UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

JOÃO MANOEL SORIANO PITOT

Existência e Comportamento Assintótico de Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares em $\mathbb{R}^n$

Maringá
2013

JOÃO MANOEL SORIANO PITOT

Existência e Comportamento Assintótico de Soluções de Equações Diferenciais Parciais Lineares em $\mathbb{R}^n$

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: Análise.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti

Maringá
2013

Dedicatória

À meu pai Juan, minha mãe Sara
e meu irmão Paulo por serem exemplos
de sabedoria, força e companheirismo.

Agradecimentos

Ao Professor Marcelo Moreira Cavalcanti, por sua dedicação na realização deste trabalho, pela experiência adquirida com seus ensinamentos, pela compreensão e pela confiança depositada em mim.

Aos meus professores da graduação e do mestrado, a minha gratidão pelos conhecimentos repassados.

Aos amigos do curso: Camila, Cleilton, Ginnara, Juliana, Patrícia, Simone, Stephanie, Tatiana e Thales que nunca faltaram com o espírito de companheirismo e amizade.

Aos mestres: Alex (Boi), André, Djeison, Eliomar, Guilherme (carioca), Jorge, José Henrique, Juliano, Rodrigo, Thiago(fera) e Victor que me ajudaram nos estudos quando precisei.

A minha namorada Ariella, pela compreensão da minha ausência na reta final deste trabalho.

Ao meu amigo Rafael que considero como um irmão mais velho, sempre dando conselhos sobre a vida

Aos meus amigos Aline, Lucas e Carol, pela força, incentivo e alegria que me deram.

Ao meu irmão Paulo (Dis) que sempre me proporcionou força, conselhos e muitas risadas.

À Universidade Estadual de Maringá, Departamento de Matemática e a CAPES, pelo respaldo financeiro.

Aos meus pais Juan e Sara: Palavras não fazem justiça pelo quanto sou agradecido pelo amor, educação, força e coragem que me deram; amo vocês .

E a todos que de forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Meu Muito Obrigado.

Resumo

O objetivo deste trabalho é provar a existência, unicidade e o comportamento assintótico de soluções para as equações parabólicas e hiperbólicas em $\mathbb{R}^n$. A prova da existência de soluções é baseada no Método de Faedo-Galerkin e, para obtermos o comportamento assintótico da equação parabólica utilizamos o Método da Energia, enquanto para a equação hiperbólica usamos o Método da Perturbação da Energia.

Palavras-chave: Equação parabólica, equação hiperbólica, existência e unicidade, decaimento exponencial.

Abstract

The purpose of this work is to prove the existence, uniqueness and asymptotic behavior of solutions to the parabolic and the hyperbolic equations on $\mathbb{R}^n$. The proof of the existence of solutions is based on Faedo-Galerkin method and to establish the asymptotic behavior of the parabolic equation we utilize the Energy Methods, whereas for hyperbolic equation we use the Energy Perturbation Methods.

Keywords: Parabolic equation, hyperbolic equation, existence and uniqueness, exponential decay.

Conteúdo

Introdução

Neste trabalho abordamos a existência e unicidade de soluções bem como das taxas de decaimento da energia associadas às equações parabólicas e hiperbólicas definidas em $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$, mais precisamente estudamos os problemas

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{1}$$

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \ u'(x,0) = u_1(x), \ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{2}$$

onde u' e u'' significam a derivada primeira e segunda, respectivamente, de u com respeito ao tempo e $\gamma > 0$.

Em [1], os autores estabelecem que a solução do problema (1) decai exponecialmente se, e somente se, o dado inicial é zero quase sempre em uma pequena bola centrada na origem no espaço de Fourier.

Recentemente, em [15], provou-se que a energia da solução da equação de Klein-Gordon linear

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + c^2 u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(.,0) = f \text{ em } \mathbb{R}^n \\ x'u'(.,0) = g \text{ em } \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3}$$

decai localmente com uma taxa polinomial, isto é, existe uma constante real positiva K', independente de $f \in H^1(\Omega)$ e $g \in L^2(\Omega)$ (onde seus suportes estão contidos em domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$) tal que

$$\|u(x,t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \left\|\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\right\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{K'}{t^n}\left\{\|f\|^2_{H^1(\Omega)} + \|g\|^2_{L^2(\Omega)}\right\}$$

para todo $t \geq T_0$.

O plano de apresentação desta dissertação é o seguinte:

No Capítulo 1, apresentamos as notações, terminologias e resultados preliminares essenciais ao desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Nos Capítulo 2, 3 e 4, estudamos a existência e unicidade de solução fraca para o Problema (1) e soluções fortes e fracas para o Problema (2), respectivamente, via o Método de Faedo-Galerkin, considerando os espaços de Hilbert definidos no Capítulo 1, inspirados no trabalho de Bjorland e Schonbeck [1]. Em cada caso, estudamos o decaimento exponencial da solução fraca. No problema (2), contudo, a prova do decaimento exponencial é obtida através do Método da Perturbação da Energia conforme [7].

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo apresentaremos as notações e resultados fundamentais utilizados no desenvolvimento do trabalho, introduzindo os conceitos de Distribuição e Espaços de Sobolev, com base nas quais defini-se uma solução fraca de uma equação diferencial parcial. Vamos, também, introduzir alguns resultados de Análise Funcional sem, nos dedicarmos as demonstrações, apenas indicaremos as referências bibliográficas onde as quais podem ser encontradas.

1.1 Algumas Noções Sobre Distribuições Escalares

1.1.1 Espaços das Funções Testes e Derivada Distribucional

Antes de definirmos o espaço das funções testes, serão feitas algumas considerações sobre as notações.

Definição 1.1 *Seja* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, *onde* $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$ *e, seja* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *o operador derivação é denotado por*

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}, \ldots, \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Em particular, para $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, temos $D^0 x = x$, isto é, o operador derivação neste caso é a identidade.

Definição 1.2 *Sejam Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua. O suporte de u, denotado por supp(u), é definido como sendo o fecho, em Ω, do conjunto dos pontos x pertencentes a Ω em que u não se anula, isto é,*

$$supp(u) = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}} \text{ em } \Omega$$

Sejam $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínuas. Pela definição acima, temos as seguintes propriedades:

(i) $supp(u + v) \subset supp(u) \cup supp(v)$

(ii) $supp(uv) \subset supp(u) \cap supp(v)$

(iii) $supp(\lambda u) = supp(u)$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Observação 1.1 *Embora o suporte de uma função contínua seja um fechado de Ω, existem funções cujo suporte não é um compacto do $\mathbb{R}^n$. Por exemplo, seja $u : (0, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por $u(x) = 1$ para todo $x \in (0, 1)$. Temos que o supp$(u) = (0, 1)$, que não é um conjunto compacto da reta.*

Tendo em vista nosso interesse na classe das funções cujo suporte seja um conjunto compacto de Ω, representaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $u : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto contido em Ω.

Das propriedades de suportes mencionadas acima, temos que $C_0^\infty(\Omega)$ é um espaço vetorial e $supp(D^\alpha u) \subset supp(u)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

É possível introduzir uma topologia em $C_0^\infty(\Omega)$, denominada *topologia do limite indutivo*, que faz deste espaço um espaço topológico denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$, cujos elementos serão chamados *funções testes*.

Convergência em $\mathcal{D}(\Omega)$

Dizemos que uma sequência $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções testes converge para $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, quando:

(i) Existe um subconjunto compacto K de Ω tal que

$$supp(\varphi_n) \subset K, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad supp(\varphi) \subset K.$$

(ii) $D^\alpha \varphi_n \longrightarrow D^\alpha \varphi$ uniformemente sobre K, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Definição 1.3 *Entendemos por distribuição escalar sobre Ω, uma forma linear e contínua sobre $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, uma forma $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), tal que*

$$T(\alpha\varphi + \psi) = \alpha T(\varphi) + T(\psi), \ \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ e \ \ \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

e T é contínua, isto é, se $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$, então $(T(\varphi_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $T(\varphi)$ em $\mathbb{K}$.

O valor da distribuição T em φ será representando por $\langle T, \varphi\rangle$ e por $\mathcal{D}'(\Omega)$ estaremos representando a coleção de todas as formas lineares contínuas $T : \mathcal{D}(\Omega) \to \mathbb{R}$.

Dadas T e S em $\mathcal{D}'(\Omega)$ definimos

(i) $\langle T + S, \varphi\rangle = \langle T, \varphi\rangle + \langle S, \varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$

(ii) $\langle \alpha T, \varphi\rangle = \alpha\langle T, \varphi\rangle$, $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *e* $\alpha \in \mathbb{K}$.

Munido destas operações, $\mathcal{D}'(\Omega)$ torna-se um espaço vetorial denominado espaço das distribuições escalares sobre Ω.

Convergência em $\mathcal{D}'(\Omega)$

Uma sequência de distribuições escalares $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para uma distribuição escalar T, em $\mathcal{D}'(\Omega)$, quando:

$$\langle T_n, \varphi\rangle \longrightarrow \langle T, \varphi\rangle \ \text{ em } \ \mathbb{K}, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Com esta notação de convergência, $\mathcal{D}'(\Omega)$ passa a ser um espaço vetorial topológico.

As funções localmente integráveis serão utilizadas, inicialmente, para gerar distribuições escalares, como mostra o exemplo a seguir.

Exemplo 1.1 *Dada $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, definimos para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$*

$$\begin{array}{rccccl} T_u: & \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \\ & \varphi & \longmapsto & \langle T_u, \varphi \rangle & = & \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx \end{array} \tag{1.1}$$

Temos que T_u é uma distribuição escalar sobre $\mathbb{R}^n$. Com efeito, a linearidade de T_u segue da linearidade da integral. Agora, seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções testes sobre $\mathbb{R}^n$ que converge para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Assim temos

$$\begin{aligned} |\langle T_u, \varphi_n\rangle - \langle T_u, \varphi\rangle| = |\langle T_u, \varphi_n - \varphi\rangle| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)||(\varphi_n - \varphi)(x)|dx \\ &\leq \max_{x\in K} |(\varphi_n - \varphi)(x)| \int_K |u(x)|dx \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

onde K é um compacto de $\mathbb{R}^n$ que contém o supp$(\varphi_n - \varphi)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Lema 1.1 (Du Bois-Raymond) *Seja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Então*

$$\int_\Omega u(x)\varphi(x)dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

se, e somente, se $u = 0$ q.s. em Ω.

Demonstração: Ver [4]. ■

Observação 1.2 *A aplicação (1.1) é injetiva. De fato, sejam $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tais que $T_u = T_v$, então pelo Lema de Du Bois-Raymond seque que $u = v$ q.s. em Ω.*

Por esta razão, indentifica-se u com a distribuição T_u por ela definida e podemos concluir que o espaço $L^1_{loc}(\Omega)$ se indentifica com uma parte do espaço das distribuições $\mathcal{D}'(\Omega)$. Simbolicamente,

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{T_u; u \in L^1_{loc}(\Omega)\} \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

No exemplo a seguir, construiremos uma distribuição que não é gerada por uma função de $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. O que mostra que $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ é uma parte própria de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.2 *Fixado $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Então δ_{x_0} definido por*

$$\langle \delta_{x_0}, \varphi \rangle = \varphi(x_0), \quad \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

é uma distribuição sobre $\mathbb{R}^n$ denominada Delta de Dirac. Provaremos, que a distribuição δ_{x_0} não é definida por uma função localmente integrável. Vamos supor que exista $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $T_u = \delta_{x_0}$, assim temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0), \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Em particular, seja $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ dada por

$$\psi(x) = \varphi(x)\|x - x_0\|^2$$

teremos

$$0 = \psi(x_0 = \langle \delta_{x_0}, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\varphi(x)\|x - x_0\|^2 dx \ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Pelo Lema de Du Bois-Raymond tem-se que $u(x)\|x - x_0\|^2 = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^n$ e, portanto, $u(x) = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^n$. Logo $\varphi(x_0) = 0$, para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. O que é um aburdo.

A noção de derivada fraca de uma função foi proposta, inicialmente por Sobolev, motivado pela fórmula de integração por partes.

Dada uma função u continuamente derivável em $\mathbb{R}$ (no sentido de Leibniz), então para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ temos:

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} u'(x)\varphi(x)dx, \tag{1.2}$$

porque φ se anula fora de um compacto da reta.

Motivados pela fórmula (1.2), Sobolev-Schwartz definiram a derivada de uma distribuição.

Dizemos que a distribuição $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ possui derivada fraca quando existir uma distribuição $v \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} v(x)\varphi(x)dx,\ \forall \in \mathcal{D}(\mathbb{R}). \tag{1.3}$$

A função v denomina-se derivada fraca de u.

Para uma distribuição qualquer de $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, Schwartz formulou o seguinte conceito: dado $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, defini-se derivada distribucional de T como sendo a forma linear $\dfrac{dT}{dx}$: $\mathcal{D}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$\left\langle \frac{dT}{dx}, \varphi \right\rangle = \left\langle T, \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle,\ \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \tag{1.4}$$

No caso em que T e $\dfrac{dT}{dx}$ são definidas por funções localmente integráveis u e v, respectivamente, então (1.3) e (1.4) coincidem. Agora, se $u \in C^1(\mathbb{R})$ então (1.3) e (1.4) identificam-se a (1.2), isto é, a derivada no sentido clássico identifica-se à derivada no sentido das distribuições.

Agora, sejam $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada distribucional de ordem α de T é a distribuição $D^\alpha T$ definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega). \tag{1.5}$$

Observação 1.3 *(i) A aplicação*

$$\begin{array}{rccc} D^\alpha : & \mathcal{D}'(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ & T & \longmapsto & D^\alpha T \end{array}$$

é linear e contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}'(\Omega)$, isto é,

$$T_n \longrightarrow T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega) \Longrightarrow D^\alpha T_n \longrightarrow D^\alpha T \text{ em } \mathcal{D}'(\Omega).$$

(ii) A derivada de uma distribuição localmente integrável pode não ser localmente integrável.

Exemplo 1.3 *Seja u a função de Heaviside definida em $\mathbb{R}$ do seguinte modo:*

$$u(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \geq 0 \\ 0, & se,\ x < 0 \end{cases}$$

Esta função é localmente integrável em $\mathbb{R}$, no entanto sua derivado não o é. De fato,

$$\langle u', \varphi \rangle = -\langle u, \varphi' \rangle = -\int_0^{+\infty} \varphi'(x)dx = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

para toda função $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Portanto, $u' = \delta_0 \notin L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

A função de Heaviside embora derivável no sentido de Sobolev, a derivada u' não é derivável no mesmo sentido, pois $u' = \delta_0$ não é localmente integrável. Entretanto, segue-se da definição (1.5) que cada distribuição $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições.

1.2 Espaços de Sobolev

1.2.1 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Definição 1.4 *Denotamos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$, o conjunto*

$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R};$ *u é mensurável e* $|u|^p$ *é integrável em* Ω *no sentido de Lebesgue*$\}$

com

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

onde $\|.\|_p$ é a norma de $L^p(\Omega)$.

Definição 1.5 *No caso em que $p = \infty$, temos o espaço vetorial*

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; u \text{ é mensurável e existe uma} \\ \text{constante } C \text{ tal que } |u(x)| \leq C \text{ q.s. em } \Omega \end{array} \right\}$$

com

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|u\|_\infty = \inf\{C; |f(x)| \leq \ q.s.\ em\ \Omega\}$$

onde $\|.\|_\infty$ *é uma norma em* $L^\infty(\Omega)$.

Observação 1.4 *O espaço* $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, *munido com sua respectiva norma é um espaço de Banach. Em particular, o espaço* $L^2(\Omega)$ *é um espaço de Hilbert, cuja norma e produto interno serão denotados e definidos, respectivamente, por*

$$\|u\|_2 = \left(\int_\Omega |u(x)|^2 dx\right)^{1/2} \qquad e \qquad ((u,v))_2 = \int_\Omega u(x)\overline{v(x)}dx.$$

Notação: Seja $1 \leq p \leq \infty$, denotamos por q o expoente conjungado de p, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Na teoria dos espaços L^p, ressaltamos três desigualdades básicas:

(i) **Desigualdade de Young** (DY): Seja $1 < p < \infty$. Se $a, b \in \mathbb{R}$ não-negativos e q o expoente conjugado de p, então

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(ii) **Desigualdade de Hölder** (DH): Sejam $1 \leq p \leq +\infty$ e q o expoente conjugado de p. Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então

$$uv \in L^1(\Omega) \text{ e } \|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(ii) **Desigualdade de Minkowski** (DM): Se $u, v \in L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, então

$$\|u+v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definição 1.6 *Sejam* V *e* H *dois espaços com* $V \subset H$. *Diremos que* V *está imerso continuamente em* H *quando a aplicação inclusão* $i : V \longrightarrow H$ *for contínua.*

Pela definição acima, estabelecemos a seguinte cadeia de injeções contínuas e densas:

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega),\ 1 \leq p < \infty.$$

Teorema 1.1 *$L^p(\Omega)$ é reflexivo para qualquer p, $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Ver [2]. $\blacksquare$

Teorema 1.2 *$L^p(\Omega)$ é separável para qualquer p, $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Ver [2]. $\blacksquare$

Definição 1.7 *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos a convolução de f por g como*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)dy.$$

Observação 1.5 *Com as condições mencionadas na definição acima temos que $(f*g) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, além disso, $\|f*g\| \leq \|f\|_{L^{\mathbb{R}^n}} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$. Contudo, sendo $f \in C_0^k(\mathbb{R}^n)$ (k natural) e $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, então $(f * g) \in C^k(\mathbb{R}^n)$ e vale a fórmula de derivação*

$$D^k(f * g) = (D^k f) * g.$$

E mais ainda, f e g são funções para as quais a convolução está bem definida, então

$$supp(f * g) \subset supp(f) + supp(g).$$

Definição 1.8 *Denominamos sucessão regularizante à toda sucessão $(\rho_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ de funções tais que:*

(i) $\rho_\nu \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$;

(ii) $supp(\rho_\nu) \subset \overline{B_{1/\nu}(0)}$;

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho_\nu(x)dx = 1$;

(iv) $\rho_\nu > 0$.

No que se segue (ρ_ν) representará uma sucessão regularizante.

Proposição 1.1 *Seja $f \in C(\mathbb{R}^n)$. Então, $\rho_\nu * f \longrightarrow f$ uniformemente sobre todo compacto do $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.2 *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.3 *Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p < \infty$. Então*

$$\rho_\nu * f \longrightarrow f \ \text{ em } \ L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [4]. ■

1.2.2 Propriedades da Transformada de Fourier

A transformada de Fourier juntamente com o produto de convoluções fornece-nos um poderoso e útil instrumento no estudo das equações diferenciais parciais. A seguir, definiremos a transformada de Fourier para funções de $L^1(\mathbb{R}^n)$ e estenderemos este conceito para a classe das distribuições.

Definição 1.9 *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de f, denotada por $\hat{f}$, é uma função definida sobre o $\mathbb{R}^n$ pela fórmula*

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<x,\xi>} f(x)dx,$$

onde $< x, \xi >= \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Observação 1.6 *A transformada de Fourier também é definida através da expressão*

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i<x,\xi>} f(x)dx,$$

Observação 1.7 *Como* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *é imediato ver que* $\hat{f}(\xi)$ *está bem definida para todo* $\xi \in \mathbb{R}^n$*. De fato,*

$$|\hat{f}(\xi)| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i<x,\xi>} f(x)dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

Proposição 1.4 *A função* $\hat{f}$ *é uniformemente contínua.*

Demonstração: Ver [4]. ∎

Proposição 1.5 *Seja* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $h \in \mathbb{R}^n$*. Então:*

(i) $(\widehat{\tau_h f}) = e^{-2\pi i<h,\xi>}\hat{f}(\xi)$

(ii) $\tau_h(\hat{f})(\xi) = (e^{2\pi i\widehat{<h,.>}f(.)})(\xi)$

(iii) Se $\lambda > 0$ *e* $g(x) = f(x/\lambda)$ *para* $x \in \mathbb{R}^n$*, então*

$$\hat{g}(\xi) = \lambda^n \hat{f}(\lambda\xi)$$

(iv) Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *então,*

$$\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$$

Demonstração: Ver [4]. ∎

Observação 1.8 *Uma generalização do ítem (iv) do Teorema* 1.5*: se* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *e* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$*,* $1 \leq p \leq 2$*. Então*

$$(\widehat{f * g})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

Demonstração: Ver [10]. ∎

Exemplo 1.4 *A transformada de Fourier da função* $x \mapsto e^{-\pi\|x\|^2}$ *é dada por*

$$(\widehat{e^{-\pi\|x\|^2}})(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}, \tag{1.6}$$

(Ver demonstração em [4])

Claramente, $e^{-\pi\|\cdot\|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

1.2.3 O Espaço de Schwartz

Definição 1.10 *O Espaço de Schwartz (ou o espaço das funções rapidamente decrescentes), que denotamos por $\mathcal{S}$, é o subespaço vetorial formado pelas funções $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tais que*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \|x\|^k D^\alpha \varphi(x) = 0$$

quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Exemplo 1.5 *A função $e^{-\|x\|^2}$ é um clássico exemplo de função que pertence ao Espaço de Schwartz.*

Exemplo 1.6 *Temos que as funções testes são funções rapidamente decrescentes, ou seja, $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, então existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^n$ tal que supp(φ) $\subset K$. Consideremos, então, $\rho > 0$ tal que $K \subset B_\rho(0)$. Logo, dados $\epsilon > 0$, $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tem-se para todo $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| > \rho$ que*

$$\|x\|^k | |D^\alpha \varphi| = 0 < \epsilon,$$

isto é, $\varphi \in \mathcal{S}$.

Proposição 1.6 *Uma função $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ pertence a $\mathcal{S}$ se, e somente se, $\|x\|^k D^\alpha \varphi(x)$ é limitada em $\mathbb{R}^n$ quaisquer que sejam $k \in \mathbb{N}$ e $\alpha \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Observação 1.9 *Segue da fórmula de Leibniz que o produto de funções de $\mathcal{S}$ pertence a $\mathcal{S}$.*

Proposição 1.7 *Se $\varphi \in \mathcal{S}$, então $x^q \varphi \in \mathcal{S}$ para qualquer $q \in \mathbb{N}^n$.*

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Corolário 1.1 *Considerando que* $P(x)$ *representa um polinômio com coeficientes constantes, isto é,* $P(x) = \sum_{|\alpha| \leq n} a_\alpha x^\alpha$ *e, que* $P(D)$ *representa um polinômio diferencial com coeficientes constantes, ou seja,* $P(D) = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta D^\beta$*. Seja* $\varphi \in \mathcal{S}$*, então*

$$P(x)P(D)(\varphi(x)) \ \ e \ \ P(D)[P(x)\varphi(x)]$$

pertencem a $\mathcal{S}$*.*

Em particular, se $\varphi \in \mathcal{S}$*, então* $D^\alpha \varphi \in \mathcal{S}$ *para todo* $\alpha \in \mathbb{N}^n$*.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.8 $\mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ *é uma inclusão contínua.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.9 *Para* $1 \leq p \leq +\infty$*, temos*

$$\mathcal{S} \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração: Ver [4]. ■

Observação 1.10 *Em particular, para* $1 \leq p < +\infty$*, resulta que* $\mathcal{S}$ *é denso em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *em virtude da densidade de* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *em* $L^p(\mathbb{R}^n)$ *e do fato que* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}$*.*

Proposição 1.10 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *é denso* $\mathcal{S}$*.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.11 *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}$*, então* $\hat{\varphi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$*.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Proposição 1.12 *Seja* $\varphi \in \mathcal{S}$*. Então,*

(i) $(\widehat{D_x^\alpha \varphi})(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \hat{\varphi}(\xi)$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

(ii) $\xi^\beta D_\xi^\alpha(\hat{\varphi}(\xi)) = \dfrac{(-2\pi i)^{|\alpha|}}{(2\pi i)^{|\beta|}} (\widehat{D_x^\beta (x^\alpha \varphi(x))})(\xi)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$.

(iii) $\lim\limits_{\|\xi\| \to \infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Proposição 1.13 *Seja $\varphi \in \mathcal{S}$. Então $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ e a aplicação $\varphi \in \mathcal{S} \mapsto \hat{\varphi} \in \mathcal{S}$ é linear e contínua.*

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Proposição 1.14 (Relação Fraca de Parseval) *Sejam $f, g \in \mathcal{S}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi)d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x)dx. \tag{1.7}$$

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Proposição 1.15 (Fórmula de inversão de Fourier) *Seja $g \in \mathcal{S}$. Então,*

$$g(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i <x,\xi>}\hat{g}(\xi)d\xi. \tag{1.8}$$

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Proposição 1.16 *A transformada de Fourier é um isomorfismo topológico de $\mathcal{S}$ em $\mathcal{S}$.*

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Proposição 1.17 (Relação Forte de Parseval) *Sejam $f, g \in \mathcal{S}$. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}\bar{\hat{g}}. \tag{1.9}$$

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

Corolário 1.2 *Seja $f \in \mathcal{S}$. Então*

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração: Basta aplicar a proposição precedente com $f = g$.

Teorema 1.3 (Plancherel) *Existe uma única bijeção isométrica*

$$\mathcal{P} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

tal que $\mathcal{P}(f) = \hat{f}$, para toda $f \in \mathcal{S}$.

Demonstração: Ver [4]. $\blacksquare$

1.2.4 Distribuição Temperadas

Definição 1.11 *Um funcional linear T definido e contínuo sobre $\mathcal{S}$ é denominado uma distribuição temperada (ou lentamente crescente). A totalidade das distribuições temperadas, ou seja, o espaço vetorial dos funcionais lineares e contínuos sobre $\mathcal{S}$ é denotado por $\mathcal{S}'$. Desta forma, $\mathcal{S}'$ é um espaço vetorial topológico localmente convexo para o qual estamos considerando a topologia dual forte.*

Observação 1.11 *Pela Proposição* 1.10, *temos que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em $\mathcal{S}$. Resulta daí que $\mathcal{S}'$ é identificado com um subespaço de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

Definição 1.12 *Seja $T \in \mathcal{S}'$. Definimos a transformada de Fourier $\hat{T}$ de T por:*

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle = \langle T, \hat{\varphi} \rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

Definição 1.13 *De maneira análoga à definição anterior, definimos a transformada de Fourier inversa, ou seja, dado $T \in \mathcal{S}'$, definimos a transformada de Fourier inversa $\check{T}$ de T por*

$$\langle \check{T} \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \ \ \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

onde $\check{\varphi}$ é a transformada de Fourier inversa de φ.

Proposição 1.18 *Seja $T \in \mathcal{S}'$ e consideremos $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Então,*

(i) $D^\alpha \hat{T} = (-2\pi i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha T})$

(ii) $(\widehat{D^\alpha T}) = (2\pi i)^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{T}$.

Demonstração: Ver [4]. ■

1.2.5 Propriedades Elementares dos Espaços de Sobolev

Como visto anteriormente, como $L^p(\Omega) \hookrightarrow L^1_{loc}(\Omega)$, para todo $1 \leq p < \infty$, segue que toda função $u \in L^p(\Omega)$ pode ser identificada com a distribuição por ela definida. Assim,

u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, que são também distribuições sobre Ω. No entanto, $D^\alpha u$ não é, em geral, uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Isto motiva o conceito de um novo espaço. Assim, representamos por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial das (classes de) funções u de $L^p(\Omega)$, para as quais as derivadas distribucionais $D^\alpha u$ estão em $L^p(\Omega)$, com $|\alpha| \leq m$. Para cada $u \in W^{m,p}(\Omega)$ definimos a norma de u pondo:

$$\|u\|_{m,p}^p = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx.$$

O espaço normado $(W^{m,p}(\Omega), \|.\|_{m,p})$ é denominado espaço de Sobolev.

Observação 1.12 *Representa-se* $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$.

Proposição 1.19 *O espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *é um espaço de Banach.*

Demonstração: Ver [4]. ■

Corolário 1.3 *Os espaços* $H^m(\Omega)$ *são espaços de Hilbert.*

Teorema 1.4 *O espaço de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *é reflexivo para* $1 < p < \infty$ *e separável para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração: Ver [2]. ■

Embora o espaço das funções testes $\mathcal{D}(\Omega)$ seja denso em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, em geral ele não é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Assim, somos motivados para a seguinte definição.

Definição 1.14 *Define-se o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *como sendo o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{m,p}(\Omega)$, *isto é,*

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação 1.13 *Quando* $p = 2$, *o espaço* $W_0^{m,p}(\Omega)$ *será representado por* $H_0^m(\Omega)$.

Definição 1.15 *Sejam* $1 \leq p < +\infty$ *e* $q > 1$ *tal que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. *Representa-se por* $W^{-m,q}(\Omega)$ *o dual topológico de* $W_0^{m,p}(\Omega)$. *O dual topológico de* $H_0^m(\Omega)$ *representa-se por* $H^{-m}(\Omega)$.

Observação 1.14 *Seja* $T \in W^{-m,q}(\Omega)$ *e* $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções testes tal que* $\varphi_\nu \to 0$ *em* $\mathcal{D}(\Omega)$. *Resulta que* $\varphi_\nu \to 0$ *em* $W_0^{m,p}(\Omega)$. *De fato, sabemos que existe um compacto* K *em* Ω *tal que* $supp(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu \in \mathbb{N}$. *Além disso,* $(D^\alpha \varphi_\nu) \to 0$ *uniformemente em* K. *Logo,*

$$\|\varphi_\nu\|^p_{W_0^{m,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p dx = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_K |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p dx =$$
$$\leq med(K) \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in K} |D^\alpha \varphi_\nu(x)|^p \longrightarrow 0.$$

Logo, $\langle T, \varphi_\nu \rangle_{W^{-mq}, W_0^{m,p}} \to 0$ em $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) o que nos permite concluir que a restrição de T a $D(\Omega)$ é uma distribuição. Consideremos agora, a aplicação linear

$$\begin{array}{rccccc} \sigma: & W^{-m,q}(\Omega) & \longrightarrow & D'(\Omega) & & \\ & T & \longmapsto & \sigma(T) & = & T|_{D(\Omega)} \end{array}$$

Afirmamos que σ é uma aplicação injetiva, pois se $T|_{D(\Omega)} = S|_{D(\Omega)}$ então dada $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ existe $(\psi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ tal que $\psi_\nu \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e pelo fato de $\langle T, \psi_\nu \rangle = \langle S, \psi_\nu \rangle$ tem-se que $\langle T, u \rangle = \langle S, u \rangle$, o que implica que $T = S$. Portanto, σ é injetiva o que nos permite identificar $W^{-m,q}(\Omega)$ a um subespaço vetorial de $\mathcal{D}'(\Omega)$. Além disso, a imersão de $W^{-m,q}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ é contínua. Com efeito, seja $(T_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset W^{-m,q}(\Omega)$ tal que $T_\nu \to 0$ em $W^{-m,q}(\Omega)$, isto é, a sequência numérica

$$\|T_\nu\|_{W^{-m,q}(\Omega)} = \sup_{u \in W_0^{m,p}(\Omega)} \frac{|\langle T_\nu, u \rangle|}{\|u\|}, \;\; u \neq 0$$

tende para zero. Segue daí que $\langle T_\nu, u \rangle_{W^{-m,q}, W_0^{m,p}} \to 0$ para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. Em particular temos $\langle T_\nu, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} \to 0$ para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, o que prova a continuidade da imersão.

1.2.6 Os Espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$

Definimos anteriormente o espaço

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n); D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\}, \tag{1.10}$$

onde as derivadas são distribucionais, munido do produto interno

$$((u,v))_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \sum_{|\alpha|\leq m} \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha u \overline{D^\alpha v} dx = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.11}$$

Consideremos o seguinte espaço

$$\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}, \tag{1.12}$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier da u, munido do produto interno

$$(((u,v))) = \int_{\mathbb{R}^n} (1+\|x\|^2)^m \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)} dx = \left((1 + \|x\|^2)^{m/2}\hat{u}, (1 + \|x\|^2)^{m/2}\hat{v}\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)}. \tag{1.13}$$

O nosso intuito é provar que os espaços (1.10) e (1.12) são iguais. Antes, porém precisamos de um resultado preliminar

Lema 1.2 *Existem constantes $c_1, c_2 > 0$ que dependem de m tais que*

$$c_1 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha} \leq (1 + \|x\|^2)^m \leq c_2 \sum_{|\alpha|\leq m} x^{2\alpha}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

onde $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $m \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Ver [4] ∎

Proposição 1.20 *Para todo $m \in \mathbb{N}$ temos*

$$H^m = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{m/2} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}.$$

Além disso, as normas $\|.\|_{H^m}$ e $|||.|||$ provenientes dos produtos internos dados em (1.11) e (1.13) são equivalentes.

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

Motivados pela Proposição 1.21, definimos para $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$:

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{s/2}\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\},$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s \hat{u}(x)\overline{\hat{v}(x)}dx.$$

Observação 1.15 *Segue da definição acima que*

$$H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n),$$

pois se $u \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{L^2}^2 = \|\hat{u}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{u}(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^s |\hat{u}(x)|^2 dx = \|u\|_{H^s}^2.$$

Proposição 1.21 *Para todo* $s \geq 0$, $H^s(\mathbb{R}^n)$ *é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

Proposição 1.22 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *tem uma imersão contínua e densa em* $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$.

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

Corolário 1.4 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *tem uma imersão contínua e densa em* $H^s(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Como visto anteriormente, temos que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma imersão contínua e densa. Pela proposição anterior, temos que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^s(\mathbb{R}^n)$ é uma imersão contínua e densa. Logo, por transitividade temos o desejado. $\blacksquare$

Veremos a seguir, uma propriedade local dos espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$ através do seguinte resultado:

Proposição 1.23 *Para todo* $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ *e toda* $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *a aplicação de* $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $u \mapsto \varphi u$ *é linear e contínua*

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

Proposição 1.24 *Sejam $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq s$. A aplicação D^α : $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ dado por $u \mapsto D^\alpha u$ é linear e contínua.*

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

Corolário 1.5 *Sejam $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$ tal que $|\alpha| \leq s$. Então, a aplicação $H^s(\mathbb{R}^n) \to H^{s-\alpha}(\mathbb{R}^n)$ tal que $u \mapsto \varphi D^\alpha u$ é linear e contínua.*

Demonstração: De acordo com as proposições 1.24 e 1.25 as aplicações abaixo:

$$\begin{array}{ccccc} H^s(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & H^{s-|\alpha|}(\mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & D^\alpha u & \longmapsto & \varphi D^\alpha u \end{array}$$

são lineares e contínuas, o que prova o desejado. Ver [4] $\blacksquare$

Definição 1.16 *Para todo $s \in \mathbb{R}$, $s \geq 0$, denotaremos o dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, pondo*

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'.$$

A proposição seguinte justifica a notação acima:

Proposição 1.25 *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n); (1 + \|x\|^2)^{-s/2}\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$

(ii) $\|f\|_{H^{-s}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^2)^{-s}|\hat{f}(x)|^2 dx\right)^{1/2}$; $\forall f \in H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Demonstração: Ver [4] $\blacksquare$

1.3 Espaços $L^p(0,T;X)$ e Distribuições Vetorias

Seja X um espaço de Banach, cuja norma será representada por $\|.\|$ e o intervalo $(0,T) \subset \mathbb{R}$, $T > 0$, consideremos a medida de Lebesgue dt. Denominamos *função simples* toda função $\varphi : (0,T) \to X$ que assume apenas um número finito de valores não-nulos, onde cada valor não-nulo é assumido num conjunto mensurável de medida finita. Toda função simples possui uma representação canônica da forma

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} \chi_{E_i}(t).\varphi_i,$$

onde $\varphi_i \in X$ e $E_i \subset (0,T)$ é mensurável, com $m(E_i) < \infty$, $i = 1, \dots, k$. Os vetores φ_i são distintos e os conjuntos E_i são dois a dois disjuntos. Aqui χ_{E_i} representa a função característica do conjunto E_i e estes são dados por

$$E_i = \{t \in (0,T); \varphi(t) = \varphi_i\}.$$

Definimos a integral de φ como sendo o vetor de X dado por

$$\int_0^T \varphi(t)dt = \sum_{i=1}^{k} m(E_i).\varphi_i.$$

Teorema 1.5 *Seja $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções simples tais que*

$$\lim_{n,m\to\infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)\|dt = 0. \tag{1.14}$$

Existe uma única função vetorial $u : (0,T) \to X$ tal que $\|u(t)\|$ e $\|\varphi_n(t) - u(t)\|$ são mensuráveis (à Lebesgue) em $(0,T)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^T \|\varphi_n(t) - u(t)\|dt = 0. \tag{1.15}$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Corolário 1.6 *Nas condições do Teorema 1.10, a sequência $\left(\int_0^T \varphi_n(t)dt\right)$ converge em X e seu limite é unicamente determinado por u. Este limite é, por definição, a integral de Bochner da função u e é denotado por*

$$\int_0^T u(t)dt.$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Desta forma, a integral de Bochner da função vetorial u, é o vetor de X dado por

$$\int_0^T u(t)dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_n(t)dt,$$

onde o limite é considerado na norma de X.

Dizer que uma função vetorial u é integrável no sentido de Bochner-Lebesgue ou simplesmente $\mathfrak{B}-$integrável, significa que ela pode ser aproximada em X, quase sempre em $(0,T)$, por uma sequência de funções simples satisfazendo (1.14) e, consequentemente (1.15).

Uma função vetorial $u : (0,T) \to X$ é dita *fracamente mensurável* ($\omega-$mensurável) quando a função numérica $t \mapsto \langle \Phi, u(t)\rangle$ for mensurável, para qualquer funcional $\Phi \in X'$. Dizemos que u é *fortemente mensurável* ($s-$mensurável) quando existir uma sequência de funções simples $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\varphi_n(t) \longrightarrow u(t), \text{ em } X, \text{ quase sempre em } (0,T).$$

Em particular, quando u é $s-$mensurável, então a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é mensurável à Lebesgue.

Teorema 1.6 (S. Bochner) *Uma função $u : (0,T) \to X$ é $\mathfrak{B}-$integrável se, e somente se, é $s-$mensurável e a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|$ é integrável.*

Demonstração: Ver [13]. ■

Corolário 1.7 *Sejam X e Y dois espaços de Banach. Se $u : (0,T) \to X$ é $\mathfrak{B}-$integrável e $T : X \to Y$ é um operador linear limitado, então a função vetorial $Tu : (0,T) \to Y$ definida por $(Tu)(t) = T(u(t))$ é $\mathfrak{B}-$integrável e é válida a relação*

$$\int_0^T T(u(t))dt = T\left(\int_0^T u(t)dt\right).$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Corolário 1.8 *Se $u : (0,T) \to X'$ é $\mathfrak{B}-$integrável, então para cada $v \in X$ temos*

$$\left\langle \int_0^T u(t)dt, v \right\rangle_{X',X} = \int_0^T \langle u(t), v\rangle_{X',X} dt.$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Definição 1.17 *Num espaço de Hilbert H com produto interno $(.,.)$ onde os funcionais lineares limitados são identificados, via o Teorema da Representação de Riez, com o produto interno, obtemos do Corolário 1.9 a seguinte relação*

$$\left(\int_0^T u(t)dt, v \right) = \int_0^T (u(t), v)dt, \;\; \forall v \in H,$$

quando $u : (0,T) \to X$ é $\mathfrak{B}-$integrável.

Dado $T > 0$, um número real, denotaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ fortemente mensuráveis e tais que a função numérica $t \mapsto \|u(t)\|_X$ está em $L^p(0,T)$, munido da norma

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Observação 1.16 *Quando $p = 2$ e $X = H$ é um espaço de Hilbert, o espaço $L^2(0,T;H)$ é também um espaço de Hilbert cujo produto interno é dado por*

$$((u,v))_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T ((u(t), v(t)))_H dt.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representaremos o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ que são fortemente mensuráveis e $t \mapsto \|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$ com a norma

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = supess\|u(t)\|_X, \;\; \forall t \in [0,T].$$

Lema 1.3 (Imersão) *Sejam X e Y dois espaços de Banach e suponhamos que $X \hookrightarrow Y$, isto é, $X \subset Y$ com imersão contínua. Se $1 \leq s \leq r \leq \infty$, então*

$$L^r(0,T;X) \hookrightarrow L^s(0,T;Y).$$

Demonstração: Ver [13]. ■

Lema 1.4 *Se $u \in L^p(0,T;X')$, $1 \leq p \leq \infty$ e, $v \in X$ então $t \mapsto \langle u(t), v\rangle_{X',X} \in L^p(0,T)$. Em particular, se H é um espaço de Hilbert, então $t \mapsto (u(t),v)_H \in L^p(0,T)$.*

Demonstração: Ver [13]. ■

Quando X é reflexivo e separável e $1 < p < \infty$, então $L^p(0,T;X)$ é um espaço reflexivo separável, cujo dual topológico se identifica ao espaço de Banach $L^q(0,T;X')$, onde p e q são expoentes conjugados. No caso, $p = 1$ o dual topológico do espaço $L^1(0,T;X)$ se identifica ao espaço $L^\infty(0,T;X')$.

Lema 1.5 *Se p e q são índices conjugados, $u \in L^p(0,T;X)$ e $v \in L^q(0,T;X')$, então a função numérica $t \mapsto \langle v(t), u(t)\rangle_{X',X} \in L^1(0,T)$.*

Demonstração: Ver [13]. ■

Observemos que o espaço de Banach $L^p(0,T;L^p(\mathbb{R}^n))$ se identifica, via o Teorema de Fubini, com o espaço $L^p(Q)$, $1 \leq p \leq \infty$, sendo $Q = \mathbb{R}^n \times (0,T)$. De fato, vejamos o caso em que $1 \leq p < \infty$. Dada uma função $u \in L^p(0,t;L^p(\mathbb{R}^n))$, então para cada $t \in (0,T)$ temos que $u(t) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $u(t)$ é uma função de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cujo valor em x será denotado por $u(x,t)$. Assim,

$$\int_0^T \|u(t)\|_p^p dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^p dx dt = \int_Q |u(x,t)| dQ = \|u\|_p^p.$$

Definição 1.18 *Dado $u \in L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < \infty$, definimos o operador*

$$\begin{array}{rccl} T_u : & \mathcal{D}(0,T) & \longrightarrow & X \\ & \varphi & \longmapsto & T_u(\varphi) = \displaystyle\int_0^T u(t)\varphi(t)dt \end{array}$$

onde a integral é calculada no sentido de Bochner em X. A aplicação T_u é linear e contínua de $\mathcal{D}(0,T)$ em X e por esta razão é denominada Distribuição Vetorial.

O espaço vetorial das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T)$ em X é denominado o espaço das distribuições vetoriais sobre $(0,T)$ com valores em X, o qual denotaremos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$.

Definição 1.19 *Por $C^m(0,T;X)$, com $m = 0, 1, \ldots$ e $0 < T < \infty$, representaremos o espaço de Banach das funções contínuas $u : [0,T] \to X$ que tem derivadas contínuas até de ordem m sobre $[0,T]$ munido da norma da convergência uniforme*

$$\|u\|_{C^m([0,T];X)} = \sum_{i=0}^{m} \max_{t\in[0,T]} \|u^{(i)}(t)\|_X.$$

onde $u^{(0)}$ significa u, escreveremos $C([0,T];X)$.

Definição 1.20 *Por $C_s^0(0,T;X)$, $0 < T < \infty$, denotaremos o espaço das funções $u : [0,T] \to X$ tais que a aplicação $t \mapsto \langle v, u(t)\rangle_{X',X}$ é contínua em $[0,T]$, para todo $v \in X'$. Uma tal função u é denominada fracamente contínua e, no caso em que $X = H$ é um espaço de Hilbert, a continuidade fraca de u é equivalente a continuidade da aplicação $t \mapsto ((u(t), v))_H$, $v \in H$.*

Denotaremos $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s^0(0,T;X);\ u' \in C_s^0(0,T;X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma, usaremos a seguinte notação: $C_s^2 = \{u \in C_s^0(0,T;X);\ u' \in C_s^1(0,T;X)\}$.

Observação 1.17 *Se $u \in C([0,T];X)$, então $u \in C_s(0,T;X)$.*

Lema 1.6 *Sejam V e H espaços de Hilbert, V imerso continuamente em H, $u \in L^p(0,T;V)$ e $u' \in L^p(0,T;H)$, com $1 \leq p \leq \infty$, então*

$$u \in C^0([0,T];H) \cap C_w^0([0,T],V).$$

Demonstração: Ver [11]. ■

Lema 1.7 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração: Ver [12]

Definição 1.21 *Sejam X e Y dois espaços de Hilbert complexos separáveis com $X \hookrightarrow Y$ e X é denso em Y. Definimos o espaço*

$$W(a,b;X,Y) = \{u;\ u \in L^2(a,b;X).\, u' \in L^2(a,b;Y)\}$$

onde munido com a norma

$$\|u\|_W = (\|u\|^2_{L^2(a,b;X)} + \|u'\|^2_{L^2(a,b;Y)})^{1/2}$$

é um espaço de Hilbert.

Teorema 1.7 *Sejam V e H espaços de Hilbert complexos separáveis, $V \subset H$, V é denso em H com imersão contínua. Identificando-se H com seu antidual H' e V' denotando o antidual de V, tem-se que $W(a,b;V,V') \hookrightarrow C([a,b];H)$.*

Onde $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua de um espaço no outro.

Demonstração: Ver [6]. $\blacksquare$

1.4 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho

Teorema 1.8 (Teorema da Representação de Riesz) *Seja H um espaço de Hilbert complexo e*

$$\varphi : H \longrightarrow \mathbb{C}$$

um funcional linear contínuo. Então existe um único $f \in H$ tal que

$$\langle \varphi, u \rangle = ((u, f))_{_H}, \ \ \forall u \in H.$$

Além disso,

$$\|f\|_{_H} = \|\varphi\|_{_{H'}}.$$

Demonstração: Ver [8]. ■

Lema 1.8 (Lema de Lax-Milgram) *Seja H um espaço de Hilbert, $a : H \times H \to \mathbb{K}$ uma forma sesquilinear contínua e coerciva, isto é, existe $\alpha > 0$ tal que*

$$Re\, a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2_{_H}, \ \ \forall v \in H,$$

então para cada $\varphi \in H'$, existe um único $u \in H$ tal que

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle, \ \ \forall v \in H.$$

Além disso, se $a(w,v) = \overline{a(v,w)}$ para todo $v, w \in H$, então u é caracterizada por

$$\begin{cases} u \in H \\ \dfrac{1}{2}a(u,u) - Re\,\langle \varphi, u \rangle = \displaystyle\min_{v \in H} \left\{ \dfrac{1}{2}a(v,v) - Re\,\langle \varphi, v \rangle \right\} \end{cases}$$

Demonstração: Ver [3]. ■

Proposição 1.26 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Seja H um espaço de Hilbert complexo com produto interno $((.,.))_{_H}$ e norma $\|.\|_{_H}$, então*

$$|((u,v))_{_H}| \leq \|u\|_{_H} \|v\|_{_H}, \quad \forall u, v \in H.$$

Demonstração: Ver em [8]. ■

Definição 1.22 *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de E a qual converge para $x \in E$ na topologia fraca $\sigma(E, E')$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.27 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E, então:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x_n\rangle$, para todo $f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \liminf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$

Demonstração: Ver [2]. ■

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, para todo $x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.23 *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que torna contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.28 *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em E', então:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E' se, e somente se, $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, para todo $x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ em E', então $f_n \rightharpoonup f$ em E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em E', então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em E'.

Demonstração: Ver em [2]. ■

Lema 1.9 *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } E.$$

Reciprocamente, seja E um espaço de Banach tal que toda sucessão limitada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ que converge fraco em E. Então E é reflexivo.

Demonstração: Ver em [2]. ∎

Lema 1.10 *Sejam E um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada em E', então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$ tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver em [2]. ∎

1.5 Construção de Espaços de Hilbert

Em esta seção, inspirados no trabalho de Bjorland e Schonbeck [1], apresentaremos os espaços de Hilbert W, V e H. Tais espaços serão fundamentais para estudar a existência de soluções dos problemas parabólicos e hiperbólicos em $\mathbb{R}^n$.

1.5.1 O Espaço H

Seja $R > 0$ fixado. Consideremos o conjunto

$$H = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n);\ \widehat{u}(\xi) = 0 \text{ q.s. em } \|\xi\| \leq R\}$$

Claramente, H é um subespaço vetorial de $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Exemplo 1.7 *Definamos*

$$H_{_R}(x) = \frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x}$$

calculando a sua transformada de Fourier obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{H}_{_R}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi} H_{_R}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i x\xi}\frac{\sin(2\pi R x)}{\pi x}(x)dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2\pi x)\xi \sin(2\pi R x)}{x}dx - \frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi x\xi)\sin(2\pi R x)xdx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2\pi R x)\cos(2\pi x)\xi}{x}dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2\pi x(R+\xi)) + \sin(2\pi x(R-\xi))}{x}\right]dx,
\end{aligned}$$

logo

$$\widehat{H}_{_R}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\sin(2\pi x(R+\xi)) + \sin(2\pi x(R-\xi))}{x}\right]dx$$

Se $\xi = R$, *então*

$$\widehat{H}_{_R}(R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(4\pi x)}{x}dx = \frac{1}{2\pi}.\pi = \frac{1}{2}$$

Se $\xi = -R$, *então*

$$\widehat{H}_{_R}(-R) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(4\pi x)}{x}dx = \frac{1}{2\pi}.\pi = \frac{1}{2}$$

Se $\xi < -R$, *então* $R+\xi < 0$ *e* $R-\xi > 0$ *obtemos*

$$\widehat{H}_{_R}(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi x(R+\xi))}{x}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(2\pi x(R-\xi))}{x} = \frac{1}{2\pi}(-\pi) + \frac{1}{2\pi}(\pi) = 0$$

Se $\xi > -R$, *então* $R+\xi > 0$ *e* $R-\xi < 0$ *obtemos*

$$\widehat{H}_{_R}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\pi) + \frac{1}{2\pi}(-\pi) = 0.$$

Se $-R < \xi < R$, *então* $R+\xi > 0$ *e* $R-\xi > 0$ *obtemos*

$$\widehat{H}_{_R}(\xi) = \frac{1}{2\pi}(\pi) + \frac{1}{2\pi}(\pi) = 1.$$

Assim temos,

$$\widehat{H}_{_R}(\xi)=\begin{cases}1, & se\ -R<\xi<R\\ \dfrac{1}{2}, & se\ \xi=-R\ ou\ \xi=R\\ 0, & se\ \xi<-R\ ou\ \xi>R\end{cases}$$

Deste modo, temos que

$$\widehat{H}_{_R}(\xi)=\chi_{_R}(\xi)\ q.s.\ em\ \mathbb{R},$$

onde $\chi_{_R}(\xi)$ *é a função característica do intervalo fechado* $[-R,R]$.

Agora, seja

$$v(x)=e^{\pi|x|^2},$$

deste modo, definamos

$$u(x)=v(x)-(H_{_R}*v)(x).$$

Claramente, $u\in L^2(\mathbb{R})$. *Aplicando a Observação* 1.8, *obtemos que*

$$\widehat{u}(\xi)=\widehat{v}(\xi)-\widehat{H}_{_R}(\xi)\widehat{v}(\xi)=\widehat{v}(\xi)-\chi_{_R}(\xi)\widehat{v}(\xi),\ q.s.\ em\ \mathbb{R}.$$

Portanto

$$\widehat{u}(\xi)=0\ q.s.\ em\ [-R,R].$$

Logo, $u\in H$.

Agora, muniremos H com o produto interno e a norma induzidos de $L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, para $u,v\in H$ temos

$$((u,v))_{_H}=\int_{\mathbb{R}^n}u(x)\overline{v(x)}dx \tag{1.16}$$

e a norma associada a este produto interno é dado por

$$\|u\|_{H} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \tag{1.17}$$

Observação 1.18 *Como $L^2(\mathbb{R}^n)$ é um espaço separável, temos que H é um espaço separável.*

Lema 1.11 *H munido com o produto interno dado por (1.16) é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Para demonstrar o lema, basta provar que H é fechado, isto é

$$\overline{H}^{L^2(\mathbb{R}^n)} = H.$$

De fato, sejam $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset H$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $u_n \to u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Assim, por Plancherel temos

$$\widehat{u}_n \longrightarrow \widehat{u} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Como $u_n \in H$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\widehat{u}_n(\xi) = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Deste modo

$$0 \leq \int_{\|\xi\|\leq R} |\underbrace{\widehat{u}_n(\xi)}_{=0} - \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_n(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

isto é,

$$0 \leq \int_{\|\xi\|\leq R} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_n(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi$$

Passando o limite nas desigualdades acima, quando $n \longrightarrow \infty$, obtemos

$$0 \leq \int_{\|\xi\|\leq R} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}_n(\xi) - \widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Logo,

$$\int_{\|\xi\|\leq R} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

o que implica que

$$|\widehat{u}(\xi)|^2 = 0,$$

o que acarreta que $\widehat{u}(\xi) = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$, isto é, $u \in H$, como queríamos demonstrar. ■

1.5.2 O Espaço V

Seja $R > 0$ fixado. Consideremos o conjunto

$$V = \{u \in H^1(\mathbb{R}^n);\ \widehat{u}(\xi) = 0 \text{ q.s. em } \|\xi\| \leq R\}$$

Claramente V é um subespaço fechado de $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Lema 1.12 *Sobre o espaço vetorial V a expressão*

$$((u,v))_V = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x)\overline{\nabla v(x)},\ \ \forall u, v \in V, \tag{1.18}$$

define um produto interno.

A única dificuldade para provar o Lema acima é

$$\text{se } ((u,u))_V = 0, \text{ implica que } u = 0, \tag{1.19}$$

Para provar (1.19), usaremos o seguinte resultado:

Teorema 1.9 *Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e para qualquer $\Lambda > 0$, a seguinte desigualdade segue:*

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq \Lambda^2\|u\|_2^2 - \int_{\{\xi;|\xi|\leq\Lambda\}} (\Lambda^2 - |\xi|^2)|\widehat{u}|^2 d\xi.$$

Demonstração: Tomemos

$$\mathbb{R}^n = \mathcal{S} \cup \mathcal{S}^c, \text{ onde } \mathcal{S} = \{\xi; |\xi| \leq \Lambda\}.$$

Assim, por Plancherel temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_2^2 &= \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial \xi_i} \right|^2 d\xi = \sum_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_i}} \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_1}} \right|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_2}} \right|^2 d\xi + \ldots + \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\frac{\partial u}{\partial \xi_n}} \right|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |i\xi_1|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |i\xi_2|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi + \ldots + \int_{\mathbb{R}^n} |i\xi_n|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_1|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_2|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi + \ldots + \int_{\mathbb{R}^n} |\xi_n|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathcal{S}^c} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathcal{S}} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&\geq \Lambda^2 \int_{\mathcal{S}^c} |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathcal{S}} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \Lambda^2 \int_{\mathcal{S}^c} |\widehat{u}|^2 d\xi + \left(\Lambda^2 \int_{\mathcal{S}} |\widehat{u}|^2 d\xi - \Lambda^2 \int_{\mathcal{S}} |\widehat{u}|^2 d\xi \right) + \int_{\mathcal{S}} |\xi|^2 |\widehat{u}|^2 d\xi \\
&= \Lambda^2 \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}|^2 d\xi + \int_{\mathcal{S}} (|\xi|^2 - \Lambda^2) |\widehat{u}|^2 d\xi \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Prova do Lema 1.12:

Para cada $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ e qualquer $\Lambda > 0$, temos pelo Teorema 1.9 a seguinte desigualdade

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq \Lambda^2 \|u\|_2^2 - \int_{\{\xi; |\xi| \leq \Lambda\}} (\Lambda^2 - |\xi|^2) |\widehat{u}(\xi)| d\xi.$$

Em particular, seja $u \in V$, isto é $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\widehat{u} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$ e tomemos $\Lambda = R$, deste modo temos

$$\|\nabla u\|_2^2 \geq R^2 \|u\|_2^2.$$

Portanto

$$\|u\|_2^2 \leq \frac{1}{R^2}\|\nabla u\|_2^2. \tag{1.20}$$

Da hipótese dada em (1.19) e da expressão (1.18) temos que se $((u,u))_V = 0$, então

$$\|\nabla u\|_2^2 = 0 \tag{1.21}$$

e assim, de (1.20) e (1.21), resulta que

$$\|u\|_2^2 = 0,$$

o que implica que $u = 0$. ■

A norma associada ao produto interno definido em (1.18) em V é

$$\|u\|_V = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^2\right)^{1/2} = \|\nabla u\|_2. \tag{1.22}$$

Observação 1.19 *Da desigualdade em (1.20) e da expressão em (1.22) deduzimos que*

$$\|u\|_H \leq \frac{1}{R}\|u\|_V, \ \ \forall u \in V. \tag{1.23}$$

A desigualdade acima é uma correspondent da Desigualdade de Poincaré.

Observação 1.20 *Da expressão dada em (1.23) deduzimos a seguinte desigualdade*

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+1}}\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_V \leq \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}, \ \ \forall u \in V \tag{1.24}$$

Lema 1.13 *V munido com o produto interno dado por (1.18) é um espaço de Hilbert.*

Demonstração: Seja $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em V. Devido a primeira desigualdade de (1.24) temos que

$$\frac{R}{\sqrt{R^2+1}}\|u_m - u_n\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|u_m - u_n\|_V.$$

Como $\|u_m - u_n\|_V \to 0$, quando $m, n \to +\infty$, vem que $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^n)$ e devido a completude de $H^1(\mathbb{R}^n)$ temos que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Por Plancherel temos que

$$\widehat{u}_n \longrightarrow \widehat{u} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Como $u_n \in V$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\widehat{u}_n = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$. Assim, analogamente ao procedimento imposto na demonstração do Lema 1.9, obtemos que $\widehat{u} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$. Agora usando a segunda desigualdade de (1.24), obtemos

$$\|u_n - u\|_V \leq \|u_n - u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$

e levando em conta que $u_n \to u$ em $H^1(\mathbb{R}^n)$, obtemos que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } V,$$

o que encerra a demonstração. ■

O próximo resultado nos auxiliará para demonstrar que V é denso em H.

Lema 1.14 *$D^\alpha(\varphi * u) = D^\alpha\varphi * u$, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para todo $u \in L^2(R^n)$ e para todo $|\alpha| \leq m$*

Demonstração: Seja $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Existe $\psi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\psi_k \longrightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.25}$$

Afirmamos que

$$D^\alpha\varphi * \psi_k \longrightarrow D^\alpha\varphi * u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n). \tag{1.26}$$

Com efeito, temos

$$\|D^\alpha\varphi * \psi_k - D^\alpha\varphi * u\|_2 = \|D^\alpha\varphi * (\psi_k - u)\|_2 \leq \|D^\alpha\varphi\|_1 \|\psi_k - u\|_2 \longrightarrow 0,$$

quando $k \to +\infty$, o que prova (1.26). Da mesma forma, tem-se

$$\varphi * \psi_k \longrightarrow \varphi * u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n), \tag{1.27}$$

de onde vem que

$$D^\alpha(\varphi * \psi_k) \longrightarrow D^\alpha(\varphi * u) \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n). \tag{1.28}$$

Combinando (1.26) e (1.28) e tendo em mente que

$$D^\alpha(\varphi * \psi_k) = D^\alpha\varphi * \psi_k = \varphi * D^\alpha\psi_k,$$

resulta que $D^\alpha(\varphi * u) = D^\alpha\varphi * u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, o que prova o Lema. ■

O Lema 1.12 nos informa que se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi * u \in H^m(\mathbb{R}^n)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.

Lema 1.15 *V é denso em H.*

Demonstração: Seja $u \in H$ tal que

$$((u, v))_H = 0, \ \forall v \in V. \tag{1.29}$$

Devemos provar que $u \equiv 0$. De fato, de (1.29) resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx = 0, \ \forall v \in V,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)\overline{v(x)}dx = 0, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ com } \widehat{v} = 0 \text{ q.s. em } \|\xi\| \leq R$$

e da Relação Forte de Parseval (1.12) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)\overline{\widehat{v}(\xi)}d\xi = 0, \ \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \text{ com } \widehat{v} = 0 \text{ q.s. em } \|\xi\| \leq R. \tag{1.30}$$

Consideremos $w(x) = e^{-\pi\|x\|^2} * u(x)$. Observe que pelo Exemplo 1.5 temos que $e^{-\pi\|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e pela Proposição 1.8 temos que $\mathcal{S}(\mathcal{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, logo

$$e^{-\pi\|x\|^2} \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Como $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, resulta que $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Pelo Corolário 1.1, Lema 1.14 e usando a idéia análoga mostra-se que $\dfrac{\partial w}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, para todo $1 \leq i \leq n$. Além disso, como

$$\widehat{w}(\xi) = e^{-\pi\|\xi\|^2}\widehat{u}(\xi),$$

resulta que $\widehat{w} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$. Portanto $w \in V$.

Daí e de (1.30) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}(\xi)e^{-\pi\|\xi\|^2}\overline{\widehat{u}(\xi)}d\xi = 0,$$

ou ainda,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi\|\xi\|^2}|\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = 0,$$

de onde concluímos que $\widehat{u} = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ e, como

$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2,$$

segue que que $u \equiv 0$. ■

Observação 1.21 *O espaço V é separável. A aplicação linear*

$$\begin{array}{rcl} T: \; V & \longrightarrow & L^2(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \times \ldots L^2(\mathbb{R}^n) \\ u & \longmapsto & Tu = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right) \end{array}$$

é claramente uma isometria. Pondo

$$W = T(V),$$

resulta que W é um subespaço de um espaço separável e, portanto, é também separável. Sendo T uma isometria, vemos que $T^{-1}(W)$ possui um subconjunto enumerável e denso em V. O que prova que V é separável.

1.6 O Operador A

Sejam V e H os espaços de Hilbert complexos definidos nas subseções acima cujos produtos internos e normas foram denotados, respectivamente, por $((.,.))_V$, $\|.\|_V$ e $((.,.))_H$, $\|.\|_H$.

Devido a (1.23) temos

$$V \hookrightarrow H, \tag{1.31}$$

Pelo Lema 1.15 temos que

$$V \text{ é denso em } H. \tag{1.32}$$

Definimos a aplicação

$$a(.,.) : V \times V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ dada por } a(u,v) = ((u,v))_V. \tag{1.33}$$

É fácil provar que a aplicação acima definida é uma forma sesquilinear contínua e coerciva.

Definamos

$$D(A) = \begin{cases} u \in V;\ \text{a forma antilinear } v \in V \mapsto ((u,v))_V \\ \text{é contínua com a topologia induzida por } H \end{cases} \tag{1.34}$$

Em outras palavras, estamos colecionando em $D(A)$ os elementos $u \in V$ tais que a forma antilinear

$$\begin{array}{rcccl} g_u: & V & \longrightarrow & \mathbb{C} & \\ & v & \longmapsto & g_u(v) & = ((u,v))_V \end{array} \tag{1.35}$$

é contínua quando induzimos em V a topologia de H. Evidentemente, $D(A) \neq \emptyset$, pois $0 \in D(A)$. Sendo V denso em H, podemos estender a aplicação (1.35) a uma aplicação

$$\widetilde{g}_u : H \longrightarrow \mathbb{C},$$

antilinear e contínua tal que

$$\widetilde{g}_u(v) = g_u(v), \ \ \forall v \in V. \tag{1.36}$$

Logo, pelo Teorema da Representação de Riesz, existe um único $f_u \in H$ tal que

$$\widetilde{g}_u(v) = ((f_u, v))_H, \ \ \forall v \in H. \tag{1.37}$$

Em particular, segue de (1.35), (1.36) e (1.37) que

$$((u,v))_V = ((f_u, v))_H, \ \ \forall v \in V. \tag{1.38}$$

Desta forma, temos definida a aplicação

$$\begin{array}{rcccl} A: & D(A) & \longrightarrow & H & \\ & u & \longmapsto & Au & = f_u. \end{array} \tag{1.39}$$

Usando (1.34)-(1.39), chegamos a uma nova caracterização para $D(A)$, a saber

$$D(A) = \{u \in V;\ \text{existe } f \in H \text{ que verifica } ((u,v))_V = ((f,v))_H,\ \text{para todo } v \in V\} \tag{1.40}$$

$D(A)$ definido em (1.40) é um subespaço vetorial de H e fica bem definido um operador linear

$$\begin{array}{rccc} A: & D(A) & \longrightarrow & H \\ & u & \longmapsto & Au, \end{array}$$

onde

$$((Au,v))_H = ((u,v))_V,\ \ \forall u \in D(A),\ \ \forall v \in V. \tag{1.41}$$

Neste contexto, diremos que o operador A é definido pela terna $\{V, H, ((u,v))_V\}$ e denotaremos tal fato escrevendo

$$A \leftrightarrow \{V, H, ((u,v))_V\}. \tag{1.42}$$

A forma sesquilinear $a(u,v) = ((u,v))_V$ é uma forma hermitiana.

Temos os seguintes resultados (veja [5] e [9]):

- $A : D(A) \longrightarrow H$ é uma bijeção;
- $D(A)$ é denso em H e A é um operador fechado de H;
- A é um operador não-limitado de H;
- $D(A)$ é denso em V;
- $A : D(A) \to H$ é auto-adjunto e satisfaz $((Au,v))_H = ((u,Av))_H$, $\forall u,v \in D(A)$.

A seguir definiremos as extensões do operador A definido pela terna $\{V, H, ((u,v))_V\}$.

Consideremos V' e H' os antiduais de V e H, respectivamente. Definamos

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{A}: & V & \longrightarrow & V' \\ & u & \longmapsto & \widetilde{A}u, \end{array}$$

onde

$$\widetilde{A}u : V \longrightarrow \mathbb{C} \text{ é definido por } \langle \widetilde{A}u, v\rangle_{V',V} = ((u,v))_V . \tag{1.43}$$

Observemos que $\widetilde{A} : V \to V'$ é linear e contínua. Portanto, $\widetilde{A} \in \mathcal{L}(V, V')$. Identificando H com seu antidual H', temos a cadeia de imersões contínuas e densas

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'. \tag{1.44}$$

Logo, para todo $u \in D(A)$ resulta que

$$\langle \widetilde{A}u, v\rangle_{V',V} = ((u,v))_V = ((Au,v))_H = \langle Au, v\rangle_{V',V}, \ \forall v \in V,$$

de onde se conclui que

$$\widetilde{A}u = Au, \ \forall u \in D(A), \tag{1.45}$$

ou seja, $\widetilde{A}$ é uma extensão de A a todo V.

Também, o operador $\widetilde{A} : V \to V'$ é uma isometria, isto é

$$\|\widetilde{A}u\|_{V'} = \|u\|_V, \ \forall u \in V. \tag{1.46}$$

Se introduzimos em $D(A)$ o produto interno

$$((u,v))_{D(A)} = ((u,v))_H + ((Au, Av))_H, \ \forall u, v \in D(A), \tag{1.47}$$

então, pelo fato de A ser fechado, resulta que $D(A)$ é um espaço de Hilbert. Prova-se que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_V \leq c\|u\|_{D(A)}, \ \forall u \in D(A),$$

ou seja,

$$D(A) \hookrightarrow V.$$

Identificando-se H com seu antidual H' resulta a cadeia de imersões contínuas e densas:

$$D(A) \hookrightarrow V \hookrightarrow H \equiv H' \hookrightarrow V' \hookrightarrow (D(A))'. \tag{1.48}$$

Definamos

$$\begin{array}{rccc} A^*: & H & \longrightarrow & (D(A))' \\ & u & \longmapsto & A^*u, \end{array}$$

onde

$$A^*u : D(A) \to \mathbb{C} \text{ é definido por } \langle A^*u, v\rangle_{(D(A))', D(A)} = ((u, Av))_H. \tag{1.49}$$

Prova-se que $A^* \in (D(A))'$. Além disso, temos

$$\langle A^*u, v\rangle_{(D(A))', D(A)} = ((u, Av))_H = ((Au, v))_H = \langle Au, v\rangle_{(D(A))', D(A)}, \ \forall u, v \in D(A),$$

o que implica que $A^*u = Au$, para todo $u \in D(A)$, o que prova que A^* é uma extensão de A a todo H. Observemos que em $D(A)$ as seguintes normas

$$|||u|||_{D(A)} = \|Au\|_H \ \text{ e } \ \|u\|_{D(A)} = (\|u\|_H^2 + \|Au\|_H^2)^{1/2}, \tag{1.50}$$

são equivalentes. Agora munindo $D(A)$ da topologia $|||u|||_{D(A)} = \|Au\|_H$ resulta que $A^* : H \to (D(A))'$ é uma isometria.

Usando o Lema de Lax-Milgram demonstra-se que

$$\widetilde{A} : V \longrightarrow V' \ \text{ e } \ A^* : H \longrightarrow (D(A))'$$

são sobrejetoras.

Observação 1.22 *O espaço $D(A)$ munido com a norma $\|u\|_{D(A)} = \|Au\|_H$ é separável. De fato, definamos a seguinte aplicação*

$$\begin{array}{rccccc} \sigma: & D(A) & \longrightarrow & H & & \\ & u & \longmapsto & \sigma(u) & = & Au. \end{array}$$

Como A é linear, segue que σ o é.

Também, temos que

$$\|\sigma u\|_H = \|Au\|_H = \||u\||_{D(A)}, \; \forall u \in D(A)$$

e σ é sobrejetora.

Sendo H separável e σ uma bijeção isométrica, obtemos que D(A) é separável.

Agora, se considerarmos o espaço $W = \{u \in H^2(\mathbb{R}^n); \, \widehat{u}(\xi) = 0 \text{ em } \|\xi\| \leq R\}$ vamos mostrar que $W = D(A)$ e $A = -\Delta$.

A demonstração, será dada a seguir:

Proposição 1.29 *Se $u \in W$, então $-\widehat{\Delta u} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$.*

Demonstração: De fato, se $u \in W$, então

$$u \in H^2(\mathbb{R}^n) \text{ e } \widehat{u} = 0 \text{ q.s. em } \|\xi\| \leq R. \tag{1.51}$$

Como $\widehat{\Delta u}(\xi) = \|\xi\|^2 \widehat{u}(\xi)$, segue-se de (1.51) que $-\widehat{\Delta u} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$.

■

Observação 1.23 *A proposição acima nos diz que se $u \in W$, então $-\Delta u \in H$.*

Proposição 1.30 $W \subset D(A)$.

Demonstração: De fato, se $u \in W$ e $v \in V$ temos que

$$((-\Delta u, v))_{_H} = \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta u(x)\overline{v}(x)dx = -\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\Delta u}(\xi)\widehat{\overline{v}}(\xi)d\xi = -\int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^2\widehat{u}(\xi)\widehat{\overline{v}}(\xi)d\xi \tag{1.52}$$

e

$$((u, v))_{_V} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u(x)\overline{\nabla v}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^2\widehat{u}(\xi)\widehat{\overline{v}}(\xi)d\xi \tag{1.53}$$

de (1.52) e (1.53) obtemos

$$((u, v))_{_V} = ((-\Delta u, v))_{_H}, \ \ \forall v \in V \tag{1.54}$$

daí segue-se que $u \in D(A)$, o que prova que $W \subset D(A)$. ■

Proposição 1.31 $Au = -\Delta u, \ \forall u \in W.$

Demonstração: De fato,

$$((Au, v))_{_H} = ((u, v))_{_V}, \ \ \forall u \in W, \ \ \forall v \in V \tag{1.55}$$

De (1.54) e (1.55) vem que

$$((Au, v))_{_H} = ((-\Delta u, v))_{_H}, \ \ \forall v \in V.$$

Sendo V denso em H concluímos

$$((Au, v))_{_H} = ((-\Delta u, v))_{_H}, \ \ \forall v \in H,$$

onde $Au = -\Delta u$, para todo $u \in W$. ■

Observação 1.24 *A proposição acima nos diz que* $A|_{_W} = -\Delta$.

Proposição 1.32 W *é denso em* $D(A)$.

Demonstração: De fato, seja $u \in D(A)$ tal que

$$0 = ((u,v))_{D(A)} = ((Au, Av))_{H}, \ \ \forall v \in W, \tag{1.56}$$

devemos provar que $u = 0$.

Com efeito, tomemos $v(x) = e^{-\pi\|x\|^2} * u(x)$, com $u \in D(A)$. Claramente $v \in W$, logo usando (1.56) e o fato que A é auto-adjunto, obtemos:

$$0 = ((Au, A(e^{-\pi\|\cdot\|^2} * u)))_{H} = ((Au, -\Delta(e^{-\pi\|\cdot\|^2} * u)))_{H} = ((Au, (-\Delta e^{-\pi\|\cdot\|^2}) * u))_{H}$$

$$= ((u, A(-\Delta(e^{-\pi\|\cdot\|^2}) * u)))_{H} = ((u, \Delta^2(e^{-\pi\|\cdot\|^2}) * u))_{H} = \int_{\mathbb{R}^n} \|\xi\|^4 e^{-\pi\|\xi\|^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

o que implica

$$\|\xi\|^4 e^{-\pi\|\xi\|^2} |\widehat{u}(\xi)|^2 = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n,$$

ou ainda

$$|\widehat{u}(\xi)|^2 = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n.$$

Assim,

$$\|u\|_2 = \|\widehat{u}\|_2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(\xi)|^2 dx = 0,$$

o que nos fornece $u = 0$. ■

Proposição 1.33 $\overline{W}^{D(A)} = W$, *ou seja,* W *é fechado em* $D(A)$.

Demonstração: De fato, seja $u_n \in W$ tal que

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } D(A).$$

Logo

$$\begin{array}{rcl} u_n & \longrightarrow & u \text{ em } H \\ -\Delta u_n = \ Au_n & \longrightarrow & Au \text{ em } H \end{array}$$

ou ainda,

$$u_n \longrightarrow u \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{1.57}$$

$$-\Delta u_n \longrightarrow Au \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \tag{1.58}$$

Assim

$$\begin{aligned} -\Delta u_n &\longrightarrow -\Delta u \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \\ -\Delta u_n &\longrightarrow Au \text{ em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n) \end{aligned}$$

Por unicidade do limite resulta que

$$-\Delta u = Au \in H \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n).$$

Como $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. (Veja [5])

Da convergência (1.57) obtemos que

$$\widehat{u}_n \longrightarrow \widehat{u} \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Sendo que $\widehat{u}_n = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$, segue-se que $\widehat{u} = 0$ quase sempre em $\|\xi\| \leq R$. Assim, $u \in W$. ■

Observação 1.25 *As proposições* 1.32 *e* 1.33 *nos dizem que* $W = D(A)$.

Capítulo 2

Problema Parabólico em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, estudaremos a existência , unicidade e o decaimento exponencial da solução fraca da equação parabólica em $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Consideremos o seguinte problema

$$\left| \begin{array}{l} u' - \Delta u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0, \ x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{2.1}$$

A energia associada ao problema (2.1) vem dada pela seguinte expressão

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u(x,t)|^2 dx = \frac{1}{2} \|u(t)\|_H^2. \tag{2.2}$$

onde o espaço de Hilbert H foi definido no Capítulo 1 (Seção 1.5).

A seguir definimos o que entendemos por solução fraca do problema (2.1).

Definição 2.1 *Uma função $u(x,t)$, definida em $\mathbb{R}^n \times [0, T]$, é uma solução fraca para (2.1), se*

$$u \in L^\infty(0, T; H), \ \ u' \in L^2(0, T; V') \tag{2.3}$$

$$u' - \Delta u = 0 \ \textit{em} \ L^2(0, T; V') \tag{2.4}$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \ \ x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Teorema 2.1 *Dados $u_0 \in H$, existe uma única solução fraca u do problema (2.1) satisfazendo (2.3), (2.4) e (2.5). Além disso, a energia $E(t)$ associada ao problema (2.1) decai exponencialmente, isto é, existe uma constante positiva w_0 tal que*

$$E(t) \leq e^{-w_0 t}, \ \forall t \geq 0.$$

Demonstração:

2.1 Existência de Solução

A existência de solução será estabelecida utilizando o Método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter uma sequência de soluções aproximadas do problema (2.1) e, em seguida, por meio de estimativas a Priori, passar o limite, em uma topologia adequada, nesta sequência de soluções aproximadas. Por simplicidade, dividiremos a demonstração nas seguintes etapas:

1. Construções de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;

2. Estimativas a Priori;

3. Passagem ao limite nas soluções aproximadas;

4. Localização da 1° derivada;

5. Condição Inicial.

2.1.1 Etapa 1: Problema aproximado

Consideremos o espaço de Hilbert V separável definido no Capítulo 1 (Seção 1.5). Seja uma base $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ em V, ortonormal em H (para se conseguir tal propriedade basta aplicarmos na base de V o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt). Representamos por

$$V_m = [\omega_1, \ldots, \omega_m],$$

o subespaço gerado pelos m primeiros elementos da base. Definimos por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)\omega_i \in V_m, \tag{2.6}$$

onde $u_m(t)$ é a solução do seguinte problema de Cauchy

$$((u'_m(t), \omega_j))_H + ((u_m(t), \omega_j))_V = 0 \tag{2.7}$$

com dado inicial

$$u_m(0) = u_{0_m} \longrightarrow u_0 \text{ em } H \tag{2.8}$$

Observe que para obtermos (2.8) usamos o fato de V está imerso continuamente e densamente em H.

Em virtude de (2.6) temos que

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i_m}\omega_i = u_{0_m} = u_m(0) = \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(0)\omega_i \tag{2.9}$$

De (2.7)-(2.9) podemos escrever

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g'_{i_m}(t)((\omega_i, \omega_j))_H + \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)((\omega_i, \omega_j))_V = 0 \\ g_{i_m}(0) = \alpha_{j_m}, \qquad j = 1, \ldots, m \end{array} \right.$$

ou ainda, em forma matricial

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ((\omega_1,\omega_1))_H & \ldots & ((\omega_1,\omega_m))_H \\ ((\omega_2,\omega_1))_H & \ldots & ((\omega_2,\omega_m))_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\omega_m,\omega_1))_H & \ldots & ((\omega_m,\omega_m))_H \end{bmatrix}}_{=\mathcal{A}} \begin{bmatrix} g'_1(t) \\ g'_2(t) \\ \vdots \\ g'_m(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} ((\omega_1,\omega_1))_V & \ldots & ((\omega_1,\omega_m))_V \\ ((\omega_2,\omega_1))_V & \ldots & ((\omega_2,\omega_m))_V \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\omega_m,\omega_1))_V & \ldots & ((\omega_m,\omega_m))_V \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Definimos

$$Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ g_{2_m}(t) \\ \vdots \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \Rightarrow Z(0) \begin{bmatrix} g_{1_m}(0) \\ g_{2_m}(0) \\ \vdots \\ g_{m_m}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1_m} \\ \alpha_{2_m} \\ \vdots \\ \alpha_{m_m} \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Observe que sendo $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ ortonormal em H, resulta que a matriz $\mathcal{A}$ é a matriz identidade e , portanto, de (2.10) e (2.11) vem que

$$\left| \begin{array}{l} Z'(t) + \mathcal{B}Z(t) = 0 \\ Z(0) = Z_0 \end{array} \right. \tag{2.12}$$

o qual possui solução em $[0, T]$ dada por

$$Z(t) = e^{-t\mathcal{B}} Z_0,$$

onde $e^{\mathcal{B}} = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}^k}{k!}$. Aqui I representa a matriz identidade.

2.1.2 Etapa 2: Estimativas a priori

Multiplicando (2.7) por $\overline{g_{j_m}(t)}$ e somando em j de 1 até m obtemos

$$((u'_m(t), u_m(t)))_H + ((u_m(t), u_m(t)))_V = 0. \tag{2.13}$$

Tomando parte real em (2.13), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_H^2 + \|u_m(t)\|_V^2 = 0$$

integrando de 0 à t, temos;

$$\|u_m(t)\|_H^2 + 2\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds = \|u_m(0)\|_H^2 \tag{2.14}$$

e, consequentemente, de (2.8) e (2.14), temos

$$\|u_m(t)\|_H^2 + 2\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds = \|u_{0_m}\|_H^2, \tag{2.15}$$

para todo $t \in [0,T]$. Como $u_{0_m} \to u_0$ em H, então existe uma constante K_1, independente de m tal que

$$\|u_m(0)\|_H^2 \leq K_1. \tag{2.16}$$

Combinando (2.15) e (2.16) resulta que

$$\|u_m(t)\|_H^2 + 2\int_0^t \|u_m(s)\|_V^2 ds \leq K_1, \text{ para todo } t \in [0,T] \text{ e para todo } m \in \mathbb{N} \tag{2.17}$$

A desigualdade (2.17) nos diz que

$$\begin{aligned} &\{u_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H); \\ &\{u_m\} \text{ é limitada em } L^2(0,T;V) \end{aligned} \tag{2.18}$$

Consequentemente, de (2.18) existe uma subsequência $\{u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{aligned} &u_\nu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H); \\ &u_\nu \rightharpoonup u \text{ fraco em } L^2(0,T;V) \end{aligned} \tag{2.19}$$

2.1.3 Passagem ao Limite

Seja $j \in \mathbb{N}$ arbitrário, porém fixado e consideremos $\nu > j$, então de (2.7) temos

$$((u_\nu'(t),\omega_j))_H + ((u_\nu(t),\omega_j))_V = 0.$$

Multiplicando a identidade acima por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, obtemos

$$((u_\nu'(t),\omega_j))_H\theta(t) + ((u_\nu(t),\omega_j))_V\theta(t) = 0,$$

agora integrando de 0 à T, temos

$$\int_0^T ((u'_\nu(t), \omega_j))_H \theta(t) dt + \int_0^T ((u_\nu(t), \omega_j))_V \theta(t) dt = 0. \tag{2.20}$$

Integrando por partes em (2.20) resulta

$$\underbrace{[((u_\nu(t), \omega_j))_H \theta(t)]_0^T}_{=0} - \int_0^T ((u_\nu(t), \omega_j))_H \theta'(t) dt + \int_0^T ((u_\nu(t), \omega_j))_V \theta(t) dt = 0. \tag{2.21}$$

Agora, passando o limite em (2.21) quando $\nu \to \infty$ e levando em consideração a convergência dada em (2.19) obtemos

$$-\int_0^T ((u(t), \omega_j))_H \theta'(t) dt + \int_0^T ((u(t), \omega_j))_V \theta(t) dt = 0 \tag{2.22}$$

Consideremos, agora $v \in V$. Como as combinações lineares finitas dos elementos da base $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ são densas em V, existe uma sequência $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, $z_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{\nu(k)} \xi_{ik} \omega_{ik}$ tal que $z_k \to v$ em V quando $k \to +\infty$. Além disso, pelo fato que $V \hookrightarrow H$, temos em (2.22), para todo $k \in \mathbb{N}$ que

$$-\int_0^T ((u(t), v))_H \theta'(t) dt + \int_0^T ((u(t), v))_V \theta(t) dt = 0, \tag{2.23}$$

assim para todo $v \in V$ e $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ resulta que

$$\left\langle \frac{d}{dt} ((u(t), v))_H, \theta(t) \right\rangle + \langle ((u(t), v))_V, \theta(t) \rangle = 0. \tag{2.24}$$

2.1.4 Localização da 1° derivada

Pela estimativa (2.19) e a cadeia de imersões $V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$ temos que

$$u \in L^2(0, T; V) \hookrightarrow L^2(0, T; H) \hookrightarrow L^2(0, T, V') \hookrightarrow \mathcal{D}'(0, T, V').$$

Assim, seja $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$, temos

$$\langle u', \theta \rangle = -\langle u, \theta' \rangle = -\int_0^T u(t)\theta'(t)dt \in H \hookrightarrow V'.$$

Logo,

$$\langle u', \theta \rangle \in V'.$$

Deste modo, para $v \in V$, temos

$$\langle \langle u', \theta \rangle, v \rangle = \left\langle -\int_0^T u(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle = -\int_0^T \langle u(t), v \rangle \theta'(t)dt \tag{2.25}$$

onde $\langle ., . \rangle$ representa a antidualidade V', V.

Por outro lado, devido a definição do operador dada no Capítulo 1 (Seção 1.6) temos que

$$\int_0^T ((u(t), v))_V \theta(t)dt = \int_0^T \langle -\Delta u(t), v \rangle \theta(t)dt = \left\langle \int_0^T -\Delta u(t)\theta(t)dt, v \right\rangle = \langle \langle -\Delta u, \theta \rangle, v \rangle \tag{2.26}$$

Logo, de (2.25) e (2.26) temos

$$\langle \langle u', \theta \rangle, v \rangle_{V',V} + \langle \langle -\Delta u, \theta \rangle, v \rangle_{V',V} = 0,$$

isto é,

$$\langle \langle u' - \Delta u, \theta \rangle, v \rangle_{V',V} = 0.$$

Logo, $u' - \Delta u = 0$ em $\mathcal{D}'(0, T, V')$. Mais ainda

$$u' = \Delta u \in L^2(0, T; V').$$

Portanto, $u' \in L^2(0, T; V')$ e

$$u' - \Delta u = 0 \in L^2(0, T; V').$$

2.1.5 Condição Inicial

Notemos que pelo fato de

$$u \in L^2(0,T;V) \ \text{ e } \ u' \in L^2(0,T,V'),$$

segue que

$$u \in W(0,T;V,V'),$$

então pelo Teorema 1.7 que

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T];H).$$

Desta forma, faz sentido falarmos em $u(t)$ qualquer que seja $t \in [0,T]$.

Provaremos que $u(0) = u_0$. Com efeito, seja $\theta \in C^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Retornando ao problema aproximado podemos escrever

$$\int_0^T ((u'_\nu(t),\omega_j))_{_H}\theta(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t),\omega_j))_{_V}\theta(t)dt = 0, \ \nu \geq j \text{ (fixo)}.$$

Integrando por partes a identidade acima chegamos a

$$-((u_\nu(0),\omega_j))_{_H} - \int_0^T ((u_\nu(t),\omega_j))_{_H}\theta'(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t),\omega_j))_{_V}\theta(t)dt = 0$$

Passando o limite na identidade acima quando $\nu \to +\infty$ vem que

$$-((u_0,\omega_j))_{_H} - \int_0^T ((u(t),\omega_j))_{_H}\theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),\omega_j))_{_V}\theta(t)dt = 0.$$

Integrando novamente por partes, obtemos

$$-((u_0,\omega_j))_{_H} - ((u(0),\omega_j))_{_H} + \int_0^T \frac{d}{dt}((u(t),\omega_j))_{_H}\theta(t)dt + \int_0^T ((u(t),\omega_j))_{_V}\theta(t)dt = 0. \tag{2.27}$$

Como u é solução fraca do problema em questão de (2.24) e (2.27) concluímos que

$$((u(0), \omega_j))_{_H} = ((u_0, \omega_j))_{_H}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Como $\{\omega_j\}_{_{j\in\mathbb{N}}}$ é denso em V e V é denso em H temos que

$$((u(0), v))_{_H} = ((u_0, v))_{_H}, \ \forall v \in H,$$

daí segue-se que $u(0) = u_0$.

2.2 Unicidade

Sejam u e $\widetilde{u}$ soluções do Problema (2.1) e definamos $w = u - \widetilde{u}$. Temos,

$$\left| \begin{array}{l} w'(t) - \Delta w(t) = 0 \text{ em } L^2(0,T,V') \\ w(0) = 0 \end{array} \right.$$

Como $w \in W(0,T;V,V')$, faz sentido compormos $w'(t)$ com $w(t)$ na dualidade $\langle .,. \rangle_{V',V}$. Assim temos

$$\langle w'(t), w(t) \rangle_{_{V',V}} + \langle -\Delta w(t), w(t) \rangle_{_{V',V}} = 0,$$

ou ainda,

$$\langle w'(t), w(t) \rangle_{_{V',V}} + ((w(t), w(t)))_{_V} = 0 \tag{2.28}$$

Por outro lado, observe que

$$\frac{d}{dt}((w(t), w(t)))_{_H} = 2\, Re\langle w'(t), w(t) \rangle_{_{V',V}} \tag{2.29}$$

Assim, de (2.28) e (2.29) resulta

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{_H} + \|w(t)\|^2_{_V} = 0$$

Agora, integrando de 0 à $t \leq T$, obtemos

$$\frac{1}{2}\left\{\|w(t)\|_{H}^{2} - \underbrace{\|w(0)\|_{H}^{2}}_{=0}\right\} + \int_{0}^{t} \|w(s)\|_{V}^{2} ds = 0$$

Portanto,

$$\|w(t)\|_{H}^{2} = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

o que resulta que $w = 0$, encerrando a prova da unicidade.

2.3 Decaimento Exponencial

Compondo (2.4) com $u(t)$ na dualidade $\langle ., . \rangle$ temos

$$\langle u'(t), u(t)\rangle + \langle -\Delta u(t), u(t)\rangle = 0,$$

ou ainda,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u(t)\|_{H}^{2}\right) + \|u(t)\|_{V}^{2} = 0,$$

daí e de (2.2) vem que

$$E'(t) + \|u(t)\|_{V}^{2} = 0. \tag{2.30}$$

Por outro lado, pela desigualdade dada em (1.23), existe uma constante $R > 0$ tal que

$$\|u(t)\|_{H}^{2} \leq \frac{1}{R^2}\|u(t)\|_{V}^{2},$$

ou seja,

$$R^2\|u(t)\|_{H}^{2} \leq \|u(t)\|_{V}^{2}. \tag{2.31}$$

Assim, por (2.30) e (2.31) obtemos que

$$E'(t) + R^2\|u(t)\|_{H}^{2} \leq E'(t) + \|u(t)\|_{V}^{2} = 0. \tag{2.32}$$

Substituindo (2.2) em (2.32) temos

$$E'(t) + 2R^2E(t) \leq 0.$$

Multiplicando a desigualdade acima por e^{2R^2t} implica que

$$\left[E(t)e^{2R^2t}\right]' \leq 0. \tag{2.33}$$

Integrando (2.33) de 0 à t obtemos

$$E(t)e^{2R^2t} - E(0) \leq 0,$$

assim

$$E(t) \leq E(0)e^{-2R^2t}.$$

Tomando $w_0 = 2R^2$, o resultado segue.

Capítulo 3

Solução Forte do Problema Hiperbólico em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, estudaremos a existência e unicidade da solução forte da equação hiperbólica em $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$.

Consideremos o seguinte problema:

$$\left| \begin{array}{l} u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \;\; u'(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde $\gamma > 0$. A energia associada ao problema (3.1) é dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} (|u'|^2 + |\nabla u|^2) dx = \frac{1}{2} \|u'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_V^2 \tag{3.2}$$

onde os espaços de Hilbert V e H foram definidos no Capítulo 1 (Seção 1.5).

Primeiramente, definimos o que entendemos por solução forte do problema (3.1).

Definição 3.1 *Uma função $u(x,t)$, definida em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, é uma solução forte para (3.1), se*

$$u \in L^\infty(0,T;W), \;\; u' \in L^\infty(0,T;V), \;\; u'' \in L^\infty(0,T;H) \tag{3.3}$$

$$u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;H) \tag{3.4}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u'(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Teorema 3.1 *Sejam $\{u_0, u_1\} \in W \times V$. O problema (3.1) possui uma única solução forte u satisfazendo (3.3), (3.4) e (3.5).*

Demonstração:

3.1 Existência de Solução

A existência de solução será estabelecida utilizando o Método de Faedo-Galerkin, o qual consiste em obter uma sequência de soluções aproximadas do problema (3.1) e, em seguida, por meio de estimativas a Priori, passar o limite, em uma topologia adequada, nesta sequência de soluções aproximadas. Por simplicidade, dividiremos a demonstração nas seguintes etapas:

1. Construções de soluções aproximadas em subespaços de dimensão finita;

2. Estimativas a Priori;

3. Passagem ao limite nas soluções aproximadas;

4. Condições Iniciais.

3.1.1 Etapa 1: Problema Aproximado

Seja $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma base em W, ortonormal em H. Representamos por

$$V_m = [\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m],$$

o subespaço gerado pelos primeiros m primeiros vetores de $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ e, definimos por

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)\omega_{_i} \in V_{_m}, \tag{3.6}$$

onde $u_{_m}(t)$ é a solução do seguinte problema de Cauchy

$$((u''_m(t), \omega_{_j}))_{_H} + ((u_m(t), \omega_{_j}))_{_V} + \gamma((u'_m(t), \omega_{_j}))_{_H} = 0, \tag{3.7}$$

com dados iniciais

$$u_m(0) = u_{0_m} \to u_0 \text{ em } W \tag{3.8}$$

$$u'_m(0) = u_{1_m} \to u_1 \text{ em } V \tag{3.9}$$

Temos em virtude de (3.6) que

$$\begin{aligned} u_{0_m} &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i_m}\omega_{_i} = u_m(0) = \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(0)\omega_{_i} \\ u_{1_m} &= \sum_{i=1}^{m} \beta_{i_m}\omega_{_i} = u'_m(0) = \sum_{i=1}^{m} g'_{i_m}(0)\omega_{_i} \end{aligned} \tag{3.10}$$

e, daí de (3.7)-(3.10) podemos escrever

$$\left| \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i=1}^{m} g''_{i_m}(t)(\omega_{_i}, \omega_{_j})_{_H} + \sum_{i=1}^{m} g_{i_m}(t)(\omega_{_i}, \omega_{_j})_{_V} + \gamma \sum_{i=1}^{m} g'_{i_m}(t)(\omega_{_i}, \omega_{_j})_{_H} = 0 \\ g_{j_m}(0) = \alpha_{j_m}, \;\; g'(0) = \beta_{j_m}, \qquad j = 1, 2, \ldots, m \end{array} \right.$$

ou ainda,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} ((\omega_{_1}, \omega_{_1}))_{_H} & \ldots & ((\omega_{_1}, \omega_{_m}))_{_H} \\ ((\omega_{_2}, \omega_{_1}))_{_H} & \ldots & ((\omega_{_2}, \omega_{_m}))_{_H} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\omega_{_m}, \omega_{_1}))_{_H} & \ldots & ((\omega_{_m}, \omega_{_m}))_{_H} \end{bmatrix}}_{=\mathcal{A}} \begin{bmatrix} g''_1(t) \\ g''_2(t) \\ \vdots \\ g''_m(t) \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} ((\omega_{_1}, \omega_{_1}))_{_V} & \ldots & ((\omega_{_1}, \omega_{_m}))_{_V} \\ ((\omega_{_2}, \omega_{_1}))_{_V} & \ldots & ((\omega_{_2}, \omega_{_m}))_{_V} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\omega_{_m}, \omega_{_1}))_{_V} & \ldots & ((\omega_{_m}, \omega_{_m}))_{_V} \end{bmatrix}}_{=\mathcal{B}} \begin{bmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ \vdots \\ g_m(t) \end{bmatrix}$$

$$
+\gamma \begin{bmatrix} ((\omega_1,\omega_1))_H & \dots & ((\omega_1,\omega_m))_H \\ ((\omega_2,\omega_1))_H & \dots & ((\omega_2,\omega_m))_H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ((\omega_m,\omega_1))_H & \dots & ((\omega_m,\omega_m))_H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1'(t) \\ g_2'(t) \\ \vdots \\ g_m'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.11}
$$

Definimos

$$
Z(t) = \begin{bmatrix} g_{1_m}(t) \\ g_{2_m}(t) \\ \vdots \\ g_{m_m}(t) \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; Z(0) = \begin{bmatrix} g_{1_m}(0) \\ g_{2_m}(0) \\ \vdots \\ g_{m_m}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{1_m}(0) \\ \alpha_{2_m}(0) \\ \vdots \\ \alpha_{m_m}(0) \end{bmatrix} = Z_0 \tag{3.12}
$$

$$
Z'(t) = \begin{bmatrix} g'_{1_m}(t) \\ g'_{2_m}(t) \\ \vdots \\ g'_{m_m}(t) \end{bmatrix} \;\Rightarrow\; Z'(0) = \begin{bmatrix} g'_{1_m}(0) \\ g'_{2_m}(0) \\ \vdots \\ g'_{m_m}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_{1_m}(0) \\ \beta_{2_m}(0) \\ \vdots \\ \beta_{m_m}(0) \end{bmatrix} = Z_1 \tag{3.13}
$$

Observe que sendo $\{\omega_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base ortonormal em H resulta que a matriz $\mathcal{A}$ é a matriz identidade e, portanto de (3.11)-(3.13) vem que

$$
\left| \begin{array}{l} Z''(t) + \gamma Z'(t) + \mathcal{B} Z(t) = 0 \\ Z(0) = Z_0, \;\; Z'(0) = Z_1 \end{array} \right. \tag{3.14}
$$

Definindo

$$
Y_1(t) = Z(t), \;\; Y_2(t) = Z'(t) \text{ e } Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix},
$$

temos

$$
Y(0) = \begin{bmatrix} Y_1(0) \\ Y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z(0) \\ Z'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{bmatrix} = Y_0
$$

de (3.14) resulta que

$$Y'(t) = \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'(t) \\ Z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'(t) \\ -\gamma Z'(t) - \mathcal{B}Z(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -\gamma Z'(t) - BZ(t) \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$Y'(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ -\mathcal{B} & -\gamma I \end{bmatrix}}_{=\mathcal{C}} \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}}_{=Y(t)}$$

ou ainda,

$$Y'(t) = \mathcal{C}Y(t),$$

assim, obtemos o seguinte sistema

$$\left| \begin{array}{l} Y'(t) = \mathcal{C}Y(t) \\ Y(0) = Y_0 \end{array} \right. \tag{3.15}$$

onde, $Y_0 = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \end{bmatrix}$, o qual possui solução em $[0, T]$ dada por

$$Y(t) = e^{t\mathcal{C}} Y_0,$$

onde $e^{t\mathcal{C}} = I + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{C}^k}{k!}$. Aqui I representa a matriz identidade.

3.1.2 Etapa 2: Estimativa a Priori

Estimativa 1

Multiplicando (3.7) por $\overline{g_{j_m}'(t)}$ e somando em j de 1 até m obtemos

$$((u_m''(t), u_m'(t)))_H + ((u_m(t), u_m'(t)))_V + \gamma((u_m'(t), u_m'(t)))_H = 0,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_V^2 + \gamma\|u_m'(t)\|_H^2 = 0$$

integrando de 0 à t, vem que

$$\|u_m'(t)\|_H^2 + \|u_m(t)\|_V^2 + 2\gamma\int_0^t \|u_m'(s)\|_H^2 ds = \|u_m'(0)\|_H^2 + \|u_m(0)\|_V^2$$

$$= \|u_{1_m}\|_H^2 + \|u_{0_m}\|_V^2. \tag{3.16}$$

Contudo de (3.8), (3.9) e pelo fato de $W \hookrightarrow V$ obtemos a existência de uma constante $c_1 > 0$ independente de $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0, +\infty)$ tal que

$$\|u_{1_m}\|_H^2 + \|u_{0_m}\|_V^2 \leq c_1. \tag{3.17}$$

Logo, de (3.16) e (3.17) resulta que

$$\|u_m'(t)\|_H^2 + \|u_m(t)\|_V^2 + 2\gamma\int_0^t \|u_m'(s)\|_H^2 ds \leq c_1 \tag{3.18}$$

para todo $t \in [0, T]$ e para todo $m \in \mathbb{N}$.

Afirmação: $\|u''(0)\|_H^2$ é limitado.

De fato, multiplicando (3.7) por $\overline{g_{j_m}''(t)}$, somando em j de 1 até m e tomando $t = 0$, temos

$$\|u_m''(0)\|_H^2 + ((u_m(0), u_m''(0)))_V + \gamma((u_m'(0), u_m''(0)))_H = 0,$$

ou ainda,

$$\|u_m''(0)\|_H^2 + ((-\Delta u_m(0), u_m''(0)))_H + \gamma((u_m'(0), u_m''(0)))_H = 0.$$

Usando a Desigualdade de Schwarz resulta

$$\|u_m''(0)\|_H^2 \leq \|\Delta u_m(0)\|_H\|u_m''(0)\|_H + \gamma\|u_m'(0)\|_H\|u_m''(0)\|_H,$$

assim temos que

$$\|u''_m(0)\|_{_H} \leq \|\Delta u_m(0)\|_{_H} + \gamma \|u'_m(0)\|_{_H}. \tag{3.19}$$

Por outro lado, de (3.8), (3.9) e pelo fato de $V \hookrightarrow H$, existe uma constante $c_2 > 0$ independente de $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$ tal que

$$\|\Delta u_m(0)\|_{_H} + \gamma \|u'_m(0)\|_{_H} \leq c_2. \tag{3.20}$$

Portanto de (3.19) e (3.20) resulta que

$$\|u''_m(0)\|_{_H} \leq c_2, \ \forall m \in \mathbb{N} \text{ e } \forall t \in [0,T]. \tag{3.21}$$

Estimativa 2

Derivando a equação (3.7) em relação a t, obtemos

$$((u'''_m(t), \omega_{_j}))_{_H} + ((u'_m(t), \omega_{_j}))_{_V} + \gamma((u''_m(t), \omega_{_j}))_{_H} = 0 \tag{3.22}$$

multiplicando (3.22) por $\overline{g''_j(t)}$ e somando em j de 1 até m

$$((u'''_m(t), u''_m(t)))_{_H} + ((u'_m(t), u''_m(t)))_{_V} + \gamma((u''_m(t), u''_m(t)))_{_H} = 0$$

tomando a parte real, obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u''_m(t)\|^2_{_H} + \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|^2_{_V} + \gamma\|u''_m(t)\|^2_{_H} = 0$$

e integrando de 0 à t implica que

$$\|u''_m(t)\|^2_{_H} + \|u'_m(t)\|^2_{_V} + \gamma \int_0^t \|u''_m(s)\|^2_{_H} ds = \|u''_m(0)\|^2_{_H} + \|u'_m(0)\|^2_{_V}$$

$$= \|u''_m(0)\|^2_{_H} + \|u_{1_m}\|^2_{_V}. \tag{3.23}$$

De (3.9) e (3.21) temos a existência de uma constante $c_3 > 0$ independente de $m \in \mathbb{N}$ e $t \in [0,T]$ tal que

$$\|u''_m(0)\|^2_H + \|u_{1_m}\|^2_V \leq c_3. \tag{3.24}$$

Logo de (3.23) e (3.24) temos que

$$\|u''_m(t)\|^2_H + \|u'_m(t)\|^2_V + \gamma \int_0^t \|u''_m(s)\|^2_H ds \leq c_3 \tag{3.25}$$

Assim, as desigualdades dadas em (3.18) e (3.25) nos dizem que

$$\begin{aligned} &\{u_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \\ &\{u'_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H) \\ &\{u''_m\} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H) \end{aligned} \tag{3.26}$$

Consequentemente, de (3.26) existe uma subsequência $\{u_\mu\}_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ tal que

$$u_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;V) \tag{3.27}$$

$$u'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H) \tag{3.28}$$

$$u''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \text{ fraco estrela em } L^\infty(0,T;H) \tag{3.29}$$

3.1.3 Etapa 3: Passagem ao Limite

Seja $j \in \mathbb{N}$ arbitrário, porém fixado. Consideremos $\nu > j$, então de resulta que

$$((u''_\nu(t), \omega_j))_H + ((u_\nu(t), \omega_j))_V + \gamma((u'_\nu(t), \omega_j))_H = 0. \tag{3.30}$$

Multiplicando (3.30) por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integrando de 0 à T, obtemos

$$\int_0^T ((u_\nu''(t), \omega_j))_H \theta(t) dt + \int_0^T ((u_\nu(t), \omega_j))_V \theta(t) dt + \gamma \int_0^T ((u_\nu'(t), \omega_j))_H \theta(t) dt = 0. \quad (3.31)$$

Passando o limite em (3.31) quando $\nu \to \infty$ e levando em consideração as convergências (3.27)-(3.29) temos

$$\int_0^T ((u''(t), \omega_j))_H \theta(t) dt + \int_0^T ((u(t), \omega_j))_V \theta(t) dt + \gamma \int_0^T ((u'(t), \omega_j))_H \theta(t) dt = 0. \quad (3.32)$$

Considerando $v \in W$. Como as combinações lineares finitas dos elementos de $\{\omega_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ são densas em W, existe uma subsequência $\{z_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, onde

$$z_k = \sum_{i=1}^{\nu(k)} \xi_{i_k} \omega_{i_k},$$

tal que $z_k \to v$ em W quando $k \to \infty$. Logo, de (3.32), para todo $k \in \mathbb{N}$ temos

$$\int_0^T ((u''(t), z_k))_H \theta(t) dt + \int_0^T ((u(t), z_k))_V \theta(t) dt + \gamma \int_0^T ((u'(t), z_k))_H \theta(t) dt = 0. \quad (3.33)$$

Da convergência forte $z_k \to v$ em W e das cadeias de imersões $W \hookrightarrow V \hookrightarrow H$ e de (3.33) obtemos

$$\int_0^T ((u''(t), v))_H \theta(t) dt + \int_0^T ((u(t), v))_V \theta(t) dt + \gamma \int_0^T ((u'(t), v))_H \theta(t) dt = 0, \ \forall v \in W, \ \forall \theta \in \mathcal{D}(0, T)$$

Resulta daí que

$$u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0, T; H), \quad (3.34)$$

mas como

$$u'' \in L^\infty(0, T; H) \quad \text{e} \quad u' \in L^\infty(0, T; V) \hookrightarrow L^\infty(0, T; H), \quad (3.35)$$

resulta de (3.35) em (3.34) que

$$\Delta u \in L^\infty(0,T;H). \tag{3.36}$$

Portanto,

$$u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;H). \tag{3.37}$$

De (3.37) obtemos

$$((u(t),v))_{V} = ((-u'(t) - \gamma u'(t), v))_{H}, \ \forall v \in V \text{ e para q.t. } t \in]0,T[,$$

o que implica, face a definição de W que

$$u(t) \in W, \ \text{para q.t. } t \in]0,T[. \tag{3.38}$$

De (3.36) e (3.38) temos que

$$u \in L^\infty(0,T;W).$$

3.1.4 Etapa 4: Condições Iniciais

Como

$$u \in L^\infty(0,T;W), \ u' \in L^\infty(0,T;V), \ u'' \in L^\infty(0,T;H)$$

e levando em conta os Lemas 1.6 e 1.7, então

$$u \in C([0,T];V), \ u \in C_s^0(0,T;W)$$

$$u' \in C([0,T];H), \ u' \in C_s^0(0,T;V)$$

Desta forma, faz sentido falarmos de $u(t) \in W$ e $u'(t) \in V$ qualquer que seja $t \in [0, T]$. Provaremos que:

(i) $u(0) = u_0$

De fato, sejam $v \in V$ e $\theta \in C^1[0, T]$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Da convergência em (3.28), resulta que

$$\int_0^T ((u_\nu'(t), v))_V \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T ((u'(t), v))_V \theta(t) dt \text{ quando } \nu \to +\infty$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((u_\nu(t), v))_V \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}((u(t), v))_V \theta(t) dt \text{ quando } \nu \to +\infty$$

integrando por partes, obtemos

$$-((u_\nu(0), v))_V - \int_0^T ((u_\nu(t), v))_V \theta'(t) dt \longrightarrow -((u(0), v))_V - \int_0^T ((u(t), v))_V \theta'(t) dt. \quad (3.39)$$

Pela convergência dada em (3.27) temos para $v \in V$ e $\theta' \in C[0, T]$

$$\int_0^T ((u_\nu(t), v))_V \theta'(t) dt \longrightarrow \int_0^T ((u(t), v))_V \theta'(t) dt \quad (3.40)$$

De (3.39) e (3.40) resulta

$$((u_\nu(0), v))_V \longrightarrow ((u(0), v))_V, \ \forall v \in V,$$

isto é

$$((u_{0_\nu}, v))_V \longrightarrow ((u(0), v))_V, \ \forall v \in V. \quad (3.41)$$

Por outro lado,

$$u_\nu(0) = u_{0_\nu} \longrightarrow u_0 \text{ em } W \hookrightarrow V$$

assim

$$((u_{0_\nu}, v))_V \longrightarrow ((u_0, v))_V, \ \forall v \in V \tag{3.42}$$

De (3.41), (3.42) e pela unicidade do limite resulta que

$$((u(0), v))_V = ((u_0, v))_V, \ \forall v \in V,$$

daí, $u(0) = u_0$.

(ii) $u'(0) = u_1$

De fato, sejam $v \in H$ e $\theta \in C^1[0,T]$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. Da convergência em (3.29) resulta que

$$\int_0^T ((u''_\nu, v))_H \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T ((u'', v))_H \theta(t) dt \text{ quando } \nu \to +\infty,$$

ou seja,

$$\int_0^T \frac{d}{dt}((u'_\nu, v))_H \theta(t) dt \longrightarrow \int_0^T \frac{d}{dt}((u', v))_H \theta(t) dt \text{ quando } \nu \to +\infty$$

agora, integrando por partes, obtemos

$$-((u'_\nu(0), v))_H - \int_0^T ((u'_\nu(t), v))_H \theta'(t) dt \longrightarrow ((u'(0), v))_H - \int_0^T ((u'(t), v))_H \theta'(t) dt \tag{3.43}$$

Pela convergência dada em (3.28), temos para $v \in H$ e $\theta' \in C[0,T]$ que

$$\int_0^T ((u'_\nu(t), v))_H \theta'(t) dt \longrightarrow \int_0^T ((u'(t), v))_H \theta'(t) dt \tag{3.44}$$

De (3.43) e (3.44) resulta que

$$((u'_\nu(0), v))_H \longrightarrow ((u'(0), v))_H, \ \forall v \in H$$

isto é,

$$((u_{1_\nu}, v))_{_H} \longrightarrow ((u'(0), v))_{_H},\ \forall v \in H \tag{3.45}$$

Por outro lado,

$$u'_\nu(0) = u_{1_\nu} \longrightarrow u_1 \text{ em } V \hookrightarrow H$$

assim

$$((u_{1_v}, v))_{_H} \longrightarrow ((u_1, v))_{_H},\ \forall v \in H \tag{3.46}$$

De (3.45), (3.46) e pela unicidade do limite, resulta

$$((u'(0), v))_{_H} = ((u_1, v))_{_H},\ \forall v \in H$$

daí, $u'(0) = u_1$.

3.2 Unicidade

Sejam u e $\widetilde{u}$ duas soluções do Problema (3.1) e definamos $w = u - \widetilde{u}$. Temos

$$\left|\begin{array}{l} w'' - \Delta u + \gamma w' = 0 \text{ em } L^\infty(0,T;H) \\ w(0) = w'(0) = 0 \end{array}\right.$$

Como $w' \in L^\infty(0,T;V) \hookrightarrow L^\infty(0,T;H) \hookrightarrow L^1(0,T;H)$, tem sentido compormos $w'' - \Delta w + \gamma w$ com w' no produto interno $((.,.))_{_H}$, logo

$$((w''(t), w'(t)))_{_H} + ((-\Delta w(t), w'(t)))_{_H} + \gamma((w'(t), w'(t)))_{_H} = 0 \tag{3.47}$$

Como $w \in L^\infty(0,T;W)$ e $w' \in L^\infty(0,T;V)$ de (3.47) obtemos

$$((w''(t), w'(t)))_{_H} + ((w(t), w'(t)))_{_V} + \gamma\|w'(t)\|^2_{_H} = 0 \tag{3.48}$$

Tomando a parte real em (3.48), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w'(t)\|_{H}^{2} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|_{V}^{2} + \gamma\|w'(t)\|_{H}^{2} = 0$$

integrando de 0 à t e levando em conta que $w(0) = w'(0) = 0$, temos

$$\frac{1}{2}\|w'(t)\|_{H}^{2} + \frac{1}{2}\|w(t)\|_{V}^{2} + \gamma\int_{0}^{t}\|w'(s)\|_{H}^{2}ds = 0$$

Logo $w(t) = 0$, para todo $t \in [0,T]$. O que encerra a prova da unicidade.

Observação 3.1

- *Como* $u \in L^{\infty}(0,T;W)$ *e* $u' \in L^{\infty}(0,T;V)$, *então obtemos dos Lemas* 1.6 *e* 1.7 *que*

$$u \in C^{0}([0,T];V) \text{ e } u \in C_{s}^{0}(0,T;W).$$

- *Como* $u' \in L^{\infty}(0,T;V)$ *e* $u'' \in L^{\infty}(0,T;H)$, *então obtemos dos Lemas* 1.6 *e* 1.7 *que*

$$u' \in C^{0}([0,T];H) \text{ e } u' \in C_{s}^{0}(0,T;V).$$

- *Temos que:*

  (i) $u'' - \Delta u + \gamma u' = 0$ *em* $L^{\infty}(0,T;H) \hookrightarrow L^{\infty}(0,T;V')$;

  (ii) $u \in C^{0}([0,T];V)$ *resulta que* $-\Delta u \in C^{0}([0,T],V')$;

  (iii) $u' \in C^{0}([0,T];V) \hookrightarrow C^{0}([0,T];V')$;

  De $(i)-(iii)$ *obtemos que*

  (iv) $u'' \in C^{0}([0,T];V')$

  De (iv) *e do fato que* $u'' \in L^{\infty}(0,T;H)$ *vemos que face o Lema* 1.7 *resulta que*

$$u'' \in L^{\infty}(0,T;H) \cap C_{s}(0,T;V') = C_{s}^{0}(0,T;H).$$

Capítulo 4

Solução Fraca do Problema Hiperbólico em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo, estudaremos a existência, unicidade e o decaimento exponencial da solução fraca do problema (3.1).

A seguir, definiremos o conceito de solução fraca do problema (3.1):

Definição 4.1 *Uma função $u(x,t)$, definida em $\mathbb{R}^n \times [0,T]$, é uma solução fraca para (3.1), se*

$$u \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H) \cap C^2([0,T];V') \tag{4.1}$$

$$u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } C^0([0,T];V') \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \;\; u'(x,0) = u_1(x), \;\; x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.3}$$

Teorema 4.1 *Dados $u_0 \in V$ e $u_1 \in H$, existe uma única solução fraca u do problema (3.1) satisfazendo (4.1), (4.2) e (4.3). Além disso, a solução do problema (3.1) satisfaz a identidade da energia*

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u(t)\|_V^2 + \gamma\int_0^t \|u'(s)\|_H^2 ds = \frac{1}{2}\|u_1\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_0\|_V^2,\ \forall t \in [0,T]$$

Demonstração:

4.1 Existência de Solução

Como W é denso em V e V é denso em H conforme Capítulo 1 (Seção 1.6), então existem sequências $(u_{0_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W$ e $(u_{1_\nu})_{\nu\in\mathbb{N}} \subset V$ tais que

$$u_{0_\nu} = u_{0_\nu} \longrightarrow u_0 \text{ em } V \tag{4.4}$$

$$u_\nu'(0) = u_{1_\nu} \longrightarrow u_1 \text{ em } H \tag{4.5}$$

Para cada $\nu \geq \nu_0$, seja u_ν, a solução forte do Problemas (3.1) com a condição inicial $\{u_{0_\nu}, u_{1_\nu}\} \in W \times V$, isto é, para todo $T > 0$

$$u_\nu \in C_s^0([0,T];W) \cap C_s^1([0,T];V) \cap C_s^2([0,T];H)$$

e verifica que

$$\left| \begin{array}{l} u_\nu'' - \Delta u_\nu + \gamma u_\nu' = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u_\nu(0) = u_{0_\nu},\ u_\nu'(0) = u_{1_\nu} \end{array} \right. \tag{4.6}$$

Para cada $\mu \geq \nu_0$, obtemos

$$\left| \begin{array}{l} u_\mu'' - \Delta u_\mu + \gamma u_\mu' = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ u_\mu(0) = u_{0_\mu},\ u_\mu'(0) = u_{1_\mu} \end{array} \right. \tag{4.7}$$

De (4.6) e (4.7) resulta

$$\left| \begin{array}{l} (u_\nu - u_\mu)'' - \Delta(u_\nu - u_\mu) + \gamma(u_\nu - u_\mu)' = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n \times (0,+\infty) \\ (u_\nu - u_\mu)(0) = u_{0_\nu} - u_{0_\mu}\ (u_\nu - u_\mu)'(0) = u_{1_\nu} - u_{1_\mu} \end{array} \right. \tag{4.8}$$

Definindo $z_{\nu,\mu} = u_\nu - u_\mu$, $\nu, \mu \in \mathbb{N}$, $\nu, \mu \geq \nu_0$ segue de (4.8)

$$\left| \begin{array}{l} z''_{\nu,\mu} - \Delta z_{\nu,\mu} + \gamma z'_{\nu,\mu} = 0 \text{ q.s. em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ z_{\nu,\mu}(0) = z_{0_{\nu,\mu}}, \ z'_{\nu\mu}(0) = z_{1_{\nu,\mu}} \end{array} \right. \tag{4.9}$$

Compondo a primeira equação de (4.9) por $z'_{\nu,\mu} \in C^0([0,T]; V)$, obtemos

$$((z''_{\nu,\mu}(t), z'_{\nu,\mu}(t)))_H + ((-\Delta z_{\nu,\mu}(t), z'_{\nu,\mu}(t)))_H + \gamma((z'_{\nu,\mu}(t), z'_{\nu,\mu}(t)))_H = 0$$

ou

$$((z''_{\nu,\mu}(t), z'_{\nu,\mu}(t)))_H + ((z_{\nu,\mu}(t), z'_{\nu,\mu}(t)))_V + \gamma \|z'_{\nu,\mu}(t)\|_H^2 = 0 \tag{4.10}$$

Tomando a parte real em (4.10), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z'_{\nu,\mu}(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z_{\nu,\mu}(t)\|_V^2 + \gamma \|z'_{\nu,\mu}(t)\|_H^2 = 0 \tag{4.11}$$

integrando de 0 à t na equação (4.11) concluímos que

$$\|z'_{\nu,\mu}(t)\|_H^2 + \|z_{\nu,\mu}(t)\|_V^2 + 2\,\gamma \int_0^t \|z'_{\nu,\mu}(s)\|_H^2 ds = \|z'_{\nu,\mu}(0)\|_H^2 + \|z_{\nu,\mu}(0)\|_V^2$$

$$= \|z_{1_{\nu,\mu}}\|_H^2 + \|z_{0_{\nu,\mu}}\|_H^2. \tag{4.12}$$

Logo, resulta que para todo $t \in [0,T]$ temos

$$\|u'_\nu(t) - u'_\mu(t)\|_H^2 + \|u_\nu(t) - u_\mu(t)\|_V^2 \leq \|u_{0_\nu} - u_{0_\mu}\|_V^2 + \|u_{1_\nu} - u_{1_\mu}\|_H^2$$

Assim,

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u'_\nu(t) - u'_\mu(t)\|_H^2 + \sup_{t\in[0,T]} \|u_\nu(t) - u_\mu(t)\|_V^2 \leq \|u_{0_\nu} - u_{0_\mu}\|_V^2 + \|u_{1_\nu} - u_{1_\mu}\|_H^2 \tag{4.13}$$

De (4.4), (4.5) e (4.13) temos que $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; V)$ e $(u'_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $C^0([0,T]; H)$.

Da completude de $C^0([0,T];V)$ e $C^0([0,T];H)$ segue que

$$u_\nu \longrightarrow u \text{ em } C^0([0,T];V) \hookrightarrow L^2(0,T;V) \tag{4.14}$$

$$u'_\nu \longrightarrow u' \text{ em } C^0([0,T];H) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \tag{4.15}$$

Sejam $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $v \in V$. Compondo a primeira equação de (4.6) com $v\theta$ no produto interno de $L^2(0,T;H)$ e usando a definição de $D(A)$ obtemos

$$\int_0^T ((u''_\nu(t),v))_H \theta(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t),v))_V \theta(t)dt + \gamma \int_0^T ((u'_\nu(t),v))_H \theta(t)dt = 0,$$

integrando por partes e tendo em conta que $\theta(0) = \theta(T) = 0$ temos

$$-\int_0^T ((u'_\nu(t),v))_H \theta'(t)dt + \int_0^T ((u_\nu(t),v))_V \theta(t)dt + \gamma \int_0^T ((u'_\nu(t),v))_H \theta(t)dt = 0. \tag{4.16}$$

Assim de (4.14), (4.15), (4.16) e passando ao limite quando $\nu \to \infty$, obtemos

$$-\int_0^T ((u'(t),v))_H \theta'(t)dt + \int_0^T ((u(t),v))_V \theta(t)dt + \gamma \int_0^T ((u'(t),v))_H \theta(t)dt = 0 \tag{4.17}$$

Agora observe que

$$-\int_0^T ((u'(t),v))_H \theta'(t)dt = \left(\left(-\int_0^T u'(t)\theta'(t)dt, v\right)\right)_H = \left\langle -\int_0^T u'(t)\theta'(t)dt, v\right\rangle_{V',V}$$

$$= \langle\langle u'', \theta\rangle, v\rangle_{V',V} \tag{4.18}$$

$$\int_0^T ((u(t),v))_V \theta(t)dt = \int_0^T \langle -\Delta u(t), v\rangle_{V',V} \theta(t)dt = \left\langle \int_0^T -\Delta u(t)\theta(t)dt, v\right\rangle_{V',V}$$

$$= \langle\langle -\Delta u, \theta\rangle, v\rangle_{V',V} \tag{4.19}$$

$$\int_0^T ((\gamma u'(t),v))_H\theta(t)dt = \left(\left(\int_0^T \gamma u'(t)\theta(t)dt, v\right)\right) = \left\langle \int_0^T \gamma u'(t)\theta(t)dt, v\right\rangle_{V',V}$$

$$= \langle\langle \gamma u', \theta\rangle, v\rangle_{V',V} \tag{4.20}$$

Substituindo (4.18)-(4.20) em (4.17) chegamos que

$$\langle\langle u'', \theta\rangle, v\rangle_{V',V} + \langle\langle -\Delta u(t), \theta(t)\rangle, v\rangle_{V',V} + \langle\langle \gamma u', \theta\rangle, v\rangle_{V',V} = 0$$

para todo $v \in V$ e para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. E dessa forma, obtemos

$$\langle\langle u'' - \Delta u + \gamma u', \theta\rangle, v\rangle_{V',V} = 0,$$

para todo $v \in V$ no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, ou seja,

$$u'' - \Delta u + \gamma u' = 0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;V'). \tag{4.21}$$

Observando que $u \in C^0([0.T];V)$, então $-\Delta u \in C^0([0.T];V')$ e que $u' \in C^0([0,T];H) \hookrightarrow C^0([0.T];V')$, obtemos a igualdade (4.21) em $C^0([0.T];V')$.

4.1.1 Condição Inicial

Como $u_\nu \to u$ em $C([0,T];V)$, então

$$u_{0_\nu} = u_\nu(0) \longrightarrow u(0) \text{ em } V.$$

Por outro lado,

$$u_{0_\nu} \longrightarrow u_0 \text{ em } V.$$

Destas últimas convergências e pela unicidade do limite, temos

$$u(0) = u_0.$$

Agora, como $u'_\nu \to u'$ em $C([0,T];H)$, então

$$u_{1_\nu} = u'_\nu(0) \longrightarrow u'(0) \text{ em } H.$$

Por outro lado,

$$u_{1_\nu} \longrightarrow u_1 \text{ em } H.$$

Destas últimas convergências e pela unicidade do limite, temos

$$u'(0) = u_1.$$

4.1.2 Unicidade

Sejam u e $\widetilde{u}$ soluções fracas do Problema (3.1). Então, se definirmos $w = u - \widetilde{u}$, temos

$$w \in C^0([0,T];V) \cap C^1([0,T];H) \cap C^2([0,T];V')$$

e verifica-se

$$\left| \begin{array}{l} w'' - \Delta w + \gamma w' = 0 \\ w(0) = w'(0) = 0 \end{array} \right. \tag{4.22}$$

Sejam $s, t \in [0,T]$ e definamos a seguinte função auxiliar

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_t^s w(\tau)d\tau, & 0 \leq t \leq s \\ \qquad 0 & , \ s \leq t \leq T \end{cases}$$

Observemos que para cada $t \in [0,T]$, $\psi(t) \in V$. Além disso,

$$\int_0^T \|\psi(t)\|_V dt = \int_0^s \left\| -\int_t^s w(\tau)d\tau \right\|_V dt \leq \int_0^s \int_t^s \|w(\tau)\|_V d\tau dt$$

$$\leq \text{supess}\,\|w\|_{V} \int_0^s (s-t)dt = \text{supess}\|w\|_{V} \left[st - \frac{t^2}{2}\right]_0^s$$

$$= \text{supess}\|w\|_{V} \left[s^2 - \frac{s^2}{2}\right] \leq \frac{T^2}{2}\,\text{supess}\|w\|_{V} < +\infty$$

Logo, $\psi \in L^1(0,T;V)$. Além disso, como $\psi' = w \in C^0([0,s];V)$ resulta que $\psi \in C^1([0,s];V)$.

Por outro lado, observemos que $w'' - \Delta w + \gamma w' \in L^\infty(0,T;V')$ e compondo a equação $w'' - \Delta w + \gamma w' = 0$ com ψ na dualidade $L^\infty(0,T;V') \times L^1(0,T;V)$ obtemos

$$\int_0^T \langle w'', \psi(t)\rangle dt + \int_0^T \langle -\Delta w(t), \psi(t)\rangle dt + \gamma \int_0^T \langle w'(t), \psi(t)\rangle dt = 0,$$

ou ainda,

$$\int_0^T \langle w'', \psi(t)\rangle dt + \int_0^T ((w(t), \psi(t)))_{V} dt + \gamma \int_0^T ((w'(t), \psi(t)))_{H} dt = 0$$

Como $\psi(t) = 0$ para todo $t \in [s,T]$ da última identidade podemos escrever

$$\int_0^s \langle w'', \psi(t)\rangle dt + \int_0^s ((w(t), \psi(t)))_{V} dt + \gamma \int_0^s ((w'(t), \psi(t)))_{H} dt = 0. \tag{4.23}$$

Agora, vamos analisar cada integral de (4.23). Assim, note que

$$\frac{d}{dt}\langle w'(t), \psi(t)\rangle = \langle w''(t), \psi(t)\rangle + \langle w'(t), \psi'(t)\rangle. \tag{4.24}$$

Como

$$\langle w'(t), \psi(t)\rangle = ((w'(t), \psi(t)))_{H}, \tag{4.25}$$

então de (4.24) e (4.25) vem que

$$\frac{d}{dt}((w'(t), \psi(t)))_{H} = \langle w''(t), \psi(t)\rangle + \langle w'(t), \psi'(t)\rangle \tag{4.26}$$

Agora, observemos que $\psi'(t) = w(t)$ quase sempre em $[0,s]$, assim temos

$$\langle w'(t), \psi'(t)\rangle = \langle w'(t), w(t)\rangle = ((w'(t), w(t)))_{_H}, \tag{4.27}$$

tomando parte real em (4.27) obtemos

$$Re\langle w'(t), \psi'(t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{_H}. \tag{4.28}$$

Tomando a parte real em (4.26) e usando (4.28) obtemos

$$Re\,\frac{d}{dt}((w'(t), \psi(t)))_{_H} = Re\langle w''(t), \psi(t)\rangle + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2_{_H}, \tag{4.29}$$

integrando a identidade (4.29) de 0 à s e pelo fato que $w(0) = w'(0) = \psi(s) = 0$ vem que

$$0 = Re\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt + \frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{_H},$$

assim,

$$Re\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt = -\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{_H} \tag{4.30}$$

Por outro lado, como $\psi' = w$ quase sempre em $[0, s]$ temos que

$$Re((w(t), \psi(t)))_{_V} = Re((\psi'(t), \psi(t)))_{_V} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi(t)\|^2_{_V},$$

integrando a identidade acima de 0 à s, obtemos

$$Re\int_0^s ((w(t), \psi(t)))_{_V} dt = \frac{1}{2}\|\psi(s)\|^2_{_V} - \frac{1}{2}\|\psi(0)\|^2_{_V} = -\frac{1}{2}\|\psi(0)\|^2_{_V}. \tag{4.31}$$

Agora, note que

$$\frac{d}{dt}((w(t), \psi(t)))_{_H} = ((w'(t), \psi(t)))_{_H} + ((w(t), \psi'(t)))_{_H},$$

integrando a identidade acima de 0 à s e levando em conta que $w(0) = \psi(s) = 0$, obtemos

$$0 = \int_0^s ((w'(t), \psi(t)))_{_H} dt + \int_0^s ((w(t), \psi'(t)))_{_H} dt,$$

ou seja,

$$\int_0^s ((w'(t),\psi(t)))_H dt = -\int_0^s \|w(t)\|_H^2. \tag{4.32}$$

Tomando a parte real em (4.23) e usando (4.30), (4.31) e (4.32), obtemos

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|\psi(0)\|_V^2 + \int_0^s \|w(t)\|_H^2 = 0,$$

o que implica que $\|w(s)\|_H^2 = 0$, para todo $s \in [0,T]$, ou seja, $w = 0$. O que encerra a unicidade.

4.1.3 Identidade da Energia

Compondo a primeira equação de (4.6) com $u'_\nu(t) \in C^0([0,T],V)$ temos

$$((u''_\nu(t),u'_\nu(t)))_H + ((-\Delta u_\nu(t),u'_\nu(t)))_H + \gamma((u'_\nu(t),u'_\nu(t)))_H = 0,$$

ou ainda,

$$((u''_\nu(t),u'_\nu(t)))_H + ((u_\nu(t),u'_\nu(t)))_V + \gamma((u'_\nu(t),u'_\nu(t)))_H = 0 \tag{4.33}$$

Tomando a parte real em (4.33), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_\nu(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\nu(t)\|_V^2 + \gamma\|u'_\nu(t)\|_H^2 = 0$$

integrando de 0 à t resulta que,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|u'_\nu(t)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_\nu(t)\|_V^2 + \gamma\int_0^t \|u'_\nu(s)\|_H^2 ds &= \frac{1}{2}\|u'_\nu(0)\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_\nu(0)\|_V^2 \\ &= \frac{1}{2}\|u_{1_\nu}\|_H^2 + \frac{1}{2}\|u_{0_\nu}\|_V^2\end{aligned}$$

Devido as convegências dadas em (4.4), (4.5), (4.14) e (4.15) obtemos quando $\nu \to \infty$

$$\frac{1}{2}\|u'(t)\|_{H}^{2}+\frac{1}{2}\|u(t)\|_{V}^{2}+\gamma\int_{0}^{t}\|u'(s)\|_{H}^{2}ds=\frac{1}{2}\|u_1\|_{H}^{2}+\frac{1}{2}\|u_0\|_{V}^{2}$$

4.2 Decaimento Exponencial

$$\left|\begin{array}{l} u''-\Delta u+\gamma u'=0 \text{ em } \mathbb{R}^n\times(0,\infty) \\ u(x,0)=u_0(x),\ u'(x,0)=u_1(x)\ x\in\mathbb{R}^n \end{array}\right. \tag{4.34}$$

$$u_0\in W,\ u_1\in V \tag{4.35}$$

Consideremos a energia de (4.34) dada por

$$E(t)=\frac{1}{2}\|u'(t)\|_{H}^{2}+\frac{1}{2}\|u(t)\|_{V}^{2} \tag{4.36}$$

Compondo a primeira equação de (4.34) por u' no produto interno de $((.,.))_H$ obtemos

$$E'(t)=-\gamma\|u'(t)\|_{H}^{2} \tag{4.37}$$

Recordemos que existe uma constante $R>0$ tal que

$$\|v\|_{H}\leq\frac{1}{R}\|v\|_{V},\ \forall v\in V \tag{4.38}$$

Para qualquer $\varepsilon>0$, definimos a energia perturbada

$$E_\varepsilon(t)=E(t)+\varepsilon Re\psi(t) \tag{4.39}$$

onde

$$\psi(t)=((u'(t),u(t)))_H \tag{4.40}$$

Proposição 4.1 *Existe $c_1>0$ tal que*

$$|E_\varepsilon(t)-E(t)|\leq\varepsilon c_1 E(t),\ \forall t\geq 0$$

Demonstração: Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, a Desigualdade de Young, (4.38) e (4.40), obtemos:

$$\begin{aligned}|Re\,\psi(t)| \leq |\psi(t)| = |((u'(t),u(t)))_{_H}| &\leq \|u'(t)\|_{_H}\|u(t)\|_{_H}\\ &\leq \frac{1}{R}\|u'(t)\|_{_H}\|u(t)\|_{_V}\\ &\leq \frac{1}{R}\left[\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2_{_H}+\frac{1}{2}\|u(t)\|^2_{_V}\right]\end{aligned}$$

isto é,

$$|Re\,\psi(t)| \leq \frac{1}{R}\,E(t) \tag{4.41}$$

De (4.39) obtemos

$$E_\varepsilon(t) - E(t) = \varepsilon Re\,\psi(t),$$

assim temos que

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| = \varepsilon|Re\psi(t)| \tag{4.42}$$

De (4.41) e (4.42) obtemos

$$|E_\varepsilon(t) - E(t)| \leq \varepsilon\frac{1}{R}E(t),\ \forall t \geq 0.$$

Concluímos a prova tomando $c_1 = R\dfrac{1}{R}$ ■

Proposição 4.2

$$E'_\varepsilon(t) \leq -\varepsilon E(t),\ \forall t \geq 0$$

onde $\varepsilon \in (0,\varepsilon_1]$ *tal que* ε_1 *é uma constante positiva.*

Demonstração: Derivando (4.40) obtemos

$$Re\,\psi'(t) = Re\,((u''(t),u(t)))_{_H} + \|u'(t)\|^2_{_H} \tag{4.43}$$

De (4.34) temos

$$u'' = \Delta u - \gamma u' \tag{4.44}$$

substiuindo (4.44) em (4.43) vem que

$$\begin{aligned}
\psi'(t) &= ((\Delta u(t) - \gamma u'(t), u(t)))_H + \|u'(t)\|_H^2 \\
&= ((\Delta u(t), u(t)))_H - \gamma((u'(t), u(t)))_H + \|u'(t)\|_H^2 \\
&= -((u(t), u(t)))_V - \gamma((u'(t), u(t)))_H + \|u'(t)\|_H^2 \\
&= -\|u(t)\|_V^2 - \gamma((u'(t), u(t)))_H + \|u'(t)\|_H^2.
\end{aligned}$$

Tomando a parte real, obtemos

$$Re(\psi'(t)) = -\|u(t)\|_V^2 - \gamma Re\left((u'(t), u(t))\right)_H + \|u'(t)\|_H^2. \tag{4.45}$$

Agora, vamos analisar o termo $I_1 = -\gamma Re\left((u'(t), u(t))\right)_H$.

$$I_1 \leq |I_1| = |-\gamma Re\left((u'(t), u(t))\right)_H| = \gamma |Re\left((u'(t), u(t))\right)_H| \leq \gamma |((u'(t), u(t)))_H|$$

$$\leq \gamma \|u'(t)\|_H \|u(t)\|_H \leq \gamma \frac{1}{R} \|u'(t)\|_H \|u(t)\|_V \leq \frac{\gamma^2}{2R^2} \|u'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_V^2,$$

isto é,

$$I_1 \leq \frac{\gamma^2}{2R^2} \|u'(t)\|_H^2 + \frac{1}{2} \|u(t)\|_V^2 \tag{4.46}$$

De (4.45) e (4.46), obtemos

$$Re(\psi'(t)) \leq -\frac{1}{2} \|u(t)\|_V^2 + \left(\frac{\gamma^2 + 2R^2}{2R^2} \right) \|u'(t)\|_H^2 \tag{4.47}$$

Derivando (4.39), obtemos

$$E'_\varepsilon(t) = E'(t) + \varepsilon Re(\psi'(t)) \tag{4.48}$$

De (4.37), (4.47) e (4.48), obtemos

$$
\begin{aligned}
E'_\varepsilon(t) &\le -\gamma\|u'(t)\|^2_{H} - \frac{\varepsilon}{2}\|u(t)\|^2_{V} + \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+2R^2}{2R^2}\right)\|u'(t)\|^2_{H}\\
&= -\gamma\|u'(t)\|^2_{H} - \frac{\varepsilon}{2}\|u(t)\|^2_{V} - \frac{\varepsilon}{2}\|u'(t)\|^2_{H} + \frac{\varepsilon}{2}\|u'(t)\|^2_{H} + \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+2R^2}{2R^2}\right)\|u'(t)\|^2_{H}\\
&= -\varepsilon E(t) - \gamma\|u'(t)\|^2_{H} + \frac{\varepsilon}{2}\|u'(t)\|^2_{H} + \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+2R^2}{2R^2}\right)\|u'(t)\|^2_{H}\\
&= -\varepsilon E(t) - \left[\gamma - \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+3R^2}{2R^2}\right)\right]\|u'(t)\|^2_{H}
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
E'_\varepsilon(t) \le -\varepsilon E(t) - \left[\gamma - \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+3R^2}{2R^2}\right)\right]\|u'(t)\|^2_{H} \tag{4.49}
$$

Finalmente, se escolhermos ε suficientemente pequeno tal que $\gamma - \varepsilon\left(\frac{\gamma^2+3R^2}{2R^2}\right) \ge 0$, concluímos a prova com $\varepsilon_1 = \frac{2\gamma R^2}{\gamma^2+3R^2}$. ∎

Proposição 4.3 (Decaimento Exponencial) *Se* $\varepsilon_0 = \min\left\{\frac{1}{2c_1}, \varepsilon_1\right\}$, *então*

$$
E(t) \le 3E(0)e^{-\frac{\varepsilon}{4}t}, \ \ \forall t \ge 0, \ \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].
$$

Demonstração: Pela Proposição 4.1 temos:

$$
(1 - c_1\varepsilon)E(t) \le E_\varepsilon(t) \le (1 + c_1\varepsilon)E(t).
$$

Mas, como $\varepsilon \le \varepsilon_0 \le \frac{1}{2c_1}$ temos

$$
\frac{1}{2}E(t) \le E_\varepsilon(t) \le \frac{3}{2}E(t) \le 2E(t), \ \forall t \ge 0. \tag{4.50}
$$

Observemos de (4.50) obtemos que $E_\varepsilon(t) \le 2E(t)$. Consequentemente:

$$
-\frac{\varepsilon}{2}E(t) \le -\frac{\varepsilon}{4}E_\varepsilon(t) \tag{4.51}
$$

Logo, de (4.51) e da Proposição 4.2 obtemos:

$$E_\varepsilon'(t) \leq -\varepsilon E(t) \leq -\frac{\varepsilon}{2}E(t) \leq -\frac{\varepsilon}{4}E_\varepsilon(t)$$

e, portanto

$$E_\varepsilon'(t) + \frac{\varepsilon}{4}E_\varepsilon(t) \leq 0. \tag{4.52}$$

Multiplicando (4.52) por $e^{\frac{\varepsilon}{4}t}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(E_\varepsilon(t)e^{\frac{\varepsilon}{4}t}\right) \leq 0.$$

Integrando a desigualdade acima sobre $[0,t]$ obtemos

$$E_\varepsilon(t) \leq E_\varepsilon(0)e^{-\frac{\varepsilon}{4}t}. \tag{4.53}$$

De (4.50) e (4.53) obtemos

$$\frac{1}{2}E(t) \leq \frac{3}{2}E(0)e^{-\frac{\varepsilon}{4}t},$$

daí segue-se que

$$E(t) \leq 3E(0)e^{-\frac{\varepsilon}{4}t},$$

como queríamos demonstrar. ■

Observação 4.1 *Por argumento de densidade, obtemos o mesmo resultado para soluções fracas.*

Bibliografia

[1] BJORLAND, C.; SCHONBEK, M. E.. Poincaré's Inequality and diffusive evolution equations. Advances In Differential Equations, v. 14 p. 241-260. 2009.

[2] BREZIS, H.. Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equation. New York: Spinger, 2010. 599 p.

[3] CARVALHO, A. N. Análise II-Notas de Aula do Primeiro Semestre de 2007. 22 de novembro de 2007.

[4] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N. Introdução à Teoria das Distribuição e aos Espaços de Sobolev. Maringá: Eduem, 2009. 452 p.

[5] CAVALCANTI, M. M.; DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.; KOMORNIK, V. Introdução à Análise Funcional. Maringá: Eduem, 2011. 481 p.

[6] DAUTRAY, R.; LIONS, J. L. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Techonology. Springer-Verlag. v.2, 1988

[7] HARAUX, A.; ZUAZUA, E.. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problem. Arch. Rational Mech. Anal. v. 100 , p.191-206, 1988.

[8] HONIG, C. S. Análise Funcional e Aplicações. São Paulo: São Paulo, 1970. 278 p.

[9] HUET, D. Décomposition Spectrale et Opérateurs. Universitaires de France. ed. 1, 1976.

[10] LINARES, F., PONCE G. Introduction to Nonlinear Dispersive Equations. IMPA: Rio de Janeiro, 2006.

[11] LIONS, J. L. Quelques Méthodes de Résolution des Problémes Aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, 1969.

[12] LIONS,J. L.; MAGENES, E. Problèmes aux Limites non Homogènes, Applications. Paris: Dunod. v 1, 1968

[13] MATOS, M. P. Integral de Bochner e Espaços $L^p(0;T;X)$, Notas de Aulas do Curso de Verão, UFPB, João Pessoa, 1998.

[14] MENZALA, G. P. On a Semilinear Wave Equation: The Cauchy Problem and Asymptotic Behavior of Solutions. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1983

[15] NUNES, R. S. O. Comportamento Assintótico e Controlabilidade Exata para a Equação de Klein-Gordon. 2013. 95 f. Tese (Doutorado) - Unesp, São José do Rio Preto, 2013.

[16] RODRIGUEZ, P. H. R. Introducción a la Teoria de las Distribuciones. UFRJ: Rio de Janeiro, 1974.