# Existência global e taxa de decaimento para a equação da onda em domínios exteriores com dissipação localizada.

**Lucineide Keime Nakayama**

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Valéria Neves Domingos Cavalcanti

Maringá - PR

2007

# Existência global e taxa de decaimento para a equação da onda em domínios exteriores com dissipação localizada.

**Lucineide Keime Nakayama**

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Valéria Neves Domingos Cavalcanti - UEM.....................................................
(Orientador)

Prof. Marcelo Moreira Cavalcanti-UEM ..................................................

Prof. Jaime Edilberto Munõz Rivera - UFRJ ....................................................

Maringá

Março, 2007

**Em memória de meu pai.**

# Agradecimentos

Primeiramente gostaria de agradecer a Deus, pela oportunidade e pela força para a realização deste trabalho.

Agradeço também a professora Dra. Valéria Neves Domingos Cavalcanti, pela orientação e por compartilhar conosco a sabedoria de um verdadeiro mestre.

A minha família pelo apoio em cada momento difícil que aqui passei, em especial minha irmã gêmea Luciana Kemie Nakayama que esteve sempre perto de mim e com muito carinho e paciência me ajudou a superar os obstáculos para poder concluir este trabalho.

Quero também prestar minha homenagem a um homem muito importante na minha vida, meu pai, que infelizmente não pode ver o término desta dissertação, mas que deixou para mim um exemplo de caráter, respeito e disciplina.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica.

A Capes, pelo apoio financeiro.

Aos professores e amigos Heloisa L. Q. G. da Costa , João Carlos da Motta Ferreira, Sonia Regina Di Giacomo e Elisabete Sousa Freitas , pelos incentivos e pelos valiosos conselhos.

Ao meu namorado Juliano de Andrade que com muito amor, paciência e companheirismo esteve ao meu lado e soube me dar força para seguir em frente.

Aos meus amigos que estiveram comigo nesta etapa da minha vida, em especial Marieli Musial, Tais Leite Teixera, Joelma Barros Rodrigues, Ester de Arruda Campos, Janete de Paula Ferrareze, Gilson Tumeleiro e Fernando Pereira de Souza.

Enfim quero agradecer a todas as pessoas que direta ou indiretamente me ajudaram na realização deste trabalho.

# Resumo


Neste trabalho provaremos a existência, unicidade de solução e fornecemos taxa de decaimento para a energia associada ao problema

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + |u|^\rho u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ x \in \Omega; \end{cases}$$

onde $\Omega$ é um domínio exterior do $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma$ e $a(x)$ é uma função não negativa sobre $\overline{\Omega}$ e $\rho$ está nas condições das Imersões de Sobolev.

# Abstract

In this work we prove the existence, uniqueness of solution and we give decay rate for the energy associated to the problem

$$\left\{\begin{array}{l} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + |u|^\rho u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega \times (0, +\infty) \\ u = 0 \quad \text{em} \quad \Gamma \times (0, +\infty) \\ u(x,0) = u^0(x),\ u_t(x,0) = u^1(x),\ x \in \Omega; \end{array}\right.$$

when $\Omega$ is an exterior domain of $\mathbb{R}^n$, $\partial\Omega = \Gamma$ and $a(x)$ is nonnegative function on $\overline{\Omega}$ and $\rho$ satisfies the Sobolev imbedding conditions

# Sumário

# Introdução

Este trabalho é dedicado ao estudo da existência global de solução bem como das taxas de decaimento da energia associada à equação da onda semilinear com dissipação localizada no interior do domínio

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + |u|^\rho u = 0 \ q.s. \ \ em \ \ \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 \ \ em \ \ \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(0) = u^0 \ \ ; \ \ u_t(0) = u^1. \end{cases}$$

onde $\Omega$ um domínio exterior em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ tal que $A = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, $a(x)$ é uma função não negativa e $\rho$ está nas condições da Imersão de Sobolev.

Nosso objetivo é apresentar didaticamente e com mais detalhes alguns aspectos do trabalho [23] de Mitsuhiro Nakao.

Dentre a vasta literatura que podemos citar relacionada à domínios exteriores consideremos, inicialmente, a equação linear da onda

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = 0 \ q.s. \ \ em \ \ \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 \ \ em \ \ \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(0) = u^0 \ \ ; \ \ u_t(0) = u^1. \end{cases}$$

E. Zuazua [28] e M. Nakao [18] consideraram problemas de Cauchy em domínios exteriores para a equação da onda do tipo Klein-Gordon com dissipação localizada lineares e não-lineares, respectivamente.

Mais recentemente, em [20], M. Nakao estudou o problema de Cauchy em todo o $\mathbb{R}^n$ para a equação da onda semilinear com $a(x)$ =constante $> 0$. Ainda, considerando $a(x)$ =constante $> 0$, Y. Shibata [26] considerou o problema em domínios exteriores para a equação da onda mais forte não linear, no entanto, considerou dados iniciais bem regulares, C. Zuily [29] também provou a existência global de soluções regulares para a equação da onda fortemente não linear com dissipação.

Em [21], M. Nakao obteve taxa de decaimento para a energia do sistema dado por

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t = f(u) \ q.s. \ em \ \Omega \times (0, +\infty)$$

onde o termo de fonte não linear $f(u)$ é do tipo $f(u) = |u|^{\alpha}u, \ \ \alpha > 0$.

De modo a obter as estimativas para a equação linear, M. Nakao considerou técnicas desenvolvidas por ele mesmo em [19] e por K. Mochizuki e H. Nakazawa em [17].

A organização deste trabalho é a seguinte: No capítulo 1 apresentamos algumas notações e resultados básicos, necessários ao desenvolvimento do estudo feito. No capítulo 2 provamos a existência e unicidade de solução global para o problema proposto e no capítulo 3 exibimos taxa de decaimento para a energia do sistema.

# Capítulo 1

# Preliminares

Neste capítulo, enumeraremos alguns resultados que serão usados no desenvolvimento do nosso trabalho. Por serem resultados familiares, colocaremos apenas os seus enunciados, deixando a cargo do leitor interessado a busca de suas demonstrações.

## 1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

### 1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuirem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por $D^\alpha$ o operador derivação de ordem $\alpha$ definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ o conjunto das funções $\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em $\Omega$ e que tem suporte compacto, onde suporte $\varphi$ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em $\Omega$, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}}^{\Omega}$.

Introduzimos uma topologia em $C_0^\infty$ considerada pela seguinte definição de limite.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K$ de $\Omega$, tal que:

**i)** $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

**ii)** $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre $K$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2º) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definimos como distribuição sobre $\Omega$ a toda forma linear e contínua com relação ao limite definido em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre $\Omega$ é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre $\Omega$, munido da seguinte noção de convergência: Seja $(T_\nu)$ uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3º) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de 1936, uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam $u, v$ definidas num aberto limitado $\Omega$ do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira $\Gamma$ é regular. Suponhamos que $u$ e $v$ possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se $u$ ou $v$ se anula sobre $\Gamma$, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em $\Omega$, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x) dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora, tal conceito de derivada ter sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial, ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja $T$ uma distribuição sobre $\Omega$ e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. a derivada de ordem $\alpha$ de $T$, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle; \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada $T$ associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

### 1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em $\Omega$ com valores em $\mathbb{K}$ tais que $u$ seja mensurável e $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em $\Omega$.

**Teorema 1.1. (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue)** - *Seja $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função $u$. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então $u$ é integrável e ainda*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu\to\infty} \int_\Omega u_\nu.$$

**Demonstração**: Ver [12].

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \operatorname{ess}|u(x)|, \textit{ para } p = +\infty,$$

é um espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

**Proposição 1.2. (Desigualdade de Young)** - *Sejam $1 < p\,, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ e $a, b > 0$. Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Demonstração**: Ver [2].

**Proposição 1.3. (Desigualdade de Minkowski)** - *Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f, g$ em $L^p(\Omega)$, então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

**Demonstração**: Ver [12].

**Proposição 1.4. (Desigualdade de Hölder)** - *Sejam $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Então $uv \in L^1(\Omega)$ e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Demonstração**: Ver [2].

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

**Corolário 1.5. (Desigualdade de Hölder generalizada)** - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\dfrac{1}{p_1} + \dfrac{1}{p_2} + \ldots + \dfrac{1}{p_k} = \dfrac{1}{p}$ *e* $\dfrac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

**Proposição 1.6. (Desigualdade de Interpolação)** - *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e se tem a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

*onde* $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\theta}{p} + \dfrac{1-\theta}{q}$.

**Demonstração**: Ver [14].

Além dos resultados acima, temos que:

**i)** $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

**ii)** $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iii)** $C_0^\infty$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

**iv)** Se $(f_n)$ é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência $(f_{n_k})$ tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em $\Omega$.

**Proposição 1.7. (Teorema da Representação de Riesz)** - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

**Demonstração**: Ver [2].

Quando $p = \infty$, temos:

**Proposição 1.8.** *Seja* $\varphi \in \left(L^1(\Omega)\right)^{'}$*, então existe uma única* $u \in L^{\infty}(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx,\ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

**Demonstração**: Ver [2].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto $K$ de $\Omega$ munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão $u_\nu$ converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto $K$ de $\Omega$ tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

**Proposição 1.9. (Lema de Du Bois Raymond)** - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* $\Omega$*. Onde* $T_u$ *é a distribuição definida por* $\langle T_u, \varphi\rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx,\ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [13].

Desta proposição tem-se que $T_u$ fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em $\Omega$.

**Proposição 1.10.** *Seja* $(u_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$*, tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$*, então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [1].

### 1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que $u$ possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |D^\alpha u(x)|, \text{ para } p = \infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

É sabido que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é, $\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega)$.

Mostra-se que $W_0^{m,p}$ é o espaço vetorial das funções $u \in W^{m,p}$ tais que $u|_\Gamma = 0$, onde $\Gamma = \partial\Omega$.

**Observação:** Quando $\Omega$ é um aberto limitado em alguma direção $x_i$ de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$ consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\| = \left( \sum_{|\alpha| = m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços que utilizaremos ao longo deste trabalho, vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$.

Para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^{\infty}(\mathbb{R}^n);\ \lim\limits_{\|x\|\to\infty} p(x)D^{\alpha}\varphi(x) = 0$, para todo polinômio $p$ de $n$ variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente descrescente no infinito, $S'$ o dual topológico de $S$, também conhecido como espaço das distribuições temperadas, e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de $u$ definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y)dy,$$

onde $(x, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definimos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{u \in S';\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))'$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Seja $\Omega$ um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$\begin{array}{rcl} r_{\Omega} : L^2(\mathbb{R}^n) & \to & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & u|_{\Omega} \end{array}$$

que leva $u$ na sua restrição a $\Omega$. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{v|_{\Omega};\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = (H^s_0(\Omega))' \text{ onde } H^s_0(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

**Teorema 1.11. (Imersão de Sobolev)** - *Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\ se\, m > \frac{n}{2} + k.$$

**Demonstração**: Ver [1].

**Proposição 1.12.** *Sejam $\Omega$ um conjunto aberto do $\mathbb{R}^n$, de classe $C^m$, com fronteira limitada e $m$ um inteiro tal que $m \geq 1$; e $1 \leq p < \infty$. Então temos as segintes imersões contínuas:*

*se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n}$,

*se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

*se* $\frac{1}{p} - \frac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

**Demonstração**: Ver [3].

**Teorema 1.13. (Teorema de Rellich Kondrachov)** - *Seja* $\Omega$ *um subconjunto aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$, $\Omega$ *de classe* $C^1$ *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*

*se* $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

*se* $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

*se* $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

**Demonstração**: Ver [3].

**Notação:** $\overset{c}{\hookrightarrow}$ indica imersão compacta.

**Proposição 1.14. (Desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg**)

*Se* $1 \leq p < n$, *então*

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n),$$

*onde* $p*$ *vem dado por* $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, *existe uma constante* $C = C(p, n)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C\|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

**Demonstração**: Ver [2].

**Teorema 1.15.** *Quando* $n > 2$ *temos a inclusão* $H^1(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^\rho(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $\rho$ *satisfazendo* $2 \leq \rho \leq p$, *onde* $p$ *é dado por:* $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

**Demonstração**: Ver [6].

### 1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Seja $X$ um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \mapsto X$ indefinidamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se:

**i)** $\exists K$ compacto de $(0,T)$ tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em $K$, $\forall \nu$;

**ii)** Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em $X$ uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em $X$ será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em $X$. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em $X$, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em $X$.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;X)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach (das classes) de funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ fortemente mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido do produto interno $(u,v) = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$ se $X$ é Hilbert. Denotaremos por $H_0^1(0,T;X)$ o espaço de Hilbert

$$H_0^1(0,T;X) = \{v \in L^2(0,T;X); v' \in L^2(0,T;X),\ v(0) = v(T) = 0\},$$

munido do produto interno

$$((v,w)) = \int_0^T (v(t), w(t))_X dt + \int_0^T (v'(t), w'(t))_X dt.$$

Identificando $L^2(0,T;X)$ com o seu dual $\left(L^2(0,T;X)\right)'$, via teorema de Riesz, obtemos então

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^1(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$$

onde

$$H^{-1}(0,T;X) = \left(H^{-1}(0,T;X)\right)'.$$

**Proposição 1.16.** *Seja $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi\rangle = (\langle u', \theta\rangle \xi)_X, \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T), \ \forall\, \xi \in X.$$

**Demonstração**: Ver [15].

Baseado na proposição anterior, identificamos $f$ com $u'$. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

**Proposição 1.17.** *A aplicação*

$$u \in L^2(0,T;X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$$

*onde $X$ é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.*

**Demonstração**: Ver [15].

### 1.1.5 Funções Escalarmente Contínuas

Seja $X$ um espaço de Banach. Definimos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x\rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall\, x \in X'$, onde $X'$ é dual de $X$. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\}$, onde $u'$ é a derivada de $u$ no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}$.

**Observação:** Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.

**Lema 1.18.** *Sejam $X$ e $Y$ dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e $X$ um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

**Demonstração**: Ver [9].

## 1.2 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou $\Omega$ um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais $w$ definidas em $\Gamma$, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função $u$ definida em $\overline{\Omega}$, representa-se por $\gamma_0 u$ a restrição de $u$ a $\Gamma$.

**Proposição 1.19.** *Existe uma constante positiva $C$ tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}\Gamma} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

*para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.*

**Demonstração**: Ver [14].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.19 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por $\gamma_0$, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função traço.

**Teorema 1.20.** *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$e o núcleo de $\gamma_0$ é o espaço $H^1_0(\Omega)$.*

**Demonstração**: Ver [14].

Consideremos, agora, $\Omega$ uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira $\Gamma$ bem regular, e seja $\nu$ a normal unitária exterior em $\Gamma$. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_\Gamma$ a derivada normal de ordem $j$ de $u$ e $\gamma_0 u\, u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.21.** *Existe uma única aplicação linear e contínua $\gamma$ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,,\ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

*Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.*

**Demonstração**: Ver [14].

Além desses resultados, considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos produtos internos $(u,v)_0 = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $(u,v)_0 = (u,v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall\, u\,, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente, temos os seguintes resultados:

**Proposição 1.22.** *A aplicação linear $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ definida por $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) \ &\to \ H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u \ &\mapsto \ \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

*Além disso, a aplicação $\gamma$ acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.*

**Demonstração**: Ver [4].

**Proposição 1.23.** *A aplicação linear* $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \;\; \to \;\; H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

**Demonstração**: Ver [4].

### 1.2.1 Traço em $L^2(0,T;H^m(\Omega))$.

Pelo visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.1}$$

que é linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, e admite uma inversa à direita linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & L^2(0,T;H^m(\Omega)) & \to & L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.2}$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.1) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.1) e (1.2) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.2) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita $\tau$ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega)), ; \gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.3}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \to & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.4}$$

que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.2).

**Proposição 1.24.** *Seja* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *com* $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então* $\gamma u' = (\gamma u)'$.

**Demonstração**: Ver [4].

### 1.2.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e $M$ o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ dos vetores $\{\alpha, \beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & M^\perp \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{array} \tag{1.5}$$

onde $\{\phi_f^0, \psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| + \|\{\phi_f^0, \psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v')$ $= \langle f, v\rangle \; \forall v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f, \psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f$. A aplicação definida em (1.5) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ defini-se $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \tag{1.6}$$

$w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{cccc} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & H^{-1}\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma} f \end{array} \tag{1.7}$$

$\widetilde{\gamma} f$ definido por (1.6), que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim são válidos os seguintes resultados:

**Proposição 1.25.** *Se* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma} u.$$

**Proposição 1.26.** *Se* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então*

$$\widetilde{\gamma} u' = (\gamma u)'.$$

**Teorema 1.27.** *A aplicação traço (1.7) é sobrejetora, seu núcleo é $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, e admite uma inversa à direita $\widetilde{\tau}: H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \to H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ linear e contínua.*

**Observação 1.28.** *Além desses resultados se considerarmos os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ ou $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ em vez de $H^m(\Omega)$ em conjunto com as proposições 1.22 e 1.23 obteremos a existência das aplicações*

$$\gamma : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

*e*

$$\gamma_1 : H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

## 1.3 Teorema de Carathéodory

Nesta seção enunciaremos o teorema de Carathéodory que será utilizado no capítulo 2. O teorema nos fornece a existência de solução para um problema de Cauchy em um intervalo $[0,t_m]$, para cada $m \in \mathbb{N}$. A demonstração deste resultado pode ser encontrada em [5].

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um conjunto aberto cujos elementos são denotados por $(t,x)$, $t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^n$ e seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ uma função.

Consideremos o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x'(t) = f(t,x(t)), \\ x(t_0) = x_0, \end{cases} \tag{1.8}$$

Dizemos que $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfaz as condições de Carathéodory sobre $\Omega$ se:

(i) $f(t,x)$ é mensurável em $t$ para cada $x$ fixado;

(ii) $f(t,x)$ é contínua em $x$ para quase todo $t$ fixado;

(iii) para cada compacto $K \subset \Omega$, existe uma função real $m_K(t)$, integrável, tal que

$$\|f(t,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq m_K(t),\ \forall (t,x) \in K.$$

**Teorema 1.29. (Teorema de Carathéodory)** - *Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ satisfazendo as condições de Carathéodory sobre $\Omega$. Então existe uma solução $x(t)$ de (1.8) sobre algum intervalo $|t - t_0| \leq \beta$, $\beta > 0$.*

**Corolário 1.30.** *Sejam $\Omega = [0, T[\times B$ com $T > 0$, $B = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq b\}$ onde $b > 0$ e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ nas condições de Carathéodory sobre $\Omega$. Suponhamos que $x(t)$ é uma solução de (1.8) tal que $|x_0| \leq b$ e que em qualquer intervalo $I$, onde $x(t)$ está definida, se tenha $|x(t)| \leq M$, $\forall t \in I$, $M$ independente de $I$ e $M < b$. Então $x(t)$ possui um prolongamento à todo $[0, T]$.*

## 1.4 Resultados auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão utilizados ao longo de todo o trabalho.

**Proposição 1.31. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** - *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

**Definição 1.32.** *Seja $E$ um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre $E$ é a topologia menos fina sobre $E$ que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência de $E$ a qual converge para $x$ em $E$ na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$. Utilizamos, neste caso, a seguinte notação:

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

**Proposição 1.33.** *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $E$, então:*

*(i) $x_n \rightharpoonup x$ em $E$ se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall f \in E'$.*

*(ii) Se $x_n \to x$ em $E$, então $x_n \rightharpoonup x em E$.*

*(iii) Se $x_n \rightharpoonup x em E$, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \lim inf \|x_n\|_E$.*

*(iv) Se $x_n \rightharpoonup x em E$ e $f_n \to f$ em $E'$, então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.*

**Demonstração**: Ver [2].

Seja $E$ um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f \rangle = \langle f, x \rangle.$$

As aplicações $J_x$ são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

**Definição 1.34.** *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre $E'$ que torna contínuas todas as aplicações $J_x$.*

**Proposição 1.35.** *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em $E'$, então:*

*(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $E'$ se, e somente se, $\langle f_n, x \rangle \to \langle f, x \rangle$, $\forall x \in E$.*

*(ii) Se $f_n \to f$ em $E'$, então $f_n \rightharpoonup f$ em $E'$.*

*(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ em $E'$, então $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ em $E'$.*

**Demonstração**: Ver [2].

**Lema 1.36.** *Sejam $E$ um espaço de Banach reflexivo e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $E$, então existe uma subseqüência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $x \in E$, tal que*

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \text{ fracamente em } E.$$

**Demonstração**: Ver [2].

**Lema 1.37.** *Sejam $E$ um espaço de Banach separável e $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência limitada em $E'$, então existe uma subseqüência $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e $f \in E'$, tal que*

$$f_{n_k} \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

**Demonstração**: Ver [2].

**Lema 1.38. (Lema de Gronwall)** - *Sejam $z \in L^\infty(0,T)$ e $f \in L^1(0,T)$ tais que $z(t) \geq 0$, $f(t) \geq 0$ e seja $c$ uma constante não negativa. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \ \forall t \in [0,T],$$

*então*

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \ \forall t \in [0,T].$$

**Demonstração**: Ver [11].

**Lema 1.39.** *Seja $\Omega$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ de classe $C^\infty$. Sejam $s_1, s_2$ e $s_3$ números reais tais que*

$$s_1 > s_2 > s_3.$$

*Então, para todo $\eta > 0$ existe uma constante $C(\eta)$ tal que*

$$\|u\|_{H^{s_2}(\Omega)} \leq \eta \|u\|_{H^{s_1}(\Omega)} + C(\eta)\|u\|_{H^{s_3}(\Omega)}, \quad \forall u \in H^{s_1}(\Omega).$$

**Demonstração**: Ver [9].

**Proposição 1.40. (Teorema de Aubin-Lions)** - *Sejam $B_0, B, B_1$ três espaços de Banach tais que $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$, onde $B_0$ e $B_1$ são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), \ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

*onde $1 < p_0, p_1 < \infty$, e consideremos $W$ munido da norma*

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

*o que o torna um espaço de Banach. Então, a imersão de $W$ em $L^{p_0}(0,T;B)$ é compacta.*

**Proposição 1.41. (Lema de Lions)** - *Seja $(u_\nu)$ uma sucessão de funções pertencentes à $L^q(Q)$ com $1 < q < \infty$. Se*

*(i) $u_\nu \to u$ quase sempre em $Q$*

*(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq C, \ \forall \nu \in \mathbb{N}$;*

*então $u_\nu \rightharpoonup u$ fraco em $L^q(Q)$.*

**Proposição 1.42. (Fórmula de Gauss e a Fórmula de Green)** - *Seja* $\Omega$ *um aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$. *Se* $u, v \in H^1(\Omega)$, *então para* $1 \leq i \leq n$ *temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

*onde* $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *e* $\nu$ *denota o vetor normal unitário exterior à* $\Gamma$.

*Se* $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$, *temos a fórmula de Green:*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

**Demonstração**: Ver [4].

**Proposição 1.43. (Fórmula de Green generalizada)** - *Para todo* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$*e* $v \in H^1(\Omega)$, *tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)},$$

*onde* $\Gamma = \partial\Omega$.

**Demonstração**: Ver [4].

**Proposição 1.44. (Regularidade dos problemas elípticos)** - *Seja* $\Omega$ *um aberto de classe* $C^2$ *com fronteira* $\Gamma$ *limitada. Sejam* $f \in L^2(\Omega)$ *e* $u \in H_0^1(\Omega)$, *verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

*Então,* $u \in H^2(\Omega)$ *e* $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|_{L^2(\Omega)}$, *onde* $c$ *é uma constante que só depende de* $\Omega$. *Além disso, se* $\Omega$ *é de classe* $C^{m+2}$ *e* $f \in H^m(\Omega)$, *então* $u \in H^{m+2}(\Omega)$ *com* $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; *em particular, se* $m > \frac{n}{2}$ *então* $u \in C^2(\overline{\Omega})$. *Ainda, se* $\Omega$ *é de classe* $C^\infty$ *e* $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, *então* $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

**Demonstração**: Ver [2].

**Teorema 1.45. (Propriedade de Continuação Única)** *Assuma que* $u$ *pertença ao espaço* $L^2(\Omega \times (0,T))$ *e seja uma solução fraca de* $\Box u + v(x,t)\, u = 0$ *em* $\Omega \times (0,T)$, *(onde $\Box$ é o operador D'Alembertiano) tal que $T > diam\,\Omega$ e $v \in L^\infty(0,T;L^n(\Omega))$, onde $\Omega$ é um aberto do $\mathbb{R}^n$.*

*Então se $u = 0$ em algum conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n/\, a(x) > 0\} \times (0,T)$, temos que $u \equiv 0$.*

**Demonstração**: Ver [25].

**Lema 1.46.** *Sejam $H$ e $V$ espaços de Banach, tais que $H \hookrightarrow V$. Se $u \in L^1(0,T;H)$ e $u' \in L^1(0,T;V)$ então $u \in C^0([0,T];V)$.*

**Demonstração**: Ver [24].

**Teorema 1.47. (Regra da Cadeia)** *Seja $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tal que $G(0) = 0$ e $|G'(s)| \leq M$ para todo $s \in \mathbb{R}$. Seja $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então a função $G \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(G \circ u) = (G' \circ u)\frac{\partial u}{\partial x_i},\ 1 \leq i \leq n.$$

**Demonstração**: Ver [7].

**Observação 1.48.** *É conveniente observar uma conseqüência muito útil da desigualdade de Hölder: Seja $f_1, f_2, ..., f_k$ funções tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega)\ \ 1 \leq i \leq k\ \ \textit{com}\ \ \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + ... + \frac{1}{p_k}.$$

*Então o produto $f = f_1 f_2 .... f_k \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} ... \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

*Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leqq\leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ se verifica a desigualdade de interpolação.*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}\ \ \textit{onde}\ \ \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}\ \ (0 \leq \alpha \leq 1).$$

## 1.5 Teoria Espectral

**Teorema 1.49. (Teorema Espectral para Operadores compactos Auto-Adjuntos em Espaço de Hilbert)** *-Sejam $H$ um espaço de Hilbert real e $A \in \mathfrak{L}(H)$ tais que a $dim H = +\infty$ e $A$ seja compacto e auto-adjunto. Então*

1. $0 \in \sigma(A)$;

2. $\sigma(A) \backslash \{0\} = VP(A) \backslash \{0\}$;

3. $\sigma(A) \backslash \{0\} = VP(A) \backslash \{0\}$ *é finito ou no máximo enumerável. Se* $\sigma(A) \backslash \{0\}$ $= \{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, *então* $|\lambda_n| \geq |\lambda_{n+1}|$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\lambda_n \to 0$ *quando* $n \to \infty$;

4. $\lambda_1 = max\{|m|, |M|\}$, *onde* $m = inf_{\|u\|=1,\, u \in H}\{(Au, u)\}$ *e* $M = max_{\|u\|=1,\, u \in H}\{(Au, u)\}$;

5. *os vetores próprios correspondentes aos* $\lambda_n' s$, $\{w_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset H$, *formam uma seqüência ortonormal em* $H$.

6. *para cada* $v \in H$, *temos que*
$$Av = \sum_{n=1}^{\infty} (Av, w_n) w_n = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (v, w_n) w_n;$$

7. *para cada* $u \in H$, *temos* $u = u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (u, w_n) w_n$, *onde* $u_0 \in Ker(A)$;

**Corolário 1.50.** *Sejam $H$ espaço de Hilbert separável real com $dim H = +\infty$, e $B : D(B) \subseteq H \to H$, linear, auto-adjunto, $((Bu, u) \geq 0)$, $\forall\, u \in D(B)$, $B$ bijetivo, $\overline{D(B)} = H$, $B$ operador não limitado de $H$. Suponhamos que $D(B)$ esta imerso compactamente em $H$. Suponhamos que $D(B)$ é um espaço de Banach com a norma do gráfico $\|u\|_{D(B)} = (\|u\|_H^2 + \|Bu\|_H^2)^2$. Então:*

1. $\|u\|_1 = \|Bu\|_H$ *é também uma norma em* $D(B)$ *equivalente a norma do gráfico;*

2. $B^{-1} : H \to H$ *satisfaz as hipóteses do Teorema Espectral;*

3. *existe uma seqüência* $\{w_n\}_n \subset D(B)$ *no máximo enumerável e seqüência* $\{\mu_n\}_n \subset \mathbb{R}, 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$ *com* $\mu_n \to \infty$ *tal que* $Bw_n = \mu_n w_n, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$;

4. *os* $w_n'$*s formam uma base Hilbertiana para H;*

5. $D(B)$ *é um espaço de Hilbert com relação aos produtos internos induzidos pelas normas* $\|.\|_{D(B)}$ *e* $\|.\|_1$;

6. $(z_n)_n = (\dfrac{w_n}{\mu_n})$ *é base Hilbertiana* $(D(B), \|.\|_1)$. *Em particular, para todo* $v \in D(B)$ *tem-se* $v = \sum_{n=1}^{\infty}(v, z_n)z_n$.

**Proposição 1.51.** *O operador* $-\Delta : H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ *satisfaz as hipóteses do corolário do Teorema Espectral.*

As demonstrações dos resultados anteriores podem ser encontradas em Milla [16].

# Capítulo 2

# Existência e Unicidade de Solução

Nos resultados a seguir omitiremos, eventualmente, as variáveis de modo a não sobrecarregarmos a notação. Usaremos , também, as notações $u_t$ e $u'$ para denotarmos a derivada de $u$ em relação ao parâmetro $t$.

Seja $\Omega$ um domínio exterior do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de modo que $A = \mathbb{R}^n \backslash \Omega$ é um conjunto compacto do $\mathbb{R}^n$, com fronteira $\partial\Omega = \Gamma$ de classe $\mathcal{C}^2$, e seja $\nu$ o vetor normal unitário exterior à $\Gamma$. Consideremos o seguinte problema

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + |u|^\rho u = 0 \ \text{ em } \ \Omega \times ]0, +\infty[ \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = u^0(x) \ , \ \ u_t(x,0) = u^1(x) \ \text{ em } \ \Omega \tag{2.2}$$

$$u = 0 \ \text{ sobre } \ \Gamma \times ]0, +\infty[. \tag{2.3}$$

No que segue utilizaremos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} (u,v) &= \int_\Omega u(x)v(x)dx, \\ \|u\|_2^2 &= \int_\Omega |u(x)|^2 dx, \\ \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} &= \|u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2. \end{aligned}$$

**Hipótese sobre** $\rho$ :

(H.1)-Considere $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$0 < \rho \leq \frac{2}{n-2}, \ \textit{e} \ \rho n \geq 2 \ \text{ para } \ n \geq 3 \ \textit{e} \ \rho > 0 \ \textit{com} \ \rho n \geq 2 \ \textit{se} \ n = 1, 2.$$

**Hipótese sobre as condições iniciais** :

(H.2)-Assuma que:

$$\{u^0, u^1\} \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$$

(H.3)-Assuma que:

$$\{u^0, u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

**Hipótese sobre a função *a***:

(H.4)- Considere $a(.)$ uma função não negativa definida sobre $\overline{\Omega}$, pertencente a $L^\infty(\Omega)$.

A energia associada ao problema (2.1) é dada pela seguinte expressão

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx. \tag{2.4}$$

Nas seções que seguem, demonstraremos a existência e a unicidade para o problema (2.1)-(2.3) utilizando o método de Galerkin para a prova da existência. Os principais resultados estão enunciados nos teoremas abaixo.

**Teorema 2.1.** *Sob as hipóteses (H.1), (H.2) e (H.4) o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução regular. Entendemos por solução regular do problema (2.1)-(2.3) uma função u tal que*

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ u' &\in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega)), \\ u'' &\in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \end{aligned} \tag{2.5}$$

*verificando*

$$u_{tt} - \Delta u + a(x)u_t + |u|^\rho u = 0 \ q.s. \ em \ \Omega \times (0,T)$$

**Proposição 2.2.** *Sob as hipóteses do Teorema 2.1 o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução u tal que*

$$u \in \mathcal{C}_s(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s^1(0,T; H_0^1(\Omega)) \ \ e \ \ u'' \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.6}$$

**Teorema 2.3.** *Sob as hipóteses (H.1), (H.3) e (H.4) o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução fraca, ou seja, a solução u satisfaz*

$$u \in \mathcal{C}^0([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap \mathcal{C}^1([0,T]; L^2(\Omega)) \quad com \ u'' \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.7}$$

*e verifica*

$$\frac{d}{dt}(u'(t), v) + (\nabla u, \nabla v) + (a(x)u'(t), v) + (|u(t)|^\rho u(t), v) = 0 \ \ em \ \mathcal{D}'(0,T),$$

*para toda* $v \in H_0^1(\Omega)$.

## 2.1 Solução Regular

### 2.1.1 Existência de solução regular

Considere $\{w_\mu\}$ uma base de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Definamos,

$$V_m = [w_1, ..., w_m] \tag{2.8}$$

e consideremos o problema aproximado

$$\begin{cases} u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j \in V_m \\ (u_m''(t), v) + (\nabla u_m(t), \nabla v) + (a(x)u_m'(t), v) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), v) = 0, \\ \forall v \in V_m \\ u_m(0) = u_{0m} \rightarrow u^0 \text{ em } H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \\ u_m'(0) = u_{1m} \rightarrow u^1 \text{ em } H_0^1(\Omega). \end{cases} \tag{2.9}$$

Pelo Teorema de Carathéodory o sistema de EDO's possui solução local em um intervalo $[0, t_m)$, onde $u_m$ e $u_m'$ são absolutamente contínuas e $u_m''$ existe quase sempre. A primeira estimativa a priori permitirá estender a solução *à* todo intervalo $[0, +\infty)$.

**Primeira estimativa a priori:**

Considerando $v = u_m'(t)$ em (2.9) temos

$$(u_m''(t), u_m'(t)) + (\nabla u_m(t), \nabla u_m'(t)) + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), u_m'(t)) = -(a(x)u_m'(t), u_m'(t)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)dx + \int_\Omega \nabla u_m(t)\nabla u'_m(t)dx \quad &+ \quad \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx \\ &= \quad -\int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2 dx. \qquad (2.10)\end{aligned}$$

Notemos, inicialmente, que são válidas as seguintes igualdades no sentido das distribuições:

$$\int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)dx \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2, \qquad (2.11)$$

$$\int_\Omega \nabla u_m \nabla u'_m dx \quad = \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2, \qquad (2.12)$$

$$\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx \quad = \quad \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \qquad (2.13)$$

De fato, considere $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Então, pelo Teorema de Fubini,

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)dx, \theta\rangle \quad &= \quad \int_0^{t_m}\int_\Omega u''_m(t)u'_m(t)\theta(t)dxdt \\ &= \quad \int_\Omega\int_0^{t_m} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|(u'_m(t))^2\|]\theta(t)dtdx \\ &= \quad -\frac{1}{2}\int_\Omega\int_0^{t_m} |u'_m(t)|^2\theta'(t)dtdx \\ &= \quad -\frac{1}{2}\int_0^{t_m}\int_\Omega |u'_m(x,t)|^2 dx\theta'(t)dt = -\frac{1}{2}\langle\|u'_m(t)\|_2^2, \theta'\rangle \\ &= \quad \langle\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2, \theta\rangle,\end{aligned}$$

o que prova a igualdade (2.11).

Analogamente provamos (2.12).

Finalmente, seja $\theta \in \mathcal{D}(0, t_m)$. Logo, pelo Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\langle \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)dx, \theta\rangle \quad &= \quad \int_0^{t_m}\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t)u'_m(t)\theta(t)dxdt \\ &= \quad \int_\Omega\int_0^{t_m} \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}|u_m(x,t)|^{\rho+2}\theta(t)dxdt\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega \Big\{ (u_m'(t))^{\rho+2}\theta(t)\Big|_{t=0}^{t=t_m} \\
&- \int_0^{t_m} |u_m(x,t)|^{\rho+2}\theta'(t)dt \Big\} dx \\
&= -\frac{1}{\rho+2}\int_0^{t_m}\int_\Omega |u_m(t)|^{\rho+2}\theta'(t)dxdt \\
&= \langle \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}, \theta\rangle.
\end{aligned}
$$

De (2.4) e das expressões acima segue que

$$
E_m'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}. \tag{2.14}
$$

Como

$$
\int_\Omega a(x)|u_m'(t)|^2 dx \geq 0,
$$

De (2.10) e de (2.14) obtemos

$$
E_m'(t) = -\int_\Omega a(x)|u_m'(t)|^2 dx \leq 0, \tag{2.15}
$$

o que implica que $E_m'(t)$ é não crescente.

Portanto,

$$
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq 0. \tag{2.16}
$$

Considere $t \in [0, t_m)$. Integrando (2.16) no intervalo [0,t) $t < t_m$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \|u_m'(0)\|_2^2 + \|\nabla u_m(0)\|_2^2 \\
&+ \frac{1}{\rho+2}\|u_m(0)\|_{\rho+2}^{\rho+2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq c;\ \ \forall\ t \in [0, t_m);\ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.17}
$$

onde $c$ independe de $t$ e de $m$.

Usando o corolário do teorema de Carathéodory podemos estender as soluções $u_m$ qualquer que sejam, ao todo intervalo [0,T], $T > 0$.

Conseqüentemente, para todo $T > 0$ temos que

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.18}$$

$$(\frac{\partial u_m}{\partial x_i})_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.19}$$

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \quad \text{é limitada em } L^\infty(0,T;L^{\rho+2}(\Omega)). \tag{2.20}$$

Além disso, de (2.10) segue que

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} + \int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2dx = 0.$$

Somando o termo

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2$$

em ambos os lados da igualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_m(t)\|_2^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &+ \int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &+ \int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2.\end{aligned} \tag{2.22}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_2^2 &= 2(u'_m(t),u_m(t)) \leq 2\|u'_m(t)\|_2\|u_m(t)\|_2 \\ &\leq \|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_2^2 \leq \|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.\end{aligned}$$

Assim, de (2.22) temos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'_m(t)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho+2}\frac{d}{dt}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\ &+ \int_\Omega a(x)|u'_m(t)|^2dx \leq \|u'_m(t)\|_2^2 + \|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2.\end{aligned} \tag{2.23}$$

Integrando (2.23) no intervalo (0,t), $t < T$, vem que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\
&+ \int_0^t \int_\Omega a(x)|u_m'(t)|^2 dx \leq K_1 + \int_0^t \|u_m'(s)\|_2^2 + \|u_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds, \qquad (2.24)
\end{aligned}$$

onde $K_1$ independe de $t$ e $m$. Resulta daí, em virtude do Lema de Gronwall, que $\exists\, K_2 > 0$ (independente de $t$ e $m$) tal que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|u_m'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|u_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{\rho+2}\|u_m(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} \\
&\qquad + \int_\Omega a(x)|u_m'(t)|^2 dx \leq K_2. \qquad (2.25)
\end{aligned}$$

Logo

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)). \qquad (2.26)$$

Da hipótese (H.1), segue que

$$2\rho \leq \frac{4}{n-2} \Longleftrightarrow 2\rho + 2 \leq \frac{4}{n-2} + 2 \Longleftrightarrow 2 \leq 2\rho + 2 \leq \frac{2n}{n-2}$$

e

$$2 \leq \rho + 2 \leq \frac{2n-2}{n-2} \leq \frac{2n}{n-2}.$$

Dessa forma concluímos usando o Teorema 1.15 que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \;\; e \;\; H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega). \qquad (2.27)$$

Sendo assim

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^{2(\rho+1)}(\Omega)). \qquad (2.28)$$

**Segunda estimativa a priori:**

O nosso intuito é derivar o problema aproximado em relação à $t$. No que segue, faremos alguns cálculos que serão necessários à obtenção da expressão desejada.

Podemos, sem perda de generalidade, considerar a base $(w_\mu)$ como sendo ortonormal em $L^2(\Omega)$. Resulta daí e de (2.9) que

$$\begin{aligned} g''_{jm}(t) = (u''_m(t), w_j) &= -(a(x)u'_m(t), w_j) - (\nabla u_m(t), \nabla w_j) \\ &- (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Como o lado direito da igualdade acima pertence a $L^2(0,T)$ resulta que $g''_{jm} \in L^2(0,T)$, onde aqui as derivadas são entendidas no sentido de Dini.

Logo

$$\begin{aligned} \int_0^T \|u''_m(t)\|_2^2 dt &= \int_0^T \|\sum_{j=1}^m g''_{jm}(t)\omega_j\|_2^2 dt \\ &\leq c(m)\sum_{j=1}^m \|\omega_j\|_2^2 \int_0^T |g''_{jm}(t)|^2 dt < +\infty \end{aligned}$$

ou seja,

$$u''_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)), \tag{2.30}$$

onde aqui, novamente, as derivadas são entendidas no sentido de Dini. Por outro lado, sendo $\dfrac{d}{dt}$ a derivada no sentido distribucional em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, temos

$$\begin{aligned} \langle & \frac{d}{dt}u_m, \theta\rangle = -\int_0^T u_m(t)\theta' dt = \int_0^T \{\sum_{j=1}^m g_{jm}(t)w_j\}\theta'(t)dt \\ = & \sum_{j=1}^m \{-\int_0^T g_{jm}(t)\theta'(t)dt\}w_j = \sum_{j=1}^m -\{g_{jm}(t)\theta(t)dt|_0^T - \int_0^T g'_{jm}(t)\theta(t)dt\}w_j \\ = & \{\sum_{j=1}^m \int_0^T g'_{jm}(t)\theta(t)dt\}w_j = \int_0^T u'_m(t)\theta(t)dt = \langle u'_m, \theta\rangle \end{aligned}$$

o que prova que a derivada distribucional de $u_m$ e a derivada clássica coincidem.

De maneira análoga prova-se que

$$\langle \frac{d}{dt}u'_m, \theta\rangle = \langle u''_m, \theta\rangle$$

ou seja, que as derivadas distribucionais e clássicas de 1ª e 2ª ordem coincidem.

Por outro lado, usando propriedades da integral de Bochner não é difícil constatar que

$$
\begin{aligned}
\langle \quad & \frac{d}{dt}(\nabla u_m(t), \nabla w_j), \theta\rangle = \langle (\nabla u'_m(t), \nabla w_j), \theta\rangle \\
\langle \quad & \frac{d}{dt}(a(x)u'_m(t), w_j), \theta\rangle = \langle (a(x)u''_m(t), w_j)\rangle \\
\langle \quad & \frac{d}{dt}(|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j), \theta\rangle = \langle (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t) w_j \, dx, \theta\rangle.
\end{aligned}
$$

Das relações acima e de (2.29) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(u''_m(t), w_j) &= -(\nabla u'_m(t), \nabla w_j) - (a(x)u''_m(t), w_j) \\
&- \quad (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t) w_j \, dx
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

em $L^2(0,T)$, ou seja, de (2.29) vem que:

$$
g'''_{jm} \in L^2(0,T),
$$

onde as três derivadas são no sentido distribucionais. Daí vem que

$$
\int_0^T \|u'''_m(t)\|_2^2 dt = \int_0^T \|\sum_{j=1}^m g'''_{jm}(t) w_j\|_2^2 dt < +\infty,
$$

isto é,

$$
u'''_m \in L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.32}
$$

Derivando o problema aproximado decorre que

$$
(u'''_m(t), w_j) + (\nabla u'_m(t), \nabla w_j) + (a(x)u''_m(t), w_j) + (\rho+1)(|u_m(t)|^\rho u'_m(t), w_j) \tag{2.33}
$$

Multiplicando-se a equação (2.33) por $g''_{jm}$ e somando-se em $j$, chegamos à

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u''_m(t)\|_2^2 \quad &+ \quad \|\nabla u'_m(t)\|_2^2] + \int_\Omega a(x)|u''_m(t)|^2 dx \\
&+ \quad (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho u'_m(t) u''_m(t) dx = 0.
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

Donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u''_m(t)\|_2^2+\|\nabla u'_m(t)\|_2^2] \quad &+ \quad \int_\Omega a(x)|u''_m(t)|^2dx \\ &\leq \quad (\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho|u'_m(t)||u''_m(t)|dx. \quad (2.35)\end{aligned}$$

Por outro lado, $u_m(t), u'_m(t), u''_m(t) \in H_0^1(\Omega)$ e como $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ temos

$$|u_m(t)|^\rho \in L^{\frac{2(\rho+1)}{\rho}}(\Omega), \;\; |u'_m(t)| \in L^{2(\rho+1)}(\Omega) \;\; e \;\; |u''_m(t)| \in L^2(\Omega).$$

Além disso, como $\dfrac{\rho}{2(\rho+1)}+\dfrac{1}{2(\rho+1)}+\dfrac{1}{2}=1$, pela desigualdade de Hölder generalizada, obtemos

$$\begin{aligned}&(\rho+1)\int_\Omega |u_m(t)|^\rho|u'_m(t)||u''_m(t)|dx \\ &\leq (\rho+1)\|u_m(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho\|u'_m(t)\|_{2(\rho+1)}\|u''_m(t)\|_2. \quad (2.36)\end{aligned}$$

Logo, de (2.34) e (2.36)

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[\|u''_m(t)\|_2^2+\|\nabla u'_m(t)\|_2^2]+\int_\Omega a(x)|u''_m(t)|^2dx \\ &\quad \leq (\rho+1)\|u_m(t)\|_{2(\rho+1)}^\rho\|u'_m(t)\|_{2(\rho+1)}\|u''_m(t)\|_2.\end{aligned}$$

Integrando no intervalo (0,t), $t<T$ segue que

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}[\|u''_m(t)\|_2^2+\|\nabla u'_m(t)\|_2^2]+\int_0^t\int_\Omega a(x)|u''_m(s)|^2dxds \\ &\leq \|u''_m(0)\|_2^2+\|\nabla u'_m(0)\|_2^2+(\rho+1)\int_0^t \|u_m(s)\|_{2(\rho+1)}^\rho\|u'_m(s)\|_{2(\rho+1)}\|u''_m(s)\|_2ds.\end{aligned}$$

De (2.28) temos que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^{2(\rho+1)}(\Omega)),$$

portanto, $\exists\, K_3>0$ tal que $\|u_m\|_{L^\infty(0,T;L^{2(\rho+1)}(\Omega))} \leq K_3;\ \forall\, m\in\mathbb{N}$ donde

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \quad &[\|u''_m(t)\|_2^2+\|\nabla u'_m(t)\|_2^2]+\int_0^t\int_\Omega a(x)|u''_m(s)|^2dxds \leq \|u''_m(0)\|_2^2+\|\nabla u'_m(0)\|_2^2 \\ + \quad &\frac{(\rho+1)}{2}\|u_m(t)\|_{L^\infty(0,T;L^{2(\rho+1)}(\Omega))}\int_0^t[\|u'_m(s)\|_{2(\rho+1)}^2+\|u''_m(s)\|_2^2]ds \\ \leq \quad &\|u''_m(0)\|_2^2+\|\nabla u'_m(0)\|_2^2+\frac{(\rho+1)}{2}K_3\int_0^t[\|u'_m(s)\|_{2(\rho+1)}^2+\|u''_m(s)\|_2^2]ds. \quad (2.37)\end{aligned}$$

Resta-nos estimar $\|u''_m(0)\|_2$. Considerando $t = 0$ e $v = u''_m(0)$ no problema aproximado (2.9) temos

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 &= -(\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) - (a(x)u'_m(0), u''_m(0)) \\ &- (|u_m(0)|^\rho u_m(0), u''_m(0)). \end{aligned} \tag{2.38}$$

Como $u_m(0) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e $u''_m(0) \in H_0^1(\Omega)$, então decorre da Fórmula de Green que

$$(\nabla u_m(0), \nabla u''_m(0)) = -(\Delta u_m(0), u''_m(0)). \tag{2.39}$$

Substituindo (2.39) em (2.38) obtemos

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 &= (\triangle u_m(0), u''_m(0)) - (a(x)u'_m(0), u''_m(0)) \\ &- (|u_m(0)|^\rho u_m(0), u''_m(0)). \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned} \|u''_m(0)\|_2^2 &\leq \int_\Omega \triangle u_m(0)|u''_m(0)|dx + \int_\Omega |u_m(0)|^{\rho+1}|u''_m(0)|dx + \int_\Omega a(x)|u'_m(0)||u''_m(0)|dx \\ &\leq \|\triangle u_m(0)\|_2\|u''_m(0)\|_2 + \|u_m(0)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1}\|u_m(0)\|_2 + \|a\|_\infty\|u'_m(0)\|_2\|u''_m(0)\|_2 \\ &= (\|\triangle u_m(0)\|_2 + \|u_m(0)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} + \|a\|_\infty\|u'_m(0)\|_2)\|u_m(0)\|_2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u''_m(0)\|_2 \leq \|\triangle u_m(0)\|_2 + \|u_m(0)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} + \|a\|_\infty\|u'_m(0)\|_2. \tag{2.41}$$

De (2.37) e (2.41) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[\|u''_m(t)\|_2^2 &+ \|\nabla u'_m(t)\|_2^2] + \int_0^t \int_\Omega a(x)|u''_m(s)|^2 dxds \\ &\leq 4[\|\Delta u_m(0)\|_2^2 + \|u_m(0)\|_{2(\rho+1)}^{2(\rho+1)} + \|a\|_\infty^2\|u'_m(0)\|_2^2] + \|\nabla u'_m(0)\|_2^2 \\ &+ \frac{(\rho+1)}{2}K_3\int_0^t [\|u'_m(s)\|_{2(\rho+1)}^2 + \|u''_m(s)\|_2^2]ds. \end{aligned}$$

Somando $\dfrac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2$ em ambos os lados da desigualdade acima obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[\|u''_m(t)\|_2^2 &+ \|u'_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}] + \int_0^T \int_\Omega a(x)|u''_m(s)|^2 dxds \\
&\leq \|u_m(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u_m(0)\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} + \|a\|_\infty \|u'_m(0)\|_2 + \|\nabla u'_m(0)\|_2^2 \\
&+ \frac{(\rho+1)}{2} K_3 \int_0^t [\|u'_m(s)\|_{H_0^1(\Omega)} + \|u''_m(s)\|_2^2] ds \\
&+ \frac{1}{2}\|u'_m(t)\|_2. \qquad (2.42)
\end{aligned}$$

De (2.18) e do Lema de Gronwall obtemos que

$$\frac{1}{2}[\|u''_m(t)\|_2^2 \ + \ \|u'_m(t)\|_{H_0^1(\Omega)}] \leq C_1, \qquad (2.43)$$

onde $C_1$ é uma constante positiva que independe de $m$ e de $t$.

Logo,

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (2.44)$$

$$(u''_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \qquad (2.45)$$

Das 1ª e 2ª estimativas a priori podemos extrair uma subseqüência de $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ que também denotaremos por $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ satisfazendo:

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (2.46)$$

$$u'_m \overset{*}{\rightharpoonup} v \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \qquad (2.47)$$

$$u''_m \overset{*}{\rightharpoonup} w \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \qquad (2.48)$$

Notemos que ao identificarmos $L^2(\Omega)$ com o seu dual, isto é,

$$L^2(\Omega) \equiv [L^2(\Omega)]',$$

temos que vale a seguinte cadeia de imersões

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]'.$$

Sendo assim,

$$L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.49}$$

Logo, de (2.46) temos que

$$u_m \to u \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da continuidade do operador derivada no sentido das distribuições obtemos que:

$$u_m' \to u' \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, de (2.47) e de (2.48) decorre que

$$u_m' \to v \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da unicidade de limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ obtemos que $v = u'$.

Agora, usando o fato de $u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u'$ e de (2.49) temos que

$$u_m' \to u' \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Novamente, da continuidade do operador derivada no sentido das distribuições temos que

$$u_m'' \to u'' \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Por outro lado, de (2.48) e de (2.49) decorre que

$$u_m'' \to w \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega)).$$

Da unicidade de limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Omega))$ resulta que $w = u''$.

Portanto,

$$u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.50}$$

$$u_m' \overset{*}{\rightharpoonup} u' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)), \tag{2.51}$$

$$u_m'' \overset{*}{\rightharpoonup} u'' \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.52}$$

Definamos

$$B_i = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x_i\| < i\}, i \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\Omega \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i$ e, de (2.26) e (2.18) segue, para todo $i \in \mathbb{N}$, que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(B_i)),$$

$$(u'_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(B_i)).$$

Em virtude do Teorema 1.40 (Aubin Lions) podemos extrair uma subseqüência de $(u_m)$ que ainda denotaremos pela mesma notação de modo que

$$(u_m)_{m\in\mathbb{N}} \to u_i \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(B_i)); \ \forall i \in \mathbb{N}. \tag{2.53}$$

Resulta daí e de (2.50), pela unicidade do limite fraco em $L^2(0,T;L^2(B_i))$ que $u_i = u$ q.s. em $]0,T[\times B_i;\ \forall\, i \in \mathbb{N}$.

Assim, de (2.53) decorre que $u_m \to u$ forte em $L^2(0,T;L^2(B_i));\ \forall\, i \in \mathbb{N}$, donde

$$u_m \to u \text{ q.s. em}]0,T[\times B_i;\ \forall\, i \in \mathbb{N},$$

ou seja,

$$u_m \to u \text{ q.s. em } ]0,T[\times\Omega.$$

Pela continuidade da aplicação $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto G(\lambda) = |\lambda|^\rho\lambda$ decorre que

$$|u_m|^\rho u_m \to |u|^\rho u \ \ q.s. \ \ em \ \ ]0,T[\times\Omega. \tag{2.54}$$

Por outro lado, de (2.27) segue que

$$(|u_m|^\rho u_m)_{m\in\mathbb{N}} \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.55}$$

De (2.54) e (2.55) e em virtude do Lema de Lions 1.41 vem que

$$|u_m|^\rho u_m \rightharpoonup |u|^\rho u \text{ fracamente em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.56}$$

Verifiquemos, agora, que a função $u$ obtida verifica o problema (2.1)-(2.3).

Com efeito, seja $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e consideremos $j \in \mathbb{N}$ e $m > j$. De (2.9) podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_m, w_j)\theta(t)dt \; &+ \; \int_0^T (\nabla u_m, \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'_m, w_j)\theta(t)dt \\ &+ \; \int_0^T (|u_m|^\rho u_m, w_j)\theta(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{2.57}$$

As convergências dadas em (2.50), (2.51), (2.52) e (2.56) permite-nos passar o limite quando $m \to \infty$ em (2.57) para obter

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'', w_j)\theta(t)dt \; &+ \; \int_0^T (\nabla u, \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u', w_j)\theta(t)dt \\ &+ \; \int_0^T (|u|^\rho u, w_j)\theta(t)dt = 0. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Da totalidade do conjunto $\{w_j \; ; j \in \mathbb{N}\}$ em $H_0^1(\Omega)$ segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u'', v)\theta(t)dt \; &+ \; \int_0^T (\nabla u, \nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u', v)\theta(t)dt \\ &+ \; \int_0^T (|u|^\rho u, v)\theta(t)dt = 0 \end{aligned} \tag{2.59}$$

$\forall \; v \in H_0^1(\Omega) \;\; e \;\; \theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Considerando, em particular $v \in \mathcal{D}(\Omega)$ em (2.59) decorre que

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega u''(x,t)v(x)\theta(t)dxdt \; &- \; \int_0^T (\Delta u(x,t), v(x))dt \\ &+ \; \int_0^T \int_\Omega a(x)u'(x,t)v(x)\theta(t)dxdt \\ &+ \; \int_0^T \int_\Omega (|u(x,t)|^\rho u(x,t), v(x)\theta(t)dxdt \\ &= \; 0, \end{aligned} \tag{2.60}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$.

Assim, da totalidade do conjunto $\{v\theta \; ; v \in \mathcal{D}(\Omega), \theta \in \mathcal{D}(0,T)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega \times (0,T))$ segue que

$$u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u = 0 \;\; em \;\; \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)). \tag{2.61}$$

Como $u'', u'$ , $|u|^\rho u, \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, e $a(x)u' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, então $\Delta u \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$. Logo,

$$u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u = 0 \ \ em \ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.62}$$

e pela regularidade dos problemas elípticos (conforme 1.44) vem que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Como

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)),$$
$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

então

$$u \in H^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega)).$$

Como $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \hookrightarrow H_0^1(\Omega)$ vem pelo lema 1.18 que

$$u \in \mathcal{C}_s^0([0,T];H_0^1(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)). \tag{2.63}$$

Por outro lado, como,

$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)),$$

então

$$u' \in H^1(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Sendo assim

$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$u' \in \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega)).$$

Dessa forma, pelo lema 1.18 e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ concluímos que

$$u' \in \mathcal{C}_s^0([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{2.64}$$

De (2.63) e (2.64) vem que:

$$u \in \mathcal{C}_s^1([0,T]; H_0^1(\Omega)).$$

Portanto,

$$u \in \mathcal{C}_s^0([0,T]; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s^1([0,T]; H_0^1(\Omega)) \;\; e \;\; u'' \in L^\infty([0,T]; L^2(\Omega)).$$

**Condições iniciais**

Provaremos, inicialmente, que

$$u(0) = u^0. \tag{2.65}$$

Com efeito, seja $\theta \in \mathcal{C}^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$. De (2.51) vem que se $m > j$ ($j$ arbitrário porém fixado)

$$\int_0^T (u_m'(t), w_j)\theta(t)dt \to \int_0^T (u'(t), w_j)\theta(t)dt.$$

Integrando por partes

$$-(u_m(0), w_j) - \int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt \to -(u(0), w_j) - \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt.$$

Agora, de (2.50) resulta que

$$\int_0^T (u_m(t), w_j)\theta'(t)dt \to \int_0^T (u(t), w_j)\theta'(t)dt$$

o que implica que

$$(u_m(0), w_j) \to (u(0), w_j) \;\; \forall\, j \in \mathbb{N},$$

ou ainda,

$$(u_m(0), v) \to (u(0), v), \;\; \forall\; v \in L^2(\Omega).$$

Resulta, que

$$u_m(0) \rightharpoonup u(0) \;\; \text{em} \;\; L^2(\Omega).$$

Por outro lado, como $u_m(0) = u_{0m} \to u^0$ segue que

$$u_m(0) \rightharpoonup u^0 \text{ em } L^2(\Omega)$$

o que nos leva, face a unicidade do limite fraco, a concluir o desejado em (2.65).

Provaremos a seguir que:

$$u'(0) = u^1. \tag{2.66}$$

Seja $\theta \in \mathcal{C}^1([0,T])$ tal que $\theta(0) = 1$ e $\theta(T) = 0$ e consideremos $j \in \mathbb{N}$. Logo do problema aproximado temos que

$$\int_0^T (u''_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Integrando-se por partes resulta que

$$-(u'_\mu(0), w_j) - \int_0^T (u'_\mu(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u_\mu(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Tomando-se o limite quando $\mu \to +\infty$ obtemos

$$-(u^1, w_j) - \int_0^T (u'(t), w_j)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T (|u(t)|^\rho u_\mu(t), w_j)\theta(t)dt = 0.$$

Pela totalidade dos $w_j's$ em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ obtemos

$$-(u^1, v) - \int_0^T (u'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u(t)|^\rho u_\mu(t), v)\theta(t)dt = 0.$$

Integrando-se por partes novamente, resulta que

$$-(u^1, v) + (u'(0), v) + \int_0^T (u'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta(t)dt + \int_0^T (a(x)u'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T (|u(t)|^\rho u(t), v)\theta(t)dt = 0. \tag{2.67}$$

Resulta de (2.67) e (2.62) que

$$(u^1, v) = (u'(0), v); \;\; \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

o que conclui (2.66).

### 2.1.2 Unicidade de solução regular

Sejam $u_1$ e $u_2$ duas soluções do problema (2.1)-(2.3). Então , $z = u_1 - u_2$ verifica

$$(z''(t), w) - (\Delta z(t), w) + (a(x)z(t), w) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w) = 0$$
$$z(0) = z'(0) = 0 \;\; \forall w \in H_0^1(\Omega) \;\; e \;\; t \in [0, T].$$

Aplicando a Fórmula de Green, temos que

$$(z''(t), w) + (\nabla z(t), \nabla w) + (a(x)z'(t), w) + (|u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2, w) \;\; = \;\; 0 \quad (2.68)$$
$$\forall w \in H_0^1(\Omega) \;\; e \;\; t \in [0, T].$$

Também, obtemos que

$$||u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2| \leq K(\rho)\{|u_1|^\rho + |u_2|^\rho\}|z(t)|. \quad (2.69)$$

Com efeito, como vimos anteriormente a função $G(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda, \;\; \lambda \in \mathbb{R}$, é tal que $G'(\lambda) = (\rho + 1)|\lambda|^\rho$, o que implica que $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Logo, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ existe, em virtude do Teorema do Valor Médio, $\xi \in ]\alpha, \beta[$ tal que

$$|G(\beta) - G(\alpha)| \leq |G'(\xi)||\beta - \alpha|,$$

ou ainda,

$$|G(\beta) - G(\alpha)| \leq (\rho + 1)|\xi|^\rho |\beta - \alpha|. \quad (2.70)$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ verificando

$$\xi = (1 - \theta)\alpha + \theta\beta = \alpha + \theta(\beta - \alpha). \quad (2.71)$$

Tomando $\alpha = u_1(x,t)$ e $\beta = u_2(x,t)$, resulta de (2.70) e (2.71) que

$$\begin{aligned}
||u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2| &\leq (\rho+1)|u_2 + (u_1 - u_2)\theta|^\rho |u_1 - u_2| \\
&\leq (\rho+1)\{|u_2| + |u_1| + |u_2|\}^\rho |z| \\
&\leq (\rho+1)\{2|u_1| + 2|u_2|\}^\rho |z| \\
&= (\rho+1)2^\rho\{|u_1| + |u_2|\}^\rho |z| \\
&\leq K(\rho)(|u_1|^\rho + |u_2|^\rho)|z|,
\end{aligned}$$

o que prova (2.69).

Substituindo $w = z'(t)$ em (2.68) e considerando a desigualdade dada em (2.69) resulta que

$$\begin{aligned}
(z''(t), z'(t)) + (\nabla z'(t), \nabla z(t)) &+ (a(x)z'(t), z'(t)) \leq \int_\Omega ||u_1|^\rho u_1 - |u_2|^\rho u_2||z'(t)|dx \\
&\leq K(\rho)\int_\Omega (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho)|z(t)||z'(t)|dx. \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2\} &\leq (z''(t), z'(t)) + (\nabla z(t), \nabla z(t)) + (a(x)z'(t), z'(t)) \\
&\leq K(\rho)\int_\Omega (|u_1|^\rho + |u_2|^\rho)|z(t)||z'(t)|dx. \qquad (2.73)
\end{aligned}$$

Por outro lado, notemos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega), \text{ para } \ 2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2},$$

de acordo com o Teorema 1.15.

Portanto, afirmamos que:

$$|u_1(t)|^\rho \ , \ |u_2(t)|^\rho \in L^n(\Omega) \ \text{ para quase todo } \ t \in ]0,T[. \qquad (2.74)$$

Com efeito, temos por hipótese que $0 < \rho \leq \dfrac{2}{n-2}$ e $2 \leq \rho n$ o que implica que $2 \leq \rho n \leq \dfrac{2n}{n-2}$. Logo,

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega). \tag{2.75}$$

Como $u_1(t), u_2(t) \in H_0^1(\Omega)$ para quase todo $t \in ]0,T[$, do exposto acima, vem que $u_1(t), u_2(t) \in L^{\rho n}(\Omega)$ e, então,

$$|u_1(t)|^\rho, |u_2(t)|^\rho \in L^n(\Omega) \ q.s. \text{ em } ]0,T[$$

o que prova (2.74).

Observemos que:

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1, \text{ onde } q = \frac{2n}{n-2} \tag{2.76}$$

Resulta de (2.73), (2.74), (2.76) e pela desigualdade de Hölder generalizada que,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2\} \leq K(\rho)(\|u_1\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} + \|u_2\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)})\|z(t)\|_{L^q(\Omega)}\|z'(t)\|_2.$$

Somando $\frac{d}{dt}\|z(t)\|_2^2$ em ambos os lados da desigualdade obtemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z'(t)\|_2^2 + \|\nabla z(t)\|_2^2 + \|z(t)\|_2^2\} &\leq K(\rho)(\|u_1(t)\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} \\
&+ \|u_2(t)\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)})\|z(t)\|_{L^q(\Omega)}\|z'(t)\|_2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z'(t)\|_2^2 + \|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\} &\leq K(\rho)(\|u_1(t)\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)} \\
&+ \|u_2(t)\|^\rho_{L^{\rho n}(\Omega)})\|z(t)\|_{L^q(\Omega)}\|z'(t)\|_2 \\
&+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z(t)\|_2^2 &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(z(t), z(t)) = (z'(t), z(t)) \\
&\leq \frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|z(t)\|_2^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.77}$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z'(t)\|_2^2+\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\} &\leq K(\rho)(\|u_1(t)\|^{\rho}_{L^{\rho n}(\Omega)}\\ &+ \|u_2(t)\|^{\rho}_{L^{\rho n}(\Omega)})\|z(t)\|_{L^q(\Omega)}\|z'(t)\|_2\\ &+ \frac{1}{2}\|z'(t)\|_2^2+\frac{1}{2}\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.78}$$

No entanto, de (2.75) e do fato que $u_1 \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos

$$\text{supess}\|u_1(t)\|^{\rho}_{L^{\rho n}(\Omega)} = \sup_{t\in]0,T[}\text{ess}[\int_\Omega |u_1(t)|^{\rho n}dx]^{\frac{1}{n}} \leq C \sup_{t\in]0,T[}\text{ess}\|u_1(t)\|^{\rho}_{H_0^1(\Omega)} < +\infty.$$

Analogamente, mostra-se o mesmo resultado para $u_2$.

Integrando-se a desigualdade (2.78) de 0 à t; $t \in [0,T]$ e usando o fato anterior, e (2.77) segue que $\exists\ C > 0$ verificando

$$\frac{1}{2}\{\|z'(t)\|_2^2+\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}\} \leq C\int_0^t \|z'(t)\|_2^2+\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}dt. \tag{2.79}$$

Logo, pelo Lema de Gronwall, temos que

$$\frac{1}{2}[\|z'(t)\|_2^2+\|z(t)\|^2_{H_0^1(\Omega)}] \leq 0 \ \ \forall\ t \in [0,T]. \tag{2.80}$$

o que prova que

$$z(t) = 0 \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega), \ \ \forall\ t\in[0,T],$$

ou seja,

$$z \equiv 0 \ \text{ em } \ L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$

o que mostra a unicidade de solução.

## 2.2 Solução Fraca

### 2.2.1 Existência de solução fraca

Para obtenção de soluções fracas usaremos argumentos de densidade. Assumamos que

$$\{u^0,\ u^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Como $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ é denso em $L^2(\Omega)$ segue que existe

$$\{u_\mu^0, u_\mu^1\} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \tag{2.81}$$

tal que

$$u_\mu^0 \to u^0 \ \ e \ \ u_\mu^1 \to u^1 \ \text{ em } L^2(\Omega); \ \text{ quando } \mu \to \infty. \tag{2.82}$$

Para cada $\mu \geq \mu_0$ seja $u_\mu$ a solução regular do problema (2.1)-(2.3) com a condição inicial $\{u_\mu^0,\ u_\mu^1\}$, isto é, para todo $T > 0$

$$u_\mu \in \mathcal{C}_s^0(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \cap \mathcal{C}_s^1(0,T;H_0^1(\Omega)) \ \ e \ \ u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$$

e verifica

$$\begin{cases} u_\mu'' - \Delta u_\mu + a(x)u_\mu' + |u_\mu|^\rho u_\mu = 0 \ \ em \ \ L^\infty(0,T;L^2(\Omega)), \\ u_\mu = 0 \ \ em \ \ \Gamma \times (0,+\infty), \\ u_\mu(0) = u_\mu^0 \ \ ; \ \ u_\mu'(0) = u_\mu^1. \end{cases} \tag{2.83}$$

Como $u_\mu' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, então compondo a equação anterior com $u_\mu'$ segue que

$$\begin{aligned} (u_\mu''(t), u_\mu'(t)) \ &- \ (\Delta u_\mu(t), u_\mu'(t)) + (a(x)u_\mu'(t), u_\mu'(t)) \\ &+ \ (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t), u_\mu'(t)) = 0. \end{aligned} \tag{2.84}$$

Aplicando a fórmula de Green generalizada obtemos:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 + \|a^{\frac{1}{2}}(x)u_\mu'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_\mu(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2} = 0. \tag{2.85}$$

Considerando os mesmos argumentos que foram utilizados para provar (2.17), obtemos a existência de uma constante $K_1 > 0$, que independe de $\mu$ e $t$ tal que

$$\|u'_\mu(t)\|_2^2 + \|\nabla u_\mu(t)\|_2^2 \leq K_1.$$

Definindo $z_{\mu,\sigma} = u_\mu - u_\sigma;\ \ \mu,\ \sigma \in \mathbb{N},\ \ \mu,\ \sigma \geq \mu_0$, temos que $z'_{\mu,\sigma} \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e como em (2.84) obtemos

$$(z''_{\mu,\sigma}, z'_{\mu,\sigma}) - (\Delta z_{\mu,\sigma}, z'_{\mu,\sigma}) + (a(x)z'_{\mu,\sigma}, z'_{\mu,\sigma}) + (|u_\mu|^\rho u_\mu - |u_\sigma|^\rho u_\sigma, z'_{\mu,\sigma}) = 0. \quad (2.86)$$

Da igualdade anterior resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 &+ \|a^{\frac{1}{2}}(x) z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 \leq \int_\Omega ||u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t) \\ &- |u_\sigma(t)|^\rho u_\sigma(t)||z'_{\mu,\sigma}(t)|. \end{aligned} \quad (2.87)$$

Do fato que $a(x)$ é não negativa e da desigualdade (2.69), decorre a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z''_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 + \|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\} &\leq K_2(\rho)\int_\Omega (|u_\mu(t)|^\rho \\ &+ |u_\sigma(t)|^\rho)|z_{\mu,\sigma}(t)||z'_{\mu,\sigma}(t)|dx, \end{aligned} \quad (2.88)$$

e, da desigualdade de Hölder generalizada conforme (2.76) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{\|z''_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 &+ \|\nabla z_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2\} \leq K_2(\rho)\{\|u_\mu(t)\|_{\rho n}^\rho \\ &+ \|u_\sigma(t)\|_{\rho n}^\rho\}\|z_{\mu,\sigma}(t)\|_{2(\rho+1)}\|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Integrando-se de 0 à t e usando argumentos análogos a (2.42) concluímos que existe $K_3 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|z'_{\mu,\sigma}(t)\|_2^2 + \|z_{\mu,\sigma}(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \|z'_{\mu,\sigma}(0)\|_2^2 + \|z_{\mu,\sigma}(0)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &+ K_3\int_0^1 \|z'_{\mu,\sigma}(s)\|_2^2 + \|z_{\mu,\sigma}(s)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.90)$$

Aplicando o Lema de Gronwall em (2.90) resulta que para todo $t \in [0,T]$ temos

$$\begin{aligned} \|u'_\mu(t) - u'_\sigma(t)\|_2^2 + \|u_\mu(t) - u_\sigma(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq K_4(\|u_\mu^1(t) - u_\sigma^1(t)\|_2^2 + \|u_\mu^0(t) \\ &- u_\sigma^0(t)\|_2^2), \end{aligned} \tag{2.91}$$

onde $K_4$ é uma constante positiva que independe de $\mu,\ \sigma \in \mathbb{N}$ e de $t \in [0,T]$.

Logo,

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[0,T]} \|u'_\mu(t) - u'_\sigma(t)\|_2^2 &+ \sup_{t\in[0,T]} \|u_\mu(t) - u_\sigma(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \\ &\leq K_4(\|u_\mu^1 - u_\sigma^1\|_2^2 + \|u_\mu^0 - u_\sigma^0\|_{H_0^1(\Omega)}^2). \end{aligned} \tag{2.92}$$

De (2.82) e (2.92) temos que $(u_\mu)$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $(u'_\mu)$ é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$.

Da completude de $\mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega))$ e $\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))$ segue que

$$u_\mu \rightarrow u \ \text{ fortemente em } \ \mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega)) \tag{2.93}$$

e

$$u'_\mu \rightarrow u' \ \text{ fortemente em } \ \mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.94}$$

Também, por (2.93) segue que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightarrow |u|^\rho u \ \text{ q.s. em } \ \Omega \times [0,T]. \tag{2.95}$$

e existe $C > 0$ tal que

$$\||u_\mu|^\rho u_\mu\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq C. \tag{2.96}$$

Assim usando argumentos análogos à (2.56) segue que

$$|u_\mu|^\rho u_\mu \rightharpoonup |u|^\rho u, \ \text{ fracamente em } \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.97}$$

Das convergências anteriores resulta que o problema (2.1)-(2.3) possui uma solução fraca. Mais precisamente, obtemos

$$u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u = 0 \ \ em \ \ \mathcal{C}^0([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.98}$$

Com efeito, temos da 1ª equação de (2.83) que

$$u''_\mu - \Delta u_\mu + a(x)u'_\mu + |u_\mu|^\rho u_\mu = 0 \ \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega))\,, \ \forall\, T>0. \tag{2.99}$$

Sejam $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e $\xi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Então, de (2.99) temos que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_\mu(t),\theta\xi)dt \ &- \ \int_0^T (\Delta u_\mu(t),\theta\xi)dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t),\theta\xi)dt \\ &+ \ \int_0^T (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t),\theta\xi)dt = 0. \end{aligned}\tag{2.100}$$

Agora, pelo Teorema de Fubini, segue que

$$\begin{aligned}\int_0^T (u''_\mu(t),\theta\xi)dt \ &= \ (\langle u''_\mu(t),\theta\rangle_{\mathcal{D}'\mathcal{D}},\xi) = (-\langle u'_\mu(t),\theta'\rangle_{\mathcal{D}'\mathcal{D}},\xi) \\ &= \ -\int_0^T (u'_\mu(t),\theta'\xi)dt \end{aligned}\tag{2.101}$$

e, pela fórmula de Green generalizada, obtemos

$$(\Delta u_\mu,\theta\xi) = -(\nabla u_\mu,\theta\nabla\xi). \tag{2.102}$$

Substituindo (2.101) e (2.102) em (2.100) resulta

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u'_\mu(t),\theta'\xi)dt \ &+ \ \int_0^T (\nabla u_\mu(t),\theta\nabla\xi)dt + \int_0^T (a(x)u'_\mu(t),\theta\xi)dt \\ &+ \ \int_0^T (|u_\mu(t)|^\rho u_\mu(t),\theta\xi)dt = 0. \end{aligned}\tag{2.103}$$

Tomando o limite quando $\mu \to \infty$ em (2.103), segue por (2.93), (2.94) e (2.96) que

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u'(t),\theta'\xi)dt \ &+ \ \int_0^T (\nabla u(t),\theta\nabla\xi)dt + \int_0^T (a(x)u'(t),\theta\xi)dt \\ &+ \ (|u(t)|^\rho u(t),\theta\xi)dt = 0. \end{aligned}\tag{2.104}$$

Aplicando a Proposição 1.16 resulta que $u'' \in H^{-1}(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$(-u',\theta'\xi)_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} = \langle u'',\theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}. \tag{2.105}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}(\nabla u, \theta\nabla\xi) &= \langle \nabla u, \theta\nabla\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}\\ &= \sum_{i=1}^{n}\langle \frac{\partial u}{\partial x_i}, \theta\frac{\partial \xi}{\partial x_i}\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}\\ &= -\sum_{i=1}^{n}\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}\\ &= \langle -\Delta u, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))}. \end{aligned} \tag{2.106}$$

Substituindo as igualdades (2.105) e (2.106) em (2.104) obtemos que

$$\langle u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u, \theta\xi\rangle_{\mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)),\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))} = 0.$$

Da totalidade do conjunto $\{\theta\xi; \theta \in \mathcal{D}(0,T),\ \xi \in \mathcal{D}(\Omega)\}$ em $\mathcal{D}(\Omega\times(0,T))$ obtemos

$$u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u = 0 \ \ em \ \ \mathcal{D}'(\Omega\times(0,T)). \tag{2.107}$$

Como $u \in \mathcal{C}^0([0,T]; H_0^1(\Omega))$ e $u' \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega))$, concluímos, conforme anteriormente, que
$\Delta u \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$, $|u|^\rho u \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ e $a(x)u' \in \mathcal{C}^0([0,T]; L^2(\Omega)) \hookrightarrow \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$. Logo, $u'' \in \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega))$.

Do exposto acima e de (2.107) concluímos que:

$$u'' - \Delta u + a(x)u' + |u|^\rho u = 0 \ \ em \ \ \mathcal{C}^0([0,T]; H^{-1}(\Omega)).$$

De modo a concluírmos a demonstração do Teorema 2.3 consideremos a igualdade (2.104).

Usando o fato que $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H_0^1(\Omega)$ segue que

$$\begin{aligned}-\int_0^T (u'(t), v)\theta' dt &+ \int_0^T (\nabla u(t), \nabla v)\theta dt + \int_0^T (a(x)u'(t), v)\theta dt\\ &+ (|u(t)|^\rho u(t), v)\theta dt = 0,\end{aligned} \tag{2.108}$$

$\forall\ v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Ou ainda,

$$\begin{aligned}\langle \frac{d}{dt}(u'(t), v), \theta\rangle &+ \langle (\nabla u(t), \nabla v), \theta\rangle + \langle (a(x)u'(t), v), \theta\rangle\\ &+ \langle (|u(t)|^\rho u(t), v), \theta\rangle = 0;\ \ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)\ ,\forall\ v \in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

O que nos leva a concluir

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(u'(t),v)+(\nabla u(t),\nabla v) &+ (a(x)u'(t),v)\\ &+ (|u(t)|^\rho u(t),v)=0 \text{ em } \mathcal{D}'(0,T),\ \forall\, v\in H_0^1(\Omega).\end{aligned}$$

### 2.2.2 Unicidade da solução fraca

Para provarmos a unicidade de solução fraca usaremos o método de Visik-Ladyzenskaya.

Sejam $u$ e $v$ soluções de (2.1)-(2.3) e consideremos $w=u-v$. Então, da regularidade das soluções segue que

$$\begin{aligned} w &\in \mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega)); \quad w'\in\mathcal{C}^0([0,T];L^2(\Omega))\\ e &\quad w''\in\mathcal{C}^0([0,T];H^{-1}(\Omega))\end{aligned} \tag{2.109}$$

e satisfaz o problema

$$\left|\begin{array}{l} w''-\Delta w+a(x)w'+|u|^\rho u-|v|^\rho v=0 \quad \text{em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)),\\ w=0 \quad \text{em} \quad \Gamma\times(0,\infty)\\ w(0)=0 \quad ; \quad w'(0)=0,\end{array}\right. \tag{2.110}$$

Consideremos, para cada $s\in[0,T]$ a seguinte função

$$\psi(t)=\begin{cases} -\int_t^s w(\xi)d\xi; & 0\le t\le s\\ 0 & ; s\le t\le T\end{cases}. \tag{2.111}$$

Sendo $\psi'$ a derivada no sentido das distribuições vetoriais de $\psi$, temos

$$\psi'(t)=\begin{cases} w(t); & 0\le t\le s\\ 0 & ; s\le t\le T\end{cases}. \tag{2.112}$$

Notemos que

$$\psi\in\mathcal{C}^0([0,T];H_0^1(\Omega)). \tag{2.113}$$

Compondo a primeira linha da igualdade (2.110) com $\psi$ na dualidade $L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)) \times L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e observando que $\psi = 0$ em $[s,T]$ obtemos:

$$\int_0^s \langle w''(t), \psi(t)\rangle dt + \int_0^s \langle -\Delta w(t), \psi(t)\rangle dt + \int_0^s \langle a(x)w'(t), \psi\rangle dt$$
$$= \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi(t)\rangle dt. \qquad (2.114)$$

Integrando-se por partes e usando a fórmula de Green generalizada vem que

$$\langle w'(s), \psi(s)\rangle - \langle w'(0), \psi(0)\rangle - \int_0^s (w'(t), \psi'(t))dt + \int_0^s (\nabla w(t), \nabla\psi(t))dt$$
$$+(a(x)w(s), \psi(s)) - (a(x)w(0), \psi(0)) - \int_0^s (a(x)w(t), \psi'(t))dt$$
$$= \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi(t)\rangle dt, \qquad (2.115)$$

ou ainda de (2.110), (2.111) e (2.112) temos $\psi(s) = 0$, $w(0) = w'(0) = 0$ e

$$-\int_0^s (w'(t), w(t))dt + \int_0^s (\nabla\psi'(t), \nabla\psi(t))dt - \int_0^s (a(x)w(t), w(t))dt$$
$$= \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi(t)\rangle dt, \qquad (2.116)$$

ou seja,

$$-\frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|w(t)\|_2^2 dt + \frac{1}{2}\int_0^s \frac{d}{dt}\|\nabla\psi(t)\|_2^2 - \int_0^s \int_\Omega a(x)|w(t)|^2 dxdt$$
$$= \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi(t)\rangle dt.$$

o que nos leva a expressão

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|w(0)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 - \int_0^s \int_\Omega a(x)|w(t)|^2 dxdt$$
$$= \int_0^s \langle |v|^\rho v - |u|^\rho u, \psi(t)\rangle dt.$$

Novamente, pelo problema (2.110) e (2.111) concluímos que

$$-\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 - \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 - \int_0^s \int_\Omega a(x)|w(t)|^2 dxdt$$
$$= \int_0^s \int_\Omega (|v|^\rho v - |u|^\rho u)\psi(t) dxdt. \qquad (2.117)$$

Por outro lado, pondo-se $G(\lambda) = |\lambda|^\rho \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}$, então

$$G'(\lambda) = (\rho + 1)|\lambda|^\rho,$$

o que implica que $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Logo, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ com $\alpha < \beta$ existe, em virtude do Teorema do Valor Médio, $\xi \in ]\alpha, \beta[$ tal que

$$|G(\beta) - G(\alpha)| \leq |G'(\xi)||\beta - \alpha|,$$

ou ainda,

$$|G(\beta) - G(\alpha)| \leq (\rho + 1)|\xi|^\rho|\beta - \alpha|. \tag{2.118}$$

Seja $\theta \in (0, 1)$ tal que satisfaça

$$\xi = (1 - \theta)\alpha + \theta\beta = \alpha + \theta(\beta - \alpha). \tag{2.119}$$

Tomando $\alpha = u(x, t)$ e $\beta = v(x, t)$, resulta de (2.118) e (2.119) que

$$\begin{aligned} ||v|^\rho v - |u|^\rho u| &\leq (\rho + 1)|u + (v - u)\theta|^\rho|v - u| \\ &\leq (\rho + 1)\{|u| + |v| + |u|\}^\rho|w| \\ &\leq (\rho + 1)\{2|v| + 2|u|\}^\rho|w| \\ &= (\rho + 1)2^\rho\{|v| + |u|\}^\rho|w| \\ &\leq K(\rho)(|v|^\rho + |u|^\rho)|w|, \end{aligned}$$

isto é,

$$||v|^\rho v - |u|^\rho u| \leq K(\rho)(|u|^\rho + |v|^\rho)|w|. \tag{2.120}$$

De (2.117) e (2.120) resulta que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 \leq \int_0^s \int_\Omega a(x)|w(t)|^2 dxdt \\ &+ K(\rho)\int_0^s \int_\Omega \{|u(x, t)|^\rho + |v(x, t)|^\rho\}|w(x, t)||\psi(x, t)|dxdt, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 \leq \|a\|_\infty \int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt \\ &+ K(\rho)\int_0^s \int_\Omega \{|u(x,t)|^\rho + |v(x,t)|^\rho\}|w(x,t)||\psi(x,t)|dxdt.\end{aligned}$$

Observemos que

$$\frac{1}{q}+\frac{1}{n}+\frac{1}{2}=1, \text{ onde } q=\frac{2n}{n-2} \tag{2.121}$$

e segundo as imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, onde $2 \leq r \leq \dfrac{2n}{n-2}$.

Resulta de (2.121) e da desigualdade de Hölder generalizada que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\psi(0)\|_2^2 \leq \|a\|_\infty \int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt \\ &+ K_1(\rho)\int_0^s \{\||u(t)|^\rho\|_{L^n(\Omega)} \\ &+ \||v(t)|^\rho\|_{L^n(\Omega)}\}\|w(t)\|_2\|\psi(t)\|_q dt.\end{aligned} \tag{2.122}$$

Do fato que $u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$ temos

$$\begin{aligned}\text{supess}\||u(t)|^\rho\|_{L^n(\Omega)} &= \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}[\int_\Omega |u(t)|^{\rho n}dx]^{\frac{1}{n}} = \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\|u(t)\|_{\rho n}^\rho \\ &\leq C \sup_{t\in]0,T[} \text{ess}\|u(t)\|_{H_0^1(\Omega)}^\rho < +\infty.\end{aligned}$$

Analogamente para $v$.

Logo de (2.122) concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 &+ \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 \leq \|a\|_\infty \int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt \\ &+ C_1\int_0^s \|w(t)\|_2\|\nabla\psi(t)\|_2 dt.\end{aligned} \tag{2.123}$$

Finalmente, pondo-se

$$w_1(t) = \int_0^t w(\xi)d\xi, \tag{2.124}$$

temos de (2.111), para todo $t \in [0, s]$,

$$\begin{aligned}\psi(t) = -\int_t^s w(\xi)d\xi = -[\underbrace{\int_0^s w(\xi)d\xi}_{w_1(s)} - \underbrace{\int_0^t w(\xi)d\xi}_{w_1(t)}] &= -[w_1(s) - w_1(t)] \\ &= w_1(t) - w_1(s). \quad (2.125)\end{aligned}$$

Desta forma, de (2.125) podemos escrever

$$\psi(0) = \underbrace{w_1(0)}_{=0} - w_1(s) = -w_1(s). \qquad (2.126)$$

Substituindo (2.125) e (2.126) em (2.123)

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla\psi(0)\|_2^2 &\leq \|a\|_\infty \int_0^s \|w(t)\|_2^2 dt + K(\rho)\int_0^s \int_\Omega \{|u(x,t)|^\rho \\ &+ |v(x,t)|^\rho\}|w(x,t)||\psi(x,t)|dxdt. \qquad (2.127)\end{aligned}$$

Notemos que

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1 \text{ onde } \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{2n-2-n}{2n} = \frac{n-2}{2n}.$$

Mas,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \{|u|^\rho + |v|^\rho\}|w(x,t)||\psi(x,t)|dx &\leq (\int_\omega \{|u|^\rho + |v|^\rho\}^n dx)^{\frac{1}{n}} \\ &\quad ( \int_\Omega |w|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_\Omega |\psi|^q dx)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{n\frac{-1}{n}} [\int_\Omega \{|u|^{\rho n} + |v|^{\rho n}\}dx]^{\frac{1}{n}} \|w\|_2 \|\psi\|_q,\end{aligned}$$

o que implica

$$\int_0^s \int_\Omega \{|u|^\rho + |v|^\rho\}|w||\psi|dxdt \leq C_1 \int_0^s \|w(t)\|_2 \|\psi(t)\|_2 dt.$$

De (2.127) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla w_1(s)\|_2^2 &\leq \|a\|_\infty\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt\\
&+ C_1\int_0^s \|w(t)\|_2\|\nabla w_1(t)-\nabla w_1(s)\|_2dt\\
&\leq \|a\|_\infty\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt + C_1\int_0^s \|w(t)\|_2\|\nabla w_1(t)\|_2dt\\
&+ C_1\int_0^s \|w(t)\|_2\|\nabla w_1(s)\|_2dt\\
&\leq [\|a\|_\infty+\frac{C_1}{2}]\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt+\frac{C_1}{2}\int_0^s \|\nabla w_1(t)\|_2^2dt\\
&+ \int_0^s \sqrt{2s}C_1\|w(t)\|_2\frac{1}{\sqrt{2s}}\|\nabla w_1(s)\|_2dt\\
&\leq [\|a\|_\infty+\frac{C_1}{2}]\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt+\frac{C_1}{2}\int_0^s \|\nabla w_1(t)\|_2^2dt\\
&+ \frac{1}{2}\int_0^s (2sC_1^2)\|w(t)\|_2^2dt+\frac{1}{2}\int_0^s \frac{1}{2s}\|\nabla W_1(s)\|_2^2dt\\
&\leq [\|a\|_\infty+\frac{C_1}{2}]\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt+\frac{C_1}{2}\int_0^s \|\nabla w_1(t)\|_2^2dt\\
&+ TC_1^2\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt+\frac{1}{4s}\|\nabla w_1(s)\|_2^2 s.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla w_1(s)\|_2^2 &\leq [\|a\|_\infty+\frac{C_1}{2}]\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt\\
&+ \frac{C_1}{2}\int_0^s \|\nabla w_1(t)\|_2^2+TC_1^2\int_0^s \|w(t)\|_2^2dt\\
&+ \frac{1}{4}\|\nabla w_1(s)\|_2^2.
\end{aligned}
$$

Portanto

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2+\frac{1}{2}\|\nabla w_1(s)\|_2^2 \leq K_1\int_0^s \{\|w(t)\|_2^2+\|\nabla w_1(t)\|_2^2\}dt.$$

Da desigualdade acima e em virtude do Lema de Gronwall vem que:

$$\frac{1}{2}\|w(s)\|_2^2+\frac{1}{4}\|\nabla w_1(s)\|_2^2 \leq 0.$$

Assim, obtemos

$$w(s)=0 \quad em \quad L^2(\Omega);\ \ \forall\, s\in(0,T)$$

e do fato que $w(0) = 0$ temos

$$w(s) = 0 \ \ em \ \ L^2(\Omega); \ \forall\, s \in [0, T]$$

o que encerra a prova.

## 2.3 Apêndice

Nesta seção faremos a prova da existência de solução para o problema aproximado (2.9) via Teorema de Carathéodory 1.29.

### 2.3.1 Existência de solução para o problema aproximado (2.9)

Para cada $m \in \mathbb{N}$, denotemos por

$$V_m = [w_1, \ldots, w_m]$$

o espaço gerado pelos $m$ primeiros vetores da base especial $\{w_\mu\}$ de $V$ definida na seção 2.1.1.

Definamos

$$u_m(t) \in V_m \quad \text{se, e somente se,} \quad u_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j.$$

Obtemos, assim, o seguinte problema aproximado

$$(u_m''(t), w) + (\nabla u_m(t), \nabla w) + (a(x)u_m'(t), w)_{\Gamma_1} + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w) = 0, \ \forall\, w \in V_m$$

$$u_m(0) = u^0 \quad ; \quad u_m'(0) = u^1.$$

No que segue, obtemos um problema equivalente ao problema aproximado acima para que o mesmo esteja nas condições do Teorema de Carathéodory.

Consideremos no problema aproximado $w = w_j$, $j = 1, \ldots, m$. Então,

$$(u_m''(t), w_j) + (\nabla u_m(t), \nabla w_j) + (a(x)u_m'(t), w_j)_{\Gamma_1} + (|u_m(t)|^\rho u_m(t), w_j) = 0; \ j = 1, \ldots, m.$$

Logo, o sistema de equação acima pode ser escrito na forma

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} (w_1,w_1) & (w_2,w_1) & \dots & (w_m,w_1) \\ (w_1,w_2) & (w_2,w_2) & \dots & (w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m) & (w_2,w_m) & \dots & (w_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g''_{1m}(t) \\ g''_{2m}(t) \\ \vdots \\ g''_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
+ &\begin{bmatrix} (\nabla w_1,\nabla w_1) & (\nabla w_2,\nabla w_1) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (\nabla w_1,\nabla w_2) & (\nabla w_2,\nabla w_2) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1,\nabla w_m) & (\nabla w_2,\nabla w_m) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
+ &\begin{bmatrix} (aw_1,w_1) & (aw_2,w_1) & \dots & (aw_m,w_1) \\ (aw_1,w_2) & (aw_2,w_2) & \dots & (aw_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (aw_1,w_m) & (aw_2,w_m) & \dots & (aw_m,w_m) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g'_{1m}(t) \\ g'_{2m}(t) \\ \vdots \\ g'_{mm}(t) \end{bmatrix} \\
+ &\begin{bmatrix} \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_1 dx \\ \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_2 dx \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ \int_\Omega |u_m(t)|^\rho u_m(t) w_m dx \end{bmatrix} = 0.
\end{aligned}
$$

Denotando

$$
C := \begin{bmatrix} (w_1,w_1) & (w_2,w_1) & \dots & (w_m,w_1) \\ (w_1,w_2) & (w_2,w_2) & \dots & (w_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (w_1,w_m) & (w_2,w_m) & \dots & (w_m,w_m) \end{bmatrix},
$$

$$
A := \begin{bmatrix} (\nabla w_1,\nabla w_1) & (\nabla w_2,\nabla w_1) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_1) \\ (\nabla w_1,\nabla w_2) & (\nabla w_2,\nabla w_2) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (\nabla w_1,\nabla w_m) & (\nabla w_2,\nabla w_m) & \dots & (\nabla w_m,\nabla w_m) \end{bmatrix},
$$

$$
G := \begin{bmatrix} (aw_1,w_1) & (aw_2,w_1) & \dots & (aw_m,w_1) \\ (aw_1,w_2) & (aw_2,w_2) & \dots & (aw_m,w_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (aw_1,w_m) & (aw_2,w_m) & \dots & (aw_m,w_m) \end{bmatrix},
$$

$$B := \begin{bmatrix} w_1 & w_2 & \dots & w_m \end{bmatrix},$$

$$z(t) = \begin{bmatrix} g_{1m}(t) \\ g_{2m}(t) \\ \vdots \\ g_{mm}(t) \end{bmatrix},$$

obtemos o seguinte sistema de equações diferenciais oridnárias:

$$\begin{cases} Cz''(t) + Az(t) + Gz'(t) + H(z(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \quad , \quad z'(0) = z^1, \end{cases} \tag{2.128}$$

onde

$$H(z(t)) = \begin{bmatrix} \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_1 dx \\ \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_2 dx \\ \vdots \\ \int_\Omega |Bz(t)|^\rho Bz(t) w_m dx \end{bmatrix},$$

$$z^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad z^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Inicialmente, vamos mostrar que a matriz $m \times m$, $C$, é inversível.

Com efeito, sendo $C$ uma matriz real e simétrica então $C$ é auto-adjunta e, portanto, diagonalizável, isto é, existe uma matriz $M$ inversível tal que

$$D = M^{-1}CM$$

é uma matriz diagonal.

Logo, para mostrarmos que $C$ é inversível basta mostrarmos que $D$ é inversível ou, equivalentemente, que zero não é autovalor de $D$.

Suponhamos, por absurdo, que zero é um autovalor de $D$. Então existe um vetor

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

não nulo do $\mathbb{R}^n$ tal que $Dv = 0$. Sendo $M^{-1}$ uma matriz inversível e, portanto, $M^{-1}\psi = 0 \Leftrightarrow \psi = 0$, resulta que o vetor $CMv$ é igual a zero. Denotando

$$Mv = \varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_m \end{pmatrix}$$

temos:

$$0 = C\varphi = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_1) \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_2) \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j (w_j, w_m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_1\right) \\ \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_2\right) \\ \vdots \\ \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_m\right) \end{pmatrix}.$$

Logo, $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j, w_i\right) = 0$, para todo $1 \leq i \leq m$; donde resulta que o vetor $\alpha = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j$ é ortogonal à todo vetor de $V_m$. Assim, $(\alpha, \alpha) = 0$, o que implica que $\alpha = 0$.

Portanto, $\displaystyle\sum_{j=1}^{m} \varphi_j w_j = 0$.

Mas, sendo $\{w_j\}$ uma base então temos que $\varphi_j = 0$, $\forall j = 1, \ldots, m$; ou seja, $\varphi = 0$. Desde que $M$ é inversível e, portanto, a transformação linear definida por $M$ é injetora resulta que $v = 0$ o que contradiz o fato de $v$ ser autovetor de $D$. Concluímos então que a matriz $C$ é inversível.

Assim, de (2.128) podemos escrever

$$\begin{cases} z''(t) + C^{-1}Az(t) + C^{-1}Gz'(t) + C^{-1}H(z(t)) = 0 \\ z(0) = z^0 \quad , \quad z'(0) = z^1. \end{cases} \tag{2.129}$$

Definamos

$$Y_1(t) = z(t) \quad , Y_2(t) = z'(t)$$

e

$$Y(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}, \quad Y^0 = \begin{bmatrix} z^0 \\ z^1 \end{bmatrix}.$$

Então

$$\begin{aligned} Y'(t) &= \begin{bmatrix} Y_1'(t) \\ Y_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z'(t) \\ z''(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_2(t) \\ -C^{-1}AY_1(t) - C^{-1}GY_2(t) - C^{-1}H(Y_1(t)) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}H(Y_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Donde temos o seguinte problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}H(Y_1(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{bmatrix} Y(t) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}. \tag{2.130}$$

Provaremos, a seguir, que o problema acima possui solução local utilizando o Teorema de Carathéodory. Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} &h : [0,T] \times \mathbb{R}^{2m} \to \mathbb{R}^{2m}, \quad \text{definida por} \\ &h(t,y) = \begin{bmatrix} 0 \\ -C^{-1}H(y_1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{bmatrix} y, \end{aligned} \tag{2.131}$$

onde $y = (\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{2m})$, $y_1 = (\xi_1, \dots, \xi_m)$.

Inicialmente, vamos verificar que a aplicação $h$ está nas condições de Carathéodory.

Com efeito,

$(i)$ Seja $y \in \mathbb{R}^{2m}$ fixado. A função $h$ é mensurável como função de $t \in [0,T]$, uma vez que esta não depende de $t$.

$(ii)$ Para cada $t \in [0,T]$, $h$ é contínua como função de $y$.

De fato, notemos primeiramente que a aplicação

$$\begin{aligned} N : \quad \mathbb{R}^{2m} &\to \mathbb{R}^{2m} \\ y &\mapsto \begin{bmatrix} 0 & I \\ -C^{-1}A & -C^{-1}G \end{bmatrix} y \end{aligned} \tag{2.132}$$

é linear e, conseqüentemente, contínua.

Por outro lado, seja $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência tal que

$$y_\nu \to y \quad \text{em } \mathbb{R}^{2m},$$

daí,

$$y_{1\nu} \to y_1 \quad \text{em } \mathbb{R}^m.$$

Da continuidade da aplicação $f(s) = |s|^\rho s$ e do fato que, para quase todo $x \in \Omega$, temos

$$|By_{1\nu}|^\rho By_{1\nu} \to |By_1|^\rho By_1 \text{ em } \mathbb{R}$$

e, portanto, para quase todo $x \in \Omega$,

$$|(By_{1\nu})|^\rho By_{1\nu} w_j(x) \to |(By_1)|^\rho By_1 w_j(x) \quad \text{em } \mathbb{R},\ \forall j = 1, \dots, m. \tag{2.133}$$

Como $y_\nu \to y$ então $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada e, conseqüentemente, cada componente de $(y_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ é limitada. Isto é, $|\xi_{\nu_i}| \leq M_i$, $1 \leq i \leq 2m$, onde $y_\nu = (\xi_{\nu_1} \dots, \xi_{\nu_{2m}})$. Seja

$$M = \max_{1 \leq i \leq 2m} \{M_i\}.$$

Logo, para cada $j = 1, \dots, m$

$$\begin{aligned} ||By_{1\nu}|^\rho By_{1\nu} w_j(x)| &= |By_{1\nu}|^{\rho+1} |w_j(x)| \\ &\leq \left( \sum_{i+1}^m M|w_i(x)| \right)^{\rho+1} |w_j(x)| \\ &\leq M^{\rho+1} m^{\rho+1} \sum_{i=1}^m |w_i(x)|^{\rho+1} |w_j(x)|. \end{aligned} \tag{2.134}$$

Como $|w_i|^{\rho+1} \in L^2(\Omega)$, $\forall i = 1, \dots, m$ e $w_j \in L^2(\Omega)$ resulta que

$$M^{\rho+1} m^{\rho+1} \sum_{i=1}^m |w_i|^{\rho+1} |w_j| \in L^1(\Omega).$$

De (2.133) e (2.134) e aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue resulta que

$$\int_\Omega |By_{1\nu}|^\rho By_{1\nu} w_j(x) dx \to \int_\Omega |By_1|^\rho By_1 w_j(x) dx,\ \forall j = 1, \dots, m,$$

isto é,

$$H(y_{1\nu}) \to H(y_1) \quad \text{em } \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$C^{-1} H(y_{1\nu}) \to C^{-1} H(y_1) \quad \text{em } \mathbb{R}^m. \tag{2.135}$$

De (2.132) e (2.135) resulta que a aplicação $h$ é contínua como função de $y$ para $t \in [0, T]$.

$(iii)$ Seja $K \subset [0, T] \times \mathbb{R}^{2m}$ um conjunto compacto, então

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq \|C^{-1} H(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} + \|Ny\|_{\mathbb{R}^{2m}}. \tag{2.136}$$

Pelo que provamos em (2.132) e (2.135) temos que $H$ e $N$ são contínuas em $\mathbb{R}^m$, logo são contínuas em qualquer $K$ compacto de $R^{2m}$ e, portanto, existirá um $M_k > 0$ tal que

$$\|C^{-1} H(y_1)\|_{\mathbb{R}^m} \leq M_k \tag{2.137}$$

para todo $(t, y) \in K$, onde $y = (y_1, y_2)$.

Então, segue de (2.136) e (2.137) que existe uma constate positiva $M_k$ satisfazendo

$$\|h(t, y)\|_{\mathbb{R}^{2m}} \leq M_k.$$

Assim, dos ítens $(i)$, $(ii)$ e $(iii)$ temos que as condições de Carathéodory estão satisfeitas e, como conseqüência, existe uma solução $Y(t)$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} Y'(t) = h(t, y) \\ Y(0) = Y^0 \end{cases}$$

em algum intervalo $[0, t_m)$, com $t_m > 0$. Além disso, $Y(t)$ é absolutamente contínua e, portanto, derivável quase sempre em $[0, t_m)$. Resulta deste fato que $z(t)$ e $z'(t)$ são absolutamente contínuas e, conseqüentemente, $z''(t)$ existe em quase todo ponto do intervalo $[0, t_m)$.

# Capítulo 3

# Taxas de Decaimento

Para obtermos o decaimento faz-se necessário algumas hipóteses que serão utilizadas ao longo do capítulo.

Assumamos que $A = \Omega^c = \mathbb{R}^n \backslash \Omega \subset B_L = \{x \in \mathbb{R}^n / |x| \leq L\};\ L > 0.$

Consideremos $\Omega_L = \Omega \cap B_L$.

**Hipótese sobre $\rho$:**

Seja

$$\rho = \frac{2}{n-2},\ n \geq 3\ e\ \ \rho > 0,\ \ n = 1, 2.$$

Além da hipótese (H.4) sobre $a$, considere as seguintes hipóteses:

(H.5)- Suponhamos que existam $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e um conjunto relativamente aberto $\omega \subset \overline{\Omega}$ tal que para algum $\epsilon_0 > 0$,

$$\overline{\Gamma(x_0)} \subset \omega\ \ e\ \ a(x) \geq \epsilon_0 > 0,\ \text{para todo } x \in \omega,$$

onde $\Gamma(x_0)$ é definido por

$$\Gamma(x_0) = \{x \in \partial\Omega | (x - x_0).\nu(x) > 0\},$$

onde $\nu(x)$ representa o vetor normal unitário exterior à $\Gamma = \partial\Omega$ no ponto $x$.

(H.6) - Seja $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$, para $|x| \geq L$.

**Hipótese sobre h:**

(A.1)- Seja $h = (h_1, h_2, ..., h_n)$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$h.\nu \geq 0, \;\; h = \nu \;\text{ sobre }\; \Gamma(x_0) \;\; e \;\; h(x) = 0 \;\text{ sobre }\; \widetilde{\omega}^c.$$

(para a construção do campo $h$ ver observação 3.2, capítulo I de [9] )

**Hipótese sobre $\eta$:**

(A.2)- Seja $\eta$ uma função pertencente à $W^{1,\infty}(\Omega)$ tal que

$$\eta(x) = 1 \text{ sobre } \widetilde{\omega} \cap \Omega, \; \eta = 0 \text{ sobre } \overline{\Omega} \cap \omega^c, \;\; e \;\; \frac{|\nabla \eta|^2}{\eta} \in L^\infty(\Omega).$$

onde $\widetilde{\omega}$ um aberto do $\mathbb{R}^n$ tal que $\overline{\Gamma(x_0)} \subset \widetilde{\omega} \cap \overline{\Omega} \subset \omega$
(para a construção da função ver lema 2.4, capítulo VII de [9] )

**Teorema 3.1.** *Seja $a(x)$ pertencente à $\mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ e satisfazendo as hipóteses (H.4), (H.5) e (H.6). Então, para todo $(u^0, u^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, a solução única do problema (2.1)-(2.3) verifica*

$$E(t) \leq C_0 I_0^2 (1+t)^{-1},$$

*onde $C_0$ é uma constante positiva que independe de $u$,*

$$E(t) \equiv \frac{1}{2}(\|u_t(t)\|^2 + \|\nabla u(t)\|^2 + \frac{2}{\rho+2}\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2}), \quad I_0 \equiv E(0)^{\frac{1}{2}} + \|u^0\|_2 \; e$$

*$I_0 \leq \delta$, para uma constante positiva $\delta$ suficientemente pequena.*

Nos resultados a seguir omitiremos, eventualmente, as variáveis de modo a não sobrecarregarmos a notação.

De modo a obtermos as desigualdades desejadas, consideremos, inicialmente $\{u^0, u^1\} \in (H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ verificando $I_0 = E(0)^{\frac{1}{2}} + \|u^0\|_2 \leq \delta$ e $u$ a solução do problema (2.1)-(2.3) dado na seção 2.1.1 tal que

$$u \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)),$$
$$u' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)),$$
$$u'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Para a obtenção do resultado desejado procederemos via passagem ao limite supondo que as soluções fracas podem ser obtidas através de uma seqüência de soluções regulares.

Utilizaremos agora o método dos multiplicadores em busca de algumas igualdades e desigualdades que serão úteis para a obtenção do decaimento.

Compondo a primeira equação do problema (2.1)-(2.3) com $u$ e integrando em $\Omega$ temos que

$$\int_\Omega u''u dx - \int_\Omega \Delta u u\, dx + \int_\Omega a(x)u'u\, dx + \int_\Omega |u|^{\rho+2}\, dx = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u''u dx &= \int_\Omega \frac{d}{dt}(u'u)dx - \int_\Omega |u'|^2 dx,\\ \int_\Omega a(x)u'u dx &= \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\frac{d}{dt}|u|^2 dx.\end{aligned}$$

Usando o teorema de Green e observando que $\gamma_0 u = u|_\Gamma$, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u u\, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} u d\Gamma = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u'u dx &- \int_\Omega |u'|^2 + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)|u|^2 dx\\ &+ \int_\Omega |u|^{\rho+2} = 0. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

**Lema 3.2.** *Seja u uma solução do problema (2.1)-(2.3). Então*

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega a(x)|u'|^2 dx = 0,$$

*onde E(t) é dado como em (2.4).*

**Demonstração**:

Compondo a primeira equação do problema (2.1)-(2.3) com $u'$ e integrando em $\Omega$ segue que

$$\int_\Omega u''u'dx - \int_\Omega \Delta u u'\, dx + \int_\Omega a(x)u'u'\, dx + \int_\Omega |u|^\rho u u'\, dx = 0.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u''u'dx &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(u', u') \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int |u'|^2 dx.\end{aligned}$$

Usando o Teorema de Green e observando que $u'(t) \in H_0^1(\Omega)$ para quase todo $t > 0$, decorre que

$$-\int_\Omega \Delta u u'\, dx = \int_\Omega \nabla u.\nabla u' dx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu} u' d\Gamma = \int_\Omega \nabla u.\nabla u' dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx.$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u'|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega a(x)|u'|^2 dx + \int_\Omega |u|^\rho u u'\, dx = 0.$$

Por outro lado, seja $G(\lambda) = |\lambda|^{\rho+2}$. Então

$$\frac{d}{dt}G(\lambda) = (\rho+2)|\lambda|^\rho \lambda \frac{d}{dt}\lambda.$$

Pela Teorema 1.47 segue que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[G(u(t))] &= (\frac{d}{dt}G)(u(t))\frac{d}{dt}(u(t)) \\ &= (\rho+2)|u(t)|^\rho u(t)u'(t).\end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{1}{(\rho+2)}\frac{d}{dt}|u(t)|^{\rho+2} \quad = \quad |u(t)|^{\rho}u(t)u'(t).$$

Logo,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u'|^2dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \int_\Omega a(x)|u'|^2dx + \frac{1}{(\rho+2)}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u(t)|^{\rho+2}dx = 0.$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}E(t) + \int_\Omega a(x)|u'|^2dx = 0, \tag{3.2}$$

onde $E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega (|u_t|^2 + |\nabla u|^2)dx + \frac{1}{\rho+2}\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx.$ □

**Lema 3.3.** *Consideremos u solução do problema (2.1)-(2.3). Então*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta(x)u'udx \quad &- \quad \int_\Omega \eta(x)|u'|^2dx + \int_\Omega (\nabla\eta(x).\nabla u)udx + \int_\Omega \eta(x)|\nabla u|^2dx \\ &+ \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)\eta(x)|u|^2dx + \int_\Omega \eta(x)|u|^{\rho+2}dx = 0,\end{aligned} \tag{3.3}$$

*onde $\eta$ é definido como em (A.2).*

**Demonstração**:

Compondo a equação (2.1) com $\eta(x)u$ e integrando em $\Omega$ temos que

$$\int_\Omega \eta(x)u''udx - \int_\Omega \eta(x)\Delta uudx + \int_\Omega a(x)\eta(x)u'udx + \int_\Omega \eta(x)|u|^{\rho+2}dx = 0.$$

Notemos que

$$\int_\Omega \eta(x)u''udx \quad = \quad \frac{d}{dt}\int_\Omega \eta(x)u'udx - \int_\Omega \eta(x)|u'|^2dx.$$

Além disso, como $u(t) \in H_0^1(\Omega)$, para todo $t > 0$, segue que

$$\begin{aligned}-\int_\Omega \eta(x)u\Delta udx \quad &= \quad \int_\Omega \nabla(\eta(x)u).\nabla udx - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}\eta(x)ud\Gamma = \int_\Omega \nabla(\eta(x)u)\nabla udx \\ &= \quad \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial(\eta(x)u)}{\partial x_i}dx \\ &= \quad \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}[\frac{\partial\eta(x)}{\partial x_i}]udx + \sum_{i=1}^n \int_\Omega \eta(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx \\ &= \quad \int_\Omega u\nabla(\eta(x).\nabla u)dx + \int \eta(x)|\nabla u|^2dx.\end{aligned}$$

Também,

$$\int_\Omega a(x)\eta(x)u'udx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)\eta(x)|u|^2dx.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega \eta(x)u'udx &- \int_\Omega \eta(x)|u'|^2dx + \int_\Omega (\nabla\eta(x).\nabla u)udx + \int_\Omega \eta(x)|\nabla u|^2dx \\ &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a(x)\eta(x)|u|^2dx + \int_\Omega \eta(x)|u|^{\rho+2}dx = 0. \qquad (3.4)\end{aligned}$$

$\square$

Da hipótese (A.2) compondo com $\eta(x)u$ a primeira equação do problema (2.1)-(2.3) e integrando em $\Omega_L$ e $\Omega\backslash\Omega_L$ obtemos, respectivamente,

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_L}\eta|\nabla u|^2dx &+ \int_{\Omega_L}(\nabla\eta.\nabla u)udx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega_L}\eta(x)u'udx \\ -\int_{\Omega_L}\eta|u'|^2dx &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_L}a(x)\eta|u|^2dx \\ &+ \int_{\Omega_L}\eta|u|^{\rho+2}dx = 0 \qquad (3.5)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\backslash\Omega_L}\eta|\nabla u|^2dx &+ \int_{\Omega\backslash\Omega_L}\nabla\eta\nabla uudx + \frac{d}{dt}\int_{\Omega\backslash\Omega_L}u'\eta udx \\ -\int_{\Omega\backslash\Omega_L}\eta|u'|^2dx &+ \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\backslash\Omega_L}a(x)\eta|u|^2dx + \int_{\Omega\backslash\Omega_L}\eta|u|^{\rho+2}dx = 0. \qquad (3.6)\end{aligned}$$

**Lema 3.4.** *Seja u uma solução do problema (2.1)-(2.3). Então*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega divh|u'|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Omega div.h|\nabla u|^2dx \\ +\frac{1}{2}\int_\Gamma h.\nu|\nabla u|^2d\Gamma - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial\nu}(h.\nabla u)d\Gamma + + \sum_{i,j=1}^n\int_\Omega \frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx \\ \int_\Omega a(x)u'h\nabla udx + \int_\Omega |u|^\rho uh\nabla udx = 0,\end{aligned}$$

*onde h é definido em (A.1).*

**Demonstração**:

Compondo a primeira equação do problema (2.1)-(2.3) com $h(x).\nabla u$ e integrando em $\Omega$ temos que

$$\int_\Omega u''(h.\nabla u)dx + \int_\Omega -\Delta u(h.\nabla u)dx + \int_\Omega a(x)u'(h.\nabla u)dx$$
$$+ \int_\Omega |u|^\rho u(h.\nabla u)dx = 0. \tag{3.7}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega u''(h.\nabla u)dx = \sum_{i=1}^n \int_\Omega h_i u'' \frac{\partial u}{\partial x_i} dx &= \sum_{i=0}^n \int_\Omega h_i(x) \frac{d}{dt}(u' \frac{\partial u}{\partial x_i})dx \\ &- \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Omega h_i(x) \frac{\partial(|u'|^2)}{\partial x_i} dx}_{I}.\end{aligned}$$

Aplicando o lema de Gauss em I obtemos

$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{1}{2}|u'|^2 \frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \int_\Gamma |u'|^2 h_i \nu_i d\Gamma \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega div h |u'|^2 dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma |u'|^2 h.\nu d\Gamma. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.24 temos $\gamma_0 u' = (\gamma_0 u)'$ e, portanto,

$$I = \frac{1}{2}\int_\Omega div.h|u'|^2 dx.$$

Logo,

$$\int_\Omega u''(h.\nabla u)dx = \frac{d}{dt}\int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega div h|u'|^2 dx. \tag{3.8}$$

Por outro lado, aplicando o teorema de Green, temos

$$\int_\Omega -\Delta u(h.\nabla u)dx = \underbrace{\int_\Omega \nabla(h(x).\nabla u)}_{II}.\nabla u - \int_\Gamma \frac{\partial u}{\partial \nu}(h(x).\nabla u)d\Gamma.$$

Observemos que, do Teorema de Gauss, decorre que

$$\begin{aligned}
II &= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}(h_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i})\frac{\partial u}{\partial x_j}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}h_i(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_j}[h_i(x)]\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx \\
&= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}h_i(x)\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}(|\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2) + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_i}|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Gamma}h_i\nu_i|\nabla u|^2 d\Gamma \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
II = & -\frac{1}{2}\int_{\Omega}divh|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma}h(x).\nu|\nabla u|^2 d\Gamma \\
+ & \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx.
\end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega}-\Delta u(h.\nabla u)dx &= -\frac{1}{2}\int_{\Omega}divh|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma}h(x).\nu|\nabla u|^2 d\Gamma \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i(x)}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx - \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}(h(x)\nabla u)d\Gamma. \quad (3.9)
\end{aligned}$$

Por (3.8) e (3.9) concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\int_{\Omega}u'(h.\nabla u)dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega}divh|u'|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\Omega}div.h|\nabla u|^2 dx \\
&+\frac{1}{2}\int_{\Gamma}h.\nu|\nabla u|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial \nu}(h.\nabla u)d\Gamma + \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx \\
&+\int_{\Omega}a(x)u'h\nabla u dx + \int_{\Omega}|u|^{\rho}u(h.\nabla u)dx = 0. \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

□

Agora, multiplicando (3.2) por $K > 0$, decorre que

$$\frac{d}{dt}KE(t) + K\int_{\Omega}a(x)|u'(t)|^2 dx = 0. \qquad (3.11)$$

Além disso, utilizando o fato que $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \nu_i \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ sobre $\Gamma$ obtemos

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \quad \int_\Omega u'(h(x).\nabla u)dx + \frac{1}{2}\int_\Omega divh(|u'|^2 - |\nabla u|^2)dx \\
- & \quad \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 \nu.hd\Gamma + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial h_j}{\partial x_i}dx \\
+ & \quad \int_\Omega a(x)u'(h.\nabla u)dx + \int_\Omega |u|^\rho u(h.\nabla u)dx = 0. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Consideremos em (3.12) $h(x) = \phi(|x|)(x - x_0)$ onde

$$\phi(r) = \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0; \;\; 0 \leq r \leq L \\ \dfrac{\varepsilon_0 L}{r}; \;\; r \geq L \end{array} \right. . \qquad (3.13)$$

Portanto, se $x \neq \overrightarrow{0}$ temos que

$$\frac{\partial h_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}[\phi(|x|)(x_i - x_{0i})] = \phi(|x|) + \phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0i}) \qquad (3.14)$$

e então

$$divh = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial h_i}{\partial x_i} = n\phi(|x|) + \phi'(|x|)\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0i}). \qquad (3.15)$$

Ainda,

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}[\phi(|x|)(x_j - x_{0j})] = \phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}(x_j - x_{0j}). \qquad (3.16)$$

Observemos que da definição de $\phi$ dada em (3.13) segue que

$$\phi'(r) = \left\{ \begin{array}{l} 0; \;\; 0 \leq r < L \\ -\dfrac{\varepsilon_0 L}{r^2}; \;\; r > L \end{array} \right. . \qquad (3.17)$$

Portanto, $\phi'(|x|) = 0$ se $|x| < L$ e além disso, $0 \notin \Omega \cap \overline{\Omega}_L$.

Dessa forma substituindo (3.14)-(3.16) em (3.12) obtemos

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + \frac{1}{2}\int_\Omega n\phi(|x|)|u'|^2 dx \\
- & \frac{1}{2}\int_\Omega n\phi(|x|)|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} \phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|u'|^2 dx \\
- & \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} \phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0i})|\nabla u|^2 dx \\
- & \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2[\phi(|x|)(x-x_0).\nu]d\Gamma + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial[\phi(|x|)(x_j - x_{0_j})]}{\partial x_i}dx \\
+ & \int_\Omega a(x)u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + \int_\Omega |u|^\rho u\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx \\
= & \; 0. \qquad (3.18)
\end{aligned}
$$

Considerando a equação (2.1), multiplicando por $\alpha_1 u(\alpha_2 u)$ e integrando em $\Omega_L(\Omega\backslash\Omega_L)$, onde $\alpha_1$ e $\alpha_2$ são constantes positivas a serem determinadas, obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega_L} \alpha_1|\nabla u|^2 dx \; & + \; \frac{d}{dt}[\alpha_1 \int_{\Omega_L} u'udx] - \int_{\Omega_L} \alpha_1|u'|^2 dx \\
& + \; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega_L} a(x)\alpha_1|u|^2 dx + \int_{\Omega_L} \alpha_1|u|^{\rho+2}dx = 0 \qquad (3.19)
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} \alpha_2|\nabla u|^2 dx \; & + \; \frac{d}{dt}[\alpha_2 \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} u'udx] - \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} \alpha_2|u'|^2 dx \\
& + \; \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} a(x)\alpha_2|u|^2 dx + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} \alpha_2|u|^{\rho+2}dx = 0. \; (3.20)
\end{aligned}
$$

Somando (3.11), (3.18), (3.19) e (3.20) vem que

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \; \{\int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + \alpha_1\int_{\Omega_L} u'udx + \alpha_2\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} u'udx \\
+ & \frac{\alpha_1}{2}\int_{\Omega_L} a(x)|u|^2 dx + \frac{\alpha_2}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} a(x)|u|^2 dx + K\,E(t)\} \\
+ & K\int_\Omega a(x)|u'|^2 dx + \int_{\Omega_L}\alpha_1|\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\alpha_2|\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega_L}\alpha_1|u'|^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} \alpha_2|u'|^2dx + \frac{n}{2}\int_\Omega \phi(|x|)|u'|^2dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} \phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|u'|^2dx \\
&- \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma - \frac{n}{2}\int_\Omega \phi(|x|)|\nabla u|^2dx \\
&- \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} \phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|\nabla u|^2dx \\
&+ \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial[\phi(|x|)(x_j - x_{0_j})]}{\partial x_i}dx \\
&+ \int_\Omega a(x)u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + \int_\Omega |u|^\rho u\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx \\
&+ (\alpha_1+\alpha_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx = 0.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(t) &+ K\int_\Omega a(x)|u'|^2dx + \int_{\Omega_L}\alpha_1|\nabla u|^2dx + \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\alpha_2|\nabla u|^2dx - \int_{\Omega_L}\alpha_1|u'|^2dx \\
&- \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\alpha_2|u'|^2dx + \frac{n}{2}\varepsilon_0\int_{\Omega_L}|u'|^2dx + \frac{n\varepsilon_0}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\frac{|u'|^2}{|x|}dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{|x|}(x_i-x_{0_i})|u'|^2dx - \frac{1}{2}\int_\Gamma|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma \\
&- \frac{n\varepsilon_0}{2}\int_{\Omega_L}|\nabla u|^2dx - \frac{n\varepsilon_0 L}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}|\nabla u|^2dx \\
&- \frac{1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^n\frac{x_i}{|x|}(x_i-x_{0_i})|\nabla u|^2dx \\
&+ \int_\Omega\sum_{i=j}^n|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\phi(|x|)dx + \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}(x_j-x_{0_j})dx \\
&+ \int_\Omega a(x)u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + \int_\Omega|u|^\rho u\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx \\
&+ (\alpha_1+\alpha_2)\int_\Omega|u|^{\rho+2}dx = 0,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
X(t) &= \int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx + (\alpha_1+\alpha_2)\int_\Omega u'udx + \frac{\alpha_1}{2}\int_{\Omega_L}a(x)|u|^2dx \\
&+ \frac{\alpha_2}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L}a(x)|u|^2dx + K\,E(t)\}.
\end{aligned}
$$

Donde,

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(t) &+ K\int_\Omega a(x)|u'|^2dx + \int_{\Omega_L}[\alpha_1 - \frac{n}{2}\varepsilon_0 + \varepsilon_0]|\nabla u|^2dx + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}[\alpha_2 - \frac{n}{2}\varepsilon_0]|\nabla u|^2dx \\
&+ \int_{\Omega_L}[-\alpha_1 + \frac{n}{2}\varepsilon_0]|u'|^2dx + \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}[-\alpha_2 + \frac{\eta\varepsilon_0}{2}]|u'|^2dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma + |\frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|u'|^2dx| \\
&+ |\frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|\nabla u|^2dx| + |\int_\Omega a(x)u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx| \\
&+ |\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}(x_j - x_{0_j})dx| + \int_\Omega |u|^\rho u\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx \\
&- (\alpha_1+\alpha_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx - \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\phi(|x|)|\nabla u|^2dx. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Analisaremos agora os termos do lado direito da desigualdade.

$$I_1 := |\int_\Omega a(x)u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx|.$$

Se $|x| \leq L$, então $\phi(|x|) = \varepsilon_0$ o que implica que $\phi(|x|)|x - x_0| \leq \varepsilon_0(|x| + |x_0|) \leq \varepsilon_0(L + |x_0|)$.

Se $|x| \geq L$, então $\phi(|x|)|x - x_0| \leq \varepsilon_0 L + \dfrac{\varepsilon_0 L|x_0|}{|x|} \leq \varepsilon_0(L + |x_0|)$.

Portanto, para $\epsilon > 0$ arbitrariamente dado,

$$
\begin{aligned}
I_1 &\leq \varepsilon_0(L + |x_0|)\|a\|_\infty^{\frac{1}{2}}\int_\Omega a^{\frac{1}{2}}(x)|u'||\nabla u|dx \\
&\leq \epsilon\int_\Omega |\nabla u|^2dx + \frac{1}{2\epsilon}\varepsilon_0^2(L + |x_0|^2)\|a\|_\infty\int_\Omega a(x)|u'|^2dx. \qquad (3.22)
\end{aligned}
$$

Consideremos,

$$I_2 := |\frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{|x|}(x_i - x_{0_i})|u'|^2dx|.$$

$$I_2 \leq \frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|\phi'(|x|)|\sum_{i=1}^n \frac{|x_i|}{|x|}|x_i - x_{0_i}||u'|^2dx.$$

Em $\Omega\backslash\overline{\Omega}_L$, temos que $|\phi'(|x|)| = \dfrac{\varepsilon_0 L}{|x|^2}$ e $|x| > L$.

Então

$$\begin{aligned}
|\phi'(|x|)|\sum_{i=1}^{n}\frac{|x_i|}{|x|}|x_i-x_{0_i}| &\leq \frac{\varepsilon_0 L}{|x|^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i|(|x_i|+|x_{0_i}|)=\frac{\varepsilon_0 L}{|x|^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\\
&+ \frac{\varepsilon_0 L}{|x|^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i||x_{0_i}|\\
&\leq \frac{\varepsilon_0 L}{|x|}+\frac{\varepsilon_0 L}{2|x|}+\frac{\varepsilon_0 L}{2|x|^3}|x_0|^2\\
&\leq \frac{3}{2}\varepsilon_0+\frac{\varepsilon_0|x_0|^2}{2L^2}=C_1.
\end{aligned}$$

Logo,

$$I_2 \leq \frac{C_1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|u'|^2dx. \tag{3.23}$$

De maneira análoga , definindo

$$I_3 := |\frac{1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\phi'(|x|)\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{|x|}(x_i-x_{0_i})|\nabla u|^2dx|$$

temos que

$$I_3 \leq \frac{C_1}{2}\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|\nabla u|^2dx. \tag{3.24}$$

Finalmente,

$$I_4 := |\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}\phi'(|x|)\frac{x_i}{|x|}(x_j-x_{0_j})dx|$$

$$I_4 \leq \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}\sum_{i,j=1}^{n}|\frac{\partial u}{\partial x_i}||\frac{\partial u}{\partial x_j}||\phi'(|x|)|\frac{|x_i|}{|x|}|x_j-x_{0_j}|dx.$$

Mas em $\Omega\backslash\overline{\Omega}_L$, temos que

$$\begin{aligned}
|\phi'(|x|)|\frac{|x_i|}{|x|}|x_j-x_{0_j}| &\leq |\phi'(|x|)|(|x_j|+|x_{0_j}|)=\frac{\varepsilon_0 L}{|x|^2}(|x_j|+|x_{0_j}|)\\
&\leq \frac{\varepsilon_0 L}{|x|^2}(|x|+|x_0|)\leq\frac{\varepsilon_0 L}{|x|}+\frac{\varepsilon_0 L|x_0|}{|x|^2}\\
&\leq \varepsilon_0+\frac{\varepsilon_0|x_0|}{|x|}\leq\varepsilon_0+\frac{\varepsilon_0|x_0|}{L}=C_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
I_4 &\leq C_2 \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} \sum_{i,j=1}^{n} |\frac{\partial u}{\partial x_i}||\frac{\partial u}{\partial x_j}|dx \leq C_2 \sum_{i,j=1}^{n} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 dx)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_2 [\sum_{i=1}^{n} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}][\sum_{j=1}^{n} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}] \\
&\leq \frac{1}{2} C_2 \{[\sum_{i=1}^{n} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}]^2 + [\sum_{j=1}^{n} (\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 dx)^{\frac{1}{2}}]^2\} \\
&\leq \frac{1}{2} C_2 2^{n-1} \{\sum_i \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2 dx + \sum_j \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\frac{\partial u}{\partial x_j}|^2 dx\} \\
&= C_2 2^{n-1} \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}
$$

Donde

$$
I_4 \leq C_2 2^{n-1} \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\nabla u|^2 dx. \tag{3.25}
$$

Além disso,

$$
\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} \phi(|x|)|\nabla u|^2 dx \leq \varepsilon_0 \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\nabla u|^2 dx. \tag{3.26}
$$

Substituindo (3.22)-(3.26) em (3.21) obtemos, para $\epsilon > 0$ arbitrário

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}X(t) &+ K\int_\Omega a(x)|u'|^2dx + \int_{\Omega_L} [\alpha_1 - \frac{n\varepsilon_0}{2} + \varepsilon_0]|\nabla u|^2 dx \\
&+ \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} [\alpha_2 - \frac{n\varepsilon_0}{2}]|\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega_L} [-\alpha_1 + \frac{n\varepsilon_0}{2}]|u'|^2 dx \\
&+ \int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} [-\alpha_2 + \frac{\eta\varepsilon_0}{2}]|u'|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 \phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma \\
&+ \epsilon\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon}\varepsilon_0^2(L+|x_0|^2)\|a\|_\infty \int_\Omega a(x)|u'|^2dx \\
&+ \frac{C_1}{2}\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |u'|^2 dx + [\frac{C_1}{2} + C_2 2^{n-1} - \varepsilon_0]\int_{\Omega\setminus\overline{\Omega}_L} |\nabla u|^2 dx \\
&+ \varepsilon_0(L+|x_0|)\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u|dx - (\alpha_1+\alpha_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx.
\end{aligned} \tag{3.27}
$$

Escolhamos $\alpha_1 > 0$ de modo que $\alpha_1 - \varepsilon_0[\frac{n}{2} - 1] > 0$ e $-\alpha_1 + \frac{n\varepsilon_0}{2} > 0$, ou seja, consideremos $\alpha_1 \in ]\varepsilon_0(\frac{n}{2}-1), \varepsilon_0\frac{n}{2}[$. No caso em que $n = 1$ tomemos $\alpha_1 \in ]0, \frac{\varepsilon_0}{2}[$.

Sejam $\eta_1, \eta_2 > 0$ dados por $\eta_1 = \alpha_1 - \varepsilon_0[\frac{n}{2} - 1]$ e $\eta_2 = -\alpha_1 + \frac{n}{2}\varepsilon_0$. Consideremos $\epsilon > 0$ de modo a satisfazer $\eta_1 - \epsilon = \eta_3 > 0$ e, a partir da escolha de $\epsilon > 0$, $K > 0$ verificando $\frac{K}{2} - \frac{1}{2\epsilon}\varepsilon_0^2(L + |x_0|^2)\|a\|_\infty > \frac{K}{4} > 0$, ou seja, $\frac{K}{4} > \frac{1}{2\epsilon}\varepsilon_0^2(L + |x_0|^2)\|a\|_\infty$.

Logo, de (3.27) segue que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &+ \frac{K}{4}\int_\Omega a(x)|u'|^2dx + \eta_3\int_{\Omega_L}|\nabla u|^2dx + \eta_2\int_{\Omega_L}|u'|^2dx \\ &+ \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}[\alpha_2 - \frac{n}{2}\varepsilon_0 - \frac{C_1}{2} - C_2 2^{n-1} - \varepsilon_0 - \epsilon]|\nabla u|^2dx \\ &+ \int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}[-\alpha_2 + \frac{\eta\varepsilon_0}{2} - \frac{C_1}{2}]|u'|^2dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x - x_0)]d\Gamma + \varepsilon_0(L + |x_0|)\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u|dx \\ &- (\alpha_1 + \alpha_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx. \end{aligned} \tag{3.28}$$

Observemos que se $x \in \Omega\backslash\overline{\Omega}_L$ então $|x| > L$ e, devido a hipótese (H.6), temos que $a(x) > \varepsilon_0 > 0$ em $\Omega\backslash\overline{\Omega}_L$. Sendo assim,

$$\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L} a(x)|u'|dx > \varepsilon_0\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|u'|^2dx. \tag{3.29}$$

Consideremos agora $\alpha_2 > 0$ tal que $\alpha_2 - \frac{n}{2}\varepsilon_0 - \frac{C_1}{2} - C_2 2^{n-1} + \varepsilon_0 - \epsilon = \eta_4 > 0$ e $K > 0$ tal que $K > \text{máx}\{\frac{4}{\varepsilon_0}[\alpha_2 + \frac{C_1}{2}], \frac{4}{2\epsilon}\varepsilon_0^2(L + |x_0|^2)\|a\|_\infty\}$. Assim, pondo $\eta_5 = \frac{K\varepsilon_0}{4} - \alpha_2 + \frac{\eta\varepsilon_0}{2} - \frac{C_1}{2} > 0$ decorre de (3.28) e (3.29) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}X(t) &+ \eta_5\int_\Omega |u'|^2dx + \eta_3\int_{\Omega_L}|\nabla u|^2dx + \eta_2\int_{\Omega_L}|u'|^2dx \\ &+ \eta_4\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|\nabla u|^2dx \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Gamma |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x - x_0)]d\Gamma \\ &+ \varepsilon_0(L + |x_0|)\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u|dx - (\alpha_1 + \alpha_2)\int_\Omega |u|^{\rho+2}dx. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Nosso objetivo é obter estimativas para os últimos termos do lado direito para tal consideremos $p=2$ e $q=2(\rho+1)$. Usando observação 1.48 temos que

$$\|u\|_{\rho+2} \leq \|u\|_2^{\frac{1}{\rho+2}} \|u\|_{2(\rho+1)}^{\frac{\rho+1}{\rho+2}}. \tag{3.31}$$

Por outro lado, seja $p=2$ e considere a desigualdade de Sobolev, Gagliardo, Nirenberg (Proposição 1.14).

Temos que $\|u\|_{p*} \leq C\|\nabla u\|_2$, onde $\dfrac{1}{p*} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}$; $n \geq 3$.

Das hipóteses sobre $\rho$ decorre que

$$\|u\|_{2(\rho+1)} = \|u\|_{p*} \leq C\|\nabla u\|_2. \tag{3.32}$$

Logo,

$$\|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} \leq C\|u\|_2 \|\nabla u\|_2^{\rho+1}.$$

Usando a desigualdade de Young chegamos à:

$$\begin{aligned} \|u\|_{\rho+2}^{\rho+2} &\leq \frac{C}{2\epsilon_1}\|u\|_2^2 + \frac{\epsilon_1}{2C}\|\nabla u\|_2^{2(\rho+1)} \\ &\leq \frac{C}{2\epsilon_1}\|u\|_2^2 + \frac{\epsilon_1}{2C}[I_0]^\rho \|\nabla u\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.33}$$

onde $\epsilon_1 > 0$ é uma constante arbitrária.

Estimaremos agora

$$\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u| dx.$$

Usando a desigualdade de Hölder temos que

$$\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u| dx \leq \|u\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \|\nabla u\|_2.$$

Usando a Proposição 1.14 temos que

$$\|u\|_{2(\rho+1)}^{\rho+1} \leq C\|\nabla u\|_2^{\rho+1}.$$

Logo

$$\int_\Omega |u|^{\rho+1}|\nabla u| dx \leq \widetilde{C}\|\nabla u\|_2^{\rho+2} \leq \widetilde{C}[I_0]^\rho \|\nabla u\|_2^2. \tag{3.34}$$

De (3.30), (3.33) e (3.34) concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &+ \eta_5\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|u'|^2dx+\eta_3\int_{\Omega_L}|\nabla u|^2dx+\eta_2\int_{\Omega_L}|u'|^2dx\\ &+ \eta_4\int_{\Omega\backslash\overline{\Omega}_L}|\nabla u|^2dx\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Gamma|\frac{\partial u}{\partial\nu}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma\\ &+ \frac{C}{2\epsilon_1}\int_\Omega|u|^2dx+\frac{\epsilon_1}{2C}[I_0]^\rho\int_\Omega|\nabla u|^2dx\\ &+ \widetilde{C}[I_0]^\rho\int_\Omega|\nabla u|^2dx.\end{aligned}$$

Consideremos $\eta^*=\text{mín}\{\eta_i, i=2,3,4,5\}$.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t) &+ \eta^*\int_\Omega|u'|^2dx+\eta^*\int_\Omega|\nabla u|^2dx\\ &\le \frac{1}{2}\int_\Gamma|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma+\widetilde{C}\delta^\rho\int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{C}{2\epsilon_1}\int_\Omega|u|^2dx.\end{aligned}$$

Somando o termo $\dfrac{2\eta^*}{\rho+2}\displaystyle\int_\Omega|u|^{\rho+2}dx$ em ambos os lados da desigualdade acima obtemos usando novamente (3.33) que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}X(t)+2\eta^*E(t) &\le \frac{1}{2}\int_\Gamma|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma\\ &+ \widetilde{C}\delta^\rho\int_\Omega|\nabla u|^2dx+K_1\int_\Omega|u|^2dx.\end{aligned}$$

Considerando o fato de $\delta$ ser suficientemente pequeno decorre que $\exists$ uma constante $K_2>0$ tal que

$$\frac{d}{dt}X(t)+K_2E(t)\le\frac{1}{2}\int_\Gamma|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma+K_1\int_\Omega|u|^2dx.$$

Como $\nu.(x-x_0)\le 0$ se $x\in\Gamma\backslash\Gamma(x_0)$ temos da desigualdade anterior que:

$$\frac{d}{dt}X(t)+K_2E(t)\le\frac{1}{2}\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial x_i}|^2\phi(|x|)[\nu.(x-x_0)]d\Gamma+K_1\int_\Omega|u|^2dx. \tag{3.35}$$

**Lema 3.5.** *A seguinte desigualdade*

$$\int_{\Gamma(x_0)} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 ds \leq \frac{d}{dt}\int_{\tilde{\omega}\cap\Omega} u'(h.\nabla u)dx + C_3\int_{\tilde{\omega}\cap\Omega} |u'|^2 + |\nabla u|^2 dx$$

*é válida .*

**Demonstração**:

Usando (3.10), a desigualdade de Young, o fato que $\nabla u = \dfrac{\partial u}{\nu}\nu$ sobre $\Gamma$ e a hipótese (A.1), segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(x_0)} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 dx &\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma}(h.\nu)|\nabla u|^2 d\Gamma = \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u'(h.\nabla u)dx + \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} divh|u'|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} div.h|\nabla u|^2 dx + \int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} a(x)u'(h.\nabla u)dx \\
&+ \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}\frac{\partial h_i}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}dx + \int_{\Omega}|u|^{\rho}u(h.\nabla u)dx \\
&\leq \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u'(h.\nabla u)dx - \frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u'|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\|a\|_{\infty}^2\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx + \|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u|^{\rho+1}|\nabla u|dx \\
&+ \|h\|_{W^{1,\infty}}2^{n-1}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx. \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

De (3.34) e (3.36) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(x_0)} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 dx &\leq \frac{d}{dt}\int_{\Omega} u'(h.\nabla u)dx + \frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u'|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u'|^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\|a\|_{\infty}^2\|h\|_{W^{1,\infty}}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx + \widetilde{C}\delta^{\rho}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx \\
&+ \|h\|_{W^{1,\infty}}2^{n-1}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2 dx.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma(x_0)} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 dx &\leq \frac{d}{dt}\int_\Omega u' h \nabla u dx \\
&+ [\frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}} + \frac{1}{2}\|a\|_\infty^2 \|h\|_{W^{1,\infty}} + \widetilde{C}\delta^\rho E(0) \\
&+ \|h\|_{W^{1,\infty}} 2^{n-1}] \int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx \\
&+ [\frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}} + \frac{1}{2}] \int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |u'|^2 dx.
\end{aligned}$$

Ponhamos

$$C_3 = \text{máx}\{\frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}} + \frac{1}{2}\|a\|_\infty^2\|h\|_{W^{1,\infty}} + \widetilde{C}\delta^\rho + \|h\|_{W^{1,\infty}}2^{n-1}, \frac{1}{2}\|h\|_{W^{1,\infty}} + \frac{1}{2}\},$$

Com isso concluímos a demonstração, isto é,

$$\int_{\Gamma(x_0)} |\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 dx \leq \frac{d}{dt}\int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + C_3 \int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} [|\nabla u|^2 + |u'|^2] dx.$$

□

**Lema 3.6.** *Temos que*

$$\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 \leq C_4 \int_\omega |u'|^2 + |u|^2 dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega a\eta |u|^2 dx\} + C_5[E(0)]^\rho E(t).$$

**Demonstração**:

Da equação (3.4) e da hipótese (A.2) sobre $\eta$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq \int_\Omega \eta |\nabla u|^2 dx = -\int_\Omega (\nabla\eta.\nabla u) u dx - \frac{d}{dt}(u', \eta u) + \int_\Omega \eta |u'|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega a\eta|u|^2 dx - \int_\Omega \eta |u|^{\rho+2} dx. \qquad (3.37)
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla\eta.\nabla u u dx &\leq \int_\omega \nabla\eta.\nabla u u dx \leq \int_{(\widetilde{\omega}\cap\Omega)\cup A} \nabla\eta \nabla u u dx \qquad (3.38) \\
&= \int_{(\widetilde{\omega}\cap\Omega)\cup A} \frac{\nabla\eta}{\sqrt{\eta}} \sqrt{\eta} \nabla u u dx \\
&\leq \epsilon_3 \int_\Omega \eta |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2\epsilon_3}\int_\omega \frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}|u|^2 dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla\eta|^2}{\eta}\|_\infty \int_\omega |u|^2 dx, \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

onde $A = \{x \in \omega \backslash (\tilde{\omega} \cap \Omega)/\eta \neq 0\}$.

Substituindo em (3.37) temos que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla \eta|^2}{\eta}\|_\infty \int_\omega |u|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega \eta a|u|^2 dx\} \\
&+ \int_\Omega \eta|u'|^2 dx - \int_\Omega \eta|u|^{\rho+2} dx.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx \leq \int_\omega |u'|^2 dx + \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla \eta|^2}{\eta}\|_\infty \int_\omega |u|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega \eta a|u|^2 dx\} - \int_\omega |u|^{\rho+2} dx.
\end{aligned}$$

Por (3.33) segue que

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega \eta|\nabla u|^2 dx \leq \int_\omega |u'|^2 dx + \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla \eta|^2}{\eta}\|_\infty \int_\omega |u|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega \eta a|u|^2 dx\} + \frac{C}{2\epsilon_1}\int_\omega |u|^2 dx \\
&+ \frac{\epsilon_1}{2C}[E(0)]^\rho \int_\omega |\nabla u|^2 dx \\
&\leq \int_\omega |u'|^2 dx + \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla \eta|^2}{\eta}\|_\infty \int_\omega |u|^2 dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega \eta a|u|^2 dx\} + \frac{C}{2\epsilon_1}\int_\omega |u|^2 dx \\
&+ \frac{\epsilon_1}{2C}[E(0)]^\rho E(t).
\end{aligned}$$

Seja $C_4 = \text{máx}\{1, \frac{1}{2}\|\frac{|\nabla \eta|^2}{\eta}\|_\infty, \frac{C}{2\epsilon_1}\}$ e $C_5 = \frac{\epsilon_1}{2C}$, logo

$$\begin{aligned}
\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega} |\nabla u|^2 dx &\leq C_4 \int_\omega (|u'|^2 + |u|^2) dx \\
&- \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\{2(u', \eta u) + \int_\Omega \eta a|u|^2 dx\} + C_5[E(0)]^\rho E(t).
\end{aligned}$$

□

Notemos que, por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_{\Gamma}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu(x).(x-x_0)]ds &\leq \frac{1}{2}\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2\phi(|x|)[\nu(x).(x-x_0)]ds \\
&\leq \underbrace{\frac{\varepsilon_0}{2}(L+\|x_0\|)}_{C_6}\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2|\nu|ds \\
&\leq C_6\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2 ds. \qquad (3.40)
\end{aligned}
$$

Usando o lema 3.5 obtemos que

$$
\begin{aligned}
C_6\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2|\nu|ds &\leq C_6\frac{d}{dt}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}u'(h.\nabla u)dx \\
&+ C_6C_3\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|u'|^2dx + C_6C_3\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}|\nabla u|^2dx.
\end{aligned}
$$

Agora, usando o lema 3.6 resulta que

$$
\begin{aligned}
C_6\int_{\Gamma(x_0)}|\frac{\partial u}{\partial \nu}|^2|\nu|ds &\leq C_6\frac{d}{dt}\int_{\widetilde{\omega}\cap\Omega}u'(h.\nabla u)dx + C_6C_3C_4\int_{\omega}|u'|^2dx \\
&+ C_6C_3C_4\int_{\omega}|u|^2dx - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}[2(u',\eta u)+\int_{\Omega}\eta|u|^2dx] \\
&+ C_6C_3C_5[E(0)]^{\rho}E(t). \qquad (3.41)
\end{aligned}
$$

De (3.41) e (3.35) resulta que

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \quad \{ & \int_{\Omega}u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx - C_6\int_{\Omega}u'(h.\nabla u)dx + \int_{\Omega}[\alpha_1+\alpha_2C_3C_6\eta]u'udx \\
+ & \int_{\Omega}[\frac{\alpha_1}{2}+\frac{\alpha_2}{2}+\frac{C_6C_3\eta}{2}]a(x)|u|^2dx + K\,E(t)\} + K_2\,E(t) \\
\leq & \underbrace{[C_3C_6+C_3C_4C_6]}_{C_7}\int_{\omega}|u'|^2dx + \underbrace{C_3C_4C_6}_{C_8}\int_{\omega}|u|^2dx + \underbrace{C_3C_5C_6}_{C_9}[E(0)]^{\rho}E(t) \\
\leq & C_7\int_{\omega}|u'|^2dx + C_8\int_{\omega}|u|^2dx + C_9\delta^{\rho}E(t). \qquad (3.42)
\end{aligned}
$$

Do lema 3.2 temos que $\frac{d}{dt}K^*E(t) + K^*\int_{\Omega}a(x)|u'|^2dx = 0, \forall\ K^*>0$, então de (3.42) temos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \quad & \{ \int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx - C_6 \int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + \int_\Omega [\alpha_1 + \alpha_2 C_3 C_6 \eta]u'udx \\ + \quad & \int_\Omega [\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{C_6 C_3 \eta}{2}]a(x)|u|^2 dx + K\, E(t)\} + K_2\, E(t) \\ + \quad & \frac{d}{dt} K^* E(t) + K^* \int_\Omega a(x)|u'|^2 dx \\ \leq \quad & C_7 \int_\omega |u'|^2 dx + C_8 \int_\omega |u|^2 dx + C_9 \delta^\rho E(t).\end{aligned}$$

Desta forma, usando (H.5) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \quad & \{ \int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx - C_6 \int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + \int_\Omega [\alpha_1 + \alpha_2 C_3 C_6 \eta]u'udx \\ + \quad & \int_\Omega [\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{C_6 C_3 \eta}{2}]a(x)|u'|^2 dx + [K + K^*]\, E(t)\} \\ + \quad & K_2\, E(t) + K^* \varepsilon_0 \int_\omega |u'|^2 dx + K^* \int_{\Omega\backslash\omega} a(x)|u'|^2 dx \\ \leq \quad & C_7 \int_\omega |u'|^2 dx + C_8 \int_\omega |u|^2 dx + C_9 \delta^\rho E(t).\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} X^*(t) \quad & + \quad [K_2 - C_9 \delta^\rho] E(t) + [K^* \epsilon_0 - C_7] \int_\omega |u'|^2 dx \\ & + \quad K^* \int_{\Omega\backslash\omega} a(x)|u'|^2 dx \leq C_8 \int_\omega |u|^2 dx, \qquad (3.43)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}X^*(t) \quad = \quad & \int_\Omega u'\phi(|x|)[(x-x_0).\nabla u]dx - C_6 \int_\Omega u'(h.\nabla u)dx + \int_\Omega [\alpha_1 + \alpha_2 C_3 C_6 \eta]u'udx \\ + \quad & \int_\Omega [\frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2} + \frac{C_6 C_3 \eta}{2}]a(x)|u'|^2 dx + [K + K^*]\, E(t).\end{aligned}$$

Sejam $u$ solução de (2.1)-(2.3) dada no Teorema 2.1 e $T_0 > 0$ (independente de $u$) suficientemente grande. Então

**Proposição 3.7.** *Para todo $\epsilon_1 > 0$ e $T > T_0$, existe $C > 0$ tal que a solução $u$ de (2.1)-(2.3) verifica*

$$\int_t^{t+T} \int_\Omega |u(x,s)|^2 dxds \leq C \int_t^{t+T} \int_\Omega a(x)|u'(x,s)|^2 dxds + \frac{\varepsilon_1}{4} \int_t^{t+T} E(s)ds, \quad (3.44)$$

*para todo $t > 0$.*

**Demonstração**: Vamos mostrar a desigualdade acima usando argumento de contradição.

Suponhamos que (3.44) seja falso. Assim, existem $\epsilon_1 > 0$, $T > T_0$, uma seqüência de números $(t_n)$ e uma seqüência de soluções $(u_n)$ tal que

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega |u_n(x,s)|^2 dxds &> n \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega a(x)|u_n'(x,s)|^2 dxds \\ &+ \frac{\varepsilon_1}{4} \int_{t_n}^{t_n+T} E_n(s)ds, \end{aligned} \quad (3.45)$$

onde $E_n(t)$ é obtida de $E(t)$ substituíndo-se $u$ por $u_n$.

Consideremos

$$\lambda_n^2 = \int_{t_n}^{t_n+T} \int_\Omega |u_n(x,s)|^2 dxds \quad e \quad v_n(t) = \frac{1}{\lambda_n} u_n(t+t_n).$$

Notemos que

$$u_n(t+t_n) = \lambda_n v_n(t) \quad e \quad |u_n'(t+t_n)|^2 = \lambda_n^2 |v_n'(t)|^2.$$

Fazendo a mudança de variavél $t = s - t_n$ em (3.45) obtemos

$$\lambda_n^2 \geq n \int_0^T \int_\Omega a(x)|v_n'(x,t+t_n)|^2 dxdt + \frac{\varepsilon_1}{4} \int_0^T E_n(t+t_n)dt, \quad (3.46)$$

Dessa forma, dividindo por $\lambda_n^2$,

$$n \int_0^T \int_\Omega a(x)|v_n'(x,t)|^2 dxdt + \frac{\varepsilon_1}{4} \int_0^T E_{v_n}(t)dt \leq 1, \quad (3.47)$$

onde $E_{v_n}(t) = \frac{1}{2}\|v_n'(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla v_n(t)\|_2^2 + \frac{\lambda_n^\rho}{\rho+2}\|v_n(t)\|_{\rho+2}^{\rho+2}$.

Notemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |v_n(t)|^2 dxdt &= 1 & (3.48)\\
\int_0^T \int_\Omega |v_n'(t)|^2 dxdt &+ \int_0^T \int_\Omega |\nabla v_n(t)|^2 dxdt + \frac{2\lambda_n^\rho}{\rho+2}\int_0^T \int_\Omega |v_n(t)|^{\rho+2} dxdt \\
&= 2\int_0^T E_{v_n}(t)dt \leq 8\varepsilon_1^{-1} < \infty. & (3.49)
\end{aligned}$$

De (3.47) temos que

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)|v_n'(x,t)|^2 dxdt \to 0 \quad quando \quad n \to \infty. \tag{3.50}$$

Por (3.48) e (3.49) temos que

$$\begin{aligned}
(v_n)_{n\in\mathbb{N}} &\quad \textit{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) & (3.51)\\
(v_n')_{n\in\mathbb{N}} &\quad \textit{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) & (3.52)\\
(\frac{\partial v_n}{\partial x_i})_{n\in\mathbb{N}} &\quad \textit{é limitada em} \quad L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ i = 1,...,n. & (3.53)
\end{aligned}$$

De (3.51), (3.52) e (3.53) existe uma subseqüência de $(v_n)$ que continuaremos a denotar por $(v_n)$ tal que

$$\begin{aligned}
v_n &\rightharpoonup v \ em \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), & (3.54)\\
v_n' &\rightharpoonup v' \ em \ L^2(0,T;L^2(\Omega)), & (3.55)\\
\frac{\partial v_n}{\partial x_i} &\rightharpoonup \frac{\partial v}{\partial x_i} \ em \ L^2(0,T;L^2(\Omega)) \ para \ todo \ i = 1,...,n. & (3.56)
\end{aligned}$$

Como $\rho = \frac{2}{n-2}$, então

$$2\rho = \frac{4}{n-2} \Longleftrightarrow 2\rho + 2 = \frac{4}{n-2} + 2 \Longleftrightarrow 2\rho + 2 = \frac{2n}{n-2}.$$

Portanto, usando o Teorema 1.15 temos que

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho+2}(\Omega)$$

e, conseqüentemente,

$$|v_n|^\rho v_n \rightharpoonup |v|^\rho v \ \ em \ \ L^2(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.57}$$

Por (3.54) e (3.56) temos que

$$v \in H^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{3.58}$$

Como $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $(\nabla v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, e sendo cada $(u_n)$ solução de (2.1)-(2.3), segue que $v_n \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$. Portanto, existe $w \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega))$ tal que

$$v_n \ \ \overset{*}{\rightharpoonup} \ \ w \ em \ L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.59}$$

De (3.47), (3.59), do fato que $L^2(0,T;H_0^1(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega))$ com imersão contínua e densa e da unicidade do limite fraco temos que $w = v$, e então

$$v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)). \tag{3.60}$$

Por (3.58) e (3.60) resulta que:

$$v \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

De (3.48) e (3.49), resulta que

$$(v_n) \text{ é limitada em } L^2(0,T;H^1(B_i)),$$

$$(v_n') \text{ é limitada em } L^2(0,T;L^2(B_i)),$$

onde $B_i = \{x \in \Omega; \|x\| \leq i\}$; qualquer que seja $i \in \mathbb{N}$.

Usando o lema de Rellich Kondrachov (ver Teorema 1.13) temos que

$$H^1(B_i) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(B_i).$$

Segue do Teorema de Aubin-Lions (Proposição 1.40) que existe uma subseqüência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$v_n \to v \text{ forte em } \ L^2(0,T;L^2(B_i)). \tag{3.61}$$

Logo, de (3.48) vem que

$$\int_0^T \int_\Omega |v(t)|^2 dxdt = 1. \tag{3.62}$$

Temos também que

$$\int_0^T \int_\Omega a(x)|v'|^2 dxdt = 0. \tag{3.63}$$

De fato, como $a \in L^\infty(\Omega)$, segue que $a^{\frac{1}{2}} \in L^\infty(\Omega)$.

Portanto, seja

$$f \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Temos que $a^{\frac{1}{2}} f \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e

$$\int_0^T \int_\Omega a^{\frac{1}{2}}(x) v_n' f dxdt = \int_0^T \int_\Omega v_n' [a^{\frac{1}{2}}(x) f] dxdt. \tag{3.64}$$

De (3.55)

$$\int_0^T \int_\Omega v_n' [a^{\frac{1}{2}}(x) f] dxdt \quad \rightarrow \quad \int_0^T \int_\Omega v' [a^{\frac{1}{2}}(x) f] dxdt = \int_0^T \int_\Omega a^{\frac{1}{2}}(x) v_n' f dxdt.$$

De (3.64) e da convergência acima temos que $a^{\frac{1}{2}} v_n' \rightharpoonup a^{\frac{1}{2}} v'$ em $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ e da Proposição 1.33 *(iii)* decorre que

$$\|a^{\frac{1}{2}} v'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \leq lim\ inf \|a^{\frac{1}{2}} v_n'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))},$$

ou seja,

$$0 \leq \int_0^T \int_\Omega a(x)|v'|^2 dxdt \leq lim\ inf \int_0^T \int_\Omega a(x)|v_n'|^2 = 0.$$

$\square$

Consideremos agora $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e observemos que:

$$\begin{aligned}
\langle v_n'', \theta \rangle + \langle -\triangle v_n, \theta \rangle + \langle a(x) v_n', \theta \rangle + \langle |v_n|^\rho v_n, \theta \rangle &= 0 \\
\langle v_n'', \theta \rangle + \langle -\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2}, \frac{\partial \theta}{x_i} \rangle + \langle a(x) v_n', \theta \rangle + \langle |v_n|^\rho v_n, \theta \rangle &= 0 \\
-\langle v_n', \theta' \rangle + \sum_{i=1}^n \langle \frac{\partial^2 v_n}{\partial x_i^2}, \frac{\partial \theta}{x_i} \rangle + \langle a(x) v_n', \theta \rangle + \langle |v_n|^\rho v_n, \theta \rangle &= 0.
\end{aligned}$$

Passando limite e usando (3.50)

$$-\langle v', \theta' \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}, \frac{\partial \theta}{x_i} \rangle + \langle |v|^\rho v, \theta \rangle \;\; = \;\; 0,$$

ou seja,

$$\langle v'', \theta \rangle + \langle -\triangle v, \theta \rangle + \langle |v|^\rho v, \theta \rangle \;\; = \;\; 0, \; \forall \; \theta \in \mathcal{D}(0,T).$$

Logo,

$$v'' - \triangle v + |v|^\rho v = 0 \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(\Omega \times (0,T)). \tag{3.65}$$

De (3.63) e $a(x) \geq \varepsilon_0 > 0$ sobre $\Omega_L^c = \Omega \backslash \overline{\Omega}_L$, obtemos que $v'(x,t) = 0$ sobre $[0,T] \times \Omega_L^c$.

Derivando a equação (3.65) no sentido das distribuições temos que

$$v''' - \triangle v' + (\rho+1)|v|^\rho v' = 0.$$

Consideremos $y = v'$. Então da equação acima vem que

$$y'' - \triangle y + \underbrace{(\rho+1)|v|^\rho}_{V(x,t)} y = 0, \;\text{ onde }\; V(x,t) \in L^\infty(0,T,L^n(\Omega)).$$

Como $y = 0$ sobre $[0,T] \times \Omega_L^c$ usando a propriedade de continuação única (Teorema 1.45) temos que para $T \geq T_0$, onde $T_0$ é suficientemente grande,

$$y = v' = 0 \;\text{ sobre }\; \Omega \times [0,T]. \tag{3.66}$$

Logo $v(x,t) = v(x)$,isto é, independe de t. Portanto

$$-\triangle v + |v|^\rho v = 0.$$

Compondo a equação acima com $v$ e integrando em $\Omega$ temos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^2 + \int_\Omega |v|^{\rho+2} = 0.$$

Como ambos os termos são positivos temos que

$$\int_\Omega |v|^{\rho+2} = 0.$$

Dessa forma $\|v\|_{\rho+2}^{\rho+2} = 0$, isto é, $v = 0$ o que contradiz (3.62). O que conclui a demonstração. $\square$

Da Proposição 3.7, usando (3.29) e integrando (3.43) de t à t+T, $t \in ]0,T[$ resulta que

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \frac{d}{dt}X^*(t) &+ \int_t^{t+T} [K_2 - C_9\delta^\rho - C_8\frac{\epsilon_1}{4}]E(s)ds \\
&+ \int_t^{t+T}\int_\omega [K^*\varepsilon_0 - C_7 - C_8C\varepsilon_0]|u'(x,s)|^2dxds \\
&+ [K^* - C]\int_t^{t+T}\int_{\Omega\backslash\omega} a(x)|u'(x,s)|^2dxds \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.67}$$

Consideremos $\delta$ e $\epsilon_1$ suficientemente pequenos tais que $K_3 = K_2 - C_9\delta^\rho - C_8\frac{\epsilon_1}{4} > 0$ e $K^*$ suficientemente grande de tal forma que $K_4 = K^* - C_7 - C_8C\varepsilon_0 > 0$ e $K_5 = K^* - C > 0$.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_t^{t+T} \frac{d}{dt}X^*(t) &+ K_3\int_t^{t+T} E(s)ds \\
&+ [K^*\epsilon_0 - C_7 - C_8C\varepsilon_0]\int_t^{t+T}\int_\omega |u'|^2dx \\
&\leq 0.
\end{aligned} \tag{3.68}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
X^*(t+T) &- X^*(t) + K_4\int_t^{t+T}\int_\omega |u'|^2dxds + K_5\int_t^{t+T}\int_{\Omega\backslash\omega} a(x)|u'|^2dxds \\
&+ K_3\int_t^{t+T} E(t) \leq 0,
\end{aligned} \tag{3.69}$$

onde das hipóteses (A.1) e (A.2) e da limitação de $\phi(|x|)|x-x_0|$ segue que

$$X^*(t) \leq L_1[E(t) + \|u(t)\|_2^2]; \ \forall\ t \geq 0,$$

onde $L_1$ é uma constante positiva.

Logo, de (3.69) decorre que

$$X^*(T) + K_3 \int_0^T E(t)dt \leq X^*(0) \leq L_1[\underbrace{E(0) + \|u^0\|_2^2}_{\leq I_0^2}], \ T \geq 0. \tag{3.70}$$

Donde

$$\sup_{0 \leq t \leq +\infty} X^*(t) + K_3 \int_0^\infty E(t)dt \leq L_1 I_0^2.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{d}{dt}[(1+t)E(t)] = E(t) + (1+t)\frac{d}{dt}E(t) \leq E(t),$$

supondo que $t \geq 0$ e $E'(t) \leq 0$.

Logo,

$$(1+t)E(t) \leq \int_0^t E(s) + E(0) \leq (L_1 + 1)I_0^2, \ t \geq 0.$$

Então

$$E(t) \leq C_0 I_0^2 (1+t)^{-1}. \tag{3.71}$$

De modo a satisfazer a demonstração do Teorema 3.1, notemos que, por passagem ao limite, a expressão dada em (3.70) permanece válida para soluções fracas e, conseqüentemente a taxa dada em (3.71) e aquela desejada no Teorema 3.1.

# Bibliografia


[1] ADAMS, R. A.: **Sobolev Spaces**. New York, Academic Press, 1975.

[2] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[3] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[4] CAVALCANTI, M. M., DOMINGOS CAVALCANTI, V. N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[5] CODDINGTON, E.; LEVINSON, N. **Theory of Ordinary Differential Equations**, Mac Graw-Hill, New York, 1955.

[6] DAUTRAY, R., LIONS, J. L.:**Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and technology.**, Vol. II. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, New York, 1990.

[7] KESAVAN, S. **Topic in Functional Analysis and Applications**. John Wiley and Sons, New Dehli, 1989.

[8] LASIECKA, I., TATARU, D.: **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Lecture Notes in Pure and Applied Maths, 142, Dekker, New York, 1993.

[9] LIONS, J. L.: **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[10] LIONS, J.L., MAGENES. E.: **Non-Homogeneous boudary Value Problems ande Applications.**, Vol. I. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[11] MEDEIROS, L. A.: **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[12] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[13] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos e Metodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[14] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[15] MILLA MIRANDA, M.: **Traço para o Dual dos Espaços de Sobolev**. Seminário Brasileiro de Análise, Rio de Janeiro. Atas 28-Seminário Brasileiro de Análise, p. 171-191, 1988.

[16] MILLA MIRANDA, M.: **Análise espectral em espaços de Hilbert**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1990.

[17] MOCHISUKI, K.,NAKAZAWA, H.: **Energy decay of solutions to the wave equations with linear dissipation localized near infinity**. Preprint, 1997.

[18] NAKAO, M.: **Decay of solutions to the Cauchy problem for the Klein-Gordon equation with a localized nonlinear dissipation**. Hokkaido Math.,J.,27, p.245-271, 1998.

[19] NAKAO, M.: **Stabilization of local energy in an exterior domain for the wave equation with a localized dissipation**. J. Differential Equations , 148, p.388-406, 1998.

[20] NAKAO, M., Ono, K.: **Global existence to the Cauchy problem for the semilinear dissipative wave equtions**. Math.Z., 214, p.325-342, 1993.

[21] NAKAO, M.: **Energy decay the linear and semilinear wave equations in exterior domains with some localized dissipations**. Math.Z., 238, p.781-797, 2001.

[22] NAKAO, M.: **Energy decay for the wave equation with boundary and localized dissipations in exterior domains**. Math. Nachr, 278, p.771-783, 2005.

[23] NAKAO, M.: **Global existence for semilinear wave equations in exterior domains**. Nonlinear Analysis, 47, p.2497-2506, 2001.

[24] RAVIART, P.A., THOMAS, J.M., **Introduction à Analyse Numérique des Équations Aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[25] RUIZ, A. **Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential**. J. Math. Pures Appl., v.71, p.455-467, 1992.

[26] SHIBATA, Y.: **On the global existence theorem of classical solutions of second order fully nonlinear hyperbolic equations with first order dissipation in the exterior domain**. Tsukuba J. Math. , 7, p. 1-68, 1963.

[27] ZUAZUA, E.: **Exponential decay for the semilinear wave equation whith localized distributed Damping**. Commun. Partial Diff. Equations, **15**(2), (1990), 205-235.

[28] ZUAZUA, E.: **Exponential decay for the semilinear wave equation whith localized damping in unbounded domains**. J.Math. Pures et appl. 70, p. 513-529, 1992.

[29] ZUILY, C.: **Existence globale de solutions regulieres pourl'equation des ondes nolineaire amorte sur le groupe de Heisenberg**. Indiana Univ.Math. J.,42, p. 323-360,1993.