Decaimento Exponencial para a Equação Semilinear da Onda com Dissipação Localizada sobre um Domínio Não Limitado

Luciana Kemie Nakayama

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: **Marcelo Moreira Cavalcanti**

Maringá - PR

2007

Decaimento Exponencial para a Equação Semilinear da Onda com Dissipação Localizada sobre um Domínio Não Limitado

Luciana Kemie Nakayama

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM ....
(Orientador)

Prof. Valéria Neves Domingos Cavalcanti - UEM ....

Prof. Felipe Linares - IMPA ....

Maringá

Março, 2007

Em memória de meu pai Hideo Nakayama.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pela oportunidade de vivenciar mais um momento inesquecível na minha vida que é a conclusão deste trabalho.

Sou grata à minha família que tanto me deu apoio e incentivo nos momentos difíceis pelos quais passei durante este mestrado, não somente no curso mas, também na minha vida particular.

Presto ao meu pai uma homenagem por sempre estar comigo incentivando-me desde meus primeiros passos, pelo apoio nos estudos e por me dar condições para concluí-los, apesar de não poder estar comigo levarei sempre seu exemplo de caráter e seus valiosos ensinamentos que fizeram de mim a pessoal que sou.

A minha querida irmã Lucineide que compartilhou comigo tanto os meus sucessos, como os meus fracassos. Agradeço por sempre fazer parte da minha vida.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica.

A Capes, pelo apoio financeiro.

A todos os meus amigos, que juntos compartilhamos alegrias e tristezas.

Agradeço especialmente aos meus amigos Gilson Tumelero, Marieli Musial, Janete de Paula Ferrareze e Fernando Pereira de Souza que na ausência dos meus pais formaram minha família durante este período , além do apoio e incentivos compartilharam também seus conhecimentos que auxiliaram-me durante este mestrado e finalmente pelos ensinamentos de vida que levarei comigo sempre.

Aos professores e amigos Heloisa L. Q. G. da Costa , João Carlos da Motta Ferreira, Sonia Regina Di Giacomo e Elisabete Sousa Freitas , pelos incentivos e pelos valiosos conselhos.

Faço meus agradecimentos a professora Valéria Neves Domingos Cavalcanti, por sua dedicação , incentivo, apoio e por compartilhar seus valiosos conhecimentos para conclusão deste trabalho.

Agradeço especialmente ao meu amigo Wellington José Corrêa por sua dedicação a este trabalho , pela paciência que teve ao compartilhar seus conhecimentos e pelos valiosos comentários que prestou para a realização do mesmo.

Dedico um sincero agradecimento ao professor Dr. Marcelo Moreira Cavalcanti por sua orientação sem a qual seria impossível a realização deste trabalho. Quero agradecer pelos seus ensinamentos que contribuíram para meu crescimento dentro desta ciência que é a matemática. Também expresso minha gratidão por sua confiança e credibilidade à minha pessoa.

Luciana Kemie Nakayama.

RESUMO

Neste trabalho mostramos a existência de soluções regulares, fracas e generalizadas bem como o decaimento exponencial uniforme para a equação semilinear da onda com dissipação localizada sobre um domínio não limitado

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Palavras-Chave: equação da onda, dissipação localizada, solução regular,solução fraca, solução generalizada, decaimento exponencial.

ABSTRACT

In this work we show the existence of smooth solutions weak and generalized solutions as well as uniform exponential decay for the semilinear wave equation with localized damping in unbounded domains

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ in } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases}$$

Key-Words: wave equation, localized dissipation,smooth solution,weak solution, generalized solution, exponential decay.

Sumário

Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência e unicidade bem como o decaimento exponencial uniforme das soluções globais da equação semilinear da onda com dissipação localizada num domínio não limitado tendo como base o artigo do autor E. Zuazua [36].

Temos a seguinte equação semilinear da onda:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{1}$$

Assumimos que

$$a \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n), \; a(x) \geq a_0 > 0 \text{ q.s em } \quad \Omega_R = \mathbb{R}^n \backslash B_R = \{|x| \geq R\} \tag{2}$$

para $R > 0$ com $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$,

$$\alpha > 0; \; f(s)s \geq 0 \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

e, além disso f satisfaz as seguintes condições de crescimento

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e existe alguma constante } C > 0 \text{ e } p > 1 \text{ com } (n-2)p \leq n \text{ tal que} \\ \qquad |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4}$$

Note que da condição (2) a dissipação do termo $a(x)$ é efetiva em Ω_R.

As condições impostas para função f em (4) nos garante que o problema é bem posto em $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

A hipótese (3) assegura que a energia dada por

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha |u|^2] \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u) \, dx \tag{5}$$

onde

$$F(z) = \int_0^z f(s) \; ds, \qquad \text{para todo} z \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

é não negativa.

De acordo com as hipóteses (2) e (4) provaremos que o problema é bem posto em

$$C([0, \infty); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0, \infty); L^2(\mathbb{R}^n))$$

e que a energia $E(t)$ é uma função não crescente na variável t do tempo. Mais precisamente

$$E(t_2) - E(t_1) = -\int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t(x,t)|^2 \, dx \, dt \quad \text{para todo} t_2 > t_1 \geq 0. \tag{7}$$

O objetivo pricipal deste trabalho é dar condições suficientes para f de forma que exista alguma constante $C > 1$ e $\gamma > 0$ tal que

$$E(t) \leq C E(0) e^{-\gamma t} \qquad \text{para todo } t \geq 0 \text{ e qualquer solução de (1).} \tag{8}$$

O problema é bem conhecido para o caso em que a equação da onda é linear e para um domínio limitado com condições de fronteira de Dirichlet ou Neumann homogênio. Neste caso é possível mostrar o decaimento em (8)adaptando o método de C. Bardos, G. Lebeau e J.Rauch (ver [4] e [5]) quando $a(x) \geq a_0 > 0$ em algum suconjunto aberto ω de Ω, que satisfaz a seguinte condição geométrica de controle: existe algum $T > 0$ tal que o raio da ótica geométrica intercepta o conjunto $\omega \times (0, T)$ ver (C. Bardos [3] e também [30]).

Sempre no contesto linear e no caso particular quando ω é uma vizinhança da fronteira de Ω limitado, este resultado pode ser provado usando técnicas de multiplicadores (ver [25] e [17]).

Em [35] usando técnicas de multiplicadores é provado o decaimento exponencial de (1) em um domínio limitado com dissipação localizada numa vizinhança da fronteira para uma grande classe de problemas não lineares e condições variáveis de fronteira.

O propósito deste trabalho é estender estes resultados vistos em [35] à domínios não limitados.

A hipótese (2) é natural para a obtenção do decaimento exponencial em $\mathbb{R}^n$. Se (2) não é satisfeito, um raio da ótica geométrica pode escapar do efeito da dissipação e o decaimento exponencial pode falhar mesmo no caso mais simples onde $f = 0$.

Até então pouco se conhece sobre o problema semilinear. Resultados positivos para a solução do decaimento exponencial de (1), existe e referê-se a situações mais simples onde

$$a(x) \geq a_0 > 0 \quad \text{para todo} \quad \mathbb{R}^n. \tag{9}$$

Isto é a dissipação é efetiva em todo $\mathbb{R}^n$. Neste caso em particular , o decaimento pode ser obtido, construindo a seguinte perturbação da energia

$$E_\varepsilon(t) = E(t) + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} u(x,t)\, u_t(x,t)\, dx$$

para a qual, as desigualdades diferenciais nos levam ao decaimento exponencial desejado que são facilmente provadas quando $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno (ver A.Haraux [16] e E. Zuazua [34]).

Queremos mostrar que a hipótese (9) pode ser relaxada para (2) desde que f satisfaça algumas propriedades adicionais.

Nós estudaremos dois casos para f . O primeiro é quando f é globalmente Lipschitiz isto é $f' \in L^{\infty}$e f satisfaz uma das condições abaixo

$$\exists \lim_{s \to +\infty} f'(s) = f'_{+}; \quad \lim_{s \to +\infty} f'(s) = f'_{-}, \tag{10}$$

$$\exists \lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = l \tag{11}$$

O segundo caso é quando f é superlinear ou seja: existe algum $\delta > 0$ tal que

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s) \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Só faremos distinção entre esses dois caso quando for estritamente necessário.

O trabalho é composto de três capítulos. No Capítulo 1 especificamos algumas notações, resultados preliminares e expomos brevemente a teoria de Semigrupos Lineares necessária para garantir a existência de solução do problema proposto. No capítulo 2 provamos a existência e unicidade de soluções regulares, fracas e generalizadas, via teoria de Semigrupos. Já no terceiro e último capítulo demonstramos o decaimento exponencial e uniforme.

Capítulo 1

NOTAÇÕES BÁSICAS, PRELIMINARES, OPERADORES MAXIMAIS MONÓTONOS E SEMIGRUPOS

Apresentaremos neste capítulo os resultados básicos que serão utilizados nos capítulos posteriores e especificaremos as notações que aparecerão no decorrer deste trabalho.

1.0 Notações Básicas

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ representamos por D^α o operador de derivação de ordem α definido por

$$\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\, \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

onde $|\alpha| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|$.

Seja Ω um subconjunto aberto do $\mathbb{R}^n$. Por $C_0^\infty(\Omega)$ representaremos o espaço vetorial das funções reais definidas em Ω, infinitamente diferenciáveis e com suporte compacto contido em Ω. Por $\mathcal{D}(\Omega)$ denotaremos o espaço $C_o^\infty(\Omega)$ munido da seguinte noção de convergência. Dizemos que uma sucessão $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ converge para zero se:

i) Todas as funções φ_ν possuem suportes contidos em um mesmo compacto fixo K.

ii) As sucessões $\{\varphi_\nu\}$ e $\{D^\alpha \varphi_\nu\}, \quad \alpha \in \mathbb{N}^n$, convergem uniformemente para zero em K.

Se $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ é uma sucessão de funções de $C_0^\infty(\Omega)$, dizemos que φ_ν converge para φ em $\mathcal{D}(\Omega)$ se a sucessão $\{\varphi_\nu - \varphi\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ converge para zero no sentido acima mencionado. $\mathcal{D}(\Omega)$ assim definido é denominado espaço das funções testes em Ω.

Uma distribuição sobre Ω, segundo Laurent Schwartz, é uma forma linear T sobre $\mathcal{D}(\Omega)$ que é contínua no sentido da convergência definida em $\mathcal{D}(\Omega)$, isto é, para toda sucessão $\{\varphi_\nu\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ convergente para zero no sentido definido em $\mathcal{D}(\Omega)$ temos que a sucessão numérica $\{\langle T, \varphi_\nu \rangle\}_{\nu \in \mathbb{N}}$ também converge para zero.

A derivada de ordem α de T, $\quad D^\alpha T$, definida por

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle, \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

também é uma distribuição sobre Ω.

O conjunto de todas as distribuições constitui um espaço vetorial, o qual representamos por $\mathcal{D}'(\Omega)$. Neste espaço, dizemos que uma sucessão $\{T_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge para zero em $\mathcal{D}'(\Omega)$ quando para toda função teste φ a sucessão numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge para zero.

Um espaço vetorial normado, e completo em relação à norma definida nesse espaço, é denominado espaço de Banach. Quando a norma for proveniente de um produto interno ele será denominado espaço de Hilbert.

Seja X um espaço de Banach, seja X' seu dual dotado da norma dual $||f|| = \sup\limits_{\substack{x\in X\\ ||x||\leq 1}} |\langle f, x\rangle|$ e seja X'' seu bidual, isto é, o dual de X' dotado da norma $||\xi|| = \sup\limits_{\substack{f\in X'\\ ||f||\leq 1}} |\langle \xi, f\rangle|$. Para tanto, consideremos a injeção canônica $J\colon X \to X''$ definida como segue. Seja $x \in X$ fixo. A aplicação $f \mapsto \langle f, x\rangle$ de X' em $\mathbb{R}$ é uma forma linear e contínua sobre X'. Assim, temos que a aplicação J_x dada por $\langle J_x, f\rangle_{X'',X'} = \langle f, x\rangle_{X',X}$, $\forall\, x \in X$, $\forall\, f \in X'$ é tal que $J\colon X \to X''$ definida por $x \mapsto J_x$ é linear e é uma isometria, isto é, $||J_x||_{X''} = ||x||_X$ para todo $x \in X$. Dizemos que X é reflexivo se $J(X) = X''$.

Um espaço métrico E é dito separável se existe um subconjunto $D \subset E$, tal que D é enumerável e denso em E.

Para $1 \leq p < +\infty$, denotamos por $L^p(\Omega)$ o espaço das (classes) de funções reais u, mensuráveis, tais que $|u|^p$ é integrável à Lebesgue em Ω. Assim definido, $L^p(\Omega)$ é um espaço de Banach munido da norma

$$||u||_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{1/p}.$$

Quando $p = +\infty$, $L^\infty(\Omega)$ denotará o espaço das funções reais, mensuráveis e essencialmente limitadas em Ω. Munido da norma $||u||_{L^\infty(\Omega)} = \sup\limits_{x\in\Omega}\text{ess}\, |u(x)| = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}; u(x) \leq \lambda \text{ q.s.}\}$, $L^\infty(\Omega)$ se torna um espaço de Banach.

Quando $p = 2$ temos que $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)\,dx$$

e norma induzida

$$||u||_{L^2(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^2\,dx\right)^{1/2}.$$

Temos que $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < \infty$ e que $\big(L^p(\Omega)\big)' = L^q(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Se $p = 1$ temos que $\big(L^1(\Omega)\big)' = L^\infty(\Omega)$ e se $p = \infty$ temos $\big(L^\infty(\Omega)\big)' \supsetneq L^1(\Omega)$. Além disso, $L^p(\Omega)$ é separável para $1 \leq p < \infty$.

Por $W^{m,p}(\Omega)$, $\quad 1 \leq p < +\infty$ representaremos o espaço de Sobolev de ordem m, isto é, o espaço de todas as funções reais $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, $\quad \forall\,|\alpha| \leq m$. Munido da norma

$$||u||_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach.

Quando $p = 2$ o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ será denotado por $H^m(\Omega)$ que, munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} \leq \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x)\, D^\alpha v(x)\,dx$$

e da norma induzida

$$||u||_{H^m(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

é um espaço de Hilbert.

Por $W_0^{m,p}(\Omega)$ representamos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, $\quad 1 \leq p < +\infty$, e por $H_0^m(\Omega)$ representamos o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $H^m(\Omega)$. O dual topológico de $H_o^m(\Omega)$ é representado por $H^{-m}(\Omega)$.

Seja $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A transformada de Fourier de u, denotada por $\hat{u}$, é uma função definida sobre todo o $\mathbb{R}^n$ pela fórmula

$$\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle x,\xi\rangle}\, u(x)\, dx; \quad i = \sqrt{-1}$$

onde $\langle x, \xi\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \xi_i$ é o produto interno usual em $\mathbb{R}^n$.

Por $\mathcal{S}$, representaremos o espaço de Schwartz ou espaço das funções decrescimento rápido , definido por

$$\mathcal{S} = \left\{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \lim_{||x|| \to +\infty} ||x||^k\, D^\alpha \varphi(x) = 0;\ \forall\, k \in \mathbb{N} \text{ e } \alpha \in \mathbb{N}^n \right\}.$$

Por $\mathcal{S}'$, representaremos o espaço das distribuições temperadas, definido por

$$\mathcal{S}' = \{T \colon \mathcal{S} \to \mathbb{R};\ T \text{ é linear e contínuo}\}.$$

A seguir definiremos os espaços $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$ real.

Tomando, em particular, $p = 2$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$ temos que

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n);\ D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n; |\alpha| \leq m\}$$

munido do produto interno

$$((u, v))_m = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,. \tag{P.1}$$

Consideremos o seguinte espaço, definido para todo $m \in \mathbb{N}$,

$$\left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ (1 + ||x||^2)^{m/2}\, \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

onde $\hat{u}$ designa a transformada de Fourier da função u, munido do produto interno

$$(((u, v))) = \Big((1 + ||x||^2)^{m/2}\, \hat{u},\ \left(1 + ||x||^2\right)^{m/2}\ \hat{v}\Big)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \tag{P.2}$$

$\forall\, m \in \mathbb{N}$.

Mostra-se, para todo $m \in \mathbb{N}$ que

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \left(1 + ||x||^2\right)^{m/2}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\},$$

onde as normas provenientes dos produtos internos (P.1) e (P.2) são equivalentes.

Motivados pelo conjunto acima, definimos para $s \geq 0$ real

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \left(1 + ||x||^2\right)^{s/2}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

munido do produto interno

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^s\ \hat{u}(x)\hat{v}(x)\, dx,$$

para todo $s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0$.

O espaço $H^s(\mathbb{R}^n)$ possui as seguintes propriedades:

- $H^s(\mathbb{R}^n)$ é um espaço de Hilbert.
- Definindo $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$, dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^n)$, obtemos que

$$H^{-s}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n);\ \left(1 + ||x||^2\right)^{-s/2}\ \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

munido da seguinte norma

$$||u||_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(1 + ||x||^2\right)^{-s}\ |\hat{u}(x)|^2\, dx \right]^{1/2}.$$

Definiremos, agora, os espaços $H^s(\Omega); \quad s \geq 0$.

Diremos que o aberto Ω é bem regular se sua fronteira Γ é uma variedade de classe C^∞ de dimensão $n-1, \quad \Omega$ estando localmente do mesmo lado de Γ. Para maiores detalhes ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [[9], pp. 178-179].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um aberto limitado com fronteira Γ bem regular ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$.

Considere a aplicação r_Ω, linear e contínua, dada por

$$\begin{aligned} r_\Omega \colon L^2(\mathbb{R}^n) &\to L^2(\Omega) \\ u &\mapsto r_\Omega\, u = u\big|_\Omega . \end{aligned}$$

Como $D^\alpha(r_\Omega\, u) = r_\Omega(D^\alpha u)$, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^n$, a aplicação

$$\begin{aligned} r_\Omega \colon H^m(\mathbb{R}^n) &\to H^m(\Omega) \\ u &\mapsto r_\Omega\, u = u\big|_\Omega \end{aligned}$$

é contínua e sobrejetora qualquer que seja $m \in \mathbb{N}$.

A partir de r_Ω podemos então escrever

$$H^m(\Omega) = \{r_\Omega\, u;\ u \in H^m(\mathbb{R}^n)\}.$$

Estamos, assim, motivados a definir $H^s(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}$, $\quad s \geq 0$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado bem regular ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$, como segue

$$H^s(\Omega) = \{v\big|_\Omega ;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}.$$

Seja $u \in H^s(\Omega)$. Temos que $\exists\, v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = v\big|_\Omega$. Como $H^s(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ temos que $v\big|_\Omega \in L^2(\Omega)$ e portanto $u \in L^2(\Omega)$.

Desta forma fica bem definida a aplicação

$$\begin{aligned} r_\Omega \colon H^s(\mathbb{R}^n) &\to H^s(\Omega) \\ v &\mapsto r_\Omega\, v = v\big|_\Omega . \end{aligned}$$

O nosso intuito é definir uma topologia para $H^s(\Omega)$ de modo que para todo $s \in \mathbb{N}$ a topologia coincida com a topologia de $H^m(\Omega)$.

Para todo $u \in H^s(\Omega)$ existe, por definição, $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $u = v|_{\Omega}$. Seria natural pensarmos em definir uma aplicação

$$\begin{aligned} H^s(\Omega) &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto ||v||_{H^s(\mathbb{R}^n)}. \end{aligned}$$

Contudo, tal aplicação não define uma norma pois se $u = 0$ em $H^s(\Omega)$ então $u = v|_{\Omega} = 0$ em $H^s(\Omega)$, isto é, $v = 0$ quase sempre em Ω. Mas isso não implicaria que $v = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$.

Como o $\mathrm{Ker}(r_\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^s(\mathbb{R}^n)$ temos que a aplicação:

$$\begin{aligned} ||\cdot||\colon H^s(\mathbb{R}^n)\big/\mathrm{Ker}(r_\Omega) &\to \mathbb{R}_+ \\ [v] &\mapsto ||[v]|| \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} ||[v]|| &= \inf\Big\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in [v]\Big\} \\ &= \inf\Big\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in v + \mathrm{Ker}\, r_\Omega\Big\} \end{aligned}$$

é uma norma.

Lembremos que o conjunto quociente $H^s(\mathbb{R}^n)\big/\mathrm{Ker}(r_\Omega)$ é dado por

$$\big\{v + \mathrm{Ker}(r_\Omega); v \in H^s(\mathbb{R}^n)\big\} = \big\{[v]; v \in H^s(\mathbb{R}^n)\big\}.$$

Além disso, $H^s(\mathbb{R}^n)\big/\mathrm{Ker}(r_\Omega)$ munido desta norma é um espaço de Banach.

Por outro lado, para cada $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$ temos

$$\big\{w \in H^s(\mathbb{R}^n); w \in [v]\big\} = \big\{w \in H^s(\mathbb{R}^n); r_\Omega w = r_\Omega v\big\},$$

pois para qualquer $w \in H^s(\mathbb{R}^n)$ podemos escrever

$$\begin{aligned} & w \in v + \operatorname{Ker}(r_\Omega) \Leftrightarrow w - v \in \operatorname{Ker}(r_\Omega) \\ & \Leftrightarrow r_\Omega(w - v) = 0 \Leftrightarrow r_\Omega w = r_\Omega v. \end{aligned}$$

Logo, para todo $v \in H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} ||[v]||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\operatorname{Ker}(r_\Omega)} &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in v + \operatorname{Ker}(r_\Omega)\right\} \\ &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in [v]\right\} \\ &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega w = r_\Omega v\right\}. \end{aligned}$$

Como $r_\Omega \colon H^s(\mathbb{R}^n) \to H^s(\Omega)$ é sobrejetiva temos que a aplicação $\bar{r}_\Omega \colon H^s(\mathbb{R}^n) \big/ \operatorname{Ker}(r_\Omega) \to H^s(\Omega)$ definida por $\bar{r}_\Omega([v]) = r_\Omega v$ é sobrejetiva e, mais além, injetiva.

Estamos agora aptos a definir a norma em $H^s(\Omega)$ pra todo $s \in \mathbb{R}, \quad s \geq 0$, como segue:

$$\begin{aligned} ||u||_{H^s(\Omega)} &= ||[v]||_{H^s(\mathbb{R}^n)/\operatorname{Ker}(r_\Omega)} \\ &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega w = u\right\}, \end{aligned}$$

onde $r_\Omega v = u$.

Então,

$$\begin{aligned} ||u||_{H^s(\Omega)} &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; w \in [v]\right\} \\ &= \inf\left\{||w||_{H^s(\mathbb{R}^n)}; r_\Omega w = u\right\}. \end{aligned}$$

Temos os seguintes resultados acerca dos espaços $H^s(\Omega)$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$ onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado com fronteira bem regular.

- $H^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert munido da norma acima definida.

- $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $H^s(\Omega)$, $\quad H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}$ e $H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))' =$ dual forte de $H_0^s(\Omega)$. Aqui $\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = \{\varphi|_{\overline{\Omega}}; \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.

- Se $0 \leq s_1 \leq s_2$ então $H^{s_2}(\Omega) \hookrightarrow H^{s_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ designa a imersão contínua de um espaço no outro.

Finalmente, definiremos os espaços $H^s(\Gamma)$.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado com fronteira Γ bem regular.

Considere o sistema $\{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2), \ldots, (U_k, \varphi_k)\}$ de cartas locais para Γ. A cobertura aberta Ω, $\ U_1, U_2, \ldots, U_k$ de $\overline{\Omega}$ determina uma partição C^∞ da unidade subordinada à mesma, isto é, existem funções $\theta_0, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\operatorname{supp}(\theta_0) \subset \Omega$; $\operatorname{supp}(\theta_i) \subset U_i$, $\quad i = 1, 2, \ldots, k$ e $\sum_{i=0}^{k} \theta_i(x) = 1 \quad \forall\, x \in \overline{\Omega}$ com $0 \leq \theta_i \leq 1$, $\quad i = 1, 2, \ldots, k$.

Seja u definida sobre Γ. Então $u(x) = \sum_{i=1}^{k} \theta_i(x) u(x)$, para quase todo $x \in \Gamma$.

Definamos para $i = 1, 2, 3, \ldots, k$.

$$u_i(y) = (u\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}(y), \quad \forall\, y \in \prod_{k=1}^{n-1} (0,1)^k.$$

Notemos que

$$S(u\theta_i) = \overline{\{x \in \Gamma; (u\theta_i)(x) \neq 0\}}.$$

Como u está definida sobre Γ e $\operatorname{supp} \theta_i \subset U_i$

$$S(u\theta_i) \subset \operatorname{supp}(\theta_i) \cap \Gamma \subset U_i \cap \Gamma$$

e portanto $S(u\theta_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^n$.

Temos também que $S(u_i) = \varphi_i(S(u\theta_i))$ e como φ_i é contínua vem que $S(u_i)$ é um compacto do $\mathbb{R}^{n-1}$. Além disso, como $\operatorname{supp}(u_i) \subset S(u_i) \subset \sum$ podemos estender u_i a uma função $\tilde{u}_i$ como segue

$$\tilde{u}_i(y) = \begin{cases} (u\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}(y) & \text{se} \quad y \in \sum \\ 0 & \text{se} \quad y \in \mathbb{R}^{n-1} \backslash \sum . \end{cases}$$

Observemos que $\tilde{u}_i$ herdará as mesmas características da função u_i e, portanto, como u é integrável então $\tilde{u}_i$ é integrável e

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y)\, dy = \int_{\sum} (u\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}(y)\, dy = \int_{U_i \cap \Gamma} u(x)\theta_i(x) J_i(x)\, d\Gamma$$

onde $J_i \in C^\infty(U_i \cap \Gamma)$.

Reciprocamente, se $\tilde{u}_i$ for, para todo $i = 1, \ldots, k$, integrável em $\mathbb{R}^{n-1}$ então u também o será e

$$\int_\Gamma u(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_\Gamma (u\theta_i)(x) d\Gamma = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \tilde{u}_i(y) \overline{J}(y) dy.$$

Designaremos por $L^p(\Gamma), \quad 1 \leq p \leq \infty$ o espaço das funções L^p somáveis sobre Γ,com medida superficial $\partial\Gamma$, onde muniremos tal espaço com a norma

$$||v||_{L^p(\Gamma)} = \left(\int_\Gamma |v(x)|^p\, d\Gamma \right)^{1/p} \text{ se } 1 \leq p < \infty$$

ou

$$||v||_{L^\infty(\Gamma)} = \sup_{x \in \Gamma} \text{ess}\, ||u(x)|| \text{ se } p = +\infty.$$

Usando a partição da unidade $\{\theta_i\}, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k$, introduzida anteriormente, temos que

$$L^p(\Gamma) = \left\{ v \colon \Gamma \to \mathbb{R};\ \tilde{v}_i = \widetilde{(v\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}} \in L^p(\mathbb{R}^{n-1}), i = 1, 2, \ldots, k \right\}$$

e a norma

$$||v||_{L^p(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^{k} ||\tilde{v}_i||^p_{L^p(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/p}$$

é equivalente à norma dada anteriormente.

Seja $m \in \mathbb{N}$. Representaremos por $C^m(\Gamma)$ o espaço vetorial das funções $u\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ de classe C^m e por $\mathcal{D}(\Gamma)$ o espaço vetorial das funções infinitamente diferenciáveis sobre Γ. Da mesma forma temos

$$C^m(\Gamma) = \left\{ v\colon \Gamma \to \mathbb{R};\, \tilde{v}_i = \widetilde{(v\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}); i = 1, 2, \ldots, k \right\}$$

e

$$\mathcal{D}(\Gamma) = \left\{ v\colon \Gamma \to \mathbb{R};\, \tilde{v}_i = \widetilde{(v\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}} \in C^m(\mathbb{R}^{n-1}), \forall\, m \in \mathbb{N} \text{ e } i = 1, 2, \ldots, k \right\}$$

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \phi_i\colon \mathcal{D}(\Gamma) &\to \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n-1}) \\ u &\mapsto \phi_i u = \tilde{u}_i = \widetilde{(u\theta_i) \circ \varphi_i^{-1}}. \end{aligned}$$

Como ϕ_i é contínua e $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $\mathcal{D}'(\Gamma)$ então podemos estender ϕ_i a uma aplicação, que ainda denotaremos por ϕ_i , tal que

$$\phi_i\colon \mathcal{D}'(\Gamma) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n-1}).$$

Estamos assim, motivados a definir $H^s(\Gamma)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ onde $\Gamma = \partial\Omega$ com $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado bem regular como segue: $H^s(\Gamma) = \{u; \phi_i u \in H^s(\mathbb{R}^{n-1})\}$ dotado da norma

$$||u||_{H^s(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^{K} ||\phi_i u||^2_{H^2(\mathbb{R}^{n-1})} \right)^{1/2}.$$

Observe que a definição acima depende do sistema $\{U_i, \varphi_i, \theta_i\}$.

Mostra-se que o espaço $H^s(\Gamma)$ definido acima goza das seguintes propriedades:

- $H^s(\Gamma)$ é um espaço de Hilbert.

- $\mathcal{D}(\Gamma)$ é denso em $H^s(\Gamma)$.

- $H^s(\Gamma)$ independe da escolha do sistema de cartas locais $\{U_i, \varphi_i\}$ e da partição da unidade $\{\theta_i\}$ subordinada.

Dado X um espaço de Banach e $T > 0$ um número real, representaremos por $L^p(0,T;X)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço de Banach das (classes) funções vetoriais $u\colon\ ]0,T[\to X$ que são fortemente mensuráveis e $||u(t)||_X \in L^p(0,T)$ munido da norma

$$||u||_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_\Omega ||u(t)||_X^p \, dt \right)^{1/p}.$$

Por $L^\infty(0,T;X)$ representamos o espaço de Banach das funções vetoriais $u\colon\ ]0,T[\to X$ que são fortemente mensuráveis e $||u(t)||_X \in L^\infty(0,T)$, munido da norma

$$||u||_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t \in]0,T[} \operatorname{ess} ||u(t)||_X .$$

Se $1 \leq p < +\infty$, então o dual topológico de $L^p(0,T;X)$ se identifica com o espaço $L^q(0,T;X')$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Além disso, se X for reflexivo (respectivamente separável) e $1 < p < +\infty$ (respectivamente $1 \leq p < +\infty$) então $L^p(0,T;X)$ é reflexivo (respectivamente separável). Com esta identificação, temos

$$\langle u, v \rangle_{L^q(0,T;X');L^p(0,T;X)} = \int_0^T \langle u(t), v(t) \rangle_{X',X} \, dt.$$

Denotamos por $\mathcal{D}'(0,T;X)$ o espaço das distribuições vetoriais S sobre $]0,T[$ com valores em X. Definimos sua derivada de ordem k, $S^{(k)}$ da seguinte forma

$$\langle S^{(k)}, \theta \rangle = (-1)^k \langle S, \theta^{(k)} \rangle, \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Seja $u \in L^p(0,T;X) \quad 1 \leq p < +\infty$, e definamos a transformação S_u de $\mathcal{D}(0,T)$ em X dada por

$$\langle S_u, \theta \rangle = \int_0^T u(t)\theta(t)\, dt, \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T),$$

onde a integral é entendida no sentido de Bochner. S_u assim definida é linear e contínua e portanto $S_u \in \mathcal{D}'(0,T;X)$. Além disso, como S_u é univocamente definida por u, podemos idenficar S_u com u dizendo simplesmente a distribuição u ao invés de S_u. Portanto, u' designará a derivada de u no sentido de $\mathcal{D}'(0,T;X)$, ou seja,

$$\langle u', \theta \rangle = -\langle u, \theta' \rangle = -\int_0^T u(t)\theta'(t)\, dt, \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Representamos por $W^{k,p}(0,T;X), \quad 1 \leq p < +\infty$, o espaço de Banach

$$W^{k,p}(0,T;X) = \left\{ u \in L^p(0,T;X); u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq k \right\}$$

onde $u^{(j)}$ representa a j-ésima derivada de u no sentido das distribuições vetoriais, munido da norma

$$||u||_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} ||u^{(j)}||^p_{L^p(0,T;X)} \right)^{1/p},$$

ou da norma equivalente,

$$\sum_{j=0}^{k} ||u^{(j)}||_{L^p(0,T;X)}.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert o espaço $W^{k,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^k(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert munido do produto interno

$$(u,v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{k} \left(u^{(j)}, v^{(j)} \right)_{L^2(0,T;X)}$$

a norma induzida

$$||u||_{H^k(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} ||u^{(j)}||^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{1/2}.$$

Quando $k=0$, $\quad H^k(0,T;X)$ é o espaço $L^2(0,T;X)$.

Por $\mathcal{D}(0,T;X)$ denotamos o espaço das funções que são infinitamente diferenciáveis em $[0,T[$, com valores em X e com suporte compacto em $]0,T[$.

Por $W_0^{k,p}(0,T;X)$ denotamos o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ em $W^{k,p}(0,T;X)$ e por $H_0^k(0,T;X)$ o fecho de $\mathcal{D}(0,T;X)$ em $H^k(0,T;X)$. Demonstra-se que o espaço $H_0^k(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert e

$$H_0^k(0,T;X)=\left\{u\in H^k(0,T;X); u^{(j)}(0)=u^{(j)}(T)=0,\ 0\leq j\leq k-1\right\}.$$

O dual topológico de $H_0^k(0,T;X)$ é representado por $H^{-k}(0,T;X)$.

Denotaremos por $C^0([0,T];X)$ o espaço de Banach das funções $u\colon\ ]0,T[\to X$ que são contínuas, munido da norma

$$||u||_{C^0([0T];X)}=\max_{0\leq t\leq T}||u(t)||_X.$$

Se $u\in L^p(0,T;X)$ e $u_t\in L^p(0,T;X)$ com $1\leq p<+\infty$ então obtemos que $u\in C^0([0,T];X)$.

Conforme explicitado em Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [9] existe uma única aplicação

$$\gamma\colon H^m(\Omega)\to\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\Gamma)$$

$$u\mapsto\gamma u=\{\gamma_0 u,\gamma_1 u,\ldots,\gamma_{m-1}u\},$$

denominada aplicação traço; que é linear, contínua, sobrejetiva, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, verificando

$$\gamma u=\left(u\big|_\Gamma,\left.\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|_\Gamma,\ldots,\left.\frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\right|_\Gamma\right);\quad\forall\, u\in\mathcal{D}(\overline{\Omega})$$

e admitindo uma inversa à direita Λ linear e contínua, isto é, existe uma aplicação linear

$$\Lambda\colon\prod_{j=0}^{m-1}H^{m-j-1/2}(\Gamma)\to H^m(\Omega)$$

que é contínua e satisfaz

$$\gamma(\Lambda\xi) = \xi, \quad \forall\, \xi \in \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-1/2}\,(\Gamma).$$

Tomando, em particular, $m = 1$ temos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_0 \colon H^1(\Omega) &\to H^{1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_0 u = u\big|_\Gamma \end{aligned}$$

que é denominada aplicação traço de ordem zero.

Consideremos $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munido do produto interno

$$(u, v)_1 = ((u, v))_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}$$

que o torna um espaço de Hilbert.

A aplicação

$$\begin{aligned} \gamma_1 \colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) &\to H^{-1/2}(\Gamma) \\ u &\mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\bigg|_\Gamma \end{aligned}$$

prolonga-se, por continuidade, a uma única aplicação linear e contínua $\gamma_1 \colon \mathcal{H}^1(\Omega) \to H^{-1/2}(\Gamma)$, posto que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ é denso em $\mathcal{H}^1(\Omega)$.

1.1 Resultados Auxiliares

Proposição 1.1. *(***Aubin-Lions***)Sejam B_0, B, B_1 três espaços de Banach tais que*

$$B_0 \underset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$$

onde B_0, B_1 são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e a imersão de B_0 em B é compacta e definamos

$$W = \left\{ v;\ v \in L^{p_0}(0,T;B_0),\ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < +\infty$ e $T < +\infty$.

Munido da norma

$$||v||_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + ||v'||_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

W é um espaço de Banach.

Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.

Demonstração: Ver Lions [24].

Corolário 1.1. *(Simon) Sejam X, B, Y três espaços de Banach tais que*

$$X \underset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow Y$$

onde X, B e Y são reflexivos, $\hookrightarrow$ denota imersão contínua e a imersão de X em B é compacta.

Seja F limitada em $L^\infty(0,T;X)$ e $\frac{\partial F}{\partial t}$ seja limitada em $L^r(0,T;Y)$ onde $r > 1$. Então F é relativamente compacto em $C(0,T;B)$.

Demonstração: Ver Simon.

Lema 1.1. *(**Lions**). Seja (g_ν) uma sucessão de funções $L^q(Q)$ e $1 < q < +\infty$. Se*

(i) $g_\nu \to g$ quase sempre em Q

(ii) $||g_\nu||_{L^q(Q)} \leq c, \quad \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

então, $g_\nu \rightharpoonup g$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver Lions [24].

Proposição 1.2. *(***Fórmula de Green***). Seja* Ω *um aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$*. Se* $u, v \in H^1(\Omega)$*, então para* $1 \leq i \leq n$ *temos que*

$$\int_\Omega u \, \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} \, v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v) \nu_i \, d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *e* ν *denota o vetor normal unitário exterior à* Γ*.*

Se $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$ *temos que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx = -\int_\Omega \Delta \, v ds + \int_\Gamma v \, \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot$$

Demonstração: Ver Kesavan [20].

Proposição 1.3. *(***2ª Fórmula de Green Generalizada***). Para todo* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ *e todo* $v \in H^1(\Omega)$ *tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_0); H^{1/2}(\Gamma_0)} \, .$$

Demonstração: Ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [9].

Proposição 1.4. *(***Desigualdade de Hölder***). Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq +\infty$ *e* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$*. Então* $uv \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq ||u||_{L^p(\Omega)} \, ||v||_{L^q(\Omega)} \, .$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Proposição 1.5. *(***Desigualdade de Hölder Generalizada - Corolário da Desigualdade de Hölder***). Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ funções tais que $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $\quad 1 \leq i \leq k$, onde $\dfrac{1}{p} = \dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \cdots + \dfrac{1}{p_k} \leq 1$. Então o produto $f = f_1 f_2 f_3 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$||f||_{L^p(\Omega)} \leq ||f_1||_{L^{p_1}(\Omega)} \, ||f_2||_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots ||f_k||_{L^{p_k}(\Omega)} \, .$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Teorema 1.1. *(***Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue***) Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções de $L^1(\Omega)$. Suponhamos que*

a) $\quad f_n(x) \to f(x) \quad$ *q.s. em* Ω;

b) $\quad$ *existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para cada n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ q.s. em Ω.*

Então $f \in L^1(\Omega)$ e $||f_n - f||_{L^1(\Omega)} \to 0$.

Demonstração: Ver Medeiros e Mello [27].

Proposição 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado de classe C^1. Se tivermos $u \in H^1(\Omega)$ e $v \in W^{1,\infty}(\Omega)$, então $u\,v \in H^1(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u\,v) = \frac{\partial u}{\partial x_i}\, v + u\, \frac{\partial v}{\partial x_i} \qquad \text{em } L^2(\Omega).$$

Demonstração: Ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [9].

Proposição 1.7. *Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$-\Delta u + u = f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

no sentido das distribuições. Então $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e $\|u\|_{H^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$, onde $C > 0$ é uma constante que não depende de f.

E ainda, se $f \in H^m(\mathbb{R}^n)$*, onde* $m \geq 0$ *então*

$$u \in H^{m+2}(\mathbb{R}^n) \quad com \quad \|u\|_{H^{m+2}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|f\|_{H^m(\mathbb{R}^n)}.$$

Demonstração: Ver Kesavan [20].

Proposição 1.8. *(***Rellich-Kondrachov***) Suponhamos que* Ω *seja limitado de classe* C^1*. Então se verificam*

$$\begin{aligned}
&se\ p < N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*[\ \ onde\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}\,;\\
&se\ p = N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, +\infty[\,;\\
&se\ p > N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

Demonstração: Ver Brézis [8]

Proposição 1.9. *Seja* $1 \leq p \leq \infty$*. Se verificam*

$$\begin{aligned}
&se\ 1 \leq p < N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{P^*}(\Omega), \qquad onde\ \frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{N}\,;\\
&se\ p = N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, +\infty[\,;\\
&se\ p > N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}).
\end{aligned}$$

E ainda, se $m - \dfrac{N}{p} > 0$*, então*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

onde $C^k(\overline{\Omega})$ *é espaço das funções* $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *que juntamente com suas derivadas* $D^\alpha f$*,* $0 \leq |\alpha| \leq k$*, são funções uniformemente contínuas em* Ω*, munido da norma*

$$||f|| = \max_{0 \leq |\alpha| \leq n} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|.$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Teorema 1.2. *Seja Ω um domínio tendo a propriedade do cone em $\mathbb{R}$. Seja $s > 0$ e $1 < p < n$. Então:*

$$\text{se } n > sp \Rightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \qquad \text{para } p \le r \le \frac{n\,p}{n - sp}\,;$$

$$\text{se } n = sp \Rightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega), \qquad \text{para } p \le r < \infty\,;$$

$$\text{se } n < (s-j)\,p \text{ para algum inteiro não negativo } j \Rightarrow W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C^j_B(\overline{\Omega}),$$

$$\text{onde } C^j_B = \{u \in C^j(\Omega) \,:\, D^\alpha u \text{ é limitada sobre } \Omega, \text{ para } |\alpha| \le j\}.$$

Demonstração: Ver Adams [1].

Lema 1.2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível encontrar um número $\varepsilon = \varepsilon(n)$ onde $0 < \varepsilon < 1$ de modo que*

$$H^{1-\varepsilon(n)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

desde que $2 \le q < \dfrac{2n}{n-2}$, $n > 2$.

Demonstração: Se $q \le \dfrac{2n}{n-2}$, $n > 2$, então:

$$2\,n > q\,(n-2) \Longleftrightarrow 2n - q\,n + 2\,q > 0.$$

Escolhendo então

$$0 < \varepsilon \le \frac{2n - q\,n + 2q}{2q}\,.$$

Com esta escolha de ε, temos que

$$2\,q\,\varepsilon \le 2n - qn + 2q \Longleftrightarrow q \le \frac{2n}{n - 2(1-\varepsilon)}\,.$$

Portanto, do exposto, resulta que estamos nas condições do Teorema anterior para $s = 1 - \varepsilon(n)$ e $p = 2$.

Assim,

$$H^{1-\varepsilon(n)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

Resta-nos verificar em que condições

$$s = 1 - \varepsilon(n) > 0 \quad \text{e} \quad n - 2(1-\varepsilon) > 0.$$

A primeira condição acima é satisfeita quando $0 < \varepsilon < 1$ e a segunda é sempre verdadeira, pois se $n > 2$, então $n - 2 > 0 > -2\varepsilon$, o que mostra que $n - 2 + 2\varepsilon > 0$, o que mostra o resultado desejado. $\square$

Lema 1.3. *(***Gronwall***). Seja $m \in L^1(0,T)$ tal que $m(x) \geq 0$ quase sempre em $]0,T[$ e seja $a \geq 0$. Considere φ uma função contínua de $[0,T]$ em $\mathbb{R}$ verificando*

$$\varphi(t) \leq a + \int_0^t m(s)\varphi(s)\, ds, \quad \textit{para todo} \quad t \in [0,T].$$

Então,

$$\varphi(t) \leq a \cdot e^{\int_0^t m(s)ds}, \quad \textit{para todo} \quad t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Proposição 1.10. *Seja* (x_n) *uma sucessão em* E*. Se verificam as seguintes asserções:*

i) $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(E, E') \Leftrightarrow \langle f, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle, \quad \forall\, f \in E'$.

ii) *Se* $x_n \to x$ *forte, então* $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(E, E')$.

3i) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(E, E')$*, então* $||x_n||$ *é limitado e* $||x|| \leq \liminf ||x_n||$.

4i) *Se* $x_n \rightharpoonup x$ *fraco em* $\sigma(E, E')$ *e se* $f_n \to f$ *forte em* E' *então* $\langle f_n, x_n \rangle \to \langle f, x \rangle$.

Demonstração: Ver Brézis [8].

Temos resultados análogos a proposição anterior para a convergência fraco-*.

Proposição 1.11. *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* (u_n) *uma sucessão limitada em* E'*. Então existe uma subsucessão* (u_{n_k}) *que converge na topologia fraco-*.*

Demonstração: Ver Brézis [8].

Proposição 1.12. *(Teorema da Representação de Riez-Fréchet). Seja* H *um espaço de Hilbert. Dada* $\varphi \in H'$*, existe uma única* $f \in H$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall\, v \in H.$$

Ademais, se verifica

$$|f|_H = ||\varphi||_{H'}.$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Lema 1.4. *(***Lax-Milgram***)Seja* H *um espaço de Hilbert e* $a(u, v)$ *uma forma bilinear,* *contínua e coerciva. Então, para toda $\phi \in H'$ existe um único $u \in H$ tal que*

$$a(u, v) = \langle \phi, v \rangle; \quad \forall\, v \in H.$$

Demonstração: Ver Brézis [8].

Lema 1.5. *(Lema de Du Bois Raymond). Sejam $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que*

$$\int_\Omega u(x)\,\varphi(x)\,dt = 0, \quad \forall\, \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Então $u = 0$ quase sempre em Ω.

Demonstração: Ver Cavalcanti e Domingos Cavalcanti [9].

Proposição 1.13. *(***Desigualdade de Young***). Sejam $1 < p, q < +\infty$ tais que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então,*

$$a\,b \leq \frac{1}{p}\,a^p + \frac{1}{q}\,b^q, \quad \forall\, a \geq 0,\ \forall\, b \geq 0.$$

Demonstração: Ver Medeiros e Mello [27].

Proposição 1.14. *(***Desigualdade de Minkowski***). Sejam $1 \leq p < +\infty$ e $f, g \in L^p(\Omega)$. Então*

$$||f + g||_{L^p(\Omega)} \leq ||f||_{L^p(\Omega)} + ||g||_{L^p(\Omega)}\,.$$

Demonstração: Ver Medeiros e Mello [27].

Lema 1.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado de classe C^2 e consideremos $\phi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Então*

$$\gamma_0\left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\right) = \gamma_1(\phi)$$

onde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *e* $\gamma_1 : H^2(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *são as aplicações usuais traço e traço da derivada normal.*

Demonstração: Ver Lions [25].

Teorema 1.3. *Sob as seguintes hipóteses:*

i) *Sejam* V, H *espaços de Hilbert tal que* $V \hookrightarrow H$ *e* $V = H$.

ii) *A forma bilinear* $(u, v) \mapsto a(u, v)$ *é contínua, simétrica e coerciva em* $V \times V$.

Dados $u_0 \in V$, $u_1 \in H$ *e* $f \in L^2(0, T; H)$, *existe uma função* u *que verifica:*

iii) $u \in C(0, T; V) \cap C^1(0, T; H)$.

iv) *Para toda* $v \in V$,

$$\frac{d^2}{dt^2}(u(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v)$$

no sentido das distribuições em $(0, T)$.

v) $u(0) = u_0$, $u'(0) = u^1$;

Temos que a solução u *do problema iii), iv) e v) verifica a seguinte desigualdade:*

$$\left\{ a(u(t), u(t)) + \left| \frac{d\,u(t)}{dt} \right|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ a(u_0(t), u_0(t)) + |u_1|^2 \right\}^{\frac{1}{2}} + \int_0^t |f(s)| ds.$$

Demonstração: Ver Lions [24].

Teorema 1.4. *(***Propriedade de Continuação Única***) Assuma que* u *pertença ao espaço* $L^2(\Omega \times (0, T))$ *e sejauma solução fraca de* $\Box u + v(x, t)\, u = 0$ *em* $\Omega \times (0, T)$, *(onde* $\Box$ *é o operador D'Alembertiano) tal que* $T > diam\, \Omega$ *e* $v \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$, *onde* Ω *é um aberto do* $\mathbb{R}^n$.

Então se $u = 0$ em algum conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n / \, a(x) > 0\} \times (0, T)$, temos que $u \equiv 0$.

Demonstração: Ver Ruiz [32].

1.2 O Teorema de Cauchy, Lipschitz, Picard.

Nesta seção, veremos um resultado que nos será útil na seção seguinte, quando vamos caracterizar operadores maximais monótonos.

Definição 1.1. *Seja X um espaço de Banach e $\omega \in \mathbb{R}$. Definamos o seguinte conjunto:*

$$X_\omega = \left\{u \in C([0, +\infty), E); ||u(t)|| \leq ce^{\omega t}, \text{ para algum } c > 0 \text{ e } \forall \, t \geq 0\right\}.$$

Proposição 1.15. *Seja X_ω é um espaço de Banach, onde X_ω foi definido acima. Então, temos que*

$$||u||_X = \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} ||u(t)||_E$$

é uma norma para X_ω.

Demonstração: Notemos que se $u \in X_\omega$, então o conjunto

$$\left\{e^{-\omega t} ||u(t)||_E; \, t \geq 0\right\}$$

é limitado, pois, note que

$$e^{-\omega t} ||u(t)||_E \leq ce^{-\omega t} e^{\omega t} = c; \; \forall \, t \geq 0.$$

Afirmo: $||u||_X$ é uma norma em X_ω.

De fato,

$i)$ Devemos mostrar que se $||u||_X \geq 0$ e $u \equiv 0$ se, e somente se, $||u||_X = 0$.

Basta mostrarmos que $||u||_X = 0$, então, $u \equiv 0$, pois a outra aplicação é evidente. Com efeito, se

$$||u||_X = 0 \Rightarrow \sup_{t \geq 0} e^{-\omega t} ||u(t)||_E = 0.$$

Então, por definição de supremo, vem que

$$0 \leq e^{-\omega t} ||u(t)||_E \leq 0;$$

o que implica que $||u(t)|| = 0$, para todo $t \geq 0$.

Portanto, $u \equiv 0$.

$ii)$ Para todo $u \in X_\omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}
||\lambda u||_X &= \sup_{t \geq 0} \left(e^{-\omega t} ||\lambda u(t)||_E \right) \\
&= |\lambda| \sup_{t \geq 0} \left(e^{-\omega t} ||u(t)||_E \right) \\
&= \lambda ||u||_X \,.
\end{aligned}$$

$iii)$ Para todo $u, v \in X_\omega$, temos

$$||u + v||_X \leq ||u||_X + ||v||_X.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
||u + v||_X &= \sup_{t \geq 0} (e^{-\omega t} ||u(t) + v(t)||_E) \\
&\leq \sup_{t \leq 0} (e^{-\omega t} ||(u + v)(t)||_E) \\
&\leq \sup_{t \geq 0} (e^{-\omega t} ||u(t)||_E + ||v(t)||_E) \\
&\leq \sup_{t \leq 0} e^{-\omega t} ||u(t)||_E + \sup_{t \leq 0} e^{-\omega t} ||v(t)||_E \\
&= ||u||_X + ||v||_X.
\end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que $(X_\omega, ||\cdot||_X)$ é um espaço de Banach, ou seja, basta provarmos que X_ω é fechado em $C([0,+\infty[, E)$.

Seja $\{u_\nu\} \subset X_\omega$ e tal que $u_\nu \to u$. Devemos provar que $u \in X_\omega$.

De fato, temos que:

$$\lim_{\nu\to+\infty} u_\nu = u, \text{ isto é, } \lim_{\nu\to+\infty} ||u_\nu - u||_X = 0.$$

Mas,

$$||u_\nu - u||_X = \sup_{t\geq 0}\left\{e^{-\omega t}||u_\nu - u||_E\right\}.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\nu_0 \in \mathbb{N}$, tal que para todo $\nu \geq \nu_0$ tem-se:

$$e^{-\omega t}(||u|| - ||u_\nu||) \leq e^{-\omega t}||u_\nu - u|| < \varepsilon\,; \quad \forall\,\nu \geq \nu_0,\, t \geq 0,$$

o que implica que

$$e^{-\omega t}(||u|| - ||u_\nu||) < \epsilon; \forall\,\nu \geq \nu_0, t \geq 0, \tag{1.1}$$

Contudo, como $\{u_\nu\} \subset X_\omega$; $||u_\nu|| \leq ce^{\omega t}$, então $-||u_\nu|| \geq -ce^{\omega t.}$

Daí, substituindo em (1.1) resulta que

$$e^{-\omega t}||u|| - c.1 \leq e^{-\omega t}||u|| - ce^{\omega t} < \varepsilon;$$

para todo $\nu \geq \nu_0, t \geq 0$.

Desta forma,

$$e^{-\omega t}||u|| - c < \varepsilon\,; \quad \forall\,\nu \geq \nu_0,\, t \geq 0.$$

Face a arbitrariedade de $\varepsilon > 0$, temos que

$$e^{-\omega t}||u|| < c$$

e portanto $||u|| < ce^{\omega t}$.

Segue-se finalmente que $u \in X_\omega$, como anseiávamos demonstrar. $\square$

Proposição 1.16. *Seja $F : E \to E$ Lipschitziana, em outras palavras, suponhamos que exista $\alpha > 0$ tal que $||F(u) - F(v)|| \leq \alpha ||u - v||$; para todo $u, v \in E$.*

Definamos as aplicações

$$\begin{array}{rll}\phi : & X_\omega & \to X_\omega \\ & u & \mapsto \phi_u \\ \phi_u : & [0, +\infty) & \to E \\ & t & \mapsto (\phi_u)(t) = u_0 + \displaystyle\int_0^t F(u(s))ds ; u_0 \in E\end{array}$$

Suponhamos $\omega > \alpha$. Então ϕ é uma contração em X_ω.

Demonstração:

i) Mostraremos inicialmente que ϕ está bem definida.

Lembremos que

$$X_\omega = \left\{u \in C([0, +\infty), E); ||u(t)|| \leq ce^{\omega t}, \text{ para algum } c > 0 \text{ e } \forall\, t \geq 0\right\}.$$

Seja $u \in X_\omega$ e considere

$$(\phi_u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds.$$

Provemos assim que $\phi_u \in C([0, +\infty), E)$.

De fato, seja $t_0 \in C([0, +\infty), E)$ e observe que

$$\begin{aligned} ||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t)|| &= \left|\left|\int_0^t F(u(s))ds - \int_0^{t_0} F(u(s))ds\right|\right| \\ &= \left|\left|\int_{t_0}^t F(u(s))ds\right|\right| \\ &\leq \int_{t_0}^t ||F(u(s))||ds. \end{aligned}$$

Todavia, sendo F lipschitziana, vem que F é contínua no compacto $[t_0, t]$. Assim, existe $M > 0$ tal que $||F(u(s))|| \leq M$. Logo,

$$||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t_0)|| < M|t - t_0|\,.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então temos que

$$||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t_0)|| < \epsilon,$$

o que implica a continuidade de ϕ_u em t_0.

ii) Existe $c > 0$ tal que $||(\phi_u)(t)||_E \leq ce^{\omega t}$; para todo $t \geq 0$.

Basta provar que $||(\phi_u)(t)||_E e^{-\omega t} \leq c$, onde c é uma constante.

Com efeito,

$$\begin{aligned} ||(\phi_u)(t)||_E \, e^{-\omega t} &\leq \left|\left| u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \right|\right|_E e^{-\omega t} \\ &\leq \left\{ ||u_0||_E + \int_0^t ||F(u(s))||_E ds \right\} e^{-\omega t}. \end{aligned}$$

Como F é Lipschitiziana, temos que

$$||F(u(s)) - F(u(t))||_E \leq \alpha||u(s) - u(t)||_E.$$

Tome em particular, $u(t) = 0$, sendo assim,

$$||F(u(s)||_E \leq \alpha||u(s)||_E + ||F(0)||_E.$$

Deste modo,

$$
\begin{aligned}
||(\phi_u)(t)||_E\, e^{-\omega t} &\leq \left\{ \left|\left| u_0 + \int_0^t F(u(s))ds \right|\right|_E \right\} e^{-\omega t} \\
&\leq \left\{ ||u_0||_E + \int_0^t ||F(u(s))||_E ds \right\} e^{-\omega t} \\
&\leq ||u_0||_E\, e^{-\omega t} + \alpha \int_0^t e^{\omega t}\, ||u(s)||_E\, e^{-\omega t} ds . e^{-\omega t} \\
&+ \int_0^t e^{\omega t} ||F(0)||_E e^{-\omega t} ds . e^{-\omega t}.
\end{aligned}
$$

E por sua vez,

$$
\begin{aligned}
||(\phi_u)(t)||_E\, e^{-\omega t} &\leq ||u_0||_E\, .e^{-\omega t} + \alpha \underbrace{e^{\omega t} e^{-\omega t}}_{=1} \int_0^t ||u(s)||_E\, .e^{-\omega s} ds \\
&+ \underbrace{e^{\omega t} e^{-\omega t}}_{=1} \int_0^t ||F(0)||_E . e^{-\omega s} ds \\
&\leq ||u_0||_E\, .e^{-\omega t} + \alpha \int_0^t ||u(s)||_E\, .e^{-\omega s} ds + \frac{1}{\omega} ||F(0)||_E.
\end{aligned}
$$

Como $u \in X_\omega$, o integrando da segunda parcela da última desigualdade é finito, logo

$$||(\phi_u)(t)||_E\, e^{-\omega t} \leq C \text{ onde C é uma constante.}$$

Portanto,

$$||(\phi_u)(t)||_E \leq C.e^{\omega t},$$

o que mostra que ϕ_u está bem definida.

$iii)$ ϕ é uma contração, desde que $\omega > \alpha$.

Sejam $u, v \in X_\omega$ e consideremos;

$$\begin{aligned} ||(\phi_u)(t) - (\phi_v)(t)|| &= \left|\left|\int_0^t (F(u(s)) - F(v(s))ds\right|\right| \\ &\leq \int_0^t ||F(u(s)) - F(v(s)||\, ds \\ &\leq \alpha \int_0^t ||u(s) - v(s)||\, ds. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Contudo, como $u, v \in X_\omega$ temos que a diferença entre u e v também pertence a X_ω, pois, $(u - v) \in C([0, +\infty), E)$ e portanto,

$$||u(t)|| \leq c_2 e^{\omega t} \text{ e } ||v(t)|| \leq c_3 e^{\omega t}.$$

Mas, por outro lado,

$$||u - v||_{X_\omega} = \sup_{t \geq 0} (e^{-\omega t} ||(u - v)(t)||).$$

Portanto, $e^{-\omega t}||u(t) - v(t)|| \leq ||u - v||_{X_\omega}$ e assim, tem-se que

$$||u(t) - v(t)|| \leq e^{\omega t} ||u - v||_{X_\omega}; \quad \forall\, t \geq 0.$$

Da desigualdade anterior e de (1.2), podemos escrever:

$$||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t)|| \leq \alpha ||u - v||_{X_\omega} \int_0^t e^{\omega s} ds.$$

Todavia,

$$\int_0^t e^{\omega t} ds = \left.\frac{e^{\omega t}}{\omega}\right|_0^t = \left(\frac{e^{\omega t}}{\omega} - \frac{1}{\omega}\right).$$

Assim,

$$||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t)|| \leq \frac{\alpha}{\omega} ||u - v||_{X_\omega} (e^{\omega t} - 1). \tag{1.3}$$

Mas, $\omega > \alpha > 0$, então $-\omega t \leq 0$.

Logo, $e^{-\omega t} \leq 1$, o que implica que

$$e^{-\omega t} - 1 \leq 0 \leq e^{\omega t}.$$

Desta forma, multiplicando a equação (1.3) por $e^{-\omega t}$ e usando a desigualdade acima resulta que

$$\begin{aligned} ||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t)||\, e^{-\omega t} &\leq \frac{\alpha}{\omega}\, ||u - v||_{X_\omega}\, e^{-\omega t}\, e^{\omega t} \\ &= \frac{\alpha}{\omega}\, ||u - v||_{X_\omega}. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\sup_{t \geq 0} \left(||(\phi_u)(t) - (\phi_u)(t)|| \right) \leq \alpha ||u - v||_{X_\omega},$$

ou seja,

$$||\phi_u - \phi_u|| \leq \alpha ||u - v||_{X_\omega}.$$

Como por hipótese, $0 < \alpha < \omega$, em outras palavras, $\frac{\alpha}{\omega} < 1$, obtemos enfim, que ϕ é uma contração. $\square$

Teorema 1.5. (Cauchy, Lipschitz, Picard) *Seja $\phi : X_\omega \to X_\omega$ definida como nas proposições anteriores. Então o único ponto fixo de ϕ em X_ω é solução do problema inicial no espaço de Banach E :*

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)); \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Demonstração: Notemos de antemão que $u(t)$ é solução do problema de Cauchy, se e somente se, $u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s)ds.$

Por outro lado, recordemos que

$$X_\omega = \left\{ u \in C([0, +\infty), E); ||u(t)|| \leq ce^{\omega t},\ \text{para algum } c > 0 \text{ e } \forall\, t \geq 0 \right\},$$

e $(X_\omega, ||\cdot||_X)$ é Banach.

Também,

$$\begin{aligned} \phi : \quad & X_\omega && \rightarrow X_\omega \\ & u && \mapsto \phi_u \\ \phi_u : \quad & [0,+\infty) && \rightarrow E \\ & t && \mapsto (\phi_u)(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds;\ u_0 \in E, \end{aligned}$$

onde, $F : E \rightarrow E$ é Lipschitziana, com constante de Lipschitz igual a α. Se acaso tomarmos $\omega > \alpha$, vimos pela proposição anterior que ϕ é uma contração.

Assim, usaremos o Teorema do Ponto Fixo de Banach que passamos a recordar:

"Seja X um espaço métrico e consideremos $S : X \rightarrow X$ uma aplicação, onde se $d(Sv_1, Sv_2) \leq k\, d(v_1, v_2)$, para todo $v_1, v_2 \in X$ com $k \leq 1$; então existe um único $u \in X$, onde $Su = u$."

Assim, existe único $u \in X_\omega$ tal que $\phi_u = u$. Sendo assim, existe único $u \in X_\omega$ tal que $u(t) = u_0 + \int_0^t F(u(s))ds$.

Segue-se deste modo que o único ponto fixo de ϕ em X_ω é solução do problema do valor inicial no Espaço de Banach E :

$$\begin{cases} u'(t) = F(u(t)); & \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$\square$

1.3 Operadores Maximais Monótonos - O Teorema de Hille Yosida

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Detotemos por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H.

Seja A um operador n ao limitado sobre H: $A : D(A) \subset H \to H$, então temos:

Definição 1.2. *Dizemos que A é um operador monótono se para todo $v \in D(A)$ tivermos $(Av, v) \geq 0$.*

E ainda, A é dito operador maximal monótono se

$$R(I + A) = H$$

isto é,

$$\forall\, f \in H,\ \exists\, u \in D(A) \text{ tal que } u + A\,u = f,$$

onde $R(I + A)$ denota a imagem do operador $I + A$.

Proposição 1.17. *Seja A um operador maximal monótono sobre H, então temos:*

i) $\overline{D(A)} = H$.

ii) A *é fechado.*

iii) $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)$ *é bijetor de* $D(A)$ *sobre* H *e* $(I + \lambda A)^{-1}$ *é limitado com*

$$|(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Demonstração:

$i)$ Seja $f \in H$ onde $(f, v) = 0$ para todo $v \in D(A)$. Mostremos que $f = 0$. Usaremos uma aplicação do Teorema de Hanh-Banach que passamos a recordar:

Lema 1.7. *Seja E um espaço vetorial normado e F um subespaço vetorial de E. Se para toda $f \in E'$ tal que $\langle f, x\rangle$=0 para todo $x \in F$ se tem $f \equiv 0$, isto é $\langle f, x\rangle$=0 para todo $x \in E$, então $\overline{F}$=E.*

Demonstração: Demonstração (ver Brézis [8]). $\square$

Com efeito, existe $v_0 \in D(A)$ onde $v_0 + Av_0 = f$, pois A é maximal monótono. Assim,

$$0 = (f, v_0) = (v_0 + Av_0, v_0) = (v_0, v_0) + (Av_0, v_0) \geq \mid v_0 \mid^2,$$

ou seja, $0 \geq \mid v_0 \mid^2$, o que nos diz que v_0=0, logo,

$$f = v_0 + Av_0 = 0 + A\,0 = 0.$$

$ii)$ Note que para todo $f \in H$ existe único $u \in D(A)$ tal que

$$u + Au = f. \tag{1.4}$$

Com efeito, tome $\overline{u}$ outra solução. Assim temos:

$$\overline{u} + A\overline{u} = f. \tag{1.5}$$

Fazendo produto escalar da diferença entre as duas equações (1.4) e (1.5) com $(u - \overline{u})$, temos:

$$\begin{aligned} 0 &= (0, u - \overline{u}) \\ &= (u - \overline{u} + A(u - \overline{u}), u - \overline{u}) \\ &= \mid u - \overline{u} \mid^2 + (A(u - \overline{u}), u - \overline{u})) \geq \mid u - \overline{u} \mid^2, \end{aligned}$$

pois $(A(u-\overline{u}), u-\overline{u})$ é não negativo. Logo,

$$| u-\overline{u} |= 0 \Leftrightarrow u-\overline{u} = 0 \Leftrightarrow u = \overline{u},$$

o que prove que o operador $I+A$ é bijetor de $D(A)$ em H e portanto o operador inverso $(I+A)^{-1}$ de H em $D(A)$ faz sentido.

Por outro lado, notemos que,

$$(f, u) = (u + Au, u) =| u |^2 +(Au, u) \geq| u |^2 .$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$|f|\,|u| \geq |(f, u)| \geq| u |^2 .$$

Para $u \neq 0$ resulta que

$$| f |\geq| u |, \tag{1.6}$$

o que trivialmente verdadeiro quando $u = 0$. Tendo em mente que $u = (I+A)^{-1}f$, vem através de (1.6), que o operador $f \mapsto u$ denotado por $(I+A)^{-1}$ é um operador linear limitado de H em H, pois

$$| (I+A)^{-1}f |\leq| f |,$$

o que implica, para $f \neq 0$, que $\frac{|(I+A)^{-1}|}{|f|} \leq 1$. Tomando supremo, obtemos

$$\| (I+A)^{-1} \|\leq 1.$$

Mostremos agora que A é fechado. Primeiramente recordemos que um operador A:$D(A) \subset H \to H$ é dito fechado se $G(A)$, (isto é, o gráfico de A) é fechado em $H \times H$.

Seja $u_n \in D(A)$ onde $u_n \to u$ e $A(u_n) \to f$. Logo,usando propriedade da soma de duas seqüências convergentes temos

$$(I+A)u_n = u_n + A(u_n) \to u + f$$

e então,

$$u_n \to (I+A)^{-1}(u+f).$$

Mas, $u_n \to u$ e assim, pela unicidade de limite, temos

$$(I+A)^{-1}(u+f) = u,$$

o que prova que u pertence a $D(A)$ e, além disso, que $Au{=}f$.

iii) Suponhamos que para algum $\lambda_0 > 0$ tenhamos $R(I+\lambda_0 A){=}H$, (onde R é a imagem do operador em questão). Mostremos que para todo $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$ teremos $R(I+\lambda_0 A){=}H$.

De fato, pelo item *ii*), temos que para todo $f \in H$ existe um único $u \in D(A)$ satisfzendo $u + \lambda_0 Au = f$, onde o operador $f \mapsto u$ é designado por $(I+\lambda_0)^{-1}$ e $\| (I+\lambda_0)^{-1} \| \leq 1$. Para tanto, basta resolver a equação abaixo:

$$u + \lambda Au = f \text{ com } \lambda > 0, \tag{1.7}$$

ou equivalentemente, somando e subtraindo os termos $\frac{\lambda_0}{\lambda}u$ e $\lambda_0\, Au$, temos

$$u + \lambda_0\, Au = \frac{\lambda_0}{\lambda} f + \left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right) u. \tag{1.8}$$

De (1.8) resulta que u é solução de

$$u = (I+\lambda_0)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda} f + (1 - \frac{\lambda_0}{\lambda})u\right] \in D(A).$$

Assim, fazendo uso do Teorema do Ponto Fixo de Banach, cujo enunciado está na demonstração da proposição (1.5) definamos o seguinte operador:

$$\begin{array}{rcl} L_f : D(A) & \to & H \\ u & \mapsto & L_f(u) = (I+\lambda_0 A)^{-1}\left[\dfrac{\lambda_o}{\lambda} + (1 - \dfrac{\lambda_0}{\lambda})u\right] \end{array}$$

o qual provaremos ser uma contração. Com efeito,

$$
\begin{aligned}
& ||L_f(u_1) - L_f(u_2)|| \\
= \quad & \left|\left|(I+\lambda_0 A)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1-\frac{\lambda_0}{\lambda}u_1)\right] - (I+\lambda_0 A)^{-1}\left[\frac{\lambda_0}{\lambda}f + (1-\frac{\lambda_0}{\lambda}u_2)\right]\right|\right| \\
\leq \quad & \left|\left|(I+\lambda_0 A)^{-1}\right|\right|_{\mathcal{L}(E)} \left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right| ||u_1 - u_2|| \\
\leq \quad & \underbrace{\left|1-\frac{\lambda_0}{\lambda}\right|}_{\text{se } <1} ||u_1 - u_2|| < ||u_1 - u_2||.
\end{aligned}
$$

Observe que desejamos que $\left|1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right| < 1$, o que é verdade se e só se $\lambda > \frac{\lambda_0}{2}$.

Seja $\lambda_1 > \frac{\lambda_0}{2}$. Notemos que o mesmo resultado permanece válido com λ_1, ou seja, para

$$\lambda > \frac{\lambda_1}{2} > \frac{\lambda_0}{2^2}.$$

Por indução, vale para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto, vale para todo $\lambda > 0$. Isto prova que o operador $I + \lambda A$ é sobrejetivo, conforme queríamos demonstrar. $\square$

Definição 1.3. *Seja A operador maximal monótono. Se então ponharmos para todo $\lambda > 0$ $J_\lambda = (I + \lambda A)^{-1}$ e $A_\lambda = \frac{1}{\lambda}(I - J_\lambda)$. Denotaremos J_λ o resolvente de A e A_λ a regularização Yosida de A. Note em particular que $||J_\lambda||_{\mathbb{L}(H)} \leq 1$.*

Proposição 1.18. *Seja A um operador maximal monótono. Então se verificam as seguintes condições:*

$a_1)\quad A_\lambda = A(J_\lambda);\ \forall\, v \in H\ \ e\ \forall \lambda > 0.$

$a_2)\quad A_\lambda = J_\lambda(Av);\ \forall v \in D(A)\ \ e\ \forall \lambda > 0.$

$b)\quad |A_\lambda \leq |Av|;\ \forall\, v \in D(A)\ \ e\ \forall \lambda > 0.$

$c)\quad \lim_{\lambda \to 0} J_\lambda v = v;\ \forall\, v \in D(A)\ \ e\ \forall\, \lambda > 0.$

$d)\quad \lim_{\lambda \to 0} v = Av;\ \forall\, v \in H.$

$e)\quad (A_{\lambda \cdot v}) \geq 0;\ \forall\, v \in H\ \ e\ \forall \lambda > 0.$

$f)\quad |A_\lambda| \leq \frac{1}{\lambda}|v|;\ \forall v \in H\ \ e\ \forall\, \lambda > 0.$

Demonstração: $a_1)$ Note que $v = (J_\lambda v) + \lambda A(J_\lambda)$. Com efeito, temos que

$$\begin{aligned} v = ((J_\lambda) + \lambda A(J_\lambda))(v) &= (I + \lambda A)^{-1}(v) + \lambda A(I + \lambda A)^{-1}(v) \\ &= (I + \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}(v) \\ &= (I + \lambda A)(I + \lambda A)^{-1}(v). \end{aligned}$$

Logo, isolando (J_λ) na equação acima e em seguida aplicarmos o operador A em ambos os membros da igualdade resulta que

$$A(J_\lambda) = \frac{1}{\lambda}(v - (J_\lambda)(v)) = \frac{1}{\lambda}(I - (J_\lambda)(v)) = A_\lambda(v);\ \forall\, v \in H \text{ e } \forall\, \lambda > 0.$$

$a_2)$ Veja que

$$\begin{aligned} Av = \frac{1}{\lambda}\left[(I + \lambda A)(v) - v\right] &= \frac{1}{\lambda}\left[(I + \lambda A)(v) - (I + \lambda A)\ \underbrace{J_\lambda(v)}_{(I+\lambda A)^{-1}(v)}\right] \\ &= \frac{1}{\lambda}(I + \lambda A)(v - J_\lambda(v)). \end{aligned}$$

Assim, aplicando J_λ em ambos os lados da igualdade obteremos que

$$J_\lambda(v) = (I + \lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}(v - J_\lambda(v)) = A_\lambda; \forall\, v \in D(A) \text{ e } \forall\, \lambda > 0.$$

$b)$ Por a_2), temos que

$$|A_\lambda v| = |J_\lambda(A_\lambda v)| \leq |Av|,$$

pois $J_\lambda = (I + \lambda)^{-1}$ é um operador contínuo, ou seja $|J_\lambda(v)| \leq |v|$, para todo $v \in D(A)$ (isto decorre da proposição anterior). Desta forma obtém-se

$$\lambda|A_\lambda v| = |v - J_\lambda(v)| = |J_\lambda(I + \lambda A)(v)| \leq |v + \lambda Av - v| = \lambda|Av|\,,$$

sendo assim, veja que obtemos que

$$|A_\lambda v| < \lambda|Av|;\, \forall\, v \in D(A) \text{ e } \forall\, \lambda > 0.$$

$c)$ Suponhamos inicialmente que $v \in D(A)$, então por $b)$ temos que

$$|v - J_\lambda(v)| = \lambda|A_\lambda v| \leq \lambda|Av|,$$

logo, $\lim_{\lambda \to 0} J_\lambda(v = v.)$

Passemos a seguir para o caso geral. Seja $v \in H$ e $\varepsilon > 0$. Como $\overline{D(A)} = H$, já que A é maximal monótono, existe $v_1 \in D(A)$ tal que $|v - v_1| < \varepsilon$.

Assim,

$$\begin{aligned} |J_\lambda(v) - v| &\leq \underbrace{|J_\lambda(v) - J_\lambda(v_1)|}_{\leq |v_1 - v|} + |J_\lambda(v_1)| + |v_1 - v| \\ &\leq |v_1 - v| + \underbrace{|J_\lambda(v_1) - v_1|}_{<\varepsilon, \text{ pois } v \in D(A)} + |v_1 - v| \\ &< \varepsilon + 2|v_1 - v| < \varepsilon + 2\varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Tomando o $\limsup$ na desigualdade anterior temos o seguinte fato:

$$\limsup |J_\lambda(v) - v| \leq \limsup_{\lambda\to 0} 2\varepsilon + \underbrace{\limsup_{\lambda\to 0} |J_\lambda(v_1 - v)|}_{\to 0,\ \text{pois } v_1 \in D(A)} = 2\varepsilon; \quad \forall\, v \in H.$$

$d)$ Por $c)$ e $a_2)$ facilmente vem que

$$Av \underbrace{=}_{c)} \lim_{\lambda\to 0} J_\lambda(A(v)) \underbrace{=}_{a_2)} \lim_{\lambda\to 0} A_\lambda v; \forall\, v \in D(A).$$

$e)$ Temos que

$$\begin{aligned}(A_\lambda v, v) = (A_\lambda v, v - J_\lambda v + J_\lambda v) \\ &= (A_\lambda v, v - J_\lambda v) + (A_\lambda v, J_\lambda v) \\ &= \underbrace{(A_\lambda v, \lambda A_\lambda v)}_{\lambda|A_\lambda|^2} + \underbrace{(A(J_\lambda v), J_\lambda v)}_{\text{por } a_2)}.\end{aligned}$$

Isto nos leva a crer que

$$(A_\lambda v, v) = \lambda |A_\lambda v|^2 + \underbrace{(A(J_\lambda v), J_\lambda v)}_{A \text{ é monótono}} \geq \lambda |A_\lambda|^2 \geq 0.$$

$f)$ Pela última desigualdade obtida em $e)$ temos que

$$\lambda |A_\lambda v|^2 \leq (A_\lambda v, v) \leq \underbrace{|A_\lambda v||v|}_{\text{por Cauchy-Schwarz}}.$$

Se$|A_\lambda v| = 0$, a desigualde é satisfeita.

Agora, se $|A_\lambda v| \neq 0$, então, Multiplicando a desigualdade obtida acima por $\frac{1}{\lambda |A_\lambda v|}$ teremos

$$|A_\lambda v| \leq \frac{1}{\lambda} |v|.$$

$\square$

Teorema 1.6. *(Hille-Yosida)Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0,+\infty); H) \cap C([0,+\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.9}$$

Ademais, se verifica:

$$|u(t)| \leq |u_0| \ e \ \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall\, t \geq 0, \tag{1.10}$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach para a norma do gráfico:

$$||u||_{D(A)} = |u| + |A\,u|.$$

Demonstração: Primeira etapa:(Unicidade)

Sejam $u, \overline{u}$ duas soluções de (1.9). Logo, temos

$$\frac{d\,u(t)}{dt} = -Au(t); \quad \forall\, t > 0. \tag{1.11}$$

$$\frac{d\,\overline{u}}{dt}(t) = -A\overline{u}(t); \quad \forall\, t > 0. \tag{1.12}$$

Subtraindo as equações (1.11) e (1.12), teremos o seguinte fato:

$$\frac{d}{dt}(u - \overline{u}) = -(A(u - \overline{u})).$$

Com a igualdade obtida acima, fazendo o produto interno com $(u - \overline{u})$, resulta que

$$(\frac{d}{dt}(u - \overline{u}), u - \overline{u}) = -(A(u - \overline{u}), u - \overline{u}\,) \leq 0, \text{ pois A é maximal monótono.}$$

Lembremos que se $\varphi \in C^1([0,+\infty);H)$, então $|\varphi|^2 \in C^1([0,+\infty);\mathbb{R})$ e $\frac{d}{dt}|\varphi|^2 = 2(\frac{d}{dt}\varphi,\varphi)$. Assim, por este fato, vamos obter que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 = -(A(u(t)-\overline{u}(t)),u(t)-\overline{u}(t)) \leq 0,$$

o que nos diz que

$$\frac{d}{dt}|u(t)-\overline{u}(t)|^2 \leq 0.$$

Isto nos leva a afirmar que a aplicação $t \mapsto |u(t)-\overline{u}(t)|$ é decrescente sobre $[0,+\infty)$.

Como, $|u(0)-\overline{u}(0)| = 0$ e sendo $|u(t)-\overline{u}(t)| \geq 0$ e do fato que esta é decrescente, resulta que $|u(t)-\overline{u}(t)| = 0$, para todo $t \geq 0$, portanto, $u(t) = \overline{u}(t)$.

Para demonstrar a existência de u, vamos substituir A pela sua regularização de Yosida A_λ, no qual se estabelecem diversas estimativas independentes de λ.

Seja u_λ a solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u_\lambda}{dt}(t) + A_\lambda u_\lambda = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u_\lambda(0) = u_0 \ \text{ em } D(A) \end{cases} \tag{1.13}$$

Observe que como H é espaço de Hilbert é um espaço de Banach e pela proposição (1.3), item f), temos:

$$|A_\lambda u - A_\lambda v| \leq |A_\lambda(u-v)| \leq \frac{1}{\lambda}|u-v|.$$

Assim, estamos nas condições da proposição (1.5). Então, aplicando no caso $F = -A_\lambda$, resulta que u_λ existe.

Segunda etapa: Cumpre-se a seguinte estimativa:

$$\left|\frac{d}{dt}u_\lambda(t)\right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0|\,\forall\, t \geq 0\,\forall\,\lambda > 0. \tag{1.14}$$

Tal desigualdade decorre imediatamente do seguinte lema:

Lema 1.8. *Seja* $w \in C^1((0,+\infty); H)$ *uma função que verifica:*

$$\frac{d}{dt}w + A_\lambda w = 0 \tag{1.15}$$

Então as funções

$$t \mapsto |w(t)| \quad e \quad t \mapsto \left|\frac{d}{dt}w(t)\right| = |A_\lambda w(t)|$$

são decrescentes sobre $[0,+\infty[$.

Demonstração: Tomando produto escalar com w em (1.15), obtemos que

$$(\frac{d}{dt}w, w) + (A_\lambda w, w) = 0.$$

Seguindo os mesmos passos feitos na primeira etapa teremos que $\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|w(t)|^2 \leq 0$. Logo, a função $t \mapsto |w(t)|$ é decrescente sobre $[0,+\infty[$.

Por outro lado, como A_λ é um operador linear limitado (contínuo), por (1.15) temos $w \in C^\infty$, pois,

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}w(t+h) - \frac{d}{dt}w(t)\right| &= \frac{|A_\lambda w(t+h) - A_\lambda w(t)|}{h} \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\frac{|w(t+h) - w(t)|}{h} \\ &\leq \frac{1}{h}\epsilon = \epsilon\end{aligned}$$

já que w é contínua. Repetindo este argumento infinitas vezes, temos que $w \in C^\infty$. E assim,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}w\right) + A_\lambda\left(\frac{d}{dt}w\right) = 0.$$

Note que desta forma, seguindo o mesmo raciocínio anterior, resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|\frac{d}{dt}w\right|^2 \leq 0,$$

ou seja,

$$t \mapsto \left| \frac{d}{dt} \right|,$$

é decrescente em $[0, +\infty)$. $\square$

Portanto,

$$\left| \frac{d\, u_\lambda(t)}{dt} \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)| \leq |Au_0|\, ; \forall\, t \geq 0; \lambda > 0,$$

pelo fato que a aplicação $t \mapsto \left| \frac{d\, u_\lambda(t)}{dt} \right| = |A_\lambda u_\lambda(t)|$ é decrescente.

Terceira etapa: Mostraremos que para todo $t \geq 0$, $u_\lambda(t)$ converge, quando $\lambda \to 0$ a um limite $u(t)$. Ademais, esta convergência é uniforme em t sobre cada intervalo limitado $[0, t]$.

Com efeito, sejam, $\lambda, \mu > 0$. Repetindo o mesmo artifício usado nas etapas anteriores, obteremos que

$$\frac{d\, u_\lambda}{dt} - \frac{d\, u_\mu}{dt} + A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu = 0,$$

e ainda,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left| u_\lambda - u_\mu \right|^2 + (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) = 0. \tag{1.16}$$

Como,

$$\begin{aligned}
(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu) &= (A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - J_\lambda u_\lambda + J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu + J_\mu u_\mu - u_\mu) \\
&= \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \underbrace{(u_\lambda - J_\lambda u_\lambda)}_{\lambda A_\lambda u_\lambda} - \underbrace{(u_\mu - J_\mu u_\mu)}_{\mu A_\mu u_\mu} \right) \\
&+ \left(\underbrace{A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu}_{A\left(J_{\lambda u_\lambda}\right) - A(J_\mu u_\mu)}, J_\mu u_\mu - J_\mu u_\mu \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right) \\
&+ \underbrace{\left(A\left(J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\right), J_\lambda u_\lambda - J_\mu u_\mu\right)}_{\geq 0} \\
&\geq \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right) \geq \left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right) \tag{1.17}$$

Logo, de (1.14), (1.16) e (1.17), teremos:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 &= -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, u_\lambda - u_\mu\right) \\
&\leq -\left(A_\lambda u_\lambda - A_\mu u_\mu, \lambda A_\lambda u_\lambda - \mu A_\mu u_\mu\right) \\
&\leq -\left\{\lambda\left|A_\lambda u_\lambda\right|^2 - (\lambda+\mu)\left|A_\lambda u_\lambda\right|\left|A_\mu u_\mu\right| + \mu\left|A_\mu u_\mu\right|^2\right\} \\
&= (\lambda+\mu)\left|A_\lambda u_\lambda\right|\left|A_\mu u_\mu\right| - \underbrace{\lambda\left|A_\lambda u_\lambda\right|^2 + \mu\left|A_\mu u_\mu\right|^2}_{\geq 0} \\
&\leq (\lambda+\mu)\left|A_\lambda u_\lambda\right|\left|A_\mu u_\mu\right| \\
&\leq (2\lambda+\mu)\left|A_\lambda u_\lambda\right|\left|A_\mu u_\mu\right| \\
&\leq \underbrace{2(\lambda+\mu)\left|Au_0\right|^2}_{(1.14)}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\left|Au_0\right|^2\left|Au_0\right|^2.$$

Integrando a última desigualdade, teremos:

$$\left|u_\lambda - u_\mu\right|^2 \leq 4(\lambda+\mu)t\left|Au_0\right|);$$

ou ainda,

$$\left|u_\lambda - u_\mu\right| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\left|Au_0\right|. \tag{1.18}$$

Observe que se tomarmos $t \in [0,T]$, na desigualdade anterior vem que

$$|u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\,|Au_0| \leq |u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)T}\,|Au_0|\,.$$

Ao tomar o máximo na desigualdade anterior, temos:

$$\max_{t\in[0,T]} |u_\lambda - u_\mu| \leq |u_\lambda - u_\mu| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)}\sqrt{T}\,|Au_0| \longrightarrow 0,$$

quando $\lambda, \mu \to 0$. Isto nos diz que $\{u_\lambda(t)\}$ é de Cauchy em $C^0([0,T];H)$, o que é possível, graças ao fato que $u_0 \in D(A)$ e este é denso em H. Denotando este limite por $u(t)$, temos que esta convergência é uniforme em t sobre cada compacto $[0,T]$.

Quarta etapa: Suponhamos que $u_0 \in D(A^2)$, isto é, $u_0 \in D(A)$ e $Au_0 \in D(A)$. Então $\frac{d}{dt}u_\lambda(t)$ converge uniformemente sobre cada intervalo limitado $[0,T]$.

Com efeito, ponhamos $v_\lambda = \frac{d}{dt}u_\lambda$, de forma que $\frac{d}{dt}v_\lambda + A_\lambda v_\lambda = 0$. Como na terceira etapa, resultará que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 &\leq (\lambda+\mu)\,|A_\lambda u_\lambda|\,|A_\mu u_\mu| - \left(\lambda\,|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu\,|A_\mu u_\mu|^2\right)\\
&\leq (\lambda+\mu)\,|A_\lambda u_\lambda|\,|A_\mu u_\mu| + \lambda\,|A_\lambda u_\lambda|^2 + \mu\,|A_\mu u_\mu|^2\\
&= \left(|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|\right).\left(\lambda\,|A_\lambda v_\lambda| + \mu\,|A_\mu v_\mu|\right),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|v_\lambda - v_\mu|^2 \leq \left(|A_\lambda v_\lambda| + |A_\mu v_\mu|\right).\left(\lambda\,|A_\lambda v_\lambda| + \mu\,|A_\mu v_\mu|\right). \tag{1.19}$$

Segundo o lema (1.8) temos que

$$|A_\lambda v_\lambda| \leq |A_\lambda v_\lambda(0)| = |A_\lambda A_\lambda u_0|\,. \tag{1.20}$$

$$|A_\mu v_\mu| \leq |A_\mu v_\mu(0)| = |A_\mu A_\mu u_0|\,. \tag{1.21}$$

Como $Au_0 \in D(A)$ resulta da proposição (1.3), item a_2) que

$$A_\lambda A_\lambda u_0 = J_\lambda A J_\lambda A u_0 = J_\lambda J_\lambda A A u_0 = J_\lambda^2 A^2 u_0,$$

e por conseguinte,

$$|A_\lambda A_\lambda u_0| \leq \left|A^2 u_0\right|, \quad |A_\lambda A_\mu u_0| \leq \left|A^2 u_0\right| \tag{1.22}$$

Combinando (1.19), (1.20), (1.21) e (1.22) resulta que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_\lambda - v_\mu\right|^2 \leq 2(\lambda+\mu)\left|A^2 u_0\right|^2 \left|Au_0\right|^2.$$

Ou ainda,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left|v_\lambda - v_\mu\right|\left|v_\lambda - v_\mu\right| \leq 2\sqrt{(\lambda+\mu)t}\left|A^2 u_0\right| \; t \geq 0.$$

Da mesma forma que na terceira etapa, tomando o máximo da desigualdade anterior vem que

$$\max_{t\in[0,T]} \left|v_\lambda - v_\mu\right| \leq 2\sqrt{\lambda+\mu}\sqrt{T}\left|A^2 u_0\right| \longrightarrow 0,$$

quando $\lambda, \mu \to 0$. Isto nos garante $\{v_\lambda\}$ é de Cauchy em $C^0([0,T];H)$, no qual denotaremos tal limite por v. Da mesma forma que na etapa anterior, $v_\lambda(t)$ converge para v quando t tende a 0, para todo $t \geq 0$ e uniformemente em t sobre cada compacto $[0,T]$.

Assim, da terceira e quarta etapa obtemos;

$$u_n \to u \text{ em } C^0([0,T];H) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;H) \tag{1.23}$$

$$\frac{d}{dt}u_n \to \frac{dv}{dt} \text{ em } C^0([0,T];H) \hookrightarrow L^2(0,T;H) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;H) \tag{1.24}$$

De (1.23) temos que $\frac{d}{dt}u_n \to \frac{d}{dt}u$ em $\mathcal{D}'(0,T;H)$ e de (1.24) temos que $\frac{d}{dt}u_n \to v$ em $\mathcal{D}'(0,T;H)$.

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'$, obtemos que $\frac{d}{dt} = v$ em $\mathcal{D}'(0,T;H)$.

Quinta etapa: Existe uma solução de (1.9) e se supõe ainda que $u_0 \in D(A^2)$.

Com efeito da etapa anterior, se sabe que para todo $T < +\infty$ tem-se:

$$\begin{cases} u_\lambda \to u(t) \\ \dfrac{d\,u_\lambda(t)}{dt} \to \dfrac{d\,u(t)}{dt}. \end{cases} \tag{1.25}$$

Onde estas convergências são uniformes em $[0,T]$. Podemos escrever (1.13) da seguinte forma;

$$0 = \frac{d}{dt}u_\lambda(t) + A_\lambda u_\lambda(t) \tag{1.26}$$

$$\underbrace{\leq}_{(1.3),\,a_1} \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt} + A\left(J_\lambda u_\lambda(t)\right). \tag{1.27}$$

Note que $J_\lambda u_\lambda(t) \to u(t)$. De fato,

$$\begin{aligned} |J_\lambda u_\lambda(t) - u(t)| &= |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t) + J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\leq |J_\lambda u_\lambda(t) - J_\lambda u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \\ &\underbrace{\leq}_{J_\lambda \text{ é limitado}} |u_\lambda(t) - u(t)| + |J_\lambda u(t) - u(t)| \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

isto mediante o fato que u_λ converge uniformemente para u e a proposição (1.3).

Aplicando o fato que o gráfico de A é fechado, por (1.26), temos que $u(t) \in D(A)$, para todo $t \geq 0$ e assim, $\frac{d}{dt}u(t) + Au(t) = 0$.

Por último, como $u \in C^1([0,+\infty];H)$, a função $t \mapsto Au(t)$ é contínua de $[0.+\infty[$, pois, se

$$t_n \to t \;\text{ e }\; u(t_n) \to u(t)$$

$$\Rightarrow Au(t_n) \to Au(t).$$

Assim, $u \in C([0,+\infty[; D(A))$.

Desta forma, obtemos solução de (1.9) que cumpre $|u(t)| \leq |Au_0|$,para todo $t \geq 0$.

Para terminarmos será necessário o seguinte lema:

Lema 1.9. *Seja $u_0 \in D(A)$, então para todo $\varepsilon > 0$, existe $\overline{u}_0 \in D(A^2)$ tal que $|u - u_0| < \varepsilon$ e $|Au_0 - A\overline{u}_0| < \varepsilon$. Dito de outro modo, $D(A^2)$ é denso em $D(A)$ (Para a norma do gráfico).*

Demonstração: Seja $\overline{u}_0 = J_\lambda u_0$ de modo que $\overline{u}_0 \in D(A)$ e $\overline{u}_0 + \lambda A\overline{u}_0 = u_0$.

Pelo fato que $\overline{u}_0, u_0 \in D(A)$ temos que $A\overline{u}_0 \in D(A)$, ou seja, $\overline{u}_0 \in D(A^2)$.

Por outro lado, sabemos pela proposição (1.3) que

$$A\overline{u}_0 = AJ_\lambda u_0 = A_\lambda u_0 = J_\lambda u_0$$

e os seguintes limites

$$\lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda u_0 - u_0| = 0\,,\ \lim_{\lambda \to 0} |J_\lambda Au_0 - Au_0| = 0.$$

Escolhendo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno vamos obter a conclusão do lema. $\square$

Sexta etapa: (Conclusão) Seja $u_0 \in D(A)$. Em virtude do lema anterior, existe uma sucessão $u_{0n} \subset D(A^2)$ tal que $u_{0n} \to u_0$ e $Au_{0n} \to Au_0$.

Da quinta etapa sabemos que existe uma solução u_n e u_m dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u_n(t)}{dt} + Au_n = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u_n(0) = u_{0n} \ \text{ em } D(A^2) \end{cases} \tag{1.28}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u_m(t)}{dt} + Au_m = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u_m(0) = u_{0m} \ \text{ em } D(A^2). \end{cases} \tag{1.29}$$

Temos que $(u_n - u_m)$ é solução e fazendo a diferença entre as equações (1.28) e (1.29) teremos:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u_n - u_m)(t) + A(u_n - u_m) = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ (u_n - u_m)(0) = u_{0n} - u_{0m} \text{ em } D(A^2). \end{cases}$$

E ainda se verifica,

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}| \to |u_0 - u_0| = 0.$$

e

$$\left| \frac{d}{dt}u_n(t) - \frac{d}{dt}u_m(t) \right| \leq |Au_{0n} - Au_{0m}| \to |Au_0 - Au_0| = 0, \quad \text{quando } m, n \to +\infty.$$

Logo $u_n(t) \to u(t)$ e $\frac{d}{dt}u_n(t) \to \frac{d}{dt}u(t)$ uniformemente sobre $[0, +\infty[$.

Desta forma, se $u_n(t) \to u(t)$, então

$$Au_n(t) \to v(t)$$

Como A é fechado, $u(t) \in D(A)$ e $v(t) = Au(t)$.

Mas, veja que

$$\frac{d}{dt}u_n(t) \to \frac{d}{dt}u(t) = Au(t).$$

Portanto, $v(t) = Au(t)$, o que nos diz que

$$u \in C([0, +\infty[; D(A)),$$

obtendo finalmente (1.9). $\square$

Observação 1.1. *Seja A um operador maximal monótono e $\lambda \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte problema*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + Au + \lambda u = 0; \quad \text{em } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.30}$$

Multiplicando $(1.30)_1$ *por* $e^{\lambda t}$ *teremos*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}u(t)\right) + A\left(e^{\lambda t}u(t)\right) = 0. \tag{1.31}$$

Denotando $v(s) = e^{\lambda t}u(t)$, *obtemos que* v *verifica*

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v}{dt} + Av = 0; & \textit{em } [0, +\infty[\\ v(0) = u_0. \end{cases}$$

Assim, resolver (1.30), se reduz a resolver (1.9) graças ao artifício (1.31).

Regularidade:

Completaremos agora o resultado do Teorema de Hille-Yosida (1.6), onde vamos obter uma solução u mais regular (pois no Teorema (1.6) obtemos somente que a solução $u \in C^1([0,T); H)$) com devidas hipóteses suplementares sobre o dado inicial u_0.

Para tal, define-se por indução ,o espaço

$$D(A^k) = \{v \in D(A^{k-1});\ A\,v \in D(A^{k-1})\},\ \forall\, k \geq 2.$$

Mostremos que $D(A^k)$ é um espaço de Hilbert com o produto escalar

$$(u,v)_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} (A^j\,u, A^j\,v)$$

e a norma associada

$$|u|_{D(A^k)} = \left(\sum_{j=0}^{k} |A^j\,u|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Com efeito, seja $\{u_\nu\}_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma sucessão de Cauchy em $D(A^k)$ e consideremos $\mu, \nu \in \mathbb{N}$ com $\nu > \mu$.

Assim,

$$|u_\nu - u_\mu|^2_{D(A^k)} = \sum_{j=0}^{k} |A^j\,u_\nu - A^j\,u_\mu|^2 \to 0$$

quando ν, μ tendem ao infinito.

Resulta que

$$\{A^j\, u_\nu\} \quad \text{é de Cauchy em } H; \quad j = 0, 1, ..., k.$$

Logo, para cada $j \in \{0, 1, ..., k\}$, existe $u_j \in H$ tal que

$$\lim_{\nu \to +\infty} A^j\, u_\nu \to u_j \quad \text{ em } H.$$

Agora, o nosso próximo passo é mostrar que $u_0 \in D(A^k)$.

De fato, sendo A fechado vem que

$$u_0 \in D(A) \quad \text{ e } A\, u_0 = u_1.$$

Pelo mesmo motivo, decorre que

$$u_1 = A\, u_0 \in D(A) \quad \text{ e } A^2\, u_0 = u_2.$$

Então, se agirmos por recorrência, vamos obter que

$$u_{j-1} = A^{j-1}\, u_0 \in D(A) \quad \text{ e } A^j\, u_0 = u_j; \quad j = 1, 2, ..., k$$

o que prova o desejado.

Teorema 1.7. *Suponhamos que $u_o \in D(A^k)$ com $k \geq 2$. Então a solução u do problema (1.9) obtida no Teorema de Hille-Yosida se verifica e ainda*

$$u \in C^{k-j}([0, +\infty); D(A^j)); \quad j = 0.1, 2\ldots, k.$$

Demonstração: Suponhamos inicialmente $k = 2$ e considere o seguinte espaço de Hilbert $H_1 = D(A)$ e $A_1 = A : D(A_1) = D(A^2) \to H_1$.

Veja que $A_1 u = Au$, para $u \in D(A_1)$ e $D(A_1) = D(A^2) = \{v \in D(A); Av \in D(A)\}$, onde

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (Au, Av)_H \quad |u|^2_{H_1} = |u|_H + |Au|^2_H.$$

Mostremos que A_1 é maximal monótono em H_1.

$i)$ A_1 é monótono em H_1:

Para $u \in D(A)$, temos:

$$\begin{aligned}(A_1 u, u)_{D(A_1)} = (Au, u)_{D(A^2)} &= (Au, u)_H + (A^2 u, Au)_H \\ &= (Au, u)_H + (A(Au), Au)_H \geq 0,\end{aligned}$$

pois, A é monótono.

$ii)$ A é maximal:

Devemos mostrar que para todo $f \in H_1$, existe $v \in D(A_1)$ onde $u + A_1 u = f$.

De fato, tome $f \in D(A) \subset H$. Sendo A maximal, existe $u' \in D(A)$ tal que

$$u' + Au' = f.$$

Como $u', Au' \in D(A)$, segue que $Au' \in D(A)$. Disto decorre que $u' \in D(A_1)$. Então $A_1 u' = Au'$, o que mostra que

$$u' + Au' = u' + A_1 u' = f,$$

logo A_1 é maximal.

Assim, aplicando o Teorema de Hille-Yosida ao operador A_1 no espaço H_1, existe uma função

$$u \in C^1([0, +\infty); H_1) \cap C([0, +\infty); D(A_1))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + A_1\, u = 0 \quad \text{em } [0, +\infty) \\ u(0) = u_0. \end{cases}$$

Em particular, u satisfaz (1.9) e em virtude da unicidade, esta é uma solução de (1.9). Falta somente mostrar que u pertence a $C^2([0, +\infty); H)$.

De fato, veja que $A \in \mathcal{L}(H_1, H)$ e $u \in C^1([0.+\infty); H_1)$, temos que $A\,u \in C^1([0,+\infty); H)$ e

$$\frac{d\,u}{dt}(A\,u) = A\left(\frac{d\,u}{dt}\right). \tag{1.32}$$

Aplicando (1.9), temos que $\frac{d\,u}{dt} \in C^1([0,+\infty); H)$, ou seja, $u \in C^2([0,+\infty); H)$ e

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\,u}{dt}\right) + A\left(\frac{d\,u}{dt}\right) = 0 \quad \text{em } [0,+\infty); \tag{1.33}$$

Passemos agora para o caso geral $k \geq 3$. Usemos indução sobre k. Assim, suponhamos que tal fato seja válido para $k-1$ e tomemos $u_0 \in D(A^k)$.

Pelo que foi visto anteriormente, uma solução de (1.9) pertence ao espaço $C^2([0,+\infty); H) \cap C^1([0,+\infty); D(A))$ e u verifica (1.33).

Pondo $v = \frac{d\,u}{dt}$ obtemos que $v \in C^1([0.+\infty); H) \cap C([0,+\infty); D(A))$ e

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + A\,v = 0 \quad \text{em } [0,+\infty) \\ v(0) = \dfrac{d\,u}{dt}(0) = -A(u(0)) = -A\,u_0. \end{cases}$$

Assim, v é uma solução de (1.9) com dado inicial $v_0 = -A\,u_0$. Como $v_0 \in D(A^{k-1})$, pela hipótese de indução temos que

$$v \in C^{k-1-j}([0,+\infty); D(A^j)); \quad j = 0, 1, \ldots, k-1, \tag{1.34}$$

isto é,

$$u \in C^{k-j}([0,+\infty); D(A^j)); \quad j = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Finalmente, resta-nos mostrar que

$$u \in C([0,+\infty); D(A^k)). \tag{1.35}$$

De fato, aplicando (1.34) com $j = k-1$, se obtém que

$$\frac{d\,u}{dt} = v \in C([0,+\infty); D(A^{k-1})). \tag{1.36}$$

Como pela equação (1.9), $\frac{d\,u}{dt} = -A\,u$, então de (1.36), temos que $A\,u \in C([0,+\infty); D(A^{k-1})$, ou seja, obtemos (1.34). □

O Caso Auto-adjunto:

Seja $A : D(A) \subset H \to H$ um operador linear não limitado com $\overline{D(A)} = H$. Se temos a identificação $H' \approx H$, pode-se considerar A^* como um operador não limitado em H.

Definição 1.4. *Dizemos que A é simétrico se*

$$(A\,u, v) = (u, A\,v); \quad \forall\, u, v \in D(A);$$

A é auto-adjunto se $A^* = A$ e $D(A^*) = D(A)$.

Note que todo operador auto-adjunto é simétrico. Porém, se A é maximal monótono, temos a recíproca.

Proposição 1.19. *Seja A um operador maximal monótono e simétrico. Então A é auto-adjunto.*

Demonstração: Seja $J_1 = (I+A)^{-1}$. Mostremos primeiramente que J_1 é auto-adjunto. Observe que é suficiente provar que

$$(J_1\,u, v) = (u, J_1\,v); \quad \forall\, u, v \in H \tag{1.37}$$

posto que $J_1 \in \mathcal{L}(H)$.

Assim, ponhamos $u_1 = J_1\, u, v_1 = J_1\, v$, onde

$$\begin{aligned} u_1 + A\, u_1 &= J_1\, u + A\, J_1\, u \\ &= J_1\, u + A_1\, u \\ &= u. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{cases} u_1 + A\, u_1 = u \\ v_1 + A\, v_1 = v. \end{cases}$$

Como A é simétrico, temos que $(u_1, A\, v_1) = (A\, u_1, v_1)$. Sendo assim, compondo a primeira equação do sistema acima com v_1 e a segunda por u_1, vem que

$$(u, v_1) = (v, u_1)$$

obtendo (1.37).

Agora seja $u \in D(A^*)$ e ponhamos $f = u + A^*\, u$.

Veja que

$$\begin{aligned} (f, v) &= (u + A^*\, v) \\ &= (u, v) + (A^*\, u, v) \\ &= (u, v + A\, v), \quad \forall\, v \in D(A) \end{aligned}$$

e

$$
\begin{aligned}
(f, J_1\, w) &= (u + A^*\, u, J_1\, w) \\
&= (u, J_1\, w) + (u, A\, J_1\, w) \\
&= (u, J_1\, w) + (u, A_1\, w) \\
&= (u, J_1\, w) + (u, w - J_1\, w) \\
&= (u, w); \quad \forall\, w \in H.
\end{aligned}
$$

Com isto,

$$(J_1\, f, w) = (f, J_1^*\, w) = (f, J_1\, w) = (u, w); \quad \forall\, w \in H,$$

o que nos diz que $u = J_1\, f$ e assim $u \in D(A)$, logo, $D(A^*) = D(A)$, o que mostra que A é auto-adjunto. $\square$

O teorema que veremos a seguir, difere do Teorema de Hille-Yosida, pois o dado inicial $u_0 \in H$, ao invés de $u_0 \in D(A)$. Porém, sua conclusão é mais fraca, porque $\frac{d\,u(t)}{dt}$ pode ocasionalmente explodir quando $t \to 0$.

Teorema 1.8. *Seja A um operador maximal monótono, auto-adjunto. Então, para toda $u_0 \in D(A)$, existe uma única solução*

$$u \in C([0, +\infty); H) \cap C((0, +\infty); D(A))$$

tal que

$$
\begin{cases}
\dfrac{du}{dt} + A\, u = 0 \qquad \text{em } (0, +\infty) \\
u(0) = u_0.
\end{cases}
$$

Ademais, se verificam

$$|u(t)| \leq |u_0| \qquad e \qquad \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |A\, u(t)| \leq \frac{1}{t}|u_0|\,; \quad \forall\, t > 0$$

com

$$u \in C^k((0,+\infty); D(A^l)); \quad \forall\, k,l \in \mathbb{N}. \tag{1.38}$$

Demonstração: **Unicidade**: Os passos são os mesmos feitos na unicidade do Teorema de Hille-Yosida.

Existência.

Primeira etapa:

Suponhamos inicialmente que $u_0 \in D(A^2)$ e u seja solução de (1.9) obtida no Teorema de Hille-Yosida. Estabeleceremos a seguinte estimativa

$$\left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| \leq \frac{1}{t}|u_0|\,; \quad \forall\, t > 0. \tag{1.39}$$

Pela proposição (1.19), temos que $J_1 = (I + A)^{-1}$ é auto-adjunto. Seguindo o mesmo raciocínio da proposição citada acima, obtemos que $J_\lambda^* = J_\lambda$ e $A_\lambda * = A_\lambda$, para todo $\lambda > 0$.

Fazendo uso da aproximação utilizada no Teorema de Hille-Yosida, obtemos:

$$\frac{d\,u_\lambda}{dt} + A_\lambda\, u_\lambda = 0 \tag{1.40}$$

em $(0, +\infty)$ e $u_\lambda(0) = u_0$.

Assim, em (1.40), fazendo o produto escalar com u_λ e em seguida, integrando sobre $[0, T]$, temos:

$$\int_0^T \left(\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}, u_\lambda(t)\right) dt + \int_0^T (A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt = 0;$$

integrando por partes a primeira integral da equação acima, resulta então

$$\frac{1}{2}|u_\lambda(T)|^2 + \int_0^T (A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt = \frac{1}{2}|u_0|^2. \tag{1.41}$$

Agora, fazendo o produto escalar de (1.40) com $t\,\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}$ e após isto, integrando sobre $[0,T]$, vem que

$$\int_0^T \left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt} u\right|^2 t\,dt + \int_0^T \left(A\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) t\,dt = 0. \tag{1.42}$$

Note ainda que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_\lambda\,u_\lambda, u_\lambda) &= \left(A_\lambda\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) + \left(A_\lambda\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) \\
&= \left(A_\lambda\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) + \left(u_\lambda(t), A_\lambda^*\,\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) \\
&= \left(A_\lambda\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) + \left(u_\lambda(t), A_\lambda\,\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) \\
&= 2\left(A_\lambda\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right).
\end{aligned}$$

Observe que pela integração por partes, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left(A\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) t\,dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \frac{d}{dt}[(A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))]\,t\,dt \\
&= \frac{1}{2}\left\{t\,(A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))\big|_0^T - \int_0^T (A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt\right\} \\
&= \frac{1}{2}(A\,u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T - \frac{1}{2}\int_0^T (A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt. \qquad (1.43)
\end{aligned}$$

Por outro lado, como a fução $t \mapsto \left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right|$ é decrescente (lema (1.8)), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right|^2 t\,dt &= \left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right|^2 \frac{T^2}{2} \underbrace{- \int_0^T \frac{d}{dt}\left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right|^2 \frac{t^2}{2}\,dt}_{\geq 0} \\
&\geq \left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right|^2 \frac{T^2}{2}. \qquad (1.44)
\end{aligned}$$

Combinando (1.42), (1.43) e (1.41) se chega que

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right|^2 t\,dt &= \int_0^T \left(A\,u_\lambda(t), \frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right) t\,dt \\
&= \frac{1}{2}(A\,u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T - \frac{1}{2}\int_0^T (A\,u_\lambda(t), u_\lambda(t))dt \\
&= -\frac{1}{4}|u_0|^2 + \frac{1}{4}|u_\lambda(t)|^2 + \frac{1}{2}(A\,u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T.
\end{aligned}$$

E de (1.44), da estimativa acima, obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_0^T \left|\frac{d\,u_\lambda(t)}{dt}\right|^2 t\,dt &\geq \left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right|^2 \frac{T^2}{2} \\
&= -\frac{1}{4}|u_0|^2 + \frac{1}{4}|u_\lambda(t)|^2 + \frac{1}{2}(A\,u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T.
\end{aligned}$$

Multiplicando a última desigualdade por 2, resulta que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|u_0|^2 &\geq \frac{1}{2}|u_\lambda(t)|^2 + A\,u_\lambda(T), u_\lambda(T))\,T + \left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right|^2 \frac{T^2}{2} \\
&\geq \left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right|^2 \frac{T^2}{2},
\end{aligned}$$

logo,

$$\left|\frac{d\,u_\lambda(T)}{dt}\right| \leq \frac{1}{T}|u_0|\,; \quad \forall\, T > 0. \tag{1.45}$$

Assim, se conclui (1.39) passando o limite quando $\lambda \to 0$ (note que $\frac{d\,u_\lambda}{dt} \to \frac{d\,u}{dt}$ graças a quinta etapa da demonstração do Teorema de Hille-Yosida).

Segunda etapa:

Suponha agora que $u_0 \in H$. Seja $\{u_{0n}\}$ uma sucessão em $D(A)$ tal que $u_{0n} \to u_0$ (lembre-se que isto é possível, porque $\overline{D(A)} = H$).

Seja u_n a solução da equação

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u_n}{dt} + A\,u_n = 0 \quad \text{em } [0, +\infty) \\ u_n(0) = u_{0n}. \end{cases}$$

Sabemos do Teorema (1.6) que

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0n} - u_{0m}|\,; \quad \forall\, m, n;\, t \geq 0;$$

e da primeira etapa que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{d\,u_n(t)}{dt} = -\frac{d\,u_m(t)}{dt}\right| &= \left|\frac{d}{dt}(u_n(t) - u_m(t))\right| \\
&\leq \frac{1}{t}|u_n(t) - u_m(t)| \\
&\leq \frac{1}{t}|u_{0n}(t) - u_{0m}(t)|\,, \quad \forall\, m, n; \forall\, t > 0,
\end{aligned}$$

donde $u_n(t)$ converge uniformemente a um limite $u(t)$ sobre $[0, +\infty)$ e $\frac{d\,u_n}{dt}$ converge uniformente sobre cada intervalo $[\delta, +\infty), \delta > 0$ (a desigualdade anterior justifica porque t não pode ser nulo). Assim, pela arbitrariedade de δ, obtemos que

$$u \in C([0, +\infty); H) \cap C^1((0, +\infty); H).$$

Como A é fechado, temos que $G(A) = \{(u, A\,u);\, u \in D(A)\}$ é fechado, assim, $u \in D(A)$ para todo $t > 0$ e tem-se $\frac{d\,u}{dt} + A\,u = 0$ sobre $(0, +\infty)$.

Demonstração de (1.38): Demonstraremos por indução sobre $k \geq 2$ que

$$u \in C^{k-j}((0, +\infty); D(A^j)),\, \forall\, j = 0, 1, \ldots, k. \tag{1.46}$$

Admitamos que o resultado em (1.46) é válido para $k - 1$, ou seja,

$$u \in C((0, +\infty); D(A^{k-1}). \tag{1.47}$$

Para obtermos (1.46) para k, pelo Teorema (1.7), basta mostrar que

$$u \in C((0, +\infty); D(A^k)). \tag{1.48}$$

De fato, em um espaço de Hilbert $\widetilde{H} = D(A^{k-1})$, vamos então considerar o operador $\widetilde{A} : D(\widetilde{A}) \subset \widetilde{H} \to \widetilde{H}$ definido por

$$\begin{cases} D(\widetilde{A}) = D(A^k) \\ \widetilde{A} = A. \end{cases}$$

Veja que $\widetilde{A}$ é maximal monótono e simétrico.

Com efeito,

- $\widetilde{A}$ é maximal.

De fato, tome $f \in D(\widetilde{A}) \subset \widetilde{H}$. Sendo $A = \widetilde{A}$ maximal, existe $u' \in D(A^{k-1})$ tal que

$$u' + Au' = f.$$

Como $u', Au' \in D(A^{k-1})$, segue que $Au' \in D(A^k)$, o decorre que $u' \in D(\widetilde{A})$.

Então, obtemos que

$$u' + \widetilde{A}u' = u' + Au' = f,$$

fato este que nos garante que $\widetilde{A}$ é maximal.

- $\widetilde{A}$ é monótono.

Note que do fato que $A^j\, u \in D(A)$, resulta que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A}\, u, u)_{D(\widetilde{A})} &= (A\, u, u)_{D(A^k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (A^{j+1}\, u, A^j\, u) \\
&= \sum_{j=0}^{k} (A(A^j\, u), A^j\, u) \geq 0.
\end{aligned}$$

- A é simétrico.

Usando o fato que $\widetilde{A}$ é auto-adjunto, vem que

$$\begin{aligned}
(\widetilde{A}\,u, u)_{D(\widetilde{A})} &= (A\,u, v)_{D(A^k)} \\
&= \sum_{j=0}^{k} (A^{j+1}\,u, A^j\,v) \\
&= \sum_{j=0}^{k} (A(A^j\,u), A^j\,v) \\
&= \sum_{j=0}^{k} (A\,u, A(A^j\,u)) \\
&= (u, A\,v)_{D(A^k)} \\
&= (u, \widetilde{A}\,v)_{D(\widetilde{A})}\,; \quad \forall\, u, v \in D(\widetilde{A}).
\end{aligned}$$

De posse disto, pela proposição (1.19), temos que A é auto-adjunto em $\widetilde{H}$. Assim, aplicando a primeira parte deste Teorema em $\widetilde{H}$ para o operador $\widetilde{A}$ temos que para todo $v_0 \in \widetilde{H}$, existe uma única solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v}{dt} + A\,v = 0 \quad \text{ em } (0, +\infty) \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

com

$$v \in C([0, +\infty); \widetilde{H}) \cap C^1((0, +\infty); \widetilde{H}) \cap C(0, +\infty; D(\widetilde{A})).$$

Nomeando $v_0 = u(\varepsilon), \varepsilon > 0$ o que é possível, pois $v_0 \in \widetilde{H}$, graças a (1.47).

Sendo assim, veja que

$$\left.\begin{aligned} & u(\varepsilon) = v_0 \in D(A^{k-1}) \\ & A(u(\varepsilon)) = A\,v_0 \in D(A^{k-1}) \end{aligned}\right\} \Rightarrow u \in D(A^k)$$

ou seja, $u \in C((\varepsilon, +\infty); D(A^k))$.

Pela arbitrariedade de ε, obtemos finalmente (1.48). $\square$

1.4 Semigrupos

Sejam H um espaço de Hilbert e $A : H \to H$ um operador linear e contínuo. Vamos considerar o problema de Cauchy abstrato

$$(\star) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = 0 \quad \text{em } H\,, \forall\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \quad \text{em } H. \end{cases}$$

O problema de dado inicial descrito em $(\star)$ possui uma única solução para $t \geq 0$ dada por $u(t) = e^{t\,(-A)}\,u_0$, onde

$$e^{-A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-A)^k}{k!}.$$

Todavia, há diversas equações diferenciais parciais de evolução que possuem a natureza de $(\star)$, onde A é um operador linear de H não necessariamente contínuo. No âmbito de elucidar tais problemas, surge uma questão natural: "Existem operadores de H, com propriedades análogas às da aplicação exponencial e^A, que resolvem $(\star)$ com A não necessariamente contínuo?"

Para responder tal pergunta, foi desenvolvida a Teoria de Semigrupos, que será o nosso próximo objeto de estudo. No entanto, não estudaremos Semigrupos no ponto de vista de [14], dentre outros, onde A é definido como um gerador infinitesimal do semigrupo S, mas estudaremos que o semigrupo S é gerado por operador maximal monótono A, em que muitas vezes, é mais atrativo que o citado anteriormente. Assim, com tal enfoque unindo os resultados da seção anterior, juntamente com os resultados a seguir, estudamos a existência, unicidade, regularidade, comportamento e blow-up, aplicações de soluções de equações de evolução não lineares, em que as aplicações (equação do calor, da onda e de Schrödinger) será vista na próxima seção.

Usando o Teorema de Hille-Yosida, podemos definir para $t \geq 0$, o seguinte operador linear:

$$\begin{aligned} S(t) : D(A) &\rightarrow D(A) \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

Por Hille-Yosida, temos

$$|S(t)u_0| = |u(t)| \leq |u_0| \, ; \quad \forall \, v \in D(A). \tag{1.49}$$

Definamos

$$\begin{aligned} \widetilde{S}(t) : H &\rightarrow H \\ u_0 &\mapsto \widetilde{S}(t)u_0 \end{aligned}$$

Como $\overline{D(A)} = H$, existem u_n e v_n em $D(A)$ tal que $u_n \rightarrow u_0$ em H e $v_n \rightarrow v_0$ em H. Logo,

$$|S(t)u_n - S(t)v_n| = |S(t) \underbrace{(u_n - v_n)}_{\in D(A)}| \leq |u_n - v_n|.$$

Em virtude que $(u_n - v_n) \in D(A)$, podemos usar o fato mencionado em (1.49). Assim, fazendo $n \rightarrow +\infty$, teremos

$$|\widetilde{S}(t)u_n - \widetilde{S}(t)v_n| \leq |u_0 - v_0|,$$

o que nos diz que $\widetilde{S}(t)$ é uma contração em H. Por convenção , denotaremos de agora em diante, $\widetilde{S}(t) = S(t)$, isto é, $S(t) \in \mathcal{L}(H)$.

Definição 1.5. *S(t)é chamado <u>Semigrupo</u> gerado por $-A$.*

Veja que $S(t)$ é gerado por $-A$ decorre do fato que

$$\lim_{h\to 0}\frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{u(h)-u(0)}{h} = \frac{d}{dt}u(0) = -Au(0) = -Au_0.$$

Também, $S(t) \in \mathcal{L}(H)$.

De fato, dados $u_0, v_0 \in H$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se:

$S(t)u_0 = u(t)$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au(t) = 0\,; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.50}$$

E $\lambda S(t)u_0 = v(t)$, solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v(t)}{dt} + Av(t) = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ v(0) = v_0 \end{cases} \tag{1.51}$$

Somando as equações (1.50) e (1.51) teremos

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(u+v) + A(u+v) = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) + v(0) = u_0 + v_0 \end{cases} \tag{1.52}$$

$$\therefore\; S(t)(u_0 + \lambda v_0) = u(t) + v(t) = S(t)u_0 + \lambda S(t)v_0;\ \forall\, t \geq 0.$$

Ademais, $S(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 1.20. *Seja $S(t) \in \mathcal{L}(H)$, semigrupo gerado por $-A$. Para todo $t \geq 0$, temos:*

i) $\quad S(0) = I_H$ *e* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2);\ \forall\, t_1, t_2 \geq 0.$

ii) $\quad |S(t)u_0| \leq |u_0|\,, \quad \forall\, u_0 \in H, \quad \forall\, t \geq 0.$

iii) $\quad \lim_{t\to 0} |S(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall\, u_0 \in H.$

Demonstração: $i)$ Como $u_0 = u(0) := S(0)u_0$, temos $(I_H - S(0))u_0 = 0$; para todo $u_0 \in H$.

Então,

$$(I_H - S(0)) = 0 \Longrightarrow S(0) = I_H.$$

Agora seja $u(t) = S(t)u_0$ solução do problema abaixo:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ u(0) = u_0 \in D(A). \end{cases} \tag{1.53}$$

Definamos $v(t) = S(t)v_0 = S(t)S(t_2)u_0$, onde $t_2 \geq 0$ fixado. Temos desta forma que $v(t_1) = S(t_1)u_0 = S(t_1)S(t_2)u_0$ que é solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v}{dt} + Av = 0; \quad \forall\, t > 0 \\ v(0) = u(t_2) = S(t)u_0. \end{cases}$$

Devemos mostrar que $v(t) = u(t + t_2)$ é solução de (1.53), para todo $t \geq 0$. Veja que

$$\frac{d}{dt}u(t + t_2) + Au(t + t_2) = -Au(t + t_2) + Au(t + t_2) = 0$$

$$\therefore\ v(t) = u(t + t_2); \forall\, t \geq 0.$$

Em particular tomando $t = t_1 \in H$, teremos o desejado.

$ii)$ Tome $\{u_n\} \subset D(A)$ onde $u_n \to u_0$ em H, já que $\overline{D(A)} = H$.

Então,

$$|S(t)u_n| \leq |u_n|.$$

Fazendo n tender ao infinito, segue que

$$|S(t)u_0| \leq |u_0|; \forall\, u_0 \in H, t \geq 0.$$

iii) Temos pelo teorema (1.6) que $u \in C([0,T];D(A)) \cap C^1([0,T];H)$.

Tome $t_n \to t_0$ em $[0,T]$. Logo,

$$S(t_n)u_0 = u(t_n) \longrightarrow u(t_0) = S(t_0); n \to +\infty.$$

Pondo, $t_0 = 0$, resulta que

$$|S(t)u_0 - u_0| \longrightarrow 0, \text{ quando } t \to 0.$$

$\square$

A seguir, mostraremos que através da teoria de semigrupos, podemos obter a recíproca do Teorema de Hille-Yosida, ou seja, podemos estabelecer uma correspondência bijetiva entre operadores maximais monótonos e semigrupos contínuos de contrações.

Teorema 1.9. *Se $S(t)$ é semigrupo contínuo de contrações, então existe um único operador maximal monótono A em H, tal que $(S(t))_{t\geq 0}$ é o semigrupo gerado por $-A$.*

Demonstração: Seja $S(t)$ um semigrupo de contrações, onde $u(t) := S(t)u_0$ é solução do seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + A\,u = 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

onde A é um operador maximal monótono.

Temos que para todo dado inicial em $D(A)$

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u_0 - u_0}{h} = \frac{du}{dt} = -A\,u_0.$$

Por outro lado, seja $-B$ o gerador de $S(t)$ em H, então pelo limite acima temos que $D(A) \subset D(B)$ e

$$\begin{aligned}(u - S(h)u - (v - S(t)v), u - v) &= -(S(h)(u - v), u - v) + |u - v|^2 \\ &\geq -|S(h)||u - v|^2 + |u - v|^2 \\ &\geq -|u - v|^2 + |u - v|^2 = 0\end{aligned}$$

para todo $u, v \in H$.

Para $t = 0$ e multiplicando ambos os lados da desigualdade anterior por $\frac{1}{h}$, onde $h > 0$, temos

$$\left(\frac{u_0 - S(h)u_0}{h} - (\frac{v_0 - S(t)v_0}{h}), u_0 - v_0\right) \geq 0;$$

aplicando o limite quando h tende a zero pela direita, obtém-se que

$$(B(u_0 - v_0), u_0 - v_0) \geq 0 \quad \forall\, u_0, v_0 \in D(B),$$

o que nos diz que B é monótono.

Portanto, como $D(A) \subset D(B)$ e A é maximal monótono, resulta que $B = A$. □

A seguir, veremos outras propriedades de semigrupos, dentre elas com respeito a diferencial de um semigrupo.

Proposição 1.21. *Seja $S(t)$ um semigrupo gerado por $-A$. Temos as seguintes propriedades:*

i) *Se $u_0 \in D(A)$, então $S(t)u_0 \in D(A)$*

e ainda,

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

ii) *Se* $u_0 \in H$, *então* $\int_0^t S(s)u_0\, ds \in D(A), \forall\, t \geq 0.$

iii) $A\left(\int_0^t S(s)u_0\, ds\right) = S(t)u_0 - u_0.$

Demonstração: *i)* Inicialmente, designemos por A_h um operador linear limitado, onde $A_h = \frac{S(h)-I}{h}$, $h > 0$.

Assim, seja $t > 0$ fixado. Para todo $h > 0$, pelo mencionado acima, temos

$$\frac{S(t+h)-S(t)}{h}u_0 = -A_h S(t)u_0 = S(t)A_h u_0.$$

Se $u_0 \in D(A)$, o membro da direita desta igualdade tem um limite quando $h \to 0$, o mesmo ocorrendo com os outros dois, logo $S(t)u_0 \in D(A)$ e

$$\frac{d^+}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0 = S(t)Au_0. \tag{1.54}$$

Por outro lado, para $0 < h < t$, temos

$$\frac{S(t-h)-S(t)}{-h}u_0 = S(t-h)u_0 = S(t-h)(A_h - Au_0) + S(t-h)Au_0.$$

Como, S é uma contração, temos que $|S(t-s)| \leq 1$, para $h \in (0,t)$ e do fato que $u_0 \in D(A)$ vem que $S(t-h)((A_h - A)u_0)$ tende a zero quando h tende a zero e assim, $S(t-h)Au_0$ tende a Au_0, também quando h tende a zero, logo,

$$\frac{d^-}{dt}s(t)u_0 = \lim_{h\to 0}\frac{S(t-h)-S(t)}{-h}u_0 = S(t)Au_0 \tag{1.55}$$

De (1.54) e (1.55) teremos *i)*.

ii) Como $A_h = \frac{S(h)-I}{h}$, então, $A_h S(s)u_0 = \frac{S(h)-I}{h}S(s)u_0$. desta forma,

$$\frac{1}{h}\int_0^t (S(h)-I)S(s)u_0\, ds = \frac{1}{h}\int_0^t \underbrace{S(h)S(s)}_{S(h+s)}u_0\, ds - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)u_0\, ds.$$

Fazendo uma mudança de variáveis , ou seja $h + s = w$, na primeira integral do lado direito da igualdade, vem que

$$\frac{1}{h}\int_0^t (S(h) - I)S(s)u_0\, ds = \frac{1}{h}\int_h^{t+h} S(w)u_0\, dw - \frac{1}{h}\int_0^t S(s)u_0\, ds.$$

Recordemos agora, o Teorema da Média:

Teorema 1.10. *Seja f contínua em E. Então temos que*

$$\int_a^b f(t)dt = (b-a)\widetilde{x},$$

onde $\widetilde{x} \in \overline{conv \quad f(a,b)}$, que é o fecho do conjunto das combinações convexas dos elementos do conjunto de valores de f em (a,b).

E ainda, Para todo $t \in [a,b]$ tem-se

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_t^{t+h} f(\xi)d\xi = f(t). \tag{1.56}$$

Demonstração: Com efeito, considere

$$|\pi| = \max_{1\le i\le n}\{t_i - t_{i-1}\}$$

, logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt &= \frac{1}{b-a}\lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})f(\xi_i)\\ &= \lim_{|\pi|\to 0}\sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})}{b-a}f(\xi_i).\end{aligned}$$

Mas,

$$\frac{(t_i - t_{i-1})}{b-a} > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n \frac{(t_i - t_{i-1})}{b-a} = 1\,,$$

donde vem que

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)dt \in \overline{conv \quad f(a,b)},$$

o que prova a primeira parte.

Provaremos a seguir (1.10). Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ tem-se $||f(\xi) - f(t)|| \leq \varepsilon$ para $|\xi - t|$ suficientemente pequeno, uma vez que por hipótese f é contínua. Desta forma, designando por $B(x,\xi)$, a bola aberta de centro x e raio ξ temos pela primeira parte que

$$\frac{1}{b-a}\int_t^{t+h} f(\xi)d\xi \in \overline{B(f(t),\varepsilon)},$$

para h suficientemente pequeno. Tomando limite, quando $h \to 0$ temos (1.10) $\square$

Usando o Teorema da Média, teremos que o segundo lado da igualdade acima tende a $S(t)u_0 - \underbrace{S(0)}_{I}u_0$, quando h tende a zero, enquanto que o primeiro tende a $A\left(\int_0^t S(s)u_0\, ds\right)$, portanto,

$$A\left(\int_0^t S(s)u_0\, ds\right) = S(t)u_0 - u_0.$$

iii) Integrando *i)* de s a t temos

$$\begin{aligned} S(t)u_0 - S(t)u_0 &= \int_s^t \frac{d}{dt}S(s)u_0\, ds \\ &= \int_s^t AS(s)u_0\, ds \\ &= \int_s^t S(s)Au_0\, ds. \end{aligned}$$

$\square$

Definição 1.6. *Se A e $-A$ são operadores maximais monótonos, nós podemos definir $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ semigrupos gerados por A e $-A$, respectivamente.*

Definamos

$$S_A(t) = S(t)\,; \quad t \geq 0;$$
$$S_{-A}(t) = S(-t)\,; \quad t \leq 0.$$

Claramente, $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ são semigrupos, pois são restrições do semigrupo $S(t)$.

Proposição 1.22. *Sejam $S_A(t)$ e $S_{-A}(t)$ definidos acima. Então, temos que*

$$S_A(t) = [S_{-A}(t)]^{-1}.$$

Demonstração: De fato, ponhamos $T(t) = S_A(t)\,S_{-A}(t)$. Temos que T é um semigrupo, pois

i) $T(0) = S_A(0)S_{-A}(0) = S(0)\,S(0) = I$.

ii) Para $t_1, t_2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} T(t_1+t_2) &= S_A(t_1+t_2)\,S_{-A}(-t_1-t_2) \\ &= S(t_1+t_2)S(-t_1-t_2) \\ &= S(t_1)S(-t_1)S(t_2)S(-t_2) = T(t_1)T(t_2). \end{aligned}$$

Se $t_1, t_2 \leq 0$.

$$\begin{aligned} T(t_1+t_2) &= S_A(-t_1-t_2)\,S_{-A}(t_1+t_2) \\ &= S(-t_1-t_2)\,S(t_1+t_2) \\ &= S(t_1)S(-t_1)S(t_2)S(-t_2) = T(t_1)T(t_2). \end{aligned}$$

Se $t_1 > 0$, $t_2 < 0$ e $t_1 + t_2 > 0$.

$$\begin{aligned} T(t_1+t_2) &= S_A(t_1+t_2)\,S_{-A}(-t_1-t_2) \\ &= S(t_1)S(-t_1)S(t_2)S(-t_2) = T(t_1)T(t_2). \end{aligned}$$

Finalmente, $t_1 > 0$, $t_2 < 0$ e $t_1 + t_2 < 0$.

$$\begin{aligned} T(t_1 + t_2) &= S_A(-t_1 - t_2)\, S_{-A}(t_1 + t_2) \\ &= S(t_1)S(-t_1)S(t_2)S(-t_2) = T(t_1)T(t_2). \end{aligned}$$

$iii)$ Veja que

$$\begin{aligned} ||T(t)u_0 - u_0|| &= ||S(t)S(-t)u_0 - S(t)u_0 + S(t)u_0 - u_0|| \\ &\leq ||S(t)||\,||S(-t)u_0 - u_0|| + ||S(t)u_0 - u_0|| \to 0, \end{aligned}$$

quando $t \to 0^+$.

Por outro lado, como $u_0 \in D(A) = D(-A)$, e $h > 0$, vem que

$$\begin{aligned} \frac{T(h)u_0 - u_0}{h} &= \frac{S(t)S(-t)u_0 - u_0}{h} \\ &= S(t)\,\frac{S(-t)u_0 - u_0}{h} + \frac{S(t)u_0 - u_0}{h} \to -A\,u_0 + A\,u_0 = 0 \end{aligned}$$

quando h tende a zero pela direita, para todo dado inicial $u_0 \in D(A)$.

Então se T é gerado por $-B$ (veja que $-B$ é gerado pelo limite de elementos de $D(A)$), temos que $B(u_0) = 0$, para todo $u_0 \in D(A)$. Note que $D(A) \subset D(B)$ e como $\overline{D(A)} = H$, existe $\{u_\nu\} \subset D(A)$ tal que $u_\nu \to u$ em H. Mas, do fato acima, temos que $B\,u_\nu = 0$, para todo ν natural e portanto $B\,u_\nu \to 0$. Sendo B maximal monótono, B é fechado e assim, $B(u_0) = 0$, para todo $u_0 \in D(B)$.

Pela propriedade $iii)$ da proposição (1.21), temos que

$$T\,u_0 - u_0 = B \int_0^t S(\tau)\,d\tau = 0,$$

ou seja, $T\,u_0 = u_0$, para todo $u_0 \in H$ e desta forma, temos que

$$S_A(t)S_{-A}(t) = S_{-A}(t)S_A(t) = I,$$

o que implica que $T(t) = I$ para todo t não-negativo. A relação acima nos diz que $S_A(t)$ é inversível e portanto,

$$S_A(t) = [S_{-A}(t)]^{-1}.$$

para todo $t \geq 0$. $\square$

Proposição 1.23. *Se A é maximal monótono, é necessário e suficiente que A^* também seja maximal monótono.*

Demonstração: Faremos apenas uma implicação, pois a outra é análoga.

Com efeito, seja A maximal monótono. Observe que

$$(A^*\, u, u) = (u, A\, u) = (A\, u, u) \geq 0 \quad \forall\, u \in D(A^*).$$

Por outro lado, suponha que $R(I + A^*) \neq H$. Como H é Hilbert e identificando H com o seu dual, temos que

$$H = R(I \pm A^*) \oplus [R(I \pm A^*)]^{\perp}.$$

Logo, existe $z \in R(I + A^*)$, tal que

$$(u + A^*\, u, z) = 0; \quad \forall\, u \in D(A^*).$$

Veja, também que

$$(u, z) = -(A^*\, u, z) = -(u, A\, z).$$

Então, $z \in D(A)$ e $A\, z = z$, assim, tomando em particular, $u = z$ obtemos:

$$(A\, u, u) = (u, A\, u) = -|u|^2 \leq 0,$$

o que é uma contradição, pois A é monótono e portanto, $R(I + A^*) = H$, isto é, A^* é maximal monótono. $\square$

Proposição 1.24. *Seja $S(t)$ semigrupo gerado por $-A$. Se A^* existe, então $S^*(t) = S(t)^*$ é o semigrupo gerado por $-A^*$.*

Demonstração: Primeiro como A é maximal monótono, então A^* é maximal monótono. Logo, seja $R(t)$ o semigrupo gerado por $-A^*$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{R(h)u_0 - u_0}{h} &= -A^* u_0 \\
&= (A\, u_0)^* \\
&= \left(\lim_{h\to 0} \frac{s(h)u_0 - u_0}{h}\right)^* \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{S(h)^* u_0 - u_0}{h}.
\end{aligned}$$

Então, $R(t)$ e $S(t)^*$ são gerados por $-A^*$, isto é,

$$u(t) = R(t)u_0 \quad \text{e} \quad u(t) = S(t)^* u_0.$$

Mas pelo Teorema de Hille-Yosida, a solução $u(t)$ é única, logo $R(t) = S(t)^*$, o que prova o desejado. □

Proposição 1.25. *Considere $S_A(t), S_{-A}(t)$ definidos em (1.6). Então:*

i) $S(0) = I$;

ii) $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2); \quad \forall\, t_1, t_2 \in \mathbb{R}$;

iii) $|S(t)u_0| = |u_0|; \quad \forall\, u_0 \in H, \forall\, t \in \mathbb{R}$.

$S(t)$ é dito <u>grupo de operadores unitários</u> sobre H.

Demonstração:

i) Observe que $S(0) = S_A(0) = I$ e $S(0) = S_{-A}(0) = I$.

ii) Dividamos em quatro casos:

$a)$ Se $t_1, t_2 \geq 0$.

$$S(t_1 + t_2) = S_A(t_1)S_A(t_2) = S(t_1)S(t_2).$$

$b)$ Se $t_1, t_2 \leq 0$.

$$S(t_1 + t_2) = S_{-A}(t_1)S_{-A}(t_2) = S(t_1)S(t_2).$$

$c)$ Se $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0$ com $t_1 + t_2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} S(t_1 + t_2) &= S_A(t_1 + t_2) \\ &= S(t_1 + t_2) = S_A(t_1 + t_2)S_A(-t_2)S_A(-t_2)^{-1} \\ &= S(t_1 + t_2) \\ &= S_A(t_1)S_{-A}(t_2) = S(t_1)S(t_2), \end{aligned}$$

onde a última igualdade é devido a proposição (1.22).

$d)$ Se tivermos $t_1 \geq 0, t_2 \leq 0$ com $t_1 + t_2 \leq 0$.

Novamente pela proposição (1.22), temos

$$\begin{aligned} S(t_1 + t_2) &= S_{-A}(t_+ t_2) \\ &= S_{-A}(t_+ t_2)S_{-A}(-t_1)S_{-A}(-t_1)^{-1} \\ &= S_{-A}(t_2)S_{-A}(-(-t_1)) \\ &= S_{-A}(t_2)S_A(t_1) = S(t_1)S(t_2). \end{aligned}$$

$iii)$ Temos que

$$\lim_{h \to 0^+} ||S(h)u_0 - u_0|| = \lim_{h \to 0^+} ||S_A(h)u_0 - u_0|| = 0 \, ; \quad \forall \, u_0 \in H;$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} ||S(h)u_0 - u_0|| = \lim_{-h \to 0^+} ||S_{-A}(h)u_0 - u_0|| = 0 \, ; \quad \forall \, u_0 \in H;$$

Note que

$$|\,||S(t)u_0||_H - ||u_0||_H\,| \leq ||S(t)u_0 - u_0||_H \to 0,$$

onde temos que

$$||S(t)u_0||_H = ||u_0||_H.$$

Mostremos agora que $S(t)$ é um grupo unitário. Lembremos que um semigrupo é unitário se $T^*(t) = T(t)^{-1}$, se $t \geq 0$. Assim,

$$\begin{aligned}(u_0, u_0) = ||u_0||_H^2 &= ||S(t)u_0||_H^2 \\ &= (S(t)u_0, S(t)u_0) \\ &= (u_0, S(t)^*S(t)u_0),\end{aligned}$$

para todo $u_0 \in H$. Logo, $S^*(t) = S(t)^{-1}$. □

Definição 1.7. *A é <u>anti-adjunto</u> se A=$-A$.*

Proposição 1.26. *A é anti-adjunto se, e somente se, A e $-A$ são operadores maximais monótonos.*

Demonstração: Sejam A e $-A$ operadores maximais monótonos. Pela proposição anterior, $S(t)$ é um grupo unitário. Também, pela proposição (1.24), $-A^*$ gera um semigrupo $S^*_{A^*}(h)$.

Logo,

$$S^*_{A^*}(h) = S(h)^* = S(h)^{-1} = S_{A^*}(h)^{-1} = S_{-A^*}(h),$$

onde decorre que

$$\frac{S_{A^*}(h) - I}{h} = \frac{S_{-A}(h) - I}{h},$$

donde temos que $D(A) = D(A^*)$. De fato, aplicando $u_0 \in D(A^*)$, na igualdade anterior, pela proposição (1.21), item i), temos que $S_{A^*}(t)u_0 \in D(A)$, e conseqüentemente, $S_{-A}(t)u_0 \in D(A)$ logo, $D(A^*) \subset D(-A) = D(A)$. Por outro lado, se na igualdade anterior, aplicarmos $u_0 \in D(A)$, teremos a outra inclusão. Veja que ao tomarmos o limite, teremos que $A^* = -A$, para todo $u_0 \in D(A)$, portanto, $A^* = -A$.

Recíprocamente, seja agora $A^* = -A$. Devemos mostrar que A e $-A$ são operadores maximais monótonos.

De fato, seja $u \in D(A)$, então

$$\begin{aligned}
(A\,u, u) &= (u, A^*\,u, u) \\
&= (u, -A\,u) \\
&= -(A\,u, u),
\end{aligned}$$

então $(A\,u, u) = 0$. De forma análoga, $(-A\,u, u) = 0$, o que nos diz que $\pm A$ são monótonos.

Resta mostrar que $R(I \pm A) = H$.

Com efeito, para $u_0 \in D(A)$, temos a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned}
||u_0^2|| &= ((I \pm A)u_0, u_0) + (\mp A\,u_0, u_0) \\
&= (I \pm A)u_0, u_0) \\
&\leq ||I \pm A||\,||u_0||^2,
\end{aligned}$$

logo,

$$||u_0|| \leq ||I \pm A||\,, \quad \forall\, u_0 \in D(A). \tag{1.57}$$

Conforme sabemos, A^* é um operador fechado e como $A = -A^*$, então $\pm A$ são igualmente fechados e por conseguinte, $I \pm A$ o são.

Afirmamos que $R(I \pm A)$ são fechados em H.

Com efeito, seja $\{u_\nu\} \subset R(I \pm A)$, onde

$$v_\nu \to v \quad \text{em } H. \tag{1.58}$$

Ora, para cada $\nu \in \mathbb{N}$, existe $u_\nu \in D(A)$, tal que $v_\nu = R(I \pm A)\, u_\nu$.

Mas de (1.57), para $\nu, \mu \in \mathbb{N}$ temos através de (1.58) que

$$||u_\nu - u_\mu||_H \leq ||(I \pm A)u_\nu - (I \pm A)u_\mu||_H = ||v_\nu - v_\mu|| \to 0;$$

logo, $\{u_\nu\}$ é de Cauchy em H e portanto, existe $u \in H$ tal que

$$u_\nu \to u \quad \text{em } H. \tag{1.59}$$

Em contrapartida, temos de (1.58) que

$$(I \pm A)\, u_\nu \to v. \tag{1.60}$$

Sendo $I \pm A$ fechados, de (1.59) e (1.60) resulta que $u \in D(A)$ e $v = (I \pm A)\, u$, o que prova que $R(I \pm A)$ são fechados em H. Obtemos disto e do fato que H é Hilbert que

$$H = R(I \pm A) \oplus [R(I \pm A)]^\perp, \tag{1.61}$$

Mostremos que $[R(I \pm A)]^\perp = \{0\}$.

De fato, trivialmente $\{0\} \subset [R(I \pm A)]^\perp$. Por outro lado, seja $v \in [R(I \pm A)]^\perp$, então,

$$(v, (I \pm A)u) = 0,$$

logo

$$(\pm v, u) = (u, A\, u) = (A^*\, v, u)\, ; \quad \forall\, u \in D(A). \tag{1.62}$$

Da igualdade acima, vem que $\pm v \in D(A)$ e como $D(A) = D(A^*)$ e $(A\, u, u) = 0$, de (1.62) para $u = v$ vem que

$$\pm||v||^2 = (v, A\, v) = 0,$$

isto é, $v = 0$, o que prova que $[R(I \pm A)]^{\perp} = \{0\}$.

Portanto, $R(I \pm A) = H$, o que mostra que $\pm A$ são operadores maximais monótonos. $\square$

Corolário 1.2. *Se A é anti-adjunto, então para todo $u \in D(A)$ temos que*

$$||u(t)||^2 = cte.$$

Demonstração: De fato, pela recíproca da demonstração da proposição anterior, obtém-se que $(A\,u, u) = 0$ para todo $u \in D(A)$. Assim,

$$0 = (-A\,u, u) = (\frac{du}{dt}, u) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u, u),$$

donde resulta que $||u(t)||^2$ é constante. $\square$

1.5 Equação Linear Não-Homogênea

Nós estudaremos agora o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + Au = f(t); \qquad \text{em } [0, T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.63}$$

Definição 1.8. *Se $u \in C^1([0, T], H) \cap C([0, T], D(A))$, dizemos que u é solução <u>clássica</u> de (1.63).*

Proposição 1.27. *se u é uma solução clássica de (1.63), u é dado da seguinte forma:*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t - s)f(s)ds.$$

Demonstração: De fato, ponhamos $g(s) = \int_0^t S(t-s)u(s)\,ds, \quad 0 \leq s \leq t.$

Lembremos da proposição (1.21) que

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

Derivando g tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}g(s) = \frac{d}{dt}\left(S(t-s)u(s)\right) \quad &= \quad \frac{d}{dt}S(t-s)u(s) + S(t-s)\frac{d\,u(s)}{dt} \\ &\underbrace{=}_{(1.63)} \quad S(t-s)Au(s) + S(t-s)\left(f(t) - Au(s)\right) \\ &= \quad S(t-s)f(s) \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t, $t \in (0, +\infty)$, obtemos que

$$\int_0^t \frac{d}{dt}g(s)ds = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

Pela proposição (2.13), segue que

$$g(s)|_0^t = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

ou seja,

$$S(0)u(t) - S(t)u(0) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds,$$

Portanto,

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)f(s)ds.$$

$\square$

Definição 1.9. *Se $u \in C([0,T];H)$, então u é dita solução* <u>*generalizada*</u> *de (1.63), que verifica a fórmula integral da proposição (1.27).*

Em particular, toda solução clássica é generalizada, mas a recíproca não é verdadeira. Por isso, estaremos interessados em encontrar certas condições para que uma solução generalizada seja clássica, donde devemos impor algumas hipóteses sobre f ou A.

Teorema 1.11. *Se $f \in C^1([0,T];H)$ e $u_0 \in D(A)$, então existe uma solução generalizada e ela é clássica.*

Demonstração: De início, definamos $v(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$ e mostraremos que

$$u(t) = S(t)u_0 + v(s), \tag{1.64}$$

é a solução procurada.

Com efeito, lembrando que $A_h = \frac{S(h)-I}{h}$, temos

$$\begin{aligned}
-A_h v(t) &= \frac{(S(h)-I)}{h} v(t) \\
&= \frac{(S(h)-I)}{h} \int_0^t S(t-s)f(s)ds \\
&= \frac{1}{h}\int_0^t S(t+h-s)f(s)ds + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\
&- \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t-s)f(s)ds - \frac{1}{h}v(t) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}v(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds,
\end{aligned}$$

Ou ainda,

$$\begin{aligned}
-A_h v(t) &= \frac{1}{h}\int_0^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds - \frac{1}{h}v(t) - \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,ds \\
&= \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)\,ds,
\end{aligned}$$

o que resulta que

$$-A_h v(t) = \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds. \tag{1.65}$$

Se $f \in C^1([0,T];H)$, segue que $v \in C^1([0,T];H)$, o que nos diz que a solução a ser obtida em (1.64) é generalizada.

Assim, o segundo membro de (1.65) tem um limite quando $h \to 0^+$, $\forall\, t > 0$. Em outras palavras,

$$\begin{aligned}
-Av(t) &= \lim_{h\to 0^+} A_h v(t) \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{v(t+h)-v(t)}{h} - \lim_{h\to 0^+} \int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds \\
&\underbrace{=}_{(1.10)} \frac{d}{dt}v(t) - S(0)f(t) \\
&= \frac{d}{dt}v(t) - f(t).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}v(t) + Av(t) = \frac{d}{dt}v(t) - \frac{d}{dt}v(t) + f(t) = f(t),$$

ou seja, satisfaz o problema (1.63). Como, $u_0 \in D(A)$, temos que $u(t) \in C([0,T];D(A))$, isto é, a solução é clássica. Pela proposição (1.27), temos que u é da forma (1.64). $\square$

Teorema 1.12. *Se existe $g \in L^1([0,T];H)$ tal que $f(t) = f(0) + \int_0^t g(s)ds$ e $u_0 \in D(A)$, então existe uma solução clássica de (1.63).*

Demonstração: De fato, se $g \in L^1([0,T];H)$ então $S(t-s)g(s) \in L^1([0,T];H)$ e portanto integrável. Definamos $w(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$. Sendo $g \in L^1([0,T];H)$, temos que $w \in C([0,T];H)$. Por uma mudança de variáveis, assim, nós podemos então obter que $w(s) = \int_0^t S(s)g(t-s)ds$.

Derivando $w(s)$, teremos

$$w'(s) = S(t)g(0) + \int_0^t S(s)g'(t-s)ds.$$

Por hipótese, $g' = f$ q.s. então $\int_0^t S(s)g'(t-s)ds$ é contínua (já que $f : H \to H$ é contínua), desta forma, resulta que $w \in C^1([0,T];H)$. Pelo teorema (1.11), existe uma solução clássica de (1.63). $\square$

Para demonstrarmos o próximo teorema, precisamos dos seguintes lemas:

Lema 1.10. *Se f é Lipschitz Contínua de f em $[0,T]$, isto é,*

$$||f(t_1) - f(t_2)||_H \leq |t_1 - t_2|, \forall\, t_1, t_2 \in [0,T].$$

Então f é diferenciável q.s. e $f' \in L^1([0,T];H)$.

Demonstração: Com efeito, se f é Lipschitz contínua por ([27],páginas 110 e 113), temos que f é Lipschitiziana, então f é absolutamente contínua, então f é diferenciável q.s. Pelo teorema de Lebesgue ([27], página 115), temos que $f' \in L^1([0,T];H)$. $\square$

Lema 1.11. *Se f é diferenciável q.s. em $[0,T]$ e $f' \in L^1([0,T];H)$ então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma solução é clássica que satisfaz o problema (1.63).*

Demonstração: De fato como de praxe definamos $v(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$. Se f é diferenciável q.s. em $[0,T]$ então $v(s)$ também será. Em particular, $v(s)$ é contínua. Logo,

$$v'(s) = S(0)f(t) + \int_0^t S(s)f'(t-s)ds.$$

Se $f' \in L^1([0,T];H)$, o lado direito da igualdade anterior é contínuo, logo $v' \in C([0,T];H)$ e assim $v \in C^1([0,T];H)$. Pelo teorema (1.11), existe uma solução clássica do problema (1.63). $\square$

Teorema 1.13. *Se f é Lipschitz-Contínua sobre $[0,T]$ então para cada $u_0 \in D(A)$ temos uma solução clássica de (1.63).*

Demonstração: Por hipótese,como f é Lipschitz-Contínua, então fazendo uso do lema (1.11), teremos que f é diferenciável q.s. e $f' \in L^1(0, T; H)$. Veja que com isto, estamos nas hipóteses do lema (1.10) que nos garante a existência da solução clássica, quando $u_0 \in D(A)$, conforme o desejado. $\square$

Também neste teorema, necessitaremos de dois resultados auxiliares.

Lema 1.12. *Se* $v(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A)$ *e* Av *é contínua, então existe uma solução clássica.*

Demonstração: De fato, por (1.65), temos que

$$\frac{v(t+h)+v(t)}{h} = -A_h v(t) + \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(t+h-s)f(s)ds.$$

Pelas hipóteses, o segundo membro tende a $-Av(t) + f(t)$, quando $h \to 0^+$. Logo, v é derivável à direita para $t > 0$ e $\frac{d^+}{dt}v(t) = -Av(t) + f(t)$.

Mas, Av e f são contínuas. Desta maneira, resulta que $\frac{d^+}{dt}v(t)$ é contínua. Assim, estamos nas hipóteses do Teorema de Dini:

Teorema 1.14. *(Teorema de Dini) Se* $v : [0, T] \to H$ *é contínua em* $[0, T]$ *e* $\frac{d^+}{dt}v(t)$ *é contínua em* $(0, T)$, *então* $v \in C^1([0, T]; H)$.

Veja ([27], página 140). Se $v \in C^1([0, T]; H)$, pelo teorema (1.11) existe uma solução clássica de (1.63). $\square$

Teorema 1.15. *Se* $f \in C([0, T]; H)$ *e* $f(t) \in D(A)$ *q.s. e* $Af(t) \in L^1([0, T]; H)$ *(isto significa que* $f \in L^1([0, T]; D(A))$*), então existe uma solução clássica de (1.63).*

Demonstração: Das condições dadas por hipótese, segue que para $s > 0$, teremos $S(t-s)f(s) \in D(A)$ e que $AS(t-s)f(s) = S(t-s)Af(s)$ é integrável.

Sendo $S(t-s)f(s)$ contínua, pela proposição (1.21), temos que

$$v(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds \in D(A),$$

já que A é fechado e

$$Av(t) = A\int_0^t S(t-s)f(s)ds = \int_0^t AS(t-s)f(s)ds \in L^1([0,T];H)$$

é contínuo. Pelo lema (1.12) existe solução clássica. $\square$

Teorema 1.16. *Se $f \in C([0,T];H)$, nós temos uma solução generalizada. Caso tivermos $f \in C([0,T];D(A))$, a solução é clássica.*

Demonstração: Com efeito, como já feito anteriormente, tome $v(s) = \int_0^t S(t-s)f(s)ds$. Se $f \in C([0,T];H)$, então $v(s) \in C([0,T];H)$, logo $u(t) = S(t)u_0 + v(s) \in C([0,T];H)$. Assim, pela definição (5.2) segue que u é uma solução generalizada .

Agora se $f \in C([0,T];D(A))$, isto é, f é contínua no compacto $[0,T]$ vem que f é integrável, logo, $f \in L^1([0,T];D(A))$, logo $f \in D(A)$ e $Af \in L^1([0,T];H)$. Fazendo uso do teorema (1.15), temos a garantia que a solução é clássica. $\square$

1.6 Equações Não Lineares

Estaremos interessados em resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = F(u(t)); \quad \text{em } [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{1.66}$$

Onde $F : H \to H$ é contínua. Da mesma que no caso anterior temos a seguinte definição:

Definição 1.10. *Se $u \in C([0,T];H)$ satisfaz o problema (1.66) u é dita solução* <u>*generalizada*</u>. *Se $u \in C^1([0,T];H) \cap C([0,T];D(A))$, a solução de (1.66) é dita* <u>*clássica*</u>. *Em ambos os casos, u satisfaz a equação integral*

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(s)ds.$$

Teorema 1.17. *Seja $F : H \to H$ uma função Lipschitiziana, ou seja,*

$$|Fu - Fv| \leq |v - u|, \forall\, u, v \in H.$$

Então:

i) Para toda $u_0 \in H$ existe uma única $u \in C([0, +\infty[; H)$ que é solução generalizada. Se $u_0, \widetilde{u}_0 \in H$ valores respectivos as soluções $u(t)$ e $\widetilde{u}(t)$ então

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq e^{Lt}|u_0 - \widetilde{u}_0|\,.$$

ii) Se $u_0 \in D(A)$, a solução é clássica.

Demonstração:

i) Mostremos primeiro a unicidade:

De fato, suponhamos que u e $\widetilde{u}$ são soluções de (1.66), então do fato que a função F é Lipschitziana decorre que

$$\begin{aligned} |u(t) - \widetilde{u}(t)| &\leq |u_0 - \widetilde{u}_0| + \int_0^t \underbrace{|S(t-s)|}_{\leq 1} |Fu(s) - F\widetilde{u}(s)| ds \\ &\leq |u_0 - \widetilde{u}_0| + L \int_0^t |u(s) - \widetilde{u}(s)| ds. \end{aligned}$$

Pelo Lema de Gronwall, resulta que

$$|u(t) - \widetilde{u}(t)| \leq e^{Lt}|u_0 - \widetilde{u}_0|.$$

Se $u_0 = \widetilde{u}_0$, obteremos a unicidade desejada.

$ii)$ Definamos:

$$\phi_u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)Fu(s)ds$$

e

$$\xi = \left\{ u \in C([0, +\infty[; H) / \sup_{t \geq 0} |u(t)|e^{-kt} < +\infty \right\}.$$

Pela proposição (2.18) temos que ξ é um Espaço de Banach para a seguinte norma $||u|| = \sup_{t\geq 0} |u(t)|e^{-kt}$.

Mostremos que $\phi : \xi \to \xi$ é $\frac{L}{k}$-Lipschitz-Contínua.

Com efeito,

$$\begin{array}{rcl}
|\phi_u - \phi_v| & = & \phi_u - \phi v|\, e^{-kt} \\
& = & \left| S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^t S(t-s)Fu(s)ds - S(t)u_0 - \int_0^t Fv(s)ds \right| e^{-kt} \\
& \leq & \displaystyle\int_0^t S(t-s)|Fu(s) - Fv(s)|\, e^{-kt} \\
& \leq & L \displaystyle\int_0^t |u - v|\, ds\, e^{-kt} \\
& = & L \left\{ \displaystyle\int_0^t e^{-ks}|u - v|\, e^{ks}\, dse^{-kt} \right\} \\
& \leq & L||u - v||_\xi e^{-kt} \displaystyle\int_0^t e^{ks} ds \\
& = & L||u - v||_\xi e^{-kt} \left(\dfrac{e^{kt}}{k} - \dfrac{1}{k} \right) \\
& \leq & \dfrac{L}{k}||u - v||_\xi.
\end{array}$$

Tomando supremo na desigualdade acima, obteremos que

$$||\phi_u - \phi_v|| \leq \frac{L}{k}||u - v||_\xi.$$

Se escolhermos $k = 2L$, ϕ é uma contração e pelo Teorema (1.5), existe uma solução generalizada de (1.66).

$ii)$ Suponha $u_0 \in D(A)$. Mostraremos que u é Lipschitz-Contínua.

De fato, seja $h > 0$ e defina $\widetilde{u}(t+h), t > 0$. veja que $\widetilde{u}$ é uma solução com dado inicial $u(h)$, então:

$$|u(t+h) - u(t)| \leq e^{Lt}|u(h) - u_0|. \tag{1.67}$$

Por outro lado, fazendo uso da proposição (1.21), temos:

$$\begin{aligned} |S(h)u_0 - u_0| &= \left|A\int_0^h S(s)u_0 ds\right| = \left|\int_0^h AS(s)u_0 ds\right| \\ &\leq \int_0^h |Au_0|\,|S(s)|ds \leq h|Au_0|. \end{aligned} \tag{1.68}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(h) - u_0| &= \left|S(h)u_0 - u_0 + \int_0^h S(h-s)\left(Fu(s) - Fu_0 + Fu_0\right)ds\right| \\ &\leq |S(h)u_0 - u_0| + \int_0^h L|u(s) - u_0| + |Fu_0|ds \\ &\underbrace{\leq}_{(1.68)} h|Au_0| + \int_0^h |Fu_0| + L|u(s) - u_0|ds \\ &= h|Au_0| + |Fu_0| + L\int_0^h |u(s) - u_0|ds. \end{aligned}$$

Pelo lema de Gronwall, temos que

$$|u(h) - u_0| \leq h\left(|Au_0| + |Fu_0|\right)e^{Lh}. \tag{1.69}$$

Logo, se $t, t' \in [0,T]$, onde $t' = t + h$ em (1.67), resulta então:

$$\begin{array}{rcl} |u(t') - u(t)| & \leq & e^{LT}|u(t'-t) - u_0| \\ & \underbrace{\leq}_{(1.69)} & e^{LT}|t'-t|\left(|Au_0| + |Fu_0|\right)e^{L} \\ & = & e^{2LT}\left(|Au_0| + |Fu_0|\right)|t'-t|. \end{array}$$

Portanto, u é Lipschitz-Contínua e ainda,

$$|Fu(t) - Fu(r)| \leq L|u(t) - u(r)| \leq Le^{2LT}\left(|Au_0| + |Fu_0|\right)|t'-t|,$$

o que diz que $Fu(t)$ é Lipschitz-contínua. Pelo teorema (1.13), temos que a solução é clássica. $\square$

Teorema 1.18. *Seja $F : D(A) \to D(A)$ Lipschitz-Contínua. Se $u_0 \in D(A)$, então existe uma solução clássica de (1.66).*

Demonstração: Seja $H_1 = D(A)$ e $A_1 = A : D(A_1) = D(A^2) \to H_1$.

Veja que $A_1u = Au$, para $u \in D(A_1)$ e $D(A_1) = D(A^2) = \{v \in D(A); Av \in D(A)\}$, onde

$$(u,v)_{H_1} = (u,v)_H + (Au, Av)_H \quad |u|^2_{H_1} = |u|_H + |Au|^2_H.$$

Mostremos que A_1 é maximal monótono em H_1.

i) A_1 é monótono:

Para $u \in D(A)$, temos:

$$\begin{array}{rcl} (A_1u, u)_{D(A_1)} & = & (Au,u)_{D(A^2)} = (Au,u)_H + (A^2u, Au)_H \\ & = & (Au,u)_H + (A(Au), Au)_H \geq 0, \end{array}$$

pois, A é monótono.

ii) A é maximal:

Devemos mostrar que para todo $f \in H_1$, existe $v \in D(A_1)$ onde $u + A_1 u = f$.

De fato, tome $f \in D(A) \subset H$. Sendo A maximal, existe $u' \in D(A)$ tal que

$$u' + Au' = f.$$

Como $u', Au' \in D(A)$, segue que $Au' \in D(A)$. Disto decorre que $u' \in D(A_1)$. Então $A_1 u' = Au'$, o que mostra que

$$u' + Au' = u' + A_1 u' = f,$$

logo A_1 é maximal.

Pelo Teorema de Hille-Yosida (1.6) podemos definir um semigrupo $S_1 : H_1 \to H_1$ gerado por $-A_1$. Note que $S_1(t) = S(t)|_{D(A)}$.

Então pelo teorema (1.17) nós obtemos uma solução generalizada $u \in C([0, +\infty[; H_1)$ com

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^T S_1(t-s)Fu(s)ds$$

e

$$\begin{array}{rcl} F : H_1 & \to & H_1 \\ u & \mapsto & Fu(s) \in D(A) \end{array}$$

Como $u_0, Fu(s) \in D(A)$, temos que $u(t) \in D(A)$ e pelo fato que $S_1(t) = S(t)|_{D(A)}$, podemos mudar $S_1(t)$ em $S(t)$ e neste caso obtém-se que $u(t) \in C([0, +\infty[; D(A))$ que pelo teorema (1.16) resulta que u é solução é clássica. $\square$

Teorema 1.19. *Seja $F : H \to H$ localmente Lipschitz, ou seja, para todo $M > 0$ existe $L_M > 0$ tal que $|u| \leq M$ e $|v| \leq M$ implica que $|Fu - Fv| \leq M|u - v|$.*

Então, para toda $u_0 \in H$ existe u solução generalizada de (1.17) em $[0, T]$ e esta pode ser extendida em uma solução maximal sobre $[0, T_{\max}[$ com

$$T_{\max} = +\infty \ \textit{ou} \quad T_{\max} < +\infty \ \textit{e} \lim_{t \to +\infty} |u(t)| = +\infty.$$

Se $u_0 \in D(A)$, a solução é clássica.

Demonstração: Escolha $T > 0$ e defina

$$\begin{array}{rcl} \phi_u : K & \to & K \\ u & \mapsto & \phi_u(t) = S(t)u_0 + \displaystyle\int_0^T S(t-s)Fu(s)ds \end{array}$$

sobre $K = \{u \in C([0,T]; H)/\, |u(t)| \leq |u_0| + 1, \forall\, t \in [0,T]\}$.

Se tomarmos $M = |u_0| + 1$ estaremos na hipótese que F é uma constante de lipschitz, no qual L é sua constante de Lipschitz. Mostremos que ϕ está bem definida:

De fato, veja que

$$\begin{aligned} |\phi_u(t)| &\leq |S(t)||u_0| + \int_0^T |S(t-s)| \left(|Fu - F(0)| + |F(0)|\right) ds \\ &\leq |u_0| + \int_0^T |F(0)| + L|u|ds \\ &\leq |u_0| + T(|F(0)| + L|u|) \\ &\leq |u_0| + T(|F(0)| + \underbrace{L|(u_0| + 1)}_{\text{pois } u\in K}). \end{aligned}$$

Assim, nós poderíamos escolher

$$T^* < \frac{1}{|F(0)| + L|u_0| + 1}$$

de tal forma que $TT^* < 1$. Por outro lado, como $S(t)$ e $Fu(t)$ são contínuos temos que ϕ é contínuo, o que mostra que $\phi \in K$.

Mostraremos a seguir que ϕ é uma contração de K em K. De fato,

$$\begin{aligned} |\phi_u - \phi_v| &= \left| S(t)u_0 + \int_0^T S(t-s)Fu(s)ds - S(t)u_0 - \int_0^T S(t-s)Fv(s)\, ds \right| \\ &\leq \left| \int_0^T (Fu(s) - Fv(s)) \right| \leq \int_0^T |Fu(s) - Fv(s)| \\ &= LT \sup_{t\in[0,T^*]} |u(s) - v(s)| = LT||u - v||. \end{aligned}$$

Considerando $T < \min\{\frac{1}{L}, T^*\} = T^0$ e em seguida tomando o supremo na desigualdade acima, resulta que

$$||\phi_u - \phi_v|| \leq ||u - v||.$$

Agora consideremos o seguinte fato:

Sejam u_1 e v_1 soluções dos seguintes problemas:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u_1}{dt} + Au_1 = F(u); \quad \text{ em } [0, T_0] \\ u_1(0) = u_0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v_1}{dt} + Av_1 = F(v_1(t)); \quad \text{ em } [0, \underbrace{T_1}_{T_1^*}] \\ \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} u_1 \quad \text{ em } [0, T_0] \\ v_1(t - T_0 \quad \text{ em } [T_0, \underbrace{T_0 + T_1}_{T_2^*}] \end{cases}$$

Então u_2 é solução em $[0, T_2^*]$.

E v_2 solução do problema

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v_2}{dt} + Av_2 = F(v_2(t)); \quad \text{ em } [0, T] \\ v_2(0) = u_2(T_0 + T_1) \quad \text{ em } [0, T_2] \end{cases}$$

$$u_3 = \begin{cases} u_2 \quad \text{ em } [0, T_0 + T_1] \\ v_2(t - (T_0 + T_1)) \quad \text{ em } [T_0 + T_1, \underbrace{T_0 + T_1 + T_2}_{T_3^*}] \end{cases}$$

Definamos a família:

$$u(t) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} u_i(t), \quad T_{\max} = \bigcup_{i \in I} [0, T_i^*].$$

Se $T_{\max} = +\infty$ nada temos a provar.

Considere $T_{\max} < +\infty$, e suponhamos que $||u(t)|| \leq c$, para todo $t \in [0, T_{\max}]$, donde

$$\begin{cases} \dfrac{d\,v}{dt} + Av = F(v(t)); \quad \text{em } [0,T] \\ v(0) = u(T_{\max}) \quad \text{em } [0,\delta]. \end{cases}$$

Sendo $T_{\max}$ e $||u(t)||$ finitos, então $||u(T_{\max})|| \leq c$ e assim, $u(T_{\max})$ está definido e conseqüentemente o problema anterior está bem posto.

Desta forma, somos motivados a definir uma solução

$$w = \begin{cases} u \quad \text{em } [0, T_{\max}] \\ v(t - T_{\max}) \quad \text{em } [T_{\max}, T_{\max} + \delta]. \end{cases}$$

Logo, conseguimos uma solução w que supera v em $T_{\max}$, o que nos leva a uma contradição. $\square$

Teorema 1.20. *Seja $F : D(A) \to D(A)$ uma função localmente Lipschitz. Então para todo dado inicial u_0 em $D(A)$, existe*

$$u \in C^1([0, T_{\max}); H) \cap C([0, T_{\max}); D(A)).$$

A solução u é clássica em $[0, T_{\max})$ e $T_{\max} = \infty$ ou

$$T_{\max} < \infty \quad e \lim_{t \to T_{\max}} (|u(t)| + |A(u(t))|) = \infty.$$

Demonstração: Considerando o dado inicial em $D(A)$, basta aplicar o Teorema (1.19) com $H = D(A)$ para a norma do gráfico. $\square$

Capítulo 2

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÕES

2.1 Preliminares

Primeiramente, recordaremos alguns resultados auxiliares da teoria de Semigrupos (cuja demonstrações se encontram no capítulo 1) que nos permitem garantir a existência e unicidade de soluções regulares, fracas e generalizadas para o problema (1) dado por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.1}$$

Seja H um espaço de Hilbert sobre o corpo dos reais. Denotemos por $(\cdot,\cdot)$ e $|\cdot|$, respectivamente, o produto interno e a norma em H.

Seja A um operador não limitado sobre H, $A : D(A) \subset H \to H$, então temos:

Definição 2.1. *Dizemos que A é um operador monótono se para todo $v \in D(A)$ tivermos $(Av, v) \geq 0$.*

O operador, A é dito operador maximal monótono se, for monótono e além disso,

$$Im(I + A) = H\,,$$

ou seja,

$$\forall\, f \in H,\, \exists\, u \in D(A) \text{ tal que } u + A\,u = f,$$

de tal modo que $Im(I + A)$ denota a imagem do operador $I + A$.

Proposição 2.1. *Seja A um operador maximal monótono sobre H, então temos:*

i) $\overline{D(A)} = H$.

ii) *A é fechado.*

iii) $\forall \lambda > 0, (I + \lambda A)$ *é bijetor de $D(A)$ sobre H e $(I + \lambda A)^{-1}$ é limitado com*

$$||(I + \lambda A)^{-1}||_{\mathcal{L}(H)} \leq 1.$$

Teorema 2.1. *(Hille-Yosida) Seja A um operador maximal monótono em um espaço de Hilbert. Então para todo $u_0 \in D(A)$ existe uma única função*

$$u \in C^1([0, +\infty); H) \cap C([0, +\infty), D(A))$$

tal que

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u(t)}{dt} + Au = 0; \quad \forall\, t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Ademais, se verifica:

$$|u(t)| \leq |u_0| \ \ e \ \left|\frac{d\,u(t)}{dt}\right| = |Au(t)| \leq |Au_0|, \forall\, t \geq 0, \tag{2.3}$$

onde $D(A)$ é um espaço de Banach munido da norma do gráfico:

$$||u||_{D(A)} = |u| + |A\,u|.$$

Usando o Teorema de Hille-Yosida, podemos definir para $t \geq 0$, o seguinte operador linear:

$$\begin{aligned} S(t) : H &\rightarrow H \\ u_0 &\mapsto S(t)u_0 = u(t) \end{aligned}$$

onde u é solução de (2.2).

Definição 2.2. *O operador linear S(t)é chamado* <u>*Semigrupo*</u> *gerado por $-A$. Note que por (2.3), $|S(t)\,u_0| = |u(t)| \leq |u_0|$ o que nos diz que $S(t)$ é uma contração em H.*

Temos ainda que $S(t)$ satisfaz as seguintes propriedades:

Proposição 2.2. *Seja $S(t) \in \mathcal{L}(H)$, semigrupo gerado por $-A$. Para todo $t \geq 0$, temos:*

i) $\quad S(0) = I_H$ *e* $S(t_1 + t_2) = S(t_1) \circ S(t_2)$; $\forall\, t_1, t_2 \geq 0$.

ii) $\quad |S(t)u_0| \leq |u_0|\,, \quad \forall\, u_0 \in H, \quad \forall\, t \geq 0$.

iii) $\quad \lim_{t\to 0} |S(t)u_0 - u_0| = 0 \quad \forall\, u_0 \in H$.

Veremos também na proposição que segue algumas propriedades de semigrupos, que diz respeito a diferencial de um semigrupo .

Proposição 2.3. *Seja $S(t)$ um semigrupo gerado por $-A$. Temos as seguintes propriedades:*

i) *Se $u_0 \in D(A)$, então $S(t)u_0 \in D(A)$*

e ainda,

$$\frac{d}{dt}S(t)u_0 = -AS(t)u_0 = S(t)Au_0.$$

ii) *Se $u_0 \in H$, então $\displaystyle\int_0^t S(s)u_0\,ds \in D(A), \forall\, t \geq 0.$*

iii) $A\left(\displaystyle\int_0^t S(s)u_0\,ds\right) = S(t)u_0 - u_0.$

Agora temos por objetivo resolver o seguinte problema:

$$\begin{cases} \dfrac{d\,u}{dt} + Au = F\,u; \quad \text{em } [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

onde $F : H \to H$ é contínua. Neste caso, temos a seguinte definição:

Definição 2.3. *Se $u \in C([0,T];H)$ satisfaz o problema (2.4), a solução u é dita solução generalizada. Se $u \in C^1([0,T];H) \cap C([0,T];D(A))$, a solução de (2.4) é dita regular.*

Em ambos os casos, u satisfaz a equação integral

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-s)F(u(s))\,ds.$$

Enunciaremos a seguir o resultado principal para existência do problema em questão.

Teorema 2.2. *Seja $F : H \to H$ localmente Lipschitz, ou seja, para todo $M > 0$ existe $L_M > 0$ tal que $|u| \leq M$ e $|v| \leq M$ implica que $|Fu - Fv| \leq L_M|u - v|$.*

Então, para toda $u_0 \in H$ existe u solução generalizada de (2.4) em $[0,T]$ e esta pode ser estendida em uma solução maximal sobre $[0, T_{máx}[$ com

$$T_{máx} = +\infty \ \ ou \quad T_{máx} < +\infty \ \ e \lim_{t \to T_{máx}} ||u(t)||_H = +\infty.$$

Se $u_0 \in D(A)$, a solução é regular.

2.2 Existência e unicidade e soluções regulares em $[0, T_{máx})$

Nesta seção provaremos a existência e a unicidade de soluções regulares e generalizadas para o problema (2.1) no intervalo maximal $[0, T_{máx})$.

Seja $f \in C^1(\mathbb{R})$ uma função tal que

$$f(s)s \geq 0, \quad \forall\, s \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

e satisfazendo à seguinte condição de crescimento:

$$\begin{cases} |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R} \\ \hfill \text{para algum } C > 0 \text{ e } p > 1 \text{ com } (n-2)p \leq n. \end{cases} \tag{2.6}$$

Seja $a = a(x) \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n)$ uma função limitada não negativa tal que

$$a \geq a_0 > 0 \tag{2.7}$$

q.s. em $\Omega_R = (\mathbb{R}^n \backslash B_R) = \{|x| \geq R\}$; para algum $R \geq 0$ onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ e a_0 é alguma constante positiva.

A condição (2.7) nos diz que a dissipação localizada é efetiva em Ω_R.

Consideremos, a seguinte equação semilinear da onda com *dissipação* localizada.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x) u_t = 0 \quad \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, \infty) \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n). \end{cases} \tag{2.8}$$

Mostraremos que com as condições acima, o problema (2.8) é bem posto no espaço $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$, isto é, para quaisquer dados iniciais $\{u^0, u^1\} \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma única solução fraca de (2.8) na classe

$$u \in C([0,\infty)); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,\infty); L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2.9}$$

Com o intuito de mostrar a existência de soluções para o problema (2.8), consideremos o problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U^0 \end{cases}$$

onde os operadores A e F serão devidamente definidos mais adiante. Tal problema será solucionado por meio da teoria de Semigrupo.

Sendo assim, devemos mostrar que o operador A a ser definido é maximal monótono.

Denotando,

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix}$$

temos que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} \underbrace{=}_{(2.8)} \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - \alpha u - f(u) - a(x) u_t \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u - \alpha u \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(x) u_t \end{pmatrix}}_{=F(U)}.$$

Dessa forma

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \begin{pmatrix} -u_t \\ -\Delta u + \alpha u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -f(u) - a(x) u_t \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta + \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = F(U).$$

Seja $\mathcal{H} = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset \mathcal{H} \quad &\longrightarrow \quad \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad &\mapsto \quad A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha u \end{pmatrix} \end{aligned}$$

onde $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Mostraremos que A é maximal monótono.

Para tanto, definimos o seguinte produto interno em $\mathcal{H}$:

$$(U_1, U_2)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u_1 \, \nabla u_2 \, dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^n} u_1 \, u_2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} v_1 \, v_2 \, dx$$

onde $U_i = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix}$, $i = 1, 2$, $\alpha > 0$.

$i)$ A é monótono:

Considere $U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in D(A)$. Precisamos mostrar que $(AU, U)_{\mathcal{H}} \geq 0$.

De fato,

$$(AU, U)_{\mathcal{H}} = \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}}.$$

Note que

$$\begin{aligned} (AU, U) &= \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = \left(\begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u + \alpha u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} \\ &= -\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \nabla v \nabla u \, dx + \alpha \int_{\mathbb{R}^n} v\, u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u - \alpha u).v \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Devido nossas condições sobre u e v, usando o teorema de Green, resulta que

$$(\Delta u, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} = -(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Diante disto, vem que

$$(AU, U) = \left(A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right)_{\mathcal{H}} = 0.$$

$ii)$ A é maximal.

Devemos provar que dado $(f, g) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ existe uma única

$$(u, v) \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$(u,v) + A(u,v) = (f,g).$$

Com efeito, da igualdade $(u,v) + A(u,v) = (f,g)$ tem-se

$$(u,v) + (-v, -\Delta u + \alpha u) = (f,g);$$

ou seja,

$$\left\{\begin{array}{r} u - v = f \\ \\ v - \Delta u + \alpha u = g \end{array}\right. \Longleftrightarrow -\Delta u + (\alpha+1)u = f + g \in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ se } v = u - f.$$

Definamos a seguinte forma bilinear, contínua e coerciva

$$\begin{array}{rcl} a : H^1(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\mathbb{R}^n) \\ (u,v) & \mapsto & a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (\alpha+1)(u,v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \end{array}$$

Veja que a é contínua.

De fato,

$$\begin{array}{rcl} |a(u,v)| = |(\nabla u, \nabla v)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (\alpha+1)(u,v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}| & \leq & (\alpha+1)|((u,v))_{H^1(\mathbb{R}^n)}| \\ & \leq & (\alpha+1)\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}. \end{array}$$

Agora mostraremos que a coerciva. Com efeito,

$$|a(u,u)| = |\nabla u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + (\alpha+1)|u|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq mín\{1, \alpha+1\}\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Seja $\mathcal{L}$ a seguinte aplicação

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : H^1(\mathbb{R}^n) & \to & \mathbb{R} \\ v & \mapsto & \langle \mathcal{L}, v \rangle = (\psi, v), \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{array}$$

veja que $\mathcal{L}$ é linear, assim, $\mathcal{L} \in (H^1(\mathbb{R}^n))'$.

Pelo Teorema de Lax-Milgram existe uma única $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$a(u,v) = \langle \mathcal{L}, v\rangle = (\psi, v)_{L^2(\mathbb{R}^n)}, \quad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n).$$

Seja $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{L}, \varphi\rangle &= (\psi, \varphi) = a(u, \varphi) \\
&= \langle \nabla u, \nabla \varphi\rangle + (\alpha+1)\langle u, \varphi\rangle \\
&= \langle -\Delta u, \varphi\rangle + \langle (\alpha+1)u, \varphi\rangle \\
&= \langle -\Delta u + (\alpha+1)u, \varphi\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).
\end{aligned}$$

Sendo assim, $-\Delta u + (\alpha+1)u = \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Como $-\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$ temos pela regularidade do problema elíptico associado, que $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e portanto mostramos que dado

$$(f,g) \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$$

existe uma única

$$(u,v) \in D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$$

tal que

$$(u,v) + A(u,v) = (f,g),$$

o que prova que A é maximal.

Por outro lado, de (2.10) temos que

$$\begin{aligned}
F : H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) &\to H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \\
(u,v) &\mapsto (0, -f(u) - a(x)v)
\end{aligned}$$

Agora, provaremos que F é localmente Lipschitz.

Para tanto mostremos primeiramente que F está bem definida .

Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)v|^2\,dx \quad \leq \quad \|a\|_\infty^2 \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 < +\infty$$

Note ainda que da condição de crescimento (2.6) resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2\,dx &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} [(1+|u|^{p-1})|u|]^2\,dx \\
&\leq 2C\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2p}\,dx\right\}.
\end{aligned}$$

Veja que $p \leq \dfrac{n}{n-2} \Longrightarrow 2 \leq 2p \leq \dfrac{2n}{n-2}$.

Logo, da desigualdade anterior e usando interpolação obtemos a seguinte imersão

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n),\ r \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right], n \geq 3$$

Portanto, em particular temos $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$.

Finalmente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(u)|^2\,dx < +\infty.$$

O que prova o almejado.

A seguir mostraremos que F é localmente Lipschitz.

De fato, se $\|(u,v)\|_{\mathcal{H}} \leq R$, $\|(\overline{u},\overline{v})\|_{\mathcal{H}} \leq R$, $R>0$. Note que de (2.6) temos

$$\begin{aligned}
\|F(u,v)-F(\overline{u},\overline{v})\|_{\mathcal{H}}^2 &= \|(0,-f(u)-a(x)v)-(0,-f(\overline{u})-a(x)\overline{v})\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|(0,f(u)-f(\overline{u})-a(x)(v-\overline{v}))\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq \|f(u)-f(\overline{u})\|_{L^2_{\mathbb{R}^n}}^2 + \|a(x)(v-\overline{v})\|_{L^2_{\mathbb{R}^n}}^2 \\
&\leq 2C\left\{\int_{\mathbb{R}^n} |u-\overline{u}|^2\,dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2\,dx\right. \\
&+ \left.\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2\right\} + 2\|a\|_\infty ||v-\overline{v}||_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\,dx.
\end{aligned}$$

Como

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p}{p-1}}=1,$$

vem que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2\,dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left[|u|^{2(p-1)}\right]^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u-\overline{u}|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|u\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^2.
\end{aligned}$$

Em virtude de

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$$

vem que

$$\|u\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \leq \overline{C}\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,,$$

onde $\overline{C}$ é uma constante positiva.

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2\,dx \leq \overline{C}^{\,2p}\,R^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\overline{u}|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2\,dx \leq \overline{C}^{\;2p} R^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\|F(u,v)-F(\overline{u},\overline{v})\|^2_{\mathcal{H}} &\leq 2R^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + 2\|a\|_\infty\|v-\overline{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq L_R\|u-\overline{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|v-\overline{v}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} = L_R\|(u,v)-(\overline{u},\overline{v})\|_{\mathcal{H}}\end{aligned}$$

onde $L_R = m\acute{a}x\{2\overline{C}^{\;2p}\, R^{2(p-1)}, 2\|a\|_\infty\} > 0$.

O que mostra que F é localmente Lipschitz.

Assim, estamos nas hipótese do teorema (2.2).

Veja que por (2.10) temos:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U^0 = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in D(A) \end{cases} \tag{2.11}$$

onde A é maximal monótono e F é localmente Lipschitz, o que implica

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0,T_{m\acute{a}x}); (H^2(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T_{m\acute{a}x}); H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Ou seja,

$$u \in C([0,T_{m\acute{a}x}); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T_{m\acute{a}x}); H^1(\mathbb{R}^n))$$

o que prova a existência de soluções regulares de (2.8) em $[0,T_{m\acute{a}x})$. Se $\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$, então a solução é generalizada em $[0,T_{m\acute{a}x})$.

Extensão da solução de zero ao infinito.

No intuito de obtermos soluções globais de (2.8), é necessário estender nossa solução obtida anteriormente ao infinito. De fato, sabemos que

$$U = \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} \in C([0,T_{máx}); (H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T_{máx}); H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Então,

$$u \in C([0,T_{máx}); H^2(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T_{máx}); H^1(\mathbb{R}^n)),$$
$$u_t \in C([0,T_{máx}); H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1([0,T_{máx}); L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Pelo Teorema (2.2), temos que $T_{máx} = +\infty$ ou se

$$T_{máx} < \infty \Rightarrow \lim_{T \to T_{máx}} ||u(t)||_{\mathcal{H}} = +\infty \quad \text{se } T < T_{máx}. \tag{2.12}$$

Queremos provar que $T_{\max} = \infty$. Suponhamos por contradição que, $T_{máx} < +\infty$.

Por outro lado, compondo a primeira equação de (2.8) com u_t, teremos para soluções regulares

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx\right\} \\ = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx \leq 0, \quad \forall\, t \in [0,T_{máx}). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Integrando de 0 a t, $t \in [0,T]$, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\,\alpha\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(t))\,dx \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2}\|u^1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\,\alpha\|u^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u^0)\,dx}_{=E(0)}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Note que de (2.12) e (2.14) obtemos que $\|u(t)\|_{\mathcal{H}} < \infty$, logo pelo teorema (2.2) temos que $T_{máx} = +\infty$. Logo, soluções regulares existem em $[0, +\infty)$.

Unicidade de soluções regulares

Considere u e v soluções de (2.8) e $w = u - v$, assim, subtraindo o problema (2.8) com respeito à u e v, temos

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \alpha w + f(u) - f(v) + a(x) w_t = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ w(0) = w_t(0) = 0. \end{cases} \tag{2.15}$$

Compondo (2.15) com w_t, teremos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} &+ \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(v)) w_t \, dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |w_t|^2 \, dx = 0. \end{aligned}$$

Dessa forma temos,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} \leq \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(v) - f(u)) w_t \, dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(v) - f(u)| \, |w_t| \, dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} [1 + |v|^{p-1} + |u|^{p-1}] |\underbrace{v - u}_{|w|}| |w_t| \, dx \\ &\leq C \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |w| \, |w_t| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |v|^{p-1} |w| \, |w_t| \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p-1} |w| \, |w_t| \, dx \right\}. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} = 1,$$

pela desigualdade de Hölder generalizada segue que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} &\leq C\{ \|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|w_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \|w_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \|w\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \|w_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \}. \end{aligned}$$

Note que

$$H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} \leq C\left\{ \frac{K_0}{2}\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \right.$$
$$\left. + \frac{\|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}}{2}\,[K_0\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}] + \frac{\|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}}{2}\,[K_0\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}]\right\}$$
$$\leq C\{\ \frac{L}{2}\ (1 + \|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)})(\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\}.$$

Da desigualdade acima obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right\} \ \leq\ \widetilde{C}\left\{\ \frac{L}{2}\ (1 + \|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}) \right.$$
$$\left. (\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\ \right\}.$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right\} \ \leq\ \widetilde{C}\left\{\ \frac{L}{2}\ [(1 + \|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)})]\right.$$
$$(\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}).$$

Integrando de 0 à t, $t \in [0,T]$a desigualdade acima e de (2.14) , temos

$$\frac{1}{2}\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}$$
$$\leq C\left\{\ \frac{L}{2}\ (\,1 + 2[\,E(0)\,]^{\frac{p-1}{2}}\ T\,)\int_0^t (\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\,ds.\right.$$

Por Gronwall, resulta que

$$\|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq 0$$

sendo assim, $w = 0$.

Portanto, $u = v$ o que mostra a unicidade no caso de soluções regulares.

2.3 Existência e unicidade de soluções fracas como limite de soluções regulares

Agora, o nosso objetivo é provar a existência de soluções fracas para o problema (2.8), como limite de soluções regulares.

De fato, seja $\{u^0, u^1\} \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Então existe uma solução generalizada em $[0, T_{máx})$ dada pela fórmula

$$U(t) = S(t)U^0 + \int_0^t S(t-s)F(U(s))ds.$$

Como $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ existe $\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \in D(A)$ tal que

$$\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \to \{u^0, u^1\} \text{ em } \mathcal{H}, \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Logo, para cada $\mu \in \mathbb{N}$ temos

$$u_\mu \in C([0,T]; H^2(\mathbb{R}^n)), u'_\mu \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^n)) \text{ e } u''_\mu \in C([0,T]; L^2(\mathbb{R}^n))$$

e satisfaz

$$\begin{cases} u''_\mu - \Delta u_\mu + \alpha u_\mu + f(u_\mu) + a(x)u'_\mu = 0 \quad \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u_\mu(0) = u^0_\mu; \quad u'_\mu(0) = u^1_\mu. \end{cases} \tag{2.16}$$

De maneira análoga ao que fizemos na seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|u'_\mu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{1}{2}\|\nabla u_\mu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|u_\mu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u_\mu(t))dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u'_\mu(t)|^2 dx = \frac{1}{2}\|u^1_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u^0_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &+ \frac{1}{2}\alpha\|u^0_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u^0_\mu)\, dx \le L, \end{aligned} \tag{2.17}$$

para todo $t \in [0,T]$ e todo $\mu \in \mathbb{N}$, onde $L > 0$ é uma limitação para os dados íníciais .

Fazendo $z_{\sigma,\mu} = u_\sigma - u_\mu$ vem que

$$z''_{\sigma,\mu} - \Delta z_{\sigma,\mu} + \alpha z_{\sigma,\mu} + a(x) z'_{\sigma,\mu} = f(u_\mu) - f(u_\sigma).$$

Compondo a equação anterior com $z'_{\sigma,\mu}$ resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z'_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla z_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha\|z_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(u_\mu) - f(u_\sigma)||z'_{\sigma,\mu}|\, dx \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^n} [1 + |u_\mu|^{p-1} + |u_\sigma|^{p-1}]|z_{\sigma,\mu}|\ |z'_{\sigma,\mu}|\, dx. \end{aligned}$$

Como

$$\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2} = 1,$$

novamente pela desigualdade de Hölder generalizada e o fato que $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{2p}(\mathbb{R}^n)$ segue que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|z'_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla z_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha\|z_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right\} \\ &\leq C\{\ \frac{\overline{K}}{2}\ (1 + \|u_\sigma\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_\mu\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)})(\|z_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|z'_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\}. \end{aligned}$$

Integrando de 0 à t, onde $t \in [0,T]$ e de (2.17), temos

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\|z'_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|z_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \widetilde{C}\left\{\ \frac{\overline{K}}{2}\ [\,(1 + L^{\frac{p-1}{2}}\ T\,]\right. \\ &\left.\int_0^t (\|w\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|w_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\, ds + \frac{1}{2}(\|z^0_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|z^1_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)})\right\}. \end{aligned}$$

Por Gronwall, resulta que

$$\frac{1}{2}\|z'_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|z_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{2}\left(\|z^1_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|z^0_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right) e^{\widetilde{K}T}.$$

Tomando o máximo, temos

$$\begin{aligned}
máx_{t\in[0,T]}\|z'_{\sigma,\mu}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &= máx_{t\in[0,T]}\|u'_\sigma(t)-u'_\mu(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\left(\|z^1_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|z^0_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right)\overbrace{\rightarrow}^{\sigma,\mu\to\infty}0
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \left|\left|u'_\sigma-u'_\mu\right|\right|_{C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))}\overbrace{\rightarrow}^{\sigma,\mu\to\infty}0,$$

logo, $\{u'_\mu\}$ é de Cauchy em $C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))$.

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
||u_\sigma-u_\mu||^2_{C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n))} &= máx_{t\in[0,T]}\|u_\sigma(t)-u_\mu(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \frac{1}{2}\left(\|z^1_{\sigma,\mu}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|z^0_{\sigma,\mu}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\right)\overbrace{\rightarrow}^{\sigma,\mu\to\infty}0,
\end{aligned}$$

o que mostra também que $\{u_\mu\}$ é de Cauchy em $C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n))$. Sendo os espaços envolvidos de Banach resulta que

$$u_\mu\to u \text{ em } C^0([0,T];H^1(\mathbb{R}^n))\hookrightarrow L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))\hookrightarrow\mathcal{D}'(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) \tag{2.18}$$

$$u'_\mu\to v \text{ em } C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^n))\hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))\hookrightarrow\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2.19}$$

De (2.18) temos que $u'_\mu\to u'$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$ e de (2.19) temos que $u'_\mu\to v$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'$, obtemos que $u'=v$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Compondo (2.16) por $v\in H^1(\mathbb{R}^n)$ e integrando em $\mathbb{R}^n$ e em seguida multiplicando por uma função teste $\theta\in\mathcal{D}(0,T)$ teremos

$$\begin{aligned}
\int_0^T(u''_\mu(t),v)\theta(t)\,dt &+ \int_0^T(-\Delta u_\mu(t),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T(\alpha u_\mu(t),v)\theta(t)\,dt\\
&+ \int_0^T(f(u_\mu(t)),v)\theta(t)\,dt+\int_0^T(a(x)u'_\mu(t),v)\theta(t)\,dt=0.
\end{aligned}$$

Na igualdade acima, integrando por partes com respeito à primeira integral vem que

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (u'_\mu(t),v)\theta'(t)\,dt \;&+\; \int_0^T (-\Delta u_\mu(t),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\alpha u_\mu(t),v)\theta(t)\,dt \\
&+\; \int_0^T (f(u_\mu(t)),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t),v)\theta(t)\,dt = 0,
\end{aligned}$$

e ainda, pelo Teorema de Green, temos

$$\begin{aligned}
-\int_0^T (u'_\mu(t),v)\theta'(t)d\,t + \int_0^T (\nabla u_\mu(t),\nabla v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\alpha u_\mu(t),v)\theta(t)\,dt \\
+\; \int_0^T (f(u_\mu(t)),v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t),v)\theta(t)\,dt = 0, \quad \forall\, v\in H^1(\mathbb{R}^n). \quad (2.20)
\end{aligned}$$

Como vimos anteriormente, $\{u_\mu\}$ é de Cauchy em $C(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ e $\{u'_\mu\}$ é de Cauchy em $C(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$; e além disso de (2.17) resulta que

$$\{u_\mu\} \text{ é limitado em } L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$$

e

$$\{u'_\mu\} \text{ é limitado em } L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Logo,

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{ fraco em } L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$$

e

$$u'_\mu \rightharpoonup \zeta \quad \text{ fraco em } L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Mas, $u'_\mu \rightharpoonup u'$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$. Pela unicidade do limite, temos que $u'=\zeta$ em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))$.

Assim,

$$\int_0^T \langle u'_\mu(t),v\rangle\theta'(t)dt \;\to\; \int_0^T \langle u'(t),v\rangle\theta'(t)\,dt; \qquad (2.21)$$

$$\int_0^T \langle a(x)u'_\mu(t), v\rangle\theta(t)\,dt \quad \to \quad \int_0^T \langle a(x)u'(t), v\rangle\theta(t)\,dt; \tag{2.22}$$

$$\int_0^T \langle \nabla u_\mu(t), \nabla v\rangle\theta(t)\,dt \quad \to \quad \int_0^T \langle \nabla u(t), \nabla v\rangle\theta(t)\,dt. \tag{2.23}$$

Por outro lado da convergência (2.18) resulta que

$$u_\mu \to u \quad \text{ forte em } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

e, portanto, $u_\mu \to u$ quase sempre. Do fato que f é contínua temos

$$f(u_\mu) \to f(u) \quad \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Por outro lado, através da condição de crescimento imposta pela f em (2.6) obtemos

$$||f(u_\mu)||_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))} \leq C$$

e pelo Lema de Lions temos que

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \text{ fraco em } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{2.24}$$

Assim, de (2.24), obtemos

$$\int_0^T \langle f(u_\mu(t)), v\rangle\theta(t)dt \quad \to \quad \int_0^T \langle f(u(t)), v\rangle\theta(t)dt. \tag{2.25}$$

De (2.21), (2.22), (2.23) e (2.25) na passagem ao limite em (2.20) temos

$$\begin{aligned} &-\int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (\alpha u(t), v)\theta(t)\,dt \\ &+ \quad \int_0^T (f(u(t)), v)\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(x)u'(t), v)\theta(t)\,dt = 0, \quad \forall\, v \in H^1(\mathbb{R}^n); \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\left(u'(t), v\right), \theta(t) \right\rangle + \left\langle \left(\nabla u(t), \nabla v\right), \theta(t) \right\rangle + \left\langle \left(\alpha u(t), v\right), \theta(t) \right\rangle$$
$$+ \quad \left\langle \left(f(u(t)), v\right), \theta(t) \right\rangle + \left\langle \left(a(x)u'(t), v\right), \theta(t) \right\rangle = 0$$

para toda $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Portanto,

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + (\nabla u(t), \nabla v) + (\alpha u(t), v) + (f(u(t)), v) + (a(x)u'(t), v) = 0$$

em $\mathcal{D}'(0,T)$ e para todo $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. O que prova a existência de solução fraca para o problema (2.1).

Com intuito de obter a identidade de energia para soluções fracas resta-nos analisar a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} F(u_\mu)dx$.

Note que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |F(u_\mu^0)|^2 \, dx \, dt &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\, C\,(1 + |u_\mu^0|^{p-1}\,)|u_\mu^0|\,]^2 \, dx \, dt \\
&\leq 2C^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u_\mu^0|^2 + |u_\mu^0|^{2p} \, dx \, dt \\
&\leq 2C^2 \int_0^T \|u_\mu^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u_\mu^0\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \, dx \, dt
\end{aligned}$$

Como $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ e $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ para $r \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$ da desigualdade a acima temos $\{F(u_\mu^0)\}$ é limitado em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

E ainda como $u_\mu^0 \longrightarrow u^0$ q.s. em $\mathbb{R}^n \times (0,T)$ e F sendo contínua vem que

$$F(u_\mu^0) \longrightarrow F(u^0) \quad \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Usando o Lema de Lions temos que

$$F(u_\mu^0) \rightharpoonup F(u^0) \quad \text{fraco em} \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{2.26}$$

Da identidade (2.17), da convergência dos dados iniciais e das convergências (2.18), (2.19) e (2.26) obtemos a *identidade de energia* para soluções fracas (obtidas por limite de soluções regulares)

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u'(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\alpha u(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u(t))\,dx \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u'(t)|^2\,dx = \frac{1}{2}\|u^1\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u^0\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+\frac{1}{2}\alpha\|u^0(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u^0)\,dx \le L.
\end{aligned}$$

Desta forma, estamos aptos a estender as soluções fracas a todo intervalo $[0,+\infty)$ como foi feito na seção anterior no caso de soluções regulares .

Agora, o nosso objetivo é demonstrar a unicidade de soluções fracas que garantirá a identidade de energia para qualquer solução fraca e não somente para aquelas que são limite de soluções regulares.

Unicidade de soluções fracas.

Afirmamos que o problema (2.8) admite uma única solução fraca. De fato, considere u e v soluções de (2.8) e considere também $w = u - v$.

Então

$$w \in C(0,T;H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)) \tag{2.27}$$

e satisfaz o problema

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \alpha w(t) + a(x)w_t = f(v) - f(u) \quad \text{em } C(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))') \\ \\ w(0) = w_t(0) = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Utilizaremos o método de Visik-Ladyzenskaya. Com efeito, tome para cada $t \in [0,T]$, a seguinte função:

$$\psi(t) = \begin{cases} -\displaystyle\int_s^t w(\xi)d\xi; & 0 \leq t \leq s \\ 0; & s \leq t \leq T \end{cases} \tag{2.29}$$

e sendo ψ' a derivada no sentido das distribuições vetoriais de ψ, temos

$$\psi'(t) = \begin{cases} w(t); & 0 \leq t \leq s \\ 0, & s \leq t \leq T. \end{cases} \tag{2.30}$$

Das expressões acima e de (2.27) temos

$$\psi, \psi' \in C(0,T; H^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^1(0,T; L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{2.31}$$

Compondo (2.28) com ψ na dualidade $C(0,T;(H^1(\mathbb{R}^n))')\times C(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))$ e observando que $\psi = 0$ em $[s,T]$, obtemos

$$\begin{aligned} &\int_0^s \langle w_{tt}, \psi(t)\rangle\, dt + \int_0^s \langle -\Delta w(t), \psi(t)\rangle\, ds + \int_0^s \langle \alpha w(t), \psi(t)\rangle\, ds \\ + &\int_0^s \langle a(x) w_t(t), \psi(t)\rangle\, dt = \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\, dt. \end{aligned} \tag{2.32}$$

- Análisando agora o termo $\displaystyle\int_0^s \langle a(x) w_t(t), \psi(t)\rangle\, dt$.

  Integrando por partes, tem-se

$$\begin{aligned} \int_0^s \langle\, a(x) w_t(t), \psi(t)\rangle\, dt &= a(x) w(t)\psi(t)\Big|_0^s - \int_0^s \langle\, a(x) w(t), \psi_t(t)\rangle\, dt \\ &= a(x)w(s)\psi(s) - a(x)w(0)\psi(0) - \int_0^s (a(x)w(t), w(t))\, dt \\ &= -\int_0^s (a(x)w(t), w(t))\, dt. \end{aligned}$$

Integrando por partes a primeira integral de (2.32), da igualdade anterior e recordando o fato que $< -\Delta w, \psi >= (\nabla w, \nabla \psi)$, onde $(\cdot, \cdot)$ denota o produto interno em $L^2(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\begin{aligned} & \langle w_t(s), \psi(s)\rangle - \langle w_t(0), \psi(0)\rangle - \int_0^s (w_t(t), \psi_t(t))\, dt \\ + & \int_0^s (\nabla w(t), \nabla \psi(t))\, dt + \int_0^s (\alpha w(t), \psi(t))\, dt - \int_0^s (a(x) w(t), w(t))\, dt \\ = & \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Novamente por $(2.28)_2$, (2.29) e agora por (2.30) vem que

$$\begin{aligned} -\int_0^s (w_t(t), w(t))\, dt \quad + & \int_0^s (\nabla \psi'(t), \nabla \psi(t)) dt + \int_0^s (\alpha\, \psi'(t), \psi(t))\, dt \\ - & \int_0^s (a(x) w(t), w(t))\, dt = \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\, dt; \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}|w(t)|^2\, dt \quad + & \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\nabla \psi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\, \alpha^2\, \|\psi(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, dt \\ - & \int_0^s (a(x) w(t), w(t))\, dt = \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\, dt; \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad + & \frac{1}{2}\|w(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla \psi(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{2}\|\nabla \psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ + & \frac{1}{2}\, \alpha^2\, \|\psi(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{2}\, \alpha^2\, \|\psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \int_0^s (a(x) w(t), w(t))\, dt \\ = & \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\, dt. \end{aligned}$$

Observe que

$$\|\nabla \psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C\|\psi(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} = 0.$$

Sendo assim,

$$\|\nabla\psi(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{2.33}$$

Mais uma vez, usando $(2.28)_2$, (2.29) e (2.33) temos

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}||w(s)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &- \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} - \frac{1}{2}\,\alpha^2\,\|\psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&- \int_0^s (a(x)w(t), w(t))\,dt = \int_0^s \langle f(v) - f(u), \psi(t)\rangle\,dt;
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} &+ \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\,\alpha^2\,\|\psi(0)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+ \int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|w|^2\,dx\,dt = \int_0^s \langle f(u) - f(v), \psi(t)\rangle\,dt. \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

- Análisando o termo $\displaystyle\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(v))\psi(t)dxdt.$

 De fato, note que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(v))\psi(t)dx\,dt \leq \int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} |f(u) - f(v)||\psi(t)|dx\,dt \\
\leq &\int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} \left[1 + |u|^{p-1} + |v|^{p-1}\right] |\underbrace{u - v}_{w}|\,|\psi(t)|dx\,dt.
\end{aligned}$$

 Como

$$\frac{p-1}{2p} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} = 1,$$

por Hölder generalizada, segue que

$$\begin{aligned}
&\int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(v))\psi(t)\,dx\,dt \\
&\leq \int_0^s [\,\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+\|v\|^{p-1}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,]\,dt \\
&\leq \int_0^s [\,\widetilde{R}\,\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \mathcal{K}\,\|u\|^{p-1}_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+\mathcal{K}\,\|v\|^{p-1}_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|\psi\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\|w\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,]\,dt.
\end{aligned}$$

Tomando $R = máx\left\{\widetilde{R},\ \mathcal{K}\,\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{p-1},\ \mathcal{K}\,\|v\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^{p-1}\right\}$ temos da desigualdade acima que

$$\int_0^s \int_{\mathbb{R}^n} (f(u) - f(v))\psi(t)\,dx\,dt \leq R\int_0^s \|\psi(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,dt. \tag{2.35}$$

Agora pondo

$$w_1(t) = \int_0^t w(\xi)d\xi;$$

de (2.29) para todo $t \in [0, s]$, vem que

$$\psi(t) = -\int_t^s w(\xi)d\xi = -\left[\underbrace{\int_0^s w(\xi)d\xi}_{w_1(s)} - \underbrace{\int_0^t w(\xi)d\xi}_{w_1(t)}\right] = w_1(t) - w_1(s). \tag{2.36}$$

Desta forma,

$$\psi(0) = -\left[\int_0^s w(\xi)d\xi - \int_0^0 w(\xi)d\xi\right] = -w_1(s). \tag{2.37}$$

Logo, de (2.35), (2.36), (2.37) em (2.34), teremos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|w(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \frac{1}{2}\|w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 \\
\leq\ & \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|w_1(t) - w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,dt \\
\leq\ & C\left\{\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|w_1(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,dt + \int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,dt\right\} \\
=\ & C\left\{\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\|w_1(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,dt\right. \\
+\ & \left.\int_0^s \sqrt{2sC}\,\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,\frac{1}{\sqrt{2sC}}\,\|w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}\,dt\right\} \\
\leq\ & \frac{C}{2}\left\{\int_0^s \left[\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|w_1(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\right]\,dt\right. \\
+\ & \left.2sC\int_0^s \|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds + \frac{1}{2sC}\|w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\left(\int_0^s dt\right)\right\} \\
\leq\ & \frac{C}{2}\int_0^s \left[\|w(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|w_1(t)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2\right]\,dt + \frac{1}{4}\|w_1(s)\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned}$$

e, consequentemente,

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{4}\|w_1(s)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C\int_0^s (\|w(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|w_1(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)})dt;$$

Usando a Desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\frac{1}{4}\|w(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{4}\|w_1(s)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq 0.$$

Assim, obtemos que

$$w(s) = 0 \quad \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n); \quad \forall\, s \in (0,t)$$

e como $w(0) = 0$, temos que

$$w(s) = 0 \quad \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n); \quad \forall\, s \in [0,T],$$

o que nos diz que $u = v$, mostrando portanto, a unicidade no caso fraco.

2.4 Existência e unicidade de soluções generalizadas como limite de soluções regulares

O nosso propósito agora é mostrar que as soluções generalizadas de (2.8) em $[0,T)$, $T > 0$, podem também ser obtidas como limite de soluções regulares.

Considere a seguinte solução generalizada de (2.8)

$$U(t) = S(t)U^0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds$$

onde

$$\begin{array}{rcl} G:\mathcal{H} & \to & \mathcal{H} \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & \mapsto & G\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -a(x)v- \quad f(u) \end{pmatrix} \end{array}$$

e em que $U^0 = \begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \end{pmatrix} \in \mathcal{H}$. Como $\overline{D(A)} = \mathcal{H}$ existe $\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \in D(A)$ tal que

$$\{u^0_\mu, u^1_\mu\} \to \{u^0, u^1\} \text{ em } \mathcal{H}, \text{ quando } \mu \to \infty.$$

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$, consideremos a seqüência de problemas cujas soluções são regulares (clássicas)

$$\begin{cases} u''_\mu - \Delta u_\mu + \alpha u_\mu + f(u_\mu) + a(x)u'_\mu = 0 \quad \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ \\ u_\mu(0) = u^0_\mu; \quad u'_\mu(0) = u^1_\mu. \end{cases} \tag{2.38}$$

Compondo o problema anterior com u'_μ, teremos integrando de 0 até t como no caso anterior que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\|u'_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|u_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \int_{\mathbb{R}^n} F(u_\mu(t))\,dx \\ + & \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_\mu|^2\,dx \leq \frac{1}{2}\|u^1_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla u^0_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|u^1_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ + & \int_{\mathbb{R}^n} F(u^0_\mu)\,dx \leq L = L(u^0, u^1) \end{aligned} \tag{2.39}$$

para todo $t \in [0, T]$ e todo $\mu \in \mathbb{N}$.

Veja que como no caso anterior, através da desigualdade acima, podemos obter a *desigualdade de energia* para soluções generalizadas (obtidas como limite de soluções regulares) e assim, estender as soluções generalizadas a todo intervalo $[0, +\infty)$.

Ponhamos

$$U_\mu(t) = S(t)U^0_\mu + \int_0^t S(t-s)G(U_\mu(s))ds$$

e

$$U_\sigma(t) = S(t)U^0_\sigma + \int_0^t S(t-s)G(U_\sigma(s))ds.$$

Temos

$$\|U_\mu(t)-U_\sigma(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq 2\|S(t)\|^2\|U_\mu^0-U_\sigma^0\|_{\mathcal{H}}^2+2\int_0^t \|S(t-s)\|^2\|G(U_\mu(t))-G(U_\sigma(t))\|_{\mathcal{H}}^2.$$

Também, note que

$$\begin{aligned}
\|G(U_\mu(s))-G(U_\sigma(s))\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left|\left|(-a(x)u_\mu'-f(u_\mu))-(-a(x)u_\sigma'-f(u_\sigma))\right|\right|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\leq 2\int_{\mathbb{R}^n} a^2(x)|u_\mu'-u_\sigma'|^2+2\int_{\mathbb{R}^n}|f(u_\mu)-f(u_\sigma)|^2\,dx \\
&\leq 2C\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu'-u_\sigma'|^2\,dx+2\int_{\mathbb{R}^n}|f(u_\mu)-f(u_\sigma)|^2\,dx.
\end{aligned}$$

Desta forma, tendo em mente que $\|S(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leq 1$, das desigualdades acima temos

$$\begin{aligned}
\|U_\mu(t)-U_\sigma(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &\leq 2\|u_\mu^0-u_\sigma^0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+2\|u_\mu^1-u_\sigma^1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+2\alpha\|u_\mu^0-u_\sigma^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&+ 4C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu'-u_\sigma'|^2\,dx+4\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|f(u_\mu)-f(u_\sigma)|^2dx\,ds.
\end{aligned}$$

Denotando

$$A=2\|u_\mu^0-u_\sigma^0\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2+2\|u_\mu^1-u_\sigma^1\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+2\alpha\|u_\mu^0-u_\sigma^0\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+4C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu'-u_\sigma'|^2dxds$$

e do fato que

$$\begin{aligned}
\|U_\mu(t)-U_\sigma(t)\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left|\left|\begin{pmatrix} u_\mu(t) \\ u_\mu'(t)\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} u_\sigma(t) \\ u_\sigma'(t)\end{pmatrix}\right|\right|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \|\nabla(u_\mu(t)-u_\sigma(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2+\alpha\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&+ \|u_\mu'(t)-u_\sigma'(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2
\end{aligned}$$

obteremos então

$$
\begin{aligned}
&\|\nabla(u_\mu(t)-u_\sigma(t))\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq \|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}+\|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq A+4\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|f(u_\mu)-f(u_\sigma)|^2\,dx\,ds\\
&\leq A+4C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(1+|u_\mu|^{p-1}+|u_\sigma|^{p-1}\right)|u_\mu-u_\sigma|\right]^2\,dx\,ds\\
&\leq A+12C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(1+|u_\mu|^{2(p-1)}+|u_\sigma|^{2(p-1)}\right)\right]|u_\mu-u_\sigma|^2dxds\\
&= A+12C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu-u_\sigma|^2dx\,ds+12C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu|^{2(p-1)}|u_\mu-u_\sigma|^2dx\,ds\\
&+12C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u_\sigma|^{2(p-1)}|u_\mu-u_\sigma|^2dx\,ds.
\end{aligned}
$$

Tendo em vista que

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{\frac{p-1}{p}}=1,$$

temos por Hölder generalizado que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_\sigma|^{2p}\,dx\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_\mu-u_\sigma|^{2p}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\leq ||u_\sigma||^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\,||u_\mu-u_\sigma||^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\,.$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} &+ \|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \alpha\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq A + 12C\int_0^t \|u_\mu - u_\sigma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&+ 12C\int_0^t ||u_\sigma||^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\, ||u_\mu - u_\sigma||^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\, ds \\
&+ 12C\int_0^t ||u_\mu||^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\, ||u_\mu - u_\sigma||^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\, ds \\
&\leq A + C\int_0^t \|u_\mu - u_\sigma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} ds \\
&+ 12K\int_0^t ||u_\sigma||^{2(p-1)}_{H^1(\mathbb{R}^n)}\, ||u_\mu - u_\sigma||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\, ds \\
&+ 12K\int_0^t \underbrace{||u_\mu||^{2(p-1)}_{H^1(\mathbb{R}^n)}}_{\leq L^{p-1}(por(2.39))}\, ||u_\mu - u_\sigma||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}\, ds \\
&\leq 2\|u^0_\mu - u^0_\sigma\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + 2\|u^1_\mu - u^1_\sigma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\alpha\|u^0_\mu - u^0_\sigma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+ \widehat{C}\int_0^t \Big\{ ||u_\mu - u_\sigma||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \|u'_\mu - u'_\sigma\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&+ \alpha\, ||u_\mu - u_\sigma||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big\}\, ds.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Gronwall, resulta que

$$\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n)}+\|u'_\mu(t)-u'_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\alpha\|u_\mu(t)-u_\sigma(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_{\mu,\sigma}e^{\widehat{C}T}, \quad \forall\, t\in[0,T].$$

Tomando o máximo na desigualdade acima, como no caso anterior,resulta que

$$\{u'_\mu\} \text{ é de Cauchy em } C([0,T];L^2(\mathbb{R}^n)).$$

$$\{u_\mu\} \text{ é de Cauchy em } C([0,T];H^1(\mathbb{R}^n)).$$

Como já vimos anteriormente, podemos obter que

$$u_\mu \to u \quad \text{ em } L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n));$$

$$u_\mu' \to u' \quad \text{em } L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)).$$

E ainda, note que seguindo as desigualdades anteriores, temos

$$\begin{aligned}
& \left|\left|\int_0^t S(t-s)G(U_\mu(s))ds - \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds\right|\right|_{\mathcal{H}} \\
\leq\ & \int_0^t ||S(t-s)(G(U_\mu(s)) - G(U(s)))||_{\mathcal{H}}\, ds \\
\leq\ & 4C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u_\mu' - u'|^2 dxds + C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |f(u_\mu) - f(u)|^2 dxds \\
\leq\ & C\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} |u_\mu' - u'|^2 dxds + C\int_0^t \|u_\mu - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
+\ & C\int_0^t \left[\|u\|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} + \|u_\mu\|^{2(p-1)}_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}\right] \|u - u_\mu\|^2_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)} \\
\leq\ & \widetilde{C}\int_0^t \Big\{ ||u_\mu(t) - u(t)||^2_{H^1(\mathbb{R}^n)} + \alpha\, ||u_\mu(t) - u(t)||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
+\ & \|u_\mu'(t) - u'(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \Big\}\, ds \underbrace{\to}_{\mu\to+\infty} 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$U_\mu(t) = S(t)U_\mu^0 + \int_0^t S(t-s)G(U_\mu(s))ds \to S(t)U^0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds = U(t).$$

Unicidade de soluções generalizadas

Agora, mostraremos a unicidade para soluções generalizadas.

Com efeito, considere as seguintes soluções generalizadas de (2.8)

$$U(t) = S(t)U^0 + \int_0^t S(t-s)G(U(s))ds$$

e

$$\overline{U}(t) = S(t)U^0 + \int_0^t S(t-s)G(\overline{U}(s))ds$$

onde $U(s)$ e $G(U(s))$ foram definidas na seção anterior.

Deste modo, usando as estimativas provenientes da seção anterior, obtemos

$$\begin{aligned}
& \|U(t)-\overline{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
= & \left\|\int_0^t G(U(s))-G(\overline{U}(s))ds\right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
\leq & \int_0^t \|G(U(s))-G(\overline{U}(s))\|_{\mathcal{H}}^2 ds \\
\leq & 2\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n} a^2(x)|u'-\overline{u}'|^2dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|f(u)-f(\overline{u})|^2dxds\right\} \\
\leq & 2C\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u'-\overline{u}'|^2dxds+2\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|f(u)-f(\overline{u})|^2dxds\right\} \\
\leq & C\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u'-\overline{u}'|^2dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}\left[\left(1+|u|^{p-1}+|\overline{u}|^{p-1}\right)|u-\overline{u}|\right]^2dxds\right\} \\
\leq & C\left\{\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u'-\overline{u}'|^2dxds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u-\overline{u}|^2\,dx\,ds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2dxds\right. \\
+ & \left.\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|\overline{u}|^{2(p-1)}|u-\overline{u}|^2dxds\right\}.
\end{aligned}$$

Mais uma vez, como p e $\frac{p}{p-1}$ são conjugados, através da desigualdade de Hölder, com os mesmos cálculos feitos na seção anterior, vem que

$$\begin{aligned}
& \|U(t)-\overline{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \\
\leq & \widetilde{C}\left\{\int_0^t\alpha\|u-\overline{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2ds+\int_0^t\|u\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2(p-1)}\,ds\right. \\
+ & \left.\int_0^t\|\overline{u}\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2(p-1)}\|u-\overline{u}\|_{L^{2p}(\mathbb{R}^n)}^{2(p-1)}\,ds+\int_0^t\int_{\mathbb{R}^n}|u'-\overline{u}'|^2dxds\right\}.
\end{aligned}$$

Novamente mediante o uso dos mesmos artifícios da seção anterior, pela desigualdade de Sobolev, em (2.6) resultará que

$$\begin{aligned}
\|U(t)-\overline{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 \leq C & \left\{\int_0^t\alpha\|u-\overline{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2ds+\int_0^t\|u-\overline{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2ds\right. \\
+ & \left.\int_0^t\|u'-\overline{u}'\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2ds\right\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como

$$\|U(t)-\overline{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = \|u'(t)-\overline{u}'(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla(u(t)-\overline{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \alpha\|(u(t)-\overline{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} &\|u(t)'-\overline{u}(t)'\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla(u(t)-\overline{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \alpha\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ \leq\ & C\left\{\int_0^t \|u'-\overline{u}'\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ds + \int_0^t \|u-\overline{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)}^2 ds + \int_0^t \alpha\|u-\overline{u}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2\, ds\right\}. \end{aligned}$$

Portanto, pela desigualdade de Gronwall, temos que

$$\|u(t)'-\overline{u}(t)'\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \|\nabla(u(t)-\overline{u}(t))\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 + \alpha\|u(t)-\overline{u}(t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq 0$$

o que nos diz que

$$\|U(t)-\overline{U}(t)\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$$

e finalmente

$$U(t) = \overline{U}(t)$$

o que mostra a unicidade das soluções generalizadas.

Capítulo 3

Decaimento Exponencial

Neste capítulo mostraremos as taxas de decaimento exponencial para soluções regulares da equação semilinear da onda com dissipação localizada e, considerando os argumentos de densidade usados na obtenção de soluções fracas (ou generalizadas), podemos estender nossos resultados para soluções fracas (ou generalizadas).

Admitiremos que a função f pode ser Globalmente Lipschitz ou superlinear fazendo distinção entre os casos quando for estritamente necessário.

Considere o problema (2.1) dado por:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t = 0 \;\; em \;\; \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ \\ u(0) = u_0 \in H^1(\mathbb{R}^n), u_t(0) = u_1 \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.1}$$

com as seguintes condições:

Assuma que

$$a \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n), \;\; a(x) \geq a_0 > 0 \;\; \text{q.s. em} \;\; \Omega_R = \mathbb{R}^n \backslash B_R = \{|x| \geq R\} \tag{3.2}$$

para $R > 0$ com $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$,

$$\alpha > 0;\ \ f(s)s \geq 0 \quad \text{para todo} \ \ s \in \mathbb{R}, \tag{3.3}$$

e também

$$\begin{cases} f \in C^1(\mathbb{R}) \text{ e existe alguma constante } C > 0 \text{ e } p > 1 \text{ com } (n-2)p \leq n \text{ tal que} \\ \qquad\qquad |f(x) - f(y)| \leq C(1 + |x|^{p-1} + |y|^{p-1})|x - y| \text{ para todo } x, y \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Note que da condição (3.2) a dissipação do termo $a(x)$ é efetiva em Ω_R. De (3.4) temos que o problema é bem posto em $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$.

Agora, considere a energia

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u|^2 + |u_t|^2 + \alpha |u|^2]\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} F(u)\, dx \tag{3.5}$$

onde

$$F(z) = \int_0^z f(s)\ ds, \qquad \text{para todo} z \in \mathbb{R}. \tag{3.6}$$

Para mostrar o teorema que segue faremos uso do seguinte resultado de continuação única de Ruiz.

Teorema 3.1. *(***Propriedade de Continuação Única***) Assuma que u pertença ao espaço $L^2(\Omega \times (0,T))$ e seja uma solução fraca de $\Box u + v(x,t)\, u = 0$ em $\Omega \times (0,T)$, (onde $\Box$ é o operador D'Alembertiano) tal que $T > diam\, \Omega$ e $v \in L^\infty(0,T; L^n(\Omega))$, onde Ω é um aberto do $\mathbb{R}^n$.*

Então se $u = 0$ em algum conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n /\, a(x) > 0\} \times (0,T)$, temos que $u \equiv 0$.

Demonstração: Ver Ruiz, [32], página 465. $\Box$

Teorema 3.2. *Suponha que as condições de (3.2) (3.4)são satisfeitas. Suponha ainda que f satisfaça uma das seguintes condições* *i) (Caso em que f é Globalmente Lipschitz),$f' \in L^{\infty}(\mathbb{R})$ e uma das seguintes condições são válidas:*

$$\exists \lim_{s \to +\infty} f'(s) = f'_{+}; \quad \lim_{s \to +\infty} f'(s) = f'_{-} \tag{3.7}$$

$$\exists \lim_{|s| \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = l. \tag{3.8}$$

ii) (Caso em que f é superlinear). Existe algum $\delta > 0$ tal que

$$f(s)s \geq (2+\delta)F(s) \quad \textit{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{3.9}$$

Então, existem constantes $C > 1$ e $\gamma > 0$ tais que a estimativa

$$E(t) \leq C E(0)\, e^{-\gamma t} \tag{3.10}$$

se verifica para toda solução $u = u(x,t)$ de (3.1) com dados iniciais em

$$H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) \ \textit{ e para todo } \ t \geq 0.$$

Demonstração: É suficiente provar a seguinte estimativa

$$E(T) \leq C_0 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt, \quad \text{para algum} \quad C_0 > 0. \tag{3.11}$$

De fato, note primeiramente que pelo capítulo anterior temos válida a identidade de energia para soluções fracas e generalizadas ou seja,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\underbrace{\left\{\|u'\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + 2\int_{\mathbb{R}^n} F(u_\mu)dx\right\}}_{E(t)} = -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u'|^2 dx \leq 0.$$

isto é:

$$\frac{1}{2}\frac{dE(t)}{dt} \leq -\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 dx \leq 0,$$

o que prova que a energia em questão é decrescente para todo $t \in [0, +\infty]$, em outras palavras

$$E(t) \leq E(0), \quad \forall\, t \in [0, +\infty].$$

Integrando a desigualdade acima de t_1 à t_2 resulta que

$$E(t_1) - E(t_2) \leq -\int_{t_1}^{t_2}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 dx\, ds, \quad \forall\, t_2 > t_1 \geq 0. \tag{3.12}$$

De (3.12) e (3.11) temos

$$\begin{aligned} E(T) - E(0) &= -\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t(x,t)|^2 dxdt \underbrace{\leq}_{(3.11)} -\frac{E(T)}{C_0} \\ &\Rightarrow\ E(T)\left(1+\frac{1}{C_0}\right) \leq E(0) \\ &\therefore\ E(T) \leq \frac{C_0}{C_0+1}E(0). \end{aligned}$$

Considere o nosso problema de Cauchy obtido no capítulo anterior:

$$\begin{cases} \dfrac{dU}{dt} + AU = F(U) \\ U(0) = U^0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Sabemos que existe uma única solução $U(t)$ do problema (3.13). Assim, definamos o seguinte operador

$$\begin{aligned} S(t) : \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ U^0 &\mapsto S(t)U^0 = U(t) \end{aligned}$$

onde $U(t)$ é solução de (3.13) e satisfaz as seguintes propriedades de semigrupo:

$$S(0) = I; \quad S(t+s) = S(t)S(s)\,\forall\, t, s \in [0, +\infty].$$

Também, considere o seguinte problema

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dt} + AV = F(V) \\ V(0) = U(r) \end{cases}$$

cuja única solução é $V(t) = U(t + r)$.

Denotaremos a energia com respeito à U e a V da seguinte forma:

$$E(t, U) = E(t) \quad \text{e} \quad E(t, V) = E(t + r) \ \forall\, t \geq 0.$$

Assim, da mesma forma obtida para $E(T)$ podemos ter para $E(T, V)$ a seguinte estimativa

$$E(T, V) \leq \frac{C_0}{C_0 + 1}\, E(0, V),$$

em outras palavras,

$$E(T + r) \leq \frac{C_0}{C_0 + 1}\, E(r). \tag{3.14}$$

O nosso próximo passo é mostrar que

$$E(T + r) \leq \left(\frac{C_0}{C_0 + 1}\right)^n E(r);\ \forall\, t = nT + r, \tag{3.15}$$

onde $0 \leq r < T$.

Provaremos por meio do método de indução matemática. De fato,

i) Para $n = 1$ veja que $t = T + r$. Logo por (3.14) obtemos

$$E(t) = E(T + r) \leq \frac{C_0}{C_0 + 1}\, E(r).$$

ii) Para $n = 2$ observe que

$$\begin{aligned} E(2T + r) &= E(T + (T + r)) \\ &\leq \frac{C_0}{C_0 + 1}\, E(T + r) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{C_0 + 1}\right)^2 E(r). \end{aligned}$$

iii) Suponhamos que (3.15) seja válido para todo n natural. Assim,

$$\begin{aligned} E((n+1)T+r) &= E(T+(nT+r)) \\ &\leq \frac{C_0}{C_0+1}\, E(nT+r) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{n+1} E(r), \end{aligned}$$

o que mostra (3.15).

Por outro lado, como $E(\cdot)$ é decrescente, temos que $E(r) \leq E(0)$. Desta forma,

$$\begin{aligned} E(t) &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{n} E(r) \leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{n} E(0) = \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{\frac{t}{T}-\frac{r}{T}} E(0) \\ &\leq \left(\frac{C_0}{C_0+1}\right)^{\frac{t}{T}-1} E(0) = \left(\frac{C_0+1}{C_0}\right) \left(\frac{C_0+1}{C_0}\right)^{-\frac{t}{T}} E(0) \\ &= \left(\frac{C_0+1}{C_0}\right) e^{-\left[\frac{1}{T}\ln\left(\frac{C_0+1}{C_0}\right)\right]t} E(0). \end{aligned}$$

Se tomarmos na estimativa anterior

$$\begin{cases} C = 1 + \dfrac{1}{C_0} \\ \gamma = \dfrac{1}{T}\ln\left(1+\dfrac{1}{C_0}\right) \end{cases} \tag{3.16}$$

teremos finalmente o resultado de (3.10).

$\square$

Com o intuito de demonstrar (3.11) faz-se necessário provar alguns lemas que seguem abaixo. Trabalharemos com soluções regulares e por argumento de densidades a estimativa (3.10) será estendida para soluções fracas (ou generalizadas).

Lema 3.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + |u_t|^2]\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} F(u)\, dx\, dt$$
$$\leq C \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\, dx\, dt + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}X(0,T))} + E(T) \right\} \tag{3.17}$$

para todo $T > 0$ e toda solução regular de (3.1).

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1) por $\varphi(x)u$ com $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ e integrando sobre $(0,T) \times \mathbb{R}^n$ temos que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} u_{tt}\varphi(x)u\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} -\Delta u \varphi(x) u\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \alpha\, u\, \varphi(x)\, u\, dx\, dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\varphi(x)u\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t\varphi(x)u\, dx\, dt = 0. \tag{3.18}$$

Usando Fubinni e integrando por partes a primeira integral da identidade acima obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} [u_t\, \varphi\, u]\, dx\right)\Bigg|_0^T - \int_{\mathbb{R}^n} u_t\, \frac{\partial(\, \varphi(x)\, u\,)}{\partial t}\; dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} [u_t\, \varphi\, u]\, dx\right)\Bigg|_0^T$$
$$- \int_{\mathbb{R}^n} u_t\, (\varphi_t(x)\, u + \varphi(x)\, u_t)\, dx = \left(\int_{\mathbb{R}^n} [u_t\, \varphi\, u]\, dx\right)\Bigg|_0^T$$
$$- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\, \varphi(x)\, dx\, dt. \tag{3.19}$$

Usando a Fórmula de Gauss e a fórmula de Green, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} -\triangle u\varphi(x)u\,dx\,dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla(\varphi\, u)\,dx\,dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot (\nabla\varphi\, u + \nabla u\,\varphi)\,dx\,dt \\
&= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \nabla u \cdot \nabla\varphi\, u\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\varphi\,dx\,dt \\
&= \sum_{k=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_k}\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,u\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\varphi\,dx\,dt \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\,\frac{\partial |u|^2}{\partial x_k}\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\varphi\,dx\,dt \\
&= -\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi\,|u|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\varphi\,dx\,dt. \qquad (3.20)
\end{aligned}
$$

Observe agora que

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)u_t\varphi(x)u\,dx\,dt &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|u|^2\,a(x)\,\varphi\,dx\right)\Bigg|_0^T \\
&- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|u|^2 \left(\frac{\partial a(x)}{\partial t}\,\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\,a(x)\right)dx \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|u|^2\,a(x)\,\varphi\,dx\right)\Bigg|_0^T. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Dê (3.19), (3.20) e (3.21) obtemos de (3.18), que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} [u_t\,\varphi\,u]\,dx\right)\Bigg|_0^T &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\,\varphi\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \Delta\varphi|u|^2\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\,\varphi\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \alpha\,u\,\varphi\,u\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} f(u)\,\varphi\,u\,dx\,dt + \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2}|u|^2\,a(x)\,\varphi\,dx\right)\Bigg|_0^T = 0.
\end{aligned}
$$

Daí temos,

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\,u)\,u]\,dx\,dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\Delta\varphi}{2}\,|u|^2 + \varphi|u_t|^2\right)dx\,dt \\
&- \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(u_t + a(x)\,\frac{u}{2}\right)\varphi u\right]\,dx\right)\Bigg|_0^T. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Aplicando (3.22) com $\varphi \in W^{2,\infty}(\mathbb{R}^n)$ verificando:

$$0 \leq \varphi \leq 1 \ \text{ em } \mathbb{R}^n, \ \varphi = 0 \ \text{ em } B_R; \ \ \varphi = 1 \ \text{ em } \Omega_{2R} = \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}. \tag{3.23}$$

onde $B_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ para algum $R > 0$ daí, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\, u)\, u]\, dx\, dt = -\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[(u_t + a(x)\, \frac{u}{2})\varphi u\right]\, dx\right)\Bigg|_0^T \\
&+ \int_0^T \int_{B_{2R} \backslash B_R} \frac{\Delta\varphi}{2}\, |u|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} |u_t|^2\, dx\, dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(u_t + a(x)\, \frac{u}{2}\right)\varphi u\right]\, dx\right)\Bigg|_0^T \\
&+ \int_0^T \int_{B_{2R} \backslash B_R} \frac{\Delta\varphi}{2}\, |u|^2\, dx\, dt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} a_0 |u_t|^2\, dx\, dt.
\end{aligned}$$

Como $a \in L^\infty_+(\mathbb{R}^n)$, $a(x) \geq a_0 > 0$ q.s. em $\Omega_{2R} = \mathbb{R}^n \backslash B_{2R}$ temos que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\, u)\, u]\, dx\, dt \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(u_t + \frac{a(x)\, u}{2}\right)\varphi u\right]\, dx\right)\Bigg|_0^T \\
+ \ \ & \frac{1}{2} \underset{x \in \overline{B}_{2R}}{máx}\, \Delta\varphi \int_0^T \int_{B_{2R} \backslash B_R} |u|^2\, dx\, dt + a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2\, dx\, dt.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Observe que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\, u_t\, \varphi\, u\,]\, dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} u_t\, u\ dx \leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_t|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

ou ainda, como $\alpha > 0$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} u_t\, \varphi\, u\, dx &\leq \alpha^{-1} \|\varphi\|_\infty\, \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\, \alpha \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\
&\leq \alpha^{-1} \|\varphi\|_\infty \left(\frac{1}{2}\, \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\, \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right) \\
&\leq \alpha^{-1} \|\varphi\|_\infty E(t).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, \varphi\, |u|^2\, dx &\leq 2\|a\|_\infty \|\varphi\|_\infty \alpha^{-1} \left(\frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^2\, dx\right) \\
&\leq 2\|a\|_\infty\, \|\varphi\|_\infty\, \alpha^{-1}\, E(t).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Somando (3.25) e(3.26) vem que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t + \frac{a(x)\, u}{2} \right) \varphi\, u\, dx \leq \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty (1 + \|a\|_\infty) E(t) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Logo,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t + \frac{a(x)\, u}{2} \right) \varphi\, u\, dx \right) \Bigg|_0^T \leq \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty \,(\, 1 + \|a\|_\infty \,)\, [\, E(T) + E(0) \,].$$

Usando a identidade de energia obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t + \frac{a(x)\, u}{2} \right) \varphi\, u\, dx \right) \Bigg|_0^T &\leq \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty (1 + \|a\|_\infty) \Big[\; 2E(T) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, u_t^2 \, dx \Big]. \end{aligned} \tag{3.27}$$

De (3.24) usando (3.27) temos que

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} \varphi [|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha . u).u] \, dx\, dt \leq \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty (1 + \|a\|_\infty) \Big[\; 2E(T) \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2 \, dx\, dt \Big] + \frac{1}{2} \; \underset{x \,\in\, \overline{B}_{2R}}{\text{máx}} \, \Delta\varphi \int_0^T \int_{B_{2R} \setminus B_R} |u|^2 \, dx\, dt \\ &+ \, a_0^{-1} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2 \, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Considerando $M = \text{máx}\{\alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty (1 + \|a\|_\infty),\, a_0^{-1}\}$ obtemos,

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} \varphi [|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\, u)\, u] \, dx\, dt \leq 2M \, E(T) \\ &+ \frac{1}{2} \; \underset{x \,\in\, \overline{B}_{2R}}{\text{máx}} \, \Delta\varphi \int_0^T \int_{B_{2R} \setminus B_R} |u|^2 \, dx\, dt + 2M \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2 \, dx\, dt. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Tomando, $C_0 = \text{máx}\, \{2M,\, \frac{1}{2} \; \underset{x \,\in\, \overline{B}_{2R}}{\text{máx}} \, \Delta\varphi\}$ temos,

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\, u)\, u] \, dx\, dt &\leq C_0 \Big\{ E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R} \times (0,T))} \\ &+ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2 \, dx\, dt \Big\} \end{aligned} \tag{3.30}$$

onde $\|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} = \displaystyle\int_0^T \int_{B_{2R}\setminus B_R} |u|^2\, dx\, dt.$

Mostraremos a seguinte afirmação: $\exists\ \mu > 0$ tal que

$$(f(s) + \alpha\, s)s \geq \mu\left(\frac{\alpha}{2}\, s^2 + F(s)\right) \qquad \text{para todo } s \in \mathbb{R},\, \alpha > 0 \tag{3.31}$$

para ambas as condições de f.

Se f uma função superlinear basta tomar $\mu = 2$ e a desigualdade (3.31) se verifica.

Entretanto se f é Globalmente Lipschitz devemos tomar $\mu = \dfrac{2\alpha}{\alpha + \|f'\|_\infty}$.

De fato, note que a constante μ dada acima existe, já que $\alpha > 0$ e f é Globalmente Lipschitz (isto significa que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$).

Assim,

$$2\alpha\left(\frac{\alpha s^2}{2} + F(s)\right) = \alpha^2 s^2 + 2\alpha F(s) = \alpha^2 s^2 + 2\alpha \int_0^s f(\lambda) d\lambda. \tag{3.32}$$

Sendo $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$, pelo teorema do Valor Médio, existe $\varepsilon_s \in (0, s)$ tal que

$$|f(s)| = |f'(\varepsilon_s)||s| \leq \|f'\|_\infty |s|. \tag{3.33}$$

Deste modo, por (3.32) e usando (3.33) teremos

$$\begin{aligned} 2\alpha\left(\frac{\alpha\, s^2}{2} + F(s)\right) &\leq \alpha^2 s^2 + 2\alpha \int_0^s f(\lambda) d\lambda \leq \alpha^2 s^2 + 2\alpha \|f'\|_\infty \int_0^s |\lambda| d\lambda \\ &= \alpha^2 s^2 + 2\alpha \|f'\|_\infty \frac{s^2}{2}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Como $\alpha > 0$ e $f(s)s \geq 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$, temos que

$$\begin{aligned} 2\alpha\left(\frac{\alpha\, s^2}{2} + F(s)\right) &\leq \alpha^2 s^2 + \alpha \|f'\|_\infty s^2 \leq \alpha^2 s^2 + \overbrace{\alpha f(s) s}^{>0} + \overbrace{f(s)s\|f'\|_\infty}^{\geq 0} + \alpha \|f'\|_\infty s^2 \\ &= (f(s) + \alpha s)s\,\alpha + (f(s)s + \alpha s)s\|f'\|_\infty \\ &= (f(s) + \alpha s)s(\alpha + \|f'\|_\infty). \end{aligned}$$

Assim,

$$(f(s)+\alpha s)s \geq \frac{2\alpha}{\alpha + \|f'\|_\infty}\left(\frac{\alpha s^2}{2} + F(s)\right)$$

Tomando $\mu = \dfrac{2\alpha}{\alpha + \|f'\|_\infty}$ provamos a afirmação (3.31).

Desta forma usando (3.31) temos de (3.30) que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + \mu\,\frac{\alpha}{2}\,u^2 + \mu F(u)]\,dx\,dt &\leq \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [\,|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha\,u)\,u\,]\,dx\,dt \\ &\leq C_0\left\{E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right\}. \quad (3.35)\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + \mu\,\frac{\alpha}{2}\,u^2]\,dx\,dt + \mu\int_0^T\int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt \quad &\leq \quad C_0\Big\{E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} \\ &+ \quad \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\Big\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + \mu\,\frac{\alpha}{2}\,|u|^2 + |u_t|^2]\,dx\,dt + \mu\int_0^T\int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt \\ &\leq\; C_0E(T) + C_0\|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} +\; C_0\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \\ &+\frac{1}{a_0}\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a_0|u_t|^2\,dx\,dt.\end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [|\nabla u|^2 + \mu\,\frac{\alpha}{2}\,|u|^2 + |u_t|^2]\,dx\,dt + \mu\int_0^T\int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt \\ &\leq\; C_0E(T) + C_0\|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + \left(C_0 + \frac{1}{a_0}\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \\ &\leq C_1\left\{E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right\}\end{aligned}$$

onde $C_1 = máx\left\{C_0,\, C_0 + \dfrac{1}{a_0}\right\}$. Considerando $K = min\left\{1,\, \dfrac{\mu}{2}\right\} > 0$ temos

$$K\left\{\int_0^T\int_{\Omega_{2R}}[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2\,]\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt\right\}$$
$$\leq C_1\left\{E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right\}.$$

Da desigualdade acima vem que

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Omega_{2R}}[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2\,]\,dx\,dt + \int_0^T\int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt$$
$$\leq C\left\{E(T) + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}\times(0,T))} + \int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right\}$$

onde $C = \dfrac{C_1}{2K}$.

$\square$

Lema 3.2. *Seja $q = (q_1,\, ...,\, q_n) \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$. Para todo $T,\, r > 0$ e toda solução regular de (3.1), temos a seguinte identidade sobre $B_r \times (0,\, T)$:*

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} div(q)[\,|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha|u|^2\,]\,dx\,dt - \int_0^T\int_{B_r} div(q)F(u)\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt + \int_0^T\int_{B_r} a(x)\,u_t\,q\,\nabla u\,dx\,dt = -\left(\int_{B_r} u_t\,q\cdot\nabla u\,dx\right)\Bigg|_0^T$$
$$+\frac{1}{2r}\int_0^T\int_{S_r}(q.x)[\,|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha|u|^2\,]\,d\Gamma\,dt - \frac{1}{r}\int_0^T\int_{S_r}(q.x)F(u)\,d\Gamma\,dt$$
$$+\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,(q\cdot\nabla u)\,d\Gamma\,dt. \tag{3.36}$$

Demonstração:

Multiplicando a equação (3.1) por $q(x)\,\nabla u(x,\,t)$ com um campo de vetores $q \in (W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n))^n$ (denotando por . o produto escalar em $\mathbb{R}^n$) e integrando em $B_r \times (0,T)$ temos

$$\int_0^T\int_{B_r}(u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t)(q.\nabla u)\,dx\,dt = 0. \tag{3.37}$$

Integrando por partes obtemos

$$\int_0^T \int_{B_r} u_{tt}(q.\nabla u)\, dx\, dt = \left(\int_{B_r} u_t(q \cdot \nabla u)\, dx \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{B_r} u_t(q.\nabla u_t)\, dx\, dt. \qquad (3.38)$$

Note que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{B_r} u_t\,(q.\nabla u_t)\, dx\, dt &= \int_0^T \int_{B_r} \sum_{k=1}^{n} u_t q_k\, \frac{\partial u_t}{\partial x_k}\, dx\, dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} \sum_{k=1}^{n} q_k\, \frac{\partial |u_t|^2}{\partial x_k}\, dx\, dt. \end{aligned}$$

Temos que $q_k \in H^1(B_r)$ e $u_t \in H^1(B_r)$ sendo assim,

$$\left. \begin{array}{l} u_t^2 = u_t u_t \in L^1(B_r) \\ \\ \dfrac{\partial |u_t|^2}{\partial x_j} \in L^1(B_r) \end{array} \right\} \Longrightarrow u_t^2 \in W^{1,1}(B_r). \qquad (3.39)$$

Logo, usando a fórmula de Gauss vem que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{B_r} u_t q.\nabla u_t\, dx\, dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u_t|^2\, dx\, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{S_r} \sum_{k=1}^{n} q_k\, |u_t|^2\, \nu\, d\Gamma\, dt \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} div(q) |u_t|^2\, dx\, dt \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{S_r} (q \cdot \nu) |u_t|^2\, d\Gamma\, dt. \end{aligned} \qquad (3.40)$$

Como ν é o vetor normal unitário exterior a B_r temos que

$$\nu = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{r}; \quad \forall\ x \in S_r.$$

Sendo assim, de (3.40) vem que

$$\int_0^T \int_{B_r} u_t q.\nabla u_t \, dx \, dt = -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} div(q)|u_t|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{S_r} (q \cdot x)|u_t|^2 \, d\Gamma \, dt. \tag{3.41}$$

De (3.38) e (3.41) temos que

$$\int_0^T \int_{B_r} u_{tt}(q.\nabla u) \, dx \, dt = \left(\int_{B_r} u_t(q.\nabla u) \, dx \right) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} div(q)|u_t|^2 \, dx \, dt - \frac{1}{2r} \int \int_{S_r} (q \cdot x)|u_t|^2 \, d\Gamma \, dt. \tag{3.42}$$

Note que $u \in H^2(B_r)$, $q \in L^\infty(B_r)$ e $\nabla u \in H^1(B_r)$ sendo assim $q.\nabla u \in H^1(B_r)$ (proposição IX.4 ver Brezis [8]).

Usando a fórmula de Green obtemos

$$-\int_0^T \int_{B_r} \Delta u(q.\nabla u) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{B_r} \nabla u.\nabla(q\nabla u) \, dx \, dt - \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} (q.\nabla u) \, d\Gamma \, dt. \tag{3.43}$$

Observe que

$$\int_0^T \int_{B_r} \nabla u.\nabla(q \cdot \nabla u) \, dx \, dt = \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^n q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) dx \, dt.$$

Pela proposição IX.4 do Brezis [8] temos que

$$\int_0^T \int_{B_r} \nabla u.\nabla(q \cdot \nabla u) \, dx \, dt = \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} + q_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_j} \right) dx \, dt.$$

Daí, temos

$$\int_0^T \int_{B_r} \nabla u.\nabla(q.\nabla u) \, dx \, dt = \sum_{k,\, j=1}^n \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} \, dx \, dt + \sum_{k,\, j=1}^n \int_0^T \int_{B_r} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)^2 q_k \, dx \, dt. \tag{3.44}$$

Aplicando a fórmula de Gauss na segunda parcela acima vem que

$$\begin{aligned}\sum_{k,\,j=1}^{n}\int_0^T\int_{B_r}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 q_k\,dx\,dt &= \sum_{k,\,j=1}^{n}\left[-\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2\right]dx\,dt\\ &+ \frac{1}{2}\sum_{j,\,k=1}^{n}\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 q_k\,\nu_k\,d\Gamma\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} div(q)\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\,dt\\ &+ \frac{1}{2r}\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 (q\cdot x)\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.45)\end{aligned}$$

De (3.43), (3.44) e (3.45) obtemos,

$$\begin{aligned}&-\int_0^T\int_{B_r}\Delta u(q.\nabla u)\,dx\,dt = \sum_{k,\,j=1}^{n}\int_0^T\int_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt\\ &-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} div(q)\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 dx\,dt + \frac{1}{2r}\sum_{j=1}^{n}\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|^2 (q.x)\,d\Gamma\,dt\\ &-\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}(q.\nabla u)\,d\Gamma\,dt\\ &=\int_0^T\int_{B_r}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r} div(q)|\nabla u|^2\,dx\,dt\\ &+\frac{1}{2r}\int_0^T\int_{S_r}(q.x)|\nabla u|^2\,d\Gamma\,dt - \int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial \nu}(\nabla u.q)\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.46)\end{aligned}$$

Agora, observe que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_r}\alpha\,u(q.\nabla u)\,dx\,dt &= \int_0^T\int_{B_r}\sum_{k=1}^{n}\alpha\,u\,q_k\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt\\ &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\sum_{k=1}^{n}\alpha\,q_k\,\frac{\partial |u|^2}{\partial x_k}\,dx\,dt. \qquad (3.47)\end{aligned}$$

Note que, $\alpha\,q_k \in W^{1,1}(B_r)$, $u^2 \in H^1(B_r)$ e $q_k \in W^{1,\,\infty}(B_r)$. Sendo assim, usando a

Fórmula de Gauss temos de (3.47) que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_r}\alpha u(q.\nabla u)\,dx\,dt &= -\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\alpha\, div(q)|u|^2\,dx\,dt\\ &+ \frac{1}{2r}\int_0^T\int_{S_r}\alpha\,(q.x)\,|u|^2\,d\Gamma\,dt. \end{aligned}\tag{3.48}$$

Também temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_r}f(u)(q.\nabla u)\,dx\,dt &= \sum_{k=1}^n\int_0^T\int_{B_r}f(u)\,q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt\\ &= \sum_{k=1}^n\int_0^T\int_{B_r}q_k\,\frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\int_0^u f(s)ds}_{=F(u)}\,dx\,dt. \end{aligned}\tag{3.49}$$

Note que, $F(u)\in W^{1,1}(B_r)$. De fato, como $u\in H^2(B_r)$ portanto,

$$\left.\begin{array}{l} f(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}\in L^1(B_r)\\ \\ f'(u)\dfrac{\partial u}{\partial x_k}+f(u)\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}\in L^1(B_r)\end{array}\right\}\Longrightarrow F(u)\in W^{1,1}(B_r).\tag{3.50}$$

Sendo assim, pela fórmula de Gauss temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_r}f(u)(q.\nabla u)\,dx\,dt &= -\int_0^T\int_{B_r}\sum_{k=1}^n\frac{\partial q_k}{\partial x_k}\,F(u)\,dx\,dt\\ &+ \sum_{k=1}^n\int_0^T\int_{S_r}q_k\,\nu_k\,F(u)\,d\Gamma\,dt\\ &= -\int_0^T\int_{B_r}div(q)F(u)\,dx\,dt\\ &+ \frac{1}{r}\int_0^T\int_{S_r}(q.x)\,F(u)\,d\Gamma\,dt. \end{aligned}\tag{3.51}$$

De (3.37), (3.42), (3.46), (3.48) e (3.51) vem que

$$\begin{aligned}
0 \;=\;& \int_0^T \int_{B_r} (u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x) u_t)(q.\nabla u)\,dx\,dt = \left(\int_{B_r} u_t (q.\nabla u)\,dx \right)\Big|_0^T \\
+\;& \frac{1}{2} \int\int_{B_r} div(q)|u_t|^2\,dx\,dt - \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{S_r} (q.x)|u_t|^2\,d\Gamma\,dt + \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt \\
-\;& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} div(q)|\nabla u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{S_r} (q.x)\,|\nabla u|^2\,d\Gamma\,dt - \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(q.\nabla u)\,d\Gamma\,dt \\
-\;& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} \alpha\, div(q)|u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{S_r} \alpha\,(q.x)\,|u|^2\,d\Gamma\,dt - \int_0^T \int_{B_r} div(q) F(u)\,dx\,dt \\
+\;& \frac{1}{r} \int_0^T \int_{S_r} (q.x)\,F(u)\,d\Gamma\,dt + \int_0^T \int_{B_r} a(x)\,u_t\,(q.\nabla u)\,dx\,dt. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} div(q)\,[\,|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha |u|^2\,]\,dx\,dt - \int_0^T \int_{B_r} div(q) F(u)\,dx\,dt \\
& + \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial u}{\partial x_j}\ \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\ \frac{\partial u}{\partial x_k}\ \,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_r} a(x)\,u_t\,(q.\nabla u)\,dx\,dt \\
& = - \left(\int_{B_r} u_t (q.\nabla u)\,dx \right)\Big|_0^T + \frac{1}{2r} \int_0^T \int_{S_r} (q.x)[\,|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha\,|u|^2\,]\,d\Gamma\,dt \\
& - \frac{1}{r} \int_0^T \int_{S_r} (q.x)\,F(u)\,d\Gamma\,dt + \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(q.\nabla u)\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

□

Lema 3.3. *Seja $T, r > 0$ e $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$. Para toda solução regular de (3.1) temos a seguinte identidade:*

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{B_r} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha u)u]\,dx\,dt = \int_0^T \int_{B_r} [\,\varphi |u_t|^2 - u \nabla\varphi.\nabla u\,]\,dx\,dt \\
& + \int_0^T \int_{S_r} \varphi \frac{\partial u}{\partial \nu}\,u\,d\Gamma\,dt - \left(\int_{B_r} \left[\left(u_t + a(x) \frac{u}{2} \right) \varphi u \right]\,dx \right)\Big|_0^T.
\end{aligned}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (3.1) por $\varphi(x)u$ e integrando em $B_r \times (0,T)$ temos:

$$\int_0^T \int_{B_r} (u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) + a(x)u_t).(\varphi(x)u)\, dx\, dt = 0. \tag{3.54}$$

Integrando por partes vem que:

$$\int_0^T \int_{B_r} u_{tt}\, \varphi\, u\, dx\, dt = \left(\int_{B_r} [u_t\, \varphi\, u]\, dx \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{B_r} u_t \frac{\partial(\varphi\, u)}{\partial t}\, dx\, dt. \tag{3.55}$$

Como $B_r \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado de classe C^1, $u \in H^2(B_r) \subset H^1(B_r)$ e $\varphi \in W^{1,\infty}(B_r)$ segue de (3.55) que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{B_r} u_{tt}\, \varphi\, u\, dx\, dt &= \left(\int_{B_r} [\, u_t\, \varphi\, u\,]\, dx \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{B_r} u_t \left(\underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial t}}_{=0} u + \varphi \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx\, dt \\
&= \left(\int_{B_r} [\, u_t\, \varphi\, u\,]\, dx \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{B_r} u_t\, \varphi \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dt \\
&= \left(\int_{B_r} [\, u_t\, \varphi\, u\,]\, dx \right) \Big|_0^T - \int_0^T \int_{B_r} \varphi\, |u_t|^2\, dx\, dt. \qquad (3.56)
\end{aligned}$$

Note ainda que aplicando o teorema de Green temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{B_r} \Delta u\, \varphi\, u\, dx\, dt &= \int_0^T \int_{B_r} \nabla u . \nabla(\varphi u)\, dx\, dt - \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi u\, d\Gamma\, dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial(\varphi u)}{\partial x_j}\, dx\, dt - \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi u\, d\Gamma\, dt \\
&= \sum_{j=1}^n \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} u + \varphi \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx\, dt - \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi\, u\, d\Gamma\, dt \\
&= \int_0^T \int_{B_r} [\, (\nabla u . \nabla \varphi)\, u + \varphi\, |\nabla u|^2]\, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} \varphi\, u\, d\Gamma\, dt. \qquad (3.57)
\end{aligned}$$

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{B_r} a(x)\, u_t\, \varphi\, u\, dx\, dt &= \frac{1}{2}\int_0^T \int_{B_r} a(x)\, \varphi\, \frac{\partial |u|^2}{\partial t}\, dx\, dt \\
&= \left(\int_{B_r} \left[\varphi\, \frac{1}{2}\, a(x)\, |u|^2 \right] dx \right)\Bigg|_0^T \\
&- \int_{B_r} \int_0^T \frac{1}{2}\, |u|^2\, \underbrace{\frac{\partial (a(x)\, \varphi)}{\partial t}}_{=0}\, dt\, dx \\
&= \left(\int_{B_r} \left[\varphi\, \frac{a(x)}{2}\, |u|^2 \right] dx \right)\Bigg|_0^T . \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

De (3.54), (3.56), (3.57) e (3.58) obtemos,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{B_r} [\, u_t\, \varphi\, u\,]\; dx \right)\Bigg|_0^T &- \int_0^T \int_{B_r} \varphi\, |u_t|^2\, dx\, dt + \int_0^T \int_{B_r} [\, \nabla u\, \nabla \varphi\, u + \varphi\, |\nabla u|^2\,]\, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, \varphi\, u\, d\Gamma\, dt + \left(\int_{B_r} \left[\varphi\, \frac{a(x)}{2}\, |u|^2 \right] dx \right)\Bigg|_0^T \\
&+ \int_0^T \int_{B_r} \alpha\, u\, \varphi\, u\, dx\, dt + \int_0^T \int_{B_r} f(u)\, \varphi\, u\, dx\, dt = 0.
\end{aligned}$$

Daí, vem que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{B_r} \varphi\, [\, |\nabla u|^2 + (\, f(u) + \alpha u\,)\, u\,]\, dx\, dt = \int_0^T \int_{B_r} [\, \varphi\, |u_t|^2 - u \nabla \varphi \nabla u\,]\, dx\, dt \\
&+ \int_0^T \int_{S_r} \varphi\, \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u\, d\Gamma\, dt - \left(\int_{B_r} \left[\left(u_t + a(x)\, \frac{u}{2} \right) \varphi\, u \right] dx \right)\Bigg|_0^T .
\end{aligned}$$

$\square$

Lema 3.4. *Para todo $r > R$ existe uma constante positiva $C_r > 0$ tal que se verifica a seguinte estimativa para todo $T > 0$ e toda solução regular de (3.1).*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \int_{B_r} [\, |\nabla u|^2 + \alpha |u^2| + |u_t|^2\,]\, dx\, dt &+ \int_0^T \int_{B_r} F(u)\, dx\, dt \le C_r \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x) |u_t|^2\, dx\, dt \right. \\
&+ \left. \|u\|^2_{L^2(B_r \times (0,T))} + E(T) \right\}. \qquad (3.59)
\end{aligned}$$

Demonstração:

Aplicando a identidade (3.36) com $q = x$, temos que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{B_r} div(x)[|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha|u|^2]\,dx\,dt - \int_0^T \int_{B_r} div(x)F(u)\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}.\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_r} a(x)u_t(x.\nabla u)\,dx\,dt \\
&= -\left(\int_{B_r} u_t(x.\nabla u)\,dx\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2r}\int_0^T \int_{S_r} \|x\|^2\,[\,|u_t|^2 - |\nabla u|^2 - \alpha|u|^2]\,d\Gamma\,dt \\
&-\frac{1}{r}\int_0^T \int_{S_r} \|x\|^2 F(u)\,d\Gamma\,dt + \int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x.\nabla u)\,d\Gamma\,dt.
\end{aligned}
\tag{3.60}
$$

Note que se $k \neq j$, então

$$\sum_{j,\,k=1}^{n} \int_0^T \int_{B_r} \frac{\partial x_k}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt = 0.$$

Se $k = j$, resulta que

$$\sum_{k=1}^{n} \int_0^T \int_{B_r} \underbrace{\frac{\partial x_k}{\partial x_j}}_{=1}.\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx\,dt = \int_0^T \int_{B_r} |\nabla u|^2\,dx\,dt \tag{3.61}$$

temos que

$$div(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x}{\partial x_k} = n \tag{3.62}$$

e ainda, temos

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\;\nu + \nabla_T u. \tag{3.63}$$

O vetor gradiente pode ser decomposto como um vetor no plano tangente que chamamos gradiente tangêncial e outro na direção da normal dado por $(\nabla u.\nu)\nu$ ver [25].

Considerando a bola centrada na origem e x um vetor pertence a S_r, temos

$$x.\nabla u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\,(x.\nu) + \underbrace{x.\nabla_T\, u}_{=0 \text{ pois } x\perp\nabla_T\, u}. \tag{3.64}$$

De (3.64)vem que

$$\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,(x.\nabla u)\,d\Gamma\,dt = \int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,(x.\nu)\,d\Gamma\,dt=\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2(x.\nu)\,d\Gamma\,dt$$
$$\underbrace{=}_{\nu=\frac{x}{r}}\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 r^2\,\frac{1}{r}\,d\Gamma\,dt=r\int_0^T\int_{S_r}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma\,dt. \quad (3.65)$$

Usando (3.60),(3.61), (3.62)e (3.65) segue que

$$\frac{n}{2}\int_0^T\int_{B_r}\left[\,|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha|u|^2\,\right]dx\,dt-n\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt$$
$$=-\int_0^T\int_{B_r}a(x)\,u_t\,(x.\nabla u)\,dx\,dt-\left(\int_{B_r}u_t(x.\nabla u)\,dx\right)\Big|_0^T$$
$$+r\int_0^T\int_{S_r}\left[\frac{1}{2}|u_t|^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2-\frac{\alpha}{2}|u|^2-F(u)\right]d\Gamma\,dt$$
$$=-\int_0^T\int_{B_r}a(x)\,u_t\,(x.\nabla u)\,dx\,dt+A+B \quad (3.66)$$

onde,

$$A = -\left(\int_{B_r}u_t\,(x.\nabla u)\,dx\right)\Big|_0^T$$
$$B = r\int_0^T\int_{S_r}\left[\frac{1}{2}\,|u_t|^2-\frac{1}{2}\,|\nabla u|^2+\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2-\frac{\alpha}{2}|u|^2-F(u)\right]d\Gamma\,dt.$$

Por outro lado, aplicando (3.54) com $\varphi=1$ e multiplicando por $\beta\in\mathbb{R}$ temos,

$$\beta\int_0^T\int_{B_r}\left[\,|\nabla u|^2+(f(u)+\alpha u)u\,\right]dx\,dt = \beta\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2\,dx\,dt+\beta\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt$$
$$-\ \beta\left(\int_{B_r}\left[\left(u_t+a(x)\,\frac{u}{2}\right)u\right]dx\right)\Big|_0^T. \quad (3.67)$$

Somando (3.66) e (3.67) obtemos,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2\,dx\,dt+\left(1+\beta-\frac{n}{2}\right)\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&+\alpha\left(\beta-\frac{n}{2}\right)\int_0^T\int_{B_r}|u|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}(\,\beta f(u)\;u-nF(u)\,)\,dx\,dt\\
&=-\int_0^T\int_{B_r}a(x)u_t\;(x.\nabla u)\,dx\,dt+B+\beta\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\;u\;d\Gamma\,dt+D
\end{aligned}\tag{3.68}$$

onde,

$$D=A-\beta\left(\int_{B_r}\left[\left(u_t+a(x)\;\frac{u}{2}\right)u\right]\;dx\right)\Bigg|_0^T.$$

Para que $\left(\frac{n}{2}-\beta\right)$ e $\left(1+\beta-\frac{n}{2}\right)$ sejam positivos temos que

$$\frac{n}{2}-\beta>0\Longleftrightarrow\beta<\frac{n}{2}$$
$$1+\beta-\frac{n}{2}>0\Longleftrightarrow\beta>\frac{n}{2}-1=\frac{n-2}{2}.$$

Sendo assim, tome $\beta\in\left(\dfrac{n-2}{2}\;,\dfrac{n}{2}\right)$. Considerando agora a hipótese (ii) do teorema (3.2) ao qual supõe f superlinear temos que

$$\beta f(u)u-nF(u)\geq\beta(2+\delta)F(u)-nF(u)=F(u)\;[\,\beta(2+\delta)-n].$$

Para que $\beta(2+\delta)-n$ seja positivo temos que

$$\beta>\frac{n}{2+\delta}.$$

Precisamos ter

$$\begin{aligned}
\frac{n}{2+\delta}\geq\frac{n-2}{2}\quad&\Longleftrightarrow\quad(n-2)(2+\delta)\leq 2n\\
&\Longleftrightarrow\quad\delta(n-2)\leq 4\Longleftrightarrow\delta\leq\frac{4}{n-2}.
\end{aligned}$$

Porém,como esse δ não pode ser escolhido então, consideraremos um número auxiliar η^*, onde $\eta^* < min\left\{\delta,\ \dfrac{4}{n-2}\right\}$ daí temos que

$$0 < \eta^* < \delta \Longleftrightarrow 2 + \eta^* < 2 + \delta \Longleftrightarrow \frac{n}{2+\eta^*} > \frac{n}{2+\delta}.$$

Note que

$$\frac{n}{2+\eta^*} \in \left(\frac{n-2}{2}, \frac{n}{2}\right)$$

pois,

$$\begin{aligned} \eta^* < \frac{4}{n-2} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2 + \eta^* < \frac{2n}{n-2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2+\eta^*} > \frac{n-2}{2n} \Longrightarrow \frac{n}{2+\eta^*} > \frac{n-2}{2}, \ \text{ e} \end{aligned}$$

$$2 + \eta^* > 2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2+\eta^*} < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow \frac{n}{2+\eta^*} < \frac{n}{2}.$$

Considerando $\beta > \dfrac{n}{2+\eta^*} > \dfrac{n}{2+\delta}$ e $\eta = \beta(2+\delta) - n > 0$ ou seja $\beta(2+\delta) = \eta + n$.

Pela condição (ii)do teorema (3.2) temos que

$$\beta f(s)s \geq \beta(2+\delta)F(s) = (\eta + n)F(s) \tag{3.69}$$

ou seja,

$$\eta F(s) \leq \beta f(s)s - nF(s)$$

ou ainda,

$$\eta F(s) - \underbrace{\alpha\left(\frac{n}{2} - \beta\right)}_{=C} s^2 \leq \alpha\left(\beta - \frac{n}{2}\right) s^2 + \beta f(s)s - nF(s). \tag{3.70}$$

Para f satisfazendo a condição (i) do teorema (3.2) temos que existe C tal que

$$C = \left(\frac{n+\eta}{2}\right)\|f'\|_\infty + \left(\frac{n}{2} - \beta\right)\alpha > 0$$

que satisfaz a seguinte estimativa

$$\alpha\left(\beta-\frac{n}{2}\right)s^2+\beta f(s)s-nF(s)\geq \eta F(s)-Cs^2 \text{ para todo} s\in\mathbb{R}. \tag{3.71}$$

De fato,

Note que como $\beta>0$ e $f(s)s\geq 0$ para todo s real vem que

$$\beta f(s)s\geq 0$$

ou seja,

$$\beta f(s)s\geq (n+\eta)F(s)-(n+\eta)F(s). \tag{3.72}$$

Como $f'\in L^\infty(\mathbb{R})$, usaremos o mesmo argumento requerido para mostrar (3.31) que é o seguinte:

$$F(s)\leq \int_0^s |f(\theta)|d\theta\leq \int_0^s \|f'\|_\infty|\theta|d\theta=\|f'\|_\infty\frac{s^2}{2},$$

assim,

$$-(n+\eta)F(s)\geq -\left(\frac{n+\eta}{2}\right)\|f'\|_\infty s^2.$$

Logo, desta desigualdade e de (3.72), vem que

$$\beta f(s)s\geq (n+\eta)F(s)-\left(\frac{n+\eta}{2}\right)\|f'\|_\infty s^2$$

ou seja,

$$\alpha\left(\beta-\frac{n}{2}\right)s^2+\beta f(s)s\geq (n+\eta)F(s)-\left(\frac{n+\eta}{2}\right)\|f'\|_\infty s^2+\alpha\left(\beta-\frac{n}{2}\right)s^2,$$

donde, finalmente

$$\alpha\left(\beta-\frac{n}{2}\right)s^2+\beta f(s)s-nF(s)\geq \eta F(s)-\left(\frac{n+\eta}{2}\right)\|f'\|_\infty s^2-\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\alpha s^2,$$

o que prova o almejado.

De (3.68), (3.71) e (3.70) para ambas as condições temos a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
&2\left(\frac{n}{2}-\beta\right)\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2\,dx\,dt+2\left(1+\beta-\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&+2\left(\beta-\frac{n}{2}\right)\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\alpha|u|^2\,dx\,dt+\eta\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\\
&\leq-\int_0^T\int_{B_r}a(x)u_t\,(x.\nabla u)\,dx\,dt+\beta\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt+B+D.
\end{aligned}\tag{3.73}$$

Tomando $\alpha_0=mín\left\{2\left(\frac{n}{2}-\beta\right),2\left(1+\beta-\frac{n}{2}\right),\eta\right\}>0$ temos de (3.73) que

$$\begin{aligned}
&\alpha_0\left\{\frac{1}{2}\left[\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2\,dx\,dt\ +\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}\alpha|u|^2\,dx\,dt\right]\right.\\
&\left.+\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\right\}\\
&\leq-\int_0^T\int_{B_r}a(x)u_t\,(x.\nabla u)\,dx\,dt+\beta\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt+B+D.
\end{aligned}\tag{3.74}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T\int_{B_r}a(x)u_t\,(x.\nabla u)\,dx\,dt\right|\leq\int_0^T\int_{B_r}a(x)|u_t|\,|x|\,|\nabla u|\,dx\,dt\\
&=\int_0^T\int_{B_r}\frac{a(x)|u_t|\,|x|}{\sqrt{2\varepsilon}}\,|\nabla u|\sqrt{2\varepsilon}\,dx\,dt\\
&\leq\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}\frac{a(x)^2|u_t|^2\,|x|^2}{2\varepsilon}\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2 2\varepsilon\,dx\,dt\\
&\leq\frac{1}{4}\int_0^T\int_{B_r}\frac{a(x)a(x)|u_t|^2\,r^2}{\varepsilon}\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\varepsilon\,dx\,dt\\
&\leq\varepsilon\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt+\frac{r^2\|a\|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\int_0^T\int_{B_r}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt
\end{aligned}\tag{3.75}$$

para todo $\varepsilon > 0$. Usando (3.75) resulta de (3.74) que

$$\begin{aligned}
& \frac{\alpha_0}{2}\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2+\alpha|u|^2\,dx\,dt+(\alpha_0-2\varepsilon)\,\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\,dt \\
+ & \ \alpha_0\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\leq\frac{r^2\|a\|_{L_\infty(B_r)}}{4\varepsilon}\int_0^T\int_{B_r}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \\
+ & \ |\beta|\left|\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt\right|+|B|+|D|+\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}. \qquad (3.76)
\end{aligned}$$

Considere $\varepsilon < \dfrac{\alpha_0}{2}$, $\alpha_1 = \alpha_0 - 2\varepsilon > 0$, $C_0 = máx\left\{\dfrac{r^2\|a\|_{L^\infty(B_r)}}{4\varepsilon},\beta,1\right\}$ e $\alpha_2 = mín\{\alpha_1,\alpha_0\}$.

Daí de (3.76) vem que

$$\begin{aligned}
& \alpha_2\left\{\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}|u_t|^2+\alpha|u|^2+|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\right\} \qquad (3.77) \\
\leq & \ C_0\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt+\left|\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\ u\ d\Gamma\,dt\right|+|B|+|D|+\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}\right\}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = \dfrac{C_0}{\alpha_2}$ obtemos,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}[|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+|u_t|^2]\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt \qquad (3.78) \\
& \leq C\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt+\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\left|\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt\right|+|B|+|D|\right\}.
\end{aligned}$$

Considere $\varphi \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ com

$$0\leq\varphi\leq 1 \ \text{ em } \ B_r, \ \text{ com } \ R<r'<r;\varphi=1 \ \text{ em } \ S_r. \qquad (3.79)$$

Aplicando $\varphi\, x$ em (3.36) obtemos a seguinte identidade

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}[\nabla\varphi.x+n\varphi\,]\,[\,|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha|u|^2\,]\,dx\,dt\\
&-\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}[\nabla\varphi.x+n\varphi]F(u)\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,x_k\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt\\
&+\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}x_k+\varphi\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x_k}\right|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}au_t\varphi(x.\nabla u)\,dx\,dt\\
&=-\left(\int_{B_r}u_t\varphi(x\nabla u)\,dx\right)\Bigg|_0^T+\frac{1}{2r}\int_0^T\int_{S_r}\underbrace{\varphi}_{=1}\|x\|^2\,[\,|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha|u|^2\,]\,d\Gamma\,dt\\
&-\frac{1}{r}\int_0^T\int_{S_r}\varphi\|x\|^2F(u)\,d\Gamma\,dt+\int_0^T\int_{s_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\underbrace{\varphi}_{=1}(x.\nabla u)\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.80)
\end{aligned}
$$

Note que por (3.64)temos,

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\varphi\,(\,x.\nabla u\,)\,d\Gamma\,dt=\int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,\varphi\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,(x.\nu)\,d\Gamma\,dt\\
&\underbrace{=}_{\nu=\frac{x}{r}}\int_0^T\int_{S_r}\varphi\,\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,\frac{\|x\|^2}{\|x\|}\,d\Gamma\,dt=r\int_0^T\int_{S_r}\varphi\,\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

De (3.80),(3.81)e(3.79) obtemos a seguinte identidade

$$
\begin{aligned}
&r\int_0^T\int_{S_r}\left[\frac{1}{2}\,|u_t|^2-\frac{1}{2}|\nabla u|^2-\frac{\alpha}{2}|u|^2-F(u)+\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\right]\,d\Gamma\,dt\\
=\;&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}[\nabla\varphi.x+n\varphi\,]\,[\,|u_t|^2-|\nabla u|^2-\alpha|u|^2\,]\,dx\,dt\\
-\;&\int\int_{B_r\backslash B_{r'}}[\nabla\varphi.x+n\,\varphi\,]F(u)\,dx\,dt\\
+\;&\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,x_k+\varphi\right)|\nabla u|^2\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\,x_k\,\frac{\partial u}{\partial x_j}\,\frac{\partial u}{\partial x_k}\,dx\,dt\\
+\;&\int_0^T\int_{B_r\backslash B_{r'}}a(x)u_t\,\varphi\,(x.\nabla u)\,dx\,dt+\left(\int_{B_r}u_t\varphi\,(x.\nabla u)\,dx\right)\Bigg|_0^T. \qquad (3.82)
\end{aligned}
$$

Usando a identidade do lema (3.3) com φ satisfazendo (3.79) obtemos,

$$\begin{aligned}\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}\varphi[\,|\nabla u|^2 \;&+\; (f(u)+\alpha u)\,u]\,dx\,dt - \int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}[\,\varphi|u_t|^2 - u\,(\nabla\varphi.\nabla u)\,]\,dx\,dt\\ &+\; \left(\int_{B_r}\Big[\,u_t + a(x)\,\frac{u}{2}\Big]\,]\,\varphi u\,dx\right)\Bigg|_0^T = \int_0^T\int_{S_r}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,u\,d\Gamma\,dt. \qquad (3.83)\end{aligned}$$

Da identidade (3.82) e (3.69) resulta que

$$\begin{aligned}|B| \;&=\; \left|r\int_0^T\int_{S_r}\frac{1}{2}\,|u_t|^2 - \frac{1}{2}|\nabla u|^2 - \frac{\alpha}{2}|u|^2 - F(u) + \left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma\,dt\right|\\
&\le\; \frac{1}{2}(\,\|\nabla\varphi.x\|_\infty + \|n\varphi\|_\infty)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha|u|^2\,dx\,dt\\
&+\; (\,\|\nabla\varphi.x\|_\infty + \|n\varphi\|_\infty)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|F(u)|\,dx\,dt\\
&+\; (\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}\,x_k\right\|_\infty + \|\varphi\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})})\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&+\; r\|a\|_\infty\|\varphi\|_\infty\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|u_t|\,|\nabla u| + \left(\int_{B_r}u_t\varphi(x.\nabla u)\,dx\right)\Bigg|_0^T\\
&\le\; \frac{1}{2}(r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha|u|^2\,dx\,dt\\
&+\; (r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}\frac{|\beta|}{|n+\eta|}\,|f(u)u|\,dx\,dt\\
&+\; ((r+1)\|\varphi\|_{W^{1,\infty}} + \|\varphi\|_\infty)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&+\; \frac{r}{2}\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+\; \left(\frac{r}{2}\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty\right)\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}|\nabla u|^2\,dx\,dt + \|\varphi\|_\infty\left|\left(\int_{B_r}u_t x.\nabla u\,dx\right)\Bigg|_0^T\right| \qquad (3.84)\end{aligned}$$

ou seja,

$$
\begin{aligned}
&|B| \leq \frac{1}{2}(r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty + r\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty) \int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} |u_t|^2\,dx\,dt \\
&+ \Bigg(\frac{1}{2}\,r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + \frac{n}{2}\|\varphi\|_\infty + (r+1)\|\varphi\|_{W^{1,\infty}} \\
&+ \|\varphi\|_\infty + \frac{r}{2}\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty \Bigg) \int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} |\nabla u|^2\,dx\,dt \\
&+ \left(\frac{r}{2}\|\,\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty \right) \int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} \alpha|u|^2\,dx\,dt \\
&+ (r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty)\frac{|\beta|}{|n+\eta|} \int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} f(u)u\,dx\,dt + \|\varphi\|_\infty \left| \left(\int_{B_r} u_t\,x.\nabla u\,dx \right) \Bigg|_0^T \right|.
\end{aligned}
$$

Tomando

$$
\begin{aligned}
K_1 = m\acute{a}x \Bigg\{ &\|\varphi\|_\infty,\ \frac{1}{2}(r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty + r\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty), \\
&\frac{1}{2}\,r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty + (\,1+r)\|\varphi\|_{W^{1,\infty}} + \|\varphi\|_\infty + \frac{r}{2}\,\|a\|_\infty\,\|\varphi\|_\infty, \\
&\frac{|\beta|}{|n+\eta|}(r\,\|\nabla\varphi\|_\infty + n\|\varphi\|_\infty) \Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Vem que

$$
\begin{aligned}
|B| \quad \leq \quad & K_1 \left\{ \int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} [\,|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt \right. \\
+ \quad & \left. \left| \left(\int_{B_r} u_t\,x.\nabla u\,dx \right) \Bigg|_0^T \right| \right\}. \qquad (3.85)
\end{aligned}
$$

Agora, de (3.83) tem-se

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u \, d\Gamma\, dt\right| \leq \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |\varphi| \, [\, |\nabla u|^2 + f(u)u + \alpha |u|^2 \,] \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |\varphi| |u_t|^2 \, dx \, dt + \int \int_{B_r \setminus B_{r'}} |u| |\nabla \varphi| \, |\nabla u| \, dx \, dt \\
&+ \left| \left(\int_{B_r} \left[u_t + a(x) \, \frac{u}{2} \right] \varphi u \, dx \right) \Big|_0^T \right| \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} [\, |\nabla u|^2 + f(u)u + \alpha |u|^2 \,] + \|\varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |u_t|^2 \, dx \, dt \\
&+ \frac{1}{2} \, \|\nabla \varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \frac{1}{2\alpha} \, \|\nabla \varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} \alpha |u|^2 \, dx \, dt \\
&+ \left| \left(\int_{B_r} \left(u_t + \frac{a(x) u}{2} \right) \varphi u \, dx \right) \Big|_0^T \right| \\
&\leq \left(\|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_\infty \right) \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |\nabla u|^2 \, dx \, dt + \|\varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} f(u) u \, dx \, dt \\
&+ \left(\|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2\alpha} \|\nabla \varphi\|_\infty \right) \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} \alpha |u|^2 \, dx \, dt + \|\varphi\|_\infty \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |u_t|^2 \, dx \, dt \\
&+ \left| \left(\int_{B_r} \left(u_t + \frac{a(x) u}{2} \right) \varphi u \, dx \right) \Big|_0^T \right| .
\end{aligned} \tag{3.86}
$$

Considerando

$$
K_2 = m\acute{a}x \left\{ \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2} \|\nabla \varphi\|_\infty \,, \|\varphi\|_\infty + \frac{1}{2\alpha} \|\nabla \varphi\|_\infty \,, \|\varphi\|_\infty \,, 1 \right\},
$$

temos de (3.86) que

$$
\begin{aligned}
\left|\int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u \, d\Gamma\, dt\right| \;\; &\leq \;\; K_2 \left\{ \int_0^T \int_{B_r \setminus B_{r'}} |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + f(u) u \, dx \, dt \right. \\
&+ \;\; \left. \left| \left(\int_{B_r} \left(u_t + \frac{a(x) u}{2} \right) \varphi u \, dx \right) \Big|_0^T \right| \right\} .
\end{aligned}
$$

Usando (3.85) e a última desigualdade temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u\, d\Gamma\, dt\right| + |B| \\
&\leq (K_1 + K_2)\int_0^T \int_{B_r \backslash B_{r'}} [\, |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + f(u)u\,]\; dx\, dt \\
&+K_2 \left| \left(\int_{B_r} \left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \varphi\, u\, dx \right)\Big|_0^T \right| + K_1 \left| \left(\int_{B_r} u_t\, (x.\nabla u)\, dx \right)\Big|_0^T \right|. \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

Considerando $K_0 = K_1 + K_2$ segue que

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^T \int_{S_r} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, u\, d\Gamma\, dt\right| + |B| \\
&\leq K_0 \left\{ \int_0^T \int_{B_r \backslash B_{r'}} [\, |u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha |u|^2 + f(u)u\,]\; dx\, dt + |G| \right\} \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

onde $|G| = \left| \left(\int_{B_r} u_t(x.\nabla u)\; dx \right)\Big|_0^T \right| + \left| \left(\int_{B_r} \left(u_t + \frac{au}{2} \right) \varphi u\; dx \right)\Big|_0^T \right|.$

Finalmente aplicando a identidade do lema (3.3) em $B_{2r} \times (0,T)$ com $\varphi \in W^{1,\infty}(B_{2r})$ tal que

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 1 \text{ em } B_r,\; \varphi = 0 \text{ em } B_R,\; \varphi = 1 \text{ em } B_r \backslash B_{r'} \\ \text{com } R < r' < r,\; \varphi = 0 \text{ em } S_{2r}, \\ \dfrac{|\nabla \varphi|^2}{\varphi} \in L^\infty(B_{2r}). \end{cases} \qquad (3.89)$$

obtemos a identidade

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha u)u]\, dx\, dt = \int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi |u_t|^2\, dx\, dt \\
&- \int_0^T \int_{B_{2r}} u\, (\nabla \varphi . \nabla u)\, dx\, dt + \left(\int_{B_{2r}} - \left[\left(u_t + a\frac{u}{2} \right) \varphi\, u \right]\; dx \right)\Big|_0^T. \qquad (3.90)
\end{aligned}$$

Da identidade acima e (3.89) vem que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi[\,|\nabla u|^2 + f(u)u + \alpha|u|^2)\,]\,dx\,dt \leq \int_0^T \int_{B_{2r}} |u_t|^2\,dx\,dt \\
&+ \int_0^T \int_{B_{2r}} u\nabla\varphi.\nabla u\,dx\,dt + \left| - \left(\int_{B_{2r}} \left[\left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi\,u \right] \; dx \right) \Big|_0^T \right| \\
&= \frac{1}{a_0} \int_0^T \int_{B_{2r}} a_0|u_t|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_{2r}} |u\nabla\varphi.\nabla u|\,dx\,dt \\
&+ \left| - \left(\int_{B_{2r}} \left[\left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi\,u \right] \; dx \right) \Big|_0^T \right| \\
&\leq \frac{1}{a_0} \int_0^T \int_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_{2r}} |u\nabla\varphi.\nabla u|\,dx\,dt + |H| \qquad (3.91)
\end{aligned}$$

onde

$$H = - \left(\int_{B_{2r}} \left[\left(u_t + a(x)\frac{u}{2} \right) \varphi\,u \right] \; dx \right) \Big|_0^T.$$

Considerando $K_3 = máx \left\{ \frac{1}{a_0},\ 1 \right\}$ temos de (3.91) que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi[|\nabla u|^2 + (f(u) + \alpha u)u]\,dx\,dt \;&\leq\; K_3 \left\{ \int \int_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \right. \\
&+ \left. \int_0^T \int_{B_{2r}} u\,(\nabla\varphi.\nabla u)\,dx\,dt + |H| \right\}. \qquad (3.92)
\end{aligned}$$

Agora, observe que de (3.89) temos

$$\begin{aligned}
\int_0^T\int_{B_{2r}} |u\nabla\varphi.\nabla u|\,dx\,dt &= \int_0^T\int_{B_{2r}} \sqrt{\varphi}|\nabla u|\sqrt{2\varepsilon}\,\frac{|\nabla\varphi|\,|u|}{\sqrt{\varphi}\sqrt{2\varepsilon}}\,dx\,dt\\
&\leq \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2 2\varepsilon\,dx\,dt\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_{2r}} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi 2\varepsilon}\,|u|^2\,dx\,dt = \varepsilon\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2\,dx\,dt\\
&+ \frac{1}{4\varepsilon}\int_0^T\int_{B_{2r}} \frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}|u|^2\,dx\,dt\\
&\leq \varepsilon\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\frac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right\|_\infty \int_0^T\int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt\\
&\leq \varepsilon\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2\,dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}K_4\int_0^T\int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

para todo $\varepsilon > 0$ e $K_4 = \dfrac{1}{4}\left\|\dfrac{|\nabla\varphi|^2}{\varphi}\right\|_\infty$.

Combinando (3.92)e (3.93) com $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt \leq K_3\int_0^T\int_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+K_3\,\varepsilon\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2\,dx\,dt + K_3\frac{1}{\varepsilon}K_4\int_0^T\int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt + K_3|H| \qquad (3.94)
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
&(1 - K_3\,\varepsilon)\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi|\nabla u|^2\,dx\,dt + \int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi[\alpha|u|^2 + f(u)u]\,dx\,dt\\
&\leq K_3\int_0^T\int_{B_{2r}} a|u_t|^2\,dx\,dt + \frac{K_3\,K_4}{\varepsilon}\int_0^T\int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt + K_3|H|. \qquad (3.95)
\end{aligned}$$

Considerando $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{K_3}$ temos que $K_5 = m\acute{\imath}n\{1 - K_3\varepsilon,\, 1\} > 0$ daí temos de (3.95) que

$$\begin{aligned}
K_5\int_0^T\int_{B_{2r}} \varphi[|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u]\,dx\,dt &\leq K_3\int_0^T\int_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+ \frac{K_3K_4}{\varepsilon}\int_0^T\int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt + K_3|H|.
\end{aligned}$$

Dessa forma temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt &\leq \frac{K_3}{K_5}\int_0^T \int_{B_{2r}} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \\ &+ \frac{K_3\,K_4}{K_5\,\varepsilon}\int_0^T \int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt + \frac{K_3}{K_5}\,|H| \\ &\leq \frac{K_3}{K_5}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt \\ &+ \frac{K_3\,K_4}{K_5\,\varepsilon}\int \int_{B_{4r}} |u|^2\,dx\,dt + \frac{K_3}{K_5}\,|H|. \quad (3.96)\end{aligned}$$

Tomando $K = máx\left\{\dfrac{K_3}{K_5}, \dfrac{K_3K_4}{K_5\varepsilon}\right\}$ temos da desigualdade (3.96) que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{B_{2r}} \varphi[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt &\leq K\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right. \\ &+ \left.\int_0^T \int_{B_{2r}} |u|^2\,dx\,dt + |H|\right\}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} \varphi[\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt &\leq K\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right. \\ &+ \left.\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + |H|\right\}. \qquad (3.97)\end{aligned}$$

De (3.78) e (3.88) vem que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{B_r} [\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2\,]\,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_r} F(u)\,dx\,dt \\ &\leq C\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + C\,\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))} \\ &+CK_0\int_0^T \int_{B_r\setminus B_{r'}} [\,|u_t|^2 + |\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + f(u)u\,]\,dx\,dt + CK_0|G| + C|D|. (3.98)\end{aligned}$$

Dessa forma temos,

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}[|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+|u_t|^2]\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt+C\,\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\frac{CK_0}{a_0}\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}a_0|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+CK_0\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}[|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+f(u)u]\,dx\,dt+CK_0|G|+C|D| \qquad (3.99)
\end{aligned}
$$

e de, por (3.97) resulta que

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}[|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+|u_t|^2]\,dx\,dt+\int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\\
&\leq C\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt+C\,\|u\|^2_{L^2(B_r\times(0,T))}+\frac{CK_0}{a_0}\int_0^T\int_{B_r\setminus B_{r'}}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+CK_0K\int_0^T\int_{B_{2r}}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt+CK_0K\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))}+CK_0K|H|\\
&+CK_0|G|+C|D|\\
&\leq\left(C+\frac{CK_0}{a_0}+CK_0K\right)\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\\
&+(C+CK_0K)\,\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))}\,dx\,dt+CK_0K|H|+CK_0|G|+C|D|.
\end{aligned}
$$

Tomando $\lambda=m\acute{a}x\left\{C+\dfrac{CK_0}{a_0}+CK_0K,\,CK_0\right\}$ obtemos,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T\int_{B_r}[|\nabla u|^2+\alpha|u|^2+|u_t|^2]\,dx\,dt \quad &+\quad \int_0^T\int_{B_r}F(u)\,dx\,dt\leq\lambda\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n}a(x)|u_t|^2\,dx\,dt\right.\\
&+\quad \left.\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))}+|H|+|G|+|D|\right\}. \qquad (3.100)
\end{aligned}
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_r}u_t\,(x.\nabla u)\,dx &\leq (m\acute{a}x_{x\in\overline{B_r}}\,\|x\|)\int_{B_r}|u_t|\;|\nabla u|\,dx\\
&\leq 2r\left(\int_{B_r}|u_t|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{B_r}|\nabla u|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq 2r\|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq 2r\left(\frac{1}{2}\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right). \qquad (3.101)
\end{aligned}
$$

Daí,

$$\left(\int_{B_r} u_t \,(x.\nabla u)\; dx \right)\Bigg|_0^T \;\leq 2r(E(T)+E(0)) \leq rE(t). \tag{3.102}$$

Ainda, temos que

$$\begin{aligned} \beta \int_{B_r} u_t u \, dx &\leq \beta \left(\int_{B_r} |u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B_r} |u_t|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \beta \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \frac{\beta\lambda}{2} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\beta\lambda}{2} \|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \beta\lambda E(t). \end{aligned} \tag{3.103}$$

Sendo assim de (3.103) segue que

$$\beta \left(\int_{B_r} u_t u \; dx \right)\Bigg|_0^T \leq \; (\beta\lambda E(t))|_0^T \leq \beta\lambda(E(T)+E(0)). \tag{3.104}$$

Note ainda, que

$$\int_{B_r} u_t \, \varphi \, u \, dx = \|\varphi\|_\infty \int_{B_r} u_t \, u \, dx \leq \|\varphi\|_\infty \, \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \alpha^{-1} \|\varphi\|_\infty E(t).$$

Logo, obtemos,

$$\left(\int_{B_r} u_t \, \varphi \, \nabla u \; dx \right)\Bigg|_0^T \leq \alpha^{-1} \|\varphi\|_\infty (E(T)+E(0)) \tag{3.105}$$

e ainda,

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \beta \, a(x) \, \frac{u}{2} \, u \, dx &\leq \beta \|a\|_\infty \int_{B_r} uu \; dx \leq \beta \|a\|_\infty \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \, \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\beta \|a\|_\infty \, \frac{\alpha^{-1}\,\alpha}{2} \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2\beta \|a\|_\infty \, \alpha^{-1} \, E(t). \end{aligned} \tag{3.106}$$

Dessa forma temos,

$$\left(\int_{B_r} \beta \, a(x) \, \frac{u}{2} \, u \; dx \right)\Bigg|_0^T \leq 2\beta \|a\|_\infty \, \alpha^{-1} (E(T)+E(0)). \tag{3.107}$$

Analogamente usando temos,

$$\left| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(u_t + \frac{a(x)u}{2} \right) \varphi u \, dx \right) \Big|_0^T \right| \leq (\|\varphi\|_\infty + 2\|a\|_\infty \, \|\varphi\|_\infty \, \alpha^{-1})(E(T) + E(0)). \quad (3.108)$$

Das a desigualdades acima resulta que

$$\begin{aligned} & |H| + |G| + |D| \\ & \leq [r + \beta\lambda + 2\beta\, \alpha^{-1}\|a\|_\infty + \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty + 2(\|\varphi\|_\infty + 2\|a\|_\infty \, \|\varphi\|_\infty) \, \alpha^{-1} \,](E(T) + E(0)). \end{aligned}$$

Considerando, $R_0 = r + \beta\lambda + 2\beta\alpha^{-1}\|a\|_\infty + \alpha^{-1}\|\varphi\|_\infty + 2(\|\varphi\|_\infty + 2\|a\|_\infty \, \alpha^{-1} \, \|\varphi\|_\infty)$,e usando a identidade da energia

$$E(T) - E(0) = -\int_0^T a(x) \, |u_t|^2 \, dx \, dt$$

temos:

$$|H| + |G| + |D| \leq R_0(E(T) + E(0)) = R_0 \left\{ 2E(T) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a|u_t|^2 \, dx \, dt \right\}. \quad (3.109)$$

Das desigualdades (3.100) e (3.109) vem que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} [|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2] \, dx \, dt + \int_0^T \int_{B_r} F(u) \, dx \, dt \\ & \leq \lambda \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 + \lambda\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} \, dx \, dt \\ & +2\lambda R_0 E(T) + \lambda R_0 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a|u_t|^2 \, dx \, dt \\ & = \lambda(1 + R_0) \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 \, dx \, dt + \lambda\|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + 2\lambda R_0 E(T). \quad (3.110) \end{aligned}$$

Tomando $R_r = máx\{\lambda(1 + R_0), \, 2\lambda R_0\}$ temos de (3.110) que

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{B_r} [\, |\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2 \,] \, dx \, dt + \int_0^T \int_{B_r} F(u) \, dx \, dt \\ & \leq R_r \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 \, dx \, dt + \|u\|^2_{L^2(B_{2r}\times(0,T))} + E(T) \right\}. \quad (3.111) \end{aligned}$$

□

Lema 3.5. *Existe $K > 0$ tal que para todo $T > K$, existe uma constante $C(T) > 0$ tal que*

$$E(T) \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2 + \|u\|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \right\}. \tag{3.112}$$

Demonstração: Reescrevendo (3.17) e (3.59) para $r = 2R$ deduzimos, respectivamente:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Omega_{2R}} [\,|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2\,]\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\Omega_{2R}} F(u)\,dx\,dt \\
&\leq C\left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + \|u\|^2_{L^2(B_{2R}X(0,T))} + E(T) \right\}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

e

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{B_{2R}} [|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2]\,dx\,dt + \int_0^T \int_{B_{2R}} F(u)\,dx\,dt \\
&\leq C_r\left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + \|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))} + E(T) \right\}.
\end{aligned} \tag{3.114}$$

Combinando (3.113) e (3.114), obtemos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u|^2 + \alpha|u|^2 + |u_t|^2]\,dx\,dt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} F(u)\,dx\,dt \\
&\leq (C + C_r)\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + (C + C_r)\|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))} + (C + C_r)E(T).
\end{aligned}$$

Tomando $K = (C + C_r)$; temos

$$\int_0^T E(T)\,dt \leq K\left\{ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + \|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))} + E(T) \right\} \tag{3.115}$$

com $K > 0$ e com K que não depende de T .

Por outro lado, note que

$$\int_0^T E(t)\,dt \geq \int_0^T mín\{E(t)\}dt = mín\{E(t)\}.T = T.E(T)$$

ou seja,

$$\int_0^T E(t)\,dt \geq T.E(T). \tag{3.116}$$

Usando (3.116) vem de (3.115), que

$$T.E(T) \leq K\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + \|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))} + E(T)\right\}. \tag{3.117}$$

De (3.117)resulta para $T > K$ que

$$(T-K)E(T) \leq K\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + T_1\|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))} \tag{3.118}$$

ou seja,

$$E(T) \leq \frac{K}{(T-K)}\left\{\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt + T_1\|u\|^2_{L^2(B_{4R}X(0,T))}\right\}. \tag{3.119}$$

E finalmente tomando $C = \dfrac{K}{(T-K)}$, obtemos a estimativa desejada.

□

Lema 3.6. *Seja $T_0 > 0$ suficientemente grande. Então, para todo $T > T_0$ existe uma constante $C(T_0,\, E(0)) > 0$ tal que*

$$\|u\|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \leq C(T_0,\, E(0))\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_t|^2\,dx\,dt. \tag{3.120}$$

Demonstração:

A demonstração será feita por contradição.

Assuma que a estimativa (3.120) não se verifica. Então existe uma seqüência de dados iniciais $\{u_{0,\mu},\, u_{1,\mu}\} \in H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ que corresponde a uma seqüência $\{u_\mu\}$ de soluções de (3.1) que satisfaz

$$\begin{cases} (u_\mu)_{tt} - \Delta u_\mu + \alpha u_\mu + f(u_\mu) + a(x)(u_\mu)_t = 0 \;\; em \;\; \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ u_\mu(0) = (u_0)_\mu \in H^1(\mathbb{R}^n), \quad (u_\mu)_t(0) = (u_1)_\mu \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.121}$$

de forma que

$$\frac{\|u_\mu\|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(u_\mu)_t|^2\,dx\,dt} \longrightarrow +\infty : \quad \mu \longrightarrow \infty, \tag{3.122}$$

enquanto $E_\mu(0)$ permanece uniformemente limitada, ou seja, existe $M > 0$ tal que $E_\mu(0) \leq M$. Como a energia é decrescente então:

$$E(t) \leq E(0) \leq M, \qquad \forall\; t \in [0,T].$$

Dessa forma temos que

$$u_\mu \rightharpoonup u \qquad \text{fraco em} \quad H^1(\mathbb{R}^n \times (0,T)), \tag{3.123}$$

$$(u_\mu)_t \rightharpoonup u_t \qquad \text{fraco em} \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.124}$$

De (3.123) temos que $u_\mu \rightharpoonup u$ fraco em $H^1(B_{4R} \times (0,T))$. De $\{u_\mu\}$ ser limitada em $H^1(B_{4R}\times(0,T))$ e do fato de $H^1(B_{4R}\times(0,T))$ ter imersão compacta em $L^2(B_{4R}\times(0,T))$ (ver proposição 1.8) usando o teorema de Aubin - Lions (1.1) resulta que

$$u_\mu \longrightarrow u \;\text{ forte em}\quad L^2(B_{4R} \times (0,T)), \tag{3.125}$$

$$u_\mu \longrightarrow u \quad \text{q.s. em} \quad B_{4R} \times (0,T). \tag{3.126}$$

Existem duas possiblidades para o limite de $\{u_\mu\}$: $u \neq 0$ ou $u = 0$.

a) Se $u \neq 0$ temos de (3.122) e do fato que u_μ é limitada em $L^2(B_{4R} \times (0,T))$ que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(u_\mu)_t|^2\,dx\,dt \longrightarrow 0, \quad \mu \longrightarrow \infty. \tag{3.127}$$

Logo,

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} |a(x)^{\frac{1}{2}}(u_\mu)_t|^2\,dx\,dt \longrightarrow 0, \quad \mu \longrightarrow \infty.$$

que implica que

$$a^{\frac{1}{2}}(u_\mu)_t \longrightarrow 0 \text{ forte em } \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.128}$$

Por outro lado, notemos que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)^{\frac{1}{2}}(u_\mu)_t\, \psi\, dx\, dt \longrightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)^{\frac{1}{2}} u_t\, \psi\, dx\, dt \;\; \forall \psi \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)).$$

ou seja,

$$a^{\frac{1}{2}}(u_\mu)_t \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}} u_t \quad \text{ fraco em } \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.129}$$

Pela unicidade de limite fraco de (3.128) e (3.129) obtemos $a^{\frac{1}{2}} u_t = 0$. Multiplicando a igualdade por $a^{\frac{1}{2}}$ temos,

$$a\, u_t = 0 \quad \text{em} \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.130}$$

Logo,

$$a\, u_t = 0 \quad \text{q.s. em} \quad \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Portanto,

$$u_t = 0 \quad \text{ q.s. em } \quad \{a > 0\} \times (0,T) \tag{3.131}$$

Nosso objetivo agora é provar que $f(u_\mu) \rightharpoonup f(u)$ fraco em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

Note que f é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

De fato, da condição de crescimento imposta à f e da imersão $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r$ onde, $r \in \left[2, \dfrac{2n}{n-2}\right]$, temos:

$$\begin{aligned} \|f(u_\mu)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))} &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |f(u_\mu)|^2\, dx\, dt \le \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} [\, |u_\mu|^2 + |u_\mu|^{2p}\,]\, dx\, dt \\ &\le \overline{C}\, \|u_\mu\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^n))}; \quad \overline{C} > 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|f(u_\mu)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n\times(0,T))} \leq \overline{C}\ \|u_\mu\|_{L^\infty((0,T);H^1(\mathbb{R}^n))} \leq L. \tag{3.132}$$

Veja que de (3.132) temos em verdade que

$$\|f(u_\mu)\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \widetilde{L} \quad \forall\ n \in \mathbb{N}. \tag{3.133}$$

Dessa forma

$$f(u_\mu) \rightharpoonup \chi \quad \text{fraco em } \ L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)). \tag{3.134}$$

Observe ainda que

$$u_\mu \rightharpoonup u \quad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)) \tag{3.135}$$

Definindo

$$B_i = \{x \in \mathbb{R}^n\ : \|x\|_{\mathbb{R}^n} \leq i : \ \ i \in \mathbb{N}\}$$

e de (3.133) resulta que

$$\|f(u_\mu)\|_{L^2(0,T;L^2(B_i))} \leq L$$

Note que L que não depende de i, onde i o raio da bola com centro na origem.

Pelo teorema de Aubin-Lions em cada bola temos que existe uma subseqüência $\{u_{\mu,i}\}$ de $\{u_\mu\}$ tal que em virtude de (3.135) temos

$$u_{\mu,\,i} \longrightarrow u \quad \text{em } \ L^2(0,T;L^2(B_i)).$$

(Note que o limite u de $\{u_{\mu,i}\}$ não depende de i em virtude de (3.135).)

Logo,

$$u_{\mu,i} \longrightarrow u \quad \text{ q.s. em } B_i \times (0,T).$$

Donde, pela continuidade da f

$$f(u_{\mu,i}) \longrightarrow f(u) \qquad \text{q.s. em } B_i \times (0,T).$$

Pelo Lema de Lions vem que

$$f(u_{\mu,i}) \rightharpoonup f(u) \qquad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;L^2(B_i)). \tag{3.136}$$

Combinando (3.134) e (3.136) temos

$$f(u) = \chi.$$

Portanto,

$$f(u_\mu) \rightharpoonup f(u) \qquad \text{fraco em} \quad L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^n)).$$

Seja $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $w \in H^1(\mathbb{R}^n)$ perceba que

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle (u_\mu)_{tt}, w\rangle \theta(t)\,dt + \int_0^T \langle -\Delta u_\mu, w\rangle \theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T \langle u_\mu, w\rangle \theta(t)\,dt \\
&+ \int_0^T \langle f(u_\mu), w\rangle \theta(t)\,dt + \int_0^T \langle a(u_\mu)_t, w\rangle \theta(t)\,dt \\
&= \int_0^T ((u_\mu)_t, w)\theta'(t)\,dt + \int_0^T (\nabla u_\mu, \nabla w)\theta(t)\,dt + \alpha\int_0^T (u_\mu, w)\theta(t)\,dt \\
&+ \int_0^T (f(u_\mu), w)\theta(t)\,dt + \int_0^T (a(u_\mu)_t, w)\theta(t)\,dt
\end{aligned}$$

onde $\langle\, .\,,\,.\,\rangle$ representa a dualidade $(H^1(\mathbb{R}^n))' \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Na situação limite obtemos de (3.123), (3.124), (3.127), (3.130) e (3.136)

$$\left\{\begin{array}{ll}
u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u) = 0 & \text{em} \quad \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \\
 & \\
u_t = 0 & \text{em } \{a > 0\} \times (0,T).
\end{array}\right. \tag{3.137}$$

Derivando a equação no sentido das distribuições temos, para $\psi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ que

$$\langle u_{ttt} - \Delta u_t + \alpha u_t + f'(u)u_t, \psi\rangle = -\langle u_{tt} - \Delta u + \alpha u + f(u), \psi'\rangle = 0.$$

Logo,

$$\begin{cases} u_{ttt} - \Delta u_t + \alpha u_t + f'(u)u_t = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \\ \\ u_t = 0 \qquad\qquad \text{em } \{a > 0\} \times (0,T). \end{cases} \tag{3.138}$$

Note que temos a seguinte desigualdade pelas condições de f

$$|f'(u)| \leq C\left(1 + |u|^{p-1}\right) \tag{3.139}$$

Sabemos que $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ e por interplolação $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n)$ $\forall\ r \in \left[2, \dfrac{2n}{n-2}\right]$.

Note que $0 \leq n(p-1) \leq \dfrac{n}{n-2}$ para termos $n(p-1) \geq 2$ consideremos $\dfrac{5}{3} \leq p \leq \dfrac{n}{n-2}$. Daí por (3.139) e interpolação obtemos que $f'(u) \in L^\infty(0,T; L^n(\mathbb{R}^n))$.

Denotando $w = u_t$ temos de (3.138) que

$$\begin{cases} w_{tt} - \Delta w + \alpha w + f'(u)w = 0 \quad \text{em } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \times (0,T)) \\ \\ w = 0 \quad \text{em } \{a > 0\} \times (0,T). \end{cases}$$

Como $w = 0$ sobre $\{a > 0\} \times (0,T)$ usando o teorema de continuação única de Ruiz (ver (1.4)) temos que, se T é suficientemente grande, $w = 0$ sobre $\mathbb{R}^n \times (0,T)$.

Portanto, retornando a (3.137) obtemos

$$-\Delta u + \underbrace{\alpha u}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} + \underbrace{f(u)}_{\in L^2(\mathbb{R}^n)} = 0 \qquad \text{em } L^2(\mathbb{R}^n).$$

Logo, $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Sendo assim, $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ e é válida a identidade.

$$-\int_{\mathbb{R}^n} \Delta u u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha u \, u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(u) u \, dx = 0.$$

Por Green resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \alpha |u|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} f(u) u \, dx = 0.$$

Como $\alpha > 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} f(u)u \geq 0$ concluímos que $u = 0$ q.s. em $\mathbb{R}^n$ o que é absurdo pois $u \neq 0$.

b) Se $u = 0$ definamos:

$$\lambda_\mu = \|u_\mu\|_{L^2(B_{4R} \times (0,T))} \tag{3.140}$$

e

$$v_\mu(x,t) = \frac{u_\mu(x,t)}{\lambda_\mu}. \tag{3.141}$$

Se multiplicarmos por $\dfrac{1}{\lambda_\mu}$ o problema (3.1) com respeito a seqüência $\{u_\mu\}$ teremos que v_μ satisfaz o seguinte sistema

$$\begin{cases} (v_\mu)_{tt} - \Delta v_\mu + \alpha v_\mu + f_\mu(v_\mu) + a(x)(v_\mu)_t = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ \\ (u_0)_\mu = (v_0)_\mu \in H^1(\mathbb{R}^n) \quad (u_\mu)_t(0) = (v_1)_t(0) \in L^2(\mathbb{R}^n) \end{cases} \tag{3.142}$$

onde

$$f_\mu(s) = \frac{1}{\lambda_\mu} f(\lambda_\mu s); \quad \forall\, s \in \mathbb{R}; \quad \forall\, \mu \in \mathbb{N}. \tag{3.143}$$

Por outro lado,note que

$$\|v_\mu\|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1. \tag{3.144}$$

De (3.122) temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\|u_\mu\|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\lambda_\mu^2}}{\dfrac{\displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(u_\mu)_t|^2 dxdt}{\lambda_\mu^2}} = \infty.$$

Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|v_\mu\|^2_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}}{\displaystyle\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_\mu)_t|^2\, dx\, dt} = \infty. \tag{3.145}$$

Logo, de (3.144) e de (3.145) vem que

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_\mu)_t|^2\, dx\, dt \to 0. \tag{3.146}$$

Dividindo ambos os membros da desigualdade (3.112) por λ_μ^2, teremos

$$\frac{E_\mu(T)}{\lambda_\mu^2} \;\; \leq \;\; C\left\{\int_0^T\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|(v_\mu)_t|^2\, dx\, dt + \;1\right\} \leq M, \quad M>0.$$

Considerando

$$\widetilde{E}_\mu(t) = \frac{1}{2}\|v_n'\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{1}{2}\|\nabla v_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} + \frac{\alpha}{2}\|v_\mu\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

temos que

$$\widetilde{E}_\mu(t) \leq \frac{E_n(t)}{\lambda_n^2} \leq M, \tag{3.147}$$

e daí resulta

$$v_\mu \rightharpoonup v \quad \text{fraco em } H^1(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.148}$$

Novamente do fato que $\{v_\mu\}$ é limitada em $H^1(B_{4R} \times (0,T))$ e a imersão de $H^1(B_{4R} \times (0,T))$ em $L^2(B_{4R} \times (0,T))$ é compacta, pelo Teorema de Aubin-Lions resulta que

$$\begin{cases} v_\mu \to v \quad \text{forte em} \quad L^2(B_{4R} \times (0,T)) \\ v_\mu \to v \quad \text{q.s. em} \quad B_{4R} \times (0,T). \end{cases} \tag{3.149}$$

De (3.149), obtemos que

$$\|v_\mu\|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} \to \|v\|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))}$$

e (3.144) resulta que

$$\|v\|_{L^2(B_{4R}\times(0,T))} = 1. \tag{3.150}$$

Note que em (3.146) equivale dizer que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} |a(x)^{\frac{1}{2}}(x)(v_\mu)_t|^2 dxdt \to 0.$$

Logo,

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_\mu)_t \longrightarrow 0 \quad \text{forte em} \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.151}$$

Por outro lado, de (3.148), temos que $(v_\mu)_t \rightharpoonup v_t$ fraco em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$, o que nos diz que

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)^{\frac{1}{2}}(x)(v_\mu)_t \, \psi \, dx \, dt \to \int_0^T \int_{\mathbb{R}^n} a(x)^{\frac{1}{2}}(x) v_t \, \psi \, dx \, dt,$$

para toda $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

Assim,

$$a^{\frac{1}{2}}(x)(v_\mu)_t \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}}(x)v_t, \tag{3.152}$$

De (3.151), (3.152) e pela unicidade do limite fraco, obtemos que $a^{\frac{1}{2}}(x)v_t = 0$.

Multiplicando esta igualdade por $a^{\frac{1}{2}}$, teremos que

$$a(x)v_t = 0 \quad \text{ em } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

e conseqüentemente $a(x)v_t = 0$ em $B_{4R} \times (0,T)$.

Portanto,

$$v_t = 0 \quad \text{ q.s. em } \{a > 0\} \times (0,T). \tag{3.153}$$

Definamos agora a seguinte aplicação:

$$h(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & \text{se } z \neq 0 \\ 0, & \text{se } z = 0 \end{cases}$$

Veja que $h \geq 0$, pela condição (3.3).

Observe que se $s \neq 0$ temos

$$f_\mu(s) = \frac{f_\mu(s)}{s} s = h_\mu(s)s = \frac{f(\lambda_\mu s)s}{\lambda_\mu s} = h(\lambda_\mu s)\, s$$

para todo s real e μ natural.

Vamos mostrar que $\{\, h_\mu(v_\mu)\,\}$ acima definida é limitada em $L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$.

Com efeito,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |h_\mu(v_\mu)|^2\, dx = \frac{1}{\lambda_\mu^2}\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda_\mu v_\mu)|^2\, dx \leq \frac{1}{\lambda_\mu^2}\int_{\mathbb{R}^n} [\, C(\, 1 + |\lambda_\mu v_\mu|^{p-1}\,)\, |\lambda_\mu v_\mu|\,]^2\, dx$$
$$\leq \frac{1}{\lambda_\mu^2}\int_{\mathbb{R}^n} C\, [\, |\lambda_\mu v_\mu|^2 + |\lambda_\mu v_\mu|^{2p}\,]\, dx = C\int_{\mathbb{R}^n} |v_\mu|^2\, dx + |\lambda_\mu|^{2(p-1)}\int_{\mathbb{R}^n} |v_\mu|^{2p}\, dx.$$

Note que de (3.125) e de (3.140) temos que $\lambda_\mu^{2(p-1)} \leq K$; onde $K > 0$. Portanto, da desigualdade acima, do fato que $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^r(\mathbb{R}^n);\ r \in \left[2, \frac{2n}{n-2}\right]$ e de (3.147) resulta o desejado.

Logo, existe uma subseqüência que ainda denotaremos por $\{h_\mu(v_\mu)\}$ tal que

$$h_\mu(v_\mu) \rightharpoonup p(x,t) \quad \text{fraco em } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

para algum $p \in L^2_+(B_{4R} \times (0,T))$. Note que $p \geq 0$ uma vez que $h_\mu(v_\mu) \geq 0$.

Nosso, objetivo agora é passar o limite em (3.142).

Como

$$h_\mu(v_\mu) \rightharpoonup p(x,t) \quad \text{fraco em } L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))$$

e

$$v_\mu \longrightarrow v \quad \text{forte em} \quad L^2(B_{4R} \times (0,T)) \tag{3.154}$$

então,

$$f_\mu(v_\mu) = h_\mu(v_\mu)v_\mu \rightharpoonup p(x,t)v \quad \text{fraco em} \quad L^2(B_{4R} \times (0,T)). \tag{3.155}$$

Note que para $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$, temos

$$h_\mu(v_\mu(x,t)) = \frac{f_n(v_\mu(x,t))}{v_\mu(x,t)} = \frac{f(\lambda_\mu v_\mu(x,t))}{\lambda_\mu v_\mu(x,t)} = \frac{f(\lambda_\mu v_\mu(x,t)) - f(0)}{\lambda_\mu v_\mu(x,t) - 0}.$$

Então para quase todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times (0,T)$, temos que

$$h_\mu(v_\mu(x,t)) \longrightarrow f'(0) \quad \text{q.s. em } \mathbb{R}^n \times (0,T).$$

Por outro lado, sabemos que $\|h_\mu(v_\mu)\|_{L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T))} \leq K$ então pelo lema de Lions

$$h_\mu(v_\mu(x,t)) \rightharpoonup f'(0) \qquad \text{fraco em} \quad L^2(\mathbb{R}^n \times (0,T)). \tag{3.156}$$

De (3.155), (3.156),(3.154) e da unicidade do limite fraco vem que

$$p(x,t)v = f'(0)v \quad \text{q.s. em} \quad B_{4R} \times (0,T) \tag{3.157}$$

Com as convergêcias obtidas anteriormente podemos passar o limite na equação (3.142) obtendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} v'' - \Delta v + \alpha v + f'(0)v = 0 & \text{q.s. em} \quad \mathcal{D}'(B_{4R} \times (0,T)) \\ \\ v' = 0 & \text{q.s. em} \quad (B_{4R} \backslash B_R) \times (0,T) \end{array} \right. \tag{3.158}$$

Derivando (3.158) no sentido das distibuições obtemos

$$v''' - \Delta v' + \alpha v' + f'(0)v' = 0 \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(B_{4R} \times (0,T)).$$

Considerando $v' = w$ obtemos da equação acima e de (3.158) que

$$\left\{ \begin{array}{ll} w'' - \Delta w + \alpha w + f'(0)w = 0 & \text{q.s. em} \quad \mathcal{D}'(B_{4R} \times (0,T)) \\ \\ w = 0 & \text{q.s. em} \quad (B_{4R} \backslash B_R) \times (0,T). \end{array} \right. \tag{3.159}$$

Usando argumentos de continuação única temos que $w = 0$ q.s. em $B_{4R} \times (0,T)$.

Logo, de (3.158) resulta que

$$-\Delta v + \alpha v + f'(0)v = 0 \quad \text{q.s. em} \quad \mathcal{D}'(B_{4R} \times (0,T)).$$

Compondo a equação acima com v, integrando em $B_{4R} \times (0,T)$ e usando o teorema de Geen obtemos

$$\int_0^T \int_{B_{4R}} |\nabla v|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{B_{4R}} \alpha |v|^2 \, dx \, dt + \int_0^T \int_{B_{4R}} f'(0)|v|^2 \, dx \, dt = 0.$$

Como $\alpha > 0$ e $f'(0) > 0$ temos da equação acima que $v = 0$ o que contraria (3.150) e conclui a prova.

$\square$

Bibliografia

[1] Adams, R. A. Sobolev Spaces. New York: Academic Press, 1975.

[2] Aubin, J. A. Approximation of Ellipitic Boundary Value Problems. New York: Wiley Intersience, 1972.

[3] Bardos, C. *Personal Communication* .

[4] Bardos, C. *Contròle stabilisation dans les problèmes hyperboliques*, Appendix II in J-L. Lions.

[5] Bardos, C., Lebeau, G. and Rauch, J. *Sharp sufficient con ditions for the observation, control and stabilization of waves from the boundary*, SIAM J. Control Optim., 30 (1992), pp. 1024–1065.

[6] Bartle, R. G. The Elements of Real Analysis. New York, J. Wiley, 1964.

[7] Brézis, H. Opérateurs Maximal Monotones et Semi-Groupes de Contractions dans les espaces de Hilbert, Amsterdam, North-Holland, 1973.

[8] Brézis, H. - Analyse Fontionelle - Théorie et Applications. Paris: Masson, 1973.

[9] Cavalcanti, M. M. , Domingos Cavalcanti, V. N. Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, Vol. I e II. Maringá: Textos do Dep. de Matemática - UEM, 2000.

[10] Cavalcanti, M. M. , Domingos Cavalcanti, V. N., T.F.MA, Soriano, J.A. *Global Existence And Asymptotic Stability For Viscoelastic Problems* , Differential and Integral Equation, Volume 15, 2002, 731-748.

[11] Cavalcanti, M. M. , Domingos Cavalcanti, V. N.,Martinez *Existence and decay rate estimates for the wave equation with nonlinear boundary damping and source term*, Journal of Differential Equation, 203,2004 , 119-158.

[12] Dafermos, C. M. *Asymptotic behaviour of solutions of evolution equations* , in Nonlinear Evolution Equations, M. C. Crandall Ed., Academis Press, New York, 1978, 103-123.

[13] Dautray, R., Lions, J. L. Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology, V.3. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[14] Gomes, Alvércio Moreira. Semigrupos de Operadores Lineares e Aplicações às Equações de Evolução. Rio de Janeiro: UFRJ. IM, 2000.

[15] Grisvard, P. Ellipitic Problems in Nonsmooth Domains. London: Pitman Publishing Limited, 1985.

[16] Haraux, A. *Semilinear Hyperbolic problems in bounded domains* , Math. Rep.,(1987), 3, Part1, J. Dieudonné Ed. Harwood Academic Plublishers, Gordon & Breach.

[17] Haraux, A. *Une remarque sur la stabilization de certains systèmes du deuxième ordre en temps*, Portugalie Mathematica, **46**(3), (1989), 245-258.

[18] Haraux, A. *Stabilization of trajetories for some weakly damped hyperbolic equations* J. Differential Equations **59**, (1985), 145-154.

[19] Haraux, A. and Zuazua, E. *Decay estiamtes for some semil linear damped hyperbolic problems*, Arquives for Rational Mechanics and Analysis, **100**(2), (1988), 191-206.

[20] Kesavan, S. Topics in Functional Analysis and Applications. New Delhi: Willey Easten Limited, 1990.

[21] Komornik, V. Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method. Paris: John Wiley and Sons-Masson, 1994.

[22] Lasiecka, I., Tataru, D. *Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equation with Nonlinear Boundary Damping* Differential and Integral Equation, Volume 6, 1993, 507-533

[23] Lima, E. L. Curso de Análise, Vol. 1, IMPA/CNPq, Projeto Euclides, Rio de Janeiro, 1976.

[24] Lions, J. L. Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires. Paris: Dunod, 1969.

[25] Lions, J. L. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1. Contrôlabilitéxacte, RMA 8, Masson, 1988.

[26] Lions, J. L. and Magenes, E. Problèmes aux Limites nonHomogènes, Aplications. Paris: Dunod, Vol. 1, 1968.

[27] Medeiros, L. A. Mello, E. A. A Integral de Lebesgue. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos **18**, UFRJ, 1985.

[28] Medeiros, L. A. Rivera, P. H. Espaços de Sobolev e Equações Diferenciais Parciais. Rio de Janeiro: Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, 1975.

[29] Milla Miranda, M. *Traço para o dual dos Espaços de Sobolev,* Bol. Soc. Paran. Mat. (2^a série), Vol.**11**, N.2 , p. 131-157, 1990.

[30] Rauch, J. and Taylor, M. *Exponenial decay of solutions to hyperbolic equations in bounded domains*, Indiana Univ. Math. J. **24** 1974), 79-86.

[31] Raviart, P. A. Thomas, J. M. Introduction à l' Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles. Paris: Masson, Paris, 1983.

[32] A. Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential,* J. Math. Pures Appl., **71** (1992), 455-467.

[33] Simon, J. *Compact Sets in the Space* $L^p(0,T;B)$, 66-96.

[34] Zuazua, E. *Stability and decay for a class of nonlinear hyperbolic problems* , Asymptotic Anal. I, (1988).

[35] Zuazua, E. *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Commun. Partial Diff. Equations, **15**(2), (1990), 205-235.

[36] Zuazua, E. *Exponential decay for the semilinear wave equation with localized Damping in Unbounded Domains*, J. Math pures et appl. , **70**, (1991), 513-529.