Equação de Airy com Condições de Fronteira Gerais em um Domínio não Limitado.

Marcio Antonio Jorge da Silva

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Nikolai Andreevitch Larkine

Maringá - PR

2008

Agradecimentos

Primeiramente a Deus pela vida e por me conceder a oportunidade de concluir o Mestrado em Matemática.

A toda minha família, meus pais e irmãs, em especial a minha mãe que sempre me incentivou e me condicionou a estudar e a minhã irmã, Mônica, que deu início em meus estudos incentivando minha carreira acadêmica, a ela sou muito grato.

A todos os professores do Departamento de Matemática da UEM que contribuiram na minha formação acadêmica desde a Graduação até o Mestrado, em especial aos professores Alfredo e Larkine pelas orientações que contribuiram para meu crescimento dentro da Matemática.

A todos meus amigos, inclusive do Mestrado, que vivenciaram comigo mais uma etapa de minha vida e que compartilharam muitas experiências de Vida e Matemática.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Finalmente, a minha Namorada, Companheira e futura Esposa Naiara, que sempre apoiou meus estudos, que me fez crescer e amadurecer perante a vida e que me dá muitas alegrias de convivência, a você Naiara meus sinceros Agradecimentos.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência e unicidade de solução para a equação de Airy em um domínio não limitado, em dois problemas:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + D^3u(x,t) = 0 & , \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) - D^3u(x,t) = 0 & , \quad \text{em } \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ Du(0,t) + \alpha u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ D^2u(0,t) - \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+), \end{cases}$$

onde os escalares α e β satisfazem certas condições.

Palavras chave: Airy, KdV-linear, Semi-discretização.

Abstract

Here we investigate the existence and uniqueness of solutions for the Airy equation in a unbounded domain for two problems:

$$\begin{cases} u_t(x,t) + D^3u(x,t) = 0 & , \quad \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_t(x,t) - D^3u(x,t) = 0 & , \quad \mathbb{R}^+ \times (0,T); \\ Du(0,t) + \alpha u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ D^2u(0,t) - \beta u(0,t) = 0 & , \quad t \in (0,T); \\ u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+), \end{cases}$$

where the scalars α and β meet certain conditions.

Key words: Airy, KdV-linear, Semi-discretization.

Sumário

Introdução

Equações que modelam o movimento de ondas em meios dispersivos, lineares e não-lineares, tem suas raízes na descoberta de uma Onda Solitária por John Scott Russel. Por volta de 1834 ele observou ondas criadas na superfície da água em um canal, que pareciam se propagar de forma constante e sem mudar de forma. Russel realizou vários experimentos deste fenômeno que ele chamou de Ondas Solitárias.

Após isto, outros Cientistas como George Airy e Stokes se interessaram pelo assunto e várias questões ficaram sem respostas concretas, como por exemplo, ter uma propagação constante da onda de forma permanente sobre a superfície da água, até o trabalho de Boussinesq por volta de 1871.

Somente em 1895, surgiu o famoso artigo de dois cientistas holandeses, Korteweg e de Vries, que relataram uma modelagem matemática essencial sobre as Ondas Solitárias descobertas por Russel.

Podemos dizer que as equações de Boussinesq e KdV que descrevem os movimentos de ondas, são umas das mais familiares na qual os efeitos dispersívos estão presentes.

O seguinte sistema de equações

$$(S.B.)\begin{cases} u_t + [(1+\alpha u)w]_x - \frac{\beta}{6}w_{xxx} = 0, \\ u_x + w_t + \alpha w w_x - \frac{\beta}{2}w_{xxt} = 0, \end{cases}$$

foi originado por Boussinesq, sua dedução pode ser encontrada em [2] ou [3]. Fisicamente, as variáveis u e w estão relacionadas à amplitude e comprimento de onda, respectivamente. Afim de obter um modelo matemático mais relevante em termos de α e β e ao mesmo tempo mantendo a propagação em um único sentido, considerou-se a seguinte mudança de variáveis,

$$w = u + \alpha A + \beta B,$$

onde

$$A = A(u, u_x, u_t, ...) \text{ e } B = B(u, u_x, u_t, ...).$$

Substituindo essas novas variáveis em (S.B.), efetuando os cálculos, como pode ser facilmente visto em ([3],Cap. 2), obtém-se duas equações que modelam a propagação unidimensional de ondas longas com pequena amplitude, a saber:

$$\begin{cases} u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x + \frac{\beta}{6} u_{xxx} = 0 \ , & KdV \\ u_t + u_x + \frac{3}{2}\alpha u u_x - \frac{\beta}{6} u_{xxt} = 0 \ . & BBM \end{cases}$$

A primeira das equações acima é a famosa <u>equação de KdV</u>, que inicialmente foi derivada por Boussinesq em 1871 e depois por KdV em 1895.

Para análise matemática, é conveniente dispensar os termos α e β relacionados a amplitude máxima e comprimento de onda, respectivamente e os coeficientes $\frac{3}{2}$ e $\frac{1}{6}$. Assim, podemos reescrever as equações de KdV e BBM como

$$\begin{cases} u_t + (1+u)u_x + u_{xxx} = 0 \ , & KdV \\ u_t + (1+u)u_x - u_{xxt} = 0 \ . & BBM \end{cases}$$

Há muitos estudos sobre a equação de KdV em várias formas. A ela foram dedicados vários problemas de valores iniciais e de fronteira, como os encontrados em [4, 5, 13, 18, 22]. Em [15] foi resolvido o seguinte problema de valores iniciais e de fronteira para uma equação generalizada de KdV num domínio limitado:

$$(F) \begin{cases} u_t + u_{xxx} + g(u)u_x + g_1(t,x)u_x + g_2(t,x)u = f(t,x) & , \quad Q_T = (0,T)\times(0,1); \\ u|_{t=0} = u_o(x), \ u|_{x=0} = u_1(t), \ u|_{x=1} = u_2(t), \ u_x|_{x=1} = u_3(t), \end{cases}$$

onde a função g satisfaz a seguinte restrição de crescimento

$$|g'(u)| \leq c \ , \ \forall \ u \in \mathbb{R} \ , \ \text{para algum} \ \ c \geq 0.$$

Um problema misto, com condições mais gerais na fronteira para a equação de KdV, em um domínio limitado foi considerado em [7]. Muitos estudos se concentraram na Equação Linearizada de KdV, ou simplesmente, <u>Equação de Airy</u>:

$$u_t + u_{xxx} = f(x,t),$$

que constitui para nós, a parte principal da equação de KdV.

Em [8] e [14] foram apresentados estudos sobre problemas de valores iniciais e de fronteira para a equação de Airy no domínio $Q_T = (0,T) \times (0,1)$ com dados iniciais e de fronteira como em (F).

O problema de Cauchy para uma equação de tipo Airy:

$$\begin{cases} u_t = a(x,t)u_{xxx} \quad , \quad -\infty < x < \infty,\ 0 \leq t < \infty; \\ u(x,0) = f(x), \end{cases}$$

onde o coeficiente de dispersão pode variar com o espaço e o tempo, pode ser visto em [10].

A equação linearizada de KdV é bem conhecida e o presente trabalho é dedicado ao estudo de problemas de valores iniciais e de fronteira, para duas formas simples da equação do tipo Airy, no domínio não limitado $\mathbb{R}^+ \times (0,T)$, a saber:

$$u_t(x,t) \pm D^3u(x,t) = 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^+ \times (0,T), \tag{1}$$

onde $T > 0$, $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ e D^j significa derivada a de ordem j com respeito a variável espacial x. Note que o domínio $\mathbb{R}^+ \times (0,T)$ é não limitado e os sinais diferentes que aparecem na equação (1) influenciam de forma drástica o caracter da solução. Por isso, dividiremos nosso estudo em dois casos, em cada qual, haverá diferentes condições gerais na fronteira . A escolha de tais condições foi motivada pelas condições de Lopatinskii, (Cap. 1, §1.6).

Nosso principal objetivo é mostrar a existência e unicidade de solução para problemas de valores iniciais e de fronteira associados a (1). Para isto, nossa abordagem levará em conta dois casos separados e usaremos o método de semi-discretização. O motivo de tal escolha é que posteriormente podemos chegar a equação de KdV com as mesmas condições de contorno, uma vez que a equação de Airy é, em nosso caso, a equação linearizada de KdV.

Este trabalho está dividido em dois capítulos. No Capítulo 1, há três seções. Na primeira delas fizemos uma breve revisão de algumas definições e resultados que serão utilizados principalmente no Capítulo 2 e nas duas seções restantes trabalhamos com Sistemas de Equações Diferenciais Lineares para chegar às Condições de Lopatinskii, as quais constituem fundamental importância em nosso estudo. No Capítulo 2, demonstramos a existência e unicidade de solução regular generalizada para para problemas de valores iniciais e de fronteira associados às equações do tipo Airy (1). Grande parte da teoria desenvolvida neste capítulo é originalmente deste trabalho e eventuais correções serão bem aceitas para melhoria desta dissertação. Por alguns momentos, seguimos uma linha de raciocínio análogo ao trabalho de G. Doronin e N. Larkin, ver [12], que estuda equação de Kawahara.

Capítulo 1

RESULTADOS AUXILIARES E A CONDIÇÃO DE LOPATINSKII.

1.1 Notações e Resultados Preliminares.

Vejamos incialmente, algumas definições e resultados auxiliares que aparecerão por todo o texto, principalmente no Cap. 2. Faremos o uso de tais resultados constantemente e suas demonstrações podem ser encontradas em [1, 6, 9, 20, 23, 24] .

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Denotaremos por

$$C(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ \varphi \text{ é contínua}\}$$
$$C^\infty(\Omega) = \{\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \varphi \text{ é infinitamente diferenciável}\}.$$

Dada uma função $u \in C(\Omega)$, definimos o suporte de u como sendo

$$Supp(u) = \overline{\{x \in \Omega \ ; \ u(x) \neq 0\}}^{\Omega}$$

$$C_0(\Omega) = \{\varphi \in C(\Omega); \ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}$$
$$C_0^\infty(\Omega) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega); \ Supp(\varphi) \subset \Omega \text{ é compacto}\}.$$

Dizemos que uma sucessão de funções $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se, e somente se, existe um subconjunto compacto $K \subset \Omega$ tais que

(i) $Supp(\varphi_\nu) \subset K$, $\forall \nu$ e $Supp(\varphi) \subset K$,

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \longrightarrow D^\alpha \varphi$; uniformemente sobre K, $\forall \ \alpha \in \mathbb{N}^n$

com esta noção de convergência, denotaremos $C_0^\infty(\Omega)$ por $\mathcal{D}(\Omega)$ e o chamaremos de espaço das funções testes.

Definição 1.1.1. *Um Espaço de Banach E é um Espaço Vetorial Normado Completo. Quando a norma de E provém de um Produto Interno (p.i.), então dizemos que E é um Espaço de Hilbert.*

Definição 1.1.2. *Diz-se que uma função $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ é mensurável quando u é o limite quase sempre (q.s.) de uma sucessão de funções escada.*

Seja $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leq p < \infty$. Denotamos por

$$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ u \text{ é mensurável e } \int_\Omega |u(x)|^p dx < \infty\}.$$

Em $L^p(\Omega)$ há uma identificação entre funções que diferem entre si, em pontos de um conjunto de medida nula. Podemos definir uma norma em $L^p(\Omega)$, associando a cada (classe de funções) função $u \in L^p(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |u(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Com isto, $\big(L^p(\Omega); \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\big)$ é um espaço de Banach para todos $1 \leq p < \infty$.
No caso particular $p = 2$, os espaços $L^2(\Omega)$ são espaços de Hilbert com $p.i.$ dado por $(u,v) = \displaystyle\int_\Omega u(x)v(x)dx$ e norma $\|u\|_{L^2(\Omega)} = \sqrt{(u,u)}$. Logo, toda teoria construida para os espaços de Hilbert pode ser aplicada a $L^2(\Omega)$.
Se $p = \infty$, denotamos por

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ u \text{ é mensurável e } |u(x)| \leq \lambda\ q.s. \text{ em } \Omega\}.$$

Neste caso, como $|u(x)| \leq \lambda\ q.s.$ em Ω diz-se então que λ é majorante essencial de u. Seja $A = \{\lambda \in \mathbb{R}\ ;\ |u(x)| \leq \lambda\ q.s. \text{ em } \Omega\}$ e definimos $Supess|u| = inf A$. Podemos assim, definir uma norma em $L^\infty(\Omega)$ associando cada $u \in L^\infty(\Omega)$ o número real

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = Supess|u|,$$

e com isto o espaço $(L^\infty(\Omega); \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)})$ é um Espaço de Banach.

Seja agora $1 \leq p \leq \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Representaremos por

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega);\ D^\alpha u \in L^p(\Omega)\ ,\ \forall\ 0 \leq |\alpha| \leq m\},$$

onde a derivada se dá no sentido das Distribuições. Para maiores detalhes sobre este assunto, ver [9]. Nestes espaços podemos definir normas como segue

$$\begin{aligned} \|u\|^p_{W^{m,p}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \quad , \quad se\ 1 \leq p < \infty; \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \sum_{|\alpha|\leq m} Supess|D^\alpha u(x)| \quad , \quad se\ p = \infty. \end{aligned}$$

Assim definido, $(W^{m,p}(\Omega); \|\cdot\|_{W^{m,p}(\Omega)})$ é um espaço de Banach. No caso particular $p = 2$, representaremos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$ que são espaços de Hilbert com o *p.i.*

$$((u,v)) = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v) \ ; \ \forall \ u, v \in H^m(\Omega).$$

Podemos definir também uma semi-norma em $W^{m,p}(\Omega), \ 1 \leq p < \infty$. Para cada $0 \leq j \leq m$, consideremos os seguintes funcionais:

$$|u|_{j,p} = \left[\sum_{|\alpha|=j} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right]^{1/p} = \left[\sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right]^{1/p},$$

note que para $j = 0$ temos $|u|_{0,p} = \|u\|_{L^p(\Omega)}$. Maiores detalhes ver [1].

Dado um Espaço de Banach X e um número real $T > 0$. Representaremos por $L^p(0,T,X), \ 1 \leq p < \infty$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^p(0,T)$, munido da norma $\|u\|_{L^p(0,T,X)} = \left[\int_\Omega \|u(t)\|^p_X dt \right]^{1/p}$. Representaremos por $L^\infty(0,T,X)$ o espaço de Banach das (classes de) funções vetoriais $u : (0,T) \longrightarrow X$ mensuráveis tais que $\|u(t)\|_X \in L^\infty(0,T)$, munido da norma $\|u\|_{L^\infty(0,T,X)} = Supess_{t\in(0,T)}\|u(t)\|_X$.

Seja $(E; \|\cdot\|_E)$ um espaço de Banach, o dual topológico de E é dado por $E' = \{f : E \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ f \text{ é linear e contínua}\}$, munido da norma $\|f\|_{E'} = sup_{x\in E, \|x\|_E\leq 1}|\langle f, x\rangle|$ também é um espaço de Banach. Do mesmo modo, podemos definir o bi-dual de E denotado por E'' com a norma $\|\xi\|_{E''} = sup_{f\in E', \|f\|_{E'}\leq 1}|\langle \xi, f\rangle|$.

Como pode ser visto em [6], a aplicação

$$\begin{aligned} J : E &\longrightarrow E'' \\ x &\longmapsto J_x, \end{aligned}$$

onde $J_x : E' \longrightarrow \mathbb{R}$ é tal que $J_x(f) = \langle f, x\rangle \ ,\forall \ f \in E' \ , \ \forall \ x \in E$; é um isomorfismo de E sobre $J(E) \subset E''$, o que nos permite fazer a identificação $E \cong J(E)$.

Dizemos que E é <u>Reflexivo</u> quando $J(E) = E''$ e que E é <u>Separável</u> se existe um subconjunto $D \subset E$ enumerável e denso em E.

Com relação aos espaços L^p acima mencionados temos que

$$[L^p(\Omega)]' \cong L^q(\Omega)\ ,\ 1 < p < \infty \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$
$$[L^1(\Omega)]' \cong L^\infty(\Omega)\ ,\ [L^\infty(\Omega)]' \supsetneq L^1(\Omega);$$
$$[L^p(0,T,X)]' \cong L^q(0,T,X')\ ,\ 1 \leq p < \infty \text{ e } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Sendo E espaço de Banach, para cada $f \in E'$ consideremos $\varphi_f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi_f(x) = \langle f, x\rangle$; $\forall x \in E$. Quando f percorre E' obtemos uma família de aplicações $\{\varphi_f\}_{f\in E'}$.

Definição 1.1.3. *A topologia fraca $\sigma(E,E')$ em E é a topologia mais grossa (menos fina) em E no qual todas funções $\varphi_f,\ f \in E'$ são contínuas.*

Definição 1.1.4. *A topologia fraca$*$ $\sigma(E',E)$ em E' é a topologia mais grossa (menos fina) em E' no qual todas funções $J_x,\ x \in E$ são contínuas.*

Com estas definições podemos definir convergência forte e fraca de uma sucessão de funções e obter uma relação entre elas, como veremos mais adiante nos resultados. Antes, porém, relataremos alguns resultados mais conhecidos que serão muito úteis no Cap. 2.

Teorema 1.1.1. *$C(\Omega)$, $C_0(\Omega)$ e $C_0^\infty(\Omega)$ são densos em $L^p(\Omega)$ para todos $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Ver [1]. ■

Teorema 1.1.2. *$L^p(\Omega)$ é Reflexivo se, e somente se, $1 < p < \infty$.*

Demonstração: Ver [1]. ■

- $L^1(\Omega)$ e $L^\infty(\Omega)$ não são reflexivos.

Teorema 1.1.3. *$L^p(\Omega)$ é Separável para todos $1 \leq p < \infty$.*

Demonstração: Ver [1]. ■

- $L^\infty(\Omega)$ não é Separável.

Teorema 1.1.4 (Desigualdade de Young)**.** *Sejam a e b números reais e $1 < p < \infty$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ temos que:*

$$|a||b| \leq \frac{|\varepsilon a|^p}{p} + \frac{|\varepsilon^{-1} b|^q}{q}, \ \textit{onde} \ \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Demonstração: Ver [20]. ■

Teorema 1.1.5 (Desigualdade de Hölder)**.** *Se $u \in L^p(\Omega)$ e $v \in L^q(\Omega)$, então $uv \in L^1(\Omega)$ e vale*

$$\int_\Omega |uv| dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)},$$

onde $1 \leq p \leq \infty$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Demonstração: Ver [6] ou [24]. ■

- Quando $p = 2$, a Desigualdade de Hölder é conhecida como Desigualdade de Cauchy-Schwarz e representaremos como

$$|(u, v)| \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2}$$

Teorema 1.1.6 (Desigualdade de Minkowski)**.** *Se $u, v \in L^p(\Omega)$. Então*

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \ ; \ \ 1 \leq p < \infty. \tag{1.3}$$

Demonstração: Ver [24]. ■

Teorema 1.1.7 (Ehrling)**.** *Suponhamos que Ω satisfaz a propriedade do cone uniforme, ver [1] e seja $\varepsilon_0 > 0$ qualquer. Então existe uma constante $\delta = \delta(\varepsilon_0, m, p, \Omega)$ tal que para quaisquer $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, inteiro $0 \leq j \leq m - 1$ e $u \in W^{m,p}(\Omega)$ vale a seguinte estimativa*

$$|u|_{j,p} \leq \delta \varepsilon |u|_{m,p} + \delta \varepsilon^{\frac{-j}{m-j}} |u|_{0,p}. \tag{1.4}$$

Demonstração: Ver [1]. ■

- Em termos de notações definidas anteriormente, podemos reescrever (1.4) como

$$\left(\sum_{|\alpha|=j}\|D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{1/p} \leq \delta\varepsilon\left(\sum_{|\alpha|=m}\|D^{\alpha}u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)}\right)^{1/p} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{m-j}}\|u\|_{L^{p}(\Omega)}\ ;\ \forall j=1,\ldots,m-1. \tag{1.5}$$

Teorema 1.1.8 (Representação de Riesz-Fréchet)**.** *Seja H um espaço de Hilbert. Para toda forma linear e contínua $\varphi \in H'$, existe uma única $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, v\rangle = (f, v)\ ;\ \forall v \in H.$$

Além disso, $\|\varphi\|_{H'} = \|f\|_{H}$.

Demonstração: Ver [6]. ∎

Seja E um espaço de Banach. Dada uma sequência $\{x_n\} \subset E$, uma sequência $\{f_n\} \subset E'$ e $x \in E$, $f \in E'$ denotaremos por:

- $x_n \longrightarrow x$, a convergência forte de x_n para x, isto é, $\|x_n - x\|_E \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$.
- $x_n \longrightarrow x$-fraco, a convergência fraca de x_n para x em E na topologia $\sigma(E, E')$.
- $f_n \longrightarrow f$-fraco$*$, a convergência fraca$*$ de f_n para f em E' na topologia $\sigma(E', E)$.
- $f_n \longrightarrow f$, a convergência forte de f_n para f, isto é, $\|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0$ se $n \longrightarrow \infty$.

Teorema 1.1.9. *Seja $\{x_n\} \subset E$. Então valem as seguintes sentenças:*

(i) $x_n \longrightarrow x$*-fraco* $\Longleftrightarrow \langle f, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle;\ \forall\ f \in E'$.

(ii) $x_n \longrightarrow x \Longrightarrow x_n \longrightarrow x$*-fraco.*

(iii) $x_n \longrightarrow x$*-fraco* $\Longrightarrow \|x_n\|_E$ *é limitada e* $\|x\|_E \leq lim_n inf \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \longrightarrow x$*-fraco e* $f_n \longrightarrow f$ *forte em* E'*, então* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [6]. ∎

Teorema 1.1.10. *Seja* $\{f_n\} \subset E'$. *Então valem as seguintes sentenças:*

(i) $f_n \longrightarrow f$*-fraco*$* \Longleftrightarrow \langle f_n, x\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$; $\forall\ x \in E$.

(ii) $f_n \longrightarrow f \Longrightarrow f_n \longrightarrow f$*-fraco*$*$.

(iii) $f_n \longrightarrow f$*-fraco*$* \Longrightarrow \|f_n\|_{E'}$ *é limitada e* $\|f\|_{E'} \leq lim_n inf \|f_n\|_{E'}$.

(iv) *Se* $f_n \longrightarrow f$*-fraco*$*$ *e* $x_n \longrightarrow x$ *forte em* E, *então* $\langle f_n, x_n\rangle \longrightarrow \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [6]. ■

Teorema 1.1.11. *Sejam* E *um espaço de Banach separável e* $\{f_n\}$ *uma sucessão limitada de* E'. *Então existe uma subsucessão* $\{f_{n_k}\}$ *de* $\{f_n\}$ *que converge na topologia fraca*$*$ $\sigma(E', E)$.

Demonstração: Ver [6]. ■

Teorema 1.1.12. *Sejam* E *um espaço de Banach reflexivo e* $\{x_n\}$ *uma sequência limitada de* E. *Então existe uma subsequência* $\{x_{n_k}\}$ *de* $\{x_n\}$ *que converge na topologia fraca* $\sigma(E, E')$.

Demonstração: Ver [6]. ■

Como consequência, temos que o Teorema 1.1.12 vale nos espaços L^p com $1 < p < \infty$. Mais ainda, todo espaço de Hilbert H é reflexivo, ver [6], e portanto vale o Teorema 1.1.12 em H.

Observação 1.1.13. *Graças ao Teorema da Representação de Riesz-Fréchet, podemos identificar os espaços de Hilbert* H *com seus duais topológicos* H', *mais detalhes ver [6]. Além disso, dizemos que uma sequência*

$$x_n \longrightarrow x_0 \textit{ fraco em } H \iff (x_n, y) \longrightarrow (x_0, y)\ ,\ \forall\ y \in H;$$

onde $(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ representa o produto interno em H.

1.2 Sistemas Lineares de Equações Diferenciais.

§1.2.1. Introdução.

No restante deste capítulo descreveremos uma breve teoria sobres sistemas de equações diferenciais lineares, exponencial de matrizes, matrizes de Green e as condições de Lopatinskii. Neste contexto foram utilizadas teorias sobres matrizes que podem ser encontradas em [16] e [21], para maiores interessados. Porém todas as demonstrações serão omitidas, uma vez que todos os resultados desta parte, são facilmente encontradas em [17] e não interferem no principal resultado do Capítulo 2. Este conteúdo pode ser encontrado também em [25]. Nosso interesse aqui é chegar às condições de Lopatinskii, que nos fornecerá condições de fronteira desejadas para posteriores estudos. Por este motivo, esta parte é interessante, mas não intervem na compreensão do Capítulo 2.
Por todo este capítulo estaremos considerando equações do tipo

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t),$$

onde

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_N(t) \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & a_{N2} & \cdots & a_{NN} \end{pmatrix}.$$

Além disso, podemos definir normas como segue

$$\|y(t)\| = \sqrt{\langle y, y\rangle} = \sqrt{{y_1}^2 + \cdots + {y_N}^2}.$$

Para uma matriz A definimos duas normas. A norma Espectral

$$\|A\| = \sup_{\|y\|=1} \|Ay\| = \sqrt{\sup_{\|y\|=1} \langle Ay, Ay\rangle} = \sqrt{\sup_{\|y\|=1} \langle A^*Ay, y\rangle} = \sqrt{\lambda_{\max}(A^*A)},$$

onde $\lambda_{\max}(A^*A)$ é o maior autovalor da matriz A^*A.
Da definição de norma espectral, segue as seguintes estimativas.

$$\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|,$$

$$\|ABx\| \leq \|A\|\|Bx\| \leq \|A\|\|B\|\|x\|,$$

$$\|AB\| \leq \|A\|\|B\|, \text{ em particular}, \|A^n\| \leq \|A\|^n, \; n \in \mathbb{N};$$

onde A e B são matrizes e x é um vetor. E a norma Eucliadiana dada por

$$\|A\|_E = \sqrt{\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}^2}.$$

Em [17] verificou-se que essas normas são equivalentes, além disso temos:

$$\frac{\|A\|_E}{\sqrt{N}} \leq \|A\| \leq \|A\|_E.$$

§1.2.2. Equação Diferencial Ordinária Linear de Ordem N e Sistema de Equações Diferenciais Lineares.

Veremos uma correspondência que nos permite relacionar uma solução de uma Equação Diferencial Ordinária Linear de Ordem N com uma solução de um Sistema de Equações Diferenciais Lineares. Consideremos a E.D.O. linear:

$$x^{(N)}(t) + p_1 x^{(N-1)}(t) + p_2 x^{(N-2)} + \cdots + p_{N-1} x'(t) + p_N x(t) = g(t). \tag{1.6}$$

Façamos a seguinte construção:

$$\begin{aligned}
y_1 &= x(t) \\
y_2 &= x'(t) = y_1' \\
y_3 &= x''(t) = y_2' \\
&\vdots \\
y_{N-1} &= x^{(N-2)}(t) = y_{N-2}' \\
y_N &= x^{(N-1)}(t) = y_{N-1}'
\end{aligned}$$

Desta forma, obtemos o seguinte Sistema de Equações Diferenciais.

$$\begin{cases}
y_1' = y_2 \\
y_2' = y_3 \\
\quad \vdots \\
y_{N-1}' = y_N \\
y_N' = y_1^{(N)} = x^{(N)}(t) = -p_1 y_N - p_2 y_{N-1} - \cdots - p_{N-1} y_2 - p_N y_1 + g(t),
\end{cases}$$

que escrito sob a forma matricial fica,

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_{N-1}' \\ y_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_N & -p_{N-1} & -p_{N-2} & \cdots & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Pondo

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ -p_N & -p_{N-1} & \cdots & -p_2 & -p_1 \end{pmatrix} \text{ e } f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}.$$

Então podemos escrever (1.7) como

$$\frac{d}{dt} y(t) = Ay(t) + f(t). \tag{1.8}$$

Devido a esta construção podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 1.2.1. *Para toda solução $x(t)$ de (1.6) existe um vetor $y(t)$ com N componentes que é solução de (1.8). Reciprocamente, se conhecemos uma solução $y(t)$ para (1.8), então podemos encontrar uma função $x(t)$ que satisfaz (1.6).*

Demonstração: Segue diretamente da construção acima. ∎

§1.2.3. Exponencial de Matrizes e Algumas Estimativas.

Dada uma matriz A de ordem N, consideremos a seguinte soma parcial de matrizes

$$S_k(t) = I + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{t^k}{k!}A^k.$$

Em [25] provou-se que esta soma é convergente. Mais ainda, definimos o limite de $S_k(t)$ como Exponencial de Matrizes, isto sugere a seguinte definição.

Definição 1.2.1. *A matriz*

$$e^{tA} = \lim_{k\to\infty} S_k(t) = I_N + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!},$$

é chamada de Exponencial de Matrizes.

Como pode ser visto em [17], ou ainda em [25], a exponencial de matrizes $Y(t) = e^{tA}$ é solução do problema de Cauchy:

$$Y'(t) = AY(t)\ ,\ Y(0) = I_N.$$

A fim de encontrar uma boa estimativa para a exponencial de matrizes, temos os seguintes resultados.

Lema 1.2.2. *Para todo inteiro $k \geq 1$, vale a seguinte desigualdade*

$$\|(A+B)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|B\|)^k - \|A\|^k.$$

Demonstração: Ver [17]. ∎

Lema 1.2.3. *Vale a seguinte estimativa*

$$\|e^{(A+B)} - e^A\| \leq \|B\| e^{(\|A\|+\|B\|)}.$$

Demonstração: Ver [17]. ∎

Além disso, como está explicito em [17], podemos escrever a exponencial de matrizes e^{tA} como um polinômio específico, isto é, como uma soma finita:

$$e^{tA} = \psi_1(t)I + \psi_2(t)[A - \tau_1 I] + \cdots + \psi_N(t)[A - \tau_1 I] \ldots [A - \tau_{N-1} I],$$

onde τ_j , $j = 1, \ldots, N$; são os autovalores da matriz A e $\psi_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$; são funções escalares que formam uma solução para o seguinte problema de Cauchy.

$$\begin{array}{rcll}
\frac{d}{dt}\psi_1(t) & = & \tau_1\psi_1(t), & \psi_1(0) = 1, \\
\frac{d}{dt}\psi_2(t) & = & \tau_2\psi_2(t) + \psi_1(t), & \psi_2(0) = 0, \\
\frac{d}{dt}\psi_3(t) & = & \tau_3\psi_3(t) + \psi_2(t), & \psi_3(0) = 0, \\
\vdots & & \vdots & \vdots \\
\frac{d}{dt}\psi_N(t) & = & \tau_N\psi_N(t) + \psi_{N-1}(t), & \psi_N(0) = 0.
\end{array}$$

Assumindo que $Re\tau_j \leq \alpha,\ j = 1, \ldots, N$; onde $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que as funções $\psi_j(t)$ satisfazem a estimativa

$$|\psi_j(t)| \leq \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}e^{\alpha t},\ \forall\ t > 0, k = 1, 2, \ldots$$

e portanto podemos enunciar o seguinte resultado.

Teorema 1.2.4. *Seja A uma matriz de ordem N. Se os autovalores τ_j, $j = 1, \ldots, N$ de A são tais que,*

$$Re\tau_j \leq -\delta,\ \delta > 0.$$

Então,

$$\|e^{tA}\| \leq \gamma(N)\left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^{N-1} e^{-\frac{\delta}{2}t},\quad \forall\ t \geq 0;$$

onde $\gamma(N)$ é uma constante que depende somente de N.

Demonstração: Ver [17]. ■

§1.2.4. Matriz de Green.

Veremos a seguir, quais as condições que uma dada matriz A deve satisfazer para que exista e seja única uma Matriz de Green relacionada a matriz A.

Definição 1.2.2. *Dada uma matriz A, a matriz de Green é uma aplicação continuamente diferenciável que associa a cada $t \in \mathbb{R} - \{0\}$ uma matriz*

$$G_0(t, A) \equiv G_0(t),$$

que satisfaz as seguintes condições:

(a) $\frac{d}{dt}G_0(t) = AG_0(t)\ ,\ \forall t \neq 0;$

(b) Para $t = 0$ a matriz $G_0(t)$ tem uma descontinuidade de primeira espécie

$$G_0(+0) - G_0(-0) = I_N;$$

(c) $\|G_0(t)\|$ é limitada para todo $t \in \mathbb{R}$.

Pergunta: Será que existe Matriz de Green $G_0(t)$ para qualquer matriz A dada? O próximo resultado nos dá esta resposta.

Teorema 1.2.5 (Existência e Unicidade)**.** *Se a matriz A não possui autovalores imaginários puros, então existe e é única a matriz de Green $G_0(t, A)$.*

Demonstração: Ver [17]. ■

• A demonstração do Teorema 1.2.5 fornece um método para encontrar a matriz de Green G_0. Mais detalhes ver [17].

Fazendo uma analogia com a exponencial de matrizes, considera-se o seguinte polinômio de matrizes,

$$G_0(t) = g_1(t)I + g_2(t)[A - \tau_1 I] + \cdots + g_N(t)[A - \tau_1 I] \dots [A - \tau_{N-1} I],$$

onde os autovalores $\tau_1, \tau_2, \dots \tau_N$ da matriz A não pertencem ao eixo imaginário, isto é, $|Re\tau_j| > 0, j = 1, \dots, N$; e as funções $g_j,\ j = 1, \dots, N$; são soluções das seguintes equações diferenciais para $t \neq 0$,

$$\frac{d}{dt}g_1 = \tau_1 g_1; \quad \frac{d}{dt}g_j = \tau_j g_j + g_{j-1},\ j \geq 2.$$

Além disso, se tivermos que $|Re\tau_j| \geq \delta > 0,\ j = 1, \ldots, N$. Então para $t \neq 0$ obtém-se a estimativa:

$$|g_j(t)| \leq \frac{\rho(j)}{\delta^{j-1}} e^{-\frac{\delta}{2}|t|},$$

onde $\rho(j)$ é uma constante que depende somente de j. Considerando A uma matriz de ordem N e $\tau_j, j = 1, \ldots, N$ seus autovalores, podemos enunciar o seguinte resultado.

Lema 1.2.6. *Se* $0 < \delta \leq |Re\tau_j|$, *então a Matriz de Green* $G_0(t)$ *é limitada e decresce quando* $|t| \longrightarrow \infty$. *Além disso, temos a seguinte estimativa.*

$$\|G_0(t)\| \leq \gamma(N) \left(\frac{\|A\|}{\delta} \right)^{N-1} e^{-\frac{\delta}{2}|t|}.$$

Demonstração: Ver [17]. ■

Uma aplicação da matriz de Green em sistemas de equações diferenciais lineares.

Consideremos a equação

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + f(t), \tag{1.9}$$

onde $f(t)$ é uma função vetorial limitada para todo t real, i.é,

$$\|f(t)\| \leq F \ , \ \forall \ \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Teorema 1.2.7. *Se A não possui autovalores imaginários puros, isto é, $|Re\tau_j(A)| \geq \delta$ e $f(t)$ satisfaz (1.10), então existe uma única solução limitada $y(t)$ para (1.9). Tal solução $y(t)$ pode ser determinada pela fórmula*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G_0(t-s)f(s)ds,$$

onde $G_0(t)$ é a matriz de Green. Além disso, vale a estimativa

$$\|y(t)\| \leq \frac{4F}{\delta}\gamma(N)\left(\frac{\|A\|}{\delta}\right)^{N-1}.$$

Demonstração: Ver [17]. ■

Como particularidade do Teorema 1.2.7, ver [17], temos que se $t \neq 0$ então a aplicação

$$w(t) = \int_{0}^{\infty} G_0(t-s)f(s)ds$$

é solução da equação

$$\frac{d}{dt}w(t) = Aw(t) + \begin{cases} f(t) & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0. \end{cases} \tag{1.11}$$

1.3 Condição de Lopatinskii.

Agora estamos interessados em obter solução limitada para o seguinte problema de valor na fronteira

$$\frac{d}{dt}y(t) = Ay(t) + f(t) \quad , \quad t > 0; \tag{1.12}$$

$$My(0) = \varphi, \tag{1.13}$$

onde f é uma função vetorial contínua e limitada, i. é, $\|f(t)\| \leq F$, $\forall\ t \geq 0$ e M é, por enquanto, uma matriz qualquer cujo número de colunas coincide com o número de componentes de y que é N e φ é um vetor coluna que depende do número de linhas de M. Assumiremos também que a matriz A não possui autovalores τ_j, $j = 1, \ldots, N$; imaginários puros, isto é, que $Re\tau_j \neq 0$. Mais prescisamente, consideremos

$$Re\tau_1 \leq -\sigma, \quad Re\tau_2 \leq -\sigma, \quad \cdots, \quad Re\tau_k \leq -\sigma;$$
$$Re\tau_{k+1} \geq \sigma, \quad Re\tau_{k+2} \geq \sigma, \quad \cdots, \quad Re\tau_N \geq \sigma, \quad (\sigma > 0).$$

Vamos impor uma condição que resultará na existência de solução para (1.12)-(1.13).
<u>A CONDIÇÃO DE LOPATINSKII:</u> O problema de valor na fronteira para a equação homogênea

$$\frac{d}{dt}v(t) = Av(t), \quad t \geq 0; \tag{1.14}$$

$$Mv(0) = \varphi, \tag{1.15}$$

possui uma única solução limitada $v(t)$, $0 \leq t < \infty$; para qualquer φ tal que o número de seus componentes coincide com o número de linhas da matriz M.
Mediante a esta condição, temos o seguinte resultado.

Teorema 1.3.1. *Suponhamos que a condição de Lopatinskii seja verdadeira, então o problema (1.12)-(1.13) tem uma única solução limitada $y(t)$ para qualquer vetor φ e $f(t)$ contínua e limitada.*

Demonstração: Ver [17]. ∎

Em geral, a condição de Lopatinskii pode não valer, neste caso o Teorema 1.3.1 pode ser verdadeiro ou não. Nossa intensão agora é descobrir que condições devem ser impostas sobre os dados da fronteira para que seja verdadeira a condição de Lopatinskii.
Consideremos o seguinte espaço vetorial de soluções

$$\mathcal{M} = \{v(t) \ / \ \frac{dv(t)}{dt} = Av(t), \|v(t)\| \leq m < \infty, \ \forall \ t \geq 0\}.$$

Teorema 1.3.2. *A dimensão do espaço vetorial $\mathcal{M}$ é igual ao número de autovalores da matriz A que possuem parte real negativa, isto é, $dim\mathcal{M} = k$.*

Demonstração: Ver [17]. ■

Seja $V(t)$ uma matriz de ordem $N \times k$, no qual suas colunas formam uma base para o espaço $\mathcal{M}$.

Definição 1.3.1. *O determinante $\Delta = det[MV(0)]$ da matriz $MV(0)$ é chamado Determinante de Lopatinskii.*

Com essas relações assim definidas temos o seguinte critério para a veracidade da Condição de Lopatinskii.

Lema 1.3.3 (Critério)**.** *A condição de Lopatinskii é verdadeira se, e somente se, o número de linhas da matriz M é igual a k e o determinante de Lopatinskii $\Delta \neq 0$.*

Demonstração: Ver [17]. ■

Veremos a seguir dois exemplos que ilustram a aplicação destes resultados.

1.3.1 Aplicação da Condição de Lopatinskii.

Exemplo 1.3.1. *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$, *onde* $d > 0$ *é um número real e* $h(t)$ *é uma função real limitada e contínua. Vejamos quais são as condições necessárias para que o problema (1.12)-(1.13) possua única solução limitada*

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

De acordo com o Teorema 1.3.1 e o Lema 1.3.3 devemos ter que o número de linhas de M, é o mesmo que o número de autovalores de A com parte real negativa e que o determinante de Lopatinskii $\Delta = det[MV(0)] \neq 0$, para alguma matriz $V(t)$ cuja suas colunas formam uma base para o espaço $\mathcal{M}$.

Os autovalores de A são

$$\tau_0 = \frac{d^{1/3}}{2}(1 + i\sqrt{3})\ , \tau_1 = -d^{1/3}\ ,\ \tau_2 = \frac{d^{1/3}}{2}(1 - i\sqrt{3}).$$

Como $d > 0$ então somente τ_1 possui parte real negativa. Logo M deve ser da seguinte forma,

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \end{bmatrix}_{1\times 3}. \tag{1.16}$$

Agora note que o espaço $\mathcal{M}$ tem dimensão 1, de acordo com Teorema 1.3.2. Além disso, $\widetilde{v}(t) = e^{-d^{1/3}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -d^{1/3} \\ d^{2/3} \end{pmatrix}$ é uma solução limitada para (1.14), então $\widetilde{v}(t)$ constitui uma base para $\mathcal{M}$. Logo consideremos

$V(t) = [\widetilde{v}(t)]_{3\times 1}$, assim $V(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -d^{1/3} \\ d^{2/3} \end{bmatrix}$. Desta forma, $\Delta = m_1 - m_2 d^{1/3} + m_3 d^{2/3}$.

Portanto devemos exigir que

$$\Delta = m_1 - m_2 d^{1/3} + m_3 d^{2/3} \neq 0. \tag{1.17}$$

Assumindo então que (1.16) e (1.17) são válidas temos pelo Teorema 1.3.1 e 1.3.3 que o problema (1.12)-(1.13) possui única solução limitada $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Retornando ao Lema 1.2.1, temos que a função $u \equiv y_1$ é solução da equação

$$\frac{d^3}{dt^3}u(t) + du(t) = h(t), \quad t > 0; \tag{1.18}$$

juntamente com a condição de contorno em $t = 0$ dada por

$$m_1 u(0) + m_2 u'(0) + m_3 u''(0) = \varphi, \tag{1.19}$$

onde (1.17) deve ser satisfeita.

Exemplo 1.3.2. *Considere a matriz* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ d & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $f(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h(t) \end{pmatrix}$, *onde* $d > 0$ *é um número real e* $h(t)$ *é uma função real limitada e contínua. Vejamos quais são as condições necessárias para que o problema (1.12)-(1.13) possua única solução limitada*

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}.$$

De acordo com o Teorema 1.3.1 e o Lema 1.3.3 devemos ter que o número de linhas de M, é o mesmo que o número de autovalores de A com parte real negativa e que o determinante de Lopatinskii $\Delta = det[MV(0)] \neq 0$, para alguma matriz $V(t)$ cuja suas colunas formam uma base para o espaço $\mathcal{M}$.
Os autovalores de A são

$$\tau_0 = d^{1/3}\ ,\ \tau_1 = \frac{d^{1/3}}{2}(-1 + i\sqrt{3})\ , \tau_2 = \frac{d^{1/3}}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

Como $d > 0$ então τ_1 e τ_2 possuem parte real negativa, logo M deve ser da seguinte forma,

$$M = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3}. \tag{1.20}$$

De acordo com Teorema 1.3.2 o espaço $\mathcal{M}$ tem dimensão 2. Além disso,

$$\widetilde{v}(t)_1 = e^{-\frac{d}{2}^{1/3}t} \begin{pmatrix} -d^{-\frac{2}{3}}\cos(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) - d^{-\frac{2}{3}}\sqrt{3}\sin(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -d^{-\frac{1}{3}}\cos(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) + d^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3}\sin(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 2\cos(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{pmatrix}$$

e

$$\widetilde{v}(t)_2 = e^{-\frac{d}{2}^{1/3}t} \begin{pmatrix} d^{-\frac{2}{3}}\sqrt{3}\cos(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) - d^{-\frac{2}{3}}\sin(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ -d^{-\frac{1}{3}}\sqrt{3}\cos(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) - d^{-\frac{1}{3}}\sin(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ 2\sin(d^{1/3}\frac{\sqrt{3}}{2}t) \end{pmatrix},$$

são soluções limitadas para (1.14), as quais são $l.i.$ em conjunto com a solução associada ao autovalor τ_0, então $\widetilde{v}(t)_1$ e $\widetilde{v}(t)_2$ constituem uma base para $\mathcal{M}$. Logo consideremos $V(t) = [\widetilde{v}_1(t) \;\; \widetilde{v}_2(t)]_{3\times 2}$, assim $V(0) = \begin{bmatrix} -d^{-2/3} & d^{-2/3}\sqrt{3} \\ -d^{1/3} & -d^{-1/3}\sqrt{3} \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$. Desta forma,

$$\Delta = det[MV(0)] = 2d^{-1}\sqrt{3}(|G_3| - |G_2|d^{1/3} + |G_1|d^{2/3}),$$

onde G_k, k=1,2,3 ; é submatriz de M retirando-se a k-ésima coluna e $|G_k| = \det G_k$. Portanto devemos exigir que

$$\Delta = |G_3| - |G_2|d^{1/3} + |G_1|d^{2/3} \neq 0. \tag{1.21}$$

Assumindo que (1.20) e (1.21) são válidas temos pelo Teorema 1.3.1 e Lema 1.3.3 que o problema (1.12)-(1.13) possui única solução limitada $y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Retornando ao Lema 1.2.1, temos que a função $u \equiv y_1$ é solução da equação

$$\frac{d^3}{dt^3}u(t) - du(t) = h(t), \quad t > 0; \tag{1.22}$$

juntamente com a condição de contorno em $t = 0$ dada por

$$\begin{aligned} g_{11}u(0) + g_{12}u'(0) + g_{13}u''(0) = \varphi_1; \\ g_{11}u(0) + g_{12}u'(0) + g_{13}u''(0) = \varphi_2, \end{aligned} \tag{1.23}$$

onde (1.21) deve ser satisfeita.

Capítulo 2

EXISTÊNCIA E UNICIDADE DE SOLUÇÃO PARA EQUAÇÃO DE AIRY COM CONDIÇÕES DE FRONTEIRA GERAIS.

2.1 Primeiro caso.

Para $T > 0$ real, denotemos $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}; x > 0\}$ e $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$. Em Q_T consideremos a equação de Airy com condição de fronteira e dado inicial

$$u_t(x,t) + D^3u(x,t) = 0 \quad , \quad \text{em } \; Q_T; \tag{2.1}$$

$$D^2u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 \quad , \quad t \in (0,T); \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.3}$$

onde os coeficientes α e β são escalares tais que:

$$\Delta = \beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \neq 0, \tag{2.4}$$

$$\beta > 0 \;\; \text{e} \;\; |\alpha| < min\{2\beta, 1\}. \tag{2.5}$$

O número real $d > 0$ é qualquer e a função $u_o \in H^3(\mathbb{R}^+)$ satisfaz a seguinte condição:

$$D^2u_o(0) + \alpha Du_o(0) + \beta u_o(0) = 0. \tag{2.6}$$

O principal objetivo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1. *Sejam $u_o \in H^3(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo (2.6) e α, β tais que (2.4)-(2.5) se verifica. Então para todo $T > 0$ o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução regular*

$$u \in L^\infty(0,T,H^3(\mathbb{R}^+)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, vale a estimativa

$$\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}(t) + \|u\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \quad q.\ t.\ \ t \in (0,T).$$

Iniciaremos a demonstração do Teorema 2.1.1 com um Problema Estacionário e em seguida retornaremos ao problema (2.1)-(2.3).

2.1.1 Problema Estacionário.

Nesta seção, nosso objetivo é resolver o seguinte problema de fronteira:

$$D^3u(x) + du(x) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.7}$$

$$D^2u(0) + \alpha Du(0) + \beta u(0) = 0, \tag{2.8}$$

onde $d > 0$, f é tal que

$$f \in L^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+) \ \text{ t. q. } \ |f(x)| \leq Me^{-kx}; \ \ k > 0 \ , \ \forall \ x \in \mathbb{R}^+, \tag{2.9}$$

sendo M uma constante positiva qualquer e α , β satisfazem (2.4)-(2.5).

Da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, ver [11] ou [19], uma solução geral para a equação (2.7) é dada por

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x), \tag{2.10}$$

onde $u_p(x)$ é uma solução particular para equação (2.7) e $u_c(x)$ é uma solução geral da equação homogênea associada

$$D^3u(x) + du(x) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.11}$$

A equação característica para (2.11) é $\lambda^3 + d = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = -d^{1/3} \ , \ \lambda_2 = \frac{d}{2}^{1/3}(1 + i\sqrt{3}) \ , \ \lambda_3 = \frac{d}{2}^{1/3}(1 - i\sqrt{3}).$$

Logo as soluções de (2.11) são

$$u_1 = e^{-d^{1/3}x} \ , \ \overline{u}_2 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(1+i\sqrt{3})x} \ e \ \overline{u}_3 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(1-i\sqrt{3})x}.$$

Das soluções complexas $\overline{u}_2, \overline{u}_3$, obtemos as seguintes soluções reais, ver [11].

$$u_2 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) \ e \ u_3 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Agora note que o Wronskiano $W(x) \equiv W = \dfrac{3}{2}\sqrt{3}d \neq 0$, assim as soluções u_1, u_2 e u_3 são l.i. e uma solução geral da equação (2.11) é :

$$u_c(x) = C_1 e^{-d^{1/3}x} + C_2 e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3 e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x). \tag{2.12}$$

Usando o método da Variação dos Parâmetros, uma solução particular u_p para equação (2.7) é dada por:

$$u_p(x) = \sum_{j=1}^{3} u_j(x)\int_0^x \frac{W_j(s)}{W} f(s)ds,$$

onde W_j , $j = 1, 2, 3$; é obtido de W substituindo-se a j-ésima coluna por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Efetuando os cálculos, obtemos que

$$\begin{aligned}
W_1 &= d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{d^{1/3}x},\\
W_2 &= -d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right),\\
W_3 &= d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right).
\end{aligned}$$

Assim a solução particular de (2.7) é,

$$\begin{aligned}
u_p(x) &= e^{-d^{1/3}x}\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{d^{1/3}s}f(s)ds\\
&-e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) + \sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds\\
&+e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Das igualdades (2.12) e (2.13), a solução procurada é dada por,

$$
\begin{aligned}
u(x) = e^{-d^{1/3}x}&\left(C_1 + \int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{d^{1/3}s} f(s)ds\right)\\
+e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)&\left(C_2 - \int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}[\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) + \sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right)\\
+e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)&\left(C_3 + \int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}[\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right).
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Queremos que as duas segundas parcelas dentro dos parênteses no lado direito da igualdade em (2.14) tendam a zero quando $x \longrightarrow \infty$. Fazendo isto, temos que:

$$
\begin{aligned}
C_2 &= \int_0^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) + \sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right) f(s)ds,\\
C_3 &= -\int_0^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right) f(s)ds.
\end{aligned}
$$

Agora, determinaremos a constante C_1 da condição de fronteira (2.8). Por simplicidade, continuaremos escrevendo ainda, C_2 e C_3. Como

$$
\begin{aligned}
&u(0) = C_1 + C_2,\\
&Du(0) = -d^{1/3}C_1 + \frac{d}{2}^{1/3}C_2 + \frac{d}{2}^{1/3}\sqrt{3}C_3,\\
&D^2u(0) = d^{2/3}C_1 - \frac{d}{2}^{2/3}C_2 + \frac{d}{2}^{2/3}\sqrt{3}C_3,
\end{aligned}
$$

temos de (2.8) que:

$$
(d^{2/3}C_1 - \frac{d}{2}^{2/3}C_2 + \frac{d}{2}^{2/3}\sqrt{3}C_3) + \alpha(-d^{1/3}C_1 + \frac{d}{2}^{1/3}C_2 + \frac{d}{2}^{1/3}\sqrt{3}C_3) + \beta(C_1 + C_2) = 0.
$$

Donde,

$$
(\beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}})C_1 = -(\beta + \alpha\frac{d}{2}^{1/3} - \frac{d}{2}^{2/3})C_2 - (\alpha d^{1/3} + d^{2/3})\frac{\sqrt{3}}{2}C_3.
$$

Logo,

$$C_1 = \frac{d^{-2/3}}{3\Delta}\int_0^\infty e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\Delta' \cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sqrt{3}\Delta'' \sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right) f(s)ds, \tag{2.15}$$

onde $\Delta' = -\beta + \alpha d^{1/3} + 2d^{2/3}$ e $\Delta'' = \beta + \alpha d^{1/3}$.

Substituindo as constantes C_2 e C_3 em (2.14) segue que

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-d^{1/3}x}\left[C_1 + \int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{d^{1/3}s} f(s)ds\right] \\
&+ e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_x^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) + \sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right) f(s)ds \\
&- e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_x^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s) - \sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right) f(s)ds.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Reorganizando os termos em (2.16) finalmente obtemos uma solução para o problema (2.7)-(2.8).

$$\begin{aligned}
u(x) &= e^{-d^{1/3}x}\left[C_1 + \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}\int_0^x e^{d^{1/3}s} f(s)ds\right] \\
&+ \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}\int_x^\infty e^{-\frac{d}{2}^{1/3}(s-x)}\left(\cos d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(s-x) + \sqrt{3}\sin d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(s-x)\right) f(s)ds,
\end{aligned} \tag{2.17}$$

onde C_1 é dada por (2.15). Da expressão (2.17) e como f satisfaz (2.9), verifica-se facilmente que u satisfaz a seguinte estimativa.

$$|u(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \infty.$$

Mais ainda, temos o seguinte resultado.

Lema 2.1.2. *Seja* $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. *Então o problema (2.7)-(2.8) admite uma única solução* $u \in H^3(\mathbb{R}^+)$ *tal que*

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{2.18}$$

Demonstração: Sendo $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ denso em $L^2(\mathbb{R}^+)$, então existe uma sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, com $|f_m(x)| \leq M_m e^{-k_m x}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$f_m \longrightarrow f \text{ em } L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.19}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o problema

$$D^3u_m(x) + du_m(x) = f_m(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.20}$$

$$D^2u_m(0) + \alpha Du_m(0) + \beta u_m(0) = 0. \tag{2.21}$$

Para continuar a demonstração do lema 2.1.2, necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.1.3. *O problema (2.20)-(2.21) admite única solução* $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, *tais que*

$$\|u_m\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\ ,\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.22}$$

Demonstração: A existência de uma solução clássica u_m, para cada $m \in \mathbb{N}$, segue diretamente de (2.17). Resta mostrar que $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$ e satisfaz a (2.22). Multiplicando a equação (2.20) por u_m e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$(D^3u_m, u_m) + d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = (f_m, u_m),\ \forall m \in \mathbb{N}, \tag{2.23}$$

onde $(u,v) = \displaystyle\int_0^\infty u(x)v(x)dx$ e $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \displaystyle\int_0^\infty |u(x)|^2dx$, representam o produto interno e norma em $L^2(\mathbb{R}^+)$, respectivamente.

Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}(D^3u_m, u_m) &= \int_0^\infty u_m(x)D^3u_m(x)dx = -u_m(0)D^2u_m(0) - \frac{1}{2}\int_0^\infty D(Du_m)^2dx \\ &= u_m(0)(-D^2u_m(0)) + \frac{1}{2}|Du_m(0)|^2,\ \forall m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Da condição (2.21) e da desigualdade de Young com $p = 2$ e $\varepsilon = 1$ segue que

$$\begin{aligned}
(D^3u_m, u_m) &= \alpha u_m(0)Du_m(0) + \beta|u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du_m(0)|^2 \\
&\geq -|\alpha||u_m(0)||Du_m(0)| + \beta|u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du_m(0)|^2 \\
&\geq -\frac{|\alpha|}{2}(|u_m(0)|^2 + |Du_m(0)|^2) + \beta|u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du_m(0)|^2 \\
&= (\beta - \frac{|\alpha|}{2})|u_m(0)|^2 + \frac{1}{2}(1 - |\alpha|)|Du_m(0)|^2, \ \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Pela condição (2.5) temos que

$$(D^3u_m, u_m) \geq 0, \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Assim, voltando a (2.23) e usando a desigualdade de Cauchy segue que

$$\begin{aligned}
d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq (D^3u_m, u_m) + d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq |(f_m, u_m)| \\
&\leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{d}\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Por outro lado, multiplicando (2.20) por D^3u_m e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$\|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + d(D^3u_m, u_m) = (f_m, D^3u_m), \ \forall m \in \mathbb{N}.$$

Como $(D^3u_m, u_m) \geq 0, \ \forall m \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}
\|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + d(D^3u_m, u_m) \leq |(f_m, D^3u_m)| \\
&\leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Deste modo

$$\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall m \in \mathbb{N}. \tag{2.25}$$

Vamos obter agora estimativas para as derivadas intermediárias D^j; $j = 1, 2$. Pelo Lema de Ehrling temos que

$$\|D^ju_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \delta\varepsilon\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ j = 1, 2;$$

onde $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, $\varepsilon_o > 0$ qualquer e $\delta = \delta(\varepsilon_o) > 0$.
Consequentemente de (2.24)-(2.25) vem que

$$\|D^j u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \delta\varepsilon \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \frac{\delta}{d}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}} \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \underbrace{(\delta\varepsilon + \frac{\delta}{d}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}})}_{C_j} \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Daí,

$$\|D^j u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_j \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ j = 1, 2; \tag{2.26}$$

onde $C_j = C_j(\varepsilon_o, d) > 0$.
De (2.24) à (2.26) concluímos que $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ e

$$\|u_m\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} = \sum_{0 \leq |j| \leq 3} \|D^j u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \overline{C} \|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

ou seja, (2.22) é satisfeita. A unicidade de u_m, para cada $m \in \mathbb{N}$ segue da desigualdade (2.22). Portanto, o Lema 2.1.3 fica provado. ■

Retornando à demonstração do Lema 2.1.2, notemos de (2.19) que

$$\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|f_m - f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\ ,$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.
Assim, de (2.22)

$$\|u_m\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\ , \tag{2.27}$$

para todos $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.
Isto diz que as sequências $\{u_m\}$ e $\{D^j u_m\}$, $j = 1, 2, 3$; são limitadas em $L^2(\mathbb{R}^+)$. Logo pelo Teorema 1.1.12 e Obs. 1.1.13 existe uma subsequência de $\{u_m\}$ que denotaremos ainda por $\{u_m\}$ que converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^+)$ para alguma função u, isto é,

$$(u_m, v) \longrightarrow (u, v)\ ;\ \forall\ v \in L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.28}$$

Também, existe uma subsequência de $\{D^j u_m\}$ que denotaremos ainda por $\{D^j u_m\}$ que converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^+)$ para alguma função η, isto é,

$$(D^j u_m, v) \longrightarrow (\eta, v) \ ; \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+), \tag{2.29}$$

onde a Derivada aqui está no sentido das Distribuições, além disso temos que $\eta = D^j u$. Com efeito, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ temos

$$(D^j u_m, \varphi) = (-1)^j (u_m, D^j \varphi) \longrightarrow (-1)^j (u, D^j \varphi) = (D^j u, \varphi),$$

por outro lado de (2.29) temos

$$(D^j u_m, \varphi) \longrightarrow (\eta, \varphi) \ ; \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+),$$

donde,

$$(D^j u, \varphi) = (\eta, \varphi) \ ; \ \forall \ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+).$$

Por densidade concluimos que

$$(D^j u, v) = (\eta, v) \ ; \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Portanto $\eta = D^j u$ e de (2.29) podemos concluir que

$$(D^j u_m, v) \longrightarrow (D^j u, v) \ ; \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+) \ , \ j = 1, 2, 3. \tag{2.30}$$

Com isto, temos finalmente que u é a única solução do problema (2.7)-(2.8). De fato, note que de (2.20) obtemos

$$(D^3 u_m, v) + d(u_m, v) = (f_m, v) \quad , \quad \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+);$$

passando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, segue que u satisfaz a equação:

$$(D^3 u, v) + d(u, v) = (f, v) \ , \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+);$$

ou seja, u é uma solução de (2.7).
Como a aplicação traço é contínua, ver [9], então da convergência (2.28) temos que $D^j u_m(0)$ converge fracamente para $D^j u(0)$, com $j = 0, 1, 2$. Assim, passando limite quando

$m \longrightarrow \infty$ em (2.21), temos que a igualdade em (2.8) é satisfeita.

Voltando à desigualdade (2.27), em virtude dos Teoremas 1.1.9 e 1.1.12 temos

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Para mostrar que u é a única solução de (2.7)-(2.8), suponhamos que exista uma outra solução v para o problema (2.7)-(2.8), isto é,

$$\begin{aligned} &D^3v(x) + dv(x) = f(x), && x \in \mathbb{R}^+; \\ &D^2v(0) + \alpha Dv(0) + \beta v(0) = 0, \end{aligned}$$

tal que

$$\|v\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Considerando a função $z = u - v$, temos que z é solução do problema:

$$\begin{aligned} &D^3z(x) + dz(x) = 0, && x \in \mathbb{R}^+; \\ &D^2z(0) + \alpha Dz(0) + \beta z(0) = 0. \end{aligned}$$

Além disso z satisfaz a seguinte estimativa:

$$\|z\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|0\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \equiv 0.$$

Deste modo temos que $z \equiv 0$ e conseqüentemente $u = v$.

■

2.1.2 Problema de Evolução Linear.

Voltemos ao problema (2.1)-(2.3) juntamente com as condições (2.4)-(2.5). Aqui nosso principal objetivo é demonstrar o Teorema 2.1.1. Na intenção de encontrar uma solução $u(x,t)$ para o problema (2.1)-(2.3), usaremos o Método de Semi-Discretização, maiores detalhes ver [12] ou [20]. Com este método, vamos aproximar o problema (2.1)-(2.3) a um problema do tipo estacionário.

Definimos

$$h = \frac{T}{N} > 0, \;\; N \in \mathbb{N}$$

e para cada $n = 0, 1, \ldots, N$ pondo $t = nh$ consideramos

$$\begin{aligned} u^n(x) &= u(x, nh), \quad n = 1, \ldots, N; \\ u^0(x) &= u(x, 0) = u_o(x); \\ u_h^n(x) &= \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{h}, \quad n = 1, \ldots, N; \\ u_h^0(x) &\equiv u_t(x, 0) = -D^3 u(x, 0) = -D^3 u_o. \end{aligned} \tag{2.31}$$

Com essas considerações em (2.31), vamos aproximar o problema (2.1)-(2.2) pelo seguinte sistema:

$$D^3 u^n(x) + \frac{1}{h} u^n(x) = \frac{u^{n-1}(x)}{h} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.32}$$

$$D^2 u^n(0) + \alpha D u^n(0) + \beta u^n(0) = 0 \quad , \quad n = 1, \ldots, N; \tag{2.33}$$

$$u^0(x) = u_o(x) \in H^3(\mathbb{R}^+) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.34}$$

Para tal problema aproximado temos o seguinte Teorema.

Teorema 2.1.4. *O problema (2.32)-(2.33) admite única solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$, para todos $n = 1, \ldots, N$; tal que*

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C \|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \;\; \forall \; n = 1, \ldots, N. \tag{2.35}$$

Demonstração: A demonstração é uma conseqüência imediata do Lema 2.1.2, faremos por indução sobre n.

Se $n = 1$ temos de (2.32)-(2.33) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^1(x) + \dfrac{1}{h}u^1(x) = \dfrac{u_o(x)}{h}, \\ D^2u^1(0) + \alpha Du^1(0) + \beta u^1(0) = 0. \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u_o \in L^2(\mathbb{R}^+)$, em virtude do Lema 2.1.2, existe única solução $u^1 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|u^1\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C_1\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Se $n = 2$ temos de (2.32)-(2.33) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^2(x) + \dfrac{1}{h}u^2(x) = \dfrac{u^1(x)}{h}, \\ D^2u^2(0) + \alpha Du^2(0) + \beta u^2(0) = 0. \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u^1 \in L^2(\mathbb{R}^+)$, do Lema 2.1.2, existe única solução $u^2 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^2\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_2\|u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C_2\|u^1\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C_2C_1\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que vale para $n-1$, isto é, que o problema

$$\begin{cases} D^3u^{n-1}(x) + \dfrac{1}{h}u^{n-1}(x) = \dfrac{u^{n-2}(x)}{h}, \\ D^2u^{n-1}(0) + \alpha Du^{n-1}(0) + \beta u^{n-1}(0) = 0 \end{cases}$$

admite única solução $u^{n-1} \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_{n-1}\|u^{n-2}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C_{n-1}\|u^{n-2}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq \cdots \leq \\ &\leq C_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Para $n \leq N$ temos de (2.32)-(2.33) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^n(x) + \dfrac{1}{h}u^n(x) = \dfrac{u^{n-1}(x)}{h}, \\ D^2u^n(0) + \alpha Du^n(0) + \beta u^n(0) = 0. \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u^{n-1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$, pelo Lema 2.1.2, existe única solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq C_n\|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq C_nC_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.
\end{aligned}$$

Tomando $C = max\{C_1, C_1C_2, \ldots, C_1C_2\ldots C_N\}$, então (2.35) vale para todos $n = 1, \ldots, N$. De fato,

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq C_n\|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq \underbrace{C_nC_{n-1}C_{n-2}\ldots C_1}_{\leq C}\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\
&\leq C\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall\ n = 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

■

Vamos calcular agora algumas estimativas independentes de $h > 0$.

ESTIMATIVA I

Multiplicando (2.32) por u^n e integrando em $\mathbb{R}^+$ obtemos a igualdade

$$0 = \underbrace{(D^3u^n, u^n)}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{h}(u^n - u^{n-1}, u^n)}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = (D^3u^n, u^n) &= \int_0^\infty u^n(x)D^3u^n(x)dx \\
&= -u^n(0)D^2u^n(0) - \frac{1}{2}\int_0^\infty D(Du^n(x))^2dx \\
&= u^n(0)(-D^2u^n(0)) + \frac{1}{2}|Du^n(0)|^2 \\
&= \alpha u^n(0)Du^n(0) + \beta|u^n(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du^n(0)|^2 \\
&\geq -|\alpha||u^n(0)||Du^n(0)| + \beta|u^n(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du^n(0)|^2 \\
&\geq -\frac{|\alpha|}{2}(|u^n(0)|^2 + |Du^n(0)|^2) + \beta|u^n(0)|^2 + \frac{1}{2}|Du^n(0)|^2 \\
&= \underbrace{(\beta - \frac{|\alpha|}{2})}_{=k_1>0}|u^n(0)|^2 + \underbrace{\frac{1}{2}(1-|\alpha|)}_{=k_2>0}|Du^n(0)|^2 \geq 0,\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.
\end{aligned}$$

Assim,

$$I_1 = (D^3u^n, u^n) \geq k_1|u^n(0)|^2 + k_2|Du^n(0)|^2,\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{h}(u^n - u^{n-1}, u^n) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - u^n(x)u^{n-1}(x)\right]dx \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}|u^n(x)|^2 + \frac{1}{2}|u^n(x)|^2 - u^n(x)u^{n-1} + \frac{1}{2}|u^{n-1}(x)|^2(x) - \frac{1}{2}|u^{n-1}(x)|^2\right]dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[u^n(x) - u^{n-1}(x)\right]^2dx}_{\geq 0} + \frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - |u^{n-1}(x)|^2\right]dx \\
&\geq \frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - |u^{n-1}(x)|^2\right]dx \\
&= \frac{1}{2h}\|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_2 \geq \frac{1}{2h}\|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Logo,

$$k_1|u^n(0)|^2 2h + k_2|Du^n(0)|^2 2h + \|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 0, \ \forall \ n = 1, \ldots, l \leq N,$$

ou ainda,

$$k_1|u^n(0)|^2 2h + k_2|Du^n(0)|^2 2h + \|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall \ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Somando de $n = 1, \ldots, l \leq N$ e levando em consideração (2.34), obtemos que

$$k_1 \sum_{n=1}^{l} |u^n(0)|^2 2h + k_2 \sum_{n=1}^{l} |Du^n(0)|^2 2h + \|u^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall \ l \leq N. \tag{2.36}$$

ESTIMATIVA II

Em termos de operadores, seja $Lu^n \equiv D^3u^n + \dfrac{u^n - u^{n-1}}{h} = 0$, lembrando que $u_h^n = \dfrac{u^n - u^{n-1}}{h}$, consideremos agora o operador Lu_h^n e notemos que

$$Lu_h^n = \frac{1}{h}L\left(u^n - u^{n-1}\right) \equiv 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Lu_h^n &= \frac{1}{h}L\left(u^n - u^{n-1}\right) \equiv D^3\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{h}\right) + \frac{1}{h}\left[\frac{(u^n - u^{n-1})}{h} - \frac{(u^{n-1} - u^{n-2})}{h}\right] \\ &= D^3u_h^n + \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}). \end{aligned}$$

Assim a aproximação u_h^n satisfaz a equação

$$D^3u_h^n + \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}) = 0,$$

além disso, usando (2.6) e (2.33) é facil verificar que

$$D^2u_h^n(0) + \alpha Du_h^n(0) + \beta u_h^n(0) = 0.$$

Deste modo, temos que u_h^n satisfaz o seguinte sistema:

$$D^3u_h^n + \frac{1}{h}u_h^n = \frac{u_h^{n-1}}{h} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.37}$$

$$D^2u_h^n(0) + \alpha Du_h^n(0) + \beta u_h^n(0) = 0 \quad , \quad n = 1, \dots, N; \tag{2.38}$$

$$u_h^0(x) = -D^3u_o(x) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Multiplicamos (2.37) por u_h^n e integramos sobre $\mathbb{R}^+$ para obter a igualdade

$$0 = \underbrace{(D^3u_h^n, u_h^n)}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n)}_{I_4}.$$

De modo inteiramente análogo à ESTIMATIVA I, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= (D^3u_h^n, u_h^n) \geq k_1|u_h^n(0)|^2 + k_2|Du_h^n(0)|^2 \quad , \quad \forall\ n = 1, \dots, l \leq N. \\ I_4 &= \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n) \geq \frac{1}{2h}\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \quad , \quad \forall\ n = 1, \dots, l \leq N. \end{aligned}$$

onde $k_1 > 0,\ k_2 > 0$ são dados na estimativa I. Logo,

$$k_1|u_h^n(0)|^2 2h + k_2|Du_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 0,\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N,$$

ou ainda,

$$k_1|u_h^n(0)|^2 2h + k_2|Du_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Somando de $n = 1, \ldots, l \leq N$ e levando em consideração (2.31), obtemos que

$$k_1 \sum_{n=1}^{l} |u_h^n(0)|^2 2h + k_2 \sum_{n=1}^{l} |Du_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3 u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Com maior razão, temos a seguinte estimativa

$$\|u_h^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3 u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ l \leq N. \tag{2.39}$$

Reescrevamos agora, a equação (2.32) como segue

$$D^3u^n(x) + u^n(x) = u^n(x) - u_h^n(x) \equiv F^n(x).$$

Podemos considerar assim, o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^n(x) + u^n(x) = F^n(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^+; \\ D^2u^n(0) + \alpha u^n(0) + \beta u^n(0) = 0 & , \quad \forall\ n = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.40}$$

Como $F^n(x) = u^n(x) - u_h^n(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ n = 1, \ldots, N$. Então, pelo Lema 2.1.2 o problema (2.40) admite única solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ n = 1, \ldots, N$; tal que

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

assim, de (2.36) e (2.39) obtemos

$$\begin{aligned} \|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C\|F^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C(\|u^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}) \\ &\leq C(\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|D^3u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}) \\ &\leq C\|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, N, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, N. \tag{2.41}$$

Além disso, de (2.39) temos

$$\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, N;$$

donde

$$\|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq\ \|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, N. \tag{2.42}$$

De (2.41),(2.42) e considerando ainda $C \equiv (C^2 + 1)$ concluímos que

$$\boxed{\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|u^n\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, N.} \tag{2.43}$$

Pela estimativa (2.43), usando o Teorema 1.1.11 e a Teoria de Interpolação, ver Ladyzhenskaya [20], Capítulo VI (veja também [12]), temos que existem subsequências $\{\widetilde{u^n}\}$ e $\{\widetilde{u_h^n}\}$, que são interpolações de $\{u^n\}$ e $\{u_h^n\}$, respectivamente, tais que:

$$\begin{aligned} \widetilde{u^n} &\longrightarrow u \quad , \quad fraco* \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,H^3(\mathbb{R}^+)); \\ \widetilde{u_h^n} &\longrightarrow u_t \quad , \quad fraco* \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{R}^+)), \end{aligned} \tag{2.44}$$

onde a função $u(x,t)$ é uma solução para o problema (2.1)-(2.3), para q.t. $t \in (0,T)$. De fato, das convergências em (2.44) temos que:

$$\begin{array}{lclcl} (\widetilde{u^n}, v(t)) & \longrightarrow & (u, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0,T); \\ (D^j\widetilde{u^n}, v(t)) & \longrightarrow & (D^j u, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0,T), j = 1,2,3; \\ (\widetilde{u_h^n}, v(t)) & \longrightarrow & (u_t, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0,T). \end{array}$$

Sendo $\{\widetilde{u^n}\}$ e $\{\widetilde{u_h^n}\}$ interpolações de $\{u^n\}$ e $\{u_h^n\}$ respectivamente, elas estão definidas em todo intervalo $(0,T)$, com respeito a variável t. Além disso, elas satisfazem o problema:

$$D^3\widetilde{u^n} + \widetilde{u_h^n} = o(h), \tag{2.45}$$

$$D^2\widetilde{u^n}(0) + \alpha D\widetilde{u^n}(0) + \beta\widetilde{u^n}(0) = o(h), \tag{2.46}$$

onde $o(h)$ é a aproximação do problema (2.45)-(2.46) à zero quando $h \longrightarrow 0$, isto é,

$$o(h) \longrightarrow 0 \text{ se } h \longrightarrow 0.$$

Assim, para $t \in (0,T)$ e $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ temos de (2.45) que

$$(D^3\widetilde{u^n}, \varphi(t)) + (\widetilde{u^n_h}, \varphi(t)) = (o(h), \varphi(t)) \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Passando o limite quando $h \longrightarrow 0$ obtemos que

$$(D^3 u, \varphi(t)) + (u_t, \varphi(t)) = 0 \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+), \text{ q. t. } t \in (0,T),$$

ou ainda,

$$(D^3 u + u_t, \varphi(t)) = 0 \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+), \text{ q. t. } t \in (0,T).$$

Logo,

$$D^3 u + u_t = 0 \ , \text{ q.s. em } \ Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T).$$

Seja $\psi \in L^2(0,T)$. Lembrando da estimativa (2.36) e que a aplicação traço é contínua obtemos de (2.46) que:

$$\int_0^T [D^2\widetilde{u^n}(0) + \alpha D\widetilde{u^n}(0) + \beta\widetilde{u^n}(0)]\psi(t)dt = \int_0^T o(h)\psi(t)dt \ , \ \forall \ \psi \in L^2(0,T) \ .$$

Passando limite quando $h \longrightarrow 0$ temos

$$\int_0^T [D^2 u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t)]\psi(t)dt = 0 \ , \ \forall \ \psi \in L^2(0,T), \quad \text{q. t. } \ t \in (0,T).$$

Assim,

$$D^2 u(0,t) + \alpha Du(0,t) + \beta u(0,t) = 0 \ \text{ q.s. em } (0,T),$$

provando que u é uma solução regular generalizada para (2.1)-(2.2).

Além disso, passando limite quando $h \longrightarrow 0$, temos da desigualdade (2.43) que:

$$\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}(t) + \|u\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \quad \text{q.t. } t \in (0,T). \tag{2.47}$$

Unicidade

Para mostrar que a solução $u(x,t)$ de (2.1)-(2.3) é únicamente determinada, suponhamos que exista uma outra função $v(x,t)$ que satisfaça (2.1)-(2.3), isto é,

$$\begin{aligned} & v_t(x,t) + D^3 v(x,t) = 0 && , \quad \text{em} \;\; Q_T; \\ & D^2 v(0,t) + \alpha D v(0,t) + \beta v(0,t) = 0 && , \quad t \in (0,T); \\ & v(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+) && , \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Consideremos a função $z = u - v$, desta forma é simples verificar que z é solução do ploblema

$$\begin{aligned} & z_t(x,t) + D^3 z(x,t) = 0 && , \quad \text{em} \;\; Q_T; \\ & D^2 z(0,t) + \alpha D z(0,t) + \beta z(0,t) = 0 && , \quad t \in (0,T); \\ & z(x,0) = 0 \in H^3(\mathbb{R}^+) && , \quad x \in \mathbb{R}^+. \end{aligned} \tag{2.49}$$

Usando os mesmos procedimentos anteriores, obtemos analogamente à desigualdade (2.47), que z satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|z\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|0\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} \equiv 0 \;,\; \text{q.t. } t \in (0,T),$$

ou seja,

$$\|z\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) = 0 \;,\; \text{q.t. } t \in (0,T).$$

Isto implica que $z(x,t) = 0$ q.s. em $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$.

Portanto, $u(x,t) = v(x,t)$ q.s. em $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$. O que prova o Teorema 2.1.1.

Observação 2.1.5. *Notemos que as equações do tipo KdV:*

$$u_t + u_{xxx} + P(u)u_x = 0,$$

onde $P(u)$ é algum polinômio em u, usualmente posto como $P(u) = u+1$, são perturbações não lineares da equação de Airy. Com isto, podemos imaginar que o método utilizado neste trabalho nos permite resolver a equação de KdV com as condições gerais de fronteira dadas neste contexto. Se necessário for, dar mais condições aos escalares α e β ainda não sabemos. Porém, futuramente este pode ser o trabalho que complementa esta dissertação.

2.2 Segundo Caso.

Seja $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$ como anteriormente, em Q_T consideremos a equação de Airy com condição de fronteira e dado inicial

$$u_t(x,t) - D^3u(x,t) = 0 \qquad , \quad \text{em } \ Q_T; \tag{2.1}$$

$$Du(0,t) = -\alpha u(0,t) \ , \ D^2u(0,t) = \beta u(0,t) \quad , \quad t \in (0,T); \tag{2.2}$$

$$u(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.3}$$

Os coeficientes α e β são escalares tais que:

$$\Delta = \beta - \alpha d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \neq 0, \tag{2.4}$$

$$\alpha \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ \beta > \frac{\alpha^2}{2}, \tag{2.5}$$

onde o número real $d > 0$ é qualquer e os coeficientes α, β dependem dos coeficientes de uma matriz que veremos em seguida no problema estacionário. A função $u_o \in H^3(\mathbb{R}^+)$ satizfaz:

$$Du_o(0) = -\alpha u_o(0), \ D^2u_o(0) = \beta u_o(0). \tag{2.6}$$

O principal objetivo é demonstrar o seguinte resultado.

Teorema 2.2.1. *Sejam $u_o \in H^3(\mathbb{R}^+)$ satisfazendo (2.6) e α, β tais que (2.4)-(2.5) se verifica. Então para todo $T > 0$ o problema (2.1)-(2.3) possui uma única solução regular*

$$u \in L^\infty(0,T,H^3(\mathbb{R}^+)),$$

$$u_t \in L^\infty(0,T,L^2(\mathbb{R}^+)).$$

Além disso, vale a estimativa

$$\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}(t) + \|u\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} \ , \ q. \ t. \ t \in (0,T).$$

Iniciaremos a demonstração do Teorema 2.2.1 com um Problema Estacionário e em seguida retornaremos ao problema (2.1)-(2.3).

2.2.1 Problema Estacionário.

Nesta seção, devemos resolver o seguinte problema de fronteira:

$$D^3u(x) - du(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} g_{11}u(0) + g_{12}Du(0) + D^2u(0) = 0; \\ g_{21}u(0) + g_{22}Du(0) + D^2u(0) = 0; \end{aligned} \tag{2.8}$$

onde $d > 0$, f é tal que

$$f \in L^2(\mathbb{R}^+) \cap C(\mathbb{R}^+) \ \text{ t. q. } \ |f(x)| \leq Me^{-kx}; \quad k > 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}^+ \tag{2.9}$$

e as constantes g_{ij}, $i, j = 1, 2$; são tais que $g_{12} \neq g_{22}$ e

$$\Delta = \frac{|G_3|}{|G_1|} - \frac{|G_2|}{|G_1|}d^{\frac{1}{3}} + d^{\frac{2}{3}} \neq 0, \tag{2.10}$$

sendo $G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & 1 \\ g_{21} & g_{22} & 1 \end{bmatrix}$, G_k, k=1,2,3 ; submatriz de G retirando-se a k-ésima coluna e $|G_k| = \det G_k$.

Da teoria de Equações Diferenciais Ordinárias, uma solução geral para a equação (2.7) é dada por

$$u(x) = u_c(x) + u_p(x), \tag{2.11}$$

onde $u_p(x)$ é uma solução particular para equação (2.7) e $u_c(x)$ é uma solução geral da equação homogênea associada

$$D^3u(x) - du(x) = 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.12}$$

A equação característica para (2.12) é $\lambda^3 - d = 0$, cujas raízes são:

$$\lambda_1 = d^{1/3} \ , \ \lambda_2 = \frac{d^{1/3}}{2}(-1 + i\sqrt{3}) \ , \ \lambda_3 = \frac{d^{1/3}}{2}(-1 - i\sqrt{3}).$$

Logo as soluções de (2.12) são

$$u_1 = e^{d^{1/3}x} \ , \ \overline{u}_2 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(-1+i\sqrt{3})x} \ e \ \overline{u}_3 = e^{\frac{d}{2}^{1/3}(-1-i\sqrt{3})x}.$$

Das soluções complexas $\overline{u}_2, \overline{u}_3$, obtemos as seguintes soluções reais, ver[11].

$$u_2 = e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) \ e \ u_3 = e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

Agora note que o Wronskiano $W(x) \equiv W = \frac{3}{2}\sqrt{3}d \neq 0$, assim as soluções u_1, u_2 e u_3 são l.i. e uma solução geral da equação (2.12) é

$$u_c(x) = C_1 e^{d^{1/3}x} + C_2 e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3 e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x). \tag{2.13}$$

Usando o método da Variação dos Parâmetros, uma solução particular u_p para equação (2.7) é dada por:

$$u_p(x) = \sum_{j=1}^{3} u_j(x)\int_0^x \frac{W_j(s)}{W} f(s)ds,$$

onde $W_j, \ j = 1, 2, 3$; é obtido de W substituindo-se a j-ésima coluna por $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Efetuando os cálculos, obtemos que

$$\begin{aligned}
W_1 &= d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{-d^{1/3}x}, \\
W_2 &= d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) - \cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right), \\
W_3 &= -d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}e^{\frac{d}{2}^{1/3}x}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x) + \sin(d^{\frac{1}{3}}\tfrac{\sqrt{3}}{2}x)\right).
\end{aligned}$$

Assim a solução particular de (2.7) é,

$$
\begin{aligned}
u_p(x) &= e^{d^{1/3}x}\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-d^{1/3}s} f(s)ds \\
&+e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds \\
&-e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}\left(\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)\right)f(s)ds.
\end{aligned}
\tag{2.14}
$$

Das igualdades (2.13) e (2.14), a solução procurada é dada por,

$$
\begin{aligned}
u(x) &= e^{d^{1/3}x}\left(C_1+\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-d^{1/3}s} f(s)ds\right) \\
&+e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_2+\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}[\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right) \\
&+e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_3-\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}[\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right).
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

De modo análogo ao caso 1, para que a solução seja limitada temos que:

$$
C_1 = -\int_0^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3} e^{-d^{1/3}s} f(s)ds.
$$

As constantes C_2 e C_3 obtemos de (2.8). Por simplicidade, continuaremos escrevendo C_1. Note que

$$
\begin{aligned}
u(0) &= C_1 + C_2, \\
Du(0) &= d^{1/3}C_1 - \frac{d^{1/3}}{2}C_2 + \frac{d^{1/3}}{2}\sqrt{3}C_3, \\
D^2u(0) &= d^{2/3}C_1 - \frac{d^{2/3}}{2}C_2 - \frac{d^{2/3}}{2}\sqrt{3}C_3.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2.8), obtemos o seguinte sistema linear

$$
\left\{
\begin{array}{lcl}
(g_{11} - g_{12}\frac{d^{1/3}}{2} - \frac{d^{2/3}}{2})C_2 + (g_{12}d^{1/3} - d^{2/3})\frac{\sqrt{3}}{2}C_3 & = & -(g_{11} + g_{12}d^{1/3} + d^{2/3})C_1 \\
(g_{21} - g_{22}\frac{d^{1/3}}{2} - \frac{d^{2/3}}{2})C_2 + (g_{22}d^{1/3} - d^{2/3})\frac{\sqrt{3}}{2}C_3 & = & -(g_{21} + g_{22}d^{1/3} + d^{2/3})C_1
\end{array}
\right. ,
$$

que escrito na forma matricial, fica

$$\underbrace{\begin{bmatrix} g_{11}-g_{12}\dfrac{d^{1/3}}{2}-\dfrac{d^{2/3}}{2} & (g_{12}d^{1/3}-d^{2/3})\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ g_{21}-g_{22}\dfrac{d^{1/3}}{2}-\dfrac{d^{2/3}}{2} & (g_{22}d^{1/3}-d^{2/3})\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(g_{11}+g_{12}d^{1/3}+d^{2/3})C_1 \\ -(g_{21}+g_{22}d^{1/3}+d^{2/3})C_1 \end{bmatrix}.$$

Agora note que $detA = \dfrac{\sqrt{3}}{2}d^{1/3}\Delta|G_1| \neq 0$, e a solução do sistema é dada por

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ C_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\begin{bmatrix} -(g_{11}+g_{12}d^{1/3}+d^{2/3})C_1 \\ -(g_{21}+g_{22}d^{1/3}+d^{2/3})C_1 \end{bmatrix}.$$

Um cálculo simples sobre inversa de matrizes 2×2 nos mostra que

$$A^{-1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}d^{1/3}\Delta|G_1|}\begin{bmatrix} (g_{22}d^{1/3}-d^{2/3})\dfrac{\sqrt{3}}{2} & -(g_{12}d^{1/3}-d^{2/3})\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ -(g_{21}-g_{22}\dfrac{d^{1/3}}{2}-\dfrac{d^{2/3}}{2}) & g_{11}-g_{12}\dfrac{d^{1/3}}{2}-\dfrac{d^{2/3}}{2} \end{bmatrix},$$

e consequentemente,

$$\begin{aligned} C_2 &= \frac{\Delta'}{\Delta|G_1|}\int_0^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{-d^{1/3}s}f(s)ds, \\ C_3 &= \frac{\Delta''\sqrt{3}}{\Delta|G_1|}\int_0^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{-d^{1/3}s}f(s)ds, \end{aligned} \tag{2.16}$$

onde $\Delta' = |G_3| - |G_2|d^{1/3} - 2|G_1|d^{2/3}$ e $\Delta'' = |G_3| + |G_2|d^{1/3}$.

Desta forma a solução (2.15) do problema (2.7)-(2.8) fica

$$\begin{aligned} u(x) \;=\; & -e^{d^{1/3}x}\int_x^\infty \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{-d^{1/3}s}f(s)ds \\ & +e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_2+\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}[\sqrt{3}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)-\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right) \\ & +e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x}\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x)\left(C_3-\int_0^x \frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}e^{\frac{d}{2}^{1/3}s}[\sqrt{3}\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)+\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]f(s)ds\right), \end{aligned} \tag{2.17}$$

ou ainda, reorganizando os termos em (2.17) obtemos uma solução para (2.7)-(2.8).

$$\begin{aligned} u(x) &= -\frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}\int_x^\infty e^{-d^{1/3}(s-x)}f(s)ds + [C_2\cos(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}x) + C_3\sin(d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}s)]e^{-\frac{d}{2}^{1/3}x} \\ &\quad -\frac{d^{-\frac{2}{3}}}{3}\int_0^x e^{-\frac{d}{2}^{1/3}(x-s)}[\sqrt{3}\sin d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(x-s) + \cos d^{\frac{1}{3}}\frac{\sqrt{3}}{2}(x-s)]f(s)ds, \end{aligned} \tag{2.18}$$

onde C_2 e C_3 são dadas em (2.16).

Da expressão (2.18) e como f satisfaz (2.9), verifica-se facilmente que u satisfaz a seguinte estimativa.

$$|u(x)| \longrightarrow 0, \quad \text{quando} \quad x \longrightarrow \infty.$$

Agora note que as condições (2.8) podem ser reescritas de outra maneira. De fato, isolando os termos $Du(0)$ e $D^2u(0)$ em (2.8) obtemos que

$$\begin{aligned} Du(0) &= -\alpha u(0) \quad \text{onde} \quad \alpha = \frac{|G_2|}{|G_1|}, \\ D^2u(0) &= \beta u(0) \quad \text{onde} \quad \beta = \frac{|G_3|}{|G_1|}. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Portanto, encontramos uma solução limitada para o problema (2.7),(2.19) e a condição (2.10) coincide com (2.4).

Mais ainda, temos o seguinte resultado.

Lema 2.2.2. *Seja $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$. Então o problema (2.7),(2.19) admite única solução $u \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que*

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \tag{2.20}$$

Demonstração: Sendo $f \in L^2(\mathbb{R}^+)$ e o espaço $C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ denso em $L^2(\mathbb{R}^+)$, então existe uma sequência $\{f_m\}_{m\in\mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$, com $|f_m(x)| \leq M_m e^{-k_m x}$, $\forall\ x \in \mathbb{R}^+$, tal que

$$f_m \longrightarrow f \text{ em } L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.21}$$

Para cada $m \in \mathbb{N}$, consideremos o problema

$$D^3u_m(x) - du_m(x) = f_m(x), \qquad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.22}$$

$$D^2u_m(0) = \beta u_m(0),\ Du_m(0) = -\alpha u_m(0). \tag{2.23}$$

Para continuar a demonstração do Lema 2.2.2, necessitamos do seguinte resultado auxiliar.

Lema 2.2.3. *O problema (2.22)-(2.23) admite única solução* $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, *tais que*

$$\|u_m\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\ ,\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2.24}$$

Demonstração: A existência de uma solução clássica u_m, para cada $m \in \mathbb{N}$, segue diretamente de (2.18). Resta mostrar que $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ e satisfaz a (2.24). Multiplicando a equação (2.22) por $-u_m$ e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$-(D^3u_m, u_m) + d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = -(f_m, u_m),\ \forall\ m \in \mathbb{N}; \tag{2.25}$$

onde $(u, v) = \displaystyle\int_0^\infty u(x)v(x)dx$ e $\|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \displaystyle\int_0^\infty |u(x)|^2dx$ representam o produto interno e norma em $L^2(\mathbb{R}^+)$, respectivamente.

Usando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned} -(D^3u_m, u_m) &= -\int_0^\infty u_m(x)D^3u_m(x)dx = u_m(0)D^2u_m(0) + \frac{1}{2}\int_0^\infty D(Du_m(x))^2dx \\ &= u_m(0)D^2u_m(0) - \frac{1}{2}|Du_m(0)|^2,\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Da condição (2.23) segue que

$$\begin{aligned} -(D^3u_m, u_m) &= \beta|u_m(0)|^2 - \frac{\alpha^2}{2}|u_m(0)|^2 \\ &\geq \beta|u_m(0)|^2 - \frac{\alpha^2}{2}|u_m(0)|^2 \\ &= (\beta - \frac{\alpha^2}{2})|u_m(0)|^2,\ \forall\ m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

e da condição (2.5) concluimos que

$$-(D^3u_m, u_m) \geq 0\ ,\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Assim, voltando a (2.25) e usando a desigualdade de Cauchy temos que

$$\begin{aligned} d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq -(D^3u_m, u_m) + d\|u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq |(f_m, u_m)| \\ &\leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Donde,

$$\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \frac{1}{d}\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2.26}$$

Por outro lado, multiplicando (2.22) por D^3u_m e integrando sobre $\mathbb{R}^+$ obtemos

$$\|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - d(D^3u_m, u_m) = (f_m, D^3u_m),\ \forall\ m \in \mathbb{N}.$$

Como $-(D^3u_m, u_m) \geq 0$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned}\|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} &\leq \|D^3u_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - d(D^3u_m, u_m) \leq |(f_m, D^3u_m)| \\ &\leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \forall\ m \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

E deste modo obtemos

$$\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ m \in \mathbb{N}. \tag{2.27}$$

Vamos obter agora estimativas para as derivadas intermediárias D^j; $j = 1, 2$. Usando o lema de Ehrling,

$$\|D^ju_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \delta\varepsilon\|D^3u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \delta\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\|u_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ j = 1, 2;$$

onde $0 < \varepsilon < \varepsilon_o$, $\varepsilon_o > 0$ qualquer e $\delta = \delta(\varepsilon_o) > 0$.

Consequentemente de (2.26)-(2.27) vem que

$$\|D^ju_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \delta\varepsilon\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \frac{\delta}{d}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}}\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} = \underbrace{(\delta\varepsilon + \frac{\delta}{d}\varepsilon^{\frac{-j}{3-j}})}_{C_j}\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Daí,

$$\|D^ju_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq C_j\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ j = 1, 2; \tag{2.28}$$

onde $C_j = C_j(\varepsilon_o, d) > 0$.

De (2.26) à (2.28) concluímos que $u_m \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$ e

$$\|u_m\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} = \sum_{0\leq|j|\leq 3} \|D^ju_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \overline{C}\|f_m\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

ou seja, (2.24) é satisfeita. Assim como no caso 1, a unicidade de u_m, para cada $m \in \mathbb{N}$ segue da desigualdade (2.24). Portanto, o Lema 2.2.3 fica provado. ■

Voltando à demonstração do Lema 2.2.2, notemos de (2.21) que

$$\|f_m\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|f_m - f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq c\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

para todos m suficientemente grande.

Assim, de (2.24)

$$\|u_m\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \ , \tag{2.29}$$

para todos m suficientemente grande.

Isto mostra que as sequências $\{u_m\}$ e $\{D^j u_m\}$, $j = 1, 2, 3$; são limitadas em $L^2(\mathbb{R}^+)$. Logo pelo Teorema 1.1.12 e Obs. 1.1.13 existe uma subsequência de $\{u_m\}$, que denotaremos ainda por $\{u_m\}$, que converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^+)$ para alguma função u, isto é,

$$(u_m, v) \longrightarrow (u, v) \ ; \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.30}$$

Também existe uma subsequência de $\{D^j u_m\}$, que denotaremos ainda por $\{D^j u_m\}$, que converge fracamente em $L^2(\mathbb{R}^+)$ para $D^j u$, analogamente ao caso 1, isto é,

$$(D^j u_m, v) \longrightarrow (D^j u, v) \ ; \ \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+). \tag{2.31}$$

Com isto, temos finalmente que u é uma solução do problema (2.7)-(2.19). De fato, note que de (2.22) obtemos

$$(D^3 u_m, v) - d(u_m, v) = (f_m, v) \quad , \quad \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+);$$

passando o limite quando $m \longrightarrow \infty$, segue que u satisfaz a equação:

$$(D^3 u, v) - d(u, v) = (f, v), \forall \ v \in L^2(\mathbb{R}^+);$$

ou seja, u é solução de (2.7).

Como a aplicação traço é contínua, ver [9], então da convergência (2.30) temos que $D^j u_m(0)$ converge fracamente para $D^j u(0)$, com $j = 0, 1, 2$. Assim, passando limite quando $m \longrightarrow \infty$ em (2.23), temos que a igualdade em (2.19) é satisfeita.
Voltando à desigualdade (2.29), em virtude dos Teoremas 1.1.9 e 1.1.12 temos

$$\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Analogamente ao caso 1, para mostrar que u é a única solução de (2.7)-(2.19), suponhamos que exista uma outra solução v para o problema (2.7)-(2.19), isto é,

$$\begin{aligned} &D^3v(x) - dv(x) = f(x), && x \in \mathbb{R}^+; \\ &Dv(0) = -\alpha v(0),\ D^2v(0) = \beta v(0) \end{aligned}$$

tal que

$$\|v\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Considerando a função $z = u - v$, temos que z é solução do problema:

$$\begin{aligned} &D^3z(x) - dz(x) = 0, && x \in \mathbb{R}^+; \\ &Dz(0) = -\alpha z(0),\ D^2z(0) = \beta z(0) \end{aligned}$$

Além disso z satisfaz a seguinte estimativa:

$$\|z\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|0\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \equiv 0.$$

Deste modo temos que $z \equiv 0$ e conseqüentemente $u = v$. $\blacksquare$

2.2.2 Problema de Evolução linear.

Voltemos agora ao ploblema (2.1)-(2.3) juntamente com as condições (2.4)-(2.5), provaremos mais adiante o Teorema 2.2.1, esta será nossa meta a partir de agora. Para abordar (2.1)-(2.3) usaremos o Método de Semi-Discretização, como foi feito no caso 1.
Definimos

$$h = \frac{T}{N} > 0, \; N \in \mathbb{N},$$

e para cada $n = 0, 1, \ldots, N$ pondo $t = nh$ consideramos

$$\begin{aligned} u^n(x) &= u(x, nh), \quad n = 1, \ldots, N; \\ u^0(x) &= u(x, 0) = u_o(x); \\ u_h^n(x) &= \frac{u^n(x) - u^{n-1}(x)}{h}, \quad n = 1, \ldots, N; \\ u_h^0(x) &\equiv u_t(x, 0) = D^3 u(x, 0) = D^3 u_o. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Com essas novas considerações em (2.32), vamos aproximar (2.1)-(2.2) pelo seguinte problema:

$$D^3 u^n(x) - \frac{1}{h} u^n(x) = -\frac{u^{n-1}(x)}{h} \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.33}$$

$$D^2 u^n(0) = \beta u^n(0), \; D u^n(0) = -\alpha u^n(0) \quad , \quad n = 1, \ldots, N; \tag{2.34}$$

$$u^0(x) = u_o(x) \in H^3(\mathbb{R}^+) \quad , \quad x \in \mathbb{R}^+. \tag{2.35}$$

Teorema 2.2.4. *O problema (2.33)-(2.34) admite única solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$, para todos $n = 1, \ldots, N$; tal que*

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C \|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \; \forall \; n = 1, \ldots, N. \tag{2.36}$$

Demonstração: A demonstração é uma consequência imediata do Lema 2.2.2, faremos por indução sobre n.
Se $n = 1$ temos de (2.33)-(2.34) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3 u^1(x) - \dfrac{1}{h} u^1(x) = -\dfrac{u_o(x)}{h}, \\ D^2 u^1(0) = \beta u^1(0), \; D u^1(0) = -\alpha u^1(0). \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u_o \in L^2(\mathbb{R}^+)$, em virtude do Lema 2.2.2, existe única solução $u^1 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\|u^1\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C_1 \|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Se $n = 2$ temos de (2.33)-(2.34) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^2(x) - \dfrac{1}{h}u^2(x) = -\dfrac{u^1(x)}{h}, \\ D^2u^2(0) = \beta u^2(0),\ Du^2(0) = -\alpha u^2(0). \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u^1 \in L^2(\mathbb{R}^+)$, do Lema 2.2.2, existe única solução $u^2 \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^2\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_2 \|u^1\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C_2 \|u^1\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C_2 C_1 \|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Suponhamos agora que vale para $n-1$, isto é, que o problema

$$\begin{cases} D^3u^{n-1}(x) - \dfrac{1}{h}u^{n-1}(x) = -\dfrac{u^{n-2}(x)}{h}, \\ D^2u^{n-1}(0) = \beta u^{n-1}(0),\ Du^{n-1}(0) = -\alpha u^{n-1}(0), \end{cases}$$

admite única solução $u^{n-1} \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_{n-1} \|u^{n-2}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C_{n-1} \|u^{n-2}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq \cdots \leq \\ &\leq C_{n-1} C_{n-2} \ldots C_1 \|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}. \end{aligned}$$

Para $n \leq N$ temos de (2.33)-(2.34) o seguinte problema

$$\begin{cases} D^3u^n(x) - \dfrac{1}{h}u^n(x) = -\dfrac{u^{n-1}(x)}{h}, \\ D^2u^n(0) = \beta u^n(0),\ Du^n(0) = -\alpha u^n(0). \end{cases}$$

Como $\Delta \neq 0$, $\dfrac{1}{h} > 0$ e $u^{n-1} \in L^2(\mathbb{R}^+)$, pelo Lema 2.2.2, existe única solução

$u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$ tal que

$$\begin{aligned}\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C_nC_{n-1}C_{n-2}\dots C_1\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}.\end{aligned}$$

Tomando $C = max\{C_1, C_1C_2, \dots, C_1C_2\dots C_N\}$ então (2.36) vale para todos $n = 1, \dots, N$. De fato,

$$\begin{aligned}\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C_n\|u^{n-1}\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq \underbrace{C_nC_{n-1}C_{n-2}\dots C_1}_{\leq C}\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}\\ &\leq C\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \quad \forall\ n = 1, \dots, N.\end{aligned}$$

■

A seguir, vamos calcular estimativas independentes de $h > 0$.

ESTIMATIVA I

Multiplicando (2.33) por $-u^n$ e integrando em $\mathbb{R}^+$ obtemos a igualdade

$$0 = \underbrace{-(D^3u^n, u^n)}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{h}(u^n - u^{n-1}, u^n)}_{I_2}$$

$$\begin{aligned}
I_1 = -(D^3u^n, u^n) &= -\int_0^\infty u^n(x)D^3u^n(x)dx \\
&= u^n(0)D^2u^n(0) + \frac{1}{2}\int_0^\infty D(Du^n(x))^2dx \\
&= u^n(0)D^2u^n(0) - \frac{1}{2}|Du^n(0)|^2 \\
&= \beta|u^n(0)|^2 - \frac{\alpha^2}{2}|u^n(0)|^2 \\
&= \underbrace{(\beta - \frac{\alpha^2}{2})}_{=k_1>0}|u^n(0)|^2 \ ; \ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.
\end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{h}(u^n - u^{n-1}, u^n) \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - u^n(x)u^{n-1}(x)\right] dx \\
&= \frac{1}{h}\int_0^\infty \left[\frac{1}{2}|u^n(x)|^2 + \frac{1}{2}|u^n(x)|^2 - u^n(x)u^{n-1} + \frac{1}{2}|u^{n-1}(x)|^2(x) - \frac{1}{2}|u^{n-1}(x)|^2\right] dx \\
&= \underbrace{\frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[u^n(x) - u^{n-1}(x)\right]^2 dx}_{\geq 0} + \frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - |u^{n-1}(x)|^2\right] dx \\
&\geq \frac{1}{2h}\int_0^\infty \left[|u^n(x)|^2 - |u^{n-1}(x)|^2\right] dx \\
&= \frac{1}{2h}\|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I_2 \geq \frac{1}{2h}\|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Logo,

$$k_1|u^n(0)|^2 2h + \|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 0, \ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N;$$

ou ainda,

$$k_1|u^n(0)|^2 2h + \|u^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Somando de $n = 1, \ldots, l \leq N$ e levando em consideração (2.35), obtemos que

$$k_1 \sum_{n=1}^{l} |u^n(0)|^2 2h + \|u^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)},\ \forall\ l \leq N. \tag{2.37}$$

ESTIMATIVA II

Em termos de operadores, seja $Lu^n \equiv D^3u^n - \dfrac{u^n - u^{n-1}}{h} = 0$, lembrando que $u_h^n = \dfrac{u^n - u^{n-1}}{h}$, consideremos agora o operador Lu_h^n e notemos que

$$Lu_h^n = \frac{1}{h}L\left(u^n - u^{n-1}\right) \equiv 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} Lu_h^n &= \frac{1}{h}L\left(u^n - u^{n-1}\right) \equiv D^3\left(\frac{u^n - u^{n-1}}{h}\right) - \frac{1}{h}\left[\frac{(u^n - u^{n-1})}{h} - \frac{(u^{n-1} - u^{n-2})}{h}\right] \\ &= D^3u_h^n - \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}). \end{aligned}$$

Assim a aproximação u_h^n satisfaz a equação

$$D^3u_h^n - \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}) = 0,$$

além disso, usando (2.6) e (2.34) é facil verificar que

$$D^2u_h^n(0) = \beta u_h^n(0),\ Du_h^n(0) = -\alpha u_h^n(0).$$

Deste modo, temos que u_h^n satisfaz o seguinte sistema:

$$D^3u_h^n - \frac{1}{h}u_h^n = -\frac{u_h^{n-1}}{h} \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^+; \tag{2.38}$$

$$D^2u_h^n(0) = \beta u_h^n(0),\ Du_h^n(0) = -\alpha u_h^n(0) \qquad , \quad n = 1, \ldots, N; \tag{2.39}$$

$$u_h^0(x) = D^3u_o(x) \qquad , \quad x \in \mathbb{R}^+.$$

Agora, multiplicamos (2.38) por $-u_h^n$ e integramos sobre $\mathbb{R}^+$ para obter

$$0 = \underbrace{-(D^3u_h^n, u_h^n)}_{I_3} + \underbrace{\frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n)}_{I_4},$$

De modo inteiramente análogo à ESTIMATIVA I, temos

$$\begin{aligned} I_3 &= -(D^3u_h^n, u_h^n) \geq k_1|u_h^n(0)|^2 && , \quad \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N. \\ I_4 &= \frac{1}{h}(u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n) \geq \frac{1}{2h}\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \frac{1}{2h}\|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} && , \quad \forall\ n = 1, \ldots, l \leq N. \end{aligned}$$

onde $k_1 > 0$ é dado na estimativa I. Logo,

$$k_1|u_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} - \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq 0, \ \forall \ n = 1, \ldots, l \leq N;$$

ou ainda,

$$k_1|u_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_h^{n-1}\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall \ n = 1, \ldots, l \leq N.$$

Somando de $n = 1, \ldots, l \leq N$ e levando em consideração (2.32), obtemos que

$$k_1 \sum_{n=1}^{l} |u_h^n(0)|^2 2h + \|u_h^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3 u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}.$$

Com maior razão, temos a seguinte estimativa

$$\|u_h^l\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3 u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}, \ \forall \ l \leq N. \tag{2.40}$$

Reescrevamos agora, a equação (2.33) como segue

$$D^3u^n(x) - u^n(x) = -u^n(x) + u_h^n(x) \equiv F^n(x).$$

Podemos considerar assim, o seguinte problema:

$$\begin{cases} D^3u^n(x) - u^n(x) = F^n(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^+; \\ D^2u^n(0) = \beta u^n(0), \; Du^n(0) = -\alpha u^n(0) & , \quad \forall \; n = 1, \ldots, N. \end{cases} \tag{2.41}$$

Como $F^n(x) = -u^n(x) + u_h^n(x) \in L^2(\mathbb{R}^+)$, $\forall \; n = 1, \ldots, N$. Então, pelo Lema 2.2.2 o problema (2.41) admite única solução $u^n \in H^3(\mathbb{R}^+)$, $\forall \; n = 1, \ldots, N$; tal que

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|F^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)},$$

assim, das estimativas (2.37) e (2.40) temos que

$$\begin{aligned} \|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} &\leq C\|F^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \\ &\leq C(\|u^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}) \\ &\leq C(\|u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} + \|D^3u_o\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}) \\ &\leq C\|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \; \forall \; n = 1, \ldots, N; \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)} \leq C\|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \; \forall \; n = 1, \ldots, N. \tag{2.42}$$

Além disso, de (2.40) temos também

$$\|u_h^n\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|D^3u_o\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \; \forall \; n = 1, \ldots, N;$$

donde,

$$\|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)} \leq \; \|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \; \forall \; n = 1, \ldots, N. \tag{2.43}$$

De (2.42),(2.43) e considerando ainda $C \equiv (C^2 + 1)$ concluímos que

$$\boxed{\|u_h^n\|_{L^2(\mathbb{R}^+)}^2 + \|u^n\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}^2 \leq C\|u_o\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}^2, \ \forall\ n = 1, \ldots, N.} \tag{2.44}$$

Pela estimativa (2.44), usando o Teorema 1.1.11 e a Teoria de Interpolação, ver Ladyzhenskaya [20], Capítulo VI, temos que existem subsequências $\{\widetilde{u^n}\}$ e $\{\widetilde{u_h^n}\}$, que são interpolações de $\{u^n\}$ e $\{u_h^n\}$, respectivamente, tais que:

$$\begin{array}{llll} \widetilde{u^n} \longrightarrow u & , & fraco* \ \text{ em } & L^\infty(0, T, H^3(\mathbb{R}^+)); \\ \widetilde{u_h^n} \longrightarrow u_t & , & fraco* \ \text{ em } & L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^+)), \end{array} \tag{2.45}$$

onde a função $u(x, t)$ é uma solução para o problema (2.1)-(2.3), para q.t. $t \in (0, T)$.
De fato, das convergências em (2.45) temos que:

$$\begin{array}{lllll} (\widetilde{u^n}, v(t)) & \longrightarrow & (u, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0, T); \\ (D^j\widetilde{u^n}, v(t)) & \longrightarrow & (D^j u, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0, T), j = 1, 2, 3; \\ (\widetilde{u_h^n}, v(t)) & \longrightarrow & (u_t, v(t)) & , & \forall\ v(t) \in L^2(\mathbb{R}^+) \ \text{ q. t. } \ t \in (0, T). \end{array}$$

Sendo $\{\widetilde{u^n}\}$ e $\{\widetilde{u_h^n}\}$ interpolações de $\{u^n\}$ e $\{u_h^n\}$ respectivamente, elas estão definidas em todo intervalo $(0, T)$ com respeito a variável t. Além disso, elas satisfazem o seguinte problema:

$$\widetilde{u_h^n} - D^3\widetilde{u^n} = o(h), \tag{2.46}$$

$$D\widetilde{u^n}(0) + \alpha\widetilde{u^n}(0) = o(h), \ D^2\widetilde{u^n}(0) - \beta\widetilde{u^n}(0) = o(h). \tag{2.47}$$

onde $o(h)$ é a aproximação do problema (2.46)-(2.47) à zero quando $h \longrightarrow 0$, ou seja,

$$o(h) \longrightarrow 0 \text{ se } h \longrightarrow 0.$$

Assim, para $t \in (0,T)$ e $\varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+)$ temos de (2.46) que:

$$(\widetilde{u^n_h}, \varphi(t)) - (D^3\widetilde{u^n}, \varphi(t)) = (o(h), \varphi(t)) \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+).$$

Passando o limite quando $h \longrightarrow 0$ obtemos

$$(u_t, \varphi(t)) - (D^3 u, \varphi(t)) = 0 \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+), \ \text{q. t. } t \in (0,T),$$

ou ainda,

$$(u_t - D^3 u, \varphi(t)) = 0 \ , \ \forall \ \varphi(t) \in L^2(\mathbb{R}^+), \ \text{q. t. } t \in (0,T).$$

Logo,

$$u_t - D^3 u = 0 \ , \ \text{q.s. em } \ Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T).$$

Seja $\psi \in L^2(0,T)$. Relembrando (2.37) e que a aplicação traço é contínua, obtemos de (2.47) que:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [D\widetilde{u^n}(0) + \alpha\widetilde{u^n}(0)]\psi(t)dt = \int_0^T o(h)\psi(t)dt \quad , \quad \forall \ \psi \in L^2(0,T) \ ; \\
&\int_0^T [D^2\widetilde{u^n}(0) - \beta\widetilde{u^n}(0)]\psi(t)dt = \int_0^T o(h)\psi(t)dt \quad , \quad \forall \ \psi \in L^2(0,T) \ .
\end{aligned}$$

Passando limite quando $h \longrightarrow 0$ chegamos à

$$\begin{aligned}
&\int_0^T [Du(0,t) + \alpha u(0,t)]\psi(t)dt = 0 \quad , \quad \forall \ \psi \in L^2(0,T) \ , \ \text{q. t. } \ t \in (0,T); \\
&\int_0^T [D^2u(0,t) - \beta u(0,t)]\psi(t)dt = 0 \quad , \quad \forall \ \psi \in L^2(0,T) \ , \ \text{q. t. } \ t \in (0,T).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Du(0,t) + \alpha u(0,t) = 0 \quad &, \quad \text{q.s. em } (0,T); \\
D^2u(0,t) - \beta u(0,t) = 0 \quad &, \quad \text{q.s. em } (0,T);
\end{aligned}$$

provando que u é uma solução regular generalizada para (2.1)-(2.3).

Além disso, passando limite quando $h \longrightarrow 0$, obtemos da desigualdade (2.44) que:

$$\|u_t\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}(t) + \|u\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|u_o\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}, \ \ \text{q.t. } t \in (0,T). \tag{2.48}$$

Unicidade

Para mostrar que a solução $u(x,t)$ de (2.1)-(2.3) é únicamente determinada, suponhamos que exista uma outra função $v(x,t)$ que satisfaça (2.1)-(2.3), isto é,

$$\begin{aligned}
&v_t(x,t) - D^3 v(x,t) = 0 && , \quad \text{em } \ Q_T; \\
&Dv(0,t) = -\alpha v(0,t), \ D^2 v(0,t) = \beta v(0,t) && , \quad t \in (0,T); \\
&v(x,0) = u_o \in H^3(\mathbb{R}^+) && , \quad x \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned} \tag{2.49}$$

Consideremos agora a função $z = u - v$, desta forma é simples verificar que z é solução do ploblema

$$\begin{aligned}
&z_t(x,t) - D^3 z(x,t) = 0 && , \quad \text{em } \ Q_T; \\
&Dz(0,t) = -\alpha z(0,t), \ D^2 z(0,t) = \beta z(0,t) && , \quad t \in (0,T); \\
&z(x,0) = 0 \in H^3(\mathbb{R}^+) && , \quad x \in \mathbb{R}^+.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Usando os mesmos procedimentos anteriores, obtemos analogamente à desigualdade (2.48), que z satisfaz a seguinte desigualdade

$$\|z\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) \leq C\|0\|^2_{H^3(\mathbb{R}^+)} \equiv 0 \ , \ \text{q.t. } t \in (0,T),$$

ou seja,

$$\|z\|_{H^3(\mathbb{R}^+)}(t) = 0 \ , \ \text{q.t. } t \in (0,T).$$

Isto implica que $z(x,t) = 0$ q.s. em $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$.

Portanto, $u(x,t) = v(x,t)$ q.s. em $Q_T = \mathbb{R}^+ \times (0,T)$.

O que prova o Teorema 2.2.1.

Referências Bibliográficas

[1] R.A. Adams, Sobolev Spaces, Pure and Applied Mathematics, Departament of Mathematics, Academic Press, United States of America, 1970.

[2] T.B. Benjamin, Lectures on Nonlinear Wave Motion, Lecture Notes in Applied Mathematics 15 (1974), 3-47.

[3] J.L. Bona, Nonlinear Wave Phenomena, 51° Seminário Brasileiro de Análise, Florianópolis, 2000.

[4] J.L. Bona, V.A. Dougalis, An Initial and Boundary-Value Problem for a Model Equation for Propagation of Long Waves, J. Math. Anal. Appl. 75 (1980), 503-502.

[5] J.L. Bona, S.M. Sun, B.Y. Zhang, A Non-Homogeneous Boundary-Value Problem for the Korteweg-de Vries Equation in a Quarter Plane, Trans. Amer. Math. Soc. 354 (2002), no. 2, 427-490 (electronic).

[6] H. Brézis, Analyse Fontionelle, Théorie et Applications, Paris, Masson, 1973.

[7] B.A. Bubnov, General Boundary-Value Problems for the Korteweg-de Vries Equation in a Bounded Domain, Differentsial'nye Uravneniya 15(1) (1979), 26-31. Translation in: Differ. Equ. 15 (1979), 17-21.

[8] L. Cattabriga, Un Problema al Contorno per una Equazione Parabolica di Ordine Dispari, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa,13,3(1959),163-203.

[9] M.M. Cavalcanti, V.N. Cavalcanti, Iniciação à Teoria das Distribuições e aos Espaços de Sobolev, vol.I e II, Departamento de Matemática-UEM, Maringá, 2000.

[10] W. Craig, J. Goodman, Linear Dispersive Equations of Airy Type, Department of Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island and Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, July, 1989.

[11] R.C. Diprima, W.E. Boyce, Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 7° Edição, Trad. Valéria de Magalhães Iorio, Ed. LTC, Teresópolis, 2001.

[12] G.G. Doronin, N.A. Larkin, Quarter-Plane Problem for the Kawahara Equation, Minicurso Departamento de Matemática-UEM, Maringá, 2007.

[13] G.G. Doronin, N.A. Larkin, KdV Equation in Domains with Moving Boundaries, J. Math. Anal. Appl. 328 (2007), 503-515.

[14] T.D. Dzhuraev, Boundary Value Problems for Equations of Mixed and Mixed-Composite types, "Fan", Tashkent, Russian, 1979.

[15] A.V. Faminskii, On an Initial Boundary Value Problem in a Bounded Domain for the Generalized Korteweg-De Vries Equation, Moscou, 2001.

[16] F.R. Gantmacher, The Theory of Matrices, Chelsea Publeshing Company, New York, 1959.

[17] S.K. Godunov, Ordinary Differential Equations with Constant Coefficient, American Mathematical Society, Novosibirsk, March 1997.

[18] V.V. Khablov, Some Well-Posed Boundary Value Problems for the Korteweg-De Vries Equation, Preprint, Inst. Mat. Sibirsk. Otdel. Acad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1979.

[19] D.L. Kreider, R.G. Kuller, D.R. Ostberg, Equações Diferenciais, Trad. Elza F. Gomide, Edgard Blücher, Ed. da Universidade de São Paulo, 1972.

[20] O.A. Ladyzhenskaya, The Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Translate by jack Lohwater, Applied mathematical sciences, New York, 1985.

[21] P. Lancaster, Theory of Matrices, The University of Calgary, Canada, by Academic Press, 1969.

[22] N.A. Larkin, Korteweg-de Vries and Kuramoto-Sivashinsky Equations in Bounded Domains, J. Math. Anal. Appl. 297(1) (2004), 169-185.

[23] L.A. Lusternik, V.I. Sobolev, Elements of Functional Analysis, Hindustan Publishing Corporation (English translation From Second Extensively Enlarged and Rewritten Russian edition, New York), Delhi, Índia, 1974.

[24] E.A. de Mello, L.A. Medeiros, A Integral de Lebesgue, 4° edição, Instituto de Matemática-UFRJ, Rio de Janeiro, 1989.

[25] A.N. Michel, R. K. Miller, Ordinary Differential Equations, Iowa State University, Published by ACADEMIC PRESS, INC. New York, 1982.