}. Antes, introduzimos para cada $i, j \in \{1, \cdots, 2n\}$ a notação

$$\alpha_i^j = \alpha - e_i + e_j,$$

onde $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2n})$ e e_i, e_j são o i-ésimo e o j-ésimo vetores da base canônica de $\mathbb{R}^{2n}$, respectivamente. Notemos que $\alpha_i^j = \alpha$ se, e somente se, $i = j$. Escrevendo $A(x) = \left(\sum_{j=1}^{2n} a_{1j}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{2n} a_{2nj}x_j\right)$ temos $A^*(x) = \left(\sum_{j=1}^{2n} a_{j1}x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{2n} a_{j2n}x_j\right)$, uma vez que a matriz de A^* é a transposta da matriz de A. Logo, lembrando que

$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_{2n}^{\alpha_{2n}}$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle \langle A(x), \nabla x^\alpha \rangle, x^\beta \rangle_1 \\
= & \left\langle \left\langle \left(\sum_{j=1}^{2n} a_{1j} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{2n} a_{2nj} x_j \right), \left(\alpha_1 \frac{x^\alpha}{x_1}, \cdots, \alpha_{2n} \frac{x^\alpha}{x_{2n}} \right) \right\rangle, x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \left\langle \alpha_1 \frac{x^\alpha}{x_1}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{12n}x_{2n}) + \cdots + \alpha_{2n} \frac{x^\alpha}{x_{2n}}(a_{2n1}x_1 + \cdots + a_{2n2n}x_{2n}), x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \left\langle \sum_{j=1}^{2n} \alpha_1 a_{1j} x^{\alpha_1^j} + \cdots + \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{2n} a_{2nj} x^{\alpha_{2n}^j}, x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \left\langle \sum_{j=1}^{2n} \alpha_1 a_{1j} x^{\alpha_1^j}, x^\beta \right\rangle_1 + \cdots + \left\langle \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{2n} a_{2nj} x^{\alpha_{2n}^j}, x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \sum_{j=1}^{2n} \alpha_1 a_{1j} \left\langle x^{\alpha_1^j}, x^\beta \right\rangle_1 + \cdots + \sum_{j=1}^{2n} \alpha_{2n} a_{2nj} \left\langle x^{\alpha_{2n}^j}, x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \sum_{i,j=1}^{2n} \alpha_i a_{ij} \left\langle x^{\alpha_i^j}, x^\beta \right\rangle_1 \\
= & \begin{cases} \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{2n} \alpha_i a_{ii} \right) \alpha!, & \text{se } \beta = \alpha, \\ a_{ij}\alpha_i \beta!, & \text{se } \beta = \alpha_i^j \text{ para algum } i \text{ e algum } j, \text{ com } i \neq j, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
& \langle x^\alpha, \langle A^*(x), \nabla x^\beta \rangle \rangle_1 \\
= & \left\langle x^\alpha, \left\langle \left(\sum_{j=1}^{2n} a_{j1} x_j, \cdots, \sum_{j=1}^{2n} a_{j2n} x_j \right), \left(\beta_1 \frac{x^\beta}{x_1}, \cdots, \beta_{2n} \frac{x^\beta}{x_{2n}} \right) \right\rangle \right\rangle_1 \\
= & \left\langle x^\alpha, \beta_1 \frac{x^\beta}{x_1}(a_{11}x_1 + \cdots + a_{2n1}x_{2n}) + \cdots + \beta_{2n} \frac{x^\beta}{x_{2n}}(a_{12n}x_1 + \cdots + a_{2n2n}x_{2n}) \right\rangle_1 \\
= & \left\langle x^\alpha, \sum_{i=1}^{2n} \beta_1 a_{i1} x^{\beta_1^i} + \cdots + \sum_{i=1}^{2n} \beta_{2n} a_{i2n} x^{\beta_{2n}^i} \right\rangle_1 \\
= & \left\langle x^\alpha, \sum_{i=1}^{2n} \beta_1 a_{i1} x^{\beta_1^i} \right\rangle_1 + \cdots + \left\langle x^\alpha, \sum_{i=1}^{2n} \beta_{2n} a_{i2n} x^{\beta_{2n}^i}, \right\rangle_1 \\
= & \sum_{i=1}^{2n} \beta_1 a_{i1} \left\langle x^\alpha, x^{\beta_1^i} \right\rangle_1 + \cdots + \sum_{i=1}^{2n} \beta_{2n} a_{i2n} \left\langle x^\alpha, x^{\beta_{2n}^i}, \right\rangle_1 \\
= & \sum_{i,j=1}^{2n} \beta_j a_{ij} \left\langle x^\alpha, x^{\beta_j^i} \right\rangle_1
\end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \left(\sum_{j=1}^{2n} \beta_j a_{jj}\right) \beta!, & \text{se } \alpha = \beta, \\ a_{ij}\beta_j \alpha!, & \text{se } \alpha = \beta_j^i \text{ para algum } i \text{ e algum } j, \text{ com } i \neq j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Agora, $\beta = \alpha_i^j = \alpha - e_i + e_j$ se, e somente se, $\alpha = \beta - e_j + e_i = \beta_j^i$. Nesse caso, $\beta_i = \alpha_i - 1$ e $\beta_j = \alpha_j + 1$ e, portanto,

$$\alpha_i \beta! = \alpha_i \alpha_i^j! = (\alpha_j + 1)\alpha! = \beta_j \alpha!.$$

Disso segue (3.21), provando o desejado. □

Corolário 3.29. *Nas condições do teorema anterior, para cada $k \geq 3$,*

$$P_{2n}^k = ad_A^k(P_{2n}^k) \oplus \ker(ad_{A^*}^k).$$

Demonstração: Como $ad_A^k(P_{2n}^k)$ é um subespaço vetorial de P_{2n}^k e P_{2n}^k tem dimensão finita, segue que

$$P_{2n}^k = ad_A^k(P_{2n}^k) \oplus (ad_A^k(P_{2n}^k))^\perp \quad \text{e} \quad (ad_A^k(P_{2n}^k))^\perp = \ker(ad_A^k)^*,$$

onde $(ad_A^k(P_{2n}^k))^\perp$ é o complemento ortogonal de $ad_A^k(P_{2n}^k)$ e $(ad_A^k)^*$ é o adjunto de ad_A^k, ambos com relação ao produto interno $\langle\ ,\ \rangle_1$. Além disso, do teorema anterior, $\ker(ad_A^k)^* = \ker(ad_{A^*}^k)$. Portanto,

$$P_{2n}^k = ad_A^k(P_{2n}^k) \oplus \ker(ad_{A^*}^k).$$

□

De acordo com o corolário anterior, uma possível escolha para o complementar $\mathfrak{D}^k$ da imagem de ad_A^k é o núcleo do operador $ad_{A^*}^k$. Assim, uma forma normal de ordem r de um Hamiltoniano pode ser obtida se determinarmos as soluções polinomiais F para a equação $ad_{A^*}^k(F) \equiv 0$ com $k \in \{1, \cdots, r\}$. Chamamos esse procedimento de **método do operador adjunto** e o aplicamos nos próximos três exemplos.

Exemplo 3.30. Suponhamos $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ um Hamiltoniano de um campo Hamiltoniano não-linear em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ que satisfaz as hipóteses do Teorema 3.26 e tem parte quadrática $H_2(x,y) = \frac{1}{2}y^2$. Então, para $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, temos

$$A(x,y) = J_0 \nabla H_2(x,y) = (y,0),$$

implicando que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz associada à parte linear do campo $X_H(x,y) = J_0 \nabla H(x,y)$. Seja $F \in P_2^k$, com $k \geq 3$, tal que $ad_{A^*}^k(F) \equiv 0$, ou seja,

$$\langle A^*(x,y), \nabla F(x,y) \rangle = 0, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Temos então

$$x \, \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = 0, \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

As funções em P_2^k que são soluções para a equação acima são da forma

$$F(x,y) = c_k x^k, \qquad k \geq 3,$$

onde c_k são constantes reais. Assim, pelo método do operador adjunto uma forma normal de ordem $r \geq 3$ de H é

$$K(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \sum_{k=3}^{r} c_k x^k,$$

onde c_k são constantes reais.

Exemplo 3.31. Consideremos $H(x,y) = \sin(xy)$ o Hamiltoniano de um campo Hamiltoniano não-linear em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$. Notemos que H é de classe C^∞, $H(0,0) = 0$ e $(0,0)$ é um ponto crítico de H, ou seja, H satisfaz as hipóteses do Teorema 3.26. Expandindo H em sua série de Taylor em torno da origem, temos

$$H(x,y) = \sin(xy) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}(xy)^{2n+1}$$

de modo que $H_2(x,y) = xy$. Assim, a parte linear do campo $X_H(x,y) = J_0 \nabla H(x,y)$ é dada por

$$A(x,y) = J_0 \nabla H_2(x,y) = (x,-y)$$

cuja matriz associada é $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Seja $F \in \ker ad^k_{A^*}$. Então

$$x\frac{\partial}{\partial x}F(x,y) - y\frac{\partial}{\partial y}F(x,y) = \langle (x,-y), \nabla F(x,y)\rangle = \langle A^*(x,y), \nabla F(x,y)\rangle = 0,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Como $F \in P^k_2$, existem $f_\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $F(x,y) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, onde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Logo,

$$0 = x \sum_{|\alpha|=k} \alpha_1 f_\alpha x^{\alpha_1 - 1} y^{\alpha_2} - y \sum_{|\alpha|=k} \alpha_2 f_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2 - 1} = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha (\alpha_1 - \alpha_2) x^{\alpha_1} y^{\alpha_2},$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$, o que ocorre se, e somente se, $f_\alpha = 0$ ou $\alpha_1 = \alpha_2$. Assim sendo, pelo método do operador adjunto, só obtemos formas normais para H de ordem par, já que as soluções polinomiais para $ad^k_{A^*}(F) \equiv 0$ são da forma $F(x,y) = f_k (xy)^{\frac{k}{2}}$, com $f_k \in \mathbb{R}$. Portanto, uma forma normal de ordem $r = 2l \geq 4$ para H é

$$K(x,y) = xy + \sum_{i=2}^{l} f_i (xy)^i, \quad f_i \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 3.32. Seja $H(x,y,z,w) = xy\cos(zw)$ o Hamiltoniano de um campo não-linear em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$. Notemos que H é de classe C^∞, $H(0,0,0,0) = 0$ e $(0,0,0,0)$ é um ponto crítico de H. Expandindo H em sua série de Taylor em torno da origem, temos

$$H(x,y,z,w) = xy \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (zw)^{2n}}{2n!}$$

de modo que $H_2(x,y,z,w) = xy$. Assim, para $J_0 = \begin{bmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{bmatrix}$, temos

$$A(x,y,z,w) = J_0 \nabla H_2(x,y,z,w) = (0,0,-y,-x)$$

e, portanto, a matriz associada à parte linear do campo $X_H(x,y,z,w) = J_0 \nabla H(x,y,z,w)$

é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seja $F \in \ker ad^k_{A^*}$. Então, para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$\begin{aligned} -w\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z,w) - z\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z,w) &= \langle (-w,-z,0,0), \nabla F(x,y,z,w)\rangle \\ &= \langle A^*(x,y,z,w), \nabla F(x,y,z,w)\rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$w\frac{\partial}{\partial x}F(x,y,z,w) + z\frac{\partial}{\partial y}F(x,y,z,w) = 0.$$

Como $F \in P^k_4$, existem $f_\alpha \in \mathbb{R}$ tais que $F(x,y,z,w) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}w^{\alpha_4}$, onde $\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= w\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \alpha_1 x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2}z^{\alpha_3}w^{\alpha_4} + z\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha \alpha_2 x^{\alpha_1}y^{\alpha_2-1}z^{\alpha_3}w^{\alpha_4} \\ &= \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha(\alpha_1 yw + \alpha_2 xz)x^{\alpha_1-1}y^{\alpha_2-1}z^{\alpha_3}w^{\alpha_4}, \end{aligned}$$

para todos $x,y,z,w \in \mathbb{R}$, o que ocorre se, e somente se, $f_\alpha = 0$ ou $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Portanto, as soluções polinomiais para $ad^k_{A^*}(F) \equiv 0$ são da forma $F(x,y,z,w) = \sum_{i+j=k} f_{ij}z^iw^j$, com $f_{ij} \in \mathbb{R}$. Pelo método do operador adjunto, uma forma normal de ordem $r \geq 3$ para H é

$$K(x,y,z,w) = xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij}z^iw^j, \quad f_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Em geral, determinar uma forma normal para um Hamiltoniano usando o método do operador adjunto não é uma tarefa fácil, uma vez que isto envolve a resolução de uma equação diferencial parcial. Além disso, uma desvantagem desse método é que os seus cálculos se tornam mais complicados conforme a dimensão do espaço simplético e o grau em que truncamos a série de Taylor do Hamiltoniano aumentam. Um método algébrico alternativo é apresentado na próxima subseção.

3.4.2 O Anel dos Invariantes como um Subespaço Complementar

Nesta subseção, mostramos que existe uma possível escolha para o complemento $\mathfrak{D}^k$ em (3.16) em que seus elementos são funções invariantes sob a ação de um grupo de Lie linear S definido a partir da linearização A do campo de vetores Hamiltoniano. Isto significa que uma forma normal de um Hamiltoniano pode ser escolhida invariante com respeito a S. Portanto, esse método nos permite usar ferramentas da teoria invariante e da teoria de representação de grupos de Lie lineares.

Começamos definindo o conjunto

$$R = \{e^{sA^t};\ s \in \mathbb{R}\}, \tag{3.22}$$

onde $A \in \mathbb{M}_{2n}(\mathbb{R})$ e $e^{sA^t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(sA^t)^m$. Segue de [22, Proposition 2.3] que $R \subseteq \mathbf{GL}(2n)$ e $(e^{sA^t})^{-1} = e^{-sA^t} \in R$, para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, de (2.5) temos que

$$e^{s_1 A^t} e^{s_2 A^t} = e^{(s_1+s_2)A^t} \in R,$$

para todos $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, implicando que R é um subgrupo de $\mathbf{GL}(2n)$. Consideremos agora o fecho S do subgrupo R, ou seja,

$$S = \overline{\{e^{sA^t};\ s \in \mathbb{R}\}}. \tag{3.23}$$

Temos, obviamente, que S é um subconjunto fechado de $\mathbf{GL}(2n)$. Além disso, como $\mathbf{GL}(2n)$ é um grupo topológico, por [35, Proposição 2.11] o fecho de qualquer subgrupo de $\mathbf{GL}(2n)$ é ainda seu subgrupo. Portanto, S é um subgrupo fechado de $\mathbf{GL}(2n)$, ou seja, é um grupo de Lie linear.

Lema 3.33. *Consideremos $ad^k_{A^*} : P^k_{2n} \to P^k_{2n}$ como definido em (3.20), onde A^* é o adjunto do operador linear A com relação ao produto interno canônico de $\mathbb{R}^{2n}$. Seja $F \in P^k_{2n}$, para $k \geq 3$ fixado. Então*

$$ad^k_{A^*}(F)(x) = \frac{d}{ds} F(e^{sA^t} x)|_{s=0}.$$

Demonstração: Novamente, vamos usar a notação [.] para nos referirmos à representação matricial de uma transformação linear e das coordenadas de um vetor. Como

$ad^k_{A^*}(F) \in P^k_{2n}$, então $ad^k_{A^*}(F)(x) \in \mathbb{R}$, para cada $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Assim,

$$\begin{aligned}
[ad^k_{A^*}(F)(x)] &= [ad^k_{A^*}(F)(x)]^t \\
&= [\langle A^*(x), \nabla F(x)\rangle]^t \\
&= ([A^*(x)]^t[\nabla F(x)])^t \\
&= [\nabla F(x)]^t[A^*(x)] \\
&= [dF_x][A^*(x)] \\
&= [dF_x(A^*(x))],
\end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade segue de (3.1). Logo,

$$ad^k_{A^*}(F)(x) = dF_x(A^*(x)), \tag{3.24}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Por outro lado, usando a regra da cadeia e (2.6), temos

$$\frac{d}{ds}F(e^{sA^t}x) = dF_{e^{sA^t}x}(A^t e^{sA^t}x), \tag{3.25}$$

que avaliado em $s = 0$ nos dá

$$\frac{d}{ds}F(e^{sA^t}x)|_{s=0} = dF_x(A^t x) = dF_x(A^*(x)), \tag{3.26}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto, de (3.24) e (3.26), temos que

$$ad^k_{A^*}(F)(x) = \frac{d}{ds}F(e^{sA^t}x)|_{s=0},$$

como desejado. □

Para o que segue, $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$ denota o anel dos polinômios S-invariantes a valores reais. Além disso, nos próximos dois resultados, embora R não seja necessariamente um grupo de Lie linear, assumimos sua ação natural em $\mathbb{R}^{2n}$ já que R é um grupo de matrizes. Usamos a mesma notação introduzida na Seção 1.2.

Lema 3.34. *Sejam R e S como definidos em (3.22) e (3.23), respectivamente, ambos agindo em $\mathbb{R}^{2n}$ por meio da ação natural "$\cdot$" dada pela multiplicação de matriz por vetor. Se $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ é uma função polinomial tal que $F(\gamma \cdot x) = F(x)$ para todo $\gamma \in R$ e todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$, então $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$.*

Demonstração: Seja $F : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial tal que $F(\gamma \cdot x) = F(x)$ para todo $\gamma \in R$ e todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e tomemos $\delta \in S \backslash R$. Então da definição de fecho, existe uma sequência $(\delta_n) \subset R$ tal que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = \delta$. Como F é polinomial e portanto contínua, temos

$$F(\delta \cdot x) = F((\lim_{n\to\infty} \delta_n) \cdot x) = F(\lim_{n\to\infty} (\delta_n \cdot x)) = \lim_{n\to\infty} (F(\delta_n \cdot x)) = \lim_{n\to\infty} (F(x)) = F(x),$$

para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$, onde a penúltima igualdade segue pois $\delta_n \in R$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $F(\delta \cdot x) = F(x)$ para todo $\delta \in S$ e todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$, implicando que $F \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$.
□

Teorema 3.35. *Consideremos R e S como no lema anterior. Então*

$$\ker(ad^k_{A^*}) = \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S),$$

onde $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$ é o espaço das funções polinomiais homogêneas S-invariantes de grau k, com variáveis em $\mathbb{R}^{2n}$.

Demonstração: Seja $F \in \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$. Então $F(e^{sA^t}x) = F(x)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Pelo Lema 3.33, temos que

$$ad^k_{A^*}(F)(x) = \frac{d}{ds}F(e^{sA^t}x)|_{s=0} = \frac{d}{ds}F(x)|_{s=0} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n},$$

onde a última igualdade segue do fato de $F(x)$ ser constante com relação a s. Logo, $F \in \ker(ad^k_{A^*})$, o que nos dá $P^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S) \subseteq \ker(ad^k_{A^*})$. Seja agora $F \in \ker(ad^k_{A^*})$. Então para todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$ e todo $s \in \mathbb{R}$ temos $ad^k_{A^*}(F)(e^{sA^t}x) = 0$. De (3.25) e (3.24), nessa ordem, obtemos

$$\frac{d}{ds}F(e^{sA^t}x) = dF_{e^{sA^t}x}(A^t e^{sA^t}x) = dF_{e^{sA^t}x}(A^*(e^{sA^t}x)) = ad^k_{A^*}(F)(e^{sA^t}x) = 0,$$

ou seja, o valor de $F(e^{sA^t}x)$ não depende de s e, consequentemente,

$$F(e^{sA^t}x) = F(e^{0A^t}x) = F(x),$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Portanto $F(\gamma \cdot x) = F(x)$ para todo $\gamma \in R$ e, do lema anterior, $F \in \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$, provando que $\ker(ad^k_{A^*}) \subseteq \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$. □

Como consequência imediata do Corolário 3.29 e do teorema anterior temos o seguinte:

Corolário 3.36. *Seja S como em (3.23) agindo em $\mathbb{R}^{2n}$ por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Então para cada $k \geq 3$,*

$$P_{2n}^k = ad_A^k(P_{2n}^k) \oplus \mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}^k(S).$$

Portanto, o corolário anterior nos permite obter uma forma normal de um Hamiltoniano determinando os geradores (ou os elementos) de grau k do anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$ das funções polinomiais S-invariantes. Uma das vantagens desse método é que calcular os geradores para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$ independe do grau em que truncamos a série de Taylor do Hamiltoniano. Além disso, quando a matriz A tem somente autovalores puramente imaginários, podemos caracterizar S em termos do l-toro $T^l = S^1 \times \cdots \times S^1$ (l vezes), apresentado no Exemplo 1.7, como segue:

Proposição 3.37. *[20, XVI, Proposition 5.7] Consideremos o grupo S como definido em (3.23) e, pela decomposição de Jordan-Chevalley, escrevamos*

$$A = D + N,$$

onde D é diagonalizável, N é nilpotente e $DN = ND$. Se A tem somente autovalores puramente imaginários, então

$$S \equiv \begin{cases} T^l, \text{ se } N \equiv 0 \\ T^l \times \mathbb{R}, \text{ se } N \not\equiv 0, \end{cases}$$

onde l é o número de autovalores algebricamente independentes[2] de A, $T^l \equiv \overline{\{e^{sD};\ s \in \mathbb{R}\}}$ e $\mathbb{R} \equiv \{e^{sN^t};\ s \in \mathbb{R}\}$.

Notemos que, em geral, o grupo S não é compacto. Entretanto, a teoria invariante apresentada no Capítulo 1 pode ser igualmente aplicada sempre que o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^{2n}}(S)$ for finitamente gerado. Vejamos três exemplos de utilização do Corolário 3.36.

Exemplo 3.38. Consideremos o Hamiltoniano H do Exemplo 3.30, cuja parte quadrá-

[2] Os autovalores $\lambda_1, \cdots, \lambda_l$ são algebricamente independentes se não existem inteiros não nulos $k_1, \cdots, k_l$ tais que $k_1\lambda_1 + \cdots + k_l\lambda_l = 0$.

tica é $H_2(x,y) = \dfrac{1}{2}y^2$. Vimos em tal exemplo que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é a matriz da linearização do campo $X_H(x,y) = J_0 \nabla H(x,y)$, a qual é nilpotente de índice dois. Encontremos primeiramente o grupo de Lie linear S definido em (3.23). Da Definição 2.20, temos que

$$e^{sA^t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(sA^t)^m = I + sA^t,$$

já que $(sA^t)^m = 0_2$ sempre que $m \geq 2$. Logo, o subgrupo R definido em (3.22) é dado por

$$R = \{I + sA^t;\ s \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix};\ s \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbf{GL}(2).$$

Observemos que, via identificação com $\mathbb{R}^4$, R é um subconjunto fechado de $\mathbf{M}_2(\mathbb{R})$ e, portanto, de $\mathbf{GL}(2)$. Assim, $S = R$. Pelo Corolário 3.36, dado $k \geq 3$, os termos de grau k de uma forma normal de H podem ser tomados em $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^2}(S)$. Seja então $F \in \mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^2}(S)$, ou seja,

$$F(x, sx + y) = F((I + sA^t)\cdot(x,y)) = F(x,y), \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Escrevendo $F(x,y) = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}$, com $f_\alpha \in \mathbb{R}$ e $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, devemos ter

$$\sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^{\alpha_1}(sx+y)^{\alpha_2} = \sum_{|\alpha|=k} f_\alpha x^{\alpha_1} y^{\alpha_2}, \quad \forall s \in \mathbb{R},\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Como s é arbitrário, a igualdade acima vale apenas quando F independe de y. Como F é homogêneo de grau k, $F(x,y) = f_k x^k$, onde $k \geq 3$ e $f_k \in \mathbb{R}$. Portanto, uma forma normal de grau $r \geq 3$ de H é dada por

$$K(x,y) = \frac{1}{2}y^2 + \sum_{k=3}^{r} f_k x^k, \quad f_k \in \mathbb{R},$$

que coincide com a forma normal obtida no Exemplo 3.30.

Exemplo 3.39. Seja H um Hamiltoniano de um campo Hamiltoniano não-linear em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ nas condições do Teorema 3.26, cuja parte quadrática é $H_2(x,y) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2}$. Então

$$J_0 \nabla H_2(x,y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ -x \end{bmatrix}$$

é a parte linear do campo $X_H(x,y) = J_0 \nabla H(x,y)$, cuja matriz associada é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = J_0.$$

Vamos encontrar o grupo de Lie linear S definido em (3.23). Notemos que $sJ_0^t = \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}$. Pela Definição 2.20, temos que

$$e^{sJ_0^t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}(sJ_0^t)^m = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l!} \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}^{2l+1}.$$

Observemos que

$$\begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}^{2l} = \begin{cases} \begin{bmatrix} s^{2l} & 0 \\ 0 & s^{2l} \end{bmatrix} & \text{se } l \text{ é par;} \\[2ex] \begin{bmatrix} -s^{2l} & 0 \\ 0 & -s^{2l} \end{bmatrix} & \text{se } l \text{ é ímpar} \end{cases}$$

e

$$\begin{bmatrix} 0 & -s \\ s & 0 \end{bmatrix}^{2l+1} = \begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & -s^{2l+1} \\ s^{2l+1} & 0 \end{bmatrix} & \text{se } l \text{ é par;} \\[2ex] \begin{bmatrix} 0 & s^{2l+1} \\ -s^{2l+1} & 0 \end{bmatrix} & \text{se } l \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
e^{sJ_0^t} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2l!} \begin{bmatrix} (-1)^l s^{2l} & 0 \\ 0 & (-1)^l s^{2l} \end{bmatrix} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(2l+1)!} \begin{bmatrix} 0 & (-1)^{l+1} s^{2l+1} \\ (-1)^l s^{2l+1} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l s^{2l}}{2l!} & \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} s^{2l+1}}{(2l+1)!} \\ \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l s^{2l+1}}{(2l+1)!} & \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l s^{2l}}{2l!} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \cos s & -\sin s \\ \sin s & \cos s \end{bmatrix} \\
&= R_s,
\end{aligned}$$

onde R_s é a rotação planar de ângulo s. Logo, $R = SO(2)$ é o subgrupo definido em (3.22), que é fechado em $\mathbf{GL}(2)$ e isomorfo a S^1. Portanto, $S \equiv S^1$ e, pelo Corolário 3.36, basta encontrar os elementos em $P^k_{\mathbb{R}^2}(S^1)$, para $k \geq 3$, a fim de obter uma forma normal de H. No Exemplo 1.20 vimos que uma base de Hilbert para o anel $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^2}(S^1)$ é $\{u\}$, onde $u(x, y) = x^2 + y^2$. Assim, os elementos em $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^2}(S^1)$ são gerados por $v_k(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{k}{2}}$, implicando que k deve ser par, ou seja, só obtemos formas normais para H de ordem par. Portanto, uma forma normal de ordem $r = 2l \geq 4$ para H é

$$K(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \sum_{i=2}^{l} f_i (x^2 + y^2)^i, \quad f_i \in \mathbb{R}.$$

Observemos que no exemplo anterior, como os autovalores de A são puramente imaginários, podemos também usar a Proposição 3.37 com $D = A$ e $N \equiv 0$ para obter que $S \equiv S^1$.

Exemplo 3.40. Seja H um Hamiltoniano de um campo não-linear em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ nas condições do Teorema 3.26, cuja parte quadrática é

$$H_2(x, y, z, w) = \alpha(xw - yz),$$

para algum $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo. Então

$$J_0 \nabla H_2(x,y,z,w) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha w \\ -\alpha z \\ -\alpha y \\ \alpha x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha y \\ \alpha x \\ -\alpha w \\ \alpha z \end{bmatrix}$$

é a parte linear de campo $X_H(x,y,z,w) = J_0 \nabla H(x,y,z,w)$, cuja representação matricial é

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix}.$$

Como A tem parte nilpotente nula e um autovalor algebricamente independente ($\lambda = \alpha i$), pela Proposição 3.37 temos $S \equiv S^1$. Pelo Corolário 3.36, os termos de grau k de uma forma normal de H podem ser tomados em $\mathcal{P}^k_{\mathbb{R}^2}(S)$. Consideremos a ação diagonal de S^1 em $\mathbb{C}^2 \equiv \mathbb{R}^4$ dada por

$$\theta \cdot (z_1, z_2) = (e^{i\theta} z_1, e^{i\theta} z_2),$$

para todo $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ e todo $\theta \in S^1$. Via o isomorfismo $z_1 \simeq (x,y)$ e $z_2 \simeq (z,w)$ e pelo Exemplo 1.23, $\{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ forma uma base de Hilbert para $\mathcal{P}_{\mathbb{R}^4}(S^1)$, com $u_1(x,y,z,w) = x^2 + y^2$, $u_2(x,y,z,w) = z^2 + w^2$, $u_3(x,y,z,w) = xz + yw$ e $u_4(x,y,z,w) = yz - xw$. Portanto, uma forma normal de H tem ordem $r = 2q \geq 4$ e é dada por

$$K(x,y,z,w) = \alpha(xw - yz) + \sum_{j+k+l+m=2}^{q} B_{jklm}(x^2+y^2)^j (z^2+w^2)^k (xz+yw)^l (yz-xw)^m,$$

com $B_{jklm} \in \mathbb{R}$.

3.5 Formas Normais no Contexto com Simetrias e Antissimetrias

Como mencionamos, é grande o interesse no estudo de sistemas dinâmicos com simetrias e antissimetrias e, nesse contexto, é importante que as formas normais mantenham as propriedades simétricas do sistema original. Em geral, as formas normais para campos de vetores reversíveis-equivariantes são calculadas sem levar em consideração, a priori, as condições de simetria e antissimetria existentes no sistema, que são impostas à forma normal apenas no final do processo. Existe, no entanto, um método algébrico alternativo desenvolvido em [3] para a obtenção de formas normais reversíveis-equivariantes que prioriza as simetrias e antissimetrias desde o início do processo. Uma abordagem análoga está sendo desenvolvida por Terézio [40] para o caso de sistemas Hamiltonianos.

De acordo com o Teorema 3.11, é possível relacionar as simetrias e antissimetrias de um campo Hamiltoniano com as do seu Hamiltoniano e com o espaço simplético em que ele está inserido. Além disso, para cada $k \geq 3$, o espaço complementar $\mathfrak{D}^k$ em (3.16) pode ser escolhido arbitrariamente, bem como o elemento nele que é usado para escrever a forma normal. Assim, podemos escolhê-los de forma conveniente para que as simetrias e antissimetrias do sistema Hamiltoniano original se mantenham.

Nesta seção, utilizamos os exemplos apresentados nas Subseções 3.4.1 e 3.4.2 para obter formas normais de determinados sistemas Hamiltonianos canônicos da forma

$$\frac{d}{dt}x = X_H(x), \quad x \in (\mathbb{R}^{2n}, \Omega_0),$$

que são Γ-equivariantes ou Γ_σ-reversíveis-equivariantes sob a ação de um grupo de Lie linear Γ, de modo a preservar tais propriedades simétricas no sistema final simplificado. Para isso, usamos o Teorema 3.11 e a abordagem tradicional, ou seja, vamos impor as simetrias e antissimetrias à forma normal apenas no final do processo.

Exemplo 3.41. Sejam $X_H(x,y) = (x\cos(xy), -y\cos(xy))$ um campo de vetores Hamiltoniano em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ com Hamiltoniano $H(x,y) = \sin(xy)$ e $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\}$ agindo em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ como $-1 \cdot (x,y) = (-x, y)$. Consideremos $\chi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ o epimorfismo dado pela identidade, ou seja, $\chi(1) = 1$ e $\chi(-1) = -1$. Então X_H é $\mathbb{Z}_2$-equivariante e a ação de $\mathbb{Z}_2$ em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ é χ-semissimplética. De fato, dados $(x, y), (z, w) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$X_H(-1 \cdot (x, y)) = X_H(-x, y) = (-x \cos(xy), -y \cos(xy)) = -1 \cdot X_H(x, y);$$
$$\Omega_0(-1 \cdot (x, y), -1 \cdot (z, w)) = \Omega_0((-x, y), (-z, w)) = -xw + yz = \chi(-1)\Omega_0((x, y), (z, w)).$$

Logo, pela Observação 3.12, temos que H é $(\mathbb{Z}_2)_\chi$-semi-invariante. Além disso, pelo Exemplo 3.31 H está nas condições do Teorema 3.26 e uma forma normal de ordem $2l \geq 4$ desse Hamiltoniano é

$$K(x, y) = xy + \sum_{i=2}^{l} f_i (xy)^i, \quad f_i \in \mathbb{R}.$$

Queremos encontrar uma forma normal $\overline{K}$ de ordem $2l$ que mantenha a condição de $(\mathbb{Z}_2)_\chi$-semi-invariância do Hamiltoniano H. Devemos ter então

$$\overline{K}(-x, y) = \overline{K}(-1 \cdot (x, y)) = \chi(-1)\overline{K}(x, y) = -\overline{K}(x, y),$$

ou seja,

$$-xy + \sum_{i=2}^{l} f_i(-xy)^i = -(xy + \sum_{i=2}^{l} f_i(xy)^i),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Para que isso ocorra, é necessário que i seja ímpar. Logo, $\overline{K}$ deve ser da forma

$$\overline{K}(x, y) = xy + \sum_{j=1}^{\frac{l-1}{2}} f_j (xy)^{2j+1}, \quad f_j \in \mathbb{R},$$

a qual induz o campo Hamiltoniano

$$X_{\overline{K}}(x, y) = \left(x + \sum_{j=1}^{\frac{l-1}{2}} (2j+1) f_j (xy)^{2j} x, \ -y - \sum_{j=1}^{\frac{l-1}{2}} (2j+1) f_j (xy)^{2j} y \right). \tag{3.27}$$

Novamente, pela Observação 3.12, como $\overline{K}$ é $(\mathbb{Z}_2)_\chi$-semi-invariante, então $X_{\overline{K}}$ é $\mathbb{Z}_2$-equivariante. Portanto, as propriedades simétricas do campo X_H e do Hamiltoniano H são mantidas para a forma normal $\overline{K}$ de H.

Exemplo 3.42. Consideremos $\Gamma = D_4$ o grupo diedral gerado pela rotação planar $R_{\frac{\pi}{2}}$ e por κ, dados na Observação 1.4, agindo em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Consideremos ainda o epimorfismo $\sigma : D_4 \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker \sigma = \mathbb{Z}_4$ e o campo Hamiltoniano

$$X_H(x,y) = (\cos x \sin y, -\sin x \cos y)$$

com $H(x,y) = 1 - \cos x \cos y$. Então a ação de D_4 em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ é σ-semissimplética e H é D_4-invariante. De fato, dados $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{gathered}
\Omega_0(R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (x,y), R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (z,w)) = \Omega_0((-y,x),(-w,z)) = xw - yz = \sigma(R_{\frac{\pi}{2}})\Omega_0((x,y),(z,w));\\
\Omega_0(\kappa \cdot (x,y), \kappa \cdot (z,w)) = \Omega_0((x,-y),(z,-w)) = -(-yz + xw) = \sigma(\kappa)\Omega_0((x,y),(z,w));\\
H(R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (x,y)) = H(-y,x) = 1 - \cos(-y)\cos x = 1 - \cos x \cos y = H(x,y);\\
H(\kappa \cdot (x,y)) = H(x,-y) = 1 - \cos x \cos(-y) = 1 - \cos x \cos y = H(x,y).
\end{gathered}$$

Assim, pela Observação 3.12, o campo X_H é $(D_4)_\sigma$-reversível-equivariante. Observemos ainda que H está nas condições do Teorema 3.26 e, como

$$H(x,y) = 1 - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n y^{2n}}{2n!}\right),$$

a parte quadrática de H é dada por

$$H_2(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}.$$

Pelo Exemplo 3.39, uma forma normal de ordem $2l \geq 4$ para H é

$$K(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2) + \sum_{i=2}^{l} f_i (x^2+y^2)^i, \quad f_i \in \mathbb{R},$$

a qual mantém a D_4-invariância do Hamiltoniano H. De fato, dado $(x,y) \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{gathered}
K(R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (x,y)) = K(-y,x) = \frac{1}{2}((-y)^2 + x^2) + \sum_{i=2}^{l} f_i((-y)^2+x^2)^i = K(x,y);\\
K(\kappa \cdot (x,y)) = K(x,-y) = \frac{1}{2}(x^2 + (-y)^2) + \sum_{i=2}^{l} f_i(x^2+(-y)^2)^i = K(x,y).
\end{gathered}$$

Novamente pela Observação 3.12, o campo Hamiltoniano X_K dado por

$$X_K(x,y) = \left(y + y\sum_{i=2}^{l} \widetilde{f}_i (x^2+y^2)^{i-1},\ -x - x\sum_{i=2}^{l} \widetilde{f}_i (x^2+y^2)^{i-1}\right),$$

onde $\widetilde{f_i} = 2if_i \in \mathbb{R}$, é $(D_4)_\sigma$-reversível- equivariante. Portanto, as simetrias e antissimetrias do campo X_H são herdadas pelo campo X_K induzido pela forma normal K de H, a qual também preserva as simetrias do Hamiltoniano H.

Exemplo 3.43. Consideremos novamente o grupo diedral $\Gamma = D_4$ agindo em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Consideremos agora os epimorfismos $\sigma_1, \sigma_2 : D_4 \to \mathbb{Z}_2$ tais que $\ker \sigma_1 = \mathbb{Z}_4$ e $\ker \sigma_2 = D_2$. Portanto, $\sigma_1\sigma_2 : D_4 \to \mathbb{Z}_2$ também é um epimorfismo com $\ker \sigma_1\sigma_2 = \{I_2, -I_2, \kappa R_{\frac{\pi}{2}}, \kappa R_{\frac{3\pi}{2}}\}$. Seja o campo Hamiltoniano

$$X_H(x,y) = (x\cos(xy), -y\cos(xy))$$

com Hamiltoniano $H(x,y) = \sin(xy)$. Já vimos, no exemplo anterior, que a ação de D_4 em $(\mathbb{R}^2, \Omega_0)$ é σ_1-semissimplética. Além disso, H é $(D_4)_{\sigma_1\sigma_2}$-semi-invariante. De fato, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, temos

$$\begin{aligned} H(R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (x,y)) = H(-y,x) = \sin(-yx) = -\sin(xy) = -H(x,y) = \sigma_1\sigma_2(R_{\frac{\pi}{2}})H(x,y); \\ H(\kappa \cdot (x,y)) = H(x,-y) = \sin(x(-y)) = -\sin(xy) = -H(x,y) = \sigma_1\sigma_2(\kappa)H(x,y). \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.11, o campo X_H é $(D_4)_{\sigma_2}$-reversível-equivariante. Observemos ainda que H está nas condições do Teorema 3.26. Pelo Exemplo 3.31, uma forma normal de ordem $2l \geq 4$ para H é

$$K(x,y) = xy + \sum_{i=2}^{l} f_i(xy)^i, \quad f_i \in \mathbb{R}.$$

Queremos encontrar uma forma normal $\overline{K}$ de ordem $2l$ que mantenha a condição de $(D_4)_{\sigma_1\sigma_2}$-semi-invariância do Hamiltoniano H. Devemos ter então

$$\begin{aligned} \overline{K}(-y,x) = \overline{K}(R_{\frac{\pi}{2}} \cdot (x,y)) = \sigma_1\sigma_2(R_{\frac{\pi}{2}})\overline{K}(x,y) = -\overline{K}(x,y); \\ \overline{K}(x,-y) = \overline{K}(\kappa \cdot (x,y)) = \sigma_1\sigma_2(\kappa)\overline{K}(x,y) = -\overline{K}(x,y). \end{aligned}$$

Para que a primeira condição seja satisfeita é necessário que i seja ímpar, o que também faz com que $\overline{K}$ satisfaça a segunda condição. Logo, $\overline{K}$ deve ser da forma

$$\overline{K}(x,y) = xy + \sum_{j=1}^{\frac{l-1}{2}} f_j(xy)^{2j+1}, \quad f_j \in \mathbb{R},$$

a qual induz o campo Hamiltoniano (3.27). Novamente pelo Teorema 3.11, como $\overline{K}$ é $(D_4)_{\sigma_1\sigma_2}$-semi-invariante, o campo $X_{\overline{K}}$ é $(D_4)_{\sigma_2}$-reversível-equivariante. Portanto, as simetrias e antissimetrias do campo X_H e do Hamiltoniano H são preservadas para a forma normal $\overline{K}$ de H.

Exemplo 3.44. Consideremos o grupo de Lie linear $\Gamma = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \equiv \{I_4, \phi, \psi, \phi\psi\}$, onde

$$\phi = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & \kappa \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \psi = \begin{bmatrix} \kappa & 0 \\ 0 & -\kappa \end{bmatrix},$$

agindo em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ por meio da ação natural de multiplicação de matriz por vetor. Consideremos ainda os epimorfismos $\sigma_1, \sigma_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ tais que $\ker \sigma_1 = \{I_4, \phi\}$ e $\ker \sigma_2 = \{I_4, \psi\}$. Logo, $\sigma_1\sigma_2 : \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$ também é um epimorfismo com $\ker \sigma_1\sigma_2 = \{I_4, \phi\psi\}$. Sejam $H(x, y, z, w) = xy\cos(zw)$ e o campo Hamiltoniano induzido por H

$$X_H(x, y, z, w) = (-xyw\sin(zw), -xyz\sin(zw), -y\cos(zw), -x\cos(zw)).$$

Então a ação de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ é σ_1-semissimplética e H é $(Z_2 \times \mathbb{Z}_2)_{\sigma_1\sigma_2}$-semi-invariante. De fato, dados $(x, y, z, w), (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$\begin{aligned}
\Omega_0(\phi \cdot (x, y, z, w), \phi \cdot (a, b, c, d)) &= \Omega_0((x, -y, z, -w), (a, -b, c, -d)) \\
&= xc + yd - za - wb \\
&= \sigma_1(\phi)\Omega_0((x, y, z, w), (a, b, c, d)); \\
\Omega_0(\psi \cdot (x, y, z, w), \psi \cdot (a, b, c, d)) &= \Omega_0((x, -y, -z, w), (a, -b, -c, d)) \\
&= -xc - yd + za + wb \\
&= -(xc + yd - za - wb) \\
&= \sigma_1(\psi)\Omega_0((x, y, z, w), (a, b, c, d));
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H(\phi \cdot (x, y, z, w)) = H(x, -y, z, -w) &= -xy\cos(zw) = \sigma_1\sigma_2(\phi)H(x, y, z, w); \\
H(\psi \cdot (x, y, z, w)) = H(x, -y, -z, w) &= -xy\cos(zw) = \sigma_1\sigma_2(\psi)H(x, y, z, w).
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema 3.11, o campo X_H é $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_{\sigma_2}$-reversível-equivariante. Observemos ainda que H satisfaz as condições do Teorema 3.26. Pelo Exemplo 3.32, uma forma normal de ordem $r \geq 3$ para H é

$$K(x,y,z,w) = xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij} z^i w^j, \quad f_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Queremos agora encontrar uma forma normal $\overline{K}$ de ordem r que mantenha a condição de $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_{\sigma_1\sigma_2}$-semi-invariância do Hamiltoniano H. Devemos ter então

$$\begin{aligned}
\overline{K}(x,-y,z,-w) &= \overline{K}(\phi \cdot (x,y,z,w)) = \sigma_1\sigma_2(\phi)\overline{K}(x,y,z,w) = -\overline{K}(x,y,z,w);\\
\overline{K}(x,-y,-z,w) &= \overline{K}(\psi \cdot (x,y,z,w)) = \sigma_1\sigma_2(\psi)\overline{K}(x,y,z,w) = -\overline{K}(x,y,z,w),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
-xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij} z^i (-w)^j &= -\left(xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij} z^i w^j \right);\\
-xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij} (-z)^i w^j &= -\left(xy + \sum_{i+j=3}^{r} f_{ij} z^i w^j \right).
\end{aligned}$$

Dessa forma, é necessário que i e j sejam sempre ímpares. Logo, $\overline{K}$ deve ter ordem r par e ser da forma

$$\overline{K}(x,y,z,w) = xy + \left(\sum_{i+j=0}^{\frac{r-2}{2}} f_{ij} z^{2i} w^{2j} \right) zw, \quad f_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Novamente pelo Teorema 3.11, o campo Hamiltoniano

$$X_{\overline{K}}(x,y,z,w) = \left(\sum_{i+j=0}^{\frac{r-2}{2}} \alpha_{ij} z^{2i} w^{2j} w,\ \sum_{i+j=0}^{\frac{r-2}{2}} \beta_{ij} z^{2i} w^{2j} z,\ -y,\ -x \right),$$

onde $\alpha_{ij} = (2i+1)f_{ij},\ \beta_{ij} = (2j+1)f_{ij} \in \mathbb{R}$, é $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2)_{\sigma_2}$-reversível-equivariante. Portanto, as simetrias e antissimetrias do campo X_H e do Hamiltoniano H são preservadas para a forma normal $\overline{K}$ de H.

Exemplo 3.45. Consideremos $\Gamma = O(2)$ agindo em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ por meio da ação diagonal

$$\theta \cdot (x,y,z,w) = (R_\theta \cdot (x,y), R_\theta \cdot (z,w)) \ \text{ e } \ \kappa \cdot (x,y,z,w) = (x,-y,z,-w),$$

para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ e todo $\theta \in [0,2\pi)$, e tomemos o epimorfismo $\sigma : O(2) \to \mathbb{Z}_2$ tal que $\ker\sigma = SO(2)$. A ação de $O(2)$ em $(\mathbb{R}^4, \Omega_0)$ é simplética. De fato, dados

$(x, y, z, w), (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, temos

$$\begin{aligned}
\Omega_0(\theta \cdot (x,y,z,w), \theta \cdot (a,b,c,d)) &= \Omega_0((R_\theta \cdot (x,y), R_\theta \cdot (z,w)), (R_\theta \cdot (a,b), R_\theta \cdot (c,d))) \\
&= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)(xc + yd - za - wb) \\
&= \Omega_0((x,y,z,w),(a,b,c,d)); \\
\Omega_0(\kappa \cdot (x,y,z,w), \kappa \cdot (a,b,c,d)) &= \Omega_0((x,-y,z,-w),(a,-b,c,-d)) \\
&= xc + yd - za - wb \\
&= \Omega_0((x,y,z,w),(a,b,c,d)).
\end{aligned}$$

Consideremos H um Hamiltoniano $O(2)_\sigma$-semi-invariante nas condições do Teorema 3.26 e com parte quadrática $H_2(x,y,z,w) = \alpha(xw - yz)$, para $\alpha \in \mathbb{R}$ não nulo. Notemos que tal H existe visto que H_2 é $O(2)_\sigma$-semi-invariante. Assim, pela Observação 3.12, o campo Hamiltoniano X_H induzido por H é $O(2)_\sigma$-reversível-equivariante. Além disso, pelo Exemplo 3.40, uma forma normal de H de ordem $2q \geq 4$ é

$$K(x,y,z,w) = \alpha(xw - yz) + \sum_{j+k+l+m=2}^{q} B_{jklm}(x^2+y^2)^j(z^2+w^2)^k(xz+yw)^l(yz-xw)^m,$$

com $B_{jklm} \in \mathbb{R}$. Notemos que K pode não ser $O(2)_\sigma$-semi-invariante. De fato, como $\alpha \neq 0$, se existe $B_{jklm} \neq 0$ tal que m assume algum valor par, então

$$\begin{aligned}
& K(\kappa \cdot (x,y,z,w)) \\
= \; & -\alpha(xw - yz) + \sum_{j+k+l+m=2}^{q} B_{jklm}(x^2+y^2)^j(z^2+w^2)^k(xz+yw)^l(-1)^m(yz-xw)^m \\
\neq \; & -K(x,y,z,w),
\end{aligned}$$

para todo $(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4$ tal que $yz - xw \neq 0$. Contudo, como K é $SO(2)$-invariante, já que tomando $u_1(x,y,z,w) = x^2 + y^2$, $u_2(x,y,z,w) = z^2 + w^2$, $u_3(x,y,z,w) = xz + yw$ e $u_4(x,y,z,w) = yz - xw$ temos $u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}^4}(SO(2))$, então K é $O(2)_\sigma$-semi-invariante se m assume apenas valores ímpares, pois nesse caso

$$K(\kappa \cdot (x,y,z,w)) = -K(x,y,z,w) = \sigma(\kappa)K(x,y,z,w).$$

Logo, para que a forma normal de H mantenha sua $O(2)_\sigma$-semi-invariância, ela deve ser da forma

$$\widetilde{K}(x,y,z,w) = \alpha(xw - yz) + \sum_{j+k+l+p=2}^{q} \widetilde{B}_{jklp}(x^2+y^2)^j(z^2+w^2)^k(xz+yw)^l(yz-xw)^{2p}(yz-xw),$$

com $\widetilde{B}_{jklp} \in \mathbb{R}$. Como $u_4^2 = u_1u_2 - u_3^2$, então

$$\widetilde{K}(x,y,z,w) = \alpha(xw - yz) + \sum_{j+k+l=2}^{q} C_{jkl}(x^2+y^2)^j(z^2+w^2)^k(xz+yw)^l(yz-xw),$$

para $C_{jkl} \in \mathbb{R}$. Novamente pela Observação 3.12, o campo Hamiltoniano $X_{\widetilde{K}}$ é $O(2)_\sigma$-reversível-equivariante.

Considerações Finais

A teoria de formas normais vem sendo desenvolvida há anos por diversos autores que visam possibilitar o estudo local do comportamento qualitativo de campos vetoriais. O método clássico utilizado para encontrar formas normais para campos de vetores que não são necessariamente Hamiltonianos consiste em simplificar, por meio de sucessivas mudanças de coordenadas, uma série de potências da aplicação que gera o campo em torno de um ponto de equilíbrio, resultando em um campo conjugado escrito de maneira mais simples e mais conveniente. No contexto de campos Hamiltonianos, a teoria de formas normais consiste em simplificar a série de Taylor do Hamiltoniano associado ao campo por meio de mudanças de coordenadas que mantêm a hamiltoneidade do campo original.

Nessa direção, o método do operador adjunto é um processo facilitador na obtenção de uma forma normal de ordem $r \geq 3$ para campos Hamiltonianos, na medida em que reduz o processo indutivo ao de encontrar elementos no núcleo dos operadores ad^k_{A*}, para cada $k \in \{1, \cdots, r\}$, operadores esses que dependem exclusivamente da parte linear A do campo. No entanto, uma desvantagem desse método está na dificuldade em determinar as soluções polinomiais da equação diferencial parcial associada $ad^k_{A*}(F) \equiv 0$ conforme aumentamos k ou a dimensão do espaço simplético em que o Hamiltoniano está definido. Para garantir então a eficácia da teoria e, em alguns casos, facilitar a obtenção das formas normais, descrevemos um método algébrico alternativo ao método do operador adjunto que reconhece $\ker ad^k_{A*}$ como o subespaço vetorial dos polinômios homogêneos de grau k invariantes pela ação de um grupo de Lie linear que também depende da linearização A do campo de vetores, a saber o grupo

$$S = \overline{\{e^{sA^t};\ s \in \mathbb{R}\}}.$$

Na prática, mesmo em um contexto originalmente sem simetrias, tal método consiste em determinar polinômios homogêneos de grau k no anel de invariantes $\mathcal{P}_{R^{2n}}(S)$. Nesse caso, o tratamento algébrico é vantajoso, uma vez que encontrar geradores para esse anel independe dos fatores dificultantes citados acima e existem ferramentas computacionais que nos auxiliam nesse processo. Desse modo, apesar de truncarmos a forma normal do Hamiltoniano na ordem $r \geq 3$, sabemos quem são os termos de ordem mais alta.

Paralelamente a essa teoria, tem-se desenvolvido a teoria de sistemas dinâmicos em presença de simetrias e antissimetrias. No contexto Hamiltoniano reversível-equivariante, é possível relacionar as simetrias e antissimetrias do campo de vetores com as do Hamiltoniano, dependendo se a ação do grupo é simplética ou semissimplética, o que nos fornece quatro classes de simetrias. Ainda nesse contexto, as formas normais podem ou não herdar as propriedades simétricas do Hamiltoniano original. Para que elas sejam herdadas, o método tradicional consiste em determinar primeiro a forma normal do Hamiltoniano por um dos métodos acima citados e então impor as condições de simetria como um passo a posteriori. Os resultados obtidos por Terézio em [40] fornecem um método diferente que produz formas normais herdando as propriedades simétricas do Hamiltoniano já como um primeiro passo. Tal método é baseado no conhecimento da teoria invariante para o grupo das simetrias e antissimetrias do Hamiltoniano e para o grupo S, como uma extensão do método algébrico alternativo apresentado nesse trabalho.

Índice Remissivo

Referências Bibliográficas

[1] ALOMAIR, R. **Periodic orbits in some classes of Hamiltonian systems with symmetry.** Doctoral Thesis, 2015.

[2] ANTONELI, F.; BAPTISTELLI, P. H.; DIAS, A. P.; MANOEL, M. **Invariant theory and reversible-equivariant vector fields.** Journal of Pure and Applied Algebra, v. 213, n. 5, p. 649-663, 2009.

[3] BAPTISTELLI, P. H.; MANOEL, M.; ZELI, I. O. **Normal form theory for reversible equivariant vector fields.** Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series, v. 47, n. 3, p. 935-954, 2016.

[4] BELITSKII, G. R. **C^∞-normal forms of local vector fields.** Acta Applicandae Mathematicae, v. 70, n. 1, p. 23-41, 2002.

[5] BELITSKII, G. R. **Equivalence and normal forms of germs of smooth mappings.** Russian Mathematical Surveys, v. 33, n. 1, p. 107, 1978.

[6] BELITSKII, G. R. **Normal forms in relation to the filtering action of a group.** Trudy Moskovskogo Matematicheskogo Obshchestva, v. 40, p. 3-46, 1979.

[7] BIRKHOFF, G. D. **Dynamical systems.** American Mathematical Society, 1960.

[8] BRÖCKER, T.; TOM DIECK, T. **Representations of compact Lie groups.** Springer Science & Business Media, 2013.

[9] BROER, H. W.; CHOW, S. N.; KIM, Y.; VEGTER, G. **A normally elliptic Hamiltonian bifurcation.** Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP, v. 44, n. 3, p. 389-432, 1993.

[10] BRUNO, A. D. **Local Methods in Nonlinear Differential Equations.** Springer Verlag, 1989.

[11] BURGOYNE, N.; CUSHMAN, R. **Normal forms for real linear Hamiltonian systems.** In 1976 NASA Conference on Geometric Control Theory, Brookline, Mathematical Science Press, p. 483-529, 1977.

[12] BURSZTYN, H.; MACARINI, L. **Introdução à geometria simplética.** Notas da XIV Escola de Geometria Diferencial, UFBA, 2011.

[13] BUZZI, C.; ROBERTO, L. A.; TEIXEIRA, M. A. **Branching of periodic orbits in reversible Hamiltonian systems.** In: MANOEL, Miriam; FUSTER, MC Romero; WALL, Charles Terence Clegg (Ed.). **Real and complex singularities.** Cambridge University Press, 2010.

[14] CHOW, S-N.; LI, C.; WANG, D. **Normal forms and bifurcation of planar vector fields.** Cambridge University Press, 1994.

[15] COELHO, F. U.; LOURENCO, M. L. **Um Curso de Álgebra Linear.** Vol. 34, Edusp, 2001.

[16] DECKER, W.; GREUEL, G-M.; PFISTER, G.; SCHÖNEMANN, H. **Singular 4-1-0: A computer algebra system for polynomial computations.** URL http://www.singular.uni-kl.de, 2016.

[17] ELPHICK, C.; TIRAPEGUI, E.; BRACHET, M. E.; COULLET, P.; IOOSS, G. **A simple global characterization for normal forms of singular vector fields.** Physica D: Nonlinear Phenomena, v. 29, n. 1-2, p. 95-127, 1987.

[18] GALIN, D. M. **Versal deformations of linear Hamiltonian systems.** In: Seminar imeni I. G. Petrovskogo, Trudy. p. 63-74, 1975.

[19] GOLUBITSKY, M.; STEWART, I.; SCHAEFFER, D. G. **Singularities and groups in bifurcation theory.** Vol 1, Springer Verlag, 1985.

[20] GOLUBITSKY, M., STEWART, I., SCHAEFFER, D. G. **Singularities and Groups in Bifurcation Theory.** Vol 2, Springer Verlag, 1987.

[21] GUSTAVSON, F. G. **Oil constructing formal integrals of a Hamiltonian system near ail equilibrium point.** The Astronomical Journal, v. 71, p. 670, 1966.

[22] HALL, Brian. **Lie groups, Lie algebras, and representations: an elementary introduction.** Springer, 2015.

[23] HOFER, H.; ZEHNDER, E. **Symplectic invariants and Hamiltonian dynamics.** Birkhäuser, 2012.

[24] HOVEIJN, I. **Versal deformations and normal forms for reversible and Hamiltonian linear systems.** Journal of Differential Equations, v. 126, n. 2, p. 408-442, 1996.

[25] KOÇAK, H. **Normal forms and versal deformations of linear Hamiltonian systems.** Journal of Differential Equations, v. 51, n. 3, p. 359-407, 1984.

[26] LAMB, J.; MELBOURNE, I. **Normal form theory for relative equilibria and relative periodic solutions.** Transactions of the American Mathematical Society, v. 359, n. 9, p. 4537-4556, 2007.

[27] LAMB, J. S.; ROBERTS, M. **Reversible equivariant linear systems.** Journal of Differential Equations, v. 159, n. 1, p. 239-279, 1999.

[28] LEMES, R. C. **Propriedades genéricas de sistemas hamiltonianos.** Dissertação de Mestrado, 2013.

[29] LIMA, M. F. S.; TEIXEIRA, M. A. **Families of periodic orbits in resonant reversible systems.** Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, v. 40, n. 4, p. 511-537, 2009.

[30] MARTINS, R. M. **A estrutura Hamiltoniana dos campos reversíveis em 4D.** Dissertação de Mestrado, 2008.

[31] MEREU, A. C.; TEIXEIRA, M. A. **Reversibility and branching of periodic orbits.** Discrete and Continuous Dynamical Systems, v. 3, p. 1177-1199, 2013.

[32] PALIS, J.; DE MELO, W. **Introduçao aos sistemas dinâmicos.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1978.

[33] POINCARÉ, H. 1879. Thesis; also Oeuvres I, 59-129, Paris: Gauthier Villars, 1928.

[34] ROBINSON, C. **Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos.** 1999.

[35] SAN MARTIN, L. A. B. **Grupos de Lie.** Unicamp, 2017.

[36] SANDERS, J. A.; VERHULST, F.; MURDOCK, J. A. **Averaging methods in nonlinear dynamical systems.** New York: Springer, 2007.

[37] SILVA, A. C. **Lectures on symplectic geometry.** Lecture Notes in Mathematics, n. 1764. Berlin: Springer, 2006.

[38] SOTOMAYOR, J. **Lições de equações diferenciais ordinárias.** Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1979.

[39] TEIXEIRA, M. A.; MARTINS, R. M. **Reversible-equivariant systems and matricial equations.** Anais da Academia Brasileira de Ciências, v. 83, n. 2, p. 375-390, 2011.

[40] TERÉZIO, E. M. **Formas Normais de Sistemas Hamiltonianos Reversíveis-Equivariantes.** Tese de Doutorado, Maringá: Universidade Estadual de Maringá, Em preparação.

[41] VAN DER MEER, J-C. **The hamiltonian Hopf bifurcation.** In: The Hamiltonian Hopf Bifurcation. Springer Berlin Heidelberg, p. 66-83, 1985.

[42] ZEHNDER, E. **Lectures on dynamical systems: Hamiltonian vector fields and symplectic capacities.** European Mathematical Society, 2010.