

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
(Mestrado)

KAMILA SEGATELLI MARIN

GEOMETRIA DE CURVAS PLANAS E
SINGULARIDADES DE CAMPOS VETORIAIS

Maringá-PR

2019

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE MARINGÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

GEOMETRIA DE CURVAS PLANAS E
SINGULARIDADES DE CAMPOS VETORIAIS

KAMILA SEGATELLI MARIN

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.
Área de concentração: Geometria e Topologia.

Orientadora: Prof^ª. Dr^ª. Maria Elenice Rodrigues
Hernandes.

Maringá-PR

2019

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Biblioteca Setorial BSE-DMA-UEM, Maringá, PR, Brasil)

M337g Marin, Kamila Segatelli
Geometria de curvas planas e singularidades de campos
vetoriais / Kamila Segatelli Marin. -- Maringá, 2019.
121 f. : il. color.

Orientadora: Prof^a. Dr^a. Maria Elenice Rodrigues Hernandes.
Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual de Maringá,
Centro de Ciências Exatas, Programa de Pós-Graduação em
Matemática - Área de Concentração: Geometria e Topologia, 2019.

1. Curvas planas. 2. Índice topológico. 3. Pontos duplos. 4.
Bitangências. 5. Inflexões e cúspides. 6. Plane curves. 7.
Topological index. 8. Double points. 9. Bitangencies. 10.
Inglections and cusps. I. Hernandes, Maria Elenice Rodrigues,
orient. II. Universidade Estadual de Maringá. Centro de Ciências
Exatas. Programa de Pós-Graduação em Matemática - Área de
Concentração: Geometria e Topologia. III. Título.

CDD 22.ed. 516.352
Edilson Damasio CRB9-1.123

KAMILA SEGATELLI MARIN

**GEOMETRIA DE CURVAS PLANAS E SINGULARIDADES DE CAMPOS
VETORIAIS**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Departamento de Matemática, Centro de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Maringá, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de Mestre em Matemática tendo a Comissão Julgadora composta pelos membros:

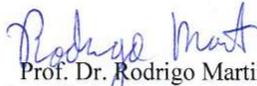
COMISSÃO JULGADORA:



Prof. Dra. Maria Elenice Rodrigues Hernandes
DMA/Universidade Estadual de Maringá (Presidente)



Prof. Dr. Fábio Scalco Dias
Universidade Federal de Itajubá



Prof. Dr. Rodrigo Martins
Universidade Estadual de Maringá

Aprovada em 12 de março de 2019.

Local de defesa: Auditório do DMA, Bloco F67, campus da Universidade Estadual de Maringá.

À minha família.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, pela força, ânimo, coragem, determinação, sabedoria e paciência que me concedeu para superar todas as dificuldades, durante esses anos de estudo, e pelas bênçãos de cada dia.

À minha família, que me apoiou e incentivou para que eu nunca desistisse dos meus sonhos, principalmente, a minha mãe, minha irmã e meu pai.

À minha grande amiga Amanda Stefani, por ter sido tão presente nos meus dias e ter compartilhado todos os momentos vividos, desde a graduação até o mestrado.

À todos os amigos que conheci, nesse tempo de estudos da pós-graduação, e que tive a oportunidade de compartilhar as dificuldades e aprimorar meus conhecimentos, por meio das reuniões que fazíamos para discutirmos sobre os conteúdos vistos em aula e tirarmos as dúvidas dos exercícios. Em especial, agradeço minhas amigas Katia, Mariana e Nágela pelo companheirismo que tivemos nesta caminhada.

Ao André Luís, por estar comigo mesmo distante e me ajudar a confiar que tudo daria certo.

Meus sinceros agradecimentos à todos os professores que contribuíram na minha formação e me deram forças para continuar quando eu mais precisei, em particular, a minha orientadora Maria Elenice, pela paciência, atenção e dedicação, no decorrer deste trabalho.

Por fim, agradeço à CAPES, pelo auxílio financeiro, que foi essencial para que eu pudesse me dedicar exclusivamente aos estudos.

*"Amei a sabedoria mais do que a saúde e a beleza
e resolvi tê-la como luz, porque o brilho dela
nunca se apaga."*

Sabedoria 7.10

Resumo

Neste trabalho, caracterizamos a geometria de uma determinada classe de curvas planas parametrizadas em \mathbb{R}^2 , por meio dos pontos singulares de campos vetoriais associados a estas curvas. Mais precisamente, provamos que os pontos duplos, ou bitangências, ou inflexões, ou cúspides de uma dada curva α , são pontos singulares de um campo F_α . Relacionamos o índice topológico de F_α com a quantidade de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides de α . No caso complexo, temos uma abordagem mais algébrica, obtendo uma relação entre a multiplicidade do campo F_α e o número de pontos duplos, bitangências e inflexões de uma deformação da curva α , tanto no caso local, quanto global. Também obtivemos relações entre invariantes bem conhecidos da teoria de singularidades, como o número de Milnor e a \mathcal{A}_e -codimensão, e os números de inflexões e bitangências de uma deformação da curva.

Palavras-chave: Curvas planas, índice topológico, pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides.

Abstract

In this work, we characterize the geometry of a certain class of parametrized plane curves in \mathbb{R}^2 , through the singular points of vector fields associated with these curves. More precisely, we prove that the double points, or bitangencies, or inflections, or cusps of a given curve α , are singular points of a vector field F_α . We relate the topological index of F_α , with the quantities of double points, bitangencies, inflections and cusps of α . In the complex case, with an algebraic approach, we obtain a relation among the multiplicity of the vector field F_α and the number of double points, bitangencies and inflections of a deformation of α , in the local and global case. We also obtain relations among well known invariants of singularity theory, as the Milnor number and \mathcal{A}_e -codimension, and the number of inflections and bitangencies of a deformation of the curve.

Keywords: Plane curves, topological index, double points, bitangencies, inflections and cusps.

SUMÁRIO

Introdução	10
1 Resultados Preliminares	16
1.1 Variedades Diferenciáveis	16
1.2 Grau de uma Aplicação	22
1.3 Campos Vetoriais e Índice de Poincaré-Hopf	28
1.4 Regra de Sinais de Descartes	35
2 Campos de Vetores e a Geometria de Curvas Planas Reais	37
2.1 Definições Gerais	37
2.2 Curvas Genéricas	47
2.3 Campo Vetorial associado às curvas Genéricas	48
2.4 Índice Topológico associado às singularidades de F_α	54
2.5 Curvas Monomiais e Índices Topológicos	61
3 Índice Topológico e Deformações Genéricas de Curvas	83
3.1 Deformações Genéricas	83
3.2 Índice Topológico - Deformações Genéricas	89
3.3 A Geometria das Deformações Genéricas de Curvas	92
4 Campos de Vetores e Germes de Curvas Planas Complexas	94

4.1	Germes de Aplicações	95
4.2	Teorema de Bézout	96
4.3	Índice de Interseção	97
4.4	Germes de Aplicações Finitas	100
4.5	Multiplicidade, Inflexões e Pontos Duplos de Deformações de Curvas Planas	101
4.6	Número de Milnor e \mathcal{A}_e -codimensão	112
	Bibliografia	118

INTRODUÇÃO

O estudo de curvas planas aparece na literatura desde a antiguidade. Na obra "Elementos", Euclides apresenta um sistema axiomático para a geometria englobando a noção de retas e suas posições. A teoria também é desenvolvida sob outros pontos de vista como o da Geometria Diferencial, que nos permite estudar suas propriedades locais e globais utilizando ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral.

Aplicações da teoria de curvas são encontradas na Física, por exemplo, relacionando evolutas de curvas singulares e sistemas óticos, como em [36], e descrevendo a dinâmica de uma partícula em movimento.

Na Matemática, uma das aplicações da teoria global de curvas planas é a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra (veja, por exemplo, [1]).

Outros estudos que foram desenvolvidos na Matemática, nos auxiliam na contagem de pontos que caracterizam a geometria de certas curvas. E é sob esse ponto de vista o foco deste trabalho. Conhecer um pouco mais a geometria de uma curva plana, através do conhecimento de seus pontos duplos, bitangências e inflexões, conforme ilustramos a seguir.

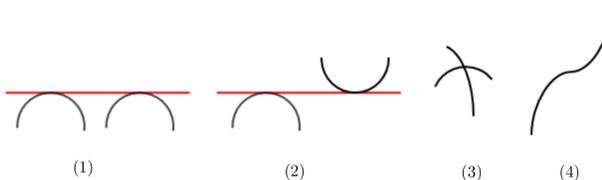


Figura 1: (1) bitangência de mesmo lado, (2) bitangência de lados opostos, (3) ponto duplo e (4) inflexão

Fabricsius-Bjerre em [14], num trabalho de 1962, considerou uma curva fechada no plano afim, isto é, $\alpha : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, diferenciável, orientada e composta por um número finito de arcos convexos que não se tocam um ao outro, ou seja, não são tangentes. Tais curvas deveriam ainda satisfazer as seguintes condições:

1. Nenhum ponto de uma bitangência de α é de inflexão;
2. α não possui tritangências;
3. α possui apenas pontos duplos transversais e não possui pontos triplos.

Nesse sentido, Fabricsius-Bjerre mostrou, de uma maneira bem geométrica, que para cada curva nestas condições, a diferença entre o número de bitangências de mesmo lado e o número de bitangências de lados opostos é igual a soma do número de pontos duplos com metade do número de inflexões, ou seja, denotando por t_s o número de bitangências de mesmo lado, t_o o número de bitangências de lados opostos, d o número de pontos duplos e i o número de inflexões, a relação descrita acima é dada por:

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2}. \quad (0.1)$$

A contagem desses pontos faz sentido porque o domínio das curvas é compacto, logo se esses pontos existem, são em número finito.

No ano de 1977, em [15], Fabricsius-Bjerre considerou uma nova classe de curvas, que além das três propriedades anteriores, possuíam cúspides do primeiro e segundo tipo, cujas quantidades denotou por c_1 e c_2 , respectivamente. E provou que:

$$t_s - t_o = d + \frac{i}{2} + c_1 + \frac{c_2}{2}.$$

Em 1970, Halpern provou a mesma relação (0.1) para curvas fechadas, continuamente diferenciáveis de ordem pelo menos 4, satisfazendo certas condições de regularidade. Na prova ele utiliza campos de vetores e números de rotação. Joel Weiner, em [35] do ano de 1987, chegou numa relação similar a (0.1), para uma classe de aplicações $\alpha : C \rightarrow S^2$, que são imersões de classe C^3 , de um círculo C na esfera unitária S^2 , chamadas de curvas fechadas esféricas. Nesse trabalho, além de t_s , t_o , d e i apareceu o

número de pares antipodais, denotado por a . Assim, a fórmula obtida por Weiner foi:

$$t_s - t_o = d - a + i.$$

Em 2011, uma fórmula semelhante a (0.1), foi provada por Dias e Mello, em [10]. No entanto, os autores consideraram uma classe de curvas suaves planas $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, com I um intervalo aberto de \mathbb{R} , satisfazendo três condições, similares às apresentadas em [14], entretanto exigindo a finitude do número de pontos duplos, bitangências e de inflexões, já que não estamos mais trabalhando com curvas fechadas. Neste trabalho, os autores definem um campo de vetores associado à curva α , e provam que os zeros do campo correspondem a pontos duplos, ou bitangências ou pontos de inflexão da curva. E ainda, eles calculam o índice de Poincaré-Hopf do campo em cada um de seus zeros, e obtêm uma fórmula entre o índice topológico do campo e os números t_s , t_o , d e i .

Em 2014, Dias, Sinha e Ruas consideraram, em [11], uma classe mais ampla de curvas planas suaves $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, que incluíam pontos de cúspide, denotada por $G(I, \mathbb{R}^2)$, satisfazendo quatro condições, a saber:

1. A curva α possui um número finito de pontos duplos que são todos transversais e não possui pontos triplos;
2. A curva α possui um número finito de bitangências, todas regulares, e não possui tritangências;
3. A curva α possui um número finito de inflexões ordinárias;
4. A curva α possui um número finito de cúspides do primeiro e segundo tipo.

Para as curvas $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ que são deformações genéricas de certas curvas monomiais da forma $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, eles demonstraram uma relação entre os números de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides de α , que varia de acordo com a paridade de k e m .

Nesta dissertação, tivemos como referência principal o artigo [11]. Nosso objetivo foi desenvolver um estudo das curvas $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$, para chegar na relação entre seus pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides. Para isso, foi importante definirmos

o Índice de Poincaré-Hopf de uma singularidade isolada de campos vetoriais contínuos, uma vez que, a cada curva $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ associamos um campo vetorial, denotado por F_α , cujas singularidades caracterizam a geometria de α .

Assim que iniciamos o estudo deste tema, como foco desta dissertação, tomamos conhecimento que este assunto já tinha sido explorado, no trabalho de dissertação de mestrado em [3]. Assim, com o intuito de contribuir de algum modo, e talvez numa vertente ligeiramente diferente da explorada em [3], focamos apenas nos artigos [10] e [11]. Apresentamos neste trabalho, diversos exemplos, com os cálculos efetivos do campo de vetores associado a cada curva. Diversos esboços de curvas e seus respectivos campos, para auxiliar no cálculo, por exemplo, do índice topológico. Apresentamos uma prova um pouco diferente do Theorem 3.5 de [10]. Neste teorema, os autores utilizam uma fórmula conhecida como fórmula de Bendixson para o cálculo do índice topológico do campo. Neste resultado, utilizamos a mesma análise do sinal das coordenadas do campo em [10], mas calculamos o índice pela definição, utilizando a aplicação de Gauss. Uma prova mais longa, mas talvez mais acessível ao leitor que não tem o conhecimento do que são setores elípticos e hiperbólicos de um campo de vetores. No estudo de germes de curvas complexas, os autores em [11] apresentam uma desigualdade, entre o número de inflexões e bitangências de uma deformação da curva α e a \mathcal{A}_e -codimensão de α . Neste trabalho, apresentamos uma igualdade entre os objetos acima citados, introduzindo um invariante analítico, muito estudado principalmente, na classificação analítica de curvas planas.

No Capítulo 1, apresentamos os conceitos necessários à compreensão deste trabalho. De maneira geral, a partir da noção de grau de uma aplicação, definimos o índice de um campo vetorial contínuo e enunciamos resultados que envolvem campos vetoriais contínuos sobre variedades diferenciáveis. Em particular, exibimos uma definição equivalente de índice para campos vetoriais em \mathbb{R}^2 , sendo esta de caráter puramente geométrico. Por fim, fizemos um breve estudo sobre raízes de polinômios, cujo resultado mais importante é a Regra de Sinais de Descartes, que nos dá informações sobre a quantidade de raízes positivas de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$. Esse resultado foi fortemente aplicado na Seção 2.3 do Capítulo 2, para provarmos a existência de zeros isolados para campos vetoriais e analisarmos o comportamento desses campos em uma vizinhança de suas singularidades.

Iniciamos o Capítulo 2, com a definição de curva plana suave e de alguns pontos especiais que a caracterizam, como os pontos duplos, as bitangências, as inflexões e as cúspides. Esses pontos foram essenciais para definirmos uma classe especial de curvas planas suaves, que chamamos de curvas genéricas e denotamos por $G(I, \mathbb{R}^2)$. Nessa classe, exigimos que tais pontos fossem em número finito a fim de conseguirmos contá-los. Em seguida, a cada curva $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$, associamos um campo vetorial F_α .

Nesse sentido, provamos que as singularidades de F_α caracterizam a geometria de α . E mais, demonstramos que o índice topológico de F_α pode ser escrito em função dos números de pontos duplos (d), bitangências de mesmo lado (t_s), bitangências de lados opostos (t_o), inflexões (i), cúspides do primeiro tipo (c_1) e cúspides do segundo tipo (c_2) de α , à saber: $\text{ind}(F_\alpha) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2$. Por fim, definimos uma classe de curvas monomiais da forma $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ e calculamos o índice topológico dos campos F_β associado a elas, usando basicamente a definição geométrica do Índice de Poincaré-Hopf para campos de vetores em \mathbb{R}^2 .

No Capítulo 3, apresentamos um dos resultados principais deste trabalho. Para tanto, consideramos a classe de curvas monomiais $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ e definimos que uma curva $\gamma \in G(I, \mathbb{R}^2)$ é uma deformação genérica de β , quando existe uma homotopia $H : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre β e γ , e um compacto K contendo todas as singularidades dos campos associados às curvas da homotopia. Uma vez que, sob certas condições, o índice topológico é invariante por homotopia, demonstramos a invariância do índice topológico por deformações genéricas, ou seja, se $\gamma_1, \gamma_2 \in G(I, \mathbb{R}^2)$ são deformações genéricas de β , então $\text{ind}(F_{\gamma_1}) = \text{ind}(F_\beta) = \text{ind}(F_{\gamma_2})$. Entretanto, verificamos em exemplos que o número de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides que aparecem em γ_1 e γ_2 podem não coincidir.

Finalizamos este capítulo provando um dos principais resultados deste trabalho, Teorema 3.3.1, que estabelece uma relação entre as quantidades dos pontos que caracterizam a geometria das deformações genéricas de β , dependendo da paridade de k e m , ou seja, as fórmulas envolvendo d, i, t_s, t_o, i, c_1 e c_2 . Essas relações fazem analogia aquela estudada por Fabricius-Bjerre, em [15].

No Capítulo 4, tomando como referência principal o artigo [11], estudamos germes de curvas planas complexas irredutíveis, definindo o número de pontos duplos, inflexões e bitangências de uma deformação da curva, de um ponto de vista puramente

algébrico, tanto no caso local, quanto global. Verificamos que é possível relacionar os números dos pontos em questão, com a multiplicidade de um dado germe. E mais, apresentamos uma fórmula envolvendo o número de Milnor e os números de inflexões (I) e bitangências (T) de uma deformação da curva. Em [11], os autores apresentam uma desigualdade envolvendo I , T e a \mathcal{A}_e -codimensão da curva α , ou mais precisamente,

$$I(I - 1) - 2T \geq 2\mathcal{A}_e - \text{cod}(\alpha). \quad (0.2)$$

Tal desigualdade foi obtida em [11] através de uma relação envolvendo o número de Milnor da imagem, definida por D. Mond, e a \mathcal{A}_e -codimensão. Neste trabalho, escolhemos obter (0.2) utilizando um invariante chamado número de Tjurina. Uma vantagem desta abordagem é que, na verdade, é possível obter uma igualdade entre os referidos elementos, tendo o conhecimento de um novo invariante analítico, que não vai ser explorado neste trabalho, mas que tem sido foco de muita pesquisa no estudo de germes curvas planas complexas.

CAPÍTULO 1

RESULTADOS PRELIMINARES

Neste capítulo apresentamos alguns conceitos que serão utilizados durante este trabalho. Sem perda alguma, pode-se iniciar a leitura desta dissertação pelo segundo capítulo, e recorrer aos resultados preliminares gradativamente, a cada novo conceito introduzido. De maneira geral, definimos índice de um campo vetorial contínuo e enunciamos resultados que envolvem campos vetoriais contínuos sobre variedades diferenciáveis. Em particular, exibimos uma definição equivalente de índice para campos vetoriais em \mathbb{R}^2 . Por fim, fizemos um breve estudo sobre raízes de polinômios, cujo resultado mais importante é a Regra de Sinais de Descartes, que nos dá informações sobre a quantidade de raízes positivas de um polinômio em $\mathbb{R}[x]$.

1.1 Variedades Diferenciáveis

Nessa seção, apresentamos o conceito de variedades diferenciáveis e alguns resultados necessários para introduzirmos o conceito de grau de uma aplicação entre variedades. As demonstrações dos resultados expostos aqui serão omitidas. Para mais detalhes consulte [24], [25], [26], [27] e [28].

Definição 1.1.1. *Seja M um espaço topológico. Um sistema de coordenadas locais ou uma carta em M é um homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$, de um subconjunto $U \subset M$ sobre um aberto*

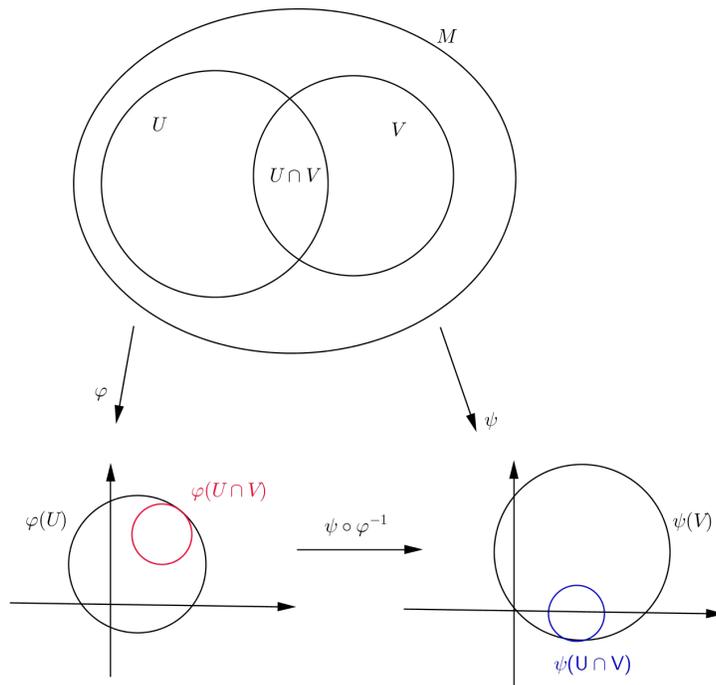
$\varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$.

Definição 1.1.2. Um atlas \mathcal{U} , m -dimensional, de um espaço topológico M é uma família $\{\varphi_i, U_i\}_{i \in \Delta}$ de coordenadas locais $\varphi_i : U_i \rightarrow \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^m$, onde U_i é um aberto de M , tal $\cup_{i \in \Delta} U_i$ cubram M .

Definição 1.1.3. Dados os sistemas de coordenadas locais $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ e $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^m$ no espaço topológico M , tais que $U \cap V \neq \emptyset$, então o homeomorfismo $\phi_{\varphi, \psi} = \psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é chamado de mudança de coordenadas.

Um atlas \mathcal{U} é dito de classe C^k se todas as mudanças $\phi_{\varphi, \psi}$ são C^k .

Veja uma ilustração dessa definição:



Definição 1.1.4. Um espaço topológico X chama-se um espaço de Hausdorff (ou espaço separado), quando dado dois pontos distintos arbitrários $x, y \in X$, existem abertos $A, B \subset X$ tais que $x \in A, y \in B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Definição 1.1.5. Uma variedade diferenciável m -dimensional de classe C^k , é um par (M, \mathcal{U}) , em que M é um espaço topológico Hausdorff com base enumerável e \mathcal{U} é um atlas m -dimensional de classe C^k .

Então uma variedade m -dimensional é um espaço topológico localmente homeomorfo ao \mathbb{R}^m , isto é, existe uma cobertura aberta $\{U_i\}_{i \in \Delta}$ de M e para todo $i \in \Delta$, existem aplicações da forma $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ que levam cada U_i homeomorficamente sobre um aberto de \mathbb{R}^m .

Neste trabalho, vamos considerar variedades sem bordo.

Vale ressaltar que em um atlas diferenciável \mathcal{U} , todas as mudanças de coordenadas $\phi_{\varphi, \psi}$ são difeomorfismos.

Definição 1.1.6. *Sejam M e N variedades diferenciáveis de classe C^k com dimensões m e n , respectivamente. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ é:*

1. diferenciável em $x \in M$ se, dada uma parametrização $\varphi : V \rightarrow \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$, com $V \subset N$ contendo $f(x)$ existir uma parametrização $\psi : U \rightarrow \psi(U) \subset \mathbb{R}^m$, com $x \in U \subset M$ tal que $f(U) \subset V$ e a aplicação

$$\varphi \circ f \circ \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \varphi(V) \quad (1.1)$$

é diferenciável em $\psi(x)$. Quando f é diferenciável em todos os elementos de M dizemos que f é diferenciável.

2. de classe C^l , $l \leq k$ se existirem cartas tais que a aplicação dada em (1.1) é de classe C^l .

A aplicação em (1.1) é denominada, expressão local de f nas parametrizações ψ e φ .

A seguir definimos o conceito de espaço tangente à uma variedade diferenciável em um ponto.

Daqui em diante consideramos em \mathbb{R}^m a base canônica $\beta = \{e_1, \dots, e_m\}$.

Sabemos que o vetor velocidade de uma curva $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ é $v = \alpha'(0) = (x'_1(0), \dots, x'_m(0))$, onde $x_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ são as funções coordenadas de α . Fixado $p \in \mathbb{R}^m$, o espaço tangente a \mathbb{R}^m em p , denotado por $T_p\mathbb{R}^m$, pode ser definido como o conjunto $\{\alpha'(0); \forall \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ tal que } \alpha(0) = p\}$. E nesse caso é possível verificar que $T_p\mathbb{R}^m$ coincide com \mathbb{R}^m .

Uma outra forma de pensarmos em $T_p\mathbb{R}^m$ é a seguinte:

Considere

$$D_p(\mathbb{R}^m) = \{f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável em } p\}.$$

Associe cada vetor tangente $v = \alpha'(0)$ com uma função definida por

$$\begin{aligned} \alpha'(0) &: D_p(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial v}(p). \end{aligned}$$

Definimos $T_p\mathbb{R}^m$ como o conjunto de todas as funções $\alpha'(0)$. Logo, $T_p\mathbb{R}^m$ é um \mathbb{R} -espaço vetorial e uma base para ele é $B = \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\}$, onde

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p &: D_p(\mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R} \\ f &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \end{aligned}$$

com $i = 1, 2, \dots, m$. Ou seja, $T_p\mathbb{R}^m$ possui uma identificação natural com \mathbb{R}^m .

Utilizando a mesma ideia, definimos espaço tangente à variedades.

Considere M uma variedade diferenciável m -dimensional, e $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável em M com $\alpha(0) = p \in M$. Considere o conjunto

$$D_p(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ é diferenciável em } p\}.$$

O vetor tangente α em $t = 0$ é $\alpha'(0) : D_p(M) \rightarrow \mathbb{R}$, dado por $\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0}$.

Um vetor tangente a M em p é o vetor tangente, em $t = 0$, à alguma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ com $\alpha(0) = p$.

O conjunto de todos os vetores tangente a M em p , denotado por T_pM , é um espaço vetorial.

Seja $\varphi : U \rightarrow M$ uma parametrização de M em p com $\varphi(0) = p$. Dadas $f \in D_p(M)$ e uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, com $\alpha(0) = p$, podemos escrever

$$\bar{f}(x_1, \dots, x_m) = f \circ \varphi^{-1}(x_1, \dots, x_m)$$

e $\bar{\alpha}(t) = \varphi \circ \alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$, em que $\bar{f} : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ e $\bar{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^m$, de forma que $Im\bar{\alpha}|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \subset U$.

Então $\bar{f} \circ \bar{\alpha}(t) = \bar{f}(x_1(t), \dots, x_m(t))$ e

$$\alpha'(0)f = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)|_{t=0} = \frac{d}{dt}(\bar{f} \circ \bar{\alpha})|_{t=0} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(0)x'_i(0)$$

é a derivada direcional de \bar{f} na direção de $v = (x'_1(0), \dots, x'_m(0)) \in \mathbb{R}^m$ no ponto $0 \in \mathbb{R}^m$.

Denote por $\alpha'_i(0) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right)$ o vetor tangente em p , à curva coordenada $\alpha_i : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ dada por $\alpha_i(t) = \varphi^{-1}(te_i)$. Nesse caso, $\alpha'_i(0)f$ é a i -ésima derivada parcial de \bar{f} no ponto $0 \in \mathbb{R}^m$, assim

$$\alpha'(0)f = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_i}(0)x'_i(0) = \sum_{i=1}^m (\alpha'_i(0)f)x'_i(0) = \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right)_0 f.$$

É possível verificar que $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right)_0\right\}_{i=1}^m$ é um conjunto linearmente independente. Logo, fixada uma carta φ , o vetor tangente $\alpha'(0)$ pode ser escrito de modo único como

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^m x'_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\right)_0,$$

dependendo apenas das coordenadas da derivada de $\bar{\alpha}$ em 0 . Disso, concluímos que $T_p M$ é um \mathbb{R} -espaço vetorial de dimensão m e uma base para este espaço é o conjunto $\left\{\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_1}\right)_0, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_m}\right)_0\right\}$.

Essa base é denominada **base associada à parametrização** φ e $T_p M$ é chamado de **espaço tangente a M em p** .

Observação 1.1.7. No caso de \mathbb{R}^m temos que $T_q \mathbb{R}^m$ coincide com \mathbb{R}^m e pensamos, de maneira natural, na diferencial de $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Proposição 1.1.8. Considere M e N variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente, e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dados $x \in M$ e $v \in T_x M$, escolha uma curva diferenciável $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ tal que $\alpha(0) = x$ e $\alpha'(0) = v$. Defina $\beta := f \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow N$. Então, β é uma curva diferenciável em N e $\beta(0) = f(\alpha(0)) = f(x)$. Além disso, o vetor $\beta'(0)$ não depende da escolha de α .

Definição 1.1.9. A aplicação $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ dada por $df_x(v) = \beta'(0)$ é chamada diferencial de f em x .

Definição 1.1.10. Sejam M uma variedade diferenciável m -dimensional, N uma variedade diferenciável n -dimensional e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dizemos que:

1. f é uma **imersão** em p , se a aplicação diferencial df_p é injetiva ($m \leq n$) em $p \in M$, isto é, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a m .

2. f é uma **submersão** em p , se a aplicação diferencial df_p é sobrejetora ($m \geq n$) em $p \in M$, isto é, o posto da matriz jacobiana $[Jf(p)]_{n \times m}$ é igual a n .

Se em $p \in M$ a aplicação $f : M \rightarrow N$ for uma submersão, p é dito ponto regular de f . Um ponto $q \in N$ é chamado valor regular de f se sua imagem inversa $f^{-1}(q)$ só contém pontos regulares.

Se em $p \in M$ a aplicação $f : M \rightarrow N$ não é submersão nem imersão, dizemos que p é **ponto singular** de f e $f(p)$ é valor singular de f .

Teorema 1.1.11. (Teorema de Sard) Seja $f : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 , o subconjunto formado pelos valores regulares de f é denso em N .

Demonstração. A prova desse resultado pode ser encontrada em [24]. □

Teorema 1.1.12. Sejam N uma variedade diferenciável n -dimensional, P uma variedade diferenciável r -dimensional, $f : N \rightarrow P$ uma aplicação diferenciável e p um valor regular de f . Então, $f^{-1}(p)$ é vazio ou é uma subvariedade diferenciável $(n - r)$ -dimensional de N . Mais ainda, dado $q \in M$ temos que $T_q M = \ker(df_q)$.

Para a demonstração deste teorema veja, por exemplo, [27], Proposição 1, e [24], Theorem 3.2.

Sabendo o que é o espaço tangente a uma variedade em um determinado ponto é possível definir fibrado tangente.

Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k , m -dimensional com $k \geq 2$.

Considere o conjunto

$$TM = \{(x, v); x \in M \text{ e } v \in T_x M\} = \bigcup_{x \in M} \{x\} \times T_x M$$

e a aplicação $\pi : TM \rightarrow M$ dada por $\pi(x, v) = x$.

Proposição 1.1.13. O conjunto TM admite um atlas que o torna uma variedade diferenciável de classe C^{k-1} , dimensão $2m$ e orientável. E com essa estrutura a aplicação π é uma submersão. Nessas condições, TM é chamado de **fibrado tangente** de M .

Observação 1.1.14. Sendo π submersão, todo ponto $x \in M$ é valor regular de π . Daí, cada $\pi^{-1}(x) = \{x\} \times T_x M$ é uma subvariedade de dimensão m de TM . E mais, cada variedade $\{x\} \times T_x M$ é difeomorfa a \mathbb{R}^m . Logo, TM é dito um **fibrado vetorial**.

1.2 Grau de uma Aplicação

Nesta seção apresentamos o conceito de grau de uma aplicação, com o intuito de definirmos o Índice de Poincaré-Hopf de um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável. Para mais detalhes sobre esta seção veja [8], [24] e [25].

Um conceito importante neste trabalho é o de grau de uma aplicação. Para tanto, vamos introduzir uma noção de orientação de um espaço vetorial V , definindo uma orientação no conjunto das bases ordenadas de V .

Seja V um K -espaço vetorial, com K um corpo. Dizemos que as bases ordenadas β e β' de V têm a mesma orientação, se o determinante da matriz mudança de base $[I]_{\beta'}^{\beta}$ é positivo. Essa relação entre as bases de V é uma relação de equivalência, que particiona o conjunto das bases ordenadas de V em duas classes de equivalência. Cada classe é dita uma orientação de V .

Definição 1.2.1. *Um espaço vetorial orientado V é um par, formado pelo espaço vetorial V e uma orientação de V . As bases de V que pertencem a essa orientação, são ditas bases positivas e as demais bases negativas.*

Definição 1.2.2. *Sejam V e W dois espaços vetoriais n -dimensionais e orientados, se $T : V \rightarrow W$ é um isomorfismo de V em W , dizemos que T preserva a orientação se T leva base positiva de V em base positiva de W , ou se leva base negativa de V em base negativa de W . Caso contrário, diremos que T inverte a orientação. Quando um isomorfismo entre espaços vetoriais de mesma dimensão preserva a orientação, dizemos que o isomorfismo é positivo, se inverte a orientação dizemos que é negativo.*

Definição 1.2.3. *Sejam M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dados um valor regular $p \in N$ de f e os pontos regulares $q \in f^{-1}(p)$, dizemos que q é positivo se o isomorfismo $df_q : T_qM \rightarrow T_pN$ preserva a orientação e é negativo se o mesmo isomorfismo inverte a orientação.*

Definição 1.2.4. *Sejam X e Y espaços topológicos localmente compactos. Dizemos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria, quando dado um subconjunto compacto K de Y , a sua imagem inversa $f^{-1}(K)$ é um subconjunto compacto de X .*

É conhecido da literatura que um espaço topológico Hausdorff X é localmente compacto se, e somente se, cada ponto $x \in X$ admite pelo menos uma vizinhança

compacta. Sabemos que imagem de compacto por uma aplicação contínua ainda é um compacto. Dado que as variedades diferenciáveis são espaços topológicos Hausdorff, e suas cartas locais são homeomorfismos, concluímos que tais variedades são espaços topológicos localmente compactos.

O próximo resultado nos fornece uma classe de aplicações próprias.

Proposição 1.2.5. *Se X é um espaço topológico compacto e Y é um espaço topológico localmente compacto Hausdorff, então toda aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é própria.*

O resultado abaixo, nos garante que o conjunto dos valores regulares de uma dada $f : M \rightarrow N$ é aberto em N (veja [8]).

Proposição 1.2.6. *Sejam M e N variedades diferenciáveis n -dimensionais e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Então, o subconjunto R de N formado por todos os valores regulares de f é aberto em N .*

Observação 1.2.7. *Sejam M e N variedades diferenciáveis orientadas n -dimensionais e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Como N é espaço Hausdorff, dado $p \in N$ temos que $K = \{p\}$ é compacto em N e como f é própria, $f^{-1}(p)$ é um compacto de M . Se p for valor regular de f , segue do Teorema 1.1.12, que $f^{-1}(p)$ é subvariedade 0-dimensional de M , ou seja, em $f^{-1}(p)$ há uma quantidade finita de pontos.*

Da Observação 1.2.7 faz sentido a seguinte definição:

Definição 1.2.8. *Sejam M e N variedades diferenciáveis n -dimensionais orientadas e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável própria. Dado $p \in N$ um valor regular de f , o grau de f , relativamente ao valor regular p , é o número algébrico de pontos em $f^{-1}(p)$, ou seja, o número de pontos positivos menos o número de pontos negativos em $f^{-1}(p)$. Denotamos o grau de f relativamente a p como $gr(f, p)$.*

Em outras palavras,

$$gr(f, p) = \sum_{x \in f^{-1}(p)} gr_x(f),$$

em que $gr_x(f) = 1$, se x é ponto positivo e $gr_x(f) = -1$, se x é ponto negativo em $f^{-1}(p)$. Definimos que se $f^{-1}(p) = \emptyset$, então $gr(f, p) = 0$.

Se M, N são variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 é possível provar que o grau de f independe do valor regular $p \in N$. Mais precisamente:

Teorema 1.2.9. *Sejam M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 . Então o grau de f independe do valor regular $p \in N$.*

Veja a prova desse resultado em [8] e [24].

Em [8], encontramos exemplos que ilustram que as condições de N ser conexa e f ser própria são importantes. Em um exemplo, $f : M \rightarrow N$ é própria de classe C^1 , com N não conexa, outro que N é conexa com f não sendo própria e outro que M é uma variedade com bordo. Em todos eles, o grau de f assume diferentes valores, dependendo do valor regular de N .

Com isso podemos definir:

Definição 1.2.10. *Dadas M e N variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas, com N conexa e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação própria de classe C^1 , chamamos de **grau de f** o número $gr(f) = gr(f, p)$, onde p é um valor regular qualquer de f .*

Teorema 1.2.11. *Sejam M, N e P variedades diferenciáveis, n -dimensionais orientadas, com N e P conexas. Consideremos $f : M \rightarrow N$ e $g : N \rightarrow P$ aplicações próprias de classe C^1 , então $gr(g \circ f) = gr(g) \cdot gr(f)$.*

Agora vamos definir homotopia, pois enunciamos um resultado que garante a invariância do grau de uma aplicação por homotopia.

Definição 1.2.12. *Sejam X e Y espaços topológicos, dizemos que duas aplicações contínuas $f, g : X \rightarrow Y$ são homotópicas quando existe uma aplicação contínua*

$$H : X \times I \rightarrow Y,$$

com $I = [0, 1]$ tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$. A aplicação H é chamada de homotopia entre f e g .

Escrevemos $f \simeq g$ para dizer que f é homotópica a g .

Teorema 1.2.13. *Sejam M e N variedades diferenciáveis compactas, então toda aplicação contínua $f : M \rightarrow N$ é homotópica a uma aplicação $g : M \rightarrow N$ de classe C^1 .*

Demonstração. Veja [24] e [25].

□

Teorema 1.2.14. *Sejam M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais, orientadas, com M compacta e $f, g : M \rightarrow N$ aplicações próprias de classe C^1 que admitem mesmo ponto $p \in N$ como valor regular. Se f é homotópica a g então $gr_p(f) = gr_p(g)$.*

Logo, faz sentido definirmos grau de uma aplicação contínua como segue:

Definição 1.2.15. *Sejam M, N variedades diferenciáveis n -dimensionais, compactas e orientadas. Considere $f : M \rightarrow N$ uma aplicação contínua e $g : M \rightarrow N$ uma aplicação de classe C^1 , homotópica a f . Definimos o grau de f , como sendo o grau da aplicação g .*

Vamos definir o conceito de grau local de uma aplicação.

Definição 1.2.16. *Sejam X e Y espaços topológicos, dizemos que uma aplicação contínua $f : X \rightarrow Y$ é uma equivalência homotópica quando existe uma aplicação $g : Y \rightarrow X$ tal que $g \circ f \simeq id : X \rightarrow X$ e $f \circ g \simeq id : Y \rightarrow Y$. Neste caso, dizemos que g é uma equivalência inversa de f e os espaços topológicos X e Y têm o mesmo tipo de homotopia.*

Exemplo 1.2.17. *Dado um ponto $a \in \mathbb{R}^n$, seja $\overline{B_\varepsilon(a)}$ a bola fechada de centro a e raio $\varepsilon > 0$ em \mathbb{R}^n . Então, $\overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$ e a esfera unitária S^{n-1} têm o mesmo tipo de homotopia.*

De fato, sejam as aplicações contínuas $\rho : \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \rightarrow S^{n-1}$ e $j : S^{n-1} \rightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$ dadas por $\rho(x) = \frac{x-a}{\|x-a\|}$ e $j(y) = a + \varepsilon y$. Note que $\rho \circ j = id : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$ e $j \circ \rho \simeq id : \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \rightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$, considerando a homotopia $H : \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \times I \rightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$ dada por:

$$H(x, t) = (1 - t) \left(a + \varepsilon \frac{x - a}{\|x - a\|} \right) + tx.$$

Observe ainda que, pelo Teorema 1.2.11, $gr(j \circ \rho) = gr(id) = 1$. Analogamente, para $\rho \circ j$.

Definição 1.2.18. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto, $a \in U$, $b \in \mathbb{R}^n$ e $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua. Consideremos $\overline{B_\varepsilon(a)} \subset U$ e as aplicações $j : S^{n-1} \rightarrow \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$, $\rho : \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\} \rightarrow S^{n-1}$ dadas por $j(x) = a + \varepsilon x$ e $\rho(y) = \frac{y-a}{\|y-a\|}$ com $x \in S^{n-1}$ e $y \in \overline{B_\varepsilon(a)} \setminus \{a\}$. Definimos o **grau local** da aplicação f em a , denotado por $\gamma_a(f)$, como sendo o grau da aplicação $\rho \circ f \circ j : S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$, ou seja, $\gamma_a(f) = gr(\rho \circ f \circ j)$.*

Observe que pela Proposição 1.2.5, $\rho \circ f \circ j$ é própria. Se essa aplicação for de classe C^1 está bem definido seu grau. Se for apenas contínua, pelo Teorema 1.2.13, $\rho \circ f \circ j$ é homotópica a uma aplicação g de classe C^1 e assim, pela definição 1.2.15, também é possível o cálculo do seu grau.

O conceito de grau local está bem definido, uma vez que, pelo Teorema 1.2.11 e pelo exemplo acima

$$\begin{aligned} gr(\rho \circ f \circ j) &= gr(\rho)gr(f)gr(j) \\ &= gr(\rho)gr(j)gr(f) \\ &= gr(\rho \circ j)gr(f) \\ &= gr(f). \end{aligned}$$

Vamos verificar abaixo que o grau local de f não depende da escolha da bola $\overline{B_\varepsilon(a)}$, e que se $f, g : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ são homotópicas, então $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$.

Observação 1.2.19. 1. O grau local $\gamma_a(f)$ depende somente do comportamento de f numa vizinhança arbitrariamente pequena do ponto a . Isto é, se $U, V \subset \mathbb{R}^n$ são abertos contendo a , e $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, $g : V \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ são aplicações contínuas tais que $f|_W = g|_W$, onde W é um aberto de \mathbb{R}^n satisfazendo $W \subset U \cap V$, então $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$. Para isto, na definição de grau local basta tomarmos a bola fechada \overline{B} tão pequena de modo que $\overline{B} \subset W$ e usá-la para calcular $\gamma_a(f)$ e $\gamma_a(g)$.

2. Se $f \simeq g : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$, então $\gamma_a(f) = \gamma_a(g)$. De fato, temos $f \simeq g : \overline{B} \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $\rho \circ f \circ j \simeq \rho \circ g \circ j$ e daí $\gamma_a(f) = gr(\rho \circ f \circ j) = gr(\rho \circ g \circ j) = \gamma_a(g)$.

Vejamos algumas propriedades e exemplos que vão nos auxiliar no cálculo do grau local.

Teorema 1.2.20. Sejam U e V subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n . Consideremos três pontos $a, b, c \in \mathbb{R}^n$, tais que a e b estejam contidos em U e V , respectivamente. Consideremos ainda, $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ e $g : V \setminus \{b\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{c\}$ aplicações contínuas, com $f(U \setminus \{a\}) \subset V \setminus \{b\}$. Então, $\gamma_a(g \circ f) = \gamma_b(g) \cdot \gamma_a(f)$.

Corolário 1.2.21. Sejam U, V e W subconjuntos abertos de \mathbb{R}^n e os pontos $a \in W \subset U$, $b \in V$. Consideremos $f : U \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ uma aplicação contínua. Se f aplica $W \setminus \{a\}$ homeomorficamente sobre $V \setminus \{b\}$, então $\gamma_a(f) = \pm 1$.

Demonstração. Consideremos a aplicação contínua $f_* = f|_{W \setminus \{a\}}$ e f_*^{-1} a sua inversa. Pelo Teorema 1.2.20 temos $\gamma_a(Id) = \gamma_a(f_*^{-1} \circ f_*) = \gamma_a(f_*) \cdot \gamma_b(f_*^{-1})$. Como $\gamma_a(Id) = \pm 1$ concluímos que $\gamma_a(f) = \pm 1$. \square

Exemplo 1.2.22. Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação linear invertível, então $f(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mostremos que

$$\gamma_0(f) = \begin{cases} 1, & \text{se } \det[(f)] > 0 \\ -1, & \text{se } \det[(f)] < 0, \end{cases}$$

onde (f) denota a matriz de f numa dada base.

Se $\det[(f)] > 0$, então f pertence à componente conexa da identidade em $Gl(n, \mathbb{R})$, logo existe uma aplicação contínua $\alpha : [0, 1] \rightarrow Gl(n, \mathbb{R})$ definida por $\alpha(t) = f_t$, com $f_0 = f$ e $f_1 = id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Cada aplicação linear f_t é invertível e tal que $f_t(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, assim, considerando a aplicação contínua $F : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, com $F(x, t) = f_t(x)$ obtemos $f \simeq id : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, logo $\gamma_0(f) = 1$. Por outro lado, se $\det[(f)] < 0$, considerando $\lambda : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ a reflexão relativamente ao hiperplano $x_n = 0$, isto é, $\lambda(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_n)$ obtemos que $\gamma_0(\lambda) = -1$. Como $\det[(\lambda \circ f)] > 0$ temos

$$1 = \gamma_0(\lambda \circ f) = \gamma_0(\lambda)\gamma_0(f) = -\gamma_0(f).$$

Portanto, $\gamma_0(f) = -1$.

Um resultado importante envolvendo o grau local de f é o seguinte:

Proposição 1.2.23. Sejam $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação diferenciável, um ponto $a \in U \subset \mathbb{R}^n$ e $b = f(a)$. Suponhamos que $f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^n \setminus \{b\}$ e admitamos que a aplicação linear $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ seja invertível. Então, $\gamma_a(f) = 1$, se o determinante jacobiano $\det(df_a) > 0$ e $\gamma_a(f) = -1$, se $\det(df_a) < 0$.

Demonstração. Por hipótese, temos que a aplicação linear $df_a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, portanto df_a é bijetora, ou seja, um isomorfismo. Assim, f aplica homeomorficamente uma vizinhança do ponto a sobre uma vizinhança do ponto b e pelo Corolário 1.2.21 temos que $\gamma_a(f) = \pm 1$.

Para utilizarmos o Exemplo 1.2.22 basta mostrarmos que $\gamma_a(f) = \gamma_0(df_a)$ onde $df_a : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Sem perda de generalidade suponhamos $a = 0$ e $f(a) = 0$. Seja

$$i = \inf\{\|df_a(u)\|; u \in \mathbb{R}, \|u\| = 1\}. \quad (1.2)$$

Mostremos que $i > 0$. Como a norma euclideana é sempre maior ou igual a zero,

suponhamos que $i = 0$. Então, dado $\epsilon = \frac{1}{n} > 0$ existe $u_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com $\|u_n\| = 1$ e $\|df_a(u_n)\| < \frac{1}{n}$. Nesse caso, teríamos a sequência $\{\|df_a(u_n)\|\}$ convergindo para 0 e por consequência $\{df_a(u_n)\}$ também convergiria para 0. Como f é uma aplicação de classe C^1 segue que $u_n \rightarrow 0$, mas isto é um absurdo, pois $\|u_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $i > 0$.

Numa vizinhança de 0, escrevemos $f(x) = df_a(x) + \theta(x)$, onde $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\|\theta(x)\|}{\|x\|} \right) = 0$. Logo, quaisquer que sejam $x \in W \setminus \{0\}$ e $0 \leq t \leq 1$,

$$\begin{aligned} (1-t)f(x) + tdf_a(x) &= f(x) - tf(x) + tdf_a(x) \\ &= df_a(x) + \theta(x) - t(df_a(x) + \theta(x)) + tdf_a(x) \\ &= (1-t)df_a(x) + (1-t)\theta(x) + tdf_a(x) \\ &= \|x\| \left(\frac{df_a(x)}{\|x\|} + \frac{(1-t)\theta(x)}{\|x\|} \right) \\ &= \|x\| \left(df_a \left(\frac{x}{\|x\|} \right) + (1-t) \frac{\theta(x)}{\|x\|} \right) \neq 0, \end{aligned}$$

pois $\frac{x}{\|x\|}$ é unitário e por (1.2) $i > 0$. Logo, $(1-t)f(x) + tdf_a(x) \neq 0$.

E portanto definimos uma homotopia $F : (W \setminus \{0\}) \times I \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$ entre f e df_a , como $F(x, t) = (1-t)f(x) + tdf_a(x)$.

Logo, $\gamma_0(f) = \gamma_0(df_a)$, conforme o determinante jacobiano de f seja positivo ou negativo. \square

1.3 Campos Vetoriais e Índice de Poincaré-Hopf

Nesta seção estudamos campos vetoriais, a fim de definirmos o Índice de Poincaré-Hopf de campos vetoriais contínuos definidos em variedades diferenciáveis. Além disso, apresentamos uma definição de caráter geométrico para o Índice de Poincaré-Hopf de campos vetoriais contínuos em \mathbb{R}^2 . A partir daí, definimos índice topológico de campos de vetores que é um conceito relevante no desenvolvimento deste trabalho, uma vez que, um dos objetivos dessa dissertação é relacioná-lo com a geometria de uma curva plana.

Definição 1.3.1. Dado um subconjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, um campo de vetores em U é uma

aplicação $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ que associa cada $(x_1, \dots, x_n) \in U$ ao elemento

$$v(x_1, \dots, x_n) = (v_1(x_1, \dots, x_n), \dots, v_n(x_1, \dots, x_n)).$$

Definição 1.3.2. *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $v : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de vetores. Dizemos que um ponto $p \in U$ é uma singularidade de campo (ou um ponto crítico) se $v(p) = (0, \dots, 0)$. Quando p não é crítico dizemos que p é regular.*

Muitas vezes é conveniente considerarmos um campo v , como uma aplicação da forma $v : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ dada por $v(x) = (x, v(x))$. Por exemplo, quando queremos associar a cada posição x , uma velocidade $v(x)$.

Nosso objetivo agora é definir campos vetoriais, sobre quaisquer variedades diferenciáveis.

Definição 1.3.3. *Seja M uma variedade diferenciável de classe C^k , $k \geq 2$ e $U \subset M$ um aberto. Um campo de vetores sobre M é uma aplicação $v : U \subset M \rightarrow TM$ tal que $\pi(v(x)) = x$. O campo de vetores é diferenciável (contínuo), se $v : U \subset M \rightarrow TM$ for uma aplicação diferenciável (contínua).*

De maneira geral, um campo de vetores v sobre M é uma correspondência $v(x) = (x, v_x)$ em que $v_x \in T_x M$, para cada $x \in U \subset M$. Por meio de cartas locais escrevemos v nas coordenadas do espaço tangente como segue:

Seja $v : U \subset M \rightarrow TM$ um campo vetorial, $p \in U$ e $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow M$ uma carta em M com $\varphi(q) = p$. Escolha $\psi : V \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM$ a carta dada por $\psi(u, w) = (\varphi(u), d\varphi_u(w))$. A expressão de v nessas cartas é dada por

$$\begin{aligned} \psi^{-1} \circ v \circ \varphi(q) &= \psi^{-1}(\varphi(q), v_{\varphi(q)}) \\ &= (\varphi^{-1}(\varphi(q)), (d\varphi_q)^{-1}(v_{\varphi(q)})) \\ &= (q, (d\varphi_q)^{-1}(v_{\varphi(q)})) \\ &= (q, \tilde{a}_1(v_{\varphi(q)}), \dots, \tilde{a}_m(v_{\varphi(q)})). \end{aligned}$$

Defina para cada i , a aplicação $a_i : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ por $a_i(x) = \tilde{a}_i(v_{\varphi(x)})$ e denote por $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ o campo $f(x) = (a_1(x), \dots, a_m(x))$.

Assim a expressão local de v em p é dada por $(q, f(q))$, uma vez que $(d\varphi_q)^{-1}(v_{\varphi(q)}) =$

$(a_1(q), \dots, a_m(q))$, e deste modo obtemos

$$v_{\varphi(q)} = d\varphi_q(a_1(q), \dots, a_m(q)) = \sum_{i=1}^m a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_q.$$

Portanto,

$$v_p = \sum_{i=1}^m a_i(q) \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i} \right)_q, \quad (1.3)$$

onde $\varphi(q) = p$.

Assim, o campo v é diferenciável (contínuo) se, e somente se, as funções a_i são diferenciáveis (contínuas). E quando v é escrito como em (1.3), dizemos que v está escrito em coordenadas locais ou definido localmente.

Exemplo 1.3.4. 1. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y) = (-y, x)$. A aplicação f define localmente um campo sobre S^1 . De fato, basta definir $v : S^1 \rightarrow TS^1$ como $v(x, y) = ((x, y), f(x, y))$.

2. Seja $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $g(x, y, z) = (y + z, -x + z, -x - y)$. Temos que g define localmente um campo sobre S^2 , pois para cada $(x, y, z) \in S^2$ podemos escrever $v(x, y, z) = ((x, y, z), g(x, y, z))$, onde $(y + z, -x + z, -x - y) \in T_{(x, y, z)}S^2$.

Definição 1.3.5. Se $p \in M$ é uma singularidade do campo v , e se existe uma vizinhança U de M tal que p é a única singularidade do campo v , então p é chamada singularidade isolada de v .

Agora considere $v : U \subset M \rightarrow TM$ um campo de vetores contínuo definido sobre uma variedade diferenciável de dimensão m . Seja p uma singularidade isolada de v em U e W uma vizinhança de p tal que v_p se anula, mas $v_q \neq 0$ para todo $q \in W - \{p\}$. Sabemos que, para cada $q \in W$ e cada parametrização $\varphi : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow W$ de M em q , o campo v é escrito na base de T_qM como em (1.3). Assim, a aplicação $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, dada pelas coordenadas do campo nessa base, é contínua. E ainda, como p é a única singularidade de v em W , segue que $f(u) = 0 \in \mathbb{R}^m$ apenas para $u = \varphi^{-1}(p)$, logo $f(V - \{\varphi^{-1}(p)\}) \subset \mathbb{R}^m - \{0\}$.

Definição 1.3.6. Sejam v um campo vetorial contínuo sobre uma variedade diferenciável m -dimensional orientada M , $p \in M$ uma singularidade isolada de v e $\varphi : U \rightarrow W$ uma carta de M , com W uma vizinhança de p e U um aberto de \mathbb{R}^m . Consideremos $a = \varphi^{-1}(p) \in U$ e $f(U \setminus \{a\}) \subset \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ a aplicação contínua na base de T_pM como acima. O **Índice de**

Poincaré-Hopf de v em p é o grau local $\gamma_a(f)$ da aplicação f em a . Tal índice é denotado por $Ind_{PH}(v, p)$.

Exemplo 1.3.7. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial dado por $F(u, v) = (-u^2 - 2uv - 1, v^2 + 2uv + 1)$.

Observe que somando as equações do sistema associado ao campo

$$\begin{cases} -u^2 - 2uv - 1 = 0 \\ v^2 + 2uv + 1 = 0, \end{cases}$$

obtemos $v^2 - u^2 = 0$, ou seja, $v = \pm u$. Então, substituindo $v = u$ na primeira equação, segue que $-3v^2 = 1$, o que é um absurdo. Agora, fazendo o mesmo para $v = -u$, concluímos que $v^2 - 1 = 0$, isto é, $v = \pm 1$. Logo, as singularidades de F são $(u, v) = (1, -1)$ e $(u, v) = (-1, 1)$. Veja que a matriz jacobiana de F é a seguinte:

$$JF(u, v) = \begin{bmatrix} -2u - 2v & -2u \\ 2v & 2v + 2u \end{bmatrix}.$$

Como $\det(JF(1, -1)) = \det(JF(-1, 1)) = -4 < 0$, a diferencial de F é um isomorfismo nestes pontos, então pela Proposição 1.2.23, $Ind_{PH}(F, (1, -1)) = Ind_{PH}(F, (-1, 1)) = -1$.

Em particular, considerando $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo, definido em um aberto U de \mathbb{R}^2 e $p \in U$ uma singularidade isolada de v em U , o cálculo do Índice de Poincaré-Hopf de v em p se reduz ao cálculo do grau da aplicação $\gamma : S_\epsilon \rightarrow S^1$ definida por $\gamma(x) = \frac{v(x)}{\|v(x)\|}$, onde $S_\epsilon \subset U$ é uma circunferência de centro p e raio ϵ e S^1 é a circunferência de centro $v(p)$ e raio 1. Essa aplicação é chamada de **aplicação de Gauss**, e ela desempenha o mesmo papel da aplicação $\rho \circ f \circ j$, definida na seção anterior, já que o grau local não depende da bola em torno do ponto. Visto que, γ é contínua e tem domínio e contradomínio compacto, segue da Proposição 1.2.5, que γ é uma aplicação própria e assim seu grau está bem definido.

É possível dar uma definição de caráter puramente geométrico para o grau de γ . Para tanto vamos definir orientação de circunferências.

Definição 1.3.8. Seja S_ϵ uma circunferência de raio ϵ em \mathbb{R}^2 . Definimos o sentido positivo de S_ϵ , como sendo o sentido anti-horário de S_ϵ , e o sentido negativo será dado pelo sentido horário de S_ϵ .

Definição 1.3.9. Considere um subconjunto aberto U de \mathbb{R}^2 e $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo, com uma singularidade isolada p . Tomando o sentido anti-horário como referência, dizemos que γ percorre S^1 positivamente, se quando v percorre S_ϵ no sentido anti-horário, γ percorre S^1 no sentido anti-horário. Se enquanto v percorre S_ϵ no sentido anti-horário, γ percorre S^1 no sentido horário, dizemos que γ percorre S^1 negativamente.

Definição 1.3.10. Considere um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$ e $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores contínuo em U , com uma singularidade isolada p . Seja S_ϵ uma pequena circunferência centrada em p de raio ϵ . O **Índice de Poincaré-Hopf** de v em p , $Ind_{PH}(v, p)$, é o número de voltas positivas, menos o número de voltas negativas, que a aplicação de Gauss γ faz em torno de S^1 , quando v percorre toda a circunferência S_ϵ .

No entanto, o número de voltas positivas menos o número de voltas negativas, que a aplicação γ faz em torno de S^1 , quando v percorre toda a circunferência S_ϵ , é o grau de γ em p . Observe que o número de voltas positivas ou negativas da aplicação de Gauss, é o número de pontos positivos ou negativos em $f^{-1}(q)$, onde $q \in S^1$ é um valor regular de f , que é a representação local do campo.

Definição 1.3.11. Sejam U um aberto de \mathbb{R}^2 e $v : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial contínuo com um número finito de singularidades p_1, \dots, p_k . O **índice topológico** de v , denotado por $ind(v)$, é definido como

$$ind(v) = \sum_{j=1}^k Ind_{PH}(v, p_j).$$

Como o Índice de Poincaré-Hopf de v em cada p_j é o grau da aplicação de Gauss, podemos reescrever o índice topológico da Definição 1.3.11 da seguinte forma:

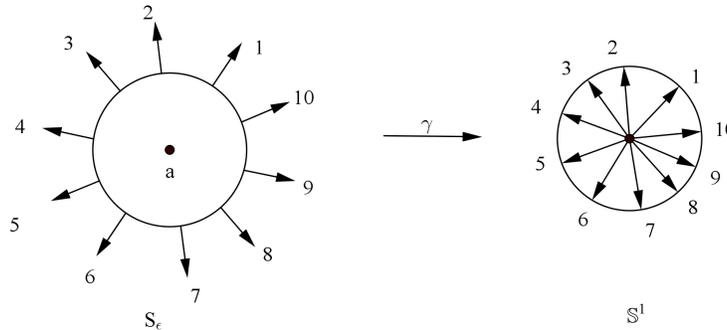
$$ind(v) = \sum_{j=1}^k gr(\gamma_j), \quad (1.4)$$

em que γ_j é a aplicação de Gauss, definida numa circunferência suficientemente pequena de centro p_j .

Apesar do índice topológico ter sido definido acima, apenas para campos no plano, este pode ser naturalmente definido para variedades, como soma dos índices de Poincaré-Hopf em cada ponto singular, conforme a Definição 1.3.6.

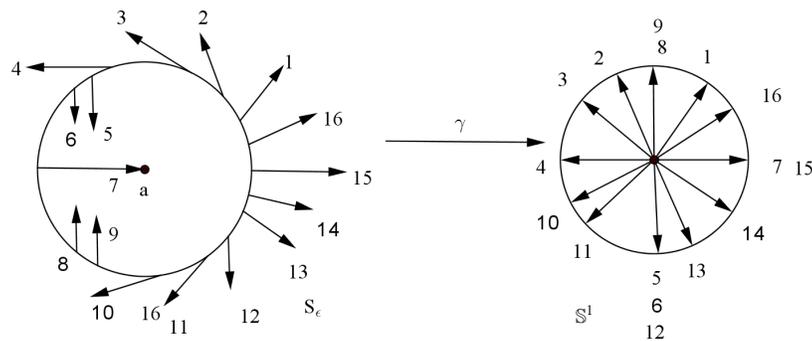
Exemplo 1.3.12. Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de vetores dado por $v(x, y) = (x, y)$, cuja única singularidade é $a = (0, 0)$. Vamos calcular o Índice de Poincaré-Hopf de v em a , utili-

zando a representação geométrica deste campo. Observe que a imagem da aplicação de Gauss é, simplesmente, dispor os vetores em torno da singularidade a , em S^1 , respeitando a direção e o sentido.



Note que, enquanto a aplicação de Gauss γ percorre S^1 no sentido anti-horário, v percorre S_ϵ no sentido anti-horário. Assim, γ percorre S^1 positivamente. Logo, γ dá uma volta positiva em torno de S^1 , enquanto v percorre toda a circunferência S_ϵ , e então, $Ind_{PH}(v, a) = 1$. Como v possui uma única singularidade, concluímos que $ind(v) = 1$.

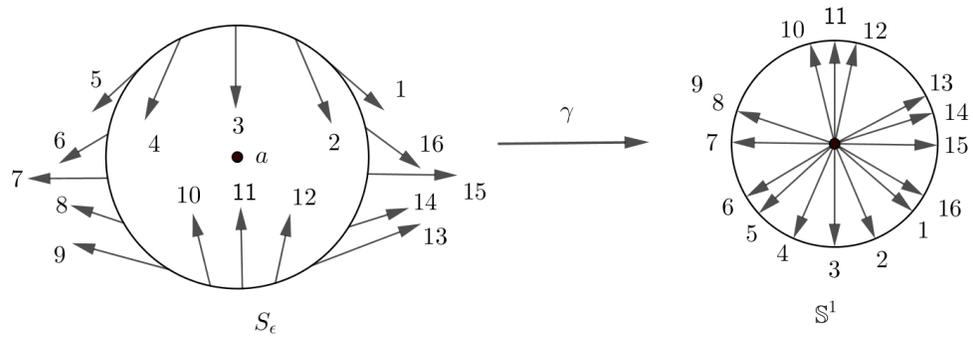
Exemplo 1.3.13. Considere um campo de vetores contínuo, com uma singularidade isolada no ponto a , representado geometricamente abaixo:



Nesse caso, temos que γ percorre S^1 no sentido anti-horário, enquanto v percorre S_ϵ no sentido anti-horário e então γ percorre S^1 positivamente. No entanto, γ dá duas voltas positivas em torno de S^1 enquanto v percorre uma vez a circunferência S_ϵ . Então $ind(v) = Ind_{PH}(v, a) = 2$.

Exemplo 1.3.14. Neste exemplo, temos um caso em que o Índice de Poincaré-Hopf é negativo. Seja $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por $v(x, y) = (x, -y)$ um campo de vetores contínuo, com uma singularidade isolada no ponto $a = (0, 0)$.

Como γ percorre S^1 no sentido horário, enquanto v percorre S_ϵ no sentido anti-horário, temos que γ percorre S^1 negativamente. E pelo fato de γ dar uma volta negativa em torno de S^1 ,



enquanto v dá uma volta completa em S_ϵ , obtemos que $\text{Ind}_{PH}(v, a) = -1$. Consequentemente, $\text{ind}(v) = -1$.

Exemplo 1.3.15. Seja $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, como no Exemplo 1.3.7, dado por:

$$F(u, v) = (-u^2 - 2uv - 1, v^2 + 2uv + 1).$$

A representação geométrica do campo F no plano cartesiano é a seguinte:

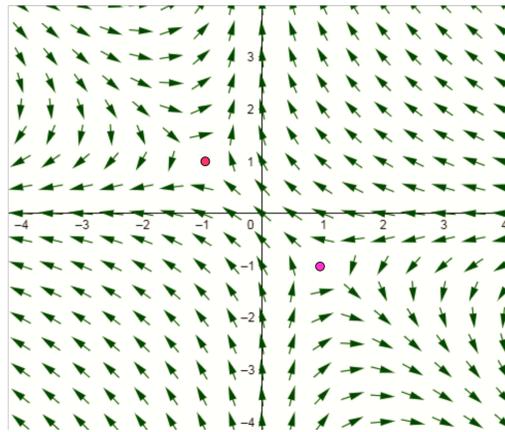


Figura 1.1: Representação de F no plano

Vimos que as singularidades de F são $a = (-1, 1)$ e $b = (1, -1)$. Tome uma pequena circunferência em torno de cada singularidade desse campo. Pela Definição 1.3.10, $\text{Ind}_{PH}(F, a) = \text{Ind}_{PH}(F, b) = -1$ que coincide com o obtido no Exemplo 1.3.7. Esses pontos são conhecidos na literatura como pontos de sela, ver por exemplo, [4].

Portanto, pela Definição 1.3.11, $\text{ind}(F) = \text{Ind}_{PH}(F, a) + \text{Ind}_{PH}(F, b) = -2$.

Segue do Teorema 1.2.14 e da Observação 1.2.19 que o índice topológico é invariante por homotopia. Mais precisamente:

Proposição 1.3.16. *Sejam M e N variedades diferenciáveis n – dimensionais orientadas e sem bordo, com M compacta e N conexa. Se $f, g : M \rightarrow N$ são homotópicas, então $\text{ind}(f) = \text{ind}(g)$.*

1.4 Regra de Sinais de Descartes

René-Descartes na obra *La Géométrie* (A Geometria), publicado em 1637, como apêndice do *Discours de la Méthode* (Discurso do Método), aborda problemas da geometria plana, e resoluções por meio de construções geométricas. Nesse sentido, ele faz um estudo das raízes de equações e dá uma interpretação geométrica a elas. Nesta seção, temos por objetivo, apresentar um resultado de sua obra, conhecido como Regra de Sinais de Descartes. Este resultado nos fornece um limitante superior para a quantidade de raízes positivas de polinômios. Omitimos as demonstrações para não perdermos o foco desta dissertação, porém para mais detalhes consulte [6], [9] e [34].

Para o que segue considere uma função polinomial (ou simplesmente um polinômio) na variável x ,

$$p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \cdots + a_nx^{b_n}, \quad (1.5)$$

com a_0, \dots, a_n reais não nulos e b_0, b_1, \dots, b_n satisfazendo $0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_n$.

Definição 1.4.1. *Quando $p(x) = (x - x_1)^{m_1}q(x)$, em que $q(x)$ é um polinômio de grau menor que o grau de $p(x)$ e $q(x_1) \neq 0$, dizemos que x_1 é uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade m_1 .*

Lema 1.4.2. *Sejam $x_1 < x_2 < \cdots < x_k$ as raízes de um polinômio $p(x)$, com multiplicidades iguais a m_1, m_2, \dots, m_k , respectivamente. Então, x_1, x_2, \dots, x_k também são raízes da derivada de p , denotada por $p'(x)$, com multiplicidades $m_1 - 1, m_2 - 1, \dots, m_k - 1$, respectivamente.*

Observação 1.4.3. *Se $m_i = 1$ então x_i não é raiz de $p'(x)$.*

Denote por $m_s(p)$, o número de mudanças de sinais em termos consecutivos da sequência dos coeficientes a_0, \dots, a_n , e por $m(p)$, o número de raízes positivas de $p(x)$ contando as multiplicidades. Note que $m(p)$ é também a soma das multiplicidades de cada raiz positiva de $p(x)$.

Exemplo 1.4.4. *O polinômio $p(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$ possui duas raízes positivas de multiplicidade 1, e duas mudanças de sinais em termos consecutivos da sequência dos coeficientes 2, -1, -2, 1. Logo $m(p) = 2$ e $m_s(p) = 2$.*

Veja que $h(x) = -9x + 15x^2 - 7x^3 + x^4 = x(x-3)^2(x-1)$ é um polinômio que possui duas raízes positivas, sendo uma delas de multiplicidade 2 e a outra de multiplicidade 1. Além disso, há três mudanças de sinais em termos consecutivos na sequência dos coeficientes $-9, 15, -7, 1$, de h . Então, $m(h) = 3$ e $m_s(h) = 3$.

Lema 1.4.5. Considere $p(x)$ como em (1.5).

1. Se $a_0 a_n < 0$, então $m(p)$ é ímpar.
2. Se $a_0 a_n > 0$, então $m(p)$ é par.

Teorema 1.4.6. (Regra de Sinais de Descartes) Considere $p(x)$ um polinômio como em (1.5). Então, o número de raízes positivas de $p(x)$ (contando as multiplicidades) é menor ou igual à quantidade de mudança de sinais na sequência de coeficientes a_0, \dots, a_n . Além disso, a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e a quantidade de raízes positivas de $p(x)$ é um número par.

Portanto, pela Regra de Sinais de Descartes, $m(p) \leq m_s(p)$ e $m_s(p) - m(p)$ é um número par.

Exemplo 1.4.7. Seja $p(x) = 2 - x - 2x^2 + x^3$. No Exemplo 1.4.4, vimos que $m_s(p) = m(p) = 2$ donde $m_s(p) - m(p) = 0$ é um número par.

Exemplo 1.4.8. Considere $p(x) = -x^5 + x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$.

Nesse caso $m_s(p) = 5$, então, pela Regra de Sinais de Descartes, $m(p) \leq 5$.

Uma vez que $p(x) = -(x-1)(x^4 + x^2 + 1)$ e $x^4 + x^2 + 1$ não admite raiz real, temos que a única raiz real de $p(x)$ é $x = 1$. Consequentemente, $m(p) = 1$ e $m_s(p) - m(p) = 4$ é um número par.

A Regra de Sinais de Descartes, também nos diz que o número de raízes negativas de $p(x)$ (contando as multiplicidades) é menor ou igual à quantidade de mudança de sinais na sequência dos coeficientes de $p(-x)$. E a diferença entre a quantidade de mudança de sinais e de raízes negativas é um número par.

O Teorema 1.4.6 será aplicado nas demonstrações da Seção 2.3 do Capítulo 2. Utilizando esse teorema, provamos a existência de zeros isolados para certos campos vetoriais, bem como a configuração geométrica desses campos em uma vizinhança de suas singularidades.

CAPÍTULO 2

CAMPOS DE VETORES E A GEOMETRIA DE CURVAS PLANAS REAIS

Neste capítulo, definimos curvas planas suaves e determinados pontos especiais que nos auxiliam na compreensão da geometria de tais curvas. Dada uma curva, pertencente a classe especial de curvas, chamadas curvas genéricas, definimos um campo vetorial, cujos zeros correspondem aos pontos duplos, ou bitangências, ou inflexões, ou cúspides da curva. Provamos ainda, que a cada curva genérica, o índice topológico do seu campo associado, pode ser escrito em função dos números de inflexões, bitangências, pontos duplos e cúspides da curva. Por fim, calculamos o índice topológico do campo de vetores associado às curvas monomiais.

2.1 Definições Gerais

Nessa seção apresentamos as definições mais gerais, envolvendo as propriedades locais das curvas planas suaves e nos baseamos em [1] e [5]. Além disso, estudamos a geometria de uma classe especial de curvas planas suaves, conforme [11]. Para algumas demonstrações, utilizamos o artigo [10], pois nele os autores estudaram curvas com três propriedades semelhantes das curvas descritas em [11].

Definição 2.1.1. *Uma curva plana parametrizada suave é uma aplicação $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, de classe C^∞ , definida num intervalo $I \subset \mathbb{R}$. A imagem de α é chamada de traço.*

Vale ressaltar que, a aplicação α dada por $\alpha(u) = (x(u), y(u))$ é C^∞ , se cada função coordenada $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ .

Definição 2.1.2. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $\alpha(u) = (x(u), y(u))$, uma curva plana parametrizada suave. O vetor tangente a α no ponto $t_0 \in I$ é dado por $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.*

Definição 2.1.3. *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana parametrizada suave. Dizemos que α é regular em $t_0 \in I$, se $\alpha'(t_0) \neq (0, 0)$. Caso contrário, α é dita singular em $t_0 \in I$ e t_0 é um ponto singular de α . Se α for regular para todo $t \in I$, dizemos que α é regular.*

Nas definições a seguir, consideramos $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva plana suave. Vamos definir uma classe de pontos especiais de α , que nos auxiliam na caracterização da geometria da curva.

Definição 2.1.4. *Uma **bitangência de** α é um par (u, v) de pontos $u, v \in I$, tais que a reta tangente à α em u coincide com a reta tangente à curva α em v . Dizemos que uma bitangência (u, v) é de mesmo lado, se existem vizinhanças de $\alpha(u)$ e $\alpha(v)$, tais que $\alpha(I)$ pertence a um mesmo lado da reta tangente comum. Caso contrário, a bitangência (u, v) é chamada de bitangência de lados opostos.*

Definição 2.1.5. *Uma **tritangência de** α é uma tripla (u, v, w) de pontos $u, v, w \in I$, tais que a reta tangente à α em u, v e w coincidem.*

Definição 2.1.6. *Um **ponto duplo de** α é um par de pontos (u, v) com $u, v \in I$ distintos, tais que $\alpha(u) = \alpha(v)$.*

Definição 2.1.7. *Um **ponto triplo de** α é uma tripla (u, v, w) de pontos $u, v, w \in I$, tais que $\alpha(u) = \alpha(v) = \alpha(w)$.*

Definição 2.1.8. *Um ponto regular $u \in I$ é dito um **ponto de inflexão** de α , se a curvatura $k_\alpha(u)$ de α em u é igual a zero, ou seja,*

$$k_\alpha(u) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{\|\alpha'(u)\|^3} = 0,$$

em que $\|\alpha'(u)\| = \sqrt{\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle}$, com \langle, \rangle o produto interno canônico em \mathbb{R}^2 .

Na Figura 2.1 temos o traço de curvas quaisquer que ilustram a imagem de uma bitangência, de um ponto duplo e de uma inflexão.

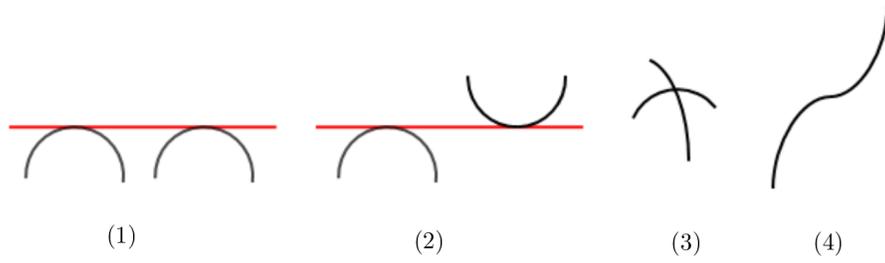


Figura 2.1: (1) bitangência de mesmo lado, (2) bitangência de lados opostos, (3) ponto duplo e (4) inflexão

Observe que se $u \in I$ é uma inflexão de α , então $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 0$. Derivando a função curvatura temos:

$$\begin{aligned} k'_\alpha(u) &= \frac{\|\alpha'(u)\|^3 [\det(\alpha'(u), \alpha''(u))]' - \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) (\|\alpha'(u)\|^3)'}{\|\alpha'(u)\|^6} \\ &= \frac{[\det(\alpha'(u), \alpha''(u))]'}{\|\alpha'(u)\|^2} \end{aligned}$$

em que

$$\begin{aligned} [\det(\alpha'(u), \alpha''(u))] &= [x'(u)y''(u) - x''(u)y'(u)]' \\ &= x''(u)y''(u) + x'(u)y'''(u) - x'''(u)y'(u) - x''(u)y''(u) \\ &= \det(\alpha'(u), \alpha'''(u)). \end{aligned}$$

Definição 2.1.9. Seja $u \in I$ uma inflexão de α . Quando $\alpha'(u)$ não é múltiplo de $\alpha'''(u)$, isto é, $\det(\alpha'(u), \alpha'''(u)) \neq 0$, ($k'_\alpha(u) \neq 0$), dizemos que u é uma inflexão ordinária.

Definição 2.1.10. Seja (u, v) uma bitangência de α . Se u e v não são pontos de inflexão, dizemos que a bitangência é regular.

Definição 2.1.11. Seja (u, v) um ponto duplo de α . Dizemos que (u, v) é um ponto duplo transversal, quando $\alpha'(u)$ não é múltiplo de $\alpha'(v)$, isto é, quando $\det(\alpha'(u), \alpha'(v)) \neq 0$.

Exemplo 2.1.12. Seja $\alpha(u) = (u, \sin(u))$ com $u \in (0, 2.86\pi)$.

Note que $\alpha'(u) = (1, \cos(u)) \neq (0, 0)$, portanto α é uma curva regular.

Para $u_0 = \frac{\pi}{2}$ temos $\alpha(u_0) = (\frac{\pi}{2}, 1)$ e $\alpha'(u_0) = (1, 0)$. E para $v_0 = \frac{5\pi}{2}$ temos $\alpha(v_0) = (\frac{5\pi}{2}, 1)$ e $\alpha'(v_0) = (1, 0)$. Uma vez que $\alpha'(u_0)$ é paralelo a $\alpha'(v_0)$, obtemos que a reta tangente à α em u_0 e a reta tangente à α em v_0 são paralelas e suas equações são dadas, respectivamente, por $r_{\alpha(u_0)}(t) = (\frac{\pi}{2}, 1) + t(1, 0)$ e $r_{\alpha(v_0)}(\lambda) = (\frac{5\pi}{2}, 1) + \lambda(1, 0)$, com $t, \lambda \in \mathbb{R}$.

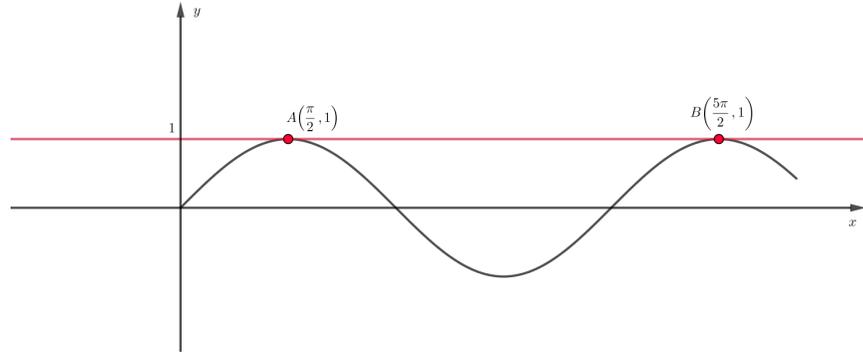


Figura 2.2: $\alpha(u) = (u, \text{sen}(u))$

Tomando $t = 2\pi$ é possível concluir que $(\frac{5\pi}{2}, 1)$ pertence a ambas as retas. Portanto, elas são paralelas coincidentes. Assim $(u_0, v_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2})$ é uma bitangência de α de mesmo lado. Tal bitangência é regular, pois u e v não são inflexões. De fato,

$$k_{\alpha}(u) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{\|\alpha'(u)\|^3} = \frac{\det((1, \cos(u)), (0, -\text{sen}(u)))}{\|(1, \cos(u))\|^3} = -\frac{\text{sen}(u)}{|\text{sen}(u)|^3},$$

então $k_{\alpha}(u_0) = k_{\alpha}(v_0) = -1 \neq 0$.

Agora para $u = \pi$ segue que $\alpha'(\pi) = (1, -1)$ e $\alpha''(\pi) = (0, 0)$, donde $k_{\alpha}(\pi) = 0$ e $u = \pi$ é uma inflexão. E esta é uma inflexão ordinária, já que $\alpha'(\pi)$ não é múltiplo de $\alpha'''(\pi) = (0, 1)$.

Podemos observar também, que α não possui pontos duplos, pois $\alpha(u) = \alpha(v)$ se, e somente se, $u = v$. No entanto, ponto duplo é um par de pontos distintos do domínio de α , tal que $\alpha(u) = \alpha(v)$.

Exemplo 2.1.13. Considere $\alpha(u) = (u, -u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u)$ com $u \in (-1, 2)$.

Observe que a segunda coordenada de α pode ser escrita como:

$$-u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u = -u(-u^2 + u + 1)^2.$$

Então, $-u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u = 0$ se, e somente se, $-u(-u^2 + u + 1)^2 = 0$, que acontece se, e somente se, $u = 0$, $u = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Sejam $u_0 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ e $v_0 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Temos que $\alpha(u_0) = (\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0)$ e $\alpha(v_0) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0)$.

Note que $\alpha'(u) = (1, -5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1)$, ou seja, α é uma curva regular.

Uma vez que $-5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1 = (-u^2 + u + 1)(5u^2 - 3u - 1)$ segue que u_0 e v_0 são raízes do polinômio $-5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1$. Assim, $\alpha'(u_0) = (1, 0) = \alpha'(v_0)$.

Sejam $r_{\alpha(u_0)}$ e $r_{\alpha(v_0)}$ as equações das retas tangentes a α em u_0 e em v_0 , respectivamente:

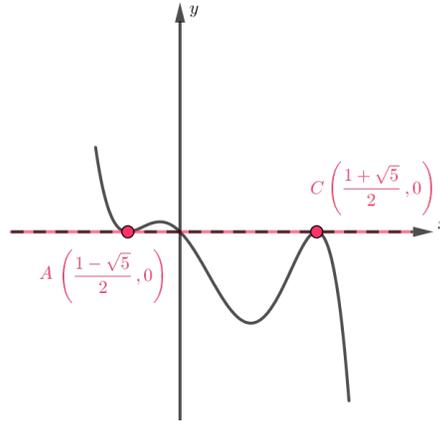


Figura 2.3: $\alpha(u) = (u, -u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u)$

$$r_{\alpha(u_0)}(t) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) + t(1, 0) \quad e \quad r_{\alpha(v_0)}(\lambda) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right) + \lambda(1, 0), \quad \text{com } t, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Como os vetores $\alpha'(u_0)$ e $\alpha'(v_0)$ são paralelos segue que as retas $r_{\alpha(u_0)}$ e $r_{\alpha(v_0)}$ são paralelas. Além disso, substituindo $t = \sqrt{5}$ obtemos que o ponto $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right)$ é comum às duas retas. Isto nos dá que elas são coincidentes. Logo, $(u_0, v_0) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ é uma bitangência de α de lados opostos. Podemos observar que esta curva possui outras bitangências, entretanto, em geral, é difícil calcular tais pontos.

Veja que

$$\begin{aligned} k_{\alpha}(u) &= \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{\|\alpha'(u)\|^3} = \frac{\det((1, -5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1), (0, -20u^3 + 24u^2 + 6u - 4))}{\left(\sqrt{1 + (-5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1)^2}\right)^3} \\ &= \frac{-20u^3 + 24u^2 + 6u - 4}{\left(\sqrt{1 + (-5u^4 + 8u^3 + 3u^2 - 4u - 1)^2}\right)^3}. \end{aligned}$$

Daí, é possível verificar que a curvatura de α em u_0 e em v_0 não se anula, isto é, u_0 e v_0 não são pontos de inflexão de α , donde concluímos que tal bitangência é regular.

Neste exemplo não há pontos duplos, pois $\alpha(u) = \alpha(v)$ se, e somente se, $u = v$.

Observação 2.1.14. A análise que vamos fazer agora, será útil no cálculo do Índice de Poincaré-Hopf. Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva, que sem perda de generalidade, vamos assumir parametrizada pelo comprimento de arco. Se (u_0, v_0) uma bitangência regular de α , então a curvatura $k_{\alpha}(u_0) \neq 0$ e $k_{\alpha}(v_0) \neq 0$.

Além disso, $\alpha(u_0) - \alpha(v_0) = a\alpha'(u_0)$ e $\alpha(u_0) - \alpha(v_0) = b\alpha'(v_0)$, para algum $a, b \in \mathbb{R}$.

Em [32], encontramos uma interpretação geométrica do sinal da curvatura, que também

pode ser expressa da forma:

$$k_\alpha(u) = \frac{\langle \alpha''(u), n(u) \rangle}{\|\alpha'(u)\|^3},$$

em que $n(u)$ é o vetor unitário normal. Se $n(u)$ e $\alpha''(u)$ possuem sentidos opostos, então $k_\alpha(u) < 0$, e se possuem mesmo sentido, então $k_\alpha(u) > 0$. Com esta afirmação é possível provar que:

(i) Se (u_0, v_0) é uma bitangência de mesmo lado, então $w := abk_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) > 0$.

(ii) Se (u_0, v_0) é uma bitangência de lados opostos, então $w := abk_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) < 0$.

De fato, no caso (i), se em u_0 e v_0 a curva possui mesma orientação, então $a > 0$, $b > 0$ e analisando o sinal da curvatura, temos $k_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) > 0$. Entretanto, se a curva α em u_0 possui orientação contrária à de α em v_0 , então a e b possuem sinais opostos e $k_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) < 0$. Em ambos os casos, $w > 0$.

Em (ii), se a orientação de α é a mesma em u_0 e em v_0 , então $a > 0$ e $b > 0$, mas $k_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) < 0$. E se a orientação de α é contrária em u_0 e v_0 , então a e b possuem sinais contrários, todavia $k_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) > 0$. Logo, em quaisquer casos, $w < 0$.

Exemplo 2.1.15. Seja $\alpha(u) = (u, u^3)$ com $u \in (-1, 1)$.

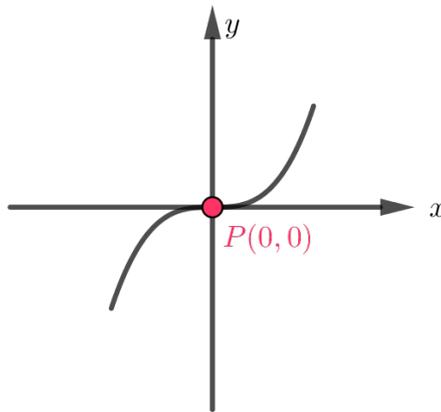


Figura 2.4: $\alpha(u) = (u, u^3)$

Esta curva é regular, pois $\alpha'(u) = (1, 3u^2) \neq (0, 0)$. Além disso, temos $\alpha''(u) = (0, 6u)$ e $\alpha'''(u) = (0, 6)$. A curvatura de α é dada por:

$$k_\alpha(u) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{\|\alpha'(u)\|^3} = \frac{\det((1, 3u^2), (0, 6u))}{\|(1, 3u^2)\|^3} = \frac{6u}{(\sqrt{1+9u^4})^3}.$$

Observe que $k_\alpha(u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$. Logo, $u_0 = 0$ é um ponto de inflexão de α . E pelo fato de $\alpha'(u)$ não ser múltiplo de $\alpha'''(u)$, segue que essa é uma inflexão ordinária. Pela mesma justificativa do exemplo anterior, α não possui pontos duplos.

Exemplo 2.1.16. Considere a curva $\alpha(u) = (\text{sen}(2u), \text{sen}(3u))$ com $u \in (-\pi, \pi)$, conhecida como curva de Lissajous.

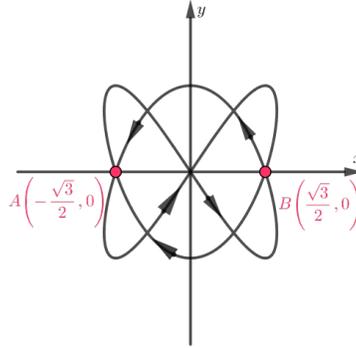


Figura 2.5: Curva de Lissajous

Nesse caso, $\alpha'(u) = (2\cos(2u), 3\cos(3u))$, $\alpha''(u) = (-4\text{sen}(2u), -9\text{sen}(3u))$ e $\alpha'''(u) = (-8\cos(2u), -27\cos(3u))$. A curvatura de α é dada por:

$$k_\alpha(u) = \frac{\det((2\cos(2u), 3\cos(3u)), (-4\text{sen}(2u), -9\text{sen}(3u)))}{\|(2\cos(2u), 3\cos(3u))\|^3} = \frac{-18\text{sen}(3u)\cos(2u) + 12\text{sen}(2u)\cos(3u)}{(\sqrt{4\cos^2(2u) + 9\cos^2(3u)})^3}.$$

Como $\det(\alpha'(0), \alpha''(0)) = 0$ com $\alpha'(0) \neq (0, 0)$, segue que $u_0 = 0$ é um ponto de inflexão de α . Além disso, $\det(\alpha'(0), \alpha'''(0)) = -30 \neq 0$, ou seja, $u_0 = 0$ é uma inflexão ordinária.

Veja que $u_1 = \frac{2\pi}{3}$, $v_1 = -\frac{\pi}{3} \in (-\pi, \pi)$ e $\alpha(u_1) = \alpha(v_1) = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$ com $u_1 \neq v_1$. Isto significa que (u_1, v_1) é um ponto duplo de α . E mais, $\alpha'(u_1) = (-1, 3)$ não é paralelo ao vetor $\alpha'(v_1) = (-1, -3)$, logo (u_1, v_1) é ponto duplo transversal.

Analogamente, $u_2 = -\frac{2\pi}{3}$ e $v_2 = \frac{\pi}{3}$ satisfazem $\alpha(u_2) = \alpha(v_2) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 0)$, e portanto (u_2, v_2) é um ponto duplo de α . E é fácil verificar que ele também é transversal.

Exemplo 2.1.17. Seja $\alpha(u) = (\text{sen}(u) + \text{sen}(\frac{3u}{2}), \cos(u))$ com $u \in (-\frac{\pi}{6}, 3\pi)$.

Se $u_0 = 0$ e $v_0 = 2\pi$ então $\alpha(0) = (0, 1) = \alpha(2\pi)$. Logo, o par (u_0, v_0) é um ponto duplo de α . Mas, $\alpha'(u) = (\cos(u) + \frac{3}{2}\cos(\frac{3u}{2}), -\text{sen}(u))$, então $\alpha'(u_0) = (\frac{5}{2}, 0)$ é paralelo a $\alpha'(v_0) = (-\frac{1}{2}, 0)$ e assim (u_0, v_0) é ponto duplo não transversal de α , conforme a Figura 2.6.

A principal referência para definirmos cúspide e reta tangente à cúspide foi [31].

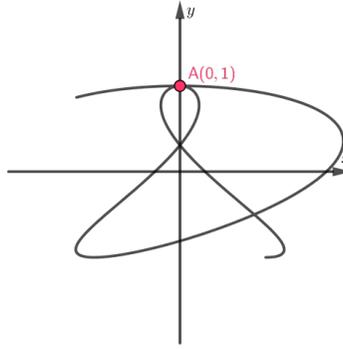


Figura 2.6: $\alpha(u) = (\text{sen}(u) + \text{sen}(\frac{3u}{2}), \text{cos}(u))$

Sejam $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva de classe C^k e $t_0 \in I$ um ponto singular de α . Suponha que as $(k-1)$ primeiras derivadas de α se anulam em $t_0 \in I$, mas $\alpha^{(k)}(t_0) \neq 0$. Fazendo a expansão de α em série de Taylor em torno de $t = t_0$, temos bem definida a reta tangente à α em t_0 como $r(t) = \alpha(t_0) + (t - t_0)\alpha^{(k)}(t_0)$, onde $\alpha^{(k)}$ é a k -ésima derivada de α .

Definição 2.1.18. Uma *cúspide* de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é um ponto $u \in I$ singular, tal que em uma vizinhança de $\alpha(u)$, a curva α possui dois ramos, para os quais a reta tangente aos dois ramos de α em u coincidem.

Dado $t_0 \in I$ um ponto de cúspide de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, sabemos que em uma vizinhança de $\alpha(t_0)$, a curva possui dois arcos convexos sem pontos comuns. Uma cúspide t_0 é dita do **primeiro tipo**, se os arcos convexos situam-se em lados opostos da reta tangente à α em t_0 . E dizemos que t_0 é uma cúspide do **segundo tipo**, se os arcos convexos encontram-se de um mesmo lado da reta tangente.

Podemos classificar as cúspides de primeiro e segundo tipo da seguinte forma: assumamos que, a classe de diferenciabilidade de $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ seja suficientemente grande, de modo que p e q sejam os menores inteiros tais que $1 < p < q < \infty$ e $\{\alpha^{(p)}(t_0), \alpha^{(q)}(t_0)\}$ não sejam colineares. Considere que $\alpha^{(1)}(t_0) = \alpha^{(2)}(t_0) = \dots = \alpha^{(p-1)}(t_0) = 0$ e para cada $i \in \{p+1, p+2, \dots, q-1\}$ temos que $\alpha^{(i)}(t_0) = a_i \alpha^{(p)}(t_0)$, onde $a_i \in \mathbb{R}$. Então, para h suficientemente próximo de 0,

$$\alpha(t_0+h) - \alpha(t_0) = \left[\frac{h^p}{p!} + a_{p+1} \frac{h^{p+1}}{(p+1)!} + \dots + a_{q-1} \frac{h^{q-1}}{(q-1)!} \right] \alpha^{(p)}(t_0) + \frac{h^q}{q!} \alpha^{(q)}(t_0) + \varepsilon_q(h)h^q,$$

com $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_q(h) = 0$.

Como tomamos h suficientemente próximo de zero, podemos desprezar os termos h^{p+1}, \dots, h^{q-1} e assumir que as coordenadas do vetor $w := \alpha(t_0 + h) - \alpha(t_0)$, na base $\{\alpha^{(p)}(t_0), \alpha^{(q)}(t_0)\}$, é dado por $\left(\frac{h^p}{p!}, \frac{h^q}{q!}\right)$. Analisemos os seguintes casos:

Se p é par e q é ímpar então, a primeira coordenada de w mantém sempre o mesmo sinal, mas a segunda muda de sinal quando h passar do semi-eixo positivo para o negativo. E portanto, t_0 é um ponto de cúspide do primeiro tipo. Por outro lado, se p é par e q é par, o arco permanece no quadrante definido por $\{\alpha^{(p)}(t_0), \alpha^{(q)}(t_0)\}$ para valores positivos e negativos de h . E nesse caso, t_0 é um ponto de cúspide do segundo tipo. Se p é ímpar e q é par temos uma curva como na Figura 2.7 (A). E se p e q são ímpares, temos localmente uma curva, conforme a Figura 2.7 (B).

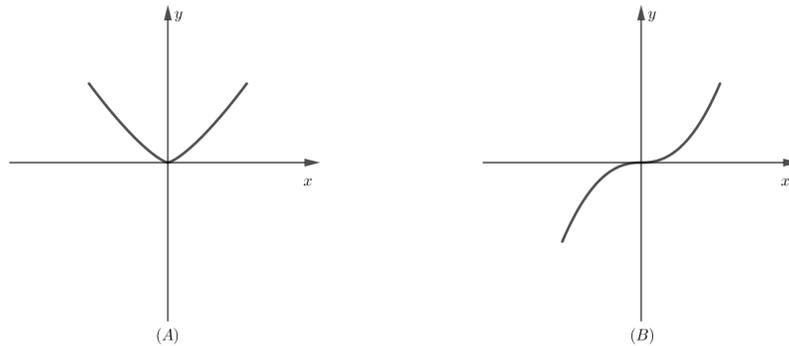
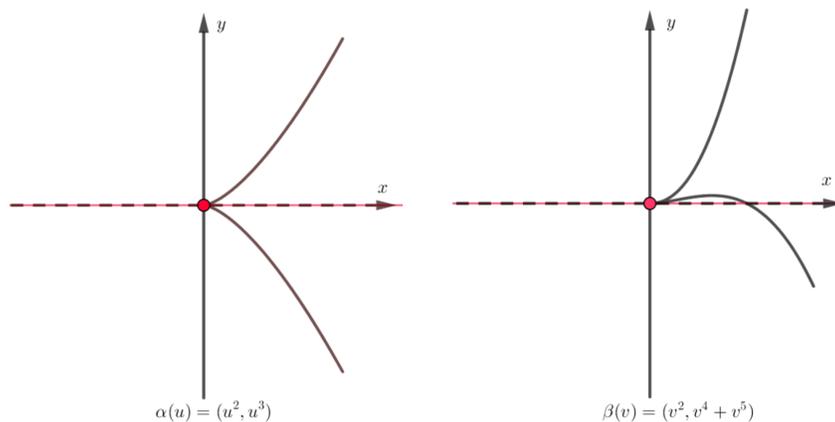


Figura 2.7: $(p, q) = (\text{ímpar}, \text{par})$ e $(p, q) = (\text{ímpar}, \text{ímpar})$, respectivamente

Exemplo 2.1.19. Sejam $\alpha(u) = (u^2, u^3)$ e $\beta(v) = (v^2, v^4 + v^5)$ definidas em um intervalo $I \subset \mathbb{R}$, contendo o zero. Pelo exposto acima, temos que $u_0 = 0$ é uma cúspide do primeiro tipo de α e $v_0 = 0$ é uma cúspide do segundo tipo de β . Veja o traço de α e β nas figuras abaixo:



Exemplo 2.1.20. Considere $\alpha(u) = (2\cos(u)(1 + \cos(u)), 2\sin(u)(1 + \cos(u)))$, com $u \in (0, 2\pi)$. Esta curva é denominada cardióide.

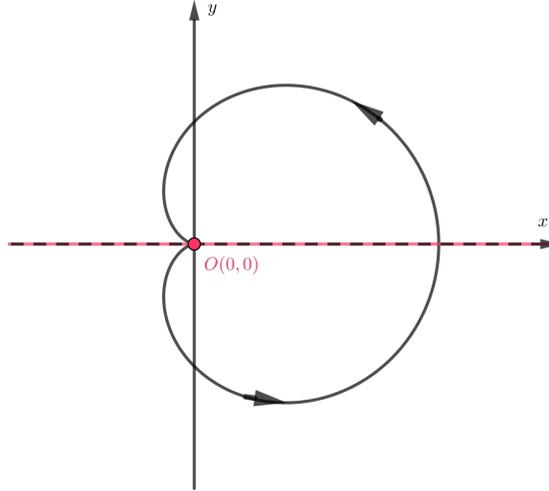


Figura 2.8: Cardióide

Como $\alpha'(u) = (-2\sin(u) - 4\cos(u)\sin(u), 2\cos(u) + 2\cos^2(u) - 2\sin^2(u))$ segue que $u_0 = \pi$ é um ponto singular de α , pois $\alpha'(\pi) = (0, 0)$. Veja que

$$\alpha''(u) = (-2\cos(u) - (-4\sin^2(u) + 4\cos^2(u)), -2\sin(u) - 8\cos(u)\sin(u)) \text{ e}$$

$$\alpha'''(u) = (2\sin(u) + 16\sin(u)\cos(u), -2\cos(u) - 8\cos^2(u) + 8\sin^2(u)).$$

Então, $\alpha''(\pi) = (-2, 0) \neq (0, 0)$, $\alpha'''(\pi) = (0, -6) \neq (0, 0)$ e $B = \{\alpha''(\pi), \alpha'''(\pi)\}$ é um conjunto linearmente independente, e portanto base de \mathbb{R}^2 .

Assim, a reta tangente a α em $u_0 = \pi$ é paralela ao vetor $\alpha''(\pi) = (-2, 0)$ e contém o ponto $\alpha(\pi) = (0, 0)$, ou seja, é dada por

$$r_{\alpha(\pi)}(t) = \alpha(\pi) + (t - \pi)\alpha''(\pi) = (t - \pi)(-2, 0),$$

e portanto esta reta coincide com o eixo Ox .

Observe que para $h \rightarrow 0$ podemos escrever $\alpha(\pi + h) - \alpha(\pi)$ na base B como

$$\alpha(\pi + h) - \alpha(\pi) = \left(\frac{h^2}{2!}, \frac{h^3}{3!} \right).$$

Como $p = 2$ é par e $q = 3$ é ímpar temos que $u = \pi$ é uma cúspide do primeiro tipo.

2.2 Curvas Genéricas

Em [10], os autores fizeram um estudo de curvas planas suaves $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ que satisfazem as seguintes propriedades:

1. α possui um número finito de pontos duplos transversais e não possui pontos triplos;
2. α possui um número finito de bitangências regulares e não possui tritangências;
3. α possui um número finito de inflexões ordinárias;

A cada curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dessa classe, associaram um campo vetorial contínuo F_α , e provaram que suas singularidades caracterizam a geometria de α .

Nesta seção, definimos uma classe de curvas planas suaves que satisfazem quatro propriedades, conforme [11].

Ressaltamos que as três primeiras propriedades, coincidem com as três descritas acima e a última se trata de uma condição sobre o número de cúspides da curva.

Na definição a seguir, estamos assumido que os pontos especiais de uma dada curva: bitangência, ponto duplo, inflexão e cúspide são exclusivos, ou seja, se (u, v) é uma bitangência, então não é ponto duplo, além disso u e v não são pontos de inflexão, e assim por diante. No Exemplo 2.1.16, considerando a curva de Lissajous definida em $(-2\pi, 2\pi)$ temos que $u_0 = 0$ é um ponto de inflexão e o ponto $(0, 2\pi)$ é um ponto duplo, pois $\alpha(0) = (0, 0) = \alpha(2\pi)$.

Definição 2.2.1. Denotamos por $G(I, \mathbb{R}^2)$, o conjunto de todas as curvas suaves $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas no aberto $I \subset \mathbb{R}$ que satisfazem as seguintes condições:

1. A curva α possui um número finito de pontos duplos, que são todos transversais, e não possui pontos triplos.
2. A curva α possui um número finito de bitangências, todas regulares, e não possui tritangências.
3. A curva α possui um número finito de inflexões ordinárias.
4. A curva α possui um número finito de cúspides do primeiro e segundo tipo.

Utilizando técnicas de transversalidade é possível verificar que $G(I, \mathbb{R}^2) \subset C^\infty(I, \mathbb{R}^2)$ é residual com a topologia de *Whitney* C^∞ , ou seja, ele contém uma interseção enumerável de conjuntos abertos densos nesta topologia.

Como as propriedades da Definição 2.2.1 se verificam para um conjunto residual de aplicações, elas são chamadas de propriedades genéricas. Nesse sentido, denominamos as curvas $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ como curvas genéricas.

Observação 2.2.2. *Do Exemplo 2.1.17, concluímos que $\alpha(u) = (\text{sen}(u) + \text{sen}(\frac{3u}{2}), \text{cos}(u))$ não pertence ao conjunto $G((-\frac{\pi}{6}, 3\pi), \mathbb{R}^2)$ porque possui um ponto duplo não transversal.*

Observação 2.2.3. *Seja $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$.*

1. *Sejam $u, v \in I$ com $u \neq v$ e suponha (u, v) uma bitangência de α . Então, (u, v) não é um ponto duplo de α . De fato, se (u, v) é ponto duplo de α , temos que é transversal, pois $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$. Mas, pela definição de bitangência, o vetor $\alpha'(u)$ é paralelo ao vetor $\alpha'(v)$, o que é um absurdo.*
2. *Considere $u, v \in I$ com $u \neq v$, e (u, v) um ponto duplo transversal de α . Então, u e v são pontos regulares de α . De fato, como (u, v) é ponto duplo transversal, temos que $\alpha'(u)$ não é múltiplo de $\alpha'(v)$, ou seja, $\det(\alpha'(u), \alpha'(v)) \neq 0$ e assim $\alpha'(u) \neq (0, 0)$ e $\alpha'(v) \neq (0, 0)$.*
3. *Se (u, v) é uma bitangência de α temos que (u, v) é bitangência regular, então $u, v \in I$ não são inflexões de α . Dessa forma, $k_\alpha(u) \neq 0$ e $k_\alpha(v) \neq 0$, logo $k_\alpha(u)k_\alpha(v) \neq 0$ donde temos que $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) \neq 0$ e $\det(\alpha'(v), \alpha''(v)) \neq 0$. Consequentemente $\alpha'(u), \alpha'(v), \alpha''(u), \alpha''(v) \neq (0, 0)$, $\alpha'(u)$ não é paralelo a $\alpha''(u)$ e $\alpha'(v)$ não é paralelo a $\alpha''(v)$.*

Nosso próximo passo é associar a cada $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$, um campo vetorial, e por meio deste obter uma relação entre seus zeros e a geometria de α .

2.3 Campo Vetorial associado às curvas Genéricas

Nesta seção, a cada curva genérica α , definimos um campo vetorial, que denotamos por F_α , e caracterizamos a geometria de α a partir das singularidades de F_α . As principais referências utilizadas foram [10] e [11].

Seja $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$. Associe a α o campo vetorial $F_\alpha : I \times I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dado por:

$$F_\alpha(u, v) = \left(\frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}, \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \right). \quad (2.1)$$

Proposição 2.3.1. *Sejam $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ e F_α como em (2.1). Então, F_α está bem definida para $u = v$ e $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,*

1. (u, v) é ponto duplo ou uma bitangência de α , se $u \neq v$.
2. u é uma inflexão ou uma cúspide, se $u = v$.

Demonstração. Suponha $u \neq v$.

Se (u, v) é uma bitangência de α então $\alpha(u) - \alpha(v)$ é um vetor diretor da reta tangente comum a α em u e em v . Logo, $\alpha(u) - \alpha(v)$ é múltiplo de $\alpha'(u)$ e de $\alpha'(v)$, e assim $\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) = \det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v)) = 0$, implicando em $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$. Quando (u, v) é ponto duplo, temos $\alpha(u) = \alpha(v)$, isto é, $\alpha(u) - \alpha(v) = (0, 0)$. Isto nos dá que $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$. Observe que se u e v distintos forem cúspides de α , ou seja, $\alpha'(u) = \alpha'(v) = (0, 0)$ temos que $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$. Mas cada um desses pontos será analisado no outro item.

Reciprocamente, suponha $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ com $u \neq v$ e que (u, v) não é ponto duplo de α . Então,

$$\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) = \det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v)) = 0 \text{ e } \alpha(u) - \alpha(v) \neq (0, 0). \quad (2.2)$$

De (2.2) temos que $\alpha'(u)$ e $\alpha'(v)$ são ambos múltiplos de $\alpha(u) - \alpha(v)$. Se $\alpha'(u)$ e $\alpha'(v)$ são não nulos, como $\alpha(u) - \alpha(v)$ é não nulo, pois (u, v) não é ponto duplo de α , temos que existem $a, b \in \mathbb{R}^*$ satisfazendo $\alpha'(u) = a(\alpha(u) - \alpha(v))$ e $\alpha'(v) = b(\alpha(u) - \alpha(v))$. Logo, as equações das retas tangentes a α em u e em v são dadas, respectivamente, por: $r_{\alpha(u)}(t) = \alpha(u) + t\alpha'(u) = \alpha(u) + ta(\alpha(u) - \alpha(v))$ e $r_{\alpha(v)}(\lambda) = \alpha(v) + \lambda\alpha'(v) = \alpha(v) + \lambda b(\alpha(u) - \alpha(v))$, com $t, \lambda \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned} r_{\alpha(u)}(t) &= \alpha(u) + ta(\alpha(u) - \alpha(v)) \\ &= \frac{\alpha'(u)}{a} + \alpha(v) + ta(\alpha(u) - \alpha(v)) \\ &= \alpha(v) + \alpha(u) - \alpha(v) + ta(\alpha(u) - \alpha(v)) \\ &= \alpha(v) + (1 + ta)(\alpha(u) - \alpha(v)), \end{aligned}$$

ou seja, as retas tangentes a α em u e em v são coincidentes. Portanto, (u, v) é uma bitangência.

Observe que, fixado $u \in I$, o caso $\alpha'(u) = (0, y'(u))$ e $\alpha(u) - \alpha(v) = (0, y(u) - y(v))$, com $y'(u) \neq 0$ e $y(u) - y(v) \neq 0$ está contemplado nesse caso, pois

$$\alpha'(u) = \frac{y'(u)}{y(u) - y(v)}(0, y(u) - y(v)).$$

Analogamente, se $\alpha'(u) = (x'(u), 0)$ e $\alpha(u) - \alpha(v) = (x(u) - x(v), 0)$, com $\alpha'(u) \neq 0$ e $x(u) - x(v) \neq 0$.

Suponha agora $u = v$. Vamos provar que $F_\alpha(u, u)$ está bem definida.

Denotemos as coordenadas do campo $F_\alpha(u, v)$ por:

$$f_1(u, v) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \text{ e } f_2(u, v) = \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}.$$

Veja que

$$\begin{aligned} f_1(v, u) &= \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(v) - \alpha(u))}{(v - u)^2} = \frac{\det(\alpha'(v), -(\alpha(u) - \alpha(v)))}{(v - u)^2} \\ &= -\frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} = -f_2(u, v). \end{aligned}$$

Assim,

$$f_2(u, v) = -f_1(v, u). \quad (2.3)$$

Fazendo a expansão de α em série de Taylor em torno de u , temos

$$\alpha(v) - \alpha(u) = \alpha'(u)(v - u) + \frac{\alpha''(u)(v - u)^2}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v - u)^n}{n!}, \quad (2.4)$$

Logo, $\frac{\alpha(v) - \alpha(u)}{(v - u)^2} = \frac{\alpha'(u)}{v - u} + \frac{\alpha''(u)}{2!} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v - u)^{n-2}}{n!}$. Ou seja,

$$\frac{\alpha(u) - \alpha(v)}{(u - v)^2} = -\frac{\alpha'(u)}{v - u} - \frac{\alpha''(u)}{2!} - \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v - u)^{n-2}}{(n)!}. \quad (2.5)$$

Agora, denotando $\alpha(u) = (x_1(u), x_2(u))$ e $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v - u)^{n-2}}{n!} = (S_1, S_2)$, em que

$$S_1 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_1^{(n)}(u)(v - u)^{n-2}}{n!} \text{ e } S_2 = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{x_2^{(n)}(u)(v - u)^{n-2}}{n!},$$

obtemos de (2.5) que:

$$\begin{aligned}
f_1(u, v) &= \det \left(\alpha'(u), \frac{\alpha(u) - \alpha(v)}{(u-v)^2} \right) \\
&= \begin{vmatrix} x_1'(u) & x_2'(u) \\ -\frac{x_1'(u)}{v-u} - \frac{x_1''(u)}{2} - S_1 & -\frac{x_2'(u)}{v-u} - \frac{x_2''(u)}{2} - S_2 \end{vmatrix} \\
&= -\frac{x_1'(u)x_2'(u)}{v-u} - \frac{x_1'(u)x_2''(u)}{2} - x_1'(u)S_2 + \frac{x_1'(u)x_2'(u)}{v-u} + \frac{x_1''(u)x_2'(u)}{2} + x_2'(u)S_1 \\
&= -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} - \det(\alpha'(u), (S_1, S_2)) \\
&= -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} - \det \left(\alpha'(u), \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v-u)^{n-2}}{n!} \right) \\
&= -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} - (v-u) \det \left(\alpha'(u), \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v-u)^{n-3}}{n!} \right).
\end{aligned}$$

Portanto, existe $\tilde{f}(u, v)$ satisfazendo

$$f_1(u, v) = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} - (v-u)\tilde{f}(u, v), \quad (2.6)$$

e de (2.3), segue que

$$F_\alpha(u, u) = \frac{1}{2}(-\det(\alpha'(u), \alpha''(u)), \det(\alpha'(u), \alpha''(u))). \quad (2.7)$$

Veja que, se $F_\alpha(u, u) = 0$ então $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 0$. Nesse caso, se $\alpha'(u) \neq 0$ então $k_\alpha(u) = 0$ e u é ponto de inflexão de α . E se $\alpha'(u) = 0$ obtemos u uma cúspide de α .

Reciprocamente, se $u \in I$ é uma inflexão de α , então $k_\alpha(u) = 0$ e $F_\alpha(u, u) = (0, 0)$. E quando $u \in I$ é cúspide de α vale que $\alpha'(u) = 0$ implicando em $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 0$, ou seja, $F_\alpha(u, u) = (0, 0)$. \square

Exemplo 2.3.2. Seja $\alpha(u) = (u^2, u^3 + bu)$ com $u \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$. Vamos provar que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Se } b > 0, \text{ então } u = \pm\sqrt{\frac{b}{3}} \text{ são inflexões de } \alpha. \\ \text{Se } b = 0, \text{ então } u = 0 \text{ é uma cúspide de } \alpha. \\ \text{Se } b < 0, \text{ então } (\sqrt{-b}, -\sqrt{-b}) \text{ é ponto duplo de } \alpha. \end{array} \right.$$

Para determinarmos o campo vetorial F_α , observe que:

$$\begin{aligned}
 \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) &= \begin{vmatrix} 2u & 3u^2 + b \\ u^2 - v^2 & u^3 - v^3 + b(u - v) \end{vmatrix} \\
 &= 2u[u^3 - v^3 + b(u - v)] - (u^2 - v^2)(3u^2 + b) \\
 &= (u - v)[2u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + 2ub - 3u^3 - ub - 3u^2v - vb] \\
 &= (u - v)[-u^3 - u^2v + 2uv^2 + (u - v)b] \\
 &= (u - v)[(u - v)(-u^2 - 2uv) + (u - v)b] \\
 &= (u - v)^2(-u^2 - 2uv + b).
 \end{aligned}$$

Logo, o campo vetorial F_α é dado por:

$$\begin{aligned}
 F_\alpha(u, v) &= \left(\frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}, \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \right) \\
 &= (-u^2 - 2uv + b, v^2 + 2uv - b).
 \end{aligned}$$

Nesse caso, $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -u^2 - 2uv + b = 0 \\ v^2 + 2uv - b = 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

O que ocorre se, e somente se, $v^2 - u^2 = 0$, o que nos dá $v = \pm u$.

Primeiro vamos estudar o caso $b \geq 0$.

Se $v = -u$ temos, pela segunda equação do sistema (2.8), que $u^2 = -b$, que não admite solução se $b > 0$. E o caso $b = 0$ ocorre no caso $v = u = 0$. Então, $v = u$ e as singularidades de F_α são: $(u, v) = \left(\sqrt{\frac{b}{3}}, \sqrt{\frac{b}{3}}\right)$ e $(u, v) = \left(-\sqrt{\frac{b}{3}}, -\sqrt{\frac{b}{3}}\right)$. Assim, $u = \sqrt{\frac{b}{3}}$ e $u = -\sqrt{\frac{b}{3}}$ correspondem a pontos de cúspide ou inflexões de α .

Veja que $\alpha'(u) = (2u, 3u^2 + b) = (0, 0)$ se, e somente se, $u = 0$ e $b = 0$. Se $b > 0$ $u = \sqrt{\frac{b}{3}}$ e $u = -\sqrt{\frac{b}{3}}$ não são cúspides. Portanto, são inflexões. Tais inflexões são ordinárias, pois $\alpha''' \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = (0, 6)$ não é múltiplo de $\alpha' \left(\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = \left(2\sqrt{\frac{b}{3}}, 2b\right)$ e $\alpha''' \left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = (0, 6)$ não é múltiplo de $\alpha' \left(-\sqrt{\frac{b}{3}}\right) = \left(-2\sqrt{\frac{b}{3}}, 2b\right)$. E se $b = 0$, então $u = 0$ é uma cúspide de α do primeiro tipo. Logo, α não possui pontos duplos nem bitangências.

Agora, considere $b < 0$.

Se $v = u$, pela primeira equação do sistema (2.8), obtemos $-3u^2 = -b$, o que é um ab-

surdo. Então, $v = -u$ e as singularidades de F_α são: $(u, v) = (\sqrt{-b}, -\sqrt{-b})$ e $(u, v) = (-\sqrt{-b}, \sqrt{-b})$.

Note que $\alpha(\sqrt{-b}) = (-b, (-b)^{\frac{3}{2}} + b(-b)^{\frac{1}{2}}) = (-b, (-b)^{\frac{3}{2}} - (-b)(-b)^{\frac{1}{2}}) = (-b, 0) = \alpha(-\sqrt{-b})$, ou seja, $(\sqrt{-b}, -\sqrt{-b})$ é um ponto duplo de α . E ainda $\alpha'(\sqrt{-b}) = (2\sqrt{-b}, -2b)$ não é paralelo a $\alpha'(-\sqrt{-b}) = (-2\sqrt{-b}, -2b)$, isto é, $(\sqrt{-b}, -\sqrt{-b})$ é ponto duplo transversal de α .

Nesse caso, α não possui cúspides, inflexões nem bitangências.

Portanto, α satisfaz as condições da Definição 2.2.1 e assim $\alpha \in G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Observação 2.3.3. No Exemplo 2.1.13, apresentamos uma curva α que, aparentemente, pelo traço, parecia ter uma bitangência no eixo Ox . Então, tentamos encontrar os zeros da função $f(u) = -u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u$, donde obtivemos $u = 0$ e $u = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Em seguida, por inspeção, verificamos que o par $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$ era, de fato, uma bitangência. Naquele momento, não tínhamos conhecimentos do campo associado à α para nos ajudar a encontrar pontos como esse.

Em geral, dada uma curva plana qualquer, o cálculo do campo F não é trivial, muito menos suas singularidades. Os cálculos são árduos, inclusive sendo a solução de um sistema polinomial, com duas equações e duas variáveis, como é o nosso caso. E vai se tornando algo cada vez mais complexo, quando o grau do polinômio aumenta.

Com o intuito de nos auxiliar, nos cálculos do campo F e de suas singularidades, o Professor Dr. Marcelo Escudeiro Hernandes, da UEM, implementou uma rotina no *Maple*, em que dada uma curva α , de coordenadas polinomiais, a rotina determina o campo polinomial F e nos retorna os pares (u, v) que satisfazem $F(u, v) = (0, 0)$. Na verdade, o programa calcula uma base de Gröbner, com respeito a uma ordem monomial de eliminação, que nada mais é do que um outro conjunto de geradores para o ideal $\langle f_1(u, v), f_2(u, v) \rangle$, em que $F(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$. Com este conjunto especial de geradores, é possível determinar as soluções de $f_1(u, v) = f_2(u, v) = 0$. Para mais detalhes, veja [23].

Vamos ilustrar sua aplicação em alguns exemplos ao longo do trabalho, começando com o exemplo a seguir.

Exemplo 2.3.4. No Exemplo 2.1.13, tínhamos a curva $\alpha(u) = (u, -u^5 + 2u^4 + u^3 - 2u^2 - u)$. Naquele momento, consideramos $u \in (-1, 2)$ porque queríamos verificar que o par $(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$

era uma bitangência de α de lados opostos. E os cálculos foram feitos manualmente. Agora, queremos calcular o campo vetorial associado à α .

O Maple toma como domínio para a curva dada, um intervalo padrão. Nesse caso,

$$F_\alpha(u, v) = (4u^3 + 3u^2v + 2uv^2 + v^3 - 6u^2 - 4uv - 2v^2 - 2u - v + 2, \\ -u^3 - 2u^2v - 3uv^2 - 4v^3 + 2u^2 + 4uv + 6v^2 + u + 2v - 2).$$

E as singularidades de F_α são: $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{85}}{10}, \frac{7+\sqrt{85}}{10}\right)$, $\left(\frac{7+\sqrt{85}}{10}, \frac{7-\sqrt{85}}{10}\right)$, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Não sabemos se essas são as únicas singularidades, uma vez que não temos o comportamento global desta curva. Mas, considerando $\alpha : (-10, 10) \rightarrow \mathbb{R}^2$ estas são as únicas singularidades reais de F_α . Além disso, o programa apresenta singularidades complexas. Veja na Figura 2.9 o traço de $\alpha : (-10, 10) \rightarrow \mathbb{R}^2$, em que $A = \alpha\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$, $B = \alpha\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$, $C = \alpha\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $D = \alpha\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

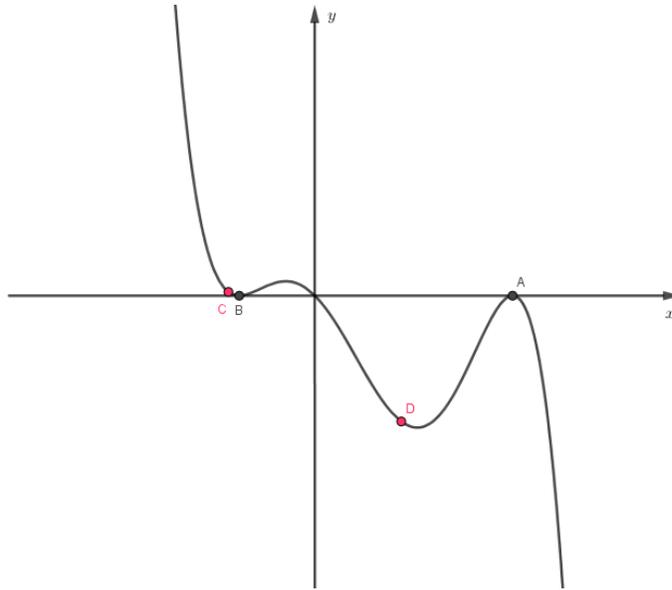


Figura 2.9: α definida no intervalo $(-10, 10)$

2.4 Índice Topológico associado às singularidades de F_α

Iniciamos esta seção apresentando a matriz jacobiana de F_α , com $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$, nos casos em que $u \neq v$ e $u = v$, a fim de calcularmos o índice topológico do campo F_α , visto na Definição 1.3.11. O intuito aqui é escrever tal índice em termos dos números de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides de α .

Lema 2.4.1. *Sejam $\alpha(u, v) = (a(u, v), b(u, v))$ e $\beta(u, v) = (c(u, v), d(u, v))$ aplicações diferenciáveis. Considerando $g(u, v) = \det(\alpha(u, v), \beta(u, v))$, temos que*

$$\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} = \det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \beta(u, v)\right) + \det\left(\alpha(u, v), \frac{\partial \beta}{\partial u}\right) e$$

$$\frac{\partial g(u, v)}{\partial v} = \det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \beta(u, v)\right) + \det\left(\alpha(u, v), \frac{\partial \beta}{\partial v}\right).$$

Demonstração. Temos que $g(u, v) = a(u, v)d(u, v) - b(u, v)c(u, v)$, então

$$\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} = \frac{\partial a(u, v)}{\partial u}d(u, v) + a(u, v)\frac{\partial d(u, v)}{\partial u} - \frac{\partial b(u, v)}{\partial u}c(u, v) - b(u, v)\frac{\partial c(u, v)}{\partial u}.$$

Mas,

$$\det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \beta(u, v)\right) = \frac{\partial a(u, v)}{\partial u}d(u, v) - \frac{\partial b(u, v)}{\partial u}c(u, v) e$$

$$\det\left(\alpha(u, v), \frac{\partial \beta}{\partial u}\right) = a(u, v)\frac{\partial d(u, v)}{\partial u} - b(u, v)\frac{\partial c(u, v)}{\partial u}.$$

Portanto,

$$\frac{\partial g(u, v)}{\partial u} = \det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial u}, \beta(u, v)\right) + \det\left(\alpha(u, v), \frac{\partial \beta}{\partial u}\right).$$

Analogamente, $\frac{\partial g(u, v)}{\partial v} = \det\left(\frac{\partial \alpha}{\partial v}, \beta(u, v)\right) + \det\left(\alpha(u, v), \frac{\partial \beta}{\partial v}\right)$. □

Sabemos que para $u \neq v$ e $u = v$ temos F_α definido, respectivamente, por :

$$F_\alpha(u, v) = \left(\frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}, \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \right),$$

$$F_\alpha(u, u) = \left(-\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2}, \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} \right).$$

Proposição 2.4.2. *Dado o campo F_α como definido acima, temos que*

$$JF_\alpha = \left[\begin{array}{cc} \frac{\det(\alpha''(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} - \frac{2 \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^3} & \frac{\det(\alpha'(v), \alpha'(u))}{(u - v)^2} + \frac{2 \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^3} \\ \frac{\det(\alpha'(v), \alpha'(u))}{(u - v)^2} - \frac{2 \det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^3} & \frac{\det(\alpha''(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} + \frac{2 \det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^3} \end{array} \right]$$

e

$$JF_\alpha(u, u) = \left[\begin{array}{cc} -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{3} & -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{6} \\ \frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{6} & \frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{3} \end{array} \right].$$

Demonstração. Suponha $u \neq v$. Denotemos as coordenadas do campo $F_\alpha(u, v)$ por:

$$f_1(u, v) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \text{ e } f_2(u, v) = \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}.$$

Do Lema 2.4.1, temos que

$$\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u} = -\frac{2}{(u - v)^3} \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) + \frac{1}{(u - v)^2} \det(\alpha''(u), \alpha(u) - \alpha(v)) \text{ e}$$

$$\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial v} = \frac{2}{(u - v)^3} \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) + \frac{1}{(u - v)^2} \det(\alpha'(v), \alpha'(u)).$$

De maneira análoga, calculamos $\frac{\partial f_2(u, v)}{\partial u}$ e $\frac{\partial f_2(u, v)}{\partial v}$.

Agora, suponha $u = v$. Vimos na demonstração da Proposição 2.3.1, expressão (2.6) que

$$f_1(u, v) = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{2} - (v - u)\tilde{f}(u, v),$$

em que $\tilde{f}(u, v) = \det\left(\alpha'(u), \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\alpha^{(n)}(u)(v-u)^{n-3}}{n!}\right)$.

Pelo Lema 2.4.1,

$$\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial u} = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{2} + \tilde{f}(u, v) - (v - u)\frac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial u}.$$

Fazendo $u = v$, obtemos

$$\frac{\partial f_1(u, u)}{\partial u} = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{2} + \det\left(\alpha'(u), \frac{\alpha'''(u)}{3!}\right) = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{3}.$$

E $\frac{\partial f_1(u, v)}{\partial v} = -\tilde{f}(u, v) - (v - u)\frac{\partial \tilde{f}(u, v)}{\partial v}$, o qual para $u = v$, temos

$$\frac{\partial f_1(u, u)}{\partial v} = -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha'''(u))}{6}.$$

Como $f_2(u, v) = -f_1(v, u)$, segue o resultado. □

Proposição 2.4.3. Considere $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ e $p = (u_0, v_0)$ um ponto de α . Então,

1. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$, se p é um ponto duplo de α ;
2. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$, se p é uma bitangência de lados opostos de α ;

3. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = 1$, se p é uma bitangência de mesmo lado de α ;
4. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$, se $p = (u_0, u_0)$, com u_0 uma inflexão de α .

Demonstração. Nesta demonstração utilizamos a Proposição 1.2.23.

1. Se $p = (u_0, v_0)$ é um ponto duplo de α , temos $u_0 \neq v_0$ e $\alpha(u_0) - \alpha(v_0) = 0$. Então,

$$JF_\alpha(p) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\det(\alpha'(v_0), \alpha'(u_0))}{(u_0 - v_0)^2} \\ \frac{\det(\alpha'(v_0), \alpha'(u_0))}{(u_0 - v_0)^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Assim, $\det(JF_\alpha(p)) = -\frac{[\det(\alpha'(v_0), \alpha'(u_0))]^2}{(u_0 - v_0)^4}$. Esse determinante se anula se, e somente se, $\alpha'(u_0)$ é paralelo a $\alpha'(v_0)$, ou seja, somente nos pontos duplos não transversais da curva. Mas, $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ possui apenas pontos duplos transversais, então $\det(JF_\alpha(p)) < 0$ e $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$.

2. Suponha $p = (u_0, v_0)$ uma bitangência de lados opostos. Então, $\alpha'(u_0)$ e $\alpha'(v_0)$ são paralelos e ambos paralelos a $\alpha(u_0) - \alpha(v_0)$, donde obtemos

$$JF_\alpha(p) = \begin{bmatrix} \frac{\det(\alpha''(u_0), \alpha(u_0) - \alpha(v_0))}{(u_0 - v_0)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\det(\alpha''(v_0), \alpha(u_0) - \alpha(v_0))}{(u_0 - v_0)^2} \end{bmatrix}.$$

Daí,

$$\det(JF_\alpha(p)) = \frac{\det(\alpha''(u_0), \alpha(u_0) - \alpha(v_0)) \det(\alpha''(v_0), \alpha(u_0) - \alpha(v_0))}{(u_0 - v_0)^4}.$$

Visto que $\alpha(u_0) - \alpha(v_0) = a\alpha'(u_0) = b\alpha'(v_0)$ com $a, b \in \mathbb{R}^*$ podemos reescrever o determinante da matriz acima da seguinte maneira:

$$\det(JF_\alpha(p)) = \frac{ab \|\alpha'(u_0)\|^3 \|\alpha'(v_0)\|^3 k_\alpha(u_0) k_\alpha(v_0)}{(u_0 - v_0)^4}. \quad (2.9)$$

Pelo fato de α possuir apenas bitangências regulares, segue que u_0 e v_0 não são inflexões, ou seja, $k_\alpha(u_0)k_\alpha(v_0) \neq 0$. E como u_0, v_0 não são pontos singulares de α , segue que $\|\alpha'(u_0)\|^3 \|\alpha'(v_0)\|^3 \neq 0$. Assim, pela Observação 2.1.14, o determinante obtido em (2.9) é menor que zero e $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$.

3. Considere $p = (u_0, v_0)$ uma bitangência de mesmo lado. O cálculo da matriz $J(F_\alpha(p))$, neste caso, se reduz ao que fizemos no item anterior. Novamente, pela Observação 2.1.14, o determinante obtido em (2.9) é sempre maior que zero, portanto $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = 1$.
4. Seja $p = (u_0, u_0)$, com u_0 um ponto de inflexão de α , ou seja, $\det(\alpha'(u_0), \alpha''(u_0)) = 0$. Nesse caso,

$$JF_\alpha(u_0, u_0) = \begin{bmatrix} -\frac{\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0))}{3} & -\frac{\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0))}{6} \\ \frac{\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0))}{6} & \frac{\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0))}{3} \end{bmatrix},$$

ou seja, $\det(JF_\alpha(p)) = -\frac{[\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0))]^2}{12}$. O valor desse determinante é sempre negativo, pois as inflexões de α são ordinárias ($\det(\alpha'(u_0), \alpha'''(u_0)) \neq 0$). Portanto, $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$.

□

Proposição 2.4.4. *Considere $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$ e $p = (u, u)$, com $u \in I$. Então*

1. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -2$, se u é uma cúspide do primeiro tipo.
2. $\text{Ind}_{PH}(F_\alpha, p) = -1$, se u é uma cúspide do segundo tipo.

Para calcularmos o Índice de Poincaré-Hopf de F_α em $p = (u, u)$, cujo ponto $u \in I$ corresponde a cúspide, não podemos utilizar a Proposição 1.2.23, pois a matriz $JF_\alpha(p)$ não é inversível. Uma prova desta proposição será apresentada na próxima seção.

Dada uma curva plana $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ denotamos por:

d o número de pontos duplos de α ,

t_s o número de bitangências de mesmo lado de α ,

t_o o número de bitangências de lados opostos de α ,

i o número de inflexões de α ,

c_1 o número de cúspides do primeiro tipo de α e

c_2 o número de cúspides do segundo tipo de α .

Proposição 2.4.5. *Seja $\alpha \in G(I, \mathbb{R}^2)$. O índice topológico de F_α é dado por*

$$\text{ind}(F_\alpha) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2. \quad (2.10)$$

Demonstração. Pelo fato de

$$F_\alpha(v, u) = \left(-\frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}, -\frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \right),$$

temos $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se, $F_\alpha(v, u) = (0, 0)$. Ou seja, α possui um total de $2d + 2t_s + 2t_o + i + c_1 + c_2$ singularidades isoladas. Consequentemente, pelas Proposições 2.4.3 e 2.4.4 e pela Definição 1.3.11 concluímos que

$$\text{ind}(F_\alpha) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2.$$

□

Exemplo 2.4.6. Considere $\alpha(u) = (u^2, u^3 - u)$ com $u \in (-2, 2)$.

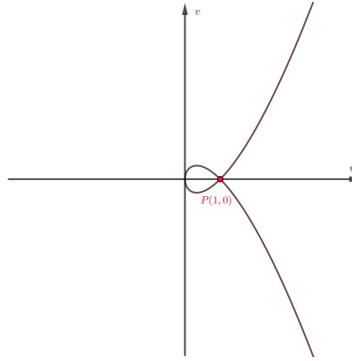


Figura 2.10: $\alpha(u) = (u^2, u^3 - u)$

Vimos no Exemplo 2.3.2, que o campo vetorial associado a α é dado por:

$$F_\alpha(u, v) = (-u^2 - 2uv - 1, v^2 + 2uv + 1),$$

e que $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ nos pontos $(u, v) = (1, -1)$ e $(u, v) = (-1, 1)$. Um esboço de F_α pode ser visto no Exemplo 1.3.15. Além disso, $(1, -1)$ é ponto duplo transversal desta curva, e mais, α não possui bitangências, inflexões nem cúspides. Logo, $d = 1$ e $c_1 = c_2 = i = t_o = t_s = 0$. Portanto, pela Proposição 2.4.5, obtemos

$$\text{ind}(F_\alpha) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2 = -2.$$

Exemplo 2.4.7. Seja $\alpha(u) = (u, u^3 + 2u^4)$ com $u \in \mathbb{R}$.

Na imagem de α , Figura 2.11, temos $A = \alpha\left(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $B = \alpha\left(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}\right)$, $C = \alpha(0)$ e $D = \alpha\left(-\frac{1}{4}\right)$.

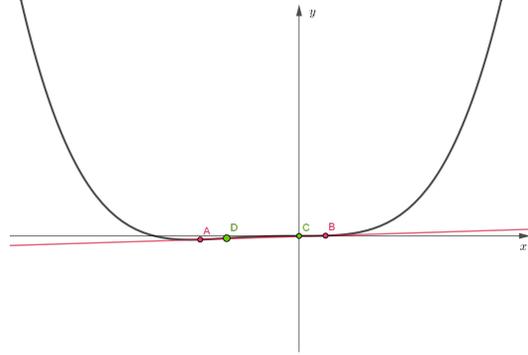


Figura 2.11: $\alpha(u) = (u, u^3 + 2u^4)$

Note que

$$\begin{aligned}
 \det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v)) &= \begin{vmatrix} 1 & 3u^2 + 8u^3 \\ u - v & u^3 - v^3 + 2(u^4 - v^4) \end{vmatrix} \\
 &= u^3 - v^3 + 2(u^4 - v^4) - (3u^2 + 8u^3)(u - v) \\
 &= (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2u^3 + 2u^2v + 2uv^2 + 2v^3 - 3u^2 - 8u^3) \\
 &= (u - v)(-2u^2 + uv + v^2 - 6u^3 + 2v^3 + 2u^2v + 2uv^2) \\
 &= (u - v)((-u - 2u^2)(u - v) - (1 + 2u)(u^2 - v^2) - 2(u^3 - v^3)) \\
 &= (u - v)^2(-2u - v - 6u^2 - 2v^2 - 4uv).
 \end{aligned}$$

Logo, o campo vetorial associado a α é dado por:

$$F_\alpha(u, v) = (-2u - v - 6u^2 - 2v^2 - 4uv, 2v + u + 6v^2 + 2u^2 + 4uv).$$

Veja que $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -2u - v - 6u^2 - 2v^2 - 4uv = 0 \\ 2v + u + 6v^2 + 2u^2 + 4uv = 0. \end{cases}$$

Somando as duas equações obtemos $(u - v)(4u + 4v + 1) = 0$, que ocorre se, e somente se, $u = v$ ou $u = -v - \frac{1}{4}$.

Substituindo $u = v$ na primeira equação do sistema, concluímos que $-3v(4v + 1) = 0$, ou

seja, $v = 0$ ou $v = -\frac{1}{4}$. Agora, se $u = -v - \frac{1}{4}$, temos $-4v^2 - v + \frac{2}{16} = 0$, logo $v = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{8}$.

Então, as únicas singularidades de $F_\alpha(u, v)$ são: $(u_0, v_0) = (0, 0)$, $(u_1, v_1) = (-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $(u_2, v_2) = (-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8})$ e $(v_2, u_2) = (-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8})$.

Repare que $\alpha'(u) = (1, 3u^2 + 8u^3)$, $\alpha''(u) = (0, 6u + 24u^2)$ e $\alpha'''(u) = (0, 6 + 48u)$. Assim,

$$\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 6u + 24u^2 \text{ e } \det(\alpha'(u), \alpha'''(u)) = 6 + 48u.$$

Note que α é regular e $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ ou $u = -\frac{1}{4}$, então $u_0 = 0$ e $u_1 = -\frac{1}{4}$ são inflexões α . Além disso, $\det(\alpha'(u), \alpha'''(u)) = 0$ se, e somente se, $u = -\frac{1}{8}$, logo $u_0 = 0$ e $u_1 = -\frac{1}{4}$ são inflexões ordinárias de α .

Considere o par $(u_2, v_2) = (-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8})$. As equações das retas tangentes a α em $u = u_2$ e $u = v_2$ são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} r_{\alpha(u_2)}(\lambda) &= \left(\frac{-1-\sqrt{3}}{8}, \frac{-16\sqrt{3}-24}{(64)^2} \right) + \lambda \left(1, \frac{2}{64} \right) \text{ e} \\ r_{\alpha(v_2)}(t) &= \left(\frac{-1+\sqrt{3}}{8}, \frac{16\sqrt{3}-24}{(64)^2} \right) + t \left(1, \frac{2}{64} \right), \end{aligned}$$

com $\lambda, t \in \mathbb{R}$ e $\alpha'(u_2) = \alpha'(v_2) = (1, \frac{2}{64})$.

Dessa forma, concluímos que as retas $r_{\alpha(u_2)}$ e $r_{\alpha(v_2)}$ são paralelas. Substituindo $t = \frac{-2\sqrt{3}}{8}$ obtemos que o ponto $(\frac{-1-\sqrt{3}}{8}, \frac{-16\sqrt{3}-24}{(64)^2})$ é comum às duas retas, logo elas são coincidentes e (u_2, v_2) corresponde a uma bitangência de α . Essa bitangência é regular, pois u_2 e v_2 não são inflexões de α . Além disso, é possível verificar que $\alpha''(u_2) = \alpha''(v_2) = (0, \frac{6}{8})$, logo $k_\alpha(u_2)k_\alpha(v_2) > 0$ e, pela Observação 2.1.14, (u_2, v_2) é uma bitangência de mesmo lado.

Assim, $i = 2$, $t_s = 1$, $t_o = c_1 = c_2 = 0$ e pela Proposição 2.4.5 segue que:

$$\text{ind}(F_\alpha) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2 = -2 + 2 = 0.$$

Na próxima seção, estudamos uma classe de curvas monomiais, bem como algumas propriedades do campo de vetores associado a elas.

2.5 Curvas Monomiais e Índices Topológicos

Nesta seção, consideramos curvas cujos domínios são abertos $I \subset \mathbb{R}$, contendo a origem, da forma $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ com $0 < k < m$, $a_k b_m \neq 0$ e calculamos o índice topológico de F_β levando em consideração a paridade de k e m .

Considere $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ como descrita acima. Note que

$$\begin{aligned} \det(\beta'(u), \beta(u) - \beta(v)) &= \begin{vmatrix} k a_k u^{k-1} & m b_m u^{m-1} \\ a_k(u^k - v^k) & b_m(u^m - v^m) \end{vmatrix} \\ &= k a_k b_m u^{k-1} (u^m - v^m) - m a_k b_m u^{m-1} (u^k - v^k) \\ &= a_k b_m (k u^{k+m-1} - k u^{k-1} v^m - m u^{k+m-1} + m u^{m-1} v^k) \\ &= a_k b_m ((k - m) u^{k+m-1} + m u^{m-1} v^k - k u^{k-1} v^m). \end{aligned}$$

Então, se considerarmos $F_\beta(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$, temos:

$$f_1(u, v) = \frac{a_k b_m}{(u - v)^2} ((k - m) u^{k+m-1} + m u^{m-1} v^k - k u^{k-1} v^m).$$

Como $f_2(u, v) = -f_1(v, u)$ concluimos que:

$$F_\beta = \frac{a_k b_m}{(u - v)^2} ((k - m) u^{k+m-1} + m u^{m-1} v^k - k u^{k-1} v^m, (m - k) v^{k+m-1} - m u^k v^{m-1} + k u^m v^{k-1}). \quad (2.11)$$

Observe que para $u \neq v$ temos:

$$\begin{aligned} f_1(u - v)^2 &= k a_k b_m u^{k-1} (u^m - v^m) - m a_k b_m u^{m-1} (u^k - v^k) \\ &= a_k b_m (u - v) [k u^{k-1} (u^{m-1} + u^{m-2} v + \dots + u^{m-k} v^{k-1} + u^{m-(k+1)} v^k \\ &\quad + u^{m-(k+2)} v^{k+1} + \dots + u^{m-(m-1)} v^{m-2} + v^{m-1}) \\ &\quad - m u^{m-1} (u^{k-1} + u^{k-2} v + u^{k-3} v^2 + \dots + v^{k-1})] \\ &= a_k b_m (u - v) [(k - m) u^{k+m-2} + (k - m) u^{k+m-3} v + \dots + (k - m) u^{m-1} v^{k-1} \\ &\quad + k u^{k-1} (u^{m-(k+1)} v^k + u^{m-(k+2)} v^{k+1} + \dots + u^{m-(m-1)} v^{m-2} + v^{m-1})] \\ &= a_k b_m (u - v) [(k - m) u^{k+m-2} + (k - m) u^{k+m-3} v + \dots + (k - m) u^{m-1} v^{k-1} \\ &\quad + k (u^{m-2} v^k + u^{m-3} v^{k+1} + \dots + u^k v^{m-2} + u^{k-1} v^{m-1})]. \end{aligned}$$

Considere $G(u, v) = (k - m) u^{k+m-2} + (k - m) u^{k+m-3} v + \dots + (k - m) u^{m-1} v^{k-1}$ e $H(u, v) = -k u^{k-1} (u^{m-(k+1)} v^k + u^{m-(k+2)} v^{k+1} + \dots + u^{m-(m-1)} v^{m-2} + v^{m-1})$.

Observe que, $G(u, v)$ possui k parcelas com $m - k$ unidades cada e $H(u, v)$ contém $(m - k)$ parcelas, cada qual com k unidades. Logo, é possível agruparmos os termos de G e H .

Assim, $f_1(u, v)(u - v)^2$ é igual a:

$$\begin{aligned} & a_k b_m (u - v) [-u^{m-2}(u^k - v^k) - \dots - u^k(u^{m-2} - v^{m-2}) - u^{k-1}(u^{m-1} - v^{m-1}) \\ & - u^{m-2}v(u^{k-1} - v^{k-1}) - \dots - u^k v(u^{m-3} - v^{m-3}) - u^{k-1}v(u^{m-2} - v^{m-2}) \\ & \quad \vdots \\ & - u^{m-2}v^{k-1}(u - v) - \dots - u^k v^{k-1}(u^{m-k-1} - v^{m-k-1}) - u^{k-1}v^{k-1}(u^{m-k} - v^{m-k})]. \end{aligned}$$

Colocando em evidência novamente o fator $(u - v)$ obtemos a seguinte expressão para $f_1(u, v)$:

$$\begin{aligned} & a_k b_m [-u^{m-2}(u^{k-1} + g_{k-1}(u, v)) - \dots - u^k(u^{m-3} + g_{m-3}(u, v)) - u^{k-1}(u^{m-2} + g_{m-2}(u, v)) \\ & - u^{m-2}v h_{k-2}(u, v) - \dots - u^k v h_{m-4}(u, v) - u^{k-1}v h_{m-3}(u, v) \\ & \quad \vdots \\ & - u^{m-2}v^{k-1} - \dots - u^k v^{k-1} h_{m-k-2}(u, v) - u^{k-1}v^{k-1} h_{m-k-1}(u, v)], \end{aligned}$$

em que $h_j(u, v) = u^j + u^{j-1}v + \dots + v^j$ e $g_j(u, v) = h_j(u, v) - u^j$ são polinômios homogêneos de grau j .

Ou seja,

$$f_1(u, v) = a_k b_m ((k - m)u^{k+m-3} - v h(u, v)). \quad (2.12)$$

em que $h(u, v)$ é um polinômio homogêneo de grau $k + m - 4$, o que significa que cada função coordenada do campo F_β é um polinômio homogêneo de grau $k + m - 3$.

Agora, note que:

$$\begin{aligned} \det(\beta'(u), \beta''(u)) &= \begin{vmatrix} k a_k u^{k-1} & m b_m u^{m-1} \\ k(k-1) a_k u^{k-2} & m(m-1) b_m u^{m-2} \end{vmatrix} \\ &= a_k b_m k m (m-1) u^{k+m-3} - a_k b_m k m (k-1) u^{k+m-3} \\ &= k m a_k b_m (m-k) u^{k+m-3}. \end{aligned}$$

Então, por (2.7), temos:

$$F_\beta(u, v) = \frac{1}{2} (-k m a_k b_m (m-k) u^{k+m-3}, k m a_k b_m (m-k) u^{k+m-3}). \quad (2.13)$$

Observe no caso $k = 1$ e $m = 2$, o campo $F_\beta(u, v) = (-a_k b_m, a_k b_m) \neq (0, 0)$, ou seja, o campo não possui singularidades.

Observação 2.5.1. *Seja F_β como em (2.11). Quando k e m são pares, todos os pontos da forma $(u, -u)$ são singularidades de F_β , ou seja, este campo é nulo sobre a reta $v = -u$. De fato, se $F_\beta(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$, temos:*

$$\begin{aligned} f_1(u, -u) &= \frac{a_k b_m}{(u - (-u))^2} ((k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}(-u)^k - ku^{k-1}(-u)^m) \\ &= \frac{a_k b_m}{4u^2} ((k - m)u^{k+m-1} + (m - k)u^{k+m-1}) = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_2(u, -u) &= \frac{a_k b_m}{(u - (-u))^2} ((m - k)(-u)^{k+m-1} - mu^k(-u)^{m-1} + ku^m(-u)^{k-1}) \\ &= \frac{a_k b_m}{4u^2} ((k - m)u^{k+m-1} + (m - k)u^{k+m-1}) = 0. \end{aligned}$$

Nesse contexto, para eliminar estes zeros de F_β , vamos considerar o campo $\frac{F_\beta}{(u+v)^2}$, que por simplicidade, ainda denotamos por F_β .

Proposição 2.5.2. *Seja $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, com $0 < k < m$ e $a_k b_m \neq 0$. Considerando F_β como em (2.11) e em (2.13), temos que a origem é a única singularidade de F_β .*

Demonstração. Claramente, pela expressão (2.13), temos $(0, 0)$ uma singularidade do campo F_β .

Resta provar que $(0, 0)$ é a única singularidade de F_β para $u \neq v$. Suponha $(u, v) \neq (0, 0)$ satisfazendo $F_\beta(u, v) = (0, 0)$. Como as coordenadas de F_β são polinômios homogêneos de grau $k + m - 3$, se (u, v) é um zero de F_β , então todos os pontos da forma (tu, tv) também são zeros de F_β , pois $F_\beta(tu, tv) = t^{k+m-3} F_\beta(u, v)$.

Supondo $u \neq v$ temos tanto u quanto v não nulos, pois se um deles é zero e outro não, chegamos em $F_\alpha(u, v) \neq (0, 0)$ uma vez que, por (2.12), as coordenadas de F_β são polinômios homogêneos de grau $k + m - 3$. Então, defina $x = \frac{v}{u}$.

Observe que $f_1(u, v) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{(k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m}{(u - v)^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{u^{k+m-1}((k - m) + m(\frac{v}{u})^k - k(\frac{v}{u})^m)}{(u - v)^2} = 0 \\ \Leftrightarrow \frac{((k - m) + mx^k - kx^m)}{(1 - x)^2} = 0. &\tag{2.14} \end{aligned}$$

E ainda $f_2(u, v) = 0$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} \frac{(m-k)v^{k+m-1} - mu^k v^{m-1} + ku^m v^{k-1}}{(u-v)^2} = 0 &\Leftrightarrow \frac{u^m v^{k-1} \left((m-k) \left(\frac{v}{u}\right)^m - m \left(\frac{v}{u}\right)^{m-k} + k \right)}{(u-v)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{(m-k)x^m - mx^{m-k} + k}{(1-x)^2} = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

De (2.14) e (2.15) segue que $F_\beta(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se $F_\beta(1, x) = (0, 0)$, ou seja,

$$\begin{cases} \frac{(k-m) + mx^k - kx^m}{(1-x)^2} = 0 \\ \frac{k - mx^{m-k} + (m-k)x^m}{(1-x)^2} = 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Vamos analisar os zeros do sistema polinomial abaixo:

$$\begin{cases} p_1(x) = (k-m) + mx^k - kx^m = 0 \\ p_2(x) = k - mx^{m-k} + (m-k)x^m = 0. \end{cases} \quad (2.17)$$

Como $p_1(x)$ é um polinômio com coeficientes reais não nulos, $0 < k < m$ e ocorre duas mudanças de sinais na sequência dos coeficientes $(k-m), m, -k$, obtemos pela Regra de Sinais de Descartes, que $p_1(x)$ possui no máximo duas raízes positivas contadas as multiplicidades. Dado que $x = 1$ é raiz de $p_1(x)$ e de $p_1'(x) = kmx^{k-1} - kmx^{m-1}$, então $x = 1$ é raiz de multiplicidade 2 de $p_1(x)$. O mesmo ocorre para $p_2(x)$. No entanto, $x = \frac{v}{u} = 1$ corresponde ao caso $u = v$, mas estamos considerando $u \neq v$. Logo, o sistema (2.17) não possui soluções positivas.

Para estudar as soluções negativas do sistema (2.17), basta analisar as soluções positivas do seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} q_1(x) = (k-m) + m(-x)^k - k(-x)^m = 0 \\ q_2(x) = k - m(-x)^{m-k} + (m-k)(-x)^m = 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Vamos dividir nosso problema em quatro casos, levando em consideração a paridade de k e m .

1. $(k, m) = (\text{ímpar}, \text{par})$

Veja que $q_1(x) = (k-m) - mx^k - kx^m$ possui todos os coeficientes negativos.

Então, pelo Teorema 1.4.6, q_1 não admite raízes positivas, ou seja, não há soluções positivas para o sistema (2.18) e assim o sistema de equações (2.17) não possui soluções negativas. Portanto, o campo F_β não admite outra singularidade, além de $(0, 0)$.

2. $(k, m) = (\text{par}, \text{par})$

Neste caso temos:

$$\begin{cases} q_1(x) = (k - m) + mx^k - kx^m = 0 \\ q_2(x) = k - mx^{m-k} + (m - k)x^m = 0. \end{cases}$$

Note que $x = 1$ é raiz de $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_1'(x)$ e $q_2'(x)$, donde segue que $x = 1$ é raiz de multiplicidade 2 de q_1 e q_2 . Como ocorre duas mudanças de sinais nos coeficientes dos polinômios q_1 e q_2 , segue do Teorema 1.4.6, que $x = 1$ é a única raiz positiva, de multiplicidade 2 de q_1 e q_2 , ou seja, $x = 1$ é solução (com multiplicidade 2) do sistema (2.18). Consequentemente $x = -1$ é solução (com multiplicidade 2) do sistema (2.17). Pela Observação 2.5.1, consideramos o campo $\frac{F_\beta(u,v)}{(u+v)^2}$. Mas, neste caso, os denominadores das equações do sistema (2.16), contêm os fatores $(1-x)^2$ e $(1+x)^2$. Logo, esse sistema não admite soluções.

3. $(k, m) = (\text{par}, \text{ímpar})$

Veja que

$$\begin{cases} q_1(x) = (k - m) + mx^k + kx^m = 0 \\ q_2(x) = k + mx^{m-k} - (m - k)x^m = 0. \end{cases}$$

Analisando a mudança de sinais dos coeficientes de $q_1(x)$ e $q_2(x)$, segue do Teorema 1.4.6, que possuem no máximo uma raiz positiva. Observe que $q_1(0) = k - m < 0$ e $q_1(1) = 2k > 0$. Como $q_1(x)$ é uma função polinomial, portanto contínua em $[0, 1]$, temos pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $q_1(x_0) = 0$. Ou seja, $q_1(x)$ possui apenas uma raiz positiva e essa pertence ao intervalo $(0, 1)$.

No entanto, se existe raiz para $q_2(x)$ esta não pode ser x_0 . De fato, $q_2(0) = k > 0$ e

$$q_2'(x) = m(m-k)x^{m-k-1} - m(m-k)x^{m-1} = (-m(m-k)x^k + m(m-k))x^{m-k-1} > 0,$$

pois $x^{m-k-1} > 0$ e $-m(m-k)x^k + m(m-k) = m(m-k)(1-x^k) > 0$ para $x \in (0, 1)$. Assim, no intervalo $(0, 1)$ a função polinomial $q_2'(x)$ é positiva, portanto $q_2(x)$ é crescente, donde concluímos que $q_2(x) \neq 0$, para todo $x \in (0, 1)$ e o sistema (2.16) não possui solução não trivial.

4. $(k, m) = (\text{ímpar}, \text{ímpar})$

Pelo Teorema 1.4.6, os polinômios

$$\begin{cases} q_1(x) &= (k-m) - mx^k + kx^m \\ q_2(x) &= k - mx^{m-k} - (m-k)x^m \end{cases}$$

possuem no máximo uma raiz positiva.

Visto que q_2 é uma função contínua em $[0, 1]$, tal que $q_2(0) = k > 0$ e $q_2(1) = 2(k-m) < 0$, a única raiz positiva de q_2 pertence ao intervalo $(0, 1)$. Porém, $q_1(0) = k-m < 0$ e para todo $x \in (0, 1)$ temos $q_1'(x) = kmx^{m-1} - kmx^{k-1} = kmx^{k-1}(x^{m-k} - 1) < 0$. Dessa forma, $q_1(x)$ é uma função decrescente no intervalo $(0, 1)$ e assim $q_1(x) \neq 0$ para todo $x \in (0, 1)$.

Logo, não existem soluções positivas para (2.18), nem soluções negativas para (2.17), conseqüentemente o sistema (2.16) não admite soluções não triviais.

Portanto, $(0, 0)$ é a única singularidade de F_β .

□

A seguir definimos duas aplicações as quais denotamos por $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Estas aplicações correspondem a reflexão em torno da reta $u = v$ e em torno da reta $v = -u$, respectivamente dadas por:

$$\begin{aligned} h_1 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (v, u), \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$\begin{aligned} h_2 : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\mapsto (-v, -u). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Por meio das simetrias de h_1 e h_2 , é possível obtermos uma configuração do campo de vetores F_β em uma vizinhança de sua singularidade. Para este propósito provamos algumas propriedades envolvendo F_β, h_1 e h_2 como segue:

Lema 2.5.3. *Sejam $F_\beta, h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ como em (2.11), (2.19) e (2.20), respectivamente.*

1. $h_1(F_\beta(u, v)) = -F_\beta(h_1(u, v))$.
2. Se k e m têm paridades opostas, então $h_2(F_\beta(u, v)) = F_\beta(h_2(u, v))$.
3. Se k e m têm a mesma paridade, então $h_2(F_\beta(u, v)) = -F_\beta(h_2(u, v))$.

Demonstração. Sabemos de (2.11) que $F_\beta(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ com

$$f_1(u, v) = \frac{a_k b_m}{(u-v)^2} ((k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m)$$

e $f_2(u, v) = -f_1(v, u)$.

1. Veja que $h_1(F_\beta(u, v)) = h_1(f_1(u, v), f_2(u, v)) = (f_2(u, v), f_1(u, v))$. Por outro lado,

$$F_\beta(h_1(u, v)) = F_\beta(v, u) = (f_1(v, u), f_2(v, u)) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v)).$$

Logo, $h_1(F_\beta(u, v)) = -F_\beta(h_1(u, v))$.

2. Observe que

$$\begin{aligned} F_\beta(h_2(u, v)) &= F_\beta(-v, -u) = F_\beta(h_1(-u, -v)) = -h_1(F_\beta(-u, -v)) \\ &= -h_1(f_1(-u, -v), f_2(-u, -v)) = (-f_2(-u, -v), -f_1(-u, -v)). \end{aligned}$$

Se k e m têm paridades opostas, então $k + m - 1$ é par e obtemos:

$$\begin{aligned} f_2(-u, -v) &= a_k b_m \left(\frac{(m-k)(-v)^{k+m-1} - m(-u)^k(-v)^{m-1} + k(-u)^m(-v)^{k-1}}{(v-u)^2} \right) \\ &= a_k b_m \left(\frac{(m-k)v^{k+m-1} - mu^k v^{m-1} + ku^m v^{k-1}}{(u-v)^2} \right) = f_2(u, v). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_1(-u, -v) &= a_k b_m \left(\frac{(k-m)(-u)^{k+m-1} + m(-u)^{m-1}(-v)^k - k(-u)^{k-1}(-v)^m}{(v-u)^2} \right) \\ &= a_k b_m \left(\frac{(k-m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m}{(u-v)^2} \right) = f_1(u, v). \end{aligned}$$

Portanto,

$$F_\beta(h_2(u, v)) = (-f_2(-u, -v), -f_1(-u, -v)) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v)) = h_2(F_\beta(u, v)).$$

3. Como acima, $-F_\beta(h_2(u, v)) = (f_2(-u, -v), f_1(-u, -v))$.

Se k e m têm a mesma paridade, então $k + m - 1$ é ímpar e

$$\begin{aligned} f_2(-u, -v) &= a_k b_m \left(\frac{(m-k)(-v)^{k+m-1} - m(-u)^k(-v)^{m-1} + k(-u)^m(-v)^{k-1}}{(v-u)^2} \right) \\ &= a_k b_m \left(\frac{-(m-k)v^{k+m-1} + mu^k v^{m-1} - ku^m v^{k-1}}{(u-v)^2} \right) = -f_2(u, v). \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_1(-u, -v) &= a_k b_m \left(\frac{(k-m)(-u)^{k+m-1} + m(-u)^{m-1}(-v)^k - k(-u)^{k-1}(-v)^m}{(v-u)^2} \right) \\ &= a_k b_m \left(\frac{-(k-m)u^{k+m-1} - mu^{m-1}v^k + ku^{k-1}v^m}{(u-v)^2} \right) = -f_1(u, v). \end{aligned}$$

Ou seja,

$$-F_\beta(h_2(u, v)) = (f_2(-u, -v), f_1(-u, -v)) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v)) = h_2(F_\beta(u, v)).$$

□

No que segue, estudamos o comportamento do campo vetorial F_β no plano, com intuito de calcularmos o índice topológico de F_β . Como esse campo possui apenas o ponto $(0, 0)$ como singularidade, o índice topológico coincide com $\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0))$. Em [10], os autores calculam o índice topológico utilizando a fórmula de Bendixson que depende da quantidade de setores elípticos (e) e hiperbólicos (h) do campo, isto é,

$$\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0)) = 1 + \frac{e - h}{2}.$$

Nesta dissertação, utilizamos a mesma ideia da prova apresentada pelos autores em [10], todavia vamos utilizar a definição geométrica do Índice de Poincaré-Hopf para campos de vetores contínuos em \mathbb{R}^2 , ou seja, a Definição 1.3.10 que depende do comportamento do campo apenas em uma vizinhança de sua singularidade.

Observação 2.5.4. *Do Lema 2.5.3, concluímos que é suficiente estudarmos o campo F_β nas seguintes regiões do plano: $A = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < u < v\}$ e $B = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < -u < v\}$.*

De fato, como todos os vetores do semiplano $u < v$ são levados por h_1 no semiplano $u > v$, pelo Lema 2.5.3 (item (1)) basta conhecer $F_\beta(u, v)$ para $u < v$. Agora analisemos os vetores do semiplano $u < v$, que é dividido pelas retas $v = u$ e $v = -u$ em quatro setores: A , B , $h_2(A) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; u < v < 0\}$ e $h_2(B) = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; 0 < v < -u\}$. Isto justifica o fato de que basta analisarmos F_β nas regiões A e B do plano, pois pelo Lema 2.5.3 (itens (2) e (3)) conhecemos F_β em $h_2(A)$ e $h_2(B)$, dependendo da paridade de k e m .

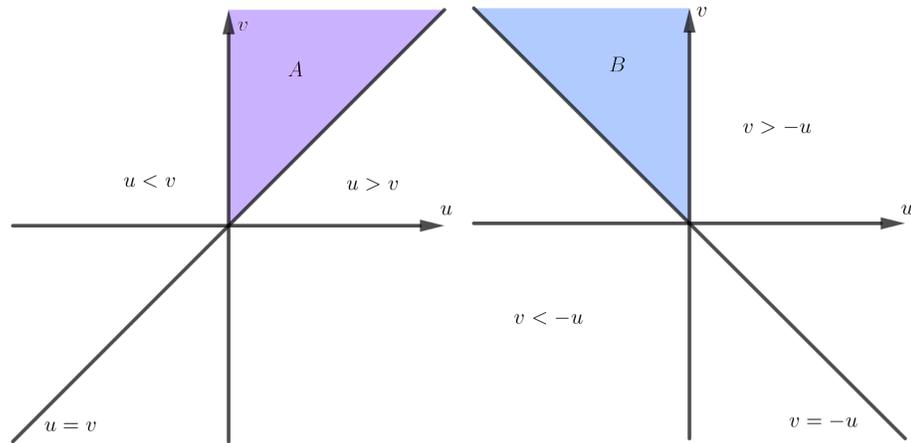


Figura 2.12: Representação das regiões A e B, no plano

Observação 2.5.5. Para estudarmos os sinais das funções coordenadas do campo vetorial $F_\beta(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ na região B, basta sabermos os sinais destas funções na região $D_1 = \{(u, 1); (u, 1) \in B\} = \{(u, 1); 0 < -u < 1\}$. De fato, para todo $v_0 > 0$ considere $D_{v_0} = \{(u, v_0); 0 < -u < v_0\}$. É claro que $B = \cup_{v>0} D_v$.

Vamos supor $a_k b_m > 0$. O caso $a_k b_m < 0$ é análogo. Sejam

$$\begin{aligned} g_1(u, v) &= (k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v^k - ku^{k-1}v^m \quad e \\ g_2(u, v) &= (m - k)v^{k+m-1} - mu^k v^{m-1} + ku^m v^{k-1}. \end{aligned}$$

Veja que para $v_0 > 0$ fixado,

$$\begin{aligned} g_1(u, v_0) &= (k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1}v_0^k - ku^{k-1}v_0^m \\ &= v_0^{k+m-1} \left((k - m)\left(\frac{u}{v_0}\right)^{k+m-1} + m\left(\frac{u}{v_0}\right)^{m-1} - k\left(\frac{u}{v_0}\right)^{k-1} \right) \\ &= v_0^{k+m-1} \left((k - m)y^{k+m-1} + my^{m-1} - ky^{k-1} \right) \\ &= v_0^{k+m-1} g_1(y, 1) \end{aligned}$$

em que $y = \frac{u}{v_0}$.

Como $(u, v_0) \in B$ temos que $0 < -y < 1$ e $v_0^{k+m-1} > 0$, donde obtemos que $(y, 1) \in D_1$ e $g_1(u, v_0)$ e $g_1(y, 1)$ possuem o mesmo sinal.

Analogamente $g_2(u, v_0) = v_0^{k+m-1} g_2(y, 1)$ com $y = \frac{u}{v_0}$ implicando que $g_2(u, v_0)$ e $g_2(y, 1)$ têm mesmo sinal.

Dos cálculos acima, e do fato de $f_1(u, v)(u - v)^2 = a_k b_m g_1(u, v)$ e $f_2(u, v)(u - v)^2 = a_k b_m g_2(u, v)$, com $a_k b_m > 0$ é possível concluir os sinais das funções coordenadas de F_β , sa-

bendo os sinais delas na região D_1 .

Quando k e m são números pares, temos $f_1(u, v)(u - v)^2(u + v)^2 = a_k b_m g_1(u, v)$ e $f_2(u, v)(u - v)^2(u + v)^2 = a_k b_m g_2(u, v)$, portanto a conclusão é a mesma.

No próximo resultado, calculamos o índice topológico de F_β . Pela Proposição 2.5.2, $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ é um zero isolado de F_β , então $\text{ind}(F_\beta)$ coincide com o $\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0))$. E na demonstração desse resultado, utilizamos a definição de caráter geométrico do Índice de Poincaré-Hopf que foi apresentada na Seção 1 do Capítulo 1.

Teorema 2.5.6. *Seja $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, com $0 < k < m$ e $a_k b_m \neq 0$. Então, o índice topológico de F_β é:*

(i) $\text{ind}(F_\beta) = -1$, se k e m têm a mesma paridade.

(ii) $\text{ind}(F_\beta) = -2$, se k é par e m é ímpar.

(iii) $\text{ind}(F_\beta) = 0$, se k é ímpar e m é par.

Demonstração. Denotemos $F_\beta(u, v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$ e analisemos primeiramente o caso $u \neq v$. Se $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ situa-se no primeiro quadrante, então $u, v > 0$ e de (2.12) constatamos que se a_k e b_m possuem mesmo sinal, temos que $a_k b_m > 0$, portanto $f_1(u, v) < 0$ e $f_2(u, v) = -f_1(v, u) > 0$. Se a_k e b_m possuem sinais contrários, temos que $a_k b_m < 0$ e portanto $f_1(u, v) > 0$ e $f_2(u, v) < 0$. Como a análise nos dois casos é análoga, vamos considerar $a_k b_m > 0$.

Se k e m tem paridades opostas, então do item 2 do Lema 2.5.3, o vetor que representa o campo F_β no ponto $(-v, -u)$ (terceiro quadrante) tem origem neste ponto e é paralelo a $(-f_2(u, v), -f_1(u, v))$, ou seja, possui primeira coordenada negativa e a segunda positiva. Do item 3 do Lema 2.5.3, se k e m têm mesma paridade, o vetor que representa F_β no ponto $(-v, -u)$ é $F_\beta(-v, -u) = (f_2(u, v), f_1(u, v))$. Então representamos os vetores de F_β no primeiro e terceiro quadrante considerando a paridade de k e m como na Figura 2.13.

Considere B e D_1 as regiões definidas na Observação 2.5.5. Abaixo vamos estudar o comportamento das coordenadas do campo F_β na região D_1 , que pela observação anterior, nos dá o comportamento do campo vetorial na região B , e pelo Lema 2.5.3, chegamos a uma configuração de F_β no segundo e quarto quadrante.

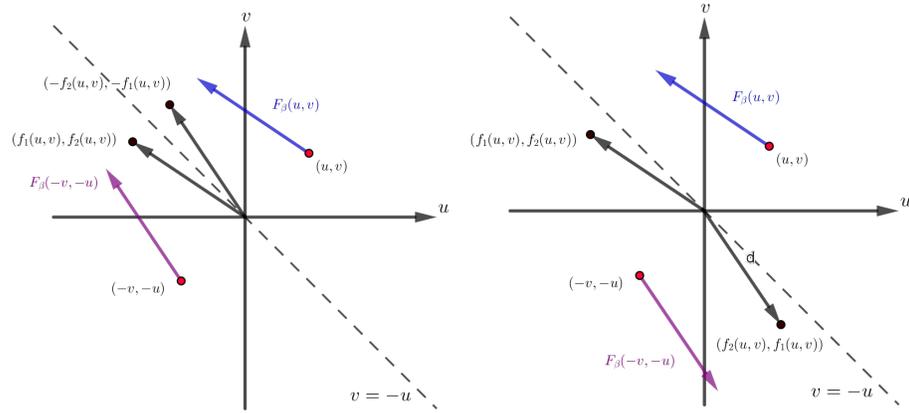


Figura 2.13: k e m com paridades opostas e k e m com mesma paridade, respectivamente

- $(k, m) = (\text{ímpar}, \text{par})$

Para $(u, v) \in B$ temos $u < 0$ e $v > 0$ e assim

$$f_1(u, v)(u - v)^2 = a_k b_m \left[\overbrace{(k - m)u^{k+m-1}}^{<0} + \overbrace{m u^{m-1} v^k}^{<0} - \overbrace{k u^{k-1} v^m}^{<0} \right] < 0$$

$$f_2(u, v)(u - v)^2 = a_k b_m \left[\overbrace{(m - k)v^{k+m-1}}^{>0} - \overbrace{m u^k v^{m-1}}^{>0} + \overbrace{k u^m v^{k-1}}^{>0} \right] > 0.$$

Assim, concluímos que $f_1(u, v) < 0$ e $f_2(u, v) > 0$ na região B . Pelo Lema 2.5.3, temos $F_\beta(-v, -u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$. Mas, $F_\beta(v, u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$ e como $F_\beta(h_2(v, u)) = h_2(F_\beta(h_1(u, v))) = h_2(-h_1(F_\beta(u, v))) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$, temos $F_\beta(-u, -v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$. Veja o esboço destes vetores na Figura 2.14.

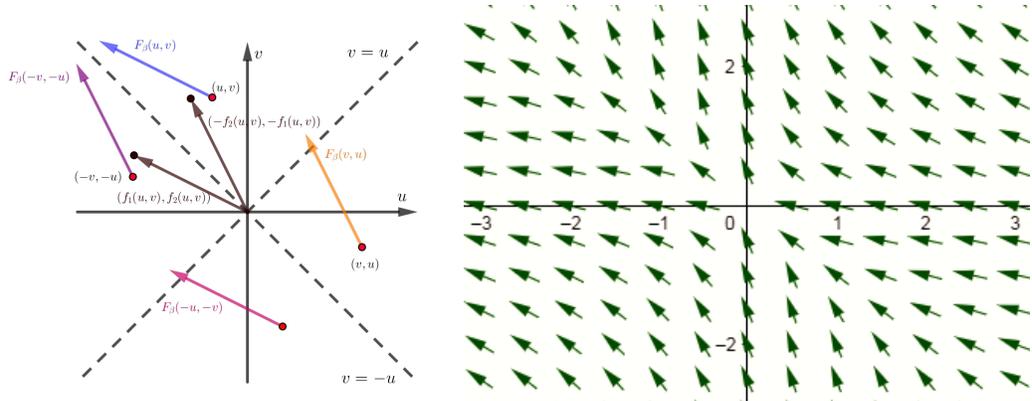


Figura 2.14: Segundo e quarto quadrante (k ímpar e m par)

Veja também que para todo $v \neq 0$ temos $F_\beta(0, v) = (0, a_k b_m (m - k)v^{m+k-3})$ um

vetor vertical, com $f_2(0, v) > 0$ já que $k + m - 3$ é par. E para todo $u \neq 0$, o vetor $F_\beta(u, 0) = (a_k b_m (k - m) u^{k+m-3}, 0)$ é horizontal, com $f_1(u, 0) < 0$.

Nesse caso, temos que γ dá duas voltas positivas e duas voltas negativas em torno de S^1 , enquanto F_β dá uma volta completa ao redor de S_e , no sentido anti-horário. Logo, $\text{ind}(F_\beta) = 0$.

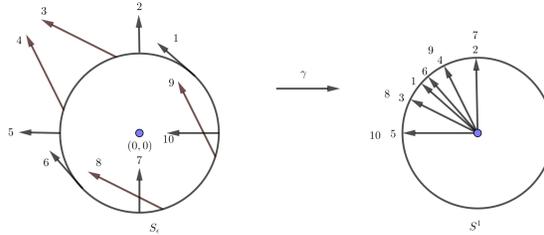


Figura 2.15: Aplicação de Gauss (k ímpar e m par)

- $(k, m) = (\text{par}, \text{par})$

Para $0 < -u < 1$, ou ainda, $-1 < u < v$, defina

$$p_1(u) = (k - m)u^m + mu^{m-k} - k \text{ e } p_2(u) = ku^m - mu^k + (m - k).$$

Veja que $p_1(u) = u^{1-k}g_1(u, 1)$ e $p_2(u) = g_2(u, 1)$, com g_1 e g_2 como na Observação 2.5.5. Temos que $p_1(u) = p_2(u) = 0$ se, e somente se, $g_1(u, 1) = g_2(u, 1) = 0$, ou seja,

$$(k - m)u^{k+m-1} + mu^{m-1} - ku^{k-1} = 0 \text{ e } ku^m - mu^k + (m - k) = 0.$$

Note que como k e m são pares, os polinômios

$$\begin{aligned} g_1(-u, 1) &= -(k - m)u^{k+m-1} - mu^{m-1} + ku^{k-1} = -g_1(u, 1) \text{ e} \\ g_2(-u, 1) &= ku^m - mu^k + (m - k) = g_2(u, 1). \end{aligned}$$

Assim, $g_1(u, 1) = g_2(u, 1) = 0$ se, e somente se, $g_1(-u, 1) = g_2(-u, 1) = 0$. Como há duas trocas de sinais em cada uma das sequências $m - k, -m, k$ e $k, -m, m - k$, o Teorema 1.4.6, nos garante que os polinômios $g_1(-u, 1)$ e $g_2(-u, 1)$ possuem no máximo duas raízes positivas, contando as multiplicidades. Assim p_1 e p_2 possuem no máximo duas raízes negativas cada. É fácil verificar que $x = -1$ é raiz de p_1, p_2, p'_1 e p'_2 . O que implica que esta raiz é de multiplicidade 2 para p_1

e p_2 . No entanto, $-1 \notin (-1, 0)$ e assim tais polinômios não possuem zeros neste intervalo.

Uma vez que p_1 e p_2 são funções contínuas sem raízes em $(-1, 0)$, $p_1(0) = -k < 0$ e $p_2(0) = m - k > 0$, então $p_1(u) < 0$ e $p_2(u) > 0$ para todo $u \in (-1, 0)$.

E como

$$\begin{aligned} f_1(u, 1)(u - 1)^2(u + 1)^2 &= a_k b_m u^{k-1} p_1(u) \quad \text{e} \\ f_2(u, 1)(u - 1)^2(u + 1)^2 &= a_k b_m p_2(u) \end{aligned}$$

temos $f_1(u, 1) > 0$ e $f_2(u, 1) > 0$, para todo $u \in (-1, 0)$. Portanto, da Observação 2.5.5, $f_1(u, v) > 0$ e $f_2(u, v) > 0$ na região B .

Pelo Lema 2.5.3, $F_\beta(-v, -u) = (f_2(u, v), f_1(u, v))$, $F_\beta(v, u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$ e como

$$\begin{aligned} F_\beta(h_2(v, u)) &= -h_2(F_\beta(v, u)) = -h_2(F_\beta(h_1(u, v))) \\ &= -h_2(-h_1(F_\beta(u, v))) = (-f_1(u, v), -f_2(u, v)), \end{aligned}$$

concluimos que $F_\beta(-u, -v) = (-f_1(u, v), -f_2(u, v))$. Veja a figura 2.16.

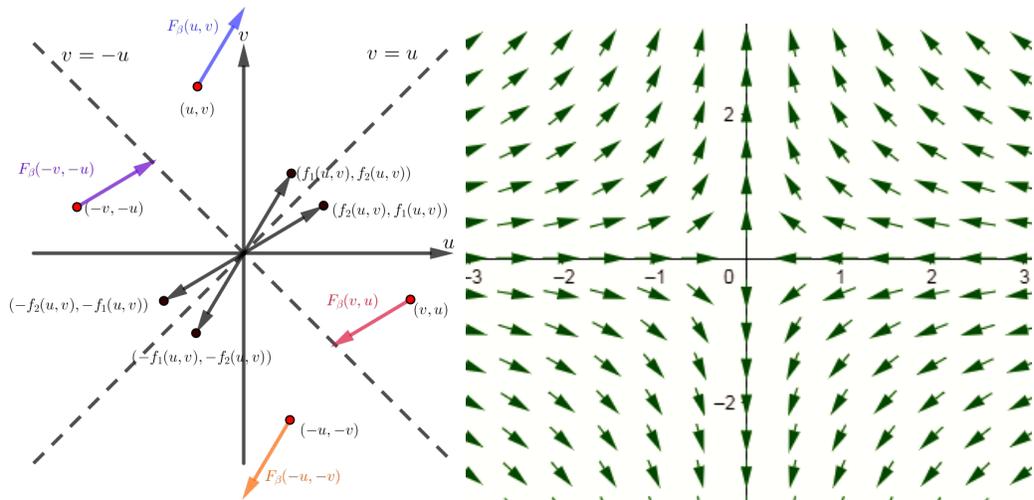


Figura 2.16: Segundo e quarto quadrante (k par e m par)

Além disso, para todo $v \neq 0$, $F_\beta(0, v) = (0, a_k b_m (m - k) v^{m+k-5})$ é um vetor vertical, em que $f_2(0, v) > 0$, se $v > 0$ e $f_2(0, v) < 0$, se $v < 0$ já que $m + k - 5$ é ímpar. E para todo $u \neq 0$, o vetor $F_\beta(u, 0) = (a_k b_m (k - m) u^{m+k-5}, 0)$ é horizontal, com $f_1(u, 0) < 0$, se $u > 0$ e $f_1(u, 0) > 0$, se $u < 0$, pois $k + m - 5$ é ímpar e $k - m$ é negativo.

Então, é possível obtermos a configuração do campo em torno de uma circunferência de raio $\varepsilon > 0$. Nessas condições, a aplicação γ percorre S^1 uma vez, no sentido horário, enquanto F_β dá uma volta completa em torno de S_ε , no sentido anti-horário. Então, $\text{ind}(F_\beta) = -1$.

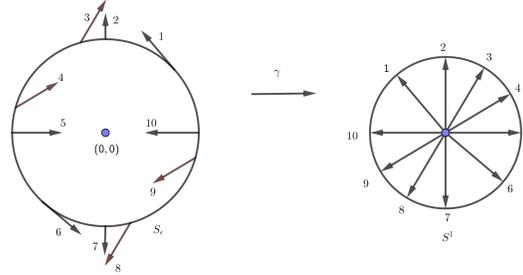


Figura 2.17: Aplicação de Gauss (k par e m par)

- $(k, m) = (\text{ímpar}, \text{ímpar})$

Seja $p_1(u) = (k - m)u^m + mu^{m-k} - k$, com $0 < -u < 1$. Pelo Teorema 1.4.6, a equação $p_1(-u) = -(k - m)u^m + mu^{m-k} - k = 0$ possui no máximo uma solução positiva, donde $p_1(u)$ possui no máximo uma raiz negativa. Como $p_1(-1) = 2(m - k) > 0$ e $p_1(0) = -k < 0$, temos por continuidade, que este polinômio possui uma raiz, digamos u_0 , em $(-1, 0)$. Veja ainda que

$$p_1'(u) = m(k - m)u^{m-1} + m(m - k)u^{m-k-1} = m(m - k)u^{m-k-1}(1 - u^k) < 0,$$

para $u \in (-1, 0)$ já que $m - k - 1$ é ímpar. Deste modo, $p_1(u)$ é decrescente em $(-1, 0)$. Assim, $p_1(u) > 0$, para todo $u \in (-1, u_0)$ e $p_1(u) < 0$, para todo $u \in (u_0, 0)$.

Portanto, $f_1(u, 1)(u - 1)^2 = a_k b_m u^{k-1} p_1(u)$, e por consequência $f_1(u, v)$ muda de sinal, conforme $p_1(u)$ muda de sinal em $(-1, 0)$. Mais precisamente, para todo $(u, v) \in B$, com $u \in (-1, u_0)$ temos $f_1(u, v) > 0$ e $f_2(u, v) > 0$ e para $u \in (u_0, 0)$ temos $f_1(u, v) < 0$ e $f_2(u, v) > 0$.

Observe que como $p_1(u_0) = 0$ temos que $f_1(u_0, 1) = 0$, logo

$$F_\beta(u_0, 1) = \frac{a_k b_m}{(u_0 - 1)^2} (f_1(u_0, 1), f_2(u_0, 1)) = \left(0, \frac{a_k b_m f_2(u_0, 1)}{(u_0 - 1)^2} \right) \quad (2.21)$$

é um vetor vertical.

Agora, considere $p_2(u) = ku^m - mu^k + (m - k)$. Visto que $p_2(-1) = 2(m - k) > 0$,

$p_2(0) = m - k > 0$ e para todo $u \in (-1, 0)$,

$$p_2'(u) = km u^{m-1} - km u^{k-1} = km u^{k-1}(u^{m-k} - 1) < 0,$$

verificamos que $p_2(u)$ é decrescente e positiva em $(-1, 0)$.

Além disso, como $f_2(u, 1)(u - 1)^2 = a_k b_m p_2(u)$, segue que $f_2(u, 1) > 0$ para todo $u \in (-1, 0)$, logo $f_2(u, v)$ é positiva na região B .

Do Lema 2.5.3, $F_\beta(-v, -u) = (f_2(u, v), f_1(u, v))$, $F_\beta(v, u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$ e $F_\beta(-u, -v) = (-f_1(u, v), -f_2(u, v))$, conforme a Figura 2.18.

Nas tabelas abaixo, apresentamos o sinal de cada coordenada de F_β , com (u, v) no 2° e 4° quadrantes, respectivamente, com $u_0 \in (-1, 0)$ satisfazendo $p_1(u_0) = 0$.

	$u \in (-1, u_0)$	$u \in (u_0, 0)$
$(u, v) \in B$	$F_\beta = (> 0, > 0)$	$F_\beta = (< 0, > 0)$
$(-v, -u) \in h_2(B)$	$F_\beta = (> 0, > 0)$	$F_\beta = (> 0, < 0)$

Tabela 2.1: 2° quadrante (k ímpar, m ímpar)

	$u \in (-1, u_0)$	$u \in (u_0, 0)$
$(v, u) \in h_1(B)$	$F_\beta = (< 0, < 0)$	$F_\beta = (< 0, > 0)$
$(-u, -v) \in h_1(h_2(B))$	$F_\beta = (< 0, < 0)$	$F_\beta = (> 0, < 0)$

Tabela 2.2: 4° quadrante (k ímpar, m ímpar)

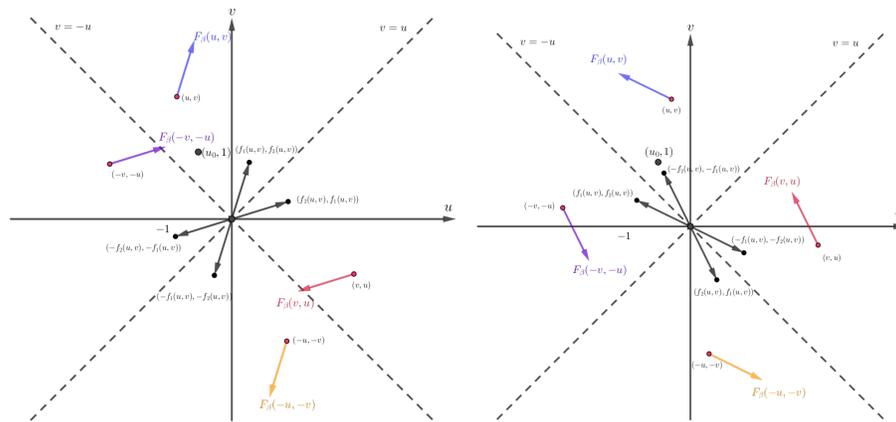


Figura 2.18: Segundo e quarto quadrante (k ímpar, m ímpar com $f_1 > 0$ e $f_1 < 0$, respectivamente)

Além disso, para todo $v \neq 0$, $F_\beta(0, v) = (0, (m - k)v^{k+m-3})$ é um vetor vertical com $f_2(0, v) > 0$, se $v > 0$ e $f_2(0, v) < 0$, se $v < 0$. Mais ainda, para todo $u \neq 0$

o vetor $F_\beta(u, 0) = ((k - m)u^{k+m-3}, 0)$ é horizontal, com $f_1(u, 0) < 0$, se $u > 0$ e $f_1(u, 0) > 0$, se $u < 0$.

De maneira mais geral, temos que o campo é representado como na Figura 2.19.

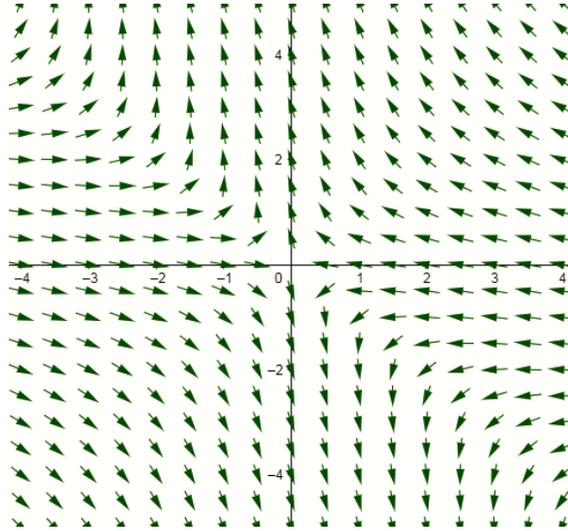


Figura 2.19: (k ímpar, m ímpar)

Portanto, aplicando a Definição 1.3.10, temos que γ dá uma volta negativa em torno de S^1 , enquanto F_β percorre S_ϵ uma vez, no sentido anti-horário. Logo, $\text{ind}(F_\beta) = -1$. Veja a Figura 2.20.

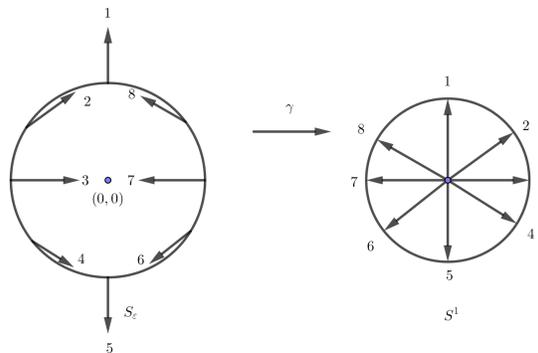


Figura 2.20: Aplicação de Gauss (k ímpar e m ímpar)

- (k, m) = (par, ímpar)

Temos $f_1(u, 1)(u - 1)^2 = ku^{k-1}(u^m - 1) - mu^{m-1}(u^k - 1) > 0$ para todo $u \in (-1, 0)$. Então $f_1(u, 1) > 0$ no intervalo $(-1, 0)$ implicando que $f_1(u, v) > 0$ na região B .

Analisemos o polinômio $p_2(u) = ku^m - mu^k + (m - k)$, para $0 < -u < 1$. Pelo Teorema 1.4.6, o polinômio $p_2(-u) = -ku^m - mu^k + (m - k)$ possui no máximo

uma raiz positiva no intervalo $(0, 1)$, e portanto $p_2(u)$ possui no máximo uma raiz negativa, digamos u_0 . Uma tal raiz u_0 existe, por continuidade e pelo fato de $p_2(-1) = -2k < 0$ e $p_2(0) = m - k > 0$. E ainda, $p_2'(u) = km u^{m-1} - km u^{k-1} > 0$, para todo $u \in (-1, 0)$, logo $p_2(u)$ é crescente no intervalo $(-1, 0)$ e mais: $p_2(u) < 0$, para todo $u \in (-1, 0)$ e $p_2(u) > 0$, para todo $u \in (u_0, 0)$.

Portanto, $f_2(u, 1)(u - 1)^2 = a_k b_m p_2(u)$ satisfaz a mesma mudança de sinal de $p_2(u)$, donde concluímos que $f_1(u, v) > 0$ e $f_2(u, v) < 0$, para todo $u \in (-1, u_0)$ e $f_1(u, v) > 0$ e $f_2(u, v) > 0$, para todo $u \in (u_0, 0)$.

Dado $(u, v) \in B$, pelo Lema 2.5.3, obtemos $F_\beta(-v, -u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$, $F_\beta(v, u) = (-f_2(u, v), -f_1(u, v))$ e $F_\beta(-u, -v) = (f_1(u, v), f_2(u, v))$.

Temos então a seguinte configuração para o campo F_β , no 2° e 4° quadrantes, respectivamente, em que $u_0 \in (-1, 0)$ satisfaz $p_2(u_0) = 0$.

	$u \in (-1, u_0)$	$u \in (u_0, 0)$
$(u, v) \in B$	$F_\beta = (> 0, < 0)$	$F_\beta = (> 0, > 0)$
$(-v, -u) \in h_2(B)$	$F_\beta = (> 0, < 0)$	$F_\beta = (< 0, < 0)$

Tabela 2.3: 2° quadrante (k par, m ímpar)

	$u \in (-1, u_0)$	$u \in (u_0, 0)$
$(v, u) \in h_1(B)$	$F_\beta = (> 0, < 0)$	$F_\beta = (< 0, < 0)$
$(-u, -v) \in h_1(h_2(B))$	$F_\beta = (> 0, < 0)$	$F_\beta = (> 0, > 0)$

Tabela 2.4: 4° quadrante (k par, m ímpar)

Veja o comportamento do campo F_β no segundo e quarto quadrante de acordo com o sinal de f_2 na Figura 2.21.

Observe também que para todo $v \neq 0$, $F_\beta(0, v) = (0, a_k b_m v^{m+k-3})$ é um vetor vertical satisfazendo $f_2(0, v) > 0$, pois $m + k - 3$ é par. E para todo $u \neq 0$, o vetor $F_\beta(u, 0) = ((k - m)u^{m+k-3}, 0)$ é horizontal, com $f_1(u, 0) < 0$ já que $m + k - 3$ é par e $(k - m) < 0$.

De modo geral, o campo F_β é representado como na Figura 2.22.

Aplicando a Definição 1.3.10, temos que γ dá duas voltas negativas em torno de S^1 , enquanto F_β percorre S_ϵ uma vez, no sentido anti-horário, conforme a Figura 2.23. Logo, $\text{ind}(F_\beta) = -2$.

□

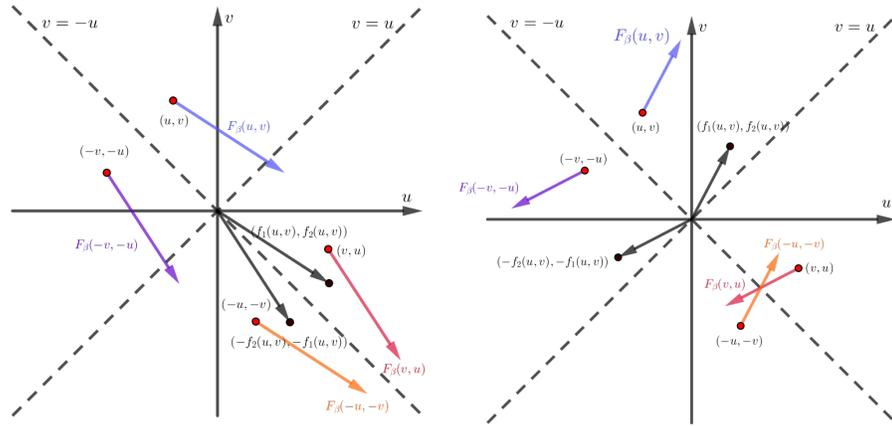


Figura 2.21: Segundo e quarto quadrante (k par e m ímpar nos casos $f_2 < 0$ e $f_2 > 0$, respectivamente)

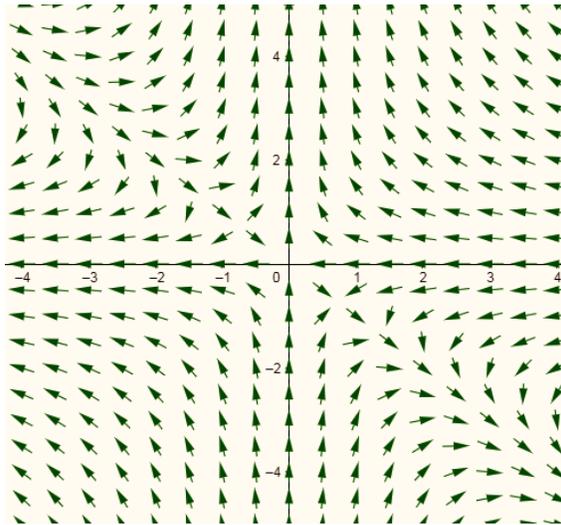
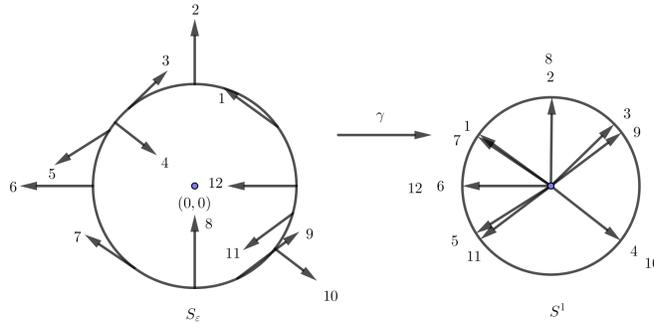


Figura 2.22: (k par, m ímpar)

Observação 2.5.7. Seja $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ nas condições do Teorema 2.5.6, com k ímpar e m par. Pelas Proposições 2.4.3 e 2.4.4, se β pertencer a $G(I, \mathbb{R}^2)$, então tanto se $u_0 = 0$ fosse uma inflexão ou uma cúspide, teríamos que $\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0))$ seria diferente de zero. No entanto, o Teorema 2.5.6 nos diz que este índice é zero. Vamos analisar o que ocorre neste caso.

Observe que se $k \neq 1$, então $\beta'(u) = (ka_k u^{k-1}, mb_m u^{m-1})$ e $u_0 = 0$ é um ponto singular de β . Entretanto, como k é ímpar e m é par, vimos na Seção 2.1, que $u_0 = 0$ não é uma cúspide de primeiro nem de segundo tipo.

Mas, quando $k = 1$, temos $\beta'(u) = (a_k, mb_m u^{m-1})$. Nesse caso, $u_0 = 0$ é um ponto regular,

Figura 2.23: Aplicação de Gauss (k par e m ímpar)

que corresponde a uma inflexão de β , pois

$$k_\beta(u) = \frac{\det(\beta'(u), \beta''(u))}{\|\beta'(u)\|^3} = \frac{m(m-1)a_k b_m u^{m-2}}{\left(\sqrt{(a_k)^2 + (m b_m u^{m-1})^2}\right)^3}.$$

Como

$$\begin{aligned} \det(\beta'(u), \beta'''(u)) &= \begin{vmatrix} a_k & m b_m u^{m-1} \\ 0 & m(m-1)(m-2)b_m u^{m-3} \end{vmatrix} \\ &= m(m-1)(m-2)a_k b_m u^{m-3}, \end{aligned}$$

e m é par, então $m \geq 4$, pois vimos que se $k = 1$, então m não pode ser 2, pois neste caso, o campo F_β não possui singularidades. Logo, $u_0 = 0$ é uma inflexão não ordinária de β , isto é, $\beta \notin G(I, \mathbb{R}^2)$.

Exemplo 2.5.8. Seja $\beta(u) = (u^2, u^4)$ com $u \in (-2, 2)$. Como $\beta'(u) = (2u, 4u^3)$, temos:

$$\begin{aligned} \det(\beta'(u), \beta(u) - \beta(v)) &= \begin{vmatrix} 2u & 4u^3 \\ u^2 - v^2 & u^4 - v^4 \end{vmatrix} \\ &= 2u(u^4 - v^4) - 4u^3(u^2 - v^2) \\ &= (u-v)(2u(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) - 4u^3(u+v)) \\ &= (u-v)(-2u^4 - 2u^3v + 2u^2v^2 + 2uv^3) \\ &= (u-v)(-2u^2(u^2 - v^2) - 2uv(u^2 - v^2)) \\ &= (u-v)^2(-2u^2(u+v) - 2uv(u+v)) \\ &= -2u(u-v)^2(u+v)^2. \end{aligned}$$

Então, pela Observação 2.5.1, segue que $F_\beta(u, v) = (-2u, 2v)$.

Veja, na Figura 2.24, o traço de β e o esboço do campo F_β no plano.

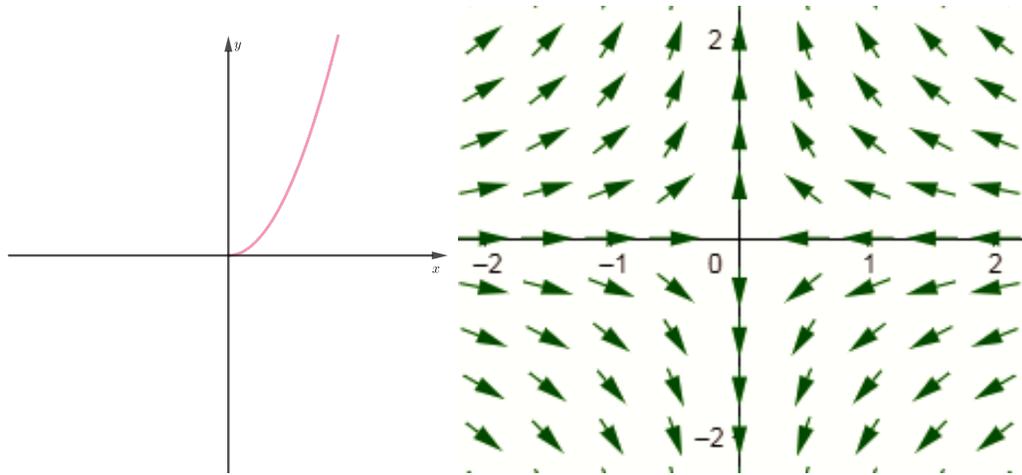


Figura 2.24: Traço de $\beta(u) = (u^2, u^4)$ / Esboço de F_β

Nesse caso, $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de F_β . E como $\det(J(F_\beta)) < 0$ temos, da Proposição 1.2.23, que $\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0)) = -1$.

Exemplo 2.5.9. Seja $\beta(u) = (-u^2, u^4)$ com $u \in (-2, 2)$. Como $\beta'(u) = (-2u, 4u^3)$, temos:

$$\begin{aligned}
 \det(\beta'(u), \beta(u) - \beta(v)) &= \begin{vmatrix} -2u & 4u^3 \\ -u^2 - v^2 & u^4 - v^4 \end{vmatrix} \\
 &= -2u(u^4 - v^4) + 4u^3(u^2 - v^2) \\
 &= (u - v)(-2u(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) + 4u^3(u + v)) \\
 &= (u - v)(2u^4 + 2u^3v - 2u^2v^2 - 2uv^3) \\
 &= (u - v)(2u^2(u^2 - v^2) + 2uv(u^2 - v^2)) \\
 &= (u - v)^2(2u^2(u + v) + 2uv(u + v)) \\
 &= 2u(u - v)^2(u + v)^2.
 \end{aligned}$$

Então, pela Observação 2.5.1, segue que $F_\beta(u, v) = (2u, -2v)$.

Veja, na Figura 2.25, o traço de β e o esboço do campo F_β no plano.

Temos que $(0, 0)$ é uma singularidade isolada de F_β . Repare que nesse exemplo, $a_k = -1$ e $b_m = 1$, donde $a_k b_m < 0$, diferente do exemplo anterior, em que $a_k b_m > 0$. Mas, pela Proposição 1.2.23, obtemos que $\text{Ind}_{PH}(F_\beta, (0, 0)) = -1$, que coincide com o Índice de Poincaré-Hopf obtido no Exemplo 2.5.8.

Observação 2.5.10. Como as cúspides do primeiro tipo são localmente dadas por $\alpha(u) = \left(\frac{u^p}{p!}, \frac{u^q}{q!}\right)$ com p par e q ímpar, a prova do item 1 da Proposição 2.4.4 segue do Teorema 2.5.6. E pelo fato das cúspides do segundo tipo serem localmente dadas por $\alpha(u) = \left(\frac{u^p}{p!}, \frac{u^q}{q!}\right)$ com p e q

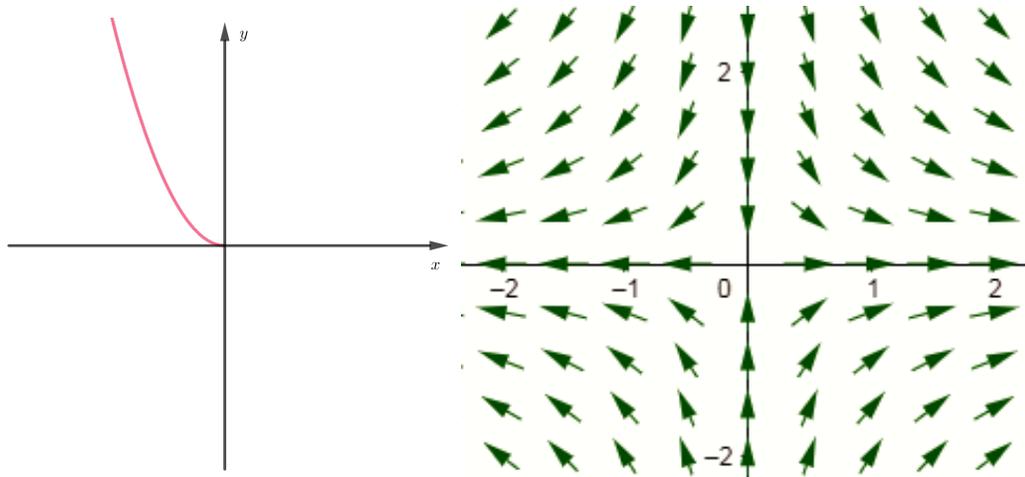


Figura 2.25: Traço de $\beta(u) = (-u^2, u^4)$ / Esboço de F_β

pares, basta aplicarmos o Teorema 2.5.6 e fica demonstrado o item 2 da Proposição 2.4.4.

Esse último resultado (Teorema 2.5.6) é uma ferramenta importante para obtermos uma relação entre a quantidade de bitangências, pontos duplos, inflexões e cúspides de algumas curvas do conjunto $G(I, \mathbb{R}^2)$, conforme apresentamos no próximo capítulo.

CAPÍTULO 3

ÍNDICE TOPOLÓGICO E DEFORMAÇÕES GENÉRICAS DE CURVAS

Nesta parte de nosso estudo, consideramos $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, como na Seção 2.5 do Capítulo 2, e definimos quando uma curva $\gamma \in G(I, \mathbb{R}^2)$ é uma deformação genérica de β . Além disso, relacionamos a quantidade de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides das curvas γ , aplicando basicamente a Proposição 2.4.5 e o Teorema 2.5.6.

3.1 Deformações Genéricas

Considere $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ com I um intervalo aberto de \mathbb{R} , $a_k, b_m \in \mathbb{R}$, $a_k b_m \neq 0$ e $0 < k < m$ (sem que $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente).

Definição 3.1.1. *Uma deformação em $G(I, \mathbb{R}^2)$ de β é uma curva plana*

$$\gamma(u) = (a_k u^k + a_{k-1} u^{k-1} + \cdots + a_1 u, b_m u^m + b_{m-1} u^{m-1} + \cdots + b_1 u),$$

tal que $\gamma \in G(I, \mathbb{R}^2)$.

Recordemos o conceito de homotopia, apresentado na Definição 1.2.12.

Duas curvas $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ são ditas homotópicas, se existe uma aplicação contínua $H : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, satisfazendo $H(u, 0) = \beta(u)$ e $H(u, 1) = \gamma(u)$, para todo

$u \in I$. Fixado $s \in [0, 1]$, podemos definir a curva parametrizada $H_s : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $H_s(u) = H(u, s)$. Observe que $H_0(u) = H(u, 0) = \beta(u)$ e $H_1(u) = H(u, 1) = \gamma(u)$.

Definição 3.1.2. Dizemos que $\gamma \in G(I, \mathbb{R}^2)$ é uma **deformação genérica** de β , se as duas condições abaixo são satisfeitas:

1. Existe uma homotopia contínua $H : I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre β e γ , ou seja, $H(u, 0) = \beta(u)$ e $H(u, 1) = \gamma(u)$, para todo $u \in I$.
2. Existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ contendo todos os zeros de F_{H_s} , isto é,

$$\{(u, v); F_{H_s}(u, v) = 0 \text{ e } s \in [0, 1]\} \subset K.$$

Exemplo 3.1.3. Neste exemplo vamos exibir uma homotopia entre duas curvas em que a condição 2 da Definição 3.1.2 não é satisfeita. Sejam $\beta(u) = (u^2, u^3)$ e $\gamma(u) = (u, u^3)$, com $u \in \mathbb{R}^2$.

Defina $H_s(u) = H(u, s) = ((1-s)u^2 + su, u^3)$ com $(u, s) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$. Temos que $H_0(u) = \beta(u)$ e $H_1(u) = \gamma(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

No Exemplo 2.3.2, vimos que a curva β pertence ao conjunto $G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, pois $u = 0$ é ponto cúspide de β e essa curva não possui pontos duplos, bitangências, nem inflexões.

Como

$$\begin{aligned} \det(H'_s(u), H''_s(u)) &= \begin{vmatrix} 2(1-s)u + s & 3u^2 \\ 2(1-s) & 6u \end{vmatrix} \\ &= 12u^2 - 12su^2 + 6su - 6u^2 + 6su^2 \\ &= 6u(u - su + s), \end{aligned}$$

temos $F_{H_s}(u, u) = \frac{1}{2}(-6u(u - su + s), 6u(u - su + s))$.

Observe que $F_{H_s}(u, u) = 0$ se, e somente se, $u = 0$ ou $u = \frac{-s}{1-s}$. Consequentemente, quando $s \rightarrow 1$ temos que $u \rightarrow -\infty$. Assim, não existe um compacto contendo todas as singularidades de F_{H_s} , que são da forma $(0, 0)$ ou $(\frac{-s}{1-s}, \frac{-s}{1-s})$.

Portanto H não satisfaz a condição 2 da Definição 3.1.2.

Exemplo 3.1.4. Sejam $\beta(u) = (u^2, u^3)$ e $\gamma(u) = (u^2, u^3 + bu)$ com $b \in \mathbb{R}^*$ e $u \in \mathbb{R}$.

No Exemplo 2.3.2, garantimos que para $b > 0$ e $b < 0$ a curva γ pertence ao conjunto $G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Defina $H_s : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por $H_s(u) = (u^2, u^3 + sbu)$, com $s \in [0, 1]$. Essa é uma aplicação contínua e satisfaz $H_0(u) = \beta(u)$ e $H_1(u) = \gamma(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja, $H(u, s) = H_s(u)$

é uma homotopia entre β e γ .

Analogamente ao que fizemos no Exemplo 2.3.2, para cada $s \in [0, 1]$, o campo de vetores associado às curvas H_s da homotopia é dado por:

$$F_{H_s}(u, v) = (-u^2 - 2uv + sb, v^2 + 2uv - sb).$$

Analisamos os zeros de $F_{H_s}(u, v)$ nos casos: $b > 0$ e $b < 0$.

Se $b > 0$ temos $F_{H_s}(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se, $(u, v) = \left(\sqrt{\frac{sb}{3}}, \sqrt{\frac{sb}{3}}\right)$ e $(u, v) = \left(-\sqrt{\frac{sb}{3}}, -\sqrt{\frac{sb}{3}}\right)$. E mais, $u = \sqrt{\frac{sb}{3}}$ e $-\sqrt{\frac{sb}{3}}$ são inflexões ordinárias de H_s , para $s \neq 0$ e $u = 0$ é cúspide de H_0 .

Observe que $\|(u, v)\| = \sqrt{\frac{2sb}{3}}$. O fato de $0 < s \leq 1$ e $b > 0$ implica que $0 < \sqrt{\frac{2sb}{3}} \leq \sqrt{\frac{2b}{3}}$. Então, escolhemos o compacto $K \subset \mathbb{R}^2$ como a bola fechada, de centro $(0, 0)$ e qualquer raio $r > \sqrt{\frac{2b}{3}}$.

Se $b < 0$, então as singularidades de F_{H_s} são: $(u, v) = (\sqrt{-sb}, -\sqrt{-sb})$ e $(u, v) = (-\sqrt{-sb}, \sqrt{-sb})$. E $(\sqrt{-sb}, -\sqrt{-sb})$ é um ponto duplo de H_s , para $s \neq 0$.

Assim, $\|(u, v)\| = \sqrt{-2sb}$ e escolhemos $K \subset \mathbb{R}^2$ a bola fechada, de centro $(0, 0)$ e qualquer raio $r > \sqrt{-2b}$, já que $0 < \sqrt{-2sb} \leq \sqrt{-2b}$, para $0 < s \leq 1$.

No caso $s = 0$, $F_{H_0} = F_\beta$ possui uma única singularidade, que é a origem. E claramente $(0, 0) \in K$. Portanto, γ é uma deformação genérica de β . Veja na Figura 3.1, algumas curvas da homotopia para $b = -1$ e $b = 1$.

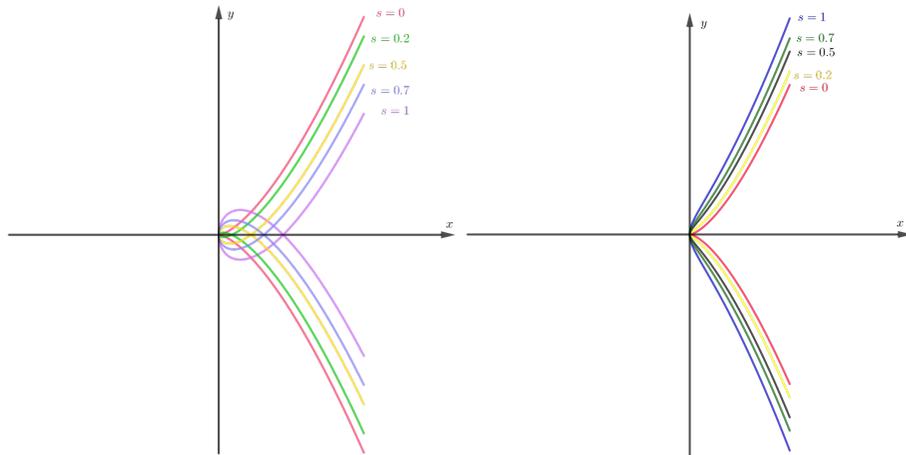


Figura 3.1: Algumas curvas da homotopia para $b = -1$ e $b = 1$, respectivamente

No Exemplo 3.1.4, provamos que γ é uma deformação genérica de $\beta(u) = (u^2, u^3)$. E de acordo com o sinal de b , a curva γ possui um ponto duplo ou duas inflexões. Entretanto, isso não ocorre com todas as deformações genéricas de β , conforme exemplificamos a seguir:

Exemplo 3.1.5. A curva $\gamma(u) = (u^2 + 2u, u^3 - 3u)$ é uma deformação genérica de $\beta(u) = (u^2, u^3)$, com $u \in \mathbb{R}$.

A aplicação $H_s(u) = (1 - s)\beta(u) + s\gamma(u)$ é contínua e $H_0(u) = \beta(u)$ e $H_1(u) = \gamma(u)$, para todo $u \in \mathbb{R}$, ou seja, é uma homotopia entre β e γ . Veja que

$$\begin{aligned} \det(H'_s(u), H_s(u) - H_s(v)) &= \begin{vmatrix} 2u + 2s & 3u^2 - 3s \\ (u^2 - v^2) + 2s(u - v) & (u^3 - v^3) - 3s(u - v) \end{vmatrix} \\ &= (u - v)(2u + 2s)(u^2 + uv + v^2 - 3s) \\ &\quad - (u - v)(3u^2 - 3s)(u + v + 2s) \\ &= (u - v)(-u^3 - u^2v - 3su - 4su^2) \\ &\quad + (u - v)(2uv^2 + 2suv + 2sv^2 + 3sv) \\ &= (u - v)((-u - 2s)(u^2 - v^2) - (uv + 2su + 3s)(u - v)) \\ &= (u - v)^2(-u(u + v) - uv - 2su - 2s(u + v) - 3s) \\ &= (u - v)^2(-u^2 - 2uv - 4su - 2sv - 3s). \end{aligned}$$

Logo, $F_{H_s}(u, v) = (-u^2 - 2uv - 4su - 2sv - 3s, v^2 + 2uv + 4sv + 2su + 3s)$. Então $F_{H_s}(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} -u^2 - 2uv - 4su - 2sv - 3s = 0 \\ v^2 + 2uv + 4sv + 2su + 3s = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Somando as duas equações acima, obtemos $v^2 - u^2 + 2sv - 2su = 0$ que ocorre se, e somente se, $(u - v)(-u - v - 2s) = 0$. Isso nos dá que $u = v$ ou $u = -v - 2s$.

Substituindo $u = v$ na primeira coordenada de F_{H_s} obtemos: $-3v^2 - 6sv - 3s = 0$, que não possui raiz real, para $s \neq 0, 1$, pois o discriminante $\Delta = 36s^2 - 36s = 36s(s - 1)$ é negativo, para $s \in (0, 1)$. Observe que para $s = 0$ e $s = 1$, $\Delta = 0$ e portanto a equação tem solução para $u = v$, ou seja, se $s = 0$, então $u = v = 0$ e se $s = 1$, $u = v = -1$.

Agora, substituindo $u = -v - 2s$ na primeira equação do sistema (3.1) obtemos:

$$-(-v - 2s)^2 - 2(-v - 2s)v - 4s(-v - 2s) - 2sv - 3s = 0,$$

ou seja, $v^2 + 2sv + 4s^2 - 3s = 0$. Nesse caso,

$$v = \frac{-2s \pm \sqrt{-12s^2 + 12s}}{2} = \frac{-2s \pm 2\sqrt{3(-s^2 + s)}}{2} = -s \pm \sqrt{3(-s^2 + s)}.$$

Daí, as singularidades de $F_{H_s}(u, v)$ são: $(u, v) = (-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}, -s + \sqrt{3(-s^2 + s)})$ e $(u, v) = (-s + \sqrt{3(-s^2 + s)}, -s - \sqrt{3(-s^2 + s)})$, donde $\|(u, v)\| = \sqrt{-4s^2 + 6s}$.

Visto que $0 < s < 1$ concluímos que $6 - 4s \leq -4s^2 + 6s \leq 6s \leq 6$. Isto significa que podemos escolher a bola fechada em \mathbb{R}^2 de centro $(0, 0)$, com qualquer raio $r > \sqrt{6}$ para ser o compacto K .

Para $s = 0$, $(0, 0)$ é a única singularidade de $F_{H_0}(u, v) = F_\beta(u, v)$ e para $s = 1$, a única singularidade de $F_{H_1}(u, v) = F_\gamma(u, v)$ é o ponto $(-1, -1)$. É claro que $(0, 0)$ e $(-1, -1)$ pertencem ao compacto K .

Veja que $\gamma'(u) = (2u + 2, 3u^2 - 3)$, então u_0 é um ponto singular de γ . Além disso, $\gamma''(u) = (2, 6u)$ e $\gamma'''(u) = (0, 6)$, logo $\gamma''(-1) = (2, -6)$ não é múltiplo de $\gamma'''(-1) = (0, 6)$ e o conjunto $\{\gamma''(u_0), \gamma'''(u_0)\}$ é uma base de \mathbb{R}^2 . Nessa base, temos

$$\gamma(u_0 + u) - \gamma(u_0) = \left(\frac{u^2}{2!}, \frac{u^3}{3!} \right),$$

donde $u_0 = -1$ é uma cúspide de γ , do primeiro tipo.

Portanto, $\gamma \in G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ e é uma deformação genérica de β , que não possui pontos duplos nem inflexões, apenas uma cúspide. Veja algumas curvas da homotopia na Figura 3.2.

Observação 3.1.6. Sejam $\gamma(u) = (u^2 + 2u, u^3 - 3u)$ e $\beta(u) = (u^2, u^3)$, com $u \in \mathbb{R}$.

No exemplo anterior, vimos que γ é uma deformação genérica de β , considerando a homotopia $H_s(u) = (1 - s)\beta(u) + s\gamma(u) = (u^2 + 2su, u^3 - 3su)$. Além disso, concluímos que $(0, 0)$ é a única singularidade de F_β , em que $u = 0$ é ponto cúspide de β e $(-1, -1)$ é a única singularidade de F_γ , com $u = -1$ uma cúspide de γ . Agora, vamos mostrar que, para cada $s \in (0, 1)$ fixado, $(u_0, v_0) = (-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}, -s + \sqrt{3(-s^2 + s)})$ é ponto duplo da curva $H_s(u)$.

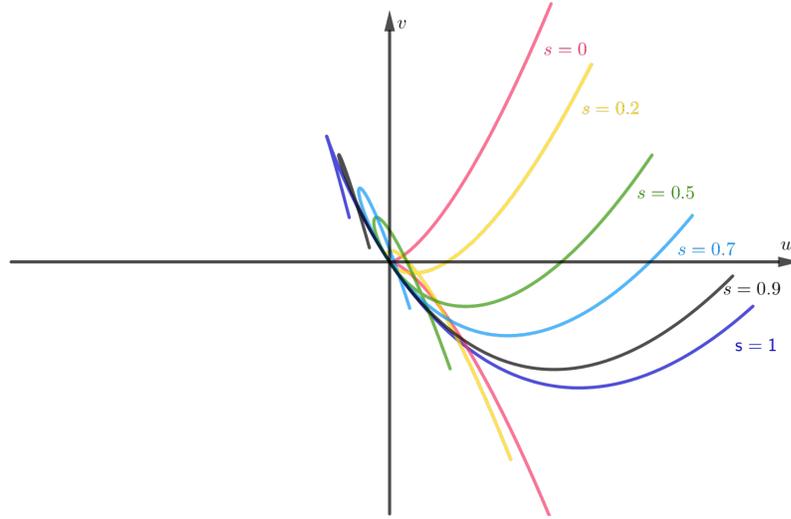


Figura 3.2: Algumas curvas da homotopia do Exemplo 3.1.5

Se $u = u_0 = -s - \sqrt{3(-s^2 + s)}$, então:

$$\begin{aligned} u^2 + 2su &= \left(-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}\right)^2 + 2s \left(-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}\right) \\ &= s^2 + 2s\sqrt{3(-s^2 + s)} + 3(-s^2 + s) - 2s^2 - 2s\sqrt{3(-s^2 + s)} \\ &= -4s^2 + 3s. \end{aligned}$$

E ainda,

$$\begin{aligned} u^3 - 3su &= \left(-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}\right)^3 - 3s \left(-s - \sqrt{3(-s^2 + s)}\right) \\ &= -s^3 - 2s^2\sqrt{3(-s^2 + s)} - 3s(-s^2 + s) - s^2\sqrt{3(-s^2 + s)} - 6s(-s^2 + s) \\ &\quad + 3s^2\sqrt{3(-s^2 + s)} - 3s\sqrt{3(-s^2 + s)} + 3s^2 + 3s\sqrt{3(-s^2 + s)} \\ &= 8s^3 - 6s^2. \end{aligned}$$

Se $u = v_0 = -s + \sqrt{3(-s^2 + s)}$, então:

$$\begin{aligned} u^2 + 2su &= \left(-s + \sqrt{3(-s^2 + s)}\right)^2 + 2s \left(-s + \sqrt{3(-s^2 + s)}\right) \\ &= s^2 - 2s\sqrt{3(-s^2 + s)} + 3(-s^2 + s) - 2s^2 + 2s\sqrt{3(-s^2 + s)} \\ &= -4s^2 + 3s. \end{aligned}$$

E mais,

$$\begin{aligned}
 u^3 - 3su &= \left(-s + \sqrt{3(-s^2 + s)}\right)^3 - 3s \left(-s + \sqrt{3(-s^2 + s)}\right) \\
 &= -s^3 + 2s^2 \sqrt{3(-s^2 + s)} - 3s(-s^2 + s) + s^2 \sqrt{3(-s^2 + s)} - 6s(-s^2 + s) \\
 &\quad - 3s^2 \sqrt{3(-s^2 + s)} + 3s \sqrt{3(-s^2 + s)} + 3s^2 - 3s \sqrt{3(-s^2 + s)} \\
 &= 8s^3 - 6s^2.
 \end{aligned}$$

Portanto, $H_s(u_0) = H_s(v_0)$ e (u_0, v_0) é ponto duplo de $H_s(u) = (u^2 + 2su, u^3 - 3su)$, para cada $s \in (0, 1)$ fixado.

3.2 Índice Topológico - Deformações Genéricas

Nosso objetivo, nessa seção, é relacionar o índice topológico de campos vetoriais associados às curvas monomiais (nas condições vistas na Seção 2.5 do Capítulo 2) com o índice topológico dos campos de vetores associados às suas deformações genéricas. Para isso, tomando como base a referência [12], definimos a chamada Compactificação de Bendixson, que nos permite estudar o comportamento das trajetórias de um campo vetorial polinomial planar próximo ao infinito.

Considere a esfera S^2 em \mathbb{R}^3 dada por $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ e um campo de vetores polinomial $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Identifique o plano \mathbb{R}^2 , no qual v está definido, com o plano tangente à esfera no ponto $S = (0, 0, -1)$ dado por $z = -1$.

Seja $P_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a projeção estereográfica, que é um homeomorfismo entre $S^2 \setminus \{N\}$ e o plano $z = -1$, em que $N = (0, 0, 1)$ é o polo norte de S^2 .

Naturalmente, definimos $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ da forma

$$\pi(x) = \begin{cases} P_N(x), & \text{se } x \in S^2 \setminus \{N\} \\ \infty, & \text{se } x = N. \end{cases}$$

A aplicação π é um homeomorfismo e dizemos que $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ é uma compactificação do plano.

Sabemos que P_N^{-1} define um campo de vetores induzido, $v_N : S^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, em $S^2 \setminus \{N\}$.

A extensão de v_N para um campo em S^2 é chamada de Compactificação de Bendix-

son, e a denotamos por $s_v : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$, em que $s_v(x) = v_N(x)$ se $x \in S^2 \setminus \{N\}$ e $s_v(x) = \infty$ se $x = N$.

Nesse contexto, o comportamento das órbitas de v próximas ao infinito, são determinadas pelo comportamento de s_v próximo ao ponto N , denominado ponto crítico infinito de s_v . Entendemos como ponto crítico finito de v ou s_v , o ponto crítico de s_v que pertence a $S^2 \setminus \{N\}$.

Portanto segue da Definição 1.3.11 que

$$\text{ind}(s_v) = \text{ind}(v) + \text{Ind}_{PH}(s_v, N). \quad (3.2)$$

Lema 3.2.1. *Sejam $\beta : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ com I um intervalo aberto de \mathbb{R} , $a_k, b_m \in \mathbb{R}$, $a_k b_m \neq 0$ e $0 < k < m$ (sem que $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente). Se $\gamma \in G(I, \mathbb{R}^2)$ é uma deformação genérica de β , então,*

$$\text{ind}(F_\gamma) = \text{ind}(F_\beta). \quad (3.3)$$

Demonstração. Por hipótese, γ é uma deformação genérica de β , então existe uma homotopia $H_s(u) = H(u, s)$, com $(u, s) \in I \times [0, 1]$ entre β e γ , ou seja, $H_0(u) = \beta(u)$ e $H_1(u) = \gamma(u)$. E mais, existe um compacto $K \subset \mathbb{R}^2$, tal que $\{(u, v); F_{H_s}(u, v) = (0, 0), s \in [0, 1]\} \subset K$.

A aplicação H induz uma homotopia $\bar{H} : I \times I \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ entre F_β e F_γ dada por:

$$\bar{H}_s = \left(\frac{\det((1-s)\beta'(u) + s\gamma'(u), H_s(u) - H_s(v))}{(u-v)^2}, \frac{\det((1-s)\beta'(v) + s\gamma'(v), H_s(u) - H_s(v))}{(u-v)^2} \right).$$

É claro que \bar{H} é uma homotopia, pois é uma aplicação contínua já que é definida como composta de aplicações contínuas, e $\bar{H}_0(u, v) = F_\beta(u, v)$ e $\bar{H}_1(u, v) = F_\gamma(u, v)$, para todo $(u, v) \in I \times I$.

Considere $s_{F_\beta} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ e $s_{F_\gamma} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ as compactificações de Bendixson, associadas aos campos F_β e F_γ , respectivamente.

Como F_β e F_γ são homotópicos, podemos estender a homotopia \bar{H}_s para S^2 , obtendo que s_{F_β} e s_{F_γ} também são homotópicos. Uma vez que S^2 e $\mathbb{R}^2 \cup \{\infty\}$ são variedades suaves de dimensão 2, orientadas, compacta e conexa, respectivamente, e não possuem bordo, segue da Proposição 1.3.16 que $\text{ind}(s_{F_\beta}) = \text{ind}(s_{F_\gamma})$.

Daí por (3.2)

$$\text{ind}(F_\beta) + \text{Ind}_{PH}(s_{F_\beta}, N) = \text{ind}(F_\gamma) + \text{Ind}_{PH}(s_{F_\gamma}, N).$$

Sabemos que F_β não possui ponto crítico no infinito, e F_α também não possui, pela segunda condição da Definição 3.1.2. Portanto, $\text{Ind}_{PH}(s_{F_\beta}, N) = \text{Ind}_{PH}(s_{F_\gamma}, N) = 0$, logo $\text{ind}(F_\beta) = \text{ind}(F_\alpha)$. \square

Exemplo 3.2.2. Sejam $\gamma(u) = (u^2 + 2u, u^3 - 3u)$ e $\beta(u) = (u^2, u^3)$, com $u \in \mathbb{R}$.

No Exemplo 3.1.5, vimos que γ é uma deformação genérica de β . E ainda, obtivemos que $F_\beta(u, v) = (-u^2 - 2uv, v^2 + 2uv)$ e $F_\gamma(u, v) = (-u^2 - 2uv - 4u - 2v - 3, v^2 + 2uv + 4v + 2u + 3)$.

Como $\gamma \in G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, $p = (-1, -1)$ é a única singularidade de F_γ e $u = -1$ é uma cúspide de γ , do primeiro tipo, segue da Proposição 2.4.4 que $\text{ind}(F_\gamma) = -2$. Além disso, pelo Teorema 2.5.6, $\text{ind}(F_\beta) = -2$. Evidenciando que $\text{ind}(F_\gamma) = \text{ind}(F_\beta) = -2$.

Veja o comportamento de F_β e F_γ , na Figura 3.3.

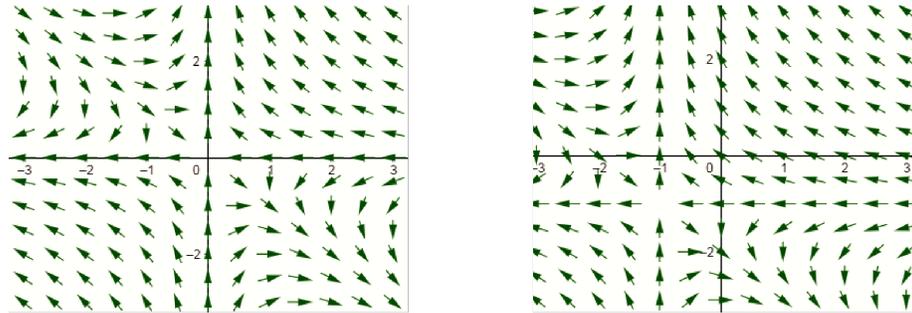


Figura 3.3: F_β e F_γ , respectivamente

Exemplo 3.2.3. Sejam $\beta(u) = (u^2, u^3)$ e $\gamma(u) = (u^2, u^3 + bu)$, com $b < 0$ e $u \in \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 2.5.6, $\text{ind}(F_\beta) = -2$. No Exemplo 3.1.4, vimos que $\gamma \in G(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. Além disso, quando $b < 0$, F_γ contém duas singularidades, ou seja, $p_1 = (\sqrt{-b}, -\sqrt{-b})$ e $p_2 = (-\sqrt{-b}, \sqrt{-b})$ que correspondem a um ponto duplo transversal de γ . Então, pela Proposição 2.4.3, $\text{Ind}_{PH}(F_\gamma, p_1) = \text{Ind}_{PH}(F_\gamma, p_2) = -1$. Logo, $\text{ind}(F_\gamma) = \text{Ind}_{PH}(F_\gamma, p_1) + \text{Ind}_{PH}(F_\gamma, p_2) = -2$.

Portanto, $\text{ind}(F_\gamma) = \text{ind}(F_\beta) = -2$.

Na próxima seção, o Lema 3.2.1 nos ajudará a obter uma fórmula envolvendo o número de pontos duplos, inflexões, bitangências e cúspides de curvas que são deformações genéricas de uma curva monomial.

3.3 A Geometria das Deformações Genéricas de Curvas

Nessa seção, enunciamos um dos principais resultados desse trabalho, que nos fornece uma relação entre o número de pontos duplos (d), de inflexões (i), de bitangências de mesmo lado (t_s), de bitangências de lados opostos (t_o), cúspides de primeiro tipo (c_1) e cúspides do segundo tipo (c_2) de uma deformação genérica γ de uma curva $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, dependendo da paridade de k e m .

Teorema 3.3.1. (*Theorem 3.10, [11]*) *Seja $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ uma curva plana, com $u \in I$, $a_k, b_m \in \mathbb{R}$, $a_k b_m \neq 0$, $0 < k < m$ (sem que $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente) e considere γ uma deformação genérica qualquer de β .*

1. *Se k e m têm mesma paridade, então*

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i - 1 + c_2}{2}.$$

2. *Se k é par e m é ímpar, então*

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2} - 1.$$

3. *Se k é ímpar e m é par, então*

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i + c_2}{2}.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.1, $\text{ind}(F_\gamma) = \text{ind}(F_\beta)$. Todavia, na Proposição 2.4.5, vimos que $\text{ind}(F_\gamma) = -2d - 2t_o + 2t_s - i - 2c_1 - c_2$ e no Teorema 2.5.6, se k e m têm mesma paridade, então $\text{ind}(F_\beta) = -1$. Logo,

$$t_s - t_o = d + c_1 + \frac{i - 1 + c_2}{2}.$$

Os demais casos seguem analogamente, apenas observando que, no Teorema 2.5.6, se k é par e m é ímpar, então $\text{ind}(F_\beta) = -2$, e se k é ímpar e m é par, temos que $\text{ind}(F_\beta) = 0$. □

Corolário 3.3.2. *Para qualquer deformação genérica γ de β , que não tenha cúspides vale:*

1. *Se k e m têm mesma paridade, então γ tem um número ímpar de inflexões;*
2. *Se k e m têm paridades opostas, então γ tem um número par de inflexões.*

Demonstração. Por hipótese, $c_1 = c_2 = 0$. Segue do Teorema 3.3.1 que, se k e m têm mesma paridade $i = 2(t_s - t_o - d) + 1$. Nas condições do item 2, ocorre $i = 2(t_s - t_o - d + 1)$ quando k é par e m é ímpar, ou $i = 2(t_s - t_o - d)$ se k é ímpar e m par. \square

Corolário 3.3.3. *Para qualquer deformação genérica γ de β , que não tenha cúspides nem pontos duplos vale:*

1. *Se k e m têm mesma paridade, então $i = 2(t_s - t_o) + 1$;*
2. *Se k é par e m é ímpar, então $i = 2(t_s - t_o + 1)$;*
3. *Se k é ímpar e m é par, então $i = 2(t_s - t_o)$.*

Demonstração. Fazendo $d = 0$ em todos os casos da demonstração do Corolário 3.3.2, obtemos o desejado. \square

Observação 3.3.4. *Vimos no Lema 3.2.1, que o índice topológico do campo F_γ , para qualquer deformação genérica γ de $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, coincide com o índice topológico de F_β , ou seja, o índice topológico é invariante por deformações genéricas de β . Nesse sentido, se γ_1 e γ_2 são deformações genéricas de β , então $\text{ind}(F_{\gamma_1}) = \text{ind}(F_\beta) = \text{ind}(F_{\gamma_2})$. Entretanto, o número de pontos duplos, bitangências, inflexões e cúspides que aparecem em γ dependem da deformação genérica de β escolhida, como verificamos nos Exemplos 3.2.2 e 3.2.3.*

CAPÍTULO 4

CAMPOS DE VETORES E GERMES DE CURVAS PLANAS COMPLEXAS

Neste capítulo, apresentamos de que maneira as relações obtidas no caso real, são lidas no caso de germes de curvas planas complexas. Neste caso, obtemos relações entre o número de pontos duplos, bitangências e inflexões de uma deformação da curva. Como no caso complexo definimos a multiplicidade do campo, o número de inflexões e pontos duplos como a dimensão sobre \mathbb{C} de espaços vetoriais da forma $\frac{R}{J}$, em que R é um anel e J um ideal de R , foi necessário estudarmos ferramentas algébricas que nos permitam calcular dimensões como essa, por exemplo, o conhecido Teorema de Bézout e propriedades do índice de interseção. Além disso, a partir de um germe de curva plana complexa e do campo de vetores associado a ele, provamos que é válida uma relação entre a multiplicidade do campo e dos números de pontos duplos, bitangências e inflexões de alguma deformação da curva. Por fim, conhecendo o número de Tjurina, provamos algumas relações entre invariantes bem conhecidos da teoria de curvas, como o número de Milnor e a \mathcal{A}_e -codimensão, e os números de inflexões e bitangências de uma deformação de uma dada curva.

4.1 Germes de Aplicações

Nesta seção, definimos o conceito de germes de aplicações, pois desejamos estudar germes de curvas planas complexas. Para tanto, utilizamos as referências [17] e [33].

Vamos começar definindo o conceito de germe de uma aplicação.

Considere o conjunto de todas as aplicações analíticas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, definidas em uma vizinhança aberta $U \subset \mathbb{C}^n$ da origem.

Neste conjunto, podemos definir a seguinte relação de equivalência: dadas $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$ e $g : V \rightarrow \mathbb{C}^p$ analíticas, com U e V vizinhanças da origem, dizemos que f e g são equivalentes, se existe uma vizinhança aberta $W \subset U \cap V$ contendo $0 \in \mathbb{C}^n$, tal que $f|_W = g|_W$.

Definição 4.1.1. *O germe de uma aplicação analítica $f : U \rightarrow \mathbb{C}^p$, com U uma vizinhança aberta de 0 em \mathbb{C}^n , é definido como a classe de equivalência de f , segundo a relação definida acima. Se f é um representante do germe em 0 , então o denotamos por $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, f(0))$.*

Definição 4.1.2. *Dizemos que um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ é germe de difeomorfismo, se um de seus representantes, e portanto todos, é um difeomorfismo local em 0 .*

Considere o conjunto

$$\mathcal{O}_{n,p} = \{f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0); g \text{ é germe de aplicação analítica numa vizinhança de } 0\}.$$

Quando $p = 1$, é usual denotarmos $\mathcal{O}_{n,1}$ simplesmente por \mathcal{O}_n , que é o conjunto dos germes de funções analíticas definidas numa vizinhança da origem de \mathbb{C}^n . É possível provar (veja [19], por exemplo) que \mathcal{O}_n é um anel Noetheriano local, cujo ideal maximal, denotado por \mathcal{M}_n , é dado por $\mathcal{M}_n = \{f \in \mathcal{O}_{n,p}; f(0) = 0\}$. O conjunto $\mathcal{O}_{n,p}$ é na verdade um \mathcal{O}_n -módulo livre de posto p .

Considere $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ o anel das séries de potências, nas variáveis x_1, \dots, x_n , que convergem absolutamente em alguma vizinhança de 0 . Um resultado importante, neste contexto, é que \mathcal{O}_n é isomorfo ao anel $\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}$ (veja [19], Theorem 2).

4.2 Teorema de Bézout

Uma questão que nos interessa, neste trabalho, é: dado um anel R e J um ideal de R , como calcular a dimensão de $\frac{R}{J}$, visto como espaço vetorial. Dessa forma, nesta seção, apresentamos alguns resultados que vão nos auxiliar nesta direção. Vamos denotar por $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ o anel de polinômios nas variáveis x_1, \dots, x_n , com coeficientes em \mathbb{C} .

Proposição 4.2.1. *Seja $f \in \mathbb{C}[x]$ de grau d e $\langle f \rangle$ o ideal gerado por f . Então,*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x]}{\langle f \rangle} = d,$$

em que a dimensão é como \mathbb{C} -espaço vetorial.

Demonstração. Sabemos que o \mathbb{C} -espaço vetorial quociente $\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle f \rangle}$ é o conjunto de classes de equivalência $\{\bar{g}; g \in \mathbb{C}[x]\}$, em que $\bar{g} = \bar{h}$ se, e somente se, $g - h \in \langle f \rangle$.

Pelo algoritmo da divisão, dado $g \in \mathbb{C}[x]$ existem únicos $q, r \in \mathbb{C}[x]$, satisfazendo $g = qf + r$, com $0 \leq \text{gr}(r) < \text{gr}(f) = d$. Logo, $\bar{g} = \bar{r}$, ou seja,

$$\frac{\mathbb{C}[x]}{\langle f \rangle} = \{\bar{r}; r \in \mathbb{C}[x]\} = \overline{\{a_{d-1}x^{d-1} + \dots + a_1x + a_0; a_i \in \mathbb{C}, i = 0 \dots d-1\}}.$$

E sabemos que, o subespaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a $d-1$, tem como base, por exemplo, o conjunto $\{x^{d-1}, \dots, x, 1\}$, como queríamos. \square

Um resultado que vai nos auxiliar, no caso em que $R = \mathbb{C}[x, y]$, é o clássico resultado de geometria algébrica, chamado Teorema de Bézout. Vamos apresentar a versão deste Teorema, como em [7].

Sejam F_1, F_2, \dots, F_n polinômios homogêneos nas variáveis complexas x_0, \dots, x_n , ou seja, $F_i \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$. Suponha que o grau de F_i seja d_i para $i = 1, \dots, n$. O Teorema de Bézout nos diz que, quando o número de soluções do sistema de equações

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0 \tag{4.1}$$

é finito em \mathbb{P}^n , então o número de soluções é $d_1 \cdot \dots \cdot d_n$, contado com multiplicidades.

Também é conveniente encontrar soluções no espaço afim. No espaço projetivo complexo \mathbb{P}^n , temos o espaço afim $\mathbb{C}^n \subset \mathbb{P}^n$, definido por

$x_0 = 1$. Defina

$$\begin{aligned} f_i(x_1, \dots, x_n) &= F_i(1, x_1, \dots, x_n) \\ \bar{F}_i(x_1, \dots, x_n) &= F_i(0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Observe que cada f_i tem grau, no máximo, d_i . As soluções das equações afins

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0, \quad (4.3)$$

são as soluções de (4.1) que estão contidas em \mathbb{C}^n .

Uma solução não trivial de $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n = 0$ é chamada solução "no infinito", ou ainda, é uma solução em " ∞ ". Se $\bar{F}_1 = \dots = \bar{F}_n = 0$ possui apenas soluções triviais, dizemos que as equações afins, dadas em (4.3) não possuem soluções no infinito.

Teorema 4.2.2. (Teorema de Bézout): *Sejam f_1, f_2, \dots, f_n definidas como em (4.2). Suponha que as equações afins dadas em (4.3) não possuem soluções no infinito. Então, essas equações têm $d_1 d_2 \dots d_n$ soluções (contadas as multiplicidades) e*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = d_1 d_2 \dots d_n$$

como espaço vetorial sobre \mathbb{C} .

Para detalhes da demonstração do Teorema 4.2.2 consulte [7].

No caso que nos interessa, $n = 2$, observe que $f_1(x_1, x_2) = f_2(x_1, x_2) = 0$ não possui solução no infinito se, e somente se, $F_1(0, x_1, x_2)$ e $F_2(0, x_1, x_2)$ não tem fator comum em $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, pois caso contrário, se $ax_1 + bx_2$ é fator comum, ou seja, $F_1(0, x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)g_1(x_1, x_2)$ e $F_2(0, x_1, x_2) = (ax_1 + bx_2)g_2(x_1, x_2)$, então o ponto do infinito $(0 : b : -a)$ é solução de $\bar{F}_1 = \bar{F}_2 = 0$.

Recordando que, uma fatoração de um polinômio homogêneo $F(x_0, x_1, x_2)$, corresponde uma fatoração de $f(x_1, x_2) = F(1, x_1, x_2)$.

4.3 Índice de Interseção

Nesta seção, vamos definir o conceito de índice de interseção como uma ferramenta algébrica para calcular $\dim_{\mathbb{C}} \frac{R}{\langle f, g \rangle}$, em que R é o anel $\mathbb{C}[x, y]$ ou $\mathbb{C}\{x, y\}$ e $\langle f, g \rangle$ é o ideal gerado por $f, g \in R$. Em geral, este conceito é definido no estudo de curvas, por ter

uma interpretação geométrica em termos das multiplicidades dos pontos de interseção das curvas definidas por f e g . Para mais detalhes ver [16] e [21].

De modo a contemplar os casos que nos interessam, vamos definir o índice de interseção de elementos no anel das séries de potências formais.

Definição 4.3.1. *Sejam K um corpo e x_1, \dots, x_r indeterminadas sobre K . Denotamos por $K[[x_1, \dots, x_r]]$ o conjunto de todas as somas formais do tipo $\sum_{i=0}^{\infty} P_i$, em que P_i é um polinômio homogêneo de grau i nas indeterminadas x_1, \dots, x_r , com coeficientes em K . Cada elemento de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ é chamado de **série de potências formais** nas indeterminadas x_1, \dots, x_r , com coeficientes em K .*

Seja $p \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ dado por $p = \sum_{i=0}^{\infty} P_i$ com $P_i \in K[[x_1, \dots, x_r]]$ um polinômio homogêneo de grau i . É possível mostrar que p é inversível se, e somente se, $P_0 \neq 0$. Os elementos inversíveis de $K[[x_1, \dots, x_r]]$ são chamados unidades. Veja, por exemplo, [21].

Definição 4.3.2. *Seja $f \in K[[x_1, \dots, x_n]] \setminus \{0\}$. Suponha $f = \sum_{i=0}^{\infty} F_i$, com F_i um polinômio homogêneo de grau i e n o menor inteiro tal que $F_n \neq 0$. O polinômio homogêneo F_n é dito a forma inicial de f , e o inteiro não negativo n é chamado de **multiplicidade** de f e denotado por $\text{mult}(f)$. Se $f = 0$, definimos $\text{mult}(f) = \infty$.*

Definição 4.3.3. *Sejam $f, g \in K[[x, y]]$. Definimos o índice de interseção de f e g , denotado por $\mathcal{I}(f, g)$, por*

$$\mathcal{I}(f, g) = \dim_K \frac{K[[x, y]]}{\langle f, g \rangle},$$

podendo ocorrer $\mathcal{I}(f, g) = \infty$.

No que segue, apresentamos alguns resultados e propriedades do índice de interseção, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, em [21].

Proposição 4.3.4. *Sejam $f, g \in K[[x, y]]$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) f e g são relativamente primos;
- (ii) a dimensão de $\frac{K[[x, y]]}{\langle f, g \rangle}$, como espaço vetorial, é finita.

Teorema 4.3.5. *Sejam $f, g, h \in K[[x, y]]$ e u uma unidade de $K[[x, y]]$. Então,*

1. $\mathcal{I}(f, g) = \mathcal{I}(g, f)$;

2. $\mathcal{I}(f, ug) = \mathcal{I}(f, g)$;
3. $\mathcal{I}(f, gh) = \mathcal{I}(f, g) + \mathcal{I}(f, h)$;
4. $\mathcal{I}(f, g - hf) = \mathcal{I}(f, g)$.

Observação 4.3.6. Podemos calcular o índice de interseção de f e g , para $f, g \in \mathbb{C}\{x, y\}$ (anel das séries que convergem absolutamente em uma vizinhança da origem) ou $\mathbb{C}[x, y]$ (anel de polinômios). No entanto, os elementos inversíveis do anel de polinômios são apenas as constantes. E nesses dois casos, as propriedades do Teorema 4.3.5 são válidas.

Exemplo 4.3.7. Sejam (f) e (g) duas curvas algebróides planas, em que $f(x, y) = y^7 - x^2$ e $g(x, y) = y^5 - x^3$. Aplicando os itens do Teorema 4.3.5 obtemos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}(f, g) &\stackrel{(1)}{=} \mathcal{I}(y^5 - x^3, y^7 - x^2) \\
 &\stackrel{(4)}{=} \mathcal{I}(y^5 - x^3, y^7 - x^2 - y^2(y^5 - x^3)) \\
 &= \mathcal{I}(y^5 - x^3, x^2(xy^2 - 1)) \\
 &\stackrel{(2)}{=} \mathcal{I}(y^5 - x^3, x^2) \stackrel{(3)}{=} 2\mathcal{I}(y^5 - x^2x, x) \\
 &\stackrel{(4)}{=} 2\mathcal{I}(y^5, x) \stackrel{(3)}{=} 10\mathcal{I}(x, y) = 10.
 \end{aligned}$$

Proposição 4.3.8. Dados $f, g \in K[[x, y]]$, com $f = F_n + F_{n+1} + \dots$ e $g = G_m + G_{m+1} + \dots$, $n = \text{mult}(f)$ e $m = \text{mult}(g)$. Então,

$$\mathcal{I}(f, g) \geq \text{mult}(f) \cdot \text{mult}(g),$$

valendo a igualdade se, e somente se, F_n e G_m não possuem fator comum.

Demonstração. Ver Theorem 4.18 de [21]. □

Proposição 4.3.9. Seja K um corpo algebricamente fechado e $P \in K[x, y]$ um polinômio homogêneo de grau n . Então, $P(x, y)$ pode ser escrito como produto de fatores lineares, isto é,

$$P(x, y) = \prod_{i=1}^s (a_i x + b_i y)^{r_i},$$

em que $\sum_{i=1}^s r_i = n$, $a_i, b_j \in K$, para todo $i, j = 1, \dots, s$, com $a_i b_j - a_j b_i \neq 0$, se $i \neq j$.

4.4 Germes de Aplicações Finitas

Nesta seção, vamos introduzir o conceito de multiplicidade de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$. Este não deve ser confundido com multiplicidade de uma série de potências, introduzido na seção anterior.

Em [2], Section 4.3, temos o seguinte resultado:

Teorema 4.4.1. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ um germe de aplicação holomorfa, com $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_i : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$, $i = 1, \dots, n$. O número de pré-imagens, próximas de zero, de f é igual a dimensão da álgebra local*

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_n}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}, \quad (4.4)$$

onde $\langle f_1, \dots, f_n \rangle$ é o ideal gerado pelas coordenadas de f , e a dimensão é como espaço vetorial. No caso holomorfo, a dimensão em (4.4) é finita se, e somente se, 0 é isolado em $f^{-1}(0)$.

O número

$$\vartheta_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}$$

é dita a multiplicidade local de f em 0 . Uma aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ é dita de multiplicidade finita se $\vartheta_f < \infty$.

Denotando o anel \mathcal{O}_n por $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}$, podemos definir a multiplicidade global de f como

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = \sum_{p \in f^{-1}(0)} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, p}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}, \quad (4.5)$$

onde $f = (f_1, \dots, f_n)$ é finito. Isto significa que $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}$ é o número de pontos de $f_1 = \dots = f_n = 0$, contando as multiplicidades.

Exemplo 4.4.2. *Seja $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ escrita como $f = (f_1, \dots, f_n)$. Suponha que cada f_i é um polinômio homogêneo de grau d_i , para $i = 1, \dots, n$. Se 0 é isolado em $f^{-1}(0)$, então $\vartheta_f = d_1 \cdot \dots \cdot d_n$.*

De fato, se a única solução de

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0 \quad (4.6)$$

é $(0, \dots, 0)$, significa que os polinômios f_i 's não possuem um fator comum, caso contrário, se

$p \in \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$, p não constante, satisfaz $f_1 = pg_1, \dots, f_n = pg_n$, então $p = 0$ é uma solução não trivial do sistema (4.6). E por (4.5), se $f^{-1}(0) = \{0\}$, então $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n, 0}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}$. Logo, pelo Teorema de Bézout,

$$\vartheta_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x_1, \dots, x_n\}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle} = d_1 \cdot \dots \cdot d_n.$$

Exemplo 4.4.3. Seja $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ uma aplicação suave, dada por $f = (f_1, f_2)$. Para cada $i = 1, 2$, $f_i : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ se decompõe como soma de polinômios homogêneos, ou ainda, $f_i = g_i + G_i$, com g_i a forma inicial de f_i (ver Definição 4.3.2). Assim, $f = g + G$, com $g = (g_1, g_2)$. Se 0 é isolado em $g^{-1}(0)$, então $\vartheta_f = \vartheta_g$.

Com efeito, como g_1 e g_2 são polinômios homogêneos em $\mathbb{C}[x, y]$, segue da Proposição 4.3.9, que g_1 e g_2 se escrevem como produto de fatores lineares,

$$g_1(x, y) = \prod_{i=1}^s (a_i x + b_i y)^{r_i} \quad e \quad g_2(x, y) = \prod_{i=1}^l (c_i x + d_i y)^{s_i},$$

com $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{C}$.

Se 0 é isolado em $g^{-1}(0)$, então g_1 e g_2 não possuem fator comum, pelo mesmo argumento do exemplo anterior. Logo, pela Proposição 4.3.8,

$$\mathcal{I}(f_1, f_2) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f_1, f_2 \rangle} = \text{mult}(f_1) \cdot \text{mult}(f_2) = d_1 \cdot d_2,$$

em que d_i é o grau de g_i , $i = 1, 2$.

Mas, pelo exemplo anterior, $\vartheta_g = d_1 \cdot d_2$. Logo,

$$\vartheta_f = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\langle f_1, f_2 \rangle} = d_1 \cdot d_2 = \vartheta_g.$$

4.5 Multiplicidade, Inflexões e Pontos Duplos de Deformações de Curvas Planas

Nesta seção, a cada germe de curva plana complexa irreduzível $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, definido por $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$, associamos o campo vetorial $F_\alpha : (\mathbb{C} \times \mathbb{C}, 0) \rightarrow$

$(\mathbb{C}^2, 0)$ dado por

$$F_\alpha(u, v) = \left(\frac{\det(\alpha'(u), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2}, \frac{\det(\alpha'(v), \alpha(u) - \alpha(v))}{(u - v)^2} \right). \quad (4.7)$$

Temos por objetivo obter uma relação entre os números de inflexões, bitangências e pontos duplos de uma deformação de α com o número de Milnor da curva. Nesse sentido, definimos as quantidades desses pontos local e globalmente, fazendo uma analogia com a geometria das deformações genéricas de curvas planas, que estudamos no caso real.

Definição 4.5.1. *Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dado por $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u))$, um germe de curva plana complexa irredutível e F_α como em (4.7). Definimos:*

1. $\vartheta_{F_\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle F_\alpha(u, v) \rangle}$ a multiplicidade do germe F_α na origem;
2. $\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u, v]}{\langle F_\alpha(u, v) \rangle}$ a multiplicidade global do germe F_α ;
3. $I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) \rangle}$ o número de inflexões de uma deformação de α ;
4. $\tilde{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u]}{\langle \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) \rangle}$ a quantidade global de inflexões de uma deformação de α ;
5. $\delta = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle \frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v}, \frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} \rangle}$ o número de pontos duplos de uma deformação de α ;
6. $\tilde{\delta} = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u, v]}{\langle \frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v}, \frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} \rangle}$ a quantidade global de pontos duplos de uma deformação de α .

Observação 4.5.2. *No caso real, um ponto regular $u_0 \in I$ era dito uma inflexão de uma curva $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ (Definição 2.1.8), se a curvatura $k_\alpha(u_0) = 0$, em que*

$$k_\alpha(u) = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u))}{\|\alpha'(u)\|^3}.$$

Como a curvatura se anula se, e somente se, $\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = 0$, faz sentido a definição para número de inflexões no caso complexo.

Analogamente, um par (u, v) de pontos $u, v \in I$ distintos, é dito um ponto duplo de α , no caso real, se $\alpha(u) = \alpha(v)$, ou seja, $(\alpha_1(u), \alpha_2(u)) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v))$, o que implica $(\alpha_1(u) - \alpha_1(v), \alpha_2(u) - \alpha_2(v)) = (0, 0)$. Justificando assim a definição no caso complexo, em que quocientamos por $u - v$, para eliminar o caso em que $u = v$.

Lema 4.5.3. *Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dado por $\alpha(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$, com $0 < k < m$, $a_k b_m \neq 0$ (sem que ocorra $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente). Se k e m são coprimos, então F_α tem a origem como um zero isolado em \mathbb{C} .*

Demonstração. Como no caso real, o campo F_α é dado como em (2.11), para $u \neq v$, e como em (2.13) para $u = v$.

Facilmente verificamos que quando $u = v$, $(0, 0)$ é uma singularidade de F_α . Falta analisar o caso $u \neq v$.

Suponha $(u, v) \neq (0, 0)$, satisfazendo $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ e defina $x = \frac{v}{u}$. Como em (2.14) e (2.15), sabemos que $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} \frac{-kx^m + mx^k + (k-m)}{(1-x)^2} = 0 \\ \frac{(m-k)x^m - mx^{m-k} + k}{(1-x)^2} = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

Suponha que $z \in \mathbb{C}$ seja uma solução de (4.8). Então, da primeira equação desse sistema, obtemos $-kz^m + mz^k + (k-m) = 0$, ou seja, como $k \neq 0$

$$z^m = \frac{mz^k + (k-m)}{k}.$$

Substituindo z^m no numerador da segunda equação de (4.8), segue que

$$\begin{aligned} & (m-k) \left(\frac{mz^k + (k-m)}{k} \right) - \frac{m}{z^k} \left(\frac{mz^k + (k-m)}{k} \right) + k = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(m-k)}{k} (mz^k + (k-m)) - \left(\frac{m^2 + (k-m)mz^{-k} - k^2}{k} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(m-k)}{k} (mz^k + (k-m)) - \left(\frac{(m-k)(m+k) - (m-k)mz^{-k}}{k} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(m-k)}{k} \left(mz^k + k - m - k - m + \frac{m}{z^k} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(m-k)}{k} \left(mz^k - 2m + \frac{m}{z^k} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{m(m-k)}{k} \left(z^k + \frac{1}{z^k} - 2 \right) = 0 \\ \Leftrightarrow & z^{2k} - 2z^k + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & (z^k - 1)^2 = 0, \end{aligned}$$

e assim, $z^k = 1$, ou seja, $z \in \mathbb{C}$ é solução de (4.8) se, e somente se, z é uma raiz k -ésima da unidade. Mas, as raízes k -ésimas de 1 são: $z_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{k}\right) + i \sin\left(\frac{2n\pi}{k}\right)$, com $n = 0, 1, \dots, k-1$. Podemos reescrever essas raízes utilizando a Fórmula de Euler, isto é, $z_n = e^{\frac{2n\pi i}{k}}$, com $n = 0, 1, \dots, k-1$.

Substituindo $z = e^{\frac{2n\pi i}{k}}$ no numerador da primeira equação de (4.8), obtemos

$$\begin{aligned} & -k \left(e^{\frac{2n\pi i}{k}} \right)^m + m \left(e^{\frac{2n\pi i}{k}} \right)^k + (k - m) = 0 \\ \Leftrightarrow & -k e^{\frac{2\pi m n i}{k}} + m e^{2\pi n i} + k - m = 0 \\ \Leftrightarrow & -k e^{\frac{2\pi m n i}{k}} + m + k - m = 0 \\ \Leftrightarrow & -k \left(e^{\frac{2\pi m n i}{k}} - 1 \right) = 0, \end{aligned}$$

isto é, $z^m = 1$.

Note que $z^d = 1$ com $d = \text{mdc}(k, m)$ se, e somente se, $z^k = 1$ e $z^m = 1$. Como k e m são coprimos, temos que a única raiz k -ésima e m -ésima da unidade é $z = 1$. Isso nos dá que $x = 1$ é a única solução do sistema (4.8), o que é um absurdo, já que para $x = 1$ os denominadores das duas equações se anulam.

Portanto, a única solução de $F_\alpha(u, v) = (0, 0)$ é $(u, v) = (0, 0)$. \square

Os autores em [11] afirmam que, se α é um germe de curva plana complexa irreduzível, então da versão complexa da Proposição 2.3.1, vale que

$$\vartheta_{F_\alpha} = 2\delta + 2T + I, \quad (4.9)$$

em que T é o número de bitangências de uma deformação da curva.

Analogamente, para a noção global correspondente, vale que

$$\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = 2\tilde{\delta} + 2\tilde{T} + \tilde{I}, \quad (4.10)$$

em que \tilde{T} é igual a T , mais o número de bitangências da curva antes da deformação.

Vamos tentar ilustrar essas relações em alguns exemplos.

Exemplo 4.5.4. Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ definida por $\alpha(u) = (u, 2u^4)$. Considere $\beta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$, dada por $\beta(u) = (u, 2u^4 + u^3)$ uma deformação de α .

Por (2.11), temos que o campo vetorial associado a α é dado por:

$$F_\alpha(u, v) = (-6u^2 - 4uv - 2v^2, 6v^2 + 4uv + 2u^2).$$

Note que $\alpha'(u) = (1, 8u^3)$, $\alpha''(u) = (0, 24u^2)$ e $\frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v} = \frac{u - v}{u - v} = 1$. Então,

1. Pelo Lema 4.5.3 e Exemplo 4.4.2, segue que: $\vartheta_{F_\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle F_\alpha(u, v) \rangle} = 2 \cdot 2 = 4$;

$$2. I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle \alpha'(u), \alpha''(u) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle 24u^2 \rangle} = 2;$$

$$3. \delta = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle 1, \frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} \rangle} = 0.$$

No Exemplo 2.4.7, vimos que o campo associado à curva β é dado por:

$$F_{\beta}(u, v) = (-2u - v - 6u^2 - 2v^2 - 4uv, 2v + u + 6v^2 + 2u^2 + 4uv).$$

Além disso, as singularidades de F_{β} são: $(0, 0)$, $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, $(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8})$ e $(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8})$, em que $u_0 = 0$ e $u_1 = -\frac{1}{4}$ corresponde a inflexões de β e o par $(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}, -\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8})$ uma bitangência de β , então $T = 1$. Verificando assim a relação, $\vartheta_{F_{\alpha}} = 2\delta + 2T + I$

Na Figura 4.1 esboçamos o traço real de α e β , com $A = \beta(-\frac{1}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8})$, $B = \beta(-\frac{1}{8} + \frac{\sqrt{3}}{8})$, $C = \beta(0)$ e $D = \beta(-\frac{1}{4})$.

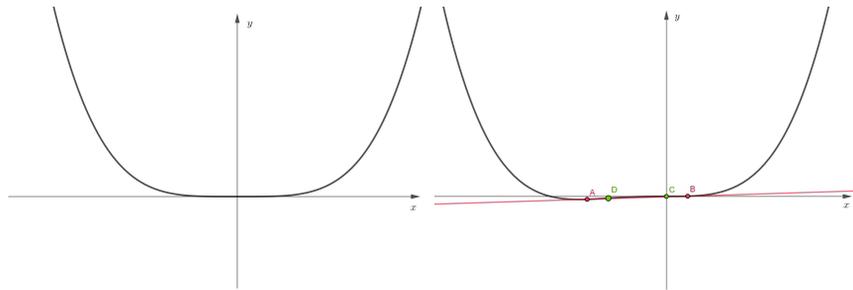


Figura 4.1: Traço real de $\alpha(u) = (u, 2u^4)$ e de $\beta(u) = (u, u^3 + 2u^4)$, respectivamente

Exemplo 4.5.5. Sejam $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ uma curva complexa irredutível definida por $\alpha(u) = (u^2, u^3)$ e $\beta : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $\beta(u) = (u^2 + 2u, u^3 - 3u)$ uma deformação de α .

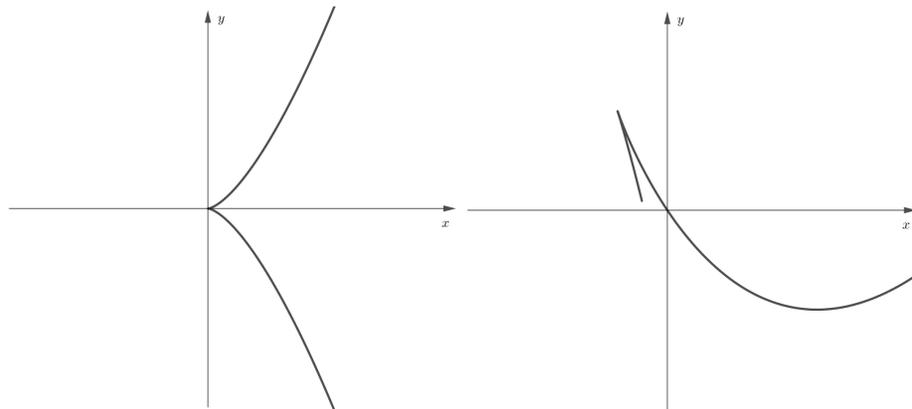


Figura 4.2: Traço real de $\alpha(u) = (u^2, u^3)$ e $\beta(u) = (u^2 + 2u, u^3 - 3u)$, respectivamente

Como no Exemplo 2.3.2, $F_\alpha(u, v) = (-u^2 - 2uv, v^2 + 2uv)$. E ainda $\alpha'(u) = (2u, 3u^2)$, $\alpha''(u) = (2, 6u)$, $\frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v} = u + v$ e $\frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} = u^2 + uv + v^2$. Donde obtemos:

1. Pelo Lema 4.5.3 e Exemplo 4.4.2, segue que $\vartheta_{F_\alpha} = \mathcal{I}(u^2 - 2uv, v^2 + 2uv) = 2 \cdot 2 = 4$;
2. $I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle 6u^2 \rangle} = 2$;
3. $\delta = \frac{1}{2} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle u+v, u^2+uv+v^2 \rangle} = \frac{1}{2} \mathcal{I}(u+v, u^2+uv+v^2) = \frac{2}{2} = 1$.

Nesse caso, pelo Exemplo 3.1.5, $F_\beta(u, v) = (-u^2 - 2uv - 4u - 2v - 3, v^2 + 2uv + 4v + 2u + 3)$ e $(u, v) = (-1, -1)$ é a única singularidade de F_β , em que $u = -1$ corresponde a um ponto cúspide de β .

Observe que esta deformação de α , não capturou, o número de singularidades de F_β , o número de inflexões, nem o ponto duplo obtido algebricamente acima.

Exemplo 4.5.6. Considerando α como no exemplo anterior, mas $\beta(u) = (u^2, u^3 - 3u)$ temos que $F_\beta(u, v) = (-u^2 - 2uv - 3, v^2 + 2uv + 3)$.

Assim, somando as equações do sistema

$$\begin{cases} -u^2 - 2uv - 3 = 0 \\ v^2 + 2uv + 3 = 0 \end{cases}$$

concluimos que $v^2 - u^2 = 0$ se, e somente se, $v = \pm u$.

Se $v = u$, então substituindo na segunda equação do sistema acima, temos que $3u^2 + 3 = 0$, cuja solução é $u = \pm i$. E se $v = -u$, então $-u^2 + 3 = 0$ tem solução $u = \pm\sqrt{3}$. Portanto, as singularidades de F_β são: $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, (i, i) e $(-i, -i)$, que corresponde ao que obtemos em $\vartheta_{F_\alpha} = 4$.

Veja que $\beta(\sqrt{3}) = (3, 0) = \beta(-\sqrt{3})$, ou seja, $(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ é um ponto duplo de β e

$$\det(\beta'(u), \beta''(u)) = \begin{vmatrix} 2u & 3u^2 - 3 \\ 2 & 6u \end{vmatrix} = 12u^2 - 6u^2 + 6 = 6(u^2 + 1),$$

ou seja, $\det(\beta'(u), \beta''(u)) = 0$ se, e somente se, $u = \pm i$. Portanto, $u = i$ e $u = -i$ correspondem a inflexões de β . Essa deformação da curva α reflete o que obtemos algebricamente com $I = 2$ e $\delta = 1$, ou seja, existe uma deformação de α com duas inflexões e um ponto duplo. Novamente neste caso, não temos bitangências.

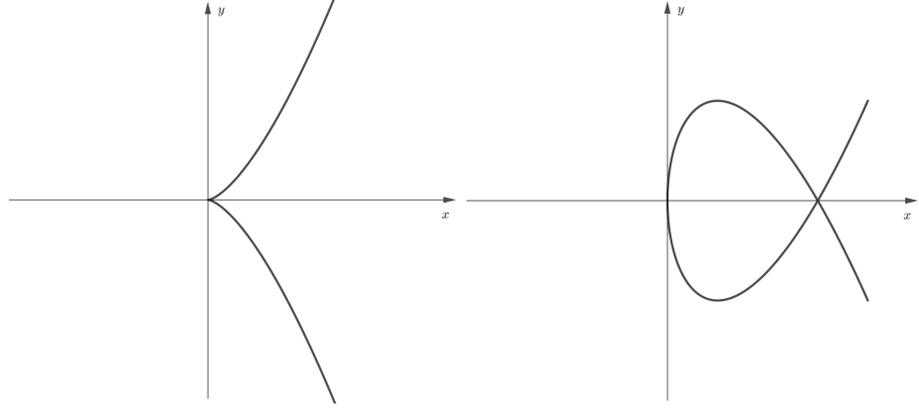


Figura 4.3: Traço real de $\alpha(u) = (u^2, u^3)$ e $\beta(u) = (u^2, u^3 - 3u)$, respectivamente

Vamos agora obter algumas relações envolvendo os números $\vartheta, \tilde{\vartheta}, I, \tilde{I}, \delta$ e $\tilde{\delta}$ para uma classe de curvas planas irreduzíveis mais gerais que as monomiais.

Para o próximo resultado, vamos analisar o seguinte caso particular.

Considere $\alpha(u) = (a_k u^k + a_l u^l, b_m u^m + b_n u^n)$ com $a_k a_l b_m b_n \neq 0, 1 < k < m, k < l$ e $m < n$ (sem que ocorra $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente). Calculemos o campo $F_\alpha(u, v) = (f(u, v), -f(v, u))$. Veja que

$$\begin{aligned} f(u, v) &= \frac{1}{(u-v)^2} \begin{vmatrix} ka_k u^{k-1} + la_l u^{l-1} & mb_m u^{m-1} + nb_n u^{n-1} \\ a_k(u^k - v^k) + a_l(u^l - v^l) & b_m(u^m - v^m) + b_n(u^n - v^n) \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{(u-v)^2} [ka_k b_m u^{k-1}(u^m - v^m) - ma_k b_m u^{m-1}(u^k - v^k) \\ &\quad + ka_k b_n u^{k-1}(u^n - v^n) - na_k b_n u^{n-1}(u^k - v^k) \\ &\quad + la_l b_m u^{l-1}(u^m - v^m) - ma_l b_m u^{m-1}(u^l - v^l) \\ &\quad + la_l b_n u^{l-1}(u^n - v^n) - na_l b_n u^{n-1}(u^l - v^l)]. \end{aligned}$$

Contas análogas as que foram feitas para se obter (2.12), podem ser aplicadas a cada soma de duas parcelas, do somatório acima, obtendo a seguinte expressão para F_α :

$$\begin{aligned} F_\alpha(u, v) &= (P_{k+m-3}(u, v) + P_{k+n-3}(u, v) + P_{l+m-3}(u, v) + P_{l+n-3}(u, v), \\ &\quad -P_{k+m-3}(v, u) - P_{k+n-3}(v, u) - P_{l+m-3}(v, u) - P_{l+n-3}(v, u)). \end{aligned} \quad (4.11)$$

em que

$$P_{i+j-3}(u, v) = a_i b_j ((i-j)u^{i+j-3} - v h_{ij}(u, v)) \quad (4.12)$$

como em (2.12).

Proposição 4.5.7. *Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe do tipo*

$$\alpha(u) = \left(\sum_{i=k}^l a_i u^i, \sum_{j=m}^n b_j u^j \right) \quad (4.13)$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ e $1 < k < m, k < l$ e $m < n$ (sem que ocorra $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente).

1. Se k e m são coprimos, então $\vartheta_{F_\alpha} = I^2$.
2. Se l e n são coprimos, então $\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = \tilde{I}^2$.

Demonstração. Suponha k e m coprimos e seja $F_\alpha(u, v) = (f(u, v), -f(v, u))$ como em (4.7). Uma generalização de (4.11), nos permite decompor F_α da forma:

$$\begin{aligned} F_\alpha(u, v) &= (P_{k+m-3}(u, v) + \cdots + P_{l+n-3}(u, v), -P_{k+m-3}(v, u) - \cdots - P_{l+n-3}(v, u)) \\ &:= (f_1(u, v), f_2(u, v)), \end{aligned} \quad (4.14)$$

onde P_{i+j-3} é um polinômio homogêneo de grau $i+j-3$, dado em (4.12), com $k < i < l$ e $m < j < n$.

Podemos decompor α da forma $\alpha(u) = \beta(u) + \lambda(u)$, com $\beta(u) = (a_k u^k, b_m u^m)$ e $\lambda(u) = \left(\sum_{i=k+1}^l a_i u^i, \sum_{j=m+1}^n b_j u^j \right)$. E portanto, de (4.14),

$$F_\alpha(u, v) = F_\beta(u, v) + F_\lambda(u, v) = (P_{k+m-3}(u, v), -P_{k+m-3}(v, u)) + F_\lambda(u, v).$$

Como cada função coordenada de F_β é um polinômio homogêneo de grau $k+m-3$ e k e m são coprimos temos, do Lema 4.5.3, que F_β tem a origem como zero isolado.

Portanto, do Exemplo 4.4.3 e do Exemplo 4.4.2, temos que

$$\vartheta_{F_\alpha} = \vartheta_{F_\beta} = (k+m-3)(k+m-3) = (k+m-3)^2.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \det(\beta'(u), \beta''(u)) &= \begin{vmatrix} ka_k u^{k-1} & mb_m u^{m-1} \\ k(k-1)a_k u^{k-2} & m(m-1)b_m u^{m-2} \end{vmatrix} \\
 &= km(m-1)a_k b_m u^{k+m-3} - km(k-1)a_k b_m u^{k+m-3} \\
 &= kma_k b_m (m-k)u^{k+m-3}
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

é um polinômio homogêneo de grau $k + m - 3$. Logo,

$$I = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle \det(\beta'(u), \beta''(u)) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u\}}{\langle u^{k+m-3} \rangle} = k + m - 3.$$

Portanto, $\vartheta_{F_\alpha} = I^2$.

Supondo que l e n são coprimos, vamos homogeneizar os polinômios P_{i+j-3} , em (4.14), para que F_1 e F_2 sejam polinômios homogêneos de grau $l + n - 3$. Para tanto, defina

$$\begin{aligned}
 F_1(w, u, v) &= w^{l+n-k-m} P_{k+m-3}(u, v) + w^{l+n-k-m-1} P_{k+m-2}(u, v) + \cdots + P_{l+n-3}(u, v) \\
 F_2(w, u, v) &= -w^{l+n-k-m} P_{k+m-3}(v, u) - w^{l+n-k-m-1} P_{k+m-2}(v, u) - \cdots - P_{l+n-3}(v, u).
 \end{aligned}$$

Note que $F_1(1, u, v) = f_1(u, v)$, $F_2(1, u, v) = f_2(u, v)$, $\overline{F_1}(0, u, v) = P_{l+n-3}(u, v)$ e $\overline{F_2}(0, u, v) = -P_{l+n-3}(v, u)$.

O campo $F_\gamma(u, v) = (P_{l+n-3}(u, v), -P_{l+n-3}(v, u)) = (\overline{F_1}(0, u, v), \overline{F_2}(0, u, v))$ associado a curva $\gamma(u) = (a_l u^l, b_n u^n)$ satisfaz, pelo Lema 4.5.3, que $\overline{F_1} = \overline{F_2} = 0$ tem a origem como zero isolado, pois l e n são coprimos. Assim, as equações afins $f_1(u, v) = f_2(u, v) = 0$ não possuem soluções no infinito. Então, pelo Teorema de Bézout, concluímos que

$$\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u, v]}{\langle F_\alpha(u, v) \rangle} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u, v]}{\langle f_1(u, v), f_2(u, v) \rangle} = (l + n - 3)^2.$$

Seja M a matriz cujas linhas são as componentes de $\alpha'(u)$ e $\alpha''(u)$, respectivamente

$$M = \begin{bmatrix} ka_k u^{k-1} + \cdots + la_l u^{l-1} & mb_m u^{m-1} + \cdots + nb_n u^{n-1} \\ k(k-1)a_k u^{k-2} + \cdots + l(l-1)a_l u^{l-2} & m(m-1)b_m u^{m-2} + \cdots + n(n-1)b_n u^{n-2} \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, analogamente ao obtido em (4.15), temos:

$$\det(\alpha'(u), \alpha''(u)) = \det M = kma_k b_m (m - k)u^{k+m-3} + \dots + lna_l b_n (n - l)u^{l+n-3}.$$

Daí, pelo Teorema de Bézout,

$$\tilde{I} = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}[u]}{\langle \det(\alpha'(u), \alpha''(u)) \rangle} = l + n - 3.$$

Portanto, $\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = \tilde{I}^2$. □

Exemplo 4.5.8. Considere $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe dado por $\alpha(u) = (u^4, u^7)$.

Visto que 4 e 7 são coprimos, segue do Lema 4.5.3, que F_α tem a origem como zero isolado em \mathbb{C} . Além disso, sabemos que as funções coordenadas de F_α são polinômios homogêneos, de graus $k + m - 3 = 4 + 7 - 3 = 8$. Então, do item 1 da Proposição 4.5.7, temos $\vartheta = 8^2 = 64$ e $I = 8$.

Observe que $g_1(u, v) = \frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v} = \frac{u^4 - v^4}{u - v} = u^3 + u^2v + uv^2 + v^3$ e

$$\begin{aligned} g_2(u, v) &= \frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} = \frac{u^7 - v^7}{u - v} \\ &= u^6 + u^5v + u^4v^2 + u^3v^3 + u^2v^4 + uv^5 + v^6 \\ &= u^3(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) + u^2v^4 + uv^5 + v^6. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle g_1, g_2 \rangle} &= \mathcal{I}(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, u^3(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) + u^2v^4 + uv^5 + v^6) \\ &= \mathcal{I}(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, u^2v^4 + uv^5 + v^6) \\ &= \mathcal{I}(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3, u^2v^4 + uv^5 + v^6 - v^3(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3)) \\ &= \mathcal{I}((u^2 + v^2)(u + v), -u^3v^3) \\ &= \mathcal{I}(u^2 + v^2, u^3v^3) + \mathcal{I}(u + v, u^3v^3) \\ &= 3\mathcal{I}(u^2 + v^2, u) + 3\mathcal{I}(u^2 + v^2, v) + 3\mathcal{I}(u + v, u) + 3\mathcal{I}(u + v, v) \\ &= 12\mathcal{I}(u, v) + 6\mathcal{I}(u, v) = 18. \end{aligned}$$

Logo, $\delta = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle g_1, g_2 \rangle} = 9$.

Como vale (4.9), ou seja, $\vartheta_{F_\alpha} = 2\delta + 2T + I$, temos que $2T = 64 - 18 - 8$, e portanto $T = 19$.

Logo, existe uma deformação da curva α , com 9 pontos duplos, 8 inflexões e 19 bitangências.

De maneira análoga, $\tilde{\vartheta} = 64$, $\tilde{I} = 8$, $\tilde{\delta} = 9$ e aplicando (4.10) segue que $\tilde{T} = 19$.

Exemplo 4.5.9. Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ dada por $\alpha(u) = (u^4, u^7 + u^9)$.

Uma vez que α é dada como em (4.13) e $k = 4$ e $m = 7$ são coprimos, segue do item 1, da Proposição 4.5.7, que $\vartheta = 64$ e $I = 8$.

Note que $g_1(u, v) = \frac{\alpha_1(u) - \alpha_1(v)}{u - v} = u^3 + u^2v + uv^2 + v^3$ e

$$\begin{aligned} g_2(u, v) &= \frac{\alpha_2(u) - \alpha_2(v)}{u - v} \\ &= u^6 + u^5v + u^4v^2 + u^3v^3 + u^2v^4 + uv^5 + v^6 + u^8 \\ &\quad + u^7v + u^6v^2 + u^5v^3 + u^4v^4 + u^3v^5 + u^2v^6 + uv^7 + v^8. \end{aligned}$$

Assim, a forma inicial de $g_1(u, v)$ é o próprio $g_1(u, v)$, e a forma inicial de $g_2(u, v)$ é $g(u, v) = u^6 + u^5v + u^4v^2 + u^3v^3 + u^2v^4 + uv^5 + v^6$, ou seja, $\text{mult}(g_1) = 3$ e $\text{mult}(g_2) = 6$.

Veja que $g_1(u, v)$ e $g(u, v)$ não possuem fator comum, pois se $f(u, v) = (g_1(u, v), g(u, v))$, então $(0, 0)$ é isolado em $f^{-1}(0, 0)$. De fato, sabemos que $f(u, v) = (0, 0)$ se, e somente se,

$$\begin{cases} u^3 + u^2v + uv^2 + v^3 &= 0 \\ u^3(u^3 + u^2v + uv^2 + v^3) + u^2v^4 + uv^5 + v^6 &= 0. \end{cases}$$

Isso ocorre se, e somente se,

$$\begin{cases} u(u^2 + uv + v^2) + v^3 &= 0 \\ u^2v^4 + uv^5 + v^6 &= 0. \end{cases} \quad (4.16)$$

Da segunda equação de (4.16), temos que $u^2v^4 + uv^5 + v^6 = 0$, ou seja, $v^4(u^2 + uv + v^2) = 0$, donde $v = 0$ ou $u^2 + uv + v^2 = 0$.

Se $v = 0$, segue da primeira equação de (4.16), que $u^3 = 0$, logo $u = 0$. Agora, substituindo $u^2 + uv + v^2 = 0$ na primeira equação desse sistema, obtemos $v^3 = 0$, isto é, $v = 0$, e assim $u = 0$.

Portanto, $(0, 0)$ é a única solução de $f(u, v) = (0, 0)$ e, da Proposição 4.3.8, segue que

$$\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{u, v\}}{\langle g_1, g_2 \rangle} = \text{mult}(g_1) \cdot \text{mult}(g_2) = 3 \cdot 6 = 18.$$

Logo $\delta = 9$, e por (4.9), obtemos $T = 19$.

Aplicando o item 2 da Proposição 4.5.7 segue que $\tilde{\vartheta} = (l + n - 3)^2 = (10)^2 = 100$ e $\tilde{I} = 10$.

Em [11], os autores calculam o número de inflexões, pontos duplos, bitangências, multiplicidade e o número de Milnor, tanto no caso local quanto no global, para a classe dos germes simples de curvas planas. Com cálculos análogos ao que fizemos neste trabalho, recuperamos as tabelas como em [11].

4.6 Número de Milnor e \mathcal{A}_e -codimensão

Nesta seção, vamos obter algumas relações entre invariantes bem conhecidos da teoria de curvas, como o número de Milnor e a \mathcal{A}_e -codimensão, e os conceitos estudados, como o número de inflexões e bitangências de uma deformação de uma dada curva.

Seja $g : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de aplicação, cuja imagem é definida por uma equação $f \in \mathcal{O}_2$, ou seja, $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ define uma curva que denotamos por

$$\mathcal{C}_f = \{(x, y) \in U; f(x, y) = 0\}, \quad (4.17)$$

em que U é uma vizinhança de \mathbb{C}^2 .

O número de Milnor local de f é definido por:

$$\mu = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle},$$

em que $\left\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ é o ideal gerado pelas derivadas parciais de f . Em [29], Milnor mostra a seguinte relação:

$$\mu = 2\delta - r + 1.$$

em que δ é o número de pontos duplos que aparecem numa perturbação estável de f e r é o número de ramos da curva \mathcal{C}_f . Para a definição de perturbação estável veja, por exemplo, [33].

Como estamos estudando curvas complexas planas irredutíveis, ou seja, \mathcal{C}_f possui um único ramo, $r = 1$ e assim $\mu = 2\delta$.

O número de Milnor global de f , denotado por $\tilde{\mu}$, é igual a soma de todos os números de Milnor locais em todos os pontos críticos de f . E vale $\tilde{\mu} = 2\tilde{\delta}$.

Teorema 4.6.1. *Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de curva plana, dado por*

$$\alpha(u) = \left(\sum_{i=k}^l a_i u^i, \sum_{j=m}^n b_j u^j \right)$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ e $1 < k < m, k < l$ e $m < n$ (sem que ocorra $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente).

1. Se k e m são coprimos, então $\mu = I(I - 1) - 2T$.
2. Se l e n são coprimos, então $\tilde{\mu} = \tilde{I}(\tilde{I} - 1) - 2\tilde{T}$.

Demonstração. Das relações (4.9) e (4.10) temos que $\vartheta_{F_\alpha} = 2\delta + 2T + I$ e $\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = 2\tilde{\delta} + 2\tilde{T} + \tilde{I}$. Mas, pela Proposição 4.5.7, $\vartheta_{F_\alpha} = I^2$ e $\tilde{\vartheta}_{F_\alpha} = \tilde{I}^2$. Como no caso irreduzível, $\mu = 2\delta$ segue que:

$$\mu = I^2 - 2T - I = I(I - 1) - 2T.$$

Analogamente, no caso global. □

$\alpha(u)$	I	δ	T	ϑ_{F_α}	μ
$(u, u^k); k > 2$	$k - 2$	0	$\frac{(k-2)(k-3)}{2}$	$(k - 2)^2$	0
$(u^2, u^{2k+1}); k \geq 1$	$2k$	k	$2k(k - 1)$	$4k^2$	$2k$
$(u^3, u^{3k+1}); k \geq 1$	$3k + 1$	$3k$	$\frac{3k(3k-1)}{2}$	$(3k + 1)^2$	$6k$
$(u^3, u^{3k+2}); k \geq 1$	$3k + 2$	$3k + 1$	$\frac{3k(3k+1)}{2}$	$(3k + 2)^2$	$6k + 2$
$(u^4, u^5); (u^4, u^5 + u^7)$	6	6	9	36	12
$(u^4, u^7); (u^4, u^7 + u^9); (u^4, u^7 + u^{13})$	8	9	19	64	18

Tabela 4.1: T, ϑ e μ para germes simples de curvas planas

$\alpha(u)$	\tilde{I}	$\tilde{\delta}$	\tilde{T}	$\tilde{\vartheta}_{F_\alpha}$	$\tilde{\mu}$
$(u, u^k); k > 2$	$k - 2$	0	$\frac{(k-2)(k-3)}{2}$	$(k - 2)^2$	0
$(u^2, u^{2k+1}); k \geq 1$	$2k$	k	$2k(k - 1)$	$4k^2$	$2k$
$(u^3, u^{3k+1}); k \geq 1$	$3k + 1$	$3k$	$\frac{3k(3k-1)}{2}$	$(3k + 1)^2$	$6k$
$(u^3, u^{3k+2}); k \geq 1$	$3k + 2$	$3k + 1$	$\frac{3k(3k+1)}{2}$	$(3k + 2)^2$	$6k + 2$
(u^4, u^5)	6	6	9	36	12
$(u^4, u^5 + u^7)$	8	9	19	64	18
(u^4, u^7)	8	9	19	64	18
$(u^4, u^7 + u^9)$	10	12	33	100	24
$(u^4, u^7 + u^{13})$	14	18	73	196	36
$(t^4, t^6 + t^{2k+5}); k \geq 1$	$2k + 6$	$3(k + 2)$	$2k^2 - 14k + 21$	$(2k + 6)^2$	$6(k + 2)$

Tabela 4.2: $\tilde{T}, \tilde{\vartheta}$ e $\tilde{\mu}$ para germes simples de curvas planas

Outro conceito importante, em teoria de singularidades, é a codimensão de um germe com respeito à ação de um grupo. Neste caso, vamos definir a \mathcal{A}_e -codimensão de um germe de aplicação $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$. Para mais detalhes veja [17].

Definição 4.6.2. *Dois germes $f_1 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ e $f_2 : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ são ditos \mathcal{A} -equivalentes $(f_1 \sim_{\mathcal{A}} f_2)$, se existem germes de difeomorfismos $\phi : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^n, 0)$ e $\psi : (\mathbb{C}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^p, 0)$ para os quais $f_2 = \psi \circ f_1 \circ \phi^{-1}$, ou seja, para os quais o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f_1} & (\mathbb{C}^p, 0) \\ \downarrow \phi & & \downarrow \psi \\ (\mathbb{C}^n, 0) & \xrightarrow{f_2} & (\mathbb{C}^p, 0) \end{array}$$

Figura 4.4: \mathcal{A} -equivalência

O conjunto $\mathcal{A} = \{(\phi, \psi); \phi \in \mathcal{O}_{n,n} \text{ e } \psi \in \mathcal{O}_{p,p} \text{ são difeomorfismos}\}$ forma um grupo com respeito à composição.

É simples verificar que o conceito acima, define uma relação de equivalência. A órbita de um elemento $f \in \mathcal{O}_{n,p}$ é a classe de equivalência de f por essa relação, ou seja, $\mathcal{A} \cdot f = \{\psi \circ f \circ \phi^{-1}; (\phi, \psi) \in \mathcal{A}\}$.

Dado um germe $f \in \mathcal{O}_{n,p}$, denotamos por $\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p} = \{f \in \mathcal{O}_{n,p}; f(0) = 0\}$.

Definição 4.6.3. *Seja $f \in \mathcal{O}_{n,p}$.*

1. *O espaço tangente à órbita de f segundo a ação do grupo \mathcal{A} é definido por:*

$$T\mathcal{A} \cdot f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i; g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \{h \circ f; h \in \mathcal{M}_p \mathcal{O}_{p,p}\};$$

2. *O espaço tangente estendido é definido por:*

$$T\mathcal{A}_e \cdot f = \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} g_i; g = (g_1, \dots, g_n) \in \mathcal{O}_{n,n} \right\} + \{h \circ f; h \in \mathcal{O}_{p,p}\}.$$

Definição 4.6.4. *Definimos a \mathcal{A} -codimensão de f , denotada por $\mathcal{A}\text{-cod} f$, como $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{M}_n \mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A} \cdot f}$.*

E a \mathcal{A}_e -codimensão de f , denotada por $\mathcal{A}_e\text{-cod} f$, é definida como $\dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_{n,p}}{T\mathcal{A}_e \cdot f}$.

É possível provar que o número de Milnor, a \mathcal{A} -codimensão e a \mathcal{A}_e -codimensão são invariantes com respeito a \mathcal{A} -equivalência, ou seja, dois germes \mathcal{A} -equivalentes possuem mesmo número de Milnor, mesma \mathcal{A} e \mathcal{A}_e -codimensão. Para mais detalhes veja [2] e [33].

Para obtermos uma relação dos objetos estudados neste trabalho, e a \mathcal{A}_e -codimensão, vamos introduzir um novo invariante analítico, chamado número de Tjurina. Esta abordagem difere da escolhida pelos autores em [11], que utilizam o número de Milnor da imagem.

Outro invariante bem conhecido, no estudo de curvas planas, é o chamado número de Tjurina, denotado por τ . Dada uma curva \mathcal{C}_f , como em (4.17), definimos

$$\tau = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{x, y\}}{\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle},$$

em que $\left\langle f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\rangle$ é o ideal gerado pela equação f , que define a curva, e suas derivadas parciais. Note que $\tau \leq \mu$.

Em [18], Proposition 2.30(3), eles provam que se \mathcal{C}_f é uma curva plana irreduzível e $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ é uma parametrização da curva, então

$$\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha) = \tau - \delta. \quad (4.18)$$

Na verdade, em [18], os autores provam que a relação é verdadeira, mais geralmente, para curvas planas reduzidas (com vários ramos).

Assim, no caso irreduzível, por (4.18) e como $\tau \leq \mu$ temos:

$$\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha) = \tau - \delta \leq \mu - \delta = 2\delta - \delta = \delta = \frac{\mu}{2}.$$

Portanto, $\mu \geq 2\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha)$.

Definição 4.6.5. *Um germe $f : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ é dito quase homogêneo, de tipo (w_1, \dots, w_n, d) , se existem inteiros positivos w_1, \dots, w_n , denominados pesos, e um inteiro positivo d chamado grau, tal que*

$$f_i(\lambda^{w_1}x_1, \dots, \lambda^{w_n}x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots, x_n),$$

para todo $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 4.6.6. *Seja \mathcal{C}_f uma curva plana irreduzível. Então, f é quasehomogêneo se, e somente se, $\tau = \mu$.*

Demonstração. Para visualizar os resultados que nos permitem provar esse teorema, veja, por exemplo, [30]. \square

Portanto, $\mu \geq 2\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha)$. Valendo a igualdade se, e somente se, f é quasehomogêneo. No caso de curvas planas irreduzíveis, é possível provar que f é quasehomogêneo se, e somente se, a parametrização α é monomial (veja [30]).

Corolário 4.6.7. *Seja $\alpha : (\mathbb{C}, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ um germe de curva plana, dado por*

$$\alpha(u) = \left(\sum_{i=k}^l a_i u^i, \sum_{j=m}^n b_j u^j \right)$$

com $a_k a_l b_m b_n \neq 0$ e $1 < k < m, k < l$ e $m < n$ (sem que ocorra $k = 1$ e $m = 2$ simultaneamente), e f o germe que define a curva \mathcal{C}_f . Então,

$$I(I - 1) - 2T \geq 2\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha),$$

valendo a igualdade se, e somente se, f é quasehomogêneo.

Demonstração. Como $\mu \geq 2\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha)$ e vale a igualdade se, e somente se, f é quasehomogêneo, o resultado segue diretamente do Teorema 4.6.1. \square

Finalizamos este trabalho, apresentando uma generalização do Corolário acima, que nos apresenta uma desigualdade, que foi obtida a partir da relação $\mu \geq 2\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha)$.

Na verdade é possível obter uma fórmula no caso geral, e não apenas para f quasehomogêneo. Dado um germe de curva plana irreduzível \mathcal{C}_f , tem-se a relação

$$\tau = \mu - \#\Lambda \setminus \Gamma, \tag{4.19}$$

em que $\#\Lambda \setminus \Gamma$ é a cardinalidade do conjunto $\Lambda \setminus \Gamma$, que resumidamente, é um conjunto de ordens de diferenciais associados à curva (ver, por exemplo, [30]). Não vamos entrar nestes detalhes, por ser necessário introduzir ainda mais conceitos e resultados.

Mas $\Lambda \setminus \Gamma$ é um importante invariante analítico, e que foi uma peça chave na classificação analítica de curvas planas irreduzíveis, obtidas por Abramo Hefez e Marcelo E. Hernandez em 2011. Este invariante foi calculado para diversas classes de curvas planas, em trabalhos de Hefez e Hernandez (veja, por exemplo, [22]).

Em nosso contexto, por (4.18) e (4.19), obtemos $\mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha) = \mu - \delta - \#\Lambda \setminus \Gamma$, ou ainda, $\mu = \mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha) + \delta + \#\Lambda \setminus \Gamma$. Portanto, nas hipóteses do Teorema 4.6.1, obtemos

$$I(I - 1) - 2T = \mathcal{A}_e\text{-cod}(\alpha) + \delta + \#\Lambda \setminus \Gamma.$$

Esta é uma relação interessante, por envolver invariantes algébricos e geométricos no estudo de curvas planas.

CONCLUSÃO

O estudo de curvas é tema de interesse de matemáticos desde a antiguidade. Neste trabalho, apresentamos uma abordagem para o estudo de curvas planas afins, que teve como ponto de partida, um trabalho de Fabricius-Bjerre de 1962, [14]. No referido trabalho, ele obteve uma fórmula envolvendo o número de bitangências, pontos duplos e inflexões de curvas planas fechadas. Desde então, diversos trabalhos como: Halpern ([20], 1970), Fabricius-Bjerre ([15], 1977) e Weiner ([35], 1987) atacaram este mesmo problema para diversas classes de curvas.

Mais recentemente, Dias e Mello ([10], 2011) obtiveram uma fórmula análoga a de Fabricius-Bjerre para curvas planas definidas num intervalo aberto. E em 2014, Dias, Sinha e Ruas ([11]) generalizaram tal resultado para curvas planas, incluindo cúspides. Além disso, os autores estudaram germes de curvas planas complexas, apresentando relações envolvendo o número de pontos duplos, inflexões e bitangências de uma deformação da curva e invariantes clássicos como o número de Milnor e a \mathcal{A}_e -codimensão.

Todo este histórico, nos leva a concluir que este tema, de fato, é interessante, por se tratar de um problema atacado sob vários aspectos, mas sempre na busca de uma melhor compreensão dos aspectos geométricos/algébricos locais e globais do estudo de curvas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALENCAR, H., SANTOS, W., **Geometria Diferencial das Curvas Planas**. XXIV Colóquio Brasileiro de Matemática. Publicações Matemáticas, IMPA, 2003.
- [2] ARNOLD, V.I., GUSEIN-ZADE, S.M., VARCHENKO, A.N., **Singularities of Differentiable Maps**. Vol. I, Monographs in Mathematics, vol.82, Birkhäuser, 1985.
- [3] BARNABÉ, M.S., **Bi-tangências, Inflexões e Pontos Duplos de Curvas Planas**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Itajubá, Itajubá, 2018.
- [4] BOYCE, W.E., DIPRIMA, R.C., **Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno**. 10^a. ed., LTC, 2015.
- [5] CARMO, M.P., **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies**. Textos Universitários, 6^a ed, SBM, 2014.
- [6] CHAGA, A.C., **A Regra de Sinais de Descartes**. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2016.
- [7] COX, D., LITTLE, J., O'SHEA, D., **Using Algebraic Geometry**. Graduate Texts Mathematics, 185. Springer-Verlag, New York, 1998.
- [8] DALBELO, T.M., **O Índice de Poincaré-Hopf**. Dissertação de Mestrado, ICMC, USP, São Carlos, 2011.
- [9] DESCARTES, R., **La Géométrie**. Project Gutenberg, Hermann, 2008.

- [10] DIAS, F.S., MELLO, L.F., **Geometry of plane curves**. Bull. Sci. Math. 135, p.333-344, 2011.
- [11] DIAS, F.S., SINHA, R.O., RUAS, M.A.S., **A formula relating inflections, bitangencies and the Milnor number of a plane curve**. Proc. Amer. Math. Soc., 142, p.2353-2368, 2014.
- [12] DUMORTIER, F., LIBRE, J., ARTÉS, J.C., **Qualitative Theory of Planar Differential Systems**. Universitext, Berlin: Springer, 2006.
- [13] EUCLID, HEATH, T.L., DENSMORE, D., **Euclid's Elements: all thirteen books complete in one volume**. 18th ed, the Thomas L. Heath translation. Santa Fe, N.M., Green Lions Press, 2002.
- [14] FABRICIUS-BJERRE, Fr., **On the double tangents of plane closed curves**. Math. Scand. 11, p.113-116, 1962.
- [15] FABRICIUS-BJERRE, Fr., **A relation between the numbers of singular points and singular lines of a plane closed curve**. Math. Scand. 40, p.20-24, 1977.
- [16] FULTON, W., **Algebraic Curves. An Introduction to Algebraic Geometry**. Addison-Wesley, 1989.
- [17] GIBSON, C.G., **Singular Points of Smooth Mappings**. Research Notes in Mathematics 25, Pitman, 1979.
- [18] GREUEL, G.-M., LOSSEN, C., SHUSTIN, E., **Introduction to Singularities and Deformations**. Springer, Berlin, 2006.
- [19] GUNNING, R.C., **Introduction to Holomorphic Functions of Several Variables**. Vol II: Local Theory. Wadsworth and Brooks/Cole. Mathematics Series, 1990.
- [20] HALPERN, B., **Global theorems for closed plane curves**, Bull. Amer. Math. Soc. 76, p.96-100, 1970.
- [21] HEFEZ, A., **Irreducible plane curve singularities**. Real and Complex Singularities, edited by D. Mond and M.J. Saia. Marcel Dekker, 2003, 1-120.
- [22] HERNANDES, M.E., **Métodos computacionais na teoria de curvas algebróides irredutíveis**. Tese de Doutorado, ICMC, USP, São Carlos, 2001.

- [23] HERNANDES, M.E., **Um primeiro contato com Bases de Gröbner**. Publicações Matemáticas. 28°. Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 2011.
- [24] HIRSCH, M.W., **Differential Topology**. Graduate Texts in Mathematics 33. Springer, 1997.
- [25] LEE, J.M., **Introduction to Smooth Manifolds**. Second edition. Graduate Texts in Mathematics 218. Springer, 2013.
- [26] LIMA, E.L., **Introdução à Topologia Diferencial**. Publicações Matemáticas n°2, IMPA, Rio de Janeiro, 1961.
- [27] LIMA, E.L., **Variedades Diferenciáveis**. Publicações Matemáticas n°25, IMPA, Rio de Janeiro, 2011.
- [28] LIMA, E.L., **Elementos de Topologia Geral**. Textos Universitários, 3ª ed. SBM, 2014.
- [29] MILNOR, J.W., **Singular Points of Complex Hypersurfaces**. Annals of Mathematics Studies 61, Princeton University Press, 1968.
- [30] RODRIGUES HERNANDES, M.E., **Invariantes analíticos para Curvas Irredutíveis**. Tese de Doutorado, ICMC, USP, São Carlos, 2005.
- [31] RODRIGUES, P.R., **Introdução às Curvas e Superfícies**. Niterói, EDUFF, 2001.
- [32] TENENBLAT, K., **Introdução à Geometria Diferencial**. UNB, 1990.
- [33] WALL, C.T.C., **Finite determinacy of smooth map-germs**. Bull. London Math. Soc. 13, p.481-539, 1981.
- [34] WANG, X., **A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs**. The American Mathematical Monthly 113(9), p.829-830, 2006.
- [35] WEINER, J.L., **A spherical Fabricius-Bjerre formula with applications to closed space curves**. Math. Scand. 61, p. 286-291, 1987.
- [36] ZHANG, C., PEI, D., **Evolutes of (n, m) -cusp curves and application in optical system**. Optik. v.162, p.42-53, 2018.