CONTROLABILIDADE EXATA NA FRONTEIRA DA EQUAÇÃO DA ONDA SEMILINEAR

Marieli Musial

Centro de Ciências Exatas

Universidade Estadual de Maringá

Programa de Pós-Graduação em Matemática

(Mestrado)

Orientador: Juan Amadeo Soriano Palomino

Maringá - PR

2006

CONTROLABILIDADE EXATA NA FRONTEIRA DA EQUAÇÃO DA ONDA SEMILINEAR

Marieli Musial

Tese submetida ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Estadual de Maringá - UEM-PR, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de Mestre.

Aprovada por:

Prof. Juan Amadeo Soriano Palomino - UEM...

(Orientador)

Prof. Marcelo Moreira Cavalcanti - UEM ....

Prof. Silvano Dias Bezerra de Menezes - UFPA ....

Maringá

Março, 2006

Aos meus pais Albino e Marta Musial,

aos meus irmãos Marcelo e Márcia Paula

e ao meu companheiro Gilson.

Agradecimentos

Ao professor Dr. Juan Amadeo Soriano Palomino, pela orientação, compreensão e apoio constante para a conclusão deste trabalho.

Aos professores do Departamento de Matemática da UEM, que colaboraram em minha formação acadêmica.

Aos professores Santos Richard Wieller Sanguino Bejarano e Christian José Quintana Pinedo, pela orientação durante minha graduação, pelos conselhos e ensinamentos.

À secretária da Pós-Graduação, Lúcia, por todo apoio.

À zeladora do Departamento, Silvana, pelos cafezinhos.

À Fundação Araucária, pelo apoio financeiro.

A todos os amigos que tive nestes dois anos. Em especial: Chiara, Luciana, Lucineide e Taís pela constante paciência, apoio e carinho.

Ao Gilson por me compreender, motivar e amar. E a sua família, que nos apoiou e acolheu-me com muito carinho.

Ao meu pai, que a sua maneira soube me educar e amar.

À minha mãe, pelos conselhos, exemplo de vida, sabedoria, por sempre estar disposta a ajudar e ouvir.

Aos meus irmãos, que sempre apoiaram-me e ajudaram-me a segurar a barra. E sempre que preciso, estavam dispostos a me ouvir.

Enfim, dizer à minha família, que a melhor maneira de educar, é o próprio exemplo.

E a Deus por ter colocado todas essas pessoas em minha vida.

Resumo

Neste trabalho estudamos a controlabilidade exata e local na fronteira para a equação

$$y'' - \Delta y + f(y) = 0 \text{ em } Q$$

onde Q é o cilindro finito $\Omega \times]0, T[$, Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$. O resultado é obtido por uma variante do método HUM (Hilbert Uniqueness Method) o qual foi introduzido por Lions.

Abstract

In this work we study the boundary exact and local controllability for the equation

$$y'' - \Delta y + f(y) = 0 \text{ on } Q$$

where Q is a finite cylinder $\Omega \times]0, T[$, Ω a bounded domain of $\mathbb{R}^n$. The result is obtained by a variant of the HUM method (Hilbert Uniqueness Method) which was introduced by Lions.

Sumário

Introdução

São muitos os campos de ação do desenvolvimento tecnológico que a Teoria do Controle tem um papel central. Uma das mais recentes e, nas que as perpectivas de avanço nos próximos anos são mais favoráveis, é a do "Controle Laser" de Reações Químicas.

Os princípios básicos da abordagem industrial da Química, permaneceram inalterados durante muitos anos. Estes têm sido baseados fundamentalmente na alteração da temperatura ou pressão nas reações ou na utilização de catalisadores.

Mas desde a invenção do laser há quarenta anos, a tecnologia para o controle de reações foi mudando paulatinamente. Efetivamente, partindo de um dos princípios básicos da Mecânica Quântica, segundo o qual tanto a luz como a matéria têm um caráter ondulatório, pode-se prever que a utilização do laser seja um mecanismo eficiente para o controle das reações químicas.

Os resultados experimentais dos que se dispõe na atualidade, fazem pensar que esta tecnologia pode chegar a atingir altos níveis de precisão se bem que, pelo momento, existem obstáculos que pouco a pouco começam a ceder. Uma das maiores limitações surge quando as moléculas estão pouco isoladas. Neste caso as colisões entre elas fazem com que seja difícil definir sua fase, o qual, a sua vez, dificulta a eleição do controle laser adequado. A segunda limitação, de caráter mais tecnológico e nas que se estão produzindo avanços importantes, é no desenho de lasers com fases bem definidas e que se vejam pouco afetadas pelas instabilidades das equipes e instrumentos.

O leitor interessado pode conferir o artigo divulgativo de Brumer e Shapiro [4] para conhecer mais a respeito.

Trata-se de um campo onde os matemáticos estão ainda muito pouco desenvolvidos. Os modelos matemáticos necessários para descrever estes fenômenos exigem a utilização de complexas equações de Schrödinger nas que o grau de compreensão que dispomos na atualidade faz muito difícil comprovar o que os experimentos mostram.

Mas basta analisar alguns modelos matemáticos simples nos que intervêm fenômenos ondulatórios para entender algumas das dificuldades que estes modelos mais complexos introduzem.

Dentro das equações que descrevem fenômenos ondulatórios uma das mais simples é sem dúvida a equação de ondas que já foram analisadas por muitos matemáticos.

Dentro da teoria de controle, vamos nos concentrar no estudo da controlabilidade exata na fronteira para a equação da onda semilinear

$$\left| \begin{array}{lll} y'' - \Delta y + f(y) = 0 & \text{em} & Q \\ y = v & \text{sobre} & \Sigma \\ y(0) = y^0,\ y'(0) = y^1 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{1}$$

onde $' = \dfrac{\partial}{\partial t}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, com fronteira Γ de classe C^2, Q o cilindro $\Omega \times]0,T[$ com fronteira lateral $\Sigma = \Gamma \times]0,T[$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função localmente Lipschitziana, $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$.

O objetivo deste trabalho é estudar a controlabilidade exata do sistema (1), formulada como segue: "Dado $T > 0$ suficientemente grande, é possível, para quaisquer dados iniciais e finais $\{y^0, y^1\}$, $\{z^0, z^1\}$, encontrar um controle correspondente v tal que a solução $y = y(x,t)$ de (1) satisfaça

$$y(T) = z^0, \qquad y'(T) = z^1 \text{ ?"} \tag{2}$$

Resultados de controlabilidade exata para o problema (1) quando f é linear, $f(s) = \alpha s$, com $s \in \mathbb{R}$, são bem conhecidos e existem um grande número de publicações na literatura (veja por exemplo Lions [12], [13], Russell [25] e a bibliografia deles). Todavia, resultados de controlabilidade exata para o problema (1) quando f é não linear, são poucos conhecidos.

Nesta dissertação analisaremos a controlabilidade exata do problema (1) quando f é assintoticamente linear e a controlabilidade local quando f é superlinear.

Para resolver o problema da controlabilidade exata (e local) de (1) utilizaremos uma variante do método HUM (Hilbert Uniqueness Method) introduzido por Lions em [11], [12], [13] para sistemas distribuídos lineares. Para tal método, utilizaremos técnicas de multiplicadores, argumentos de compacidade e teorema de ponto fixo.

Este trabalho é uma exposição didática de [33] para equação da onda semilinear com condições de fronteira de Dirichlet, e está dividido como segue:

- No capítulo 1, apresentaremos alguns resultados principais sem demonstrá-los, os quais são de grande importância no decorrer do trabalho.

- No capítulo 2, consideramos o caso linear $f(s) = \alpha s$ com $s \in \mathbb{R}$. Neste caso a controlabilidade exata será provada utilizando-se o método HUM.

- No capítulo 3, usando um primeiro método de ponto fixo provaremos a controlabilidade exata para o problema (1) quando a não linearidade f é assintoticamente linear, isto é, $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $\exists \lim_{|s|\to\infty} \dfrac{f(s)}{|s|}$.

- No capítulo 4, demonstraremos a controlabilidade local de (1) no caso em que f é superlinear no infinito utilizando um segundo método de ponto fixo.

Capítulo 1

Preliminares

No presente capítulo serão fixadas as notações e enunciadas as definições e resultados fundamentais ao desenvolvimento deste trabalho.

1.1 Distribuições e Espaços Funcionais

1.1.1 Noção de Derivada Fraca

No estudo de problemas descritos pelas equações diferenciais parciais cujos dados iniciais não são regulares o suficiente para possuírem derivada no sentido clássico, faz-se necessária a introdução de um novo conceito de derivada.

Para entendermos tal conceito necessitamos de algumas definições:

1º) Espaço das funções testes

Dados $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ e $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, representaremos por D^α o operador derivação de ordem α definido por

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}},$$

onde $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. Se $\alpha = (0, 0, \ldots, 0)$, defini-se $D^\alpha u = u$.

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $C_0^\infty(\Omega)$ como o conjunto das funções

$\varphi : \Omega \to \mathbb{K}$ (onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) que são infinitamente diferenciáveis em Ω e que tem suporte compacto, onde suporte φ é o fecho do conjunto $\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0\}$ em Ω, ou seja, $supp\,(\varphi) = \overline{\{x \in \Omega; \varphi(x) \neq 0|\}}^{\,\Omega}$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para zero, e denotamos $\varphi_\nu \to 0$, se, e somente se, existe um subconjunto compacto K de Ω, tal que:

(i) $supp\,(\varphi_\nu) \subset K, \;\; \forall\, \nu \in \mathbb{N}$;

(ii) $D^\alpha \varphi_\nu \to 0$ uniformemente sobre $K, \;\; \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n$.

Dizemos que uma seqüência $\{\varphi_\nu\} \subset C_0^\infty(\Omega)$ converge para $\varphi \subset C_0^\infty(\Omega)$ quando a seqüência $\{\varphi_\nu - \varphi\}$ converge para zero no sentido acima definido.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$, munido desta noção de convergência, é denominado espaço das funções testes, e denotado por $\mathcal{D}(\Omega)$.

2$^{\text{o}}$) Distribuição sobre um aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$

Definímos como distribuição sobre Ω a toda forma linear e contínua em $\mathcal{D}(\Omega)$. O conjunto de todas as distribuições sobre Ω é um espaço vetorial, o qual representa-se por $\mathcal{D}'(\Omega)$, chamado espaço das distribuições sobre Ω, munido da seguinte noção de convergência: Seja (T_ν) uma sucessão em $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diremos que $T_\nu \to T$ em $\mathcal{D}'(\Omega)$ se a seqüência numérica $\{\langle T_\nu, \varphi\rangle\}$ converge para $\langle T, \varphi\rangle$ em $\mathbb{R}$, $\forall\, \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

3$^{\text{o}}$) Denotaremos por $L^1_{loc}(\Omega)$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto K de Ω.

De posse destas definições estamos aptos a entender este novo conceito de derivada. S. Sobolev introduziu, em meados de (1936), uma noção global de derivada a qual denominou-se derivada fraca, cuja construção dar-se-á a seguir:

Sejam u, v definidas num aberto limitado Ω do $\mathbb{R}^n$, cuja fronteira Γ é regular. Suponhamos que u e v possuam derivadas parciais contínuas em $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Se u ou v e anulam sobre Γ, obtemos do lema de Gauss que

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_k} dx = -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_k} dx.$$

A expressão anterior motivou a derivada fraca dada por Sobolev: Uma função

$u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é derivável no sentido fraco em Ω, quando existe uma função $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_k}dx = -\int_\Omega v(x)\varphi(x)dx,$$

para toda $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Embora tal conceito de derivada ter sido um marco na evolução do conceito de solução de uma equação diferencial ela apresenta uma grave imperfeição no fato que nem toda função de $L^1_{loc}(\Omega)$ possui derivada neste sentido. No intuito de sanar este tipo de problema, Laurent Schwartz, em meados de 1945, introduziu a noção de derivada no sentido das distribuições, a qual generaliza a noção de derivada formulada por Sobolev, como segue:

Seja T uma distribuição sobre Ω e $\alpha \in \mathbb{N}^n$. A derivada de ordem α de T, no sentido das distribuições, é definida por:

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi \rangle ; \forall \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Verifica-se que $D^\alpha T$ é ainda uma distribuição e que o operador $D^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \to \mathcal{D}'(\Omega)$, tal que a cada T associa-se $D^\alpha T$, é linear e contínuo.

1.1.2 Os Espaços $L^p(\Omega)$

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$. Representaremos por $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, o espaço vetorial das (classes de) funções definidas em Ω com valores em $\mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue em Ω.

Teorema 1.1 (Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) - *Seja $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ uma seqüência de funções integráveis num aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, convergente quase sempre para uma função u. Se existir uma função $u_0 \in L^1(\Omega)$ tal que $|u_\nu| \leq u_0$ quase sempre, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$ então u é integrável e tem-se*

$$\int_\Omega u = \lim_{\nu \to \infty} \int_\Omega u_\nu .$$

Demonstração: Ver [18].

O espaço $L^p(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty$$

e

$$\|u\|_{L^\infty} = \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|u(x)|, \quad \text{para } p = +\infty,$$

é uma espaço de Banach.

No caso $p = 2$, $L^2(\Omega)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.2 (Desigualdade de Young) - *Sejam* $1 < p, q < \infty$ *tal que* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ *e* $a, b > 0$. *Então*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Demonstração: Ver [2].

Proposição 1.3 (Desigualdade de Minkowski) - *Sejam* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $f, g \in L^p(\Omega)$, *então*

$$\|f + g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [18].

Proposição 1.4 (Desigualdade de Hölder) - *Sejam* $u \in L^p(\Omega)$ *e* $v \in L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. *Então* $u\,v \in L^1(\Omega)$ *e temos a desigualdade*

$$\int_\Omega |uv| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração: Ver [2].

Segue como corolário da proposição anteiror o seguinte resultado:

Corolário 1.5 (Desigualdade de Hölder generalizada) - *Sejam* $f_1, f_2, \ldots, f_k$ *funções, tais que* $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$, $p_i \geq 1$, $1 \leq i \leq k$, *onde* $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} = \frac{1}{p}$ *e* $\frac{1}{p} \leq 1$. *Então o produto* $f = f_1 f_2 \ldots f_k \in L^p(\Omega)$ *e*

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}.$$

Proposição 1.6 (Desigualdade de Interpolação) - *Se* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *com* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leq r \leq q$ *e tem-se a desigualdade*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}$$

onde $0 \leq \theta \leq 1$ *verifica* $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$.

Demonstração: Ver [20].

Além dos resultados acima, temos que:

(i) $L^p(\Omega)$ é reflexivo para todo $1 < p < +\infty$;

(ii) $L^p(\Omega)$ é separável para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iii) $\mathcal{D}(\Omega)$ tem imersão contínua e densa em $L^p(\Omega)$ para todo $1 \leq p < +\infty$;

(iv) Se Ω é limitado se $1 \leq p_1 < p_2 \leq +\infty$ então $L^{p_2}(\Omega) \hookrightarrow L^{p_1}(\Omega)$, onde $\hookrightarrow$ denota que a identidade é uma injeção contínua.

(v) Se (f_n) é uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ são tais que $\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0$ então existe uma subseqüência (f_{n_k}) tal que $f_{n_k}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.7 (Teorema da Representação de Riesz) - *Sejam* $1 < p < +\infty$, $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ *com* $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. *Então existe uma única* $u \in L^q(\Omega)$, *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^p(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [2].

Quando $p = \infty$, temos:

Proposição 1.8 *Seja* $\varphi \in (L^1(\Omega))'$, *então existe uma única* $u \in L^\infty(\Omega)$ *tal que*

$$\langle \varphi, v \rangle = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx, \ \forall v \in L^1(\Omega) \text{ e } \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

Demonstração: Ver [2].

Denotaremos por $L^p_{loc}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$ o espaço das (classes de) funções $u : \Omega \to \mathbb{K}$ tais que $|u|^p$ é integrável no sentido de Lebesgue sobre cada compacto

K de Ω munido da seguinte noção de convergência: Uma sucessão u_ν converge para $u \in L^p_{loc}(\Omega)$ se para cada compacto K de Ω tem-se:

$$p_K(u_\nu - u) = \left(\int_K |u_\nu(x) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

Proposição 1.9 (Lema de Du Bois Raymond) - *Seja* $u \in L^1_{loc}(\Omega)$*, então* $T_u = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$ *quase sempre em* Ω*.*

Demonstração: Ver [19].

Aqui T_u é a distribuição definida por $\langle T_u, \varphi \rangle = \int_\Omega u(x)\varphi(x)dx, \ \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Além disso, decorre da proposição que T_u fica univocamente determinada por $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, isto é, se $u, v \in L^1_{loc}(\Omega)$, então $T_u = T_v$ se, e somente se, $u = v$ quase sempre em Ω.

Proposição 1.10 *Seja* $(u_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}} \subset L^p_{loc}(\Omega)$*,* $1 \leq p < +\infty$*, tal que* $u_\nu \to u$ *em* $L^p_{loc}(\Omega)$*, então* $u_\nu \to u$ *em* $\mathcal{D}'(\Omega)$*.*

Demonstração: Ver [19].

1.1.3 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq +\infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Se $u \in L^p(\Omega)$ sabemos que u possui derivadas de todas as ordens no sentido das distribuições, mas não é verdade, em geral, que $D^\alpha u$ seja uma distribuição definida por uma função de $L^p(\Omega)$. Quando $D^\alpha u$ é definida por uma função de $L^p(\Omega)$ defini-se um novo espaço denominado espaço de Sobolev. Representa-se por $W^{m,p}(\Omega)$ o espaço vetorial de todas as funções $u \in L^p(\Omega)$, tais que para todo $|\alpha| \leq m$, $D^\alpha u$ pertence à $L^p(\Omega)$, sendo $D^\alpha u$ a derivada no sentido das distribuições.

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ munido da norma

$$\|u\|_{m,p} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \text{para } 1 \leq p < \infty,$$

e

$$\|u\|_{m,\infty} = \sum_{|\alpha|\leq m} \sup_{x\in\Omega} \text{ess}|D^\alpha u(x)|, \quad \text{para } p=\infty$$

é um espaço de Banach.

Representa-se $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ devido a sua estrutura hilbertiana, ou seja, os espaços $H^m(\Omega)$ são espaços de Hilbert.

Sabe-se que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $L^p(\Omega)$, mas não é verdade que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{m,p}(\Omega)$ para $m \geq 1$. Motivado por esta razão define-se o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$ como sendo o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$, isto é,

$$\overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} = W_0^{m,p}(\Omega).$$

Observação 1.11 *Quando Ω é um aberto limitado em alguma direção x_i de $\mathbb{R}^n$ e $1 \leq p < \infty$, consideramos $W_0^{m,p}(\Omega)$ munido da norma*

$$\|u\| = \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

que é equivalente a norma $\|u\|_{m,p}$.

Suponha que $1 \leq p < \infty$ e $1 < q \leq \infty$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Representa-se por $W^{-m,q}(\Omega)$ o dual topológico de $W_0^{m,p}(\Omega)$. O dual topológico de $H_0^m(\Omega)$ denota-se por $H^{-m}(\Omega)$.

Prosseguindo nas definições dos espaços quais trabalharemos vamos caracterizar os espaços $H^s(\Omega)$, $s \in \mathbb{R}$, para isso consideremos $S = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);$ $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} p(x)D^\alpha\varphi(x) = 0$, para todo polinômio p de n variáveis reais e $\alpha \in \mathbb{N}^n\}$ o espaço das funções rapidamente descrescente no infinito, S' o dual topológico de S e para cada função $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ a transformada de Fourier de u definida por

$$\hat{u}(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} u(y) dy,$$

onde $(x,y) = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$.

Definímos, para todo $s \in \mathbb{R}$

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in S^{'};\ (1 + \|x\|^2)^{\frac{s}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}.$$

Além disso, se $s \geq 0$ temos que $H^{-s}(\mathbb{R}^n) = (H^s(\mathbb{R}^n))^{'}$ e $H^s(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow H^{-s}(\mathbb{R}^n)$.

Seja Ω um aberto bem regular do $\mathbb{R}^n$, ou o semi-espaço $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos a aplicação:

$$r_\Omega : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\Omega) u \mapsto r_\Omega u = u|_\Omega$$

que leva u na sua restrição $r_\Omega u$ a Ω. Assim, para $s \geq 0$ temos que

$$H^s(\Omega) = \{v|_\Omega;\ v \in H^s(\mathbb{R}^n)\}$$

e

$$H^{-s}(\Omega) = (H_0^s(\Omega))^{'} \text{ onde } H_0^s(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{H^s(\Omega)}.$$

Teorema 1.12 (Imersão de Sobolev) - *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$, então*

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),\ se\ m > \frac{n}{2} + k.$$

Demonstração: Ver [17].

Teorema 1.13 *Assuma que Ω é aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Seja $s \in \mathbb{R}$. Então para cada $\varepsilon > 0$ a injeção*

$$H^s(\Omega) \hookrightarrow H^{s-\varepsilon}(\Omega)$$

é compacta.

Demonstração: Ver [15].

Teorema 1.14 *Seja Ω um aberto limitado bem regular do $\mathbb{R}^n$. Seja $s > 0$ e $1 < p < n$. Então:*

se $n > sp$ então $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, para $p \leq r \leq \dfrac{np}{n - sp}$, *se* $n = sp$ *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$, *para* $p \leq r < \infty$,

se $n < (s-j)p$ *para algum inteiro não negativo* j *então* $W^{s,p}(\Omega) \hookrightarrow C_B^j(\overline{\Omega})$, *onde* $C_B^j(\overline{\Omega}) = \{u \in C^j(\Omega) : D^\alpha u$ *é limitada sobre* Ω, *para* $|\alpha| \leq j\}$.

Demonstração: Ver [1].

Lema 1.15 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existe um número real* $\varepsilon = \varepsilon(n)$, *onde* $0 < \varepsilon < 1$, *de modo que*

$$H^{1-\varepsilon(n)}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$$

desde que $2 \leq q\frac{2n}{n-2}$, $n > 2$.

Demonstração: Esta é uma aplicação imediata do teorema anterior.

Proposição 1.16 *Sejam* Ω *um conjunto aberto do* $\mathbb{R}^n$, *de classe* C^m, *com fronteira limitada e* m *um inteiro tal que* $m \geq 1$ *e* $1 \leq p < \infty$. *Então temos as segintes imersões contínuas:*

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} > 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, *onde* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n}$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [p, +\infty[$,

se $\dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} < 0$ *então* $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Demonstração: Ver [5].

Teorema 1.17 (Teorema de Rellich Kondrachov) - *Seja* Ω *um subconjunto aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$, Ω *de classe* C^1 *e* $1 \leq p \leq \infty$. *Então*

se $p < n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, p^*]$, *onde* $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^q(\Omega)$, $\forall\, q \in [1, +\infty[$,

se $p = n$ *então* $W^{1,p}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} C(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [5].

Observação 1.18 $\overset{c}{\hookrightarrow}$ *indica imersão compacta.*

1.1.4 Espaços Funcionais à Valores Vetoriais

Seja X um espaço de Banach. Denotaremos por $\mathcal{D}(0,T;X)$ o espaço localmente convexo das funções vetoriais $\varphi : (0,T) \mapsto X$ infinitamente diferenciáveis com suporte compacto em $(0,T)$. Diremos que $\varphi_\nu \to \varphi$ em $\mathcal{D}(0,T;X)$ se

i) $\exists\, K$ compacto de $(0,T)$ tal que $supp\,(\varphi_\nu)$ e $supp\,(\varphi)$ estão contidos em K, $\forall\, \nu$;

ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\varphi_\nu^{(k)}(t) \to \varphi^{(k)}(t)$ em X uniformemente em $t \in (0,T)$.

O espaço das aplicações lineares e contínuas de $\mathcal{D}(0,T) = \mathcal{D}(0,T;\mathbb{R})$ em X será denotado por $\mathcal{D}'(0,T;X)$, isto é, $S \in \mathcal{D}'(0,T;X)$ se $S : \mathcal{D}(0,T) \mapsto X$ é linear e se $\theta_\mu \to \theta$ em $\mathcal{D}(0,T)$ então $\langle S, \theta_\mu \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X. Diremos que $S_\nu \to S$ em $\mathcal{D}'(0,T;X)$ se $\langle S_\nu, \theta \rangle \to \langle S, \theta \rangle$ em X, $\forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$. O espaço $\mathcal{D}'(0,T;X)$ equipado com a convergência acima é denominado espaço das distribuições vetoriais de $(0,T)$ com valores em X.

Prova-se que o conjunto $\{\theta\xi,\ \theta \in \mathcal{D}(\Omega), \xi \in X\}$ é total em $\mathcal{D}(0,T;X)$.

Denotaremos por $L^p(0,T;X)$ o espaço de Banach (das classes) de funções vetoriais $u : (0,T) \to X$ fortemente mensuráveis em $(0,T)$, $(0,T)$ dotado da medida de Lebesgue, tais que

$$\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt < \infty.$$

Quando $p = 2$ e X um espaço de Hilbert então $L^2(0,T;X)$ é um espaço de Hilbert munido com o produto interno $(u,v) = \displaystyle\int_0^T (u(t), v(t))_X dt$.

Representaremos por $W^{k,p}(0,T;X)$, $1 \leq p \leq \infty$ o espaço de Banach

$$W^{k,p}(0,T;X) = \{u \in L^p(0,T;X)/u^{(j)} \in L^p(0,T;X),\ 0 \leq j \leq k\}$$

($u^{(j)}$ derivada j-ésima no sentido das distribuições vetoriais). Com norma

$$\|u\|_{W^{k,p}(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p \right)^{1/p},$$

ou a norma equivalente,

$$\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|_{L^p(0,T;X)}^p.$$

Quando $p = 2$ e X é um espaço de Hilbert o espaço $W^{k,2}(0,T;X)$ é denotado por $H^k(0,T;X)$, que é um espaço de Hilbert com produto interno

$$(u,v)_{H^k(0,T;X)} = \sum_{j=0}^{k} (u^{(j)}, v^{(j)})_{L^2(0,T;X)}$$

e norma

$$\|u\|_{H^k(0,T;X)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \|u^{(j)}\|^2_{L^2(0,T;X)} \right)^{1/2}.$$

Quando $k = 0$, $H^k(0,T;X)$ identifica-se ao $L^2(0,T;X)$.

Por $H_0^k(0,T;X)$ representaremos o fecho em $H^k(0,T;X)$ de $\mathcal{D}(0,T;X)$. Demonstra-se que o espaço $H_0^k(0,T;X)$ é o espaço de Hilbert

$$H_0^k(0,T;X) = \{u \in H^k(0,T;X); u^{(j)}(0) = u^{(j)}(T) = 0,\ 0 \leq j \leq k-1\}.$$

O dual topológico de $H_0^k(0,T;X)$ será representado por $H^{-k}(0,T;X)$.

Assim, identificando $L^2(0,T;X)$ com o seu dual $(L^2(0,T;X))'$, via teorema de Riesz, obtemos então

$$\mathcal{D}(0,T;X) \hookrightarrow H_0^1(0,T;X) \hookrightarrow L^2(0,T;X) \hookrightarrow H^{-1}(0,T;X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;X)$$

onde

$$H^{-1}(0,T;X) = \left(H^{-1}(0,T;X)\right)'.$$

Proposição 1.19 *Seja $u \in L^2(0,T;X)$. Então existe um único $f \in H^{-1}(0,T;X)$ que verifica*

$$\langle f, \theta\xi \rangle = (\langle u', \theta \rangle \xi)_X,\ \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T),\ \forall\, \xi \in X.$$

Demonstração: Ver [22].

Baseado na proposição anterior, identificamos f com u'. Em razão disto, diremos que se $u \in L^2(0,T;X)$ então $u' \in H^{-1}(0,T;X)$.

Proposição 1.20 *A aplicação*

$$u \in L^2(0,T;X) \mapsto u' \in H^{-1}(0,T;X)$$

onde X é um espaço de Hilbert, é linear e contínua.

Demonstração: Ver [22].

1.1.5 Funções Escalarmente Contínuas

Seja X um espaço de Banach. Definímos o espaço das funções escalarmente contínuas (ou fracamente contínuas) como o conjunto das funções $f \in L^\infty(0,T;X)$ tais que a aplicação $t \to \langle f(t), x\rangle$ é contínua sobre $[0,T]$, $\forall\, x \in X'$, onde X' é dual de X. Denotaremos tal espaço por $C_s(0,T;X)$.

Disto segue que $C_s^1(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u' \in C_s(0,T;X)\}$, onde u' é a derivada de u no sentido das distribuições. Da mesma forma temos que $C_s^2(0,T;X) = \{u \in C_s(0,T;X); u'' \in C_s(0,T;X)\}$.

Observação 1.21 *Se $u \in L^\infty(0,T;X)$ e $u \in C([0,T];X)$ então $u \in C_s(0,T;X)$.*

Lema 1.22 *Sejam X e Y dois espaços de Banach, $X \hookrightarrow Y$ e X um espaço reflexivo. Então*

$$L^\infty(0,T;X) \cap C_s(0,T;Y) = C_s(0,T;X).$$

Demonstração: Ver [15].

1.2 Teoria de Traço

Consideremos $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ ou Ω um aberto limitado bem regular do R^n com fronteira Γ. Por $\mathcal{D}(\Gamma)$ representa-se o espaço vetorial das funções reais w definidas em Γ, possuindo derivadas parciais contínuas de todas as ordens. Dada uma função u definida em $\overline{\Omega}$, representa-se $\gamma_0 u$ a restrição de u a Γ.

Proposição 1.23 *Existe uma constante positiva C tal que*

$$\|\gamma_0 u\|_{H^{\frac{1}{2}}\Gamma} \leq C\|u\|_{H^1(\Omega)}$$

para toda $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [20].

Considerando $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ com a topologia induzida por $H^1(\Omega)$, segue pela proposição 1.23 que a aplicação

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

é contínua. Sendo $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ denso em $H^1(\Omega)$, esta aplicação se prolonga por continuidade a uma aplicação linear e contínua, ainda representada por γ_0, tal que

$$\gamma_0 : H^1(\Omega) \to H^{\frac{1}{2}}(\Gamma),$$

a qual denomina-se função traço.

Teorema 1.24 *A função traço aplica $H^1(\Omega)$ sobre $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ e o núcleo de γ_0 é o espaço $H_0^1(\Omega)$.*

Demonstração: Ver [20].

Consideremos, agora, Ω uma aberto limitado do $\mathbb{R}^n$ com fronteira Γ bem regular, e seja ν a normal unitária exterior em Γ. Para todo $j = 1, \ldots, m-1$ e $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, seja $\gamma_j u = \left.\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\right|_\Gamma$ a derivada normal de ordem j de u e $\gamma_0 u = u|_\Gamma$. Da densidade do espaço $(\mathcal{D}(\Gamma))^m$ no espaço de Hilbert $H^{m-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{m-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times \ldots \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ temos o seguinte resultado:

Teorema 1.25 *Existe uma única aplicação linear e contínua γ do espaço $H^m(\Omega)$ sobre o espaço $\Pi_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ com núcleo $\gamma^{-1}(0) = H_0^m(\Omega)$, verificando a seguinte condição*

$$\gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \ldots, \gamma_{m-1} u)\,, \ \forall u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Tal aplicação admite uma inversa à direita linear e contínua.

Demonstração: Ver [20].

Além desses resultados, considerando os espaços de Hilbert $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ e $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ munidos dos produtos internos $(u,v)_0 = (u,v)_{L^2(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^0(\Omega)$ e $(u,v)_0 = (u,v)_{H^1(\Omega)} + (\Delta u, \Delta v)_{L^2(\Omega)}; \forall u, v \in \mathcal{H}^1(\Omega)$, respectivamente, temos os seguintes resultados:

Proposição 1.26 *A aplicação linear* $\gamma : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u)$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\begin{aligned} \gamma : \mathcal{H}^0(\Omega) \quad &\to \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\ u \quad &\mapsto \quad \gamma u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u). \end{aligned}$$

Além disso, a aplicação γ *acima coincide com a aplicação traço de ordem dois.*

Demonstração: Ver [6].

Proposição 1.27 *A aplicação linear* $\gamma_1 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *definida por* $u \mapsto \gamma_1 u = \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\Gamma}$ *se estende por continuidade a uma única aplicação linear e contínua*

$$\gamma_1 : \mathcal{H}^1(\Omega) \quad \to \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

Demonstração: Ver [6].

1.2.1 Traço em $L^2(0, T; H^m(\Omega))$.

Pelo visto anteriormente temos que existe uma aplicação traço

$$\gamma : H^m(\Omega) \to \prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma) \tag{1.1}$$

que é linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $H_0^m(\Omega)$, admite uma inversa à direita linear e contínua.

Definamos a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : \quad L^2(0, T; H^m(\Omega)) \quad &\to \quad L^2\left(0, T; \textstyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ u \qquad\qquad &\mapsto \qquad \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde $\gamma u(t)$ é a aplicação (1.1) aplicado em $u(t) \in H^m(\Omega)$. Denotamos as aplicações (1.1) e (1.2) com o mesmo símbolo para não sobrecarregar a notação. A aplicação definida em (1.2) é uma aplicação linear, contínua, sobrejetora, com núcleo $L^2(0,T;H_0^m(\Omega))$, que admite uma inversa à direita τ linear e contínua, isto é,

$$\tau : L^2\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \mapsto L^2(0,T;H^m(\Omega));\ \gamma(\tau(\eta)) = \eta. \tag{1.3}$$

De forma análoga podemos definir

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & H_0^1(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & u & \mapsto & \gamma u, (\gamma u)(t) = \gamma u(t) \end{array} \tag{1.4}$$

que tem as mesmas propriedades da aplicação (1.2).

Proposição 1.28 *Seja* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *com* $u' \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então* $\gamma u' = (\gamma u)'$.

Demonstração: Ver [22].

1.2.2 Traço em $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$

Seja $\mathcal{K} = L^2(0,T;H^m(\Omega)) \times L^2(0,T;H^m(\Omega))$ e M o subespaço fechado de $\mathcal{K}$ dos vetores $\{\alpha,\beta\}$ tais que

$$(\alpha, v)_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} + (\beta, v')_{L^2(0,T;H^m(\Omega))} = 0,$$

para todo $v \in H_0^1(0,T;H^m(\Omega))$. Então a aplicação

$$\begin{array}{ccc} H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & M^{\perp} \\ f & \mapsto & \{\phi_f^0, \psi_f^0\} \end{array} \tag{1.5}$$

onde $\{\phi_f^0,\psi_f^0\} \in \mathcal{E}_f$ é tal que $\|f\| = \|\{\phi_f^0,\psi_f^0\}\|$ e $\mathcal{E}_f = \{\{\phi_f,\psi_f\} \in \mathcal{K}; (\phi_f, v) + (\psi_f, v')$ $= \langle f, v\rangle,\ \forall\, v \in H_0^1(\Omega)\}$, isto é, o conjunto dos $\{\phi_f,\psi_f\} \in \mathcal{K}$ tais que $f = \phi_f - \psi_f$. A aplicação definida em (1.5) é uma isometria linear sobrejetora.

Para $f \in H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ defini-se $\widetilde{\gamma} f$ na forma:

$$\langle \widetilde{\gamma} f, w\rangle = \int_0^T (\gamma\phi_f^0, w)_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt + \int_0^T (\gamma\psi_f^0, w')_{\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)} dt \tag{1.6}$$

$w \in H_0^1\left(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)$, que é linear e contínua.

Assim temos estabelecido uma aplicação

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma}: & H^{-1}(0,T;H^m(\Omega)) & \rightarrow & H^{-1}\left(0,T;\displaystyle\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)\right) \\ & f & \mapsto & \widetilde{\gamma}f \end{array} \tag{1.7}$$

$\widetilde{\gamma}f$ definido por (1.6), que é linear e contínua. Esta aplicação é denominada aplicação traço para as funções de $H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$. Assim são válidos os seguintes resultados:

Proposição 1.29 *Se* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então*

$$\gamma u\big|_{H_0^1(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma))} = \widetilde{\gamma}u.$$

Demonstração: Ver [22].

Proposição 1.30 *Se* $u \in L^2(0,T;H^m(\Omega))$ *então*

$$\widetilde{\gamma}u' = (\gamma u)'.$$

Demonstração: Ver [22].

Teorema 1.31 *A aplicação traço (1.7) é sobrejetora, seu núcleo é* $H^{-1}(0,T;H_0^m(\Omega))$, *e admite uma inversa à direita* $\widetilde{\tau}: H^{-1}(0,T;\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)) \rightarrow H^{-1}(0,T;H^m(\Omega))$ *linear e contínua.*

Demonstração: Ver [22].

Observação 1.32 *Além desses resultados se considerarmos os espaços de Hilbert* $\mathcal{H}^0(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega);\ \ \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ *ou* $\mathcal{H}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega); \Delta u \in L^2(\Omega)\}$ *em vez de* $H^m(\Omega)$ *em conjunto com as propoições 1.26 e 1.27 obteremos a existência das aplicações*

$$\gamma: H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^0(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma))$$

e

$$\gamma_1: H^{-1}(0,T;\mathcal{H}^1(\Omega)) \rightarrow H^{-1}(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)).$$

1.3 Teoria Espectral

Sejam V e H dois espaços de Hilbert com produto interno e norma, respectivamente representada por $((\cdot,\cdot))$, $\|\cdot\|$ e $(\cdot,\cdot)$, $|\cdot|$. Agora, consideremos a seguinte suposição:

$$V \hookrightarrow H, \text{ sendo esta imersão densa.} \tag{1.8}$$

Representaremos por A o operador não linear definido pela terna $\{V,\ H,\ ((\cdot,\cdot))\}$ como em Lions [14]. O domínio de A, representado por $D(A)$, é o conjunto dos $u \in V$ tal que a forma linear $v \mapsto ((u,v))$ é contínua em V com a topologia induzida de H. O operador A, com domínio $D(A)$ e imagem em H, é um operador auto-adjunto e positivo. Segue do teorema espectral que a potência A^α de A está bem definida para um número real α. Mostra-se que $D(A^{1/2}) = V$.

Consideremos a seguinte hipótese adicional

$$\text{A imersão de } V \text{ em } H \text{ é compacta.} \tag{1.9}$$

Segue de (1.9) que a definição espectral de A é dada por

$$Aw_\nu = \lambda_\nu w_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots \tag{1.10}$$

onde $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots$ diverge para $+\infty$ e $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ são as correspondentes auto-funções. Supomos que $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ é ortonormal em H. Portanto, segue que a potência A^α é definida para qualquer real α. O domínio é dado por

$$D(A^\alpha) = \{u \in H; \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} |(u, w_\nu)|^2 < \infty\}, \tag{1.11}$$

e, para cada $u \in D(A^\alpha)$, obtemos

$$A^\alpha = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu. \tag{1.12}$$

Observação 1.33 *Para $\alpha > 0$, a potência $A^{-\alpha}$ dada por (1.12) é*

$$A^{-\alpha} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{-\alpha} (u, w_\nu) w_\nu$$

e $A^{-\alpha}$ é um operador compacto.

Note que $D(A^\alpha)$ está equipada com a norma do gráfico de A^α, então $D(A^\alpha)$ é um espaço de Hilbert.

Proposição 1.34 *A imersão $D(A^\alpha)$, $\alpha > 0$, em H é compacta.*

Demonstração: Ver [21].

Proposição 1.35 *Se $\rho \geq 0$, $\alpha > 0$, então a imersão $D(A^{\alpha+\rho})$ em $D(A^\rho)$ é compacta.*

Demonstração: Ver [21].

Observação 1.36 *Para o caso particular $V = H_0^1(\Omega)$ e $H = L^2(\Omega)$ tem-se:*

i) $[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]_\theta = H_0^{1-\theta}(\Omega) = D(A^{\frac{1-\theta}{2}})$, *onde* $0 \leq \theta \leq 1$.

ii) $\langle Au, v\rangle = ((u,v))$, $\forall\, u, v \in H_0^1(\Omega)$, *onde* $A = -\Delta$.

A norma em $D(A^{\frac{1-\theta}{2}})$ *é dada por*

$$\|u\|^2_{D(A^{\frac{1-\theta}{2}})} = \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|A^{\frac{1-\theta}{2}}u\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Tem-se ainda

$$\|A^{\frac{1-\theta}{2}}u\|_{L^2(\Omega)} \approx \|u\|_{D(A^{\frac{1-\theta}{2}})}$$

em geral, se $0 < \alpha < 1$ *então*

$$\|A^{\frac{\alpha}{2}}u\|_{L^2(\Omega)} \approx \|u\|_{D(A^{\frac{\alpha}{2}})}.$$

iii) *Para* $0 < \theta < 1$ *temos*

$$[H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)]'_\theta = [L^2(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{1-\theta} = H^{-1+\theta}(\Omega).$$

A norma em $H^{-1+\theta}(\Omega)$ *é dada por*

$$\|u\|_{H^{-1+\theta}(\Omega)} = \|A^{\frac{-1+\theta}{2}}u\|_{L^2(\Omega)},\ \forall\, u \in H^{-1+\theta}(\Omega).$$

1.4 Resultados Auxiliares

Nesta seção enunciaremos resultados importantes que serão necessários para o desenvolver do trabalho.

Proposição 1.37 **(Desigualdade de Cauchy-Schwarz)** - *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$, então*

$$|x.y| \leq |x||y|.$$

Definição 1.38 *Seja E um espaço de Banach. A topologia fraca $\sigma(E, E')$ sobre E é a topologia menos fina sobre E que torna contínuas todas as aplicações $f \in E'$.*

Quando $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência de E, a qual converge para x em E na topologia fraca $\sigma(E, E^{'})$, denotamos

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Proposição 1.39 *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência em E, então verifica-se:*

(i) $x_n \rightharpoonup x$ em E se, e somente se, $\langle f, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, f \in E'$.

(ii) Se $x_n \to x$ em E, então $x_n \rightharpoonup x$ em E.

(iii) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E, então $\|x_n\|_E$ é limitada e $\|x\|_E \leq \lim inf\, \|x_n\|_E$.

(iv) Se $x_n \rightharpoonup x$ em E e $f_n \to f$ em E', então $\langle f_n, x_n\rangle \to \langle f, x\rangle$.

Demonstração: Ver [2].

Seja E um espaço de Banach e seja $x \in E$ fixo. Definamos $J_x : E' \to \mathbb{R}$ por

$$\langle J_x, f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

As aplicações J_x são lineares e contínuas, portanto $J_x \in E''$, $\forall\, x \in E$.

Definamos, agora, $J : E \to E''$ tal que $J(x) = J_x$.

Definição 1.40 *A topologia fraca $*$, também designada por $\sigma(E', E)$, é a topologia menos fina sobre E' que tornam contínuas todas as aplicações J_x.*

Proposição 1.41 *Seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência em* E'*, então verifica-se:*

(i) $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E' *se, e somente se,* $\langle f_n, x\rangle \to \langle f, x\rangle$, $\forall\, x \in E$.

(ii) Se $f_n \to f$ *em* E'*, então* $f_n \rightharpoonup f$ *em* E'.

(iii) Se $f_n \rightharpoonup f$ *em* E'*, então* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *em* E'.

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.42 *Seja* E *um espaço de Banach reflexivo e seja* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência limitada em* E*, então existe uma subseqüuência* $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $x \in E$*, tal que*

$$x_n \rightharpoonup x \text{ em } E.$$

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.43 *Seja* E *um espaço de Banach separável e seja* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma seqüência limitada em* E'*, então, existe uma subseqüência* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *e* $f \in E'$*, tal que*

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \text{ em } E'.$$

Demonstração: Ver [2].

Proposição 1.44 *Se* $u_m \overset{*}{\rightharpoonup} u$ *em* $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$*, então* $u_m \rightharpoonup u$ *em* $L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Lema 1.45 (Lax-Milgram) *Seja* $a(u,v)$ *uma forma bilinear, contínua e coerciva. Então para todo* $\varphi \in H'$*, existe um único* $u \in H$ *tal que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v\rangle \;\forall v \in H.$$

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.46 (Lema de Gronwall) - *Sejam* $f \in L^\infty(0,T)$ *e* $z \in L^1(0,T)$*, tais que* $z(t) > 0$*,* $f(t) \geq 0$ *e* $c \geq 0$ *uma constante. Se*

$$f(t) \leq c + \int_0^t z(s)f(s)ds, \;\forall\, t \in [0,T],$$

então temos

$$f(t) \leq ce^{\int_0^t z(s)ds}, \;\forall\, t \in [0,T].$$

Demonstração: Ver [17].

Observação 1.47 *O lema anterior é válido para ct,* $t \in [0,T]$ *com* $c > 0$*, no lugar da constante c.*

Lema 1.48 *Seja* $m \in L^1(0,T;R)$ *tal que* $m \geq 0$ *quase sempre em* $(0,T)$ *e* $b \geq 0$ *constante real. Suponhamos* $h \in L^\infty(0,T)$*;* $h \geq 0$ *sobre* $(0,T)$ *verificando a desigualdade*

$$\frac{1}{2}h^2(t) \leq 2b^2 + 2\int_0^t m(s)g(s)ds$$

para todo $t \in (0,T)$*. Então:*

$$h(t) \leq 2b + 2\int_0^t m(s)ds.$$

Demonstração: Ver [3].

Lema 1.49 *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^n$ *com fronteira* Γ *de classe* C^2*. Então existe um campo de vetores* $h = (h_\ell) \in [C^1(\overline{\Omega})]^n$ *que verifica*

$$h(x) = \nu(x) \text{ sobre } \Gamma.$$

Demonstração: Ver [23].

Lema 1.50 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *aberto limitado de classe* C^2*. Se* $\phi \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ *então*

$$\frac{\partial\phi}{x_\ell} = \nu_\ell \frac{\partial\phi}{\partial\nu}, \text{ sobre } \Gamma, \ \ell = 1, \cdots, n.$$

Demonstração: Ver [23].

Proposição 1.51 (Aubin-Lions) - *Sejam* B_0, B, B_1 *três espaços de Banach tais que* $B_0 \overset{c}{\hookrightarrow} B \hookrightarrow B_1$*, onde* B_0, B_1 *são reflexivos. Definamos*

$$W = \left\{ v; v \in L^{p_0}(0,T;B_0), \ v' = \frac{dv}{dt} \in L^{p_1}(0,T;B_1) \right\},$$

onde $1 < p_0, p_1 < \infty$*. Munido da norma*

$$\|v\|_{L^{p_0}(0,T;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(0,T;B_1)},$$

W é um espaço de Banach. Então, a imersão de W em $L^{p_0}(0,T;B)$ *é compacta.*

Demonstração: Ver [10].

Proposição 1.52 (Lions) - *Seja* (u_ν) *uma sucessão de funções pertencentes a* $L^q(Q)$ *e* $1 < q < \infty$*. Se*

(i) $u_\nu \to u$ *quase sempre em* Q

(ii) $\|u_\nu\|_{L^q(Q)} \leq c$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$,

então, $u_\nu \rightharpoonup u$ *fraco em* $L^q(Q)$.

Demonstração: Ver [10].

Teorema 1.53 (Teorema de Schauder) *Seja* X *um espaço de Banach,* M *um subconjunto de* X*, não vazio, fechado, limitado e convexo e* $T : M \to M$ *um operador compacto. Então,* T *tem um ponto fixo.*

Demonstração: Ver [29].

Proposição 1.54 (Fórmula de Green) - *Seja* Ω *um aberto limitado bem regular do* $\mathbb{R}^n$*. Se* $u, v \in H^1(\Omega)$*, então para* $1 \leq i \leq n$ *temos que*

$$\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)(\gamma_0 v)\nu_i d\Gamma,$$

onde $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ *e* ν *denota o vetor normal unitário exterior a* Γ.

Se $u \in H^2(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$*, temos que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v dx = -\int_\Omega \Delta u v dx + \int_\Gamma v \frac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma.$$

Demonstração: Ver [6].

Proposição 1.55 (Fórmula de Green generalizada) - *Para todo* $u \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ *e* $v \in H^1(\Omega)$*, tem-se*

$$(\Delta u, v)_{L^2(\Omega)} + (\nabla u, \nabla v)_{L^2(\Omega)} = \langle \gamma_1 u, \gamma_0 v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)},$$

onde $\Gamma_0 = \partial\Omega$.

Demonstração: Ver [6].

Proposição 1.56 (Regularidade para o Problema Elíptico) - *Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira Γ limitada. Sejam $f \in L^2(\Omega)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, verificando*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + \int_\Omega u\varphi = \int_\Omega f\varphi, \ \forall \varphi \in H_0^1(\Omega).$$

Então $u \in H^2(\Omega)$ e $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c\|f\|L^2(\Omega)$, onde c é uma constante que só depende de Ω. Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e $f \in H^m(\Omega)$, então $u \in H^{m+2}(\Omega)$ com $\|u\|_{H^{m+2}(\Omega)} \leq c\|f\|_{H^m(\Omega)}$; em particular, se $m > \frac{n}{2}$ então $u \in C^2(\overline{\Omega})$. Ainda, se Ω é de classe C^∞ e $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$, então $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Demonstração: Ver [2].

Lema 1.57 *Sejam V e H espaços de Banach, tais que $V \hookrightarrow H$. Se $u \in L^1(0,T;V)$ e $u' \in L^1(0,T;H)$, então $u \in C([0,T];H)$.*

Demonstração: Ver [24].

1.5 Controlabilidade da Equação da Onda

Nesta seção, enunciaremos os principais resultados da controlabilidade da equação da onda.

Consideremos a equação da onda

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi = g & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi'(0) = \varphi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{1.13}$$

Para este sistema temos os seguintes resultados:

Teorema 1.58 *Seja Ω um donínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de fronteira Γ de classe C^2. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\begin{aligned}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma &\leq c(T+1)\{|\nabla\varphi^0|^2 + |\varphi^1|^2 + \|g\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}\}, \\ &\forall \quad \{\varphi^0, \varphi^1, f\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))\end{aligned} \tag{1.14}$$

onde $\varphi = \varphi(x,t)$ designa a solução do problema (1.13).

Demonstração: Ver [13].

Consideremos $g \equiv 0$ em (1.13), temos os seguintes resultados:

Corolário 1.59 ***(Desigualdade Direta)*** *Seja Ω um donínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de fronteira Γ de classe C^2. Então, existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \leq c(T+1)E_0 \tag{1.15}$$

$\forall\, \varphi$ solução fraca de (1.13).

Demonstração: Ver [13].

Observação 1.60 *De acordo com (1.15) resulta que $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$. Isto é uma propriedade de regularidade das soluções fracas da equação da onda.*

Teorema 1.61 ***(Desigualdade Inversa)*** *Seja Ω um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$ de fronteira Γ de classe C^2. Então para toda solução fraca φ de (1.13) a seguinte desigualdade é verificada*

$$E_0 \leq c \int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma. \tag{1.16}$$

Demonstração: Ver [13].

Teorema 1.62 *Seja $T > 0$. Então para dados $\varphi^0, \varphi^1 \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a solução φ do problema (1.13) satisfaz*

$$\varphi(T) = \varphi'(T) = 0.$$

Demonstração: Ver [13].

Capítulo 2

Controlabilidade Exata na Fronteira: Caso Linear

Consideremos a equação dada em (1) com $f(s) = \alpha s,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \forall\, s \in \mathbb{R}$, isto é, a equação de ondas não homogêneas com potencial constante α

$$\left|\begin{array}{ll} y'' - \Delta y + \alpha y = 0 & \text{em} \quad Q \\ y = v & \text{sobre} \quad \Sigma \\ y(0) = y^0,\ y'(0) = y^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.1}$$

Desejamos resolver o seguinte problema de controlabilidade exata: "Dado $T > 0$, para todo $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a única solução por transposição $y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega))$ do problema (2.1) satisfaz $y(T) = y'(T) = 0$."

Para resolver este problema seguiremos as seguintes etapas:

- Existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o problema homogêneo associado a (2.1).
- Identidade fundamental e desigualdade direta do problema homogêneo.
- Solução por transposição do problema (2.1).
- Método HUM.

2.1 Soluções Fortes e Soluções Fracas

Consideremos o seguinte problema homogêneo:

$$\left| \begin{array}{ll} \phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g & \text{em} \quad Q \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \phi(0) = \phi^0; \; \phi'(0) = \phi^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.2}$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$.

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.1 ***(Existência e Unicidade)*** *Se $\phi^0 \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\phi^1 \in H_0^1(\Omega)$ e $g \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$, existe uma única $\phi : Q \to \mathbb{R}$ tal que*

$$\phi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{2.3}$$

$$\phi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.4}$$

$$\phi'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{2.5}$$

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g \;\; q.s. \;\; em \;\; Q \tag{2.6}$$

$$\phi(0) = \phi^0, \; \phi'(0) = \phi^1. \tag{2.7}$$

Demonstração:

Problema Aproximado

Seja $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e V_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores $w_1, ..., w_m$.

Definamos

$$\phi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

como solução do problema aproximado

$$\left| \begin{array}{l} (\phi_m''(t), w_j) + ((\phi_m(t), w_j)) + \alpha(\phi_m(t), w_j) = (g(t), w_j), \quad \forall\, w_j \in V_m \\ \phi_m(0) = \phi_m^0 \to \phi^0 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \phi_m'(0) = \phi_m^1 \to \phi^1 \quad \text{em} \quad H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.8}$$

A existência local em $[0, t_m]$ é garantido pela teoria de equações diferenciais lineares.

Estimativa I

Multiplicando $(2.8)_1$ por $g'_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m, temos

$$(\phi''_m(t), \phi'_m(t)) + ((\phi_m(t), \phi'_m(t))) + \alpha(\phi_m(t), \phi'_m(t)) = (g(t), \phi'_m(t)) \qquad (2.9)$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\phi'_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\phi_m(t)\|^2 \;=\; (g(t), \phi'_m(t)) - \alpha(\phi_m(t), \phi'_m(t))$$

e estimando a equação acima temos

$$\frac{d}{dt}|\phi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\phi_m(t)\|^2 \leq 2(g(t), \phi'_m(t)) + |\alpha| c \left\{ \|\phi_m(t)\|^2 + |\phi'_m(t)|^2 \right\}. \qquad (2.10)$$

Integrando (2.10) de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned} |\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \;&\leq\; |\phi'_m(0)|^2 + \|\phi_m(0)\|^2 + 2\int_0^t (g(s), \phi'_m(s))ds \\ &+\; |\alpha| c \int_0^t \left\{ \|\phi_m(s)\|^2 + |\phi'_m(s)|^2 \right\} ds. \qquad (2.11) \end{aligned}$$

Observe que

$$2\int_0^t (g(s), \phi'_m(s))ds \leq \|g\|^2_{L^2(Q)} + \int_0^T |\phi'_m(t)|^2 dt.$$

Daí, de (2.11), $(2.8)_2$ e $(2.8)_3$, obtemos a existência de uma constante $c > 0$ tal que

$$|\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \;\leq\; c + \int_0^t \left\{ \|\phi_m(s)\|^2 + |\phi'_m(s)|^2 \right\} ds,$$

usando a Desigualdade de Gronwall nesta última desigualdade, concluímos que

$$|\phi'_m(t)|^2 + \|\phi_m(t)\|^2 \;\leq\; c, \; \forall\, t \in [0, t_m), \; \forall\, m \in \mathbb{N} \qquad (2.12)$$

o que nos permite estender ϕ_m à todo intervalo $[0, T]$.

Além disso,

$$(\phi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \qquad (2.13)$$

$$(\phi'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \qquad (2.14)$$

Estimativa II

Derivando $(2.8)_1$ relativamente a t, obtemos

$$(\phi_m'''(t), w_j) + ((\phi_m'(t), w_j)) + \alpha(\phi_m'(t), w_j) = (g'(t), w_j). \tag{2.15}$$

Multiplicando (2.15) por $g_{jm}''(t)$ e somando em j de 1 a m, temos

$$(\phi_m'''(t), \phi_m''(t)) + ((\phi_m'(t), \phi_m''(t))) + \alpha(\phi_m'(t), \phi_m''(t)) = (g'(t), \phi_m''(t))$$

e como anteriormente temos

$$\frac{d}{dt}|\phi_m''(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\phi_m'(t)\|^2 \leq 2(g'(t), \phi_m''(t)) + |\alpha|c\{\|\phi_m'(t)\|^2 + |\phi_m''(t)|^2\}. \tag{2.16}$$

Integrando (2.16) de 0 a t resulta que

$$\begin{aligned} |\phi_m''(t)|^2 + \|\phi_m'(t)\|^2 &\leq |\phi_m''(0)|^2 + \|\phi_m'(0)\|^2 + 2\int_0^t (g'(s), \phi_m''(s))ds \\ &+ |\alpha|c\int_0^t \left\{\|\phi_m'(s)\|^2 + |\phi_m''(s)|^2\right\} ds. \end{aligned}$$

Como vimos na estimativa I,

$$2\int_0^t (g'(s), \phi_m''(s))ds \leq \|g'\|_{L^2(Q)}^2 + \int_0^T |\phi_m''(t)|^2 dt.$$

Assim temos

$$\begin{aligned} |\phi_m''(t)|^2 + \|\phi_m'(t)\|^2 &\leq |\phi_m''(0)|^2 + \|\phi_m^1\|^2 + \|g'\|_{L^2(Q)}^2 \\ &+ c\int_0^T \left\{\|\phi_m'(t)\|^2 + |\phi_m''(t)|^2\right\} dt. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Para estimarmos $\phi_m''(0)$, façamos $t = 0$ em $(2.8)_1$, multiplicando por $g_{jm}''(0)$ e somando em j de 1 a m, resulta

$$\|\phi_m''(0)\|^2 = \int_\Omega g(0)\phi_m''(0)dx - \int_\Omega \nabla\phi_m(0)\nabla\phi_m''(0)dx - \alpha\int_\Omega \phi_m(0)\phi_m''(0)dx.$$

Aplicando o teorema de Green e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\|\phi_m''(0)\| \leq |g(0)| + |\Delta\phi_m^0| + \alpha|\phi_m^0|. \tag{2.18}$$

Agora, como $g \in W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ temos $|g(0)| \leq c$. De $(2.8)_2$ temos $|\phi_m^0| \leq c$ e $|\Delta \phi_m^0| = \|\phi_m^0\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)} \leq c$. Daí e de (2.18) temos

$$\|\phi_m''(0)\| \quad \leq \quad c. \tag{2.19}$$

Conseqüentemente, de $(2.8)_2$, $(2.8)_3$ e (2.19), obtemos a existência de uma constante $c > 0$ tal que

$$\|\phi_m''(0)\|^2 + \|\phi_m^1\|^2 + \|g'\|_{L^2(Q)} \quad \leq \quad c. \tag{2.20}$$

De (2.17) e (2.20) resulta que

$$|\phi_m''(t)|^2 + \|\phi_m'(t)\|^2 \quad \leq \quad c + \int_0^T \left\{ \|\phi_m'(t)\|^2 + |\phi_m''(t)|^2 \right\} dt$$

usando a desigualdade de Gronwall nesta última desigualdade, concluímos que

$$|\phi_m''(t)|^2 + \|\phi_m'(t)\|^2 \quad \leq \quad c, \quad \forall\, t \in [0,T],\ \forall\, m \in \mathbb{N}. \tag{2.21}$$

Então de (2.21) temos

$$(\phi_m') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \tag{2.22}$$

$$(\phi_m'') \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.23}$$

Passagem ao Limite

Das estimativas feitas em (2.13), (2.22) e (2.23), podemos extrair uma subseqüência $(\phi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(\phi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left| \begin{array}{lll} \phi_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \phi & \in & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \phi_\mu' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi' & \in & L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \phi_\mu'' \overset{*}{\rightharpoonup} \phi'' & \in & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.24}$$

Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\mu > j$. Multipliquemos por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integremos no intervalo $[0,T]$, obteremos

$$\int_0^T (\phi''_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\phi_\mu(t), w_j))\theta(t)dt + \alpha \int_0^T (\phi_\mu(t), w_j)\theta(t)dt =$$

$$\int_0^T (g(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{2.25}$$

Levando em conta as convergências de (2.24) podemos passar ao limite quando $\mu \to \infty$ em (2.25) obtendo

$$\int_0^T (\phi''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\phi(t), w_j))\theta(t)dt + \alpha \int_0^T (\phi(t), w_j)\theta(t)dt =$$

$$= \int_0^T (g(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{2.26}$$

Como as combinações lineares e finitas dos $(w_j's)_{j\in\mathbb{N}}$ são densas em $H_0^1(\Omega)$, então de (2.26) temos

$$\int_0^T (\phi''(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\phi(t), v))\theta(t)dt + \alpha \int_0^T (\phi(t), v)\theta(t)dt =$$

$$= \int_0^T (g(t), v)\theta(t)dt \tag{2.27}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

De (2.27) e após cálculos diretos obtemos:

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g \quad \text{em} \quad L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{2.28}$$

De (2.28) temos

$$\left| \begin{array}{l} -\Delta\phi(t) = g(t) - \phi''(t) - \alpha\phi(t) \text{ em } \Omega \\ \phi(t) = 0 \text{ sobre } \Gamma. \end{array} \right. \tag{2.29}$$

Da regularidade de soluções de problemas elípticos aplicados a (2.29), deduzimos

$$\phi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{2.30}$$

As condições iniciais (2.7) é verificada de maneira usual e a uniciadade é provada facilmente usando o método da energia, assim fica concluída a demonstração do teorema 2.1. $\square$

A função ϕ obtida pelo teorema 2.1 é chamada solução forte do problema homogêneo (2.2).

Teorema 2.2 *Sejam*

$$\phi^0 \in H_0^1(\Omega),\ \phi^1 \in L^2(\Omega)\ e\ g \in L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.31}$$

Então existe uma única $\phi : Q \to \mathbb{R}$ satisfazendo as condições:

$$\phi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.32}$$

$$\frac{d}{dt}(\phi'(t),v) + ((\phi(t),v)) + \alpha(\phi(t),v) = (g(t),v) \tag{2.33}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g\ em\ L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{2.34}$$

$$\phi(0) = \phi^0,\ \phi'(0) = \phi^1 \tag{2.35}$$

$$\frac{1}{2}|\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 = E_0 + \int_0^t (g(s),\phi'(s))ds - \alpha\int_0^t (\phi(s),\phi'(s))ds \tag{2.36}$$

onde $E_0 = \frac{1}{2}|\phi^1|^2 + \frac{1}{2}\|\phi^0\|^2$,

$$|\phi'(t)|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq 2e^{c|\alpha|T}\left[|\phi^1|^2 + \|\phi^0\|^2 + \left(\int_0^t (g(s),\phi'(s))ds\right)^2\right] \tag{2.37}$$

para todo $t \in [0,T]$, com $c > 0$.

Demonstração: Sejam (ϕ_μ^0), (ϕ_μ^1), (g_μ) seqüências de valores de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ respectivamente, tais que:

$$\left|\begin{array}{ll} \phi_\mu^0 \to \phi^0 & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ \phi_\mu^1 \to \phi^1 & \text{em } L^2(\Omega) \\ g_\mu \to g & \text{em } L^1(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.38}$$

Denotemos por ϕ_μ a solução obtida no teorema 2.1 com dados ϕ_μ^0, ϕ_μ^1, g_μ, isto é, ϕ_μ é solução forte do problema:

$$\left|\begin{array}{ll} \phi_\mu'' - \Delta\phi_\mu + \alpha\phi_\mu = g_\mu & \text{em} \quad Q \\ \phi_\mu = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \phi_\mu(0) = \phi_\mu^0;\ \phi_\mu'(0) = \phi_\mu^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{2.39}$$

com ϕ_μ na classe

$$\left|\begin{array}{l}\phi_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \\ \phi'_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \phi''_\mu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).\end{array}\right. \tag{2.40}$$

De (2.40) e pelo Lema 1.57 temos

$$\phi_\mu \in C([0,T];H_0^1(\Omega))\cap C^1([0,T];L^2(\Omega)),$$

e também faz sentido multiplicar $(2.39)_1$ por ϕ'_μ e integrar sobre Ω. Desenvolvendo como na estimativa I da demonstração do teorema 2.1, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}|\phi'_\mu(t)|^2+\frac{1}{2}\|\phi_\mu(t)\|^2\right\} = (g_\mu(t),\phi'_\mu(t))-\alpha(\phi_\mu(t),\phi'_\mu(t)). \tag{2.41}$$

Integrando de 0 a t, obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{d}{ds}\left\{\frac{1}{2}|\phi'_\mu(s)|^2+\frac{1}{2}\|\phi_\mu(s)\|^2\right\}ds &= \int_0^t (g_\mu(s),\phi'_\mu(s))ds \\ &- \alpha\int_0^t(\phi_\mu(s),\phi'_\mu(s))ds.\end{aligned} \tag{2.42}$$

Limitando cada termo do lado direito da igualdade (2.42) obtemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\phi'_\mu(t)|^2+\frac{1}{2}\|\phi_\mu(t)\|^2 &\leq \frac{1}{2}|\phi_\mu^1|^2+\frac{1}{2}\|\phi_\mu^0\|^2+\int_0^t|g_\mu(s)||\phi'_\mu(s)|ds \\ &+ |\alpha|c\int_0^t\|\phi_\mu(s)\||\phi'_\mu(s)|ds \\ &\leq \frac{1}{2}|\phi_\mu^1|^2+\frac{1}{2}\|\phi_\mu^0\|^2+\int_0^t|g_\mu(s)|\sqrt{|\phi'_\mu(s)|^2+\|\phi_\mu(s)\|^2}ds \\ &+ \frac{|\alpha|}{2}c\int_0^t\{\|\phi_\mu(s)\|^2+|\phi'_\mu(s)|^2\}ds.\end{aligned} \tag{2.43}$$

Se definirmos

$$\left|\begin{array}{ll}h^2(t)=|\phi'_\mu(t)|^2+\|\phi_\mu(t)\|^2 & \Rightarrow\quad h(t)=\sqrt{|\phi'_\mu(t)|^2+\|\phi_\mu(t)\|^2} \\ b^2=\frac{1}{4}|\phi_\mu^1|^2+\frac{1}{4}\|\phi_\mu^0\|^2 & \Rightarrow\quad b=\frac{1}{2}\sqrt{|\phi_\mu^1|^2+\|\phi_\mu^0\|^2} \\ m(t)=\frac{1}{2}|g_\mu(t)|+\frac{c}{2}h(t) & \end{array}\right. \tag{2.44}$$

obtemos da desigualdade (2.43)

$$\frac{1}{2}h^2(t)\leq 2b^2+2\int_0^t m(s)h(s)ds.$$

Pelo Lema 1.48 obtemos

$$h(t) \leq 2b + 2\int_0^t m(s)ds. \tag{2.45}$$

Substituindo (2.44) em (2.45) resulta

$$\sqrt{|\phi'_\mu(t)|^2 + \|\phi_\mu(t)\|^2} \leq \sqrt{|\phi_\mu^1|^2 + \|\phi_\mu^0\|^2} + \int_0^T |g_\mu(t)|dt + c\int_0^T \sqrt{|\phi'_\mu(t)|^2 + \|\phi_\mu(t)\|^2}dt.$$

Usando a desigualdade de Gronwall obtemos

$$\sqrt{|\phi'_\mu(t)|^2 + \|\phi_\mu(t)\|^2} \leq \left[\sqrt{|\phi_\mu^1|^2 + \|\phi_\mu^0\|^2} + \int_0^T |g_\mu(t)|dt\right] e^{cT},$$

elevando ao quadrado e levando em conta que $(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2)$ para $a, b > 0$ temos:

$$|\phi'_\mu(t)|^2 + \|\phi_\mu(t)\|^2 \leq 2\left[|\phi_\mu^1|^2 + \|\phi_\mu^0\|^2 + \left(\int_0^T |g_\mu(t)|dt\right)^2\right] e^{2cT}. \tag{2.46}$$

Claramente, se repetirmos os argumentos usados na obtenção (2.46) com $\phi_\mu - \phi_\sigma$ no lugar de ϕ_μ e $g_\mu - g_\sigma$ no lugar de g_μ, obtemos:

$$|\phi'_\mu(t) - \phi'_\sigma(t)|^2 + \|\phi_\mu(t) - \phi_\sigma(t)\|^2 \leq$$

$$\leq 2e^{2cT}\left[|\phi_\mu^1 - \phi_\sigma^1|^2 + \|\phi_\mu^0 - \phi_\sigma^0\|^2 + \left(\int_0^T |g_\mu(t) - g_\sigma(t)|dt\right)^2\right]. \tag{2.47}$$

Tomando o máximo sobre $[0, T]$ em (2.47). Em seguida o limite e considerando as convergências (2.38), determinamos uma função ϕ tal que

$$\left|\begin{array}{l} \phi_\mu \to \phi \text{ em } C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \\ \phi'_\mu \to \phi' \text{ em } C([0,T]; L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{2.48}$$

Claramente de $(2.39)_1$, obtemos

$$\frac{d}{dt}(\phi'_\mu(t), v) + ((\phi_\mu(t), v)) + \alpha(\phi_\mu(t), v) = (g_\mu(t), v) \tag{2.49}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Multiplicando ambos os lados de (2.49) por $\theta \in \mathcal{D}(0, T)$ e integrando por partes obtemos

$$-\int_0^T (\phi_\mu'(t),v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\phi_\mu(t),v))\theta(t)dt + \alpha\int_0^T (\phi_\mu(t),v)\theta(t)dt =$$
$$= \int_0^T (g_\mu(t),v)\theta(t)dt \tag{2.50}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Passando ao limite em (2.50) quando $\mu \to \infty$, levando em conta as convergências (2.48) e $(2.38)_3$, obtemos uma função $\phi : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left| \begin{array}{l} \phi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \\ \dfrac{d}{dt}(\phi'(t),v) + ((\phi(t),v)) + \alpha(\phi(t),v) = (g(t),v) \\ \text{em } \mathcal{D}'(0,T), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega). \end{array} \right. \tag{2.51}$$

Agora provaremos (2.34). De fato, de (2.50) quando $\mu \to \infty$ obtemos:

$$-\int_0^T (\phi'(t),v)\theta'(t)dt - \int_0^T \langle \Delta\phi(t),v\rangle\theta(t)dt + \alpha\int_0^T (\phi(t),v)\theta(t)dt =$$
$$= \int_0^T (g(t),v)\theta(t)dt \tag{2.52}$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$ e $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$. Então definindo

$$h(t) = g(t) + \Delta\phi(t) - \alpha\phi(t) \in H^{-1}(\Omega).$$

Daí e de (2.52), obtemos

$$-\int_0^T \langle \phi'(t),v\rangle\theta'(t)dt = \int_0^T \langle h(t),v\rangle\theta(t)dt.$$

Assim temos

$$\left\langle -\int_0^T \phi'(t)\theta'(t)dt, v \right\rangle = \left\langle \int_0^T h(t)\theta(t)dt, v \right\rangle \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega).$$

Resultando

$$-\int_0^T \phi'(t)\theta'(t)dt = \int_0^T h(t)\theta(t)dt. \tag{2.53}$$

De $(2.51)_1$ segue-se $\phi', h \in L^1(0,T;H^{-1}(\Omega))$ e satisfaz (2.53). Então por Teman [27] pág. 250, obtemos que:

$$\phi'(t) = \zeta + \int_0^t h(s)ds, \quad \zeta \in H^{-1}(\Omega) \text{ constante}, \tag{2.54}$$

de onde

$$\phi' \in C([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \tag{2.55}$$

De (2.54) obtemos

$$\langle \phi'', \theta \rangle = \langle h, \theta \rangle \quad \forall\, \theta \in \mathcal{D}(0,T)$$

que implica

$$\phi'' = h \text{ em } L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)),$$

isto é,

$$\phi'' \in L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Daí resulta que

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g \text{ em } L^1(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Para verificar as condições iniciais basta usar as convergências $(2.38)_1$, $(2.38)_2$ e (2.48) e a unicidade do limite para obtermos

$$\phi(0) = \phi^0, \;\; \phi'(0) = \phi^1. \tag{2.56}$$

Para a demonstração de (2.36) e (2.37) basta passar ao limite quando $\mu \to \infty$ em (2.42) e (2.46) respectivamente.

A unicidade é provada usando o método dado por Visik, M.I. - Ladyzenskaja, O.A. [28]. Assim fica provado o teorema 2.2. $\square$

A função ϕ obtida pelo teorema 2.2 é chamada solução fraca do problema homogêneo (2.2).

Observação 2.3 *Da desigualdade (2.37) do teorema 2.2 obtém-se que a aplicação que a aplicação linear*

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T; L^2(\Omega)) & \to & C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)) \\ \{\phi^0, \phi^1, g\} & \mapsto & \phi \end{array}$$

é contínua, sendo ϕ a solução fraca do problema homogêneo (2.2).

Agora consideremos um problema homogêneo que será usado no estudo da regularidade para a solução y do problema (2.1). Isto é,

$$\left| \begin{array}{lll} \phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g' & \text{em} & Q \\ \phi = 0 & \text{sobre} & \Sigma \\ \phi(0) = 0;\ \phi'(0) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{2.57}$$

Se $g' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, a solução fraca ϕ do problema (2.57) satisfaz as propriedades (2.32)-(2.37) do teorema 2.2. De (2.32) temos

$$\phi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \Rightarrow \Delta\phi \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$$

e do fato de $g' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;H^{-1}(\Omega))$ temos

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g' \text{ em } L^2(0,T;H^{-1}(\Omega)). \tag{2.58}$$

Temos o seguinte resultado:

Teorema 2.4 *Sejam*

$$g \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega));\ g' \in L^2(0,T;L^2(\Omega)),\ g(0) = 0.$$

Então a solução fraca ϕ do problema (2.57) satisfaz

$$|\phi'(t) - g(t)| + \|\phi(t)\| \ \leq \ c\int_0^T \|g(t)\|dt,\ \forall\, t \in [0,T], \tag{2.59}$$

onde c é uma constante independente de ϕ e g.

Demonstração: A igualdade (2.36) do teorema 2.2 aplicada ao problema (2.57) nos permite obter

$$\frac{1}{2}|\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 = \int_0^t (g'(s),\phi'(s))ds - \alpha\int_0^t (\phi(s),\phi'(s))ds. \tag{2.60}$$

Agora vamos estimar o primeiro termo do lado direito de (2.60). Observe que

$$\frac{d}{ds}(g(s),\phi'(s)) = (g'(s),\phi'(s)) + \langle g(s),\phi''(s)\rangle$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade de $H_0^1(\Omega)$ e $H^{-1}(\Omega)$. Integrando de 0 a t a igualdade acima temos

$$\int_0^t (g'(s), \phi'(s))ds = (g(t), \phi'(t)) - \int_0^t \langle g(s), \phi''(s) \rangle ds. \tag{2.61}$$

De (2.58) temos $\phi'' = g' + \Delta\phi - \alpha\phi$. Substituindo em (2.61) resulta

$$\begin{aligned} \int_0^t (g'(s), \phi'(s))ds = (g(t), \phi'(t)) - \int_0^t (g(s), g'(s))ds \\ - \int_0^t \langle g(s), \Delta\phi(s) \rangle ds + \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds. \end{aligned} \tag{2.62}$$

Integrando por partes o segundo termo da direita da igualdade, temos

$$\int_0^t (g(s), g'(s))ds = (g(s), g(s))|_0^t - \int_0^t (g'(s), g(s))ds.$$

Como $g(0) = 0$, obtemos

$$\int_0^t (g(s), g'(s))ds = \frac{1}{2}(g(t), g(t)). \tag{2.63}$$

Substituindo (2.63) em (2.62) temos

$$\begin{aligned} \int_0^t (g'(s), \phi'(s))ds &= (g(t), \phi'(t)) - \frac{1}{2}(g(t), g(t)) - \int_0^t \langle g(s), \Delta\phi(s) \rangle ds \\ &+ \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds. \end{aligned} \tag{2.64}$$

De (2.64) e (2.60) temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\phi'(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 &= (g(t), \phi'(t)) - \frac{1}{2}|g(t)|^2 - \int_0^t \langle g(s), \Delta\phi(s) \rangle ds \\ &+ \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds - \alpha \int_0^t (\phi(s), \phi'(s))ds. \end{aligned} \tag{2.65}$$

Resultando

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|\phi'(t) - g(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 &= - \int_0^t \langle g(s), \Delta\phi(s) \rangle ds + \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds \\ &- \alpha \int_0^t (\phi(s), \phi'(s))ds. \end{aligned} \tag{2.66}$$

Fazendo $\theta = \phi' - g$ em (2.66) e substituindo ϕ' por $g+\theta$ nesta igualdade, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 &= -\int_0^t \langle g(s), \Delta\phi(s)\rangle ds + \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds \\
&- \alpha \int_0^t (\phi(s), \theta(s))ds - \alpha \int_0^t (\phi(s), g(s))ds, \qquad (2.67)
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 &= \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds + \alpha \int_0^t ((g(s), \phi(s)))ds \\
&- \alpha \int_0^t (\phi(s), \theta(s))ds - \alpha \int_0^t (\phi(s), g(s))ds. \qquad (2.68)
\end{aligned}$$

Estimando os termos do lado direito de (2.68) obtemos

$$\frac{1}{2}|\theta(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi(t)\|^2 \leq c\int_0^t \|g(s)\|\|\phi(s)\|ds + \frac{|\alpha|c}{2}\int_0^t \left\{\|\phi(s)\|^2 + |\theta(s)|^2\right\} ds \quad (2.69)$$

onde c é uma constante intependente de ϕ e g.

Da desigualdade (2.69) obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(|\theta(t)| + \|\phi(t)\|)^2 &\leq 2c\int_0^t \|g(s)\|\|\phi(s)\|ds + |\alpha|c\int_0^t (\|\phi(s)\| + |\theta(s)|)^2 ds \\
&\leq c\int_0^t \|g(s)\| \left[\|\phi(s)\| + |\theta(s)|\right] ds + c\int_0^t (\|\phi(s)\| + |\theta(s)|)^2 ds.
\end{aligned}$$

Se pusermos

$$h(t) = \|\phi(s)\| + |\theta(s)|$$

obtemos da desigualdade acima

$$\frac{1}{2}h^2(t) \leq 2\int_0^t (ch(s) + c\|g(s)\|)h(s)ds.$$

Usando o Lema 1.48 temos

$$h(t) \leq 2c\int_0^t h(s)ds + 2c\int_0^t \|g(s)\|ds.$$

Aplicando a desigualdade de Gronwall resulta:

$$h(t) \leq c\int_0^T \|g(s)\|ds.$$

Da desigualdade anterior, substituindo-se $h(t)$ e $\theta(t)$ por suas definições, encontra-se a estimativa (2.59). $\square$

2.2 Identidade Fundamental e Desigualdade Direta

Nesta seção provaremos pelo método dos multiplicadores, que a derivada normal $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu}$ é limitada na norma de $L^2(\Sigma)$, com ϕ solução fraca do problema (2.2).

Primeiramente, temos o seguinte resultado:

Lema 2.5 *Seja $(q_\ell)_{1\leq \ell \leq n}$ um campo de vetores tal que $q_\ell \in C^1(\overline{\Omega})$ para $1 \leq \ell \leq n$. Então cada solução forte ϕ do problema (2.2) verifica:*

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell \nu_\ell \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma = \left(\phi', q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}[|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2]dxdt$$
$$+\alpha \int_Q \phi\, q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} dxdt + \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q g\, q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt. \tag{2.70}$$

Além disso temos

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \;\leq\; c\left[E_0 + \left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right], \tag{2.71}$$

onde c é uma constante independente de ϕ e E_0 é a energia inicial associada à solução forte ϕ de (2.2).

Demonstração: Para provar a identidade (2.70), notemos que $q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell} \in L^2(Q)$. Assim, multiplicando ambos os lados da igualdade (2.6) do teorema 2.1 por $q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}$ e integrando sobre Q, obtemos:

$$\int_Q \phi'' q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q \Delta \phi q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt + \alpha \int_Q \phi q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt = \int_Q g q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt. \tag{2.72}$$

Como ϕ e q_ℓ são suficientemente regulares, para o primeiro termo de (2.72), podemos usar integração por partes em t, aplicar o teorema de Green e notando que $\phi'(t) \in H_0^1(\Omega)$, obtemos:

$$\int_Q \phi'' q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt \;=\; \left(\phi', q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}(\phi')^2 dxdt. \tag{2.73}$$

Utilizando o teorema de Green e derivadas do produto obtemos para o segundo termo de (2.72)

$$\begin{aligned}\int_Q \Delta\phi q_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt &= -\int_Q \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q \frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j x_\ell}dxdt \\ &\quad + \int_\Sigma \frac{\partial\phi}{\partial\nu}q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.74}$$

E além disso,

$$\begin{aligned}\int_Q \frac{\partial\phi}{\partial x_j}q_\ell\frac{\partial^2\phi}{\partial x_j x_\ell}dxdt &= \frac{1}{2}\int_Q q_\ell\frac{\partial}{\partial x_\ell}|\nabla\phi|^2dxdt \\ &= -\frac{1}{2}\int_Q \frac{q_\ell}{\partial x_\ell}|\nabla\phi|^2dxdt + \frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell|\nabla\phi|^2\nu_\ell d\Sigma \end{aligned} \tag{2.75}$$

Agora devido ao Lema 1.50 temos que

$$\frac{\partial\phi}{x_\ell} = \nu_\ell\frac{\partial\phi}{\partial\nu},\ \ell = 1,\cdots,n \tag{2.76}$$

e ainda

$$|\nabla\phi|^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2. \tag{2.77}$$

Assim, de (2.74) a (2.77) obtemos

$$\begin{aligned}\int_Q \Delta\phi q_\ell\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt &= -\int_Q \frac{\partial\phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}|\nabla\phi|^2dxdt \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell\nu_\ell\left(\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right)^2 d\Sigma. \end{aligned} \tag{2.78}$$

Substituindo (2.73), (2.78) em (2.72) obtemos o desejado em (2.70).

Agora provaremos a desigualdade (2.71). A estimativa (2.37) do teorema 2.2 nos fornece a seguinte estimativa:

$$|\phi'(t)|^2 + \|\phi(t)\|^2 \leq cE_0 + c\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2 \quad \forall\, t\in[0,T],\ c>0. \tag{2.79}$$

Consideremos a identidade (2.70) com $q_\ell = \nu_\ell$ sobre Γ (vide Lema 1.49). Observemos que, usando a estimativa (2.79), as integrais sobre Ω de (2.70) podem ser limitadas por

$$c\left[E_0 + \left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right],$$

as integrais sobre Q por

$$cT\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]$$

e a integral $\displaystyle\int_Q gq_\ell \frac{\partial\phi}{\partial x_\ell}dxdt$ por

$$cE_0^{1/2}\int_0^T |g(t)|dt + c\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2.$$

Combinando as estimativas acima e (2.70) com $q_\ell=\nu_\ell$ sobre Γ resulta

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Sigma \nu_\ell^2\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \;\;\leq\;\; & c\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]+cT\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]\\ & +cE_0^{1/2}\int_0^T |g(t)|dt + c\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2,\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_\Sigma \nu_\ell^2\left|\frac{\partial\phi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \;\;\leq\;\; & cT\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]+cE_0^{1/2}\int_0^T |g(t)|dt\\ \leq\;\; & cT\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]+\frac{c}{2}\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right]\\ \leq\;\; & c\left[E_0+\left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right],\end{aligned}$$

o que prova (2.71). □

Consideremos agora $\{\phi^0,\phi^1,g\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(0,T;L^2(\Omega))$. Como $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ é denso em $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\times L^1(0,T;L^2(\Omega))$, existe $\{\phi_\mu^0,\phi_\mu^1,g_\mu\}\in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\times W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\left|\begin{array}{l}\phi_\mu^0\to\phi^0 \text{ em } H_0^1(\Omega)\\ \phi_\mu^1\to\phi^1 \text{ em } L^2(\Omega)\\ g_\mu\to g \text{ em } L^1(0,T;L^2(\Omega)).\end{array}\right. \tag{2.80}$$

Agora, seja ϕ_μ e ϕ_σ soluções fortes de (2.2), assim $\phi_\mu-\phi_\sigma$ é solução forte de (2.2), logo satisfaz a desiguadade (2.46) do teorema 2.2 e a desigualdade (2.71) do Lema 2.5, isto é,

$$
\begin{aligned}
&|\phi'_\mu(t) - \phi'_\sigma(t)|^2 + \|\phi_\mu(t) - \phi_\sigma(t)\|^2 \\
&\leq c \left[|\phi^1_\mu - \phi^1_\sigma|^2 + \|\phi^0_\mu - \phi^0_\sigma\|^2 + \left(\int_0^T |g_\mu(s) - g_\sigma(s)| ds \right)^2 \right]
\end{aligned} \tag{2.81}
$$

e

$$
\left\| \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial \nu} \right\|^2 \leq c \left[|\phi^1_\mu - \phi^1_\sigma|^2 + \|\phi^0_\mu - \phi^0_\sigma\|^2 + \left(\int_0^T |g_\mu(s) - g_\sigma(s)| ds \right)^2 \right]. \tag{2.82}
$$

Somando (2.81) e (2.82) temos

$$
\begin{aligned}
&|\phi'_\mu(t) - \phi'_\sigma(t)|^2 + \|\phi_\mu(t) - \phi_\sigma(t)\|^2 + \left\| \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial \phi_\sigma}{\partial \nu} \right\|^2 \\
&\leq c \left[|\phi^1_\mu - \phi^1_\sigma|^2 + \|\phi^0_\mu - \phi^0_\sigma\|^2 + \left(\int_0^T |g_\mu(s) - g_\sigma(s)| ds \right)^2 \right].
\end{aligned}
$$

Tomando $\sup\limits_{0 \leq t \leq T}$ na desigualdade acima e levando em conta as convergências em (2.80) temos

$$
\begin{gathered}
\phi_\mu \text{ é de Cauchy em } C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \\
\phi'_\mu \text{ é de Cauchy em } C([0,T]; L^2(\Omega)) \\
\frac{\phi_\mu}{\partial \nu} \text{ é de Cauchy em } L^2(\Sigma).
\end{gathered}
$$

Assim resulta que

$$
\left| \begin{array}{ll}
\phi_\mu \to \phi & \text{em } C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \\
\phi'_\mu \to \phi' & \text{em } C([0,T]; L^2(\Omega)) \\
\dfrac{\partial \phi_\mu}{\partial \nu} \to \chi & \text{em } L^2(\Sigma).
\end{array} \right. \tag{2.83}
$$

Vamos mostrar em que sentido

$$
\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \chi.
$$

Para isso, consideremos seguintes problemas elípticos:

$$
\left| \begin{array}{ll}
-\Delta p = g(t) & \text{em } \Omega \\
p = 0 & \text{em } \Gamma
\end{array} \right. \quad \text{e} \quad \left| \begin{array}{ll}
-\Delta q = \phi'(t) + \alpha \int_0^t \phi(s) ds & \text{em } \Omega \\
q = 0 & \text{em } \Gamma.
\end{array} \right. \tag{2.84}
$$

Então, para quase todo $t \in]0,T[$, face aos resultados de regularidade dos problemas elípticos, existem únicos

$$p(t),\, q(t) \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$

solução de (2.84).

Além disso, como:

$$\int_0^T |-\Delta p(t)|_{L^2(\Omega)} dt = \int_0^T |g(t)|_{L^2(\Omega)} dt < +\infty,$$

$$\int_0^T |-\Delta q(t)|_{L^2(\Omega)} dt \leq \int_0^T \left\{ |\phi'(t)|_{L^2(\Omega)} + \alpha \left| \int_0^t \phi(s) ds \right|_{L^2(\Omega)} \right\} dt < +\infty$$

e do fato que $|-\Delta \cdot|_{L^2(\Omega)}$ é uma topologia equivalente a do $H^2(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, concluímos que

$$p \in L^1(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \quad \text{e} \quad q \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{2.85}$$

Afirmamos que:

$$\phi = p - q' \text{ em } L^1(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) + H^{-1}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{2.86}$$

Com efeito, como ϕ é solução fraca de (2.2) então

$$\phi'' - \Delta\phi + \alpha\phi = g \;\text{ em }\; L^1(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

donde

$$-\Delta\phi = g - \phi'' - \alpha\phi \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T; H^{-1}(\Omega))$$

e de (2.84) vem que

$$-\Delta\phi = -\Delta p - (-\Delta q)' \;\text{ em }\; \mathcal{D}'(0,T; H^{-1}(\Omega)).$$

Tomando-se $\varphi \in \mathcal{D}(0,T)$ podemos escrever:

$$\langle -\Delta\phi, \varphi \rangle = \langle -\Delta p, \varphi \rangle + \langle -\Delta q, \varphi' \rangle \;\text{ em }\; H^{-1}(\Omega)$$

ou ainda,

$$\int_0^T -\Delta\phi\, \varphi\, dt = \int_0^T -\Delta p\, \varphi\, dt + \int_0^T -\Delta q\, \varphi'\, dt \;\text{ em }\; H^{-1}(\Omega).$$

Agora, lembrando-se que $-\Delta \in \mathcal{L}(H_0^1(\Omega), H^{-1}(\Omega))$, resulta que:

$$-\Delta\left(\int_0^T \phi\,\varphi\,dt\right) = -\Delta\left(\int_0^T p\,\varphi\,dt + \int_0^T q\,\varphi'\,dt\right).$$

Segue-se daí e do fato que $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ é uma isometria, e portanto bijetivo, que

$$\int_0^T \phi\,\varphi\,dt = \int_0^T p\,\varphi\,dt + \int_0^T q\,\varphi'\,dt \ \text{ em } \ H^{-1}(\Omega).$$

Como o lado direito da igualdade acima pertence à $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ obtemos:

$$\langle \phi, \varphi \rangle = \langle p, \varphi \rangle + \langle q, \varphi' \rangle \ \text{ em } \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \ \forall\, \varphi \in \mathcal{D}(0,T).$$

Portanto

$$\phi = p - q' \text{ em } \mathcal{D}'(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{2.87}$$

Por outro lado, identificando $L^2(0,T; H^2(\Omega))$ com o seu dual, temos a cadeia:

$$H_0^1(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T; H^2(\Omega)) \hookrightarrow H^{-1}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Como $q \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ então pela proposição 1.20, resulta que

$$q' \in H^{-1}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Logo de (2.85) e (2.87) obtemos o desejado em (2.86).

Analogamente, para cada ν, se pusermos

$$\left|\begin{array}{ll} -\Delta p_\nu = g_\nu(t) & \text{em } \Omega \\ p_\nu = 0 & \text{em } \Gamma \end{array}\right. \quad \text{e} \quad \left|\begin{array}{ll} -\Delta q_\nu = \phi_\nu'(t) + \alpha \int_0^t \phi_\nu(s)ds & \text{em } \Omega \\ q_\nu = 0 & \text{em } \Gamma \end{array}\right. \tag{2.88}$$

então as únicas soluções p_ν e q_ν dos problemas acima estão nas classes

$$p_\nu \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \ \text{ e } \ q_\nu \in L^2(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)).$$

Além disso,

$$\phi_\nu = p_\nu - q_\nu' \text{ em } H^{-1}(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{2.89}$$

Notemos que de (2.84), (2.88) e do fato que em $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ as topologias de $\|u\|_{H^2(\Omega)}$ e $|\Delta u|_{L^2(\Omega)}$ são equivalentes, temos:

$$\begin{aligned}\|p_\nu - p\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))} &= \int_0^T \|p_\nu(t)-p(t)\|_{H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)}dt\\ &\leq \int_0^T |-\Delta p_\nu(t) - (-\Delta p(t))|_{L^2(\Omega)}dt\\ &\leq \int_0^T |g_\nu(t)-g(t))|_{L^2(\Omega)}dt \to 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$p_\nu \to p \quad \text{em} \quad L^1(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{2.90}$$

Analogamente, temos

$$q_\nu \to q \quad \text{em} \quad L^2(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \tag{2.91}$$

e pela proposição 1.20 vem que:

$$q'_\nu \to q' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)). \tag{2.92}$$

Sendo

$$\overline{\gamma}_1 : L^2(0,T;H^2(\Omega)) \to L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$$

a aplicação traço da derivada normal, e como $L^2(0,T;H^2(\Omega))$ é denso em $L^1(0,T;H^2(\Omega))$ podemos estender $\overline{\gamma}_1$ à

$$\widetilde{\overline{\gamma}}_1 : L^1(0,T;H^2(\Omega)) \to L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)),$$

onde $\widetilde{\overline{\gamma}}_1(u) = \overline{\gamma}_1(u)\ \forall\, u \in L^2(0,T;H^2(\Omega))$.

Temos ainda

$$\widetilde{\gamma}_1 : H^{-1}(0,T;H^2(\Omega)) \to H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)).$$

Daí e das convergências (2.90) e (2.92) resulta que

$$\widetilde{\overline{\gamma}}_1 p_\nu \to \widetilde{\overline{\gamma}}_1 p \quad \text{em} \quad L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \tag{2.93}$$

e

$$\widetilde{\widetilde{\gamma}}_1 q'_\nu \to \widetilde{\widetilde{\gamma}}_1 q' \quad \text{em} \quad H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)). \tag{2.94}$$

Definímos:

$$\gamma_1^*(\phi) = \widetilde{\widetilde{\gamma}}_1(p) - \widetilde{\gamma}_1(q') \tag{2.95}$$

onde ϕ é a única solução fraca de (2.2) e, p e q são as únicas soluções de (2.84).

Logo

$$\gamma_1^*(\phi_\nu) = \widetilde{\widetilde{\gamma}}_1(p_\nu) - \widetilde{\gamma}_1(q'_\nu) = \widetilde{\gamma}_1(p_\nu) - \widetilde{\gamma}_1(q'_\nu) = \widetilde{\gamma}_1^*(\phi_\nu) = \overline{\gamma}_1^*(\phi_\nu) \tag{2.96}$$

onde a última igualdade resulta do fato que em $L^2(0,T;H^2(\Omega))$, $\widetilde{\gamma}_1$ e $\overline{\gamma}_1$ coincidem.

Considerando-se

$$B_1 = L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \ \text{ e } \ B_2 = H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$$

então $B_1 + B_2$ é um espaço de Banach com respeito a norma:

$$\|u\|_{B_1+B_2} = \inf\{\|u_1\|_{B_1} + \|u_2\|_{B_2};\ u_1 \in B_1, u_2 \in B_2 \text{ e } u = u_1 + u_2\}.$$

Notemos que de (2.95) e (2.96) obtemos:

$$\gamma_1^*(\phi) \in L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) + H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma))$$

e

$$\gamma_1^*(\phi_\nu) \in L^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)).$$

Além do mais, em virtude das convergências (2.93) e (2.94), obtemos:

$$\gamma_1^*(\phi_\nu) \to \gamma_1^*(\phi) \quad \text{em} \quad L^1(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) + H^{-1}(0,T;H^{1/2}(\Gamma)). \tag{2.97}$$

Desta forma, de (2.97) resulta que

$$\gamma_1^*(\phi_\nu) \to \gamma_1^*(\phi) \text{ em } \mathcal{D}'(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Gamma)).$$

Definindo-se

$$\overline{\gamma}_1(\phi_\nu) = \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \nu}$$

tem-se de $(2.83)_3$

$$\overline{\gamma}_1(\phi_\nu) \to \chi \text{ em } L^2(0,T;L^2(\Gamma)) \hookrightarrow \mathcal{D}'(0,T;L^2(\Gamma)).$$

Como de (2.96) temos $\gamma_1^*(\phi_\nu) = \overline{\gamma}_1(\phi_\nu)$, então das convergências acima e pela unicidade do limite em $\mathcal{D}'(0,T;L^2(\Gamma))$ resulta que:

$$\chi = \gamma_1^*(\phi).$$

Por abuso de notação, escrevemos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = \gamma_1^*(\phi)$$

mostrando o que queríamos.

Agora estamos em condições de obter a identidade (2.70) e a desigualdade (2.71) para soluções fracas ϕ de (2.2).

Teorema 2.6 *Nas condições do Lema 2.5, cada solução fraca ϕ do problema (2.2) verifica:*

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell \nu_\ell \left|\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma = \left(\phi', q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}\right)\Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}[|\phi'|^2 - |\nabla \phi|^2]dxdt$$
$$+\alpha \int_Q \phi\, q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt + \int_Q \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt - \int_Q g\, q_\ell \frac{\partial \phi}{\partial x_\ell}dxdt. \tag{2.98}$$

Além disso temos

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$$

e

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \ \leq \ c\left[E_0 + \left(\int_0^T |g(t)|dt\right)^2\right] \tag{2.99}$$

onde c é uma constante independente de ϕ e E_0 é a energia inicial associada à solução fraca ϕ de (2.2).

Demonstração: Sendo ϕ a solução fraca associada aos dados $\{\phi^0, \phi^1, g\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega))$, usando densidade, podemos aproximar por dados regulares

$$\{\phi_\mu^0, \phi_\mu^1, g_\mu\} \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$$

com

$$\{\phi^0_\mu, \phi^1_\mu, g_\mu\} \to \{\phi^0, \phi^1, g\} \text{ em } H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Denotamos por ϕ_μ as soluções fortes para os dados $\{\phi^0_\mu, \phi^1_\mu, g_\mu\}$. Pelo Lema 2.5, vale a identidade (2.98) para ϕ_μ. Lembrando a observação 2.3 e por continuidade, após o limite quando $\mu \to \infty$

$$\phi_\mu \to \phi \text{ em } C([0,T]; H^1_0(\Omega))$$

$$\phi'_\mu \to \phi' \text{ em } C([0,T]; L^2(\Omega))$$

teremos a validade do segundo membro de (2.98) para ϕ, e usando $(2.83)_3$ o primeiro membro de (2.98) também é válido para ϕ. Assim fica demonstrado a identidade (2.98) para soluções fracas ϕ de (2.2).

Para provar que $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ e (2.99), definímos a energia associada a ϕ_μ por

$$E_\mu(t) = \frac{1}{2}|\phi'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\phi'_\mu(t)\|^2.$$

Claramente temos

$$E_\mu(0) \quad \to \quad E_0 \tag{2.100}$$

onde E_0 é a energia inicial associada a ϕ. Da desigualdade (2.71) do Lema 2.5, temos:

$$\int_\Sigma \left(\frac{\partial \phi_\mu}{\partial \nu}\right)^2 d\Sigma \leq c \left[E_\mu(0) + \left(\int_0^T |g\mu(t)|dt\right)^2\right].$$

Passando ao limite quando $\mu \to \infty$ na desigualdade acima e usando as convergências $(2.83)_3$, (2.100) e $g_\mu \to g$ em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ obtemos $\dfrac{\partial \phi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma)$ e a desigualdade (2.99). Assim conclui-se a demonstração do teorema 2.6. □

2.3 Solução por Transposição

Nesta seção estamos interessados no estudo do problema não homogêneo (2.1), quando y^0, y^1 não são regulares. Para tal estudo, introduzimos o conceito de solução definida por transposição (ver [15]).

Primeiramente motivaremos a definição e, depois, veremos a regularidade destas soluções.

No que se segue procederemos formalmente. De fato, multiplicando-se $(2.1)_1$ por uma função φ conveniente e integrando sobre Q, temos:

$$\int_Q y''\varphi\,dxdt - \int_Q \Delta y\varphi\,dxdt + \int_Q \alpha y\varphi\,dxdt = 0. \tag{2.101}$$

Integrando-se por partes em t e aplicando-se a fórmula de Green duas vezes resulta:

$$\int_Q (\varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi)y\,dxdt = -\int_\Omega y'(T)\varphi(T)\,dx + \int_\Omega y'(0)\varphi(0)\,dx$$

$$+\int_\Omega y(T)\varphi'(T)\,dx - \int_\Omega y(0)\varphi'(0)\,dx - \int_\Sigma y\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}d\Sigma + \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial\nu}\varphi d\Sigma.$$

Como não temos informações sobre $y'(T)$, $y(T)$ e $\dfrac{\partial y}{\partial\nu}$, escolhemos φ tal que

$$\varphi(T) = \varphi'(T) = 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \varphi = 0 \text{ sobre } \Sigma. \tag{2.102}$$

De $(2.1)_2$, $(2.1)_3$ e (2.102) obtemos

$$\int_Q (\varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi)ydxdt = \int_\Omega y^1\varphi(0)dx - \int_\Omega y^0\varphi'(0)dx - \int_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}v d\Sigma \tag{2.103}$$

onde φ é solução de

$$\left|\begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = g & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{2.104}$$

Devido a reversão de tempo, temos que os resultados anteriores para o sistema (2.2) valem para (2.104). Assim, temos que a única solução φ de (2.104) com $g \in L^1(0,T;L^2(\Omega))$ verifica

$$\varphi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)), \tag{2.105}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma) \tag{2.106}$$

e

$$|\varphi'(t)|^2 + \|\varphi(t)\|^2 \leq c\|g\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \tag{2.107}$$

onde $c > 0$.

Temos também pelo teorema 2.6 que a solução fraca φ do problema (2.104) verifica

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|^2_{L^2(\Sigma)} \leq c \|g\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.108}$$

Consideremos agora

$$\{y^0, y^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma). \tag{2.109}$$

Resulta daí e de (2.105) que a expressão dada em (2.103) assume a forma

$$\int_Q g\, y\, dx\, dt \;=\; \langle y^1, \varphi(0) \rangle - (y^0, \varphi'(0)) - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v d\Sigma \tag{2.110}$$

onde φ é a única solução de (2.104) na classe (2.105).

Inspirados na expressão dada em (2.110) definímos

$$\begin{array}{rlcl} S: & L^1(0,T;L^2(\Omega)) & \to & \mathbb{R} \\ & g & \mapsto & \langle S, g \rangle \end{array}$$

pondo

$$\langle S, g \rangle \;=\; -(y^0, \varphi'(0)) + \langle y^1, \varphi(0) \rangle - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v d\Sigma \tag{2.111}$$

com φ única solução de (2.104) na classe (2.105).

Tem-se de (2.107) e (2.108)

$$\begin{aligned} |\langle S, g \rangle| &\leq |y^0||\varphi'(0)| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} \|\varphi(0)\|_{H_0^1(\Omega)} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \|v\|_{L^2(\Sigma)} \\ &\leq c\{|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\} \|g\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Então

$$S \in \left(L^1(0,T;L^2(\Omega))\right)' \tag{2.112}$$

e

$$\|S\|_{[L^1(0,T;L^2(\Omega))]'} \leq c\{|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\}. \tag{2.113}$$

Por outro lado, em virtude do Teorema da Representação de Riesz podemos identificar S à um único elemento $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ de modo que

$$\left| \begin{array}{l} \langle S, g\rangle = \displaystyle\int_0^T (y(t), g(t))dt \\ \|S\|_{[L^1(0,T;L^2(\Omega))]'} = \|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}. \end{array} \right. \tag{2.114}$$

Do exposto acima diremos que y é uma **solução por transposição** do problema (2.1) se $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e verifica a identidade (2.110). Ora de (2.114) vem que a função $y \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ obtida pelo Teorema da Representação de Riesz é solução por transposição de (2.1). Além disso, de (2.113) e (2.114) temos também que:

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c\{|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}\}. \tag{2.115}$$

Observe que esta solução é única. De fato, suponhamos y, w soluções por transposição do problema (2.1). Então y, w satisfazem:

$$\int_Q g\, y\, dx\, dt = \langle y^1, \varphi(0)\rangle - (y^0, \varphi'(0)) - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v d\Sigma \tag{2.116}$$

$$\int_Q g\, w\, dx\, dt = \langle y^1, \varphi(0)\rangle - (y^0, \varphi'(0)) - \int_\Sigma \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} v d\Sigma \tag{2.117}$$

Logo subtraíndo (2.117) de (2.116) obtemos

$$\int_0^T \int_\Omega (y-w) g\, dx\, dt = 0 \;\forall\; g \in L^1(0,T;L^2(\Omega)),$$

em particular,

$$\int_0^T \int_\Omega (y-w) g\, dx\, dt = 0 \;\forall\; g \in C_0^\infty(\Omega \times (0,T))$$

o qual pelo lema de Du Boys Raymund temos que $y - w = 0$ e portanto $y = w$.

Obtivemos assim os seguintes resultados:

Teorema 2.7 *Existe uma única solução y, por transposição, do problema (2.1) verificando a desigualdade em (2.115).*

Corolário 2.8 *A aplicação linear*

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) & \rightarrow & L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \\ \{y^0, y^1, v\} & \mapsto & y \end{array}$$

onde y é solução por transposição de (2.1), é contínua.

A seguir provaremos um resultado que usaremos para demonstrar a regularidade da solução por transposição do problema não homogêneo (2.1).

Seja $g \in \mathcal{D}(Q)$, $\mathcal{D}(Q)$ espaço das funções testes sobre Q, e φ a solução fraca do problema

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = g' & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(0) = \varphi'(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.118}$$

Do teorema 2.4 temos

$$|\varphi'(t) - g(t)| + \|\varphi(t)\| \leq c\|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \; \forall\, t \in [0,T] \tag{2.119}$$

onde c é uma constante independente de φ e g. Em virtude do teorema 2.6, $\frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \in L^2(\Sigma)$.

Lema 2.9 *Nas hipóteses do teorema 2.7, toda solução fraca φ de (2.118) verifica*

$$\left\| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c \int_0^T \|g(t)\| dt$$

onde c é uma constante independente de φ e g.

Demonstração: Lembrando a identidade (2.98) do teorema 2.6 para a solução fraca φ do problema (2.118), verifica-se:

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell \nu_\ell \left| \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right|^2 d\Sigma = \left(\varphi', q_\ell \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} \right) \Bigg|_0^T + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \left[|\varphi'|^2 - |\nabla\varphi|^2 \right] dxdt$$

$$+\alpha \int_Q \varphi q_\ell \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} dxdt + \int_Q \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial q_\ell}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} dxdt - \int_Q g' q_\ell \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} dxdt. \tag{2.120}$$

Sendo $g \in \mathcal{D}(Q)$ temos $g(T) = 0$. Considerando $t = T$ na estimativa (2.119) obtemos

$$|\varphi'(T)| + \|\varphi(T)\| \leq c \int_0^T \|g(t)\| dt. \tag{2.121}$$

Como $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$ então

$$\begin{aligned} \left(\varphi', q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T &= \left(\varphi'(T), q_\ell \frac{\partial \varphi(T)}{\partial x_\ell}\right) \\ &\leq \int_\Omega |\varphi'(T)||q_\ell| \left|\frac{\partial \varphi(T)}{\partial x_\ell}\right| dx \\ &\leq c|\varphi'(T)||\nabla \varphi(T)| \\ &\leq c\{|\varphi'(T)|^2 + \|\varphi(T)\|^2\}. \end{aligned} \tag{2.122}$$

De (2.121) e (2.122) temos

$$\left(\varphi', q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell}\right)\Big|_0^T \leq c\left(\int_0^T \|g(t)\| dt\right)^2. \tag{2.123}$$

Agora vamos estimar o último termo de (2.120)

$$\begin{aligned} \int_Q g' q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} dxdt &= -\int_Q \frac{\partial}{\partial x_\ell}(g' q_\ell)\varphi dxdt + \int_\Sigma (g' q_\ell)\varphi \cos \sphericalangle(x_\ell, \nu) d\Sigma \\ &= -\int_\Omega \int_0^T \frac{\partial}{\partial x_\ell}(g q_\ell)' \varphi dtdx \\ &= -\int_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x_\ell}(g q_\ell)(t)\varphi(t)\Big|_0^T - \int_0^T \frac{\partial}{\partial x_\ell}(g q_\ell)\varphi' dt\right] dx \\ &= \int_Q \frac{\partial}{\partial x_\ell}(g q_\ell)\varphi' dxdt \\ &= \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell \varphi' dxdt + \int_Q g \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \varphi' dxdt, \end{aligned}$$

isto é,

$$\int_Q g' q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} dxdt = \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell \varphi' dxdt + \int_Q g \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \varphi' dxdt.$$

Então a igualdade

$$\varphi' = (\varphi' - g) + g$$

aplicada nestas últimas integrais fornece

$$\begin{aligned} \int_Q g' q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} dxdt &= \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell (\varphi' - g) dxdt + \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell g dxdt \\ &+ \int_Q g \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (\varphi' - g) dxdt + \int_Q g^2 \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell}. \end{aligned} \tag{2.124}$$

A segunda integral do lado direito de (2.124) pode-se escrever

$$\int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell g dxdt \;=\; \frac{1}{2}\int_Q q_\ell \frac{\partial g^2}{\partial x_\ell} dxdt. \qquad (2.125)$$

Aplicando a fórmula de Gauss na segunda integral de (2.125) e substituindo o resultado em (2.124) temos

$$\begin{aligned}\int_Q g' q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} dxdt &= \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell (\varphi' - g) dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} g^2 dxdt \\ &+ \int_Q g \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (\varphi' - g) dxdt. \qquad (2.126)\end{aligned}$$

Para o segundo termo do lado direito de (2.120) temos que as identidades

$$\varphi'^2 = (\varphi' - g)^2 + 2g(\varphi' - g) + g^2 \quad \text{e} \quad |\nabla \varphi|^2 = \|\varphi\|^2$$

implicam

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \varphi'^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} |\nabla \varphi|^2 dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (\varphi' - g)^2 dxdt$$

$$+\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} g(\varphi' - g) dxdt + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} g^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \|\varphi\|^2 dxdt. \qquad (2.127)$$

Subtraíndo (2.126) de (2.127) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} [|\varphi'|^2 - |\nabla \varphi|^2] dxdt - \int_Q g' q_\ell \frac{\partial \varphi}{\partial x_\ell} dxdt = \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (\varphi' - g)^2 dxdt$$

$$-\frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \|\varphi\|^2 dxdt - \int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell (\varphi' - g) dxdt. \qquad (2.128)$$

Por outro lado, o terceiro e o quarto termo da direita de (2.120) pode ser estimado por

$$c\int_0^T \|\varphi(t)\|^2 dt.$$

Daí, de (2.120), (2.123) e (2.128) resulta:

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma q_\ell \nu_\ell \left|\frac{\partial \varphi}{\partial \nu}\right|^2 d\Sigma \leq c\left(\int_0^T \|g(t)\| dt\right)^2 + \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} (\varphi' - g)^2 dxdt - \frac{1}{2}\int_Q \frac{\partial q_\ell}{\partial x_\ell} \|\varphi\|^2 dxdt$$

$$-\int_Q \frac{\partial g}{\partial x_\ell} q_\ell (\varphi' - g) dxdt + c\int_0^T \|\varphi(t)\|^2 dt. \qquad (2.129)$$

Tomando $q_\ell \in C^1(\overline{\Omega})$, $1 \leq \ell \leq n$, tal que $q_\ell \nu_\ell = 1$ em Γ, limitando (2.129) obtemos

$$\frac{1}{2}\int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma \leq c\left(\int_0^T \|g(t)\|dt\right)^2,$$

ou seja,

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\| \leq c\int_0^T \|g(t)\|dt$$

o que encerra a prova. □

A seguir provaremos a regularidade da solução por transposição do problema (2.1) para dados com certa regularidade e, por critérios de densidade, generalizaremos o resultado para dados mais gerais.

Lema 2.10 *Sejam*

$$y^0 \in H_0^1(\Omega),\ y^1 \in L^2(\Omega) \ \ e \ \ v \in H_0^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma)).$$

Então o problema (2.1) admite uma única solução fraca

$$y \in C([0,T];H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega))$$

a qual também é solução por transposição.

Demonstração: Seja

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & H_0^2(0,T;H^2(\Omega)) & \rightarrow & H_0^2(0,T;H^{3/2}(\Gamma)) \times H_0^2(0,T;H^{1/2}(\Gamma)) \\ & \phi & \mapsto & \gamma\phi = (\gamma_0\phi, \gamma_1\phi) \end{array}$$

a aplicação traço de ordem 2. Pela sobrejetividade da mesma, existe $\widehat{v} \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ tal que

$$\gamma_0\widehat{v} = v. \tag{2.130}$$

Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + \alpha u = -\widehat{v}'' + \Delta\widehat{v} - \alpha\widehat{v} & \text{em } Q \\ u = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ u(0) = y^0, u'(0) = y^1 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.131}$$

Como $-\widehat{v}'' + \Delta\widehat{v} - \alpha\widehat{v} \in L^2(0,T;L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^1(0,T;L^2(\Omega))$ então pelo teorema 2.2, a única solução de (2.131) pertence a classe

$$u \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.132}$$

Agora, de $\widehat{v} \in H_0^2(0,T;H^2(\Omega))$ e pelo Lema 1.57 temos

$$\widehat{v} \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^2(\Omega)). \tag{2.133}$$

Pondo-se

$$y = u + \widehat{v} \tag{2.134}$$

obtemos de (2.132) e (2.133) que

$$y \in C([0,T];H^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^2(\Omega)). \tag{2.135}$$

Mais ainda, de $(2.131)_1$, (2.132) e (2.134) vem que

$$y'' - \Delta y + \alpha y = 0 \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.136}$$

Também, de (2.108) e $(2.109)_2$

$$\gamma_0 y = \gamma_0 u + \gamma_0 \widehat{v} = 0 + v = v. \tag{2.137}$$

Finalmente, de $(2.109)_3$

$$\left| \begin{array}{l} y(0) = u(0) + \widehat{v}(0) = y^0 + 0 = y^0 \\ y'(0) = u'(0) + \widehat{v}'(0) = y^1 + 0 = y^1. \end{array} \right. \tag{2.138}$$

Assim de (2.136), (2.137) e (2.138) temos provado que a aplicação y dada em (2.134) é solução fraca de (2.1) na classe (2.108).

Provaremos, a seguir, que y é também solução por transposição no sentido aludido anteriormente. Com efeito, provaremos que se $g \in L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ então (2.110) é satisfeita, onde φ é solução de (2.104) na classe (2.105).

Como $W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ é denso em $L^1(0,T;L^2(\Omega))$ existe $(g_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}} \subset W^{1,1}(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$g_\nu \to g \quad \text{em} \quad L^1(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.139}$$

Consideremos a seqüência de problemas regulares

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi''_\mu - \Delta\varphi_\mu + \alpha\varphi_\mu = g_\mu & \text{em} \quad Q \\ \varphi_\mu = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi_\mu(T) = \varphi'_\mu(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.140}$$

Pelo teorema 2.1 temos que a solução forte φ_μ de (2.140) pertence à classe

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)) \\ \varphi'_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \varphi''_\mu \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.141}$$

Além disso, temos pelo teorema 2.2 que $\varphi_\mu - \varphi$ é a solução fraca de:

$$\left| \begin{array}{ll} (\varphi_\mu - \varphi)'' - \Delta(\varphi_\mu - \varphi) + \alpha(\varphi_\mu - \varphi) = (g_\mu - g) & \text{em} \quad Q \\ \varphi_\mu - \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ (\varphi_\mu - \varphi)(T) = (\varphi_\mu - \varphi)'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega, \end{array} \right.$$

satisfazendo

$$|\varphi'_\mu(t) - \varphi'(t)|^2 + \|\varphi_\mu(t) - \varphi(t)\|^2 \leq c\left(\int_0^T |g_\mu(t) - g(t)|dt\right)^2. \tag{2.142}$$

Pelo teorema 2.6 temos também

$$\left\|\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial\nu} - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^(\Sigma)} \leq c\left(\int_0^T |g_\mu(t) - g(t)|dt\right)^2. \tag{2.143}$$

De (2.139), (2.142) e (2.143) concluímos que

$$\left| \begin{array}{l} \varphi_\mu \to \varphi \text{ em } C([0,T];H_0^1(\Omega)) \\ \varphi'_\mu \to \varphi' \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)) \\ \dfrac{\partial\varphi_\mu}{\partial\nu} \to \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ em } L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.144}$$

De (2.136) e a regularidade (2.141) obtemos

$$\int_0^T \langle y'', \varphi_\mu \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta y, \varphi_\mu \rangle dt + \alpha \int_0^T \langle y, \varphi_\mu \rangle dt = 0 \tag{2.145}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ representa a dualidade de $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$. Integrando-se por partes a primeira integral de (2.145) e usando (2.138), obtemos

$$\int_0^T \langle y'', \varphi_\mu \rangle dt = -\langle y^1, \varphi_\mu(0) \rangle + (y^0, \varphi_\mu'(0)) + \int_Q y \varphi_\mu'' dx dt. \tag{2.146}$$

Agora, considerando-se a extensão do $-\Delta$, a qual denotaremos com a mesma notação $-\Delta : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definida por: $\langle -\Delta u, w \rangle = a(u, w)$, $\forall\, u \in H^1(\Omega)$ e $\forall\, w \in H_0^1(\Omega)$, temos pelo teorema de Green que

$$-\int_0^T \langle \Delta y, \varphi_\mu \rangle dt = -\int_0^T (y, \Delta \varphi_\mu) dt + \int_\Sigma v \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\Sigma. \tag{2.147}$$

De (2.145), (2.146) e (2.147) chegamos à

$$-\langle y^1, \varphi_\mu(0) \rangle + (y^0, \varphi_\mu'(0)) + \int_Q y(\varphi_\mu'' - \Delta \varphi_\mu + \alpha \varphi_\mu) dx dt + \int_\Sigma v \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\Sigma = 0.$$

De (2.140) podemos escrever

$$\int_Q y\, g_\mu\, dx\, dt = -(y^0, \varphi_\mu'(0)) + \langle y^1, \varphi_\mu(0) \rangle - \int_\Sigma v \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial \nu} d\Sigma. \tag{2.148}$$

Das convergências (2.144) e (2.148) resulta na situação limite o desejado. □

Teorema 2.11 *Sejam*

$$y^0 \in L^2(\Omega),\ y^1 \in H^{-1}(\Omega)\ \text{ e } v \in L^2(\Sigma).$$

A solução por transposição y, do problema não homogêneo (2.1) pertence a classe

$$y \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \tag{2.149}$$

e a aplicação linear

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma) & \to & C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)) \\ \{y^0, y^1, v\} & \mapsto & y \end{array}$$

é contínua.

Demonstração: Primeiro provaremos que $y \in C([0,T]; L^2(\Omega))$. Sejam $(y_\mu^0), (y_\mu^1)$ e (v_μ) seqüências de vetores de $H_0^1(\Omega), L^2(\Omega)$ e $H_0^2(0,T; H^{3/2}(\Gamma))$, respectivamente, tal que

$$\left| \begin{array}{ll} y_\mu^0 \to y^0 & \text{em } L^2(\Omega) \\ y_\mu^1 \to y^1 & \text{em } H^{-1}(\Omega) \\ v_\mu \to v & \text{em } L^2(\Sigma). \end{array} \right. \tag{2.150}$$

Consideremos as seqüências de problemas

$$\left| \begin{array}{ll} y_\mu'' - \Delta y_\mu + \alpha y_\mu = 0 & \text{em} \quad Q \\ y_\mu = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ y_\mu(0) = y_\mu^0,\ y_\mu'(0) = y_\mu^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.151}$$

Pelo Lema 2.10 temos que

$$y_\mu \in C([0,T]; H^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)),$$

onde y_μ é solução por transposição. Decorre então que $y_\mu - y$ é solução por transposição do problema (2.1), para dados $y_\mu^0 - y^0$, $y_\mu^1 - y^1$, $v_\mu - v$. De (2.115), para $y_\mu - y$, obtemos que

$$\|y_\mu - y\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq c\{|y_\mu^0 - y^0| + \|y_\mu^1 - y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v_\mu - v\|_{L^2(\Sigma)}\}.$$

Passando o limite nessa expressão e usando as convergências de (2.150) obtemos

$$y_\mu \to y \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)), \tag{2.152}$$

o que implica que

$$(y_\mu) \text{ é de Cauchy em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)).$$

Agora, como $(y_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \subset C([0,T]; L^2(\Omega))$ e neste espaços as topologias

$$\|\cdot\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \text{ e } \|\cdot\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}$$

são iguais resulta que

$$(y_\mu) \text{ é de Cauchy em } C([0,T]; L^2(\Omega)).$$

Portanto

$$y_\mu \to w \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)). \tag{2.153}$$

Pela unicidade do limite em $L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ e de (2.152) e (2.153) obtemos que $y = w$, o que prova que

$$y \in C([0,T];L^2(\Omega)).$$

Agora provaremos que $y' \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$. Consideremos $g \in \mathcal{D}(Q)$ e φ a solução fraca de

$$\left| \begin{array}{lll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = g' & \text{em} & Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} & \Sigma \\ \varphi(T) = \varphi'(T) = 0 & \text{em} & \Omega. \end{array} \right. \tag{2.154}$$

Então pelo teorema 2.4 obtemos que

$$|\varphi'(t) - g(t)| + \|\varphi(t)\| \leq c\|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \ \forall\, t \in [0,T].$$

Tomando $t = 0$ na expressão acima, obtemos

$$|\varphi'(0)| + \|\varphi(0)\| \leq c\|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}. \tag{2.155}$$

Pelo Lema 2.9 resulta

$$\left\|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right\|_{L^2(\Sigma)} \leq c\|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \tag{2.156}$$

onde as constantes em (2.155) e (2.156) são independentes de φ e g.

Como $y \in C([0,T];L^2(\Omega))$ então $y' \in \mathcal{D}(Q)$. Assim

$$\langle y', g\rangle = -\langle y, g'\rangle = -\int_Q y\, g'\, dx\, dt.$$

Sendo y solução por transposição do problema não homogêneo (2.1) obtemos de (2.154) e da igualdade acima que

$$\langle y', g\rangle = -\langle y^1, \varphi(0)\rangle + (y^0, \varphi'(0)) + \int_\Sigma \frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\, v\, d\Sigma.$$

Limitando a igualdade acima, obtemos de (2.155) e (2.156) que

$$|\langle y', g\rangle| \leq c[|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]\|g\|_{L^1(0,T;H_0^1(\Omega))}, \ \forall\, g \in \mathcal{D}(Q).$$

Disto implica pela densidade de $\mathcal{D}(Q)$ em $L^1(0,T;H_0^1(\Omega))$ que

$$y' \in L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$$

e além disso

$$\|y'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c[|y^0| + \|y^1\|_{H^{-1}(\Omega)} + \|v\|_{L^2(\Sigma)}]. \tag{2.157}$$

Daqui procedendo, analogamente, como na primeira parte da demonstração. Notando que $y'_\mu \in C([0,T];H^{-1}(\Omega))$, concluímos que

$$y' \in C([0,T];H^{-1}(\Omega)).$$

A continuidade da aplicação linear $\{y^0, y^1, v\} \to y$ é dada pelas estimativas (2.115) e (2.157). $\square$

2.4 Método HUM

Teorema 2.12 *Seja $T_0 > 0$ tal que a controlabilidade exata de (2.1) é satisfeita para $\alpha = 0$ no espaço $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ com controle em $L^2(\Sigma)$ para todo $T > T_0$. Então o sistema (2.1) é também exatamente controlável nestes espaços para $T > T_0$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$. Isto é, para cada dado inicial $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a solução por transposição y do problema (2.1) verifica*

$$y(T) = y'(T) = 0$$

para $T > T_0$ e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$.

Demonstração: Sejam $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e consideremos o problema homogêneo

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(0) = \varphi^0,\ \varphi'(0) = \varphi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.158}$$

Assim, para todo $T > T_0$, existe uma constante $c = c(\alpha, T) > 0$ tal que para qualquer solução de (2.158) a seguinte desigualdade é válida

$$\|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2 \leq c \int_\Sigma \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma. \tag{2.159}$$

De fato, por hipótese, para $\alpha = 0$ a estimativa (2.159) é verdadeira. Para provarmos a estimativa (2.159) para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$, escrevemos a solução φ de (2.158) como $\varphi = \theta + \eta$, onde θ, η são respectivamente as soluções das seguintes equações

$$\left| \begin{array}{ll} \theta'' - \Delta\theta = 0 & \text{em} \quad Q \\ \theta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \theta(0) = \varphi^0,\ \theta'(0) = \varphi^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.160}$$

e

$$\left| \begin{array}{ll} \eta'' - \Delta\eta = -\alpha\varphi & \text{em} \quad Q \\ \eta = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \eta(0) = \eta'(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.161}$$

Temos que para o sistema (2.160), a estimativa (2.159) é válida, isto é,

$$\|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2 \leq c \int_\Sigma \left| \frac{\partial \theta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \tag{2.162}$$

onde $c = c(T) > 0$. Agora como $\varphi = \theta + \eta$ temos através de um simples cálculo que (2.162) pode ser reescrita como

$$\|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2 \leq c \int_\Sigma \left[\left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right|^2 \right] d\Sigma. \tag{2.163}$$

Por outro lado, temos a seguinte estimativa para o sistema (2.161) (cf. teorema 1.58)

$$\int_\Sigma \left| \frac{\partial \eta}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma \leq \alpha c(T+1) \|\varphi\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{2.164}$$

Assim, combinando (2.163) e (2.164) temos

$$\|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2 \leq c \left\{ \int_\Sigma \left| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right|^2 d\Sigma + \|\varphi\|^2_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \right\} \tag{2.165}$$

para alguma constante $c = c(\alpha, T) > 0$ grande o suficiente. Então para provar (2.159), basta mostrar que

$$\|\varphi\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} \leq c \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.166}$$

Para isto, argumentaremos por contradição. Se (2.166) não é satisfeita para qualquer $c > 0$, existe uma seqüência (φ_n) de soluções de (2.158) tal que

$$\|\varphi_n\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} = 1 \text{ para } n = 1, 2, \ldots \tag{2.167}$$

e

$$\left\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \to 0 \text{ quando } n \to \infty \tag{2.168}$$

(para a existência da seqüência (φ_n) satisfazendo (2.167) e (2.168) consultar [17]).

Agora, de (2.165), (2.167) e (2.168) deduzimos que $\{\varphi_n(0), \varphi_n'(0)\}$ é limitada em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$. Da desigualdade da energia (2.37) do teorema 2.2, segue que

$$(\varphi_n) \text{ é limitada uniformemente em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega)). \tag{2.169}$$

Assim, podemos extrair uma subseqüência de (φ_n), que ainda denotaremos por (φ_n), tal que

$$\varphi_n \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi \text{ em } L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))$$

$$\varphi_n' \overset{*}{\rightharpoonup} \varphi' \text{ em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)).$$

Logo existe uma $\varphi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap W^{1,\infty}(0,T;L^2(\Omega))$ tal que

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right.$$

Além disso, pela proposição 1.39 temos

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \leq \liminf_{n\to\infty} \left\| \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \Sigma.$$

Assim, o limite satisfaz

$$\left| \begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi + \alpha\varphi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma. \end{array} \right.$$

Pelo Teorema de Hölmgrem (cf. Teorema 5.3.3 de Hormander [9] ou §I.8 de Lions [13]), concluímos que

$$\varphi \equiv 0. \tag{2.170}$$

De (2.169), cf. J. Simon [26], temos que

$$(\varphi_n) \text{ é relativamente compacta em } L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então existe uma subseqüência ainda denotada por (φ_n) tal que

$$\varphi_n \to \varphi \text{ forte em } L^1(0,T;L^2(\Omega)).$$

Desta convergência e de (2.167) temos

$$\|\varphi\|_{L^1(0,T;L^2(\Omega))} = 1. \tag{2.171}$$

O que contradiz (2.170). Assim provamos (2.159).

Consideremos agora $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in \mathcal{D}(\Omega) \times \mathcal{D}(\Omega)$ e o problema homogêneo (2.158). Conforme provado no teorema 2.1, o problema (2.158) admite única solução forte na classe:

$$\left| \begin{array}{l} \varphi \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ \varphi' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \varphi'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{2.172}$$

Também temos

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \in L^2(\Sigma). \tag{2.173}$$

Consideremos o problema retrógrado

$$\left| \begin{array}{lll} \psi'' - \Delta\psi + \alpha\psi = 0 & \text{em} & Q \\ \psi = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{sobre} & \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{em} & \Omega, \end{array} \right. \tag{2.174}$$

onde φ é solução de (2.158).

Então pelo teorema 2.11 e graças a reversão do tempo, a solução ψ pertence a classe

$$\psi \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.175}$$

Sendo $H_0^2([0,T];H^{3/2}(\Sigma))$ denso em $L^2(\Sigma)$, existe $(v_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}} \subset H_0^2([0,T];H^{3/2}(\Sigma))$ tal que

$$v_\mu \to \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ em } L^2(\Sigma). \tag{2.176}$$

Consideremos a seqüência de problemas

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_\mu'' - \Delta\psi_\mu + \alpha\psi_\mu = 0 & \text{em} \quad Q \\ \psi_\mu = v_\mu & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi_\mu(T) = \psi_\mu'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.177}$$

Fazendo novamente a reversão do tempo, então para cada $\mu \in \mathbb{N}$ resulta do Lema 2.10 que o problema (2.177) admite uma única solução fraca na classe

$$\psi_\mu \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)) \tag{2.178}$$

verificando

$$\psi_\mu'' - \Delta\psi_\mu + \alpha\psi_\mu = 0 \text{ em } C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.179}$$

Além disso, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, a solução fraca ψ_μ de (2.177) é também solução por transposição. Resulta daí que $(\psi_\mu - \psi)$ é a única solução por transposição de

$$\left| \begin{array}{ll} (\psi_\mu - \psi)'' - \Delta(\psi_\mu - \psi) + \alpha(\psi_\mu - \psi) = 0 & \text{em} \quad Q \\ \psi_\mu - \psi = v_\mu - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ (\psi_\mu - \psi)(T) = (\psi_\mu - \psi)'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{2.180}$$

De (2.115) obtemos

$$\|\psi_\mu - \psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} \leq \left\| v_\mu - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Sigma)} \tag{2.181}$$

e

$$\|\psi_\mu' - \psi'\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq \left\| v_\mu - \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \right\|_{L^2(\Sigma)}. \tag{2.182}$$

De (2.181) e (2.182) e da convergência (2.176) resulta que

$$\psi_\mu \to \psi \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.183}$$

$$\psi_\mu' \to \psi' \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.184}$$

Por outro lado, dados $\xi^0, \xi^1 \in \mathcal{D}(\Omega)$, existe uma única solução ξ de (2.158) na classe (2.172) com dado iniciais $\{\xi^0, \xi^1\}$. Compondo-se a equação (2.179) com ξ resulta

$$\int_0^T \langle \psi''_\mu(t), \xi(t) \rangle dt - \int_0^T \langle \Delta\psi_\mu(t), \xi(t) \rangle dt + \alpha \int_0^T \langle \psi_\mu(t), \xi(t) \rangle dt = 0.$$

Integrando-se por partes a expressão acima, e considerando a extensão do $-\Delta$ que ainda denotada por Δ, $-\Delta : H^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ definida por: $\langle -\Delta u, v \rangle = a(u,v)$, $\forall\, u \in H^1(\Omega)$ e $v \in H_0^1(\Omega)$, de $(2.158)_3$ e pela fórmula de Green obtemos

$$-\langle \psi'_\mu(0), \xi^0 \rangle + (\psi_\mu(0), \xi^1) + \int_0^T \langle \psi_\mu(t), \xi''(t) - \Delta\xi(t) + \alpha\xi(t) \rangle dt + \int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} v_\mu d\Sigma = 0.$$

Daí, e de $(2.158)_1$ obtemos

$$\int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} v_\mu d\Sigma = \langle \psi'_\mu(0), \xi^0 \rangle - (\psi_\mu(0), \xi^1). \tag{2.185}$$

Das convergências (2.176), (2.183), (2.184) e da identidade em (2.185) resulta na situação limite

$$\int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma = \langle \psi'(0), \xi^0 \rangle - (\psi(0), \xi^1). \tag{2.186}$$

A expressão acima nos induz a introdução do seguinte operador

$$\Lambda : H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \to H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

definido por

$$\Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \tag{2.187}$$

Notemos que a expressão em (2.186) pode ser reescrita como

$$\int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma = \langle \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle$$

ou ainda de (2.187)

$$\langle \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\} \rangle = \int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma. \tag{2.188}$$

Definamos

$$\begin{array}{rccl} (\cdot,\cdot)_* : & (\mathcal{D}(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2 & \to & \mathbb{R} \\ & \{\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}\} & \mapsto & (\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\})_* = \displaystyle\int_\Sigma \frac{\partial \xi}{\partial \nu} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} d\Sigma. \end{array} \tag{2.189}$$

Provaremos que a aplicação acima define um produto interno de $(\mathcal{D}(\Omega))^2 \times (\mathcal{D}(\Omega))^2$. Claramente $(\cdot,\cdot)_*$ é positiva, mostraremos que é estritamente positiva. Isto é, provaremos que

$$(\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\varphi^0,\varphi^1\})_* = 0 \Leftrightarrow \varphi^0 = \varphi^1 = 0.$$

De fato, a recíproca é trivial. Provaremos a implicação. Suponhamos que

$$(\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\varphi^0,\varphi^1\})_* = \int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma = 0.$$

Da desigualdade inversa (2.159) temos

$$0 \le \|\varphi^0\|^2 + |\varphi^1|^2 \le c\int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma = 0,$$

o que implica que

$$\varphi^0 = \varphi^1 = 0.$$

Logo,

$$\begin{array}{rccc} \|\cdot\|_*: & (\mathcal{D}(\Omega))^2 & \to & \mathbb{R}^+ \\ & \{\varphi^0,\varphi^1\} & \mapsto & \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_* = \left(\displaystyle\int_\Sigma \left|\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\right|^2 d\Sigma\right)^{1/2} \end{array} \tag{2.190}$$

define uma norma em $(\mathcal{D}(\Omega))^2$. Consideremos F o espaço de Hilbert obtido completando-se $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ com a norma $\|\cdot\|_*$, isto é,

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_*}. \tag{2.191}$$

Contudo, das desigualdades diretas e inversas (2.99) e (2.159), respectivamente, resulta de (2.191) que a norma $\|\cdot\|_*$ é equivalente a norma $\|\{\cdot,\cdot\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ em $\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)$. Conseqüentemente de (2.191) obtemos

$$F = \overline{\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_*} = \overline{\mathcal{D}(\Omega)\times\mathcal{D}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}} = H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega). \tag{2.192}$$

Munindo-se $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ da topologia dada pela norma $\|\cdot\|_*$, provaremos que o operador Λ dado em (2.187), que é claramente linear, é contínuo. Com efeito, de (2.188) e (2.189) resulta que

$$|\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle| \leq \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_* \|\{\xi^0,\xi^1\}\|_*,$$

$$\forall \{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2.$$

Pela densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ em F segue que

$$|\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\chi^0,\chi^1\}\rangle| \leq \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_* \|\{\chi^0,\chi^1\}\|_* \tag{2.193}$$

$$\forall \{\varphi^0,\varphi^1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2,\ \{\chi^0,\chi^1\} \in F,$$

o que implica que

$$\|\Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{F'} \leq \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_*, \qquad \forall \{\varphi^0,\varphi^1\} \in (\mathcal{D}(\Omega))^2 \tag{2.194}$$

provando a continuidade do operador Λ. Agora, pela densidade de $(\mathcal{D}(\Omega))^2$ em F podemos estender Λ, de maneira única, a um operador linear e contínuo, o qual ainda denotaremos por Λ,

$$\begin{array}{rccc} \Lambda: & F & \rightarrow & F' \\ & \{\chi^0,\chi^1\} & \mapsto & \lim\limits_{\mu\to\infty} \{\chi^0_\mu,\chi^1_\mu\} \end{array} \tag{2.195}$$

onde $(\{\chi^0_\mu,\chi^1_\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{D}(\Omega))^2$ é tal que

$$\|\{\chi^0_\mu,\chi^1_\mu\} - \{\chi^0,\chi^1\}\|_* \rightarrow 0 \text{ quando } \mu \rightarrow \infty. \tag{2.196}$$

Notemos que a definição acima independe da seqüência $\{\chi^0_\mu,\chi^1_\mu\}$ que aproxima $\{\chi^0,\chi^1\}$.

Provaremos a seguir que

$$\Lambda\{\chi^0,\chi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}, \quad \forall \{\chi^0,\chi^1\} \in F, \tag{2.197}$$

onde ψ é solução por transposição de

$$\left| \begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi + \alpha\psi = 0 & \text{em } Q \\ \psi = \dfrac{\partial \chi}{\partial \nu} & \text{sobre } \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.198}$$

e χ é solução fraca de

$$\left| \begin{array}{ll} \chi'' - \Delta\chi + \alpha\chi = 0 & \text{em } Q \\ \chi = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \chi(0) = \chi^0,\ \chi'(0) = \chi^1 & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.199}$$

Com efeito, seja $\{\chi^0, \chi^1\} \in F$ e consideremos $(\{\chi^0_\mu, \chi^1_\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}} \subset (\mathcal{D}(\Omega))^2$ tal que

$$\{\chi^0_\mu, \chi^1_\mu\} \to \{\chi^0, \chi^1\} \in F. \tag{2.200}$$

Temos de (2.187) e (2.195) que

$$\Lambda\{\chi^0, \chi^1\} = \lim_{\mu\to\infty} \Lambda\{\chi^0_\mu, \chi^1_\mu\} = \lim_{\mu\to\infty} \{\psi'_\mu(0), -\psi_\mu(0)\}, \tag{2.201}$$

onde, para cada $\mu \in \mathbb{N}$, ψ_μ é a única solução por transposição do problema

$$\left| \begin{array}{ll} \psi''_\mu - \Delta\psi_\mu + \alpha\psi_\mu = 0 & \text{em} \quad Q \\ \psi_\mu = \dfrac{\partial\chi_\mu}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi_\mu(T) = \psi'_\mu(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{2.202}$$

com χ_μ é a única solução fraca de

$$\left| \begin{array}{ll} \chi''_\mu - \Delta\chi_\mu + \alpha\chi_\mu = 0 & \text{em } Q \\ \chi_\mu = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ \chi_\mu(0) = \chi^0_\mu,\ \chi'_\mu(0) = \chi^1_\mu & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.203}$$

Resulta daí que $(\psi_\mu - \psi)$ é a única solução por transposição de

$$\left| \begin{array}{ll} (\psi_\mu - \psi)'' - \Delta(\psi_\mu - \psi) + \alpha(\psi_\mu - \psi) = 0 & \text{em } Q \\ (\psi_\mu - \psi) = \dfrac{\partial\chi_\mu}{\partial\nu} - \dfrac{\partial\chi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ (\psi_\mu - \psi)(T) = (\psi_\mu - \psi)'(T) = 0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \tag{2.204}$$

onde $(\chi_\mu - \chi)$ é a única solução fraca de

$$\left| \begin{array}{ll} (\chi_\mu - \chi)'' - \Delta(\chi_\mu - \chi) + \alpha(\chi_\mu - \chi) = 0 & \text{em } Q \\ (\chi_\mu - \chi) = 0 & \text{sobre } \Sigma \\ (\chi_\mu - \chi)(0) = (\chi^0_\mu - \chi^0),\ (\chi'_\mu - \chi')(0) = (\chi^1_\mu - \chi^1) & \text{em } \Omega. \end{array} \right. \tag{2.205}$$

Graças as desigualdades (2.115) e (2.157) temos

$$\|\psi_\mu - \psi\|_{C([0,T];L^2(\Omega))} + \|\psi'_\mu - \psi'\|_{C([0,T];H^{-1}(\Omega))} \leq \|\frac{\partial \chi_\mu}{\partial \nu} - \frac{\partial \chi}{\partial \nu}\|_{L^2(\Sigma)} \tag{2.206}$$

$$= c\|\{\chi^0_\mu - \chi^0, \chi^1_\mu - \chi^1\}\|_*,$$

a última igualdade decorre de (2.190). Finalmente de (2.200) e (2.206) resulta que

$$\psi_\mu \rightarrow \psi \text{ em } C([0,T];L^2(\Omega)) \tag{2.207}$$

$$\psi'_\mu \rightarrow \psi' \text{ em } C([0,T];H^{-1}(\Omega)). \tag{2.208}$$

De (2.201), (2.207) e (2.208) segue o desejado em (2.197).

Definamos

$$b(\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}) = \langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\}\rangle \tag{2.209}$$

$$\forall \{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\} \in F,$$

que é claramente uma forma bilinear. Provaremos, a seguir, que $b(\cdot,\cdot)$ é contínua e coerciva. De fato, sejam $\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\xi^0,\xi^1\} \in F$ e $(\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}}, (\{\xi^0_\mu,\xi^1_\mu\})_{\mu\in\mathbb{N}}, \subset (\mathcal{D}(\Omega))^2$ tais que

$$\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\} \rightarrow \{\varphi^0,\varphi^1\} \quad \text{e} \quad \{\xi^0_\mu,\xi^1_\mu\} \rightarrow \{\xi^0,\xi^1\} \text{ em } F.$$

Para cada $\mu \in \mathbb{N}$, de (2.193) vem que

$$|\langle \Lambda\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\},\{\xi^0_\mu,\xi^1_\mu\}\rangle| \leq \|\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\}\|_*\|\{\xi^0_\mu,\xi^1_\mu\}\|_*,$$

o que prova a continuidade de $b(\cdot,\cdot)$.

Para provarmos a coercividade da mesma, notemos que de (2.188) e (2.190), para cada $\mu \in \mathbb{N}$ podemos escrever

$$\langle \Lambda\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\},\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\}\rangle = \|\{\varphi^0_\mu,\varphi^1_\mu\}\|^2_*$$

e na situação limite obtemos

$$\langle \Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\},\{\varphi^0,\varphi^1\}\rangle = \|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^2_*$$

o que prova a coecividade de $b(\cdot,\cdot)$.

Desta forma, pelo teorema de Lax-Milgran, dado $\{Y^0, Y^1\} \in F'$, existe um único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ tal que

$$\langle\{Y^0, Y^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}\rangle = b(\{\varphi^0, \varphi^1\}, \{\xi^0, \xi^1\}), \forall\{\xi^0, \xi^1\} \in F,$$

ou seja, o operador Λ é um isomorfismo de $H_0^1 \times L^2(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

O que implica, em função da definição de $b(\cdot,\cdot)$ dada em (2.209), que

"Dado $\{Y^0, Y^1\} \in F'$, existe um único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ tal que

$$\{Y^0, Y^1\} = \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\}\text{''} \tag{2.210}$$

ou ainda em virtude de (2.197) concluímos que

"Dado $\{Y^0, Y^1\} \in F'$, existe um único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ tal que

$$Y^0 = \psi'(0) \text{ e } Y^1 = -\psi(0)\text{''} \tag{2.211}$$

onde ψ é a única solução, por transposição, de (2.174) e φ é a única solução fraca de (2.158).

Lembremos que

$$F = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ e } F' = H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Assim, elegendo-se

$$H = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \tag{2.212}$$

então dado

$$\{y^0, y^1\} \in H \tag{2.213}$$

e tomando $\{Y^0, Y^1\} = \{y^1, -y^0\}$ tem-se que o par

$$\{Y^0, Y^1\} = \{y^1, -y^0\} \in F'.$$

De (2.99) resulta que existe um único $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in F$ tal que

$$\psi(0) = y^0 \text{ e } \psi'(0) = y^1, \tag{2.214}$$

onde ψ é a única solução por transposição de (2.174) e φ é a única solução fraca de (2.158) com dados φ^0 e φ^1.

Considerando-se

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \text{ em } \Sigma \tag{2.215}$$

no problema (2.1) sujeito aos dados iniciais conforme em (2.213), temos que tal problema possui única solução por transposição y. Observemos que de (2.174) e (2.214) resulta que ψ é também solução por transposição do problema (2.1). Logo, pela unicidade de soluções vem que $y = \psi$. Conseqüentemente de $(2.174)_3$ concluímos que

$$y(T) = y'(T) = 0, \quad \forall\, T > T_0.$$

$\square$

Observação 2.13 *Na realidade, graças a linearidade e reversibilidade da equação (2.1) tem-se que: "Dado $T_0 > 0$, para todo $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a única solução por transposição y do problema (2.1) satisfaz*

$$y(T) = z^0,\ y'(T) = z^1,\ \ \forall\, T > T_0."$$

Capítulo 3

Controlabilidade Exata na Fronteira: Caso Assintoticamente Linear

Neste capítulo desejamos resolver o seguinte problema de controlabilidade exata para o problema (1), onde f é assintoticamente linear: "Dado $T_0 > 0$, para todo $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a única solução y do problema (1) satisfaz $y(T) = z^0$, $y'(T) = z^1$ $\forall T > T_0$."

Para resolver este problema, assumiremos que f satisfaz

$$f' \in L^\infty(\mathbb{R});\ \exists \lim_{|s|\to\infty} \frac{f(s)}{s} = \alpha. \tag{3.1}$$

Dizemos que f é *assintoticamente linear* se ela se comporta como αs quando $|s| \to \infty$.

Assim, seguiremos as seguintes etapas:

- Existência e unicidade de soluções fortes e fracas para o problema homogêneo acoplado a (1).

- Método do ponto fixo.

3.1 Soluções Fortes e Soluções Fracas

Consideremos o seguinte sistema

$$\left|\begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi + f(\psi + h) = \alpha h & \text{em} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi(0) = \psi^0,\ \psi'(0) = \psi^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.2}$$

com $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Assim temos o seguinte resultado

Teorema 3.1 ***(Existência e Unicidade)*** *Se $\psi^0 \in H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $\psi^1 \in H^1_0(\Omega)$ e $h \in H^1(0,T;L^2(\Omega))$, existe uma única solução forte ψ de (3.2) tal que*

$$\psi \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \tag{3.3}$$

$$\psi' \in L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega)) \tag{3.4}$$

$$\psi'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \tag{3.5}$$

$$\psi'' - \Delta\psi + f(\psi + h) = \alpha h \quad q.s.\ em\ Q \tag{3.6}$$

$$\psi(0) = \psi^0,\ \psi'(0) = \psi^1. \tag{3.7}$$

Demonstração:

Problema Aproximado

Seja $(w_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ uma base do espaço $H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ e V_m o subespaço gerado pelos m primeiros vetores $w_1, ..., w_m$.

Definamos

$$\psi_m(t) = \sum_{j=1}^{m} g_{jm}(t) w_j$$

como solução do sistema aproximado

$$\left|\begin{array}{l} (\psi''_m(t), w_j) + ((\psi_m(t), w_j)) + (f(\psi_m(t) + h(t), w_j) = \alpha(h(t), w_j) \\ \psi_m(0) = \psi^0_m \to \psi^0 \text{ em } H^1_0(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \psi'_m(0) = \psi^1_m \to \psi^1 \text{ em } H^1_0(\Omega). \end{array}\right. \tag{3.8}$$

A existência local em $[0, t_m]$ é garantido pela teoria de equações diferenciais lineares.

Estimativa I

Multiplicando $(3.8)_1$ por $g'_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m, temos

$$(\psi''_m(t), \psi'_m(t)) + ((\psi_m(t), \psi'_m(t))) + (f(\psi_m(t) + h(t)), \psi'_m(t)) = \alpha(h(t), \psi'_m(t)), \quad (3.9)$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}|\psi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2 = 2\alpha(h(t), \psi'_m(t)) - 2(f(\psi_m(t) + h(t)), \psi'_m(t)). \quad (3.10)$$

Vamos estimar o último termo de (3.10). Observe que, como $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ e $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ então f é Lipschitziana, ou seja,

$$|f(h(t) + u) - f(h(t) + w)|_{L^2(\Omega)} \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|u - w|_{L^2(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Assim, de (3.11) temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_\Omega f(\psi_m(t) + h(t))\psi'_m(t)dx\right| \leq \\
&\quad \leq \int_\Omega |f(\psi_m(t) + h(t)) - f(h(t))||\psi'_m(t)|dx + \int_\Omega |f(h(t))||\psi'_m(t)|dx \\
&\quad \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\psi_m(t)||\psi'_m(t)| + c|\psi'_m(t)| \\
&\quad \leq \frac{c}{2}\{\|\psi_m(t)\|^2 + |\psi'_m(t)|^2\} + c|\psi'_m(t)|. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

De (3.10) e (3.12) temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|\psi'_m(t)|^2 + \frac{d}{dt}\|\psi_m(t)\|^2 &\leq 2|\alpha||(h(t), \psi'_m(t))| + \frac{c}{2}\{\|\psi_m(t)\|^2 + |\psi'_m(t)|^2\} \\
&+ c|\psi'_m(t)|. \qquad (3.13)
\end{aligned}$$

Integrando (3.13) de 0 a t obtemos

$$\begin{aligned}
|\psi'_m(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 &\leq |\psi^1|^2 + \|\psi^0\|^2 + |\alpha|\|h(s)\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\
&+ c^2T + \int_0^T \{\|\psi_m(t)\|^2 + |\psi'_m(t)|^2\}dt. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Contudo de $(3.8)_2$ e $(3.8)_3$, obtemos a existência de uma constante $c > 0$ tal que de (3.14) vem que

$$|\psi'_m(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 \leq c + \int_0^t \left\{ \|\psi_m(s)\|^2 + |\psi'_m(s)|^2 \right\} ds.$$

Usando a Desigualdade de Gronwall nesta última desigualdade, concluímos que

$$|\psi'_m(t)|^2 + \|\psi_m(t)\|^2 \leq c, \ \forall\, t \in [0, t_m), \ \forall\, m \in \mathbb{N} \tag{3.15}$$

o que nos permite estender ψ_m à todo intervalo $[0, T]$.

Além disso,

$$(\psi_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \tag{3.16}$$

$$(\psi'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \tag{3.17}$$

Estimativa II

Derivando $(3.8)_1$ relativamente a t, obtemos

$$(\psi'''_m(t), w_j) + ((\psi'_m(t), w_j)) + (f'(\psi_m(t) + h(t))(\psi'_m(t) + h'(t)), w_j) =$$

$$= \alpha(h'(t), w_j). \tag{3.18}$$

Multiplicando (3.18) por $g''_{jm}(t)$ e somando em j de 1 a m, temos

$$(\psi'''_m(t), \psi''_m(t)) + ((\psi'_m(t), \psi''_m(t))) + (f'(\psi_m(t) + h(t))(\psi'_m(t) + h'(t)), \psi''_m(t)) =$$

$$= \alpha(h'(t), \psi''_m(t))$$

e como anteriormente temos

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi''_m(t)|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\psi'_m(t)\|^2 \leq \\
&\quad \leq \ |\alpha||h'(t)||\psi''_m(t)| + \int_\Omega |f'(\psi_m(t) + h(t))||\psi'_m(t) + h'(t)||\psi''_m(t)|dx \\
&\quad \leq \ |\alpha||h'(t)||\psi''_m(t)| + c\{|\psi'_m(t)| + |h'(t)|\}|\psi''_m(t)|.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Integrando (3.19) de 0 a t obtemos

$$\frac{1}{2}|\psi''_m(t)|^2+\frac{1}{2}\|\psi'_m(t)\|^2\leq\frac{1}{2}|\psi''_m(0)|^2+\frac{1}{2}\|\psi^1_m\|^2+\frac{c}{2}\int_0^t\left\{\|\psi'_m(s)\|^2+|\psi''_m(s)|^2\right\}ds$$

$$+\frac{|\alpha|+c}{2}\int_0^t\{|h'(s)|^2+|\psi''_m(s)|^2\}ds,$$

isto é,

$$\begin{aligned}|\psi''_m(t)|^2+\|\psi'_m(t)\|^2 &\leq |\psi''_m(0)|^2+\|\psi^1_m\|^2+c\int_0^t|h'(s)|^2ds\\ &+ c\int_0^t\left\{\|\psi'_m(s)\|^2+|\psi''_m(s)|^2\right\}ds \end{aligned}\tag{3.20}$$

onde $c=c(\alpha)>0$.

Para estimarmos $\psi''_m(0)$, façamos $t=0$ em $(3.8)_1$ e multiplicando-se por $g''_{jm}(0)$ e somando em j de 1 a m, tem-se

$$(\psi''_m(0),\psi''_m(0))+((\psi_m(0),\psi''_m(0)))+(f(\psi_m(0)+h(0)),\psi''_m(0))=\alpha(h(0),\psi''_m(0)).$$

Aplicando o teorema de Green e a Desigualdade de Hölder, temos

$$\|\psi''_m(0)\|\leq|\alpha||h(0)|+|\Delta\psi^0_m|+\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|\psi^0_m|+|f(h(0))|.$$

Daí e de $(3.8)_2$, $(3.8)_3$ obtemos a existência de uma constante $c>0$ tal que

$$\|\psi''_m(0)\|^2+\|\psi^1_m\|^2+c\|h\|_{L^2(Q)}\leq c.\tag{3.21}$$

Assim, de (3.20) e (3.21) temos que

$$|\psi''_m(t)|^2+\|\psi'_m(t)\|^2\leq c+c\int_0^T\left\{\|\psi'_m(t)\|^2+|\psi''_m(t)|^2\right\}dt$$

usando a desigualdade de Gronwall nesta última desigualdade, concluímos que

$$|\psi''_m(t)|^2+\|\psi'_m(t)\|^2\leq c,\quad\forall\, t\in[0,T],\ \forall\, m\in\mathbb{N}.\tag{3.22}$$

Então de (3.22) temos

$$(\psi'_m)\text{ é limitada em }L^\infty(0,T;H^1_0(\Omega))\tag{3.23}$$

$$(\psi''_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \tag{3.24}$$

Passagem ao Limite

Das estimativas feitas em (3.16), (3.23) e (3.24), podemos extrair uma subseqüência $(\psi_\mu)_{\mu\in\mathbb{N}}$ de $(\psi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi & \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \psi'_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi' & \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \psi''_\mu \overset{*}{\rightharpoonup} \psi'' & \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.25}$$

Consideremos a seqüência ψ_μ como solução do problema aproximado (3.8). Seja $j \in \mathbb{N}$ e consideremos $\mu \in \mathbb{N}$ tal que $\mu > j$, multipliquemos $(3.8)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$ e integremos no intervalo $[0,T]$ obtendo-se

$$\int_0^T (\psi''_\mu(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi_\mu(t), w_j))\theta(t)dt$$

$$+ \int_0^T (f(\psi_\mu(t) + h(t)), w_j)\theta(t)dt = \alpha \int_0^T (h(t), w_j)\theta(t)dt. \tag{3.26}$$

Pondo-se

$$H_0^1(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

e

$$W = \{\psi \in L^2(0,T;H_0^1(\Omega)); \psi' \in L^2(0,T;L^2(\Omega))\}$$

munido da topologia

$$\|\psi\|_W = \|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}.$$

Resulta de (3.16) e (3.17) que (ψ_μ) é limitada em W. Logo pelo teorema de Aubin-Lions obtemos uma subseqüência de ψ_μ que ainda denotaremos por ψ_μ tal que

$$\psi_\mu \to \psi \text{ forte em } L^2(0,T;L^2(\Omega))$$

pois $W \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(0,T;L^2(\Omega))$.

Daí observe que

$$\left|\int_0^T (f(\psi_\mu + h), w_j)\theta(t)dt - \int_0^T (f(\psi + h), w_j)\theta(t)dt\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T |(f(\psi_\mu + h) - f(\psi + h)||w_j||\theta(t)| \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|w_j| \left(\int_0^T |\psi_\mu(t) - \psi(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T |\theta(t)|^2 dt\right)^{1/2} \\
&\leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|w_j|\|\psi_\mu - \psi\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \left(\int_0^T |\theta(t)|^2 dt\right)^{1/2} \to 0.
\end{aligned}$$

Levando em conta as convergências em (3.25) e a convergência acima, podemos passar ao limite quando $\mu \to \infty$, em (3.26) obtendo

$$\int_0^T (\psi''(t), w_j)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), w_j))\theta(t)dt + \int_0^T (f(\psi(t) + h(t)), w_j)\theta(t)dt$$

$$= \alpha \int_0^T (h(t), w_j)\theta(t)dt \tag{3.27}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$, para todo $v \in V_m$. Por densidade é certo para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Da igualdade anterior, deduzimos:

$$\psi'' - \Delta\psi + f(\psi + h) = \alpha h \text{ em } L^\infty(0,T; L^2(\Omega)). \tag{3.28}$$

De (3.28) temos

$$\left| \begin{array}{ll} -\Delta\psi(t) = \alpha h(t) - \psi''(t) - f(\psi(t) + h(t)) & \text{em } \Omega \\ \psi(t) = 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{array} \right. \tag{3.29}$$

Pela regularidade de problemas elípticos aplicados a (3.29), deduzimos

$$\psi \in L^\infty(0,T; H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)). \tag{3.30}$$

As condições iniciais (3.7) é verificada de maneira usual e a uniciadade é provada facilmente usando o método da energia. Assim fica concluída a demonstração do teorema 3.1. $\square$

Teorema 3.2 *Sejam*

$$\psi^0 \in H_0^1(\Omega),\ \psi^1 \in L^2(\Omega)\ e\ h \in L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

Então existe uma única solução fraca ψ *de (3.2) satisfazendo as seguintes condições*

$$\psi \in C([0,T];H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T];L^2(\Omega)) \tag{3.31}$$

$$\frac{d}{dt}(\psi'(t),v) + ((\psi(t),v)) + (f(\psi(t)+h(t)),v) = \alpha(h(t),v) \tag{3.32}$$

no sentido de $\mathcal{D}'(0,T)$*, para todo* $v \in H_0^1(\Omega)$

$$\psi'' - \Delta\psi + f(\psi+h) = \alpha h\ em\ L^1(0,T;H^{-1}(\Omega)) \tag{3.33}$$

$$\psi(0) = \psi^0,\ \psi'(0) = \psi^1 \tag{3.34}$$

$$E(\psi;t) = E(\psi;0) - \int_Q f(\psi+h)\psi' dxdt + \alpha \int_Q h\psi' dxdt \tag{3.35}$$

onde $E(\psi;t)$ *é a energia associada ao sistema (3.2).*

Demonstração: Sejam (ψ_μ^0), (ψ_μ^1), (h_μ) seqüências de valores de $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ respectivamente, tais que

$$\left|\begin{array}{ll} \psi_\mu^0 \to \psi^0 & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ \psi_\mu^1 \to \psi^1 & \text{em } L^2(\Omega) \\ h_\mu \to h & \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{3.36}$$

Denotaremos por ψ_μ a solução obtida no teorema 3.1 com dados ψ_μ^0, ψ_μ^1, h_μ, isto é, ψ_μ é solução forte do problema

$$\left|\begin{array}{ll} \psi_\mu'' - \Delta\psi_\mu + f(\psi_\mu + h_\mu) = \alpha h_\mu & \text{em} \quad Q \\ \psi_\mu = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi_\mu(0) = \psi_\mu^0;\ \psi_\mu'(0) = \psi_\mu^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.37}$$

com ψ_μ na classe

$$\left|\begin{array}{l} \psi_\mu \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ \psi_\mu' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \psi_\mu'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array}\right. \tag{3.38}$$

Multipliquemos $(3.37)_1$ por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integremos sobre Ω. Aplicando o teorema de Green obtemos

$$\int_\Omega \psi_\mu'' \, v dx + \int_\Omega \nabla\psi_\mu \, \nabla v dx + \int_\Omega f(\psi_\mu + h_\mu) \, v dx = \alpha \int_\Omega h_\mu v dx. \tag{3.39}$$

Consideremos agora (ψ_σ^0), (ψ_σ^1), (h_σ) seqüência de valores em $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ e $H^1(0,T;L^2(\Omega))$ respectivamente, tais que

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_\sigma^0 \to \psi^0 & \text{em } H_0^1(\Omega) \\ \psi_\sigma^1 \to \psi^1 & \text{em } L^2(\Omega) \\ h_\sigma \to h & \text{em } L^2(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.40}$$

Denotaremos por ψ_σ a solução obtida no teorema 3.1 com dados ψ_σ^0, ψ_σ^1, h_σ, ou seja, ψ_σ é solução forte do problema

$$\left| \begin{array}{ll} \psi_\sigma'' - \Delta\psi_\sigma + f(\psi_\sigma + h_\sigma) = \alpha h_\sigma & \text{em} \quad Q \\ \psi_\sigma = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi_\sigma(0) = \psi_\sigma^0; \ \psi_\sigma'(0) = \psi_\sigma^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{3.41}$$

com ψ_σ na classe

$$\left| \begin{array}{l} \psi_\sigma \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)) \\ \psi_\sigma' \in L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega)) \\ \psi_\sigma'' \in L^\infty(0,T;L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.42}$$

Novamente, multipliquemos $(3.41)_1$ por $v \in H_0^1(\Omega)$ e integremos sobre Ω. Aplicando o teorema de Green obtemos

$$\int_\Omega \psi_\sigma'' \, v dx + \int_\Omega \nabla\psi_\sigma \, \nabla v dx + \int_\Omega f(\psi_\sigma + h_\sigma) \, v dx = \alpha \int_\Omega h_\sigma v' dx. \tag{3.43}$$

Subtraíndo (3.41) de (3.37), resulta

$$\left| \begin{array}{l} (\psi_\mu - \psi_\sigma)'' - \Delta(\psi_\mu - \psi_\sigma) + f(\psi_\mu + h_\mu) - f(\psi_\sigma + h_\sigma) = \alpha(h_\mu - h_\sigma) \\ (\psi_\mu - \psi_\sigma) = 0 \\ (\psi_\mu - \psi_\sigma)(0) = \psi_\mu^0 - \psi_\sigma^0; \ (\psi_\mu - \psi_\sigma)'(0) = \psi_\mu^1 - \psi_\sigma^1 \end{array} \right. \tag{3.44}$$

e para (2.36) temos subtraíndo (3.43) de (3.39)

$$\int_\Omega (\psi_\mu - \psi_\sigma)'' \, v dx + \int_\Omega \nabla(\psi_\mu - \psi_\sigma) \, \nabla v dx$$
$$+ \int_\Omega [f(\psi_\mu + h_\mu) - f(\psi_\sigma + h_\sigma)] \, v dx = \alpha \int_\Omega (h_\mu - h_\sigma) v dx. \tag{3.45}$$

Fazendo $v = \psi'_\mu - \psi'_\sigma$ em (3.45), obtemos

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\psi'_\mu - \psi'_\sigma| dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla(\psi_\mu - \psi_\sigma)| dx$$
$$+ \int_\Omega [f(\psi_\mu + h_\mu) - f(\psi_\sigma + h_\sigma)] \, [\psi'_\mu - \psi'_\sigma] dx = \alpha \int_\Omega (h_\mu - h_\sigma)(\psi'_\mu - \psi'_\sigma) dx$$

e como anteriormente

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\psi'_\mu - \psi'_\sigma|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu - \psi_\sigma\|^2\right] &\leq \frac{c}{2}|h_\mu - h_\sigma|^2 \\ &+ \frac{c}{2}\{|\psi'_\mu - \psi'_\sigma|^2 + \|\psi'_\mu - \psi'_\sigma\|^2\}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

onde $c = c(\alpha, \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})})$.

Integrando (3.46) de 0 a t, e usando a desigualdade de Gronwall, obtemos

$$\begin{aligned} |\psi'_\mu(t) - \psi'_\sigma(t)|^2 &+ \|\psi_\mu(t) - \psi_\sigma(t)\|^2 \leq \\ &\leq \left[|\psi^1_\mu - \psi^1_\sigma|^2 + \|\psi^0_\mu - \psi^0_\sigma\|^2 + c\int_0^T |h_\mu(t) - h_\sigma(t)|^2 dt\right] e^{cT}. \end{aligned} \tag{3.47}$$

Passando ao limite na expressão (3.47) e considerando as convergências (3.36) e (3.40), determinamos uma função ψ tal que

$$\left| \begin{array}{l} \psi_\mu \to \psi \text{ em } C([0,T]; H^1_0(\Omega)) \\ \psi'_\mu \to \psi' \text{ em } C([0,T]; L^2(\Omega)). \end{array} \right. \tag{3.48}$$

Compondo-se $(3.37)_1$ com $v \in H^1_0(\Omega)$ multiplicando por $\theta \in \mathcal{D}(0,T)$, integrando por partes de 0 a T e aplicando o teorema de Green, temos

$$-\int_0^T (\psi'_\mu(t), v)\theta'(t) dt + \int_0^T ((\psi_\mu(t), v))\theta(t) dt + \int_0^T (f(\psi_\mu + h_\mu)(t), v)\theta(t) dt$$
$$= \alpha \int_0^T (h_\mu(t), v)\theta(t) dt. \tag{3.49}$$

Observe que

$$\left|\int_0^T (f(\psi_\mu + h_\mu), v)\theta(t)dt - \int_0^T (f(\psi + h), v)\theta(t)dt\right| \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^T |(f(\psi_\mu + h_\mu) - f(\psi + h)||v||\theta(t)| \qquad (3.50)\\
&\leq c\|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}|v| \left(\int_0^T \|\psi_\mu(t) - \psi(t)\|^2 dt + \int_0^T \|h_\mu(t) - h(t)\|^2 dt\right) \to 0.
\end{aligned}$$

Assim, passando ao limite em (3.49) quando $\mu \to \infty$, levando em conta as convergências (3.48), $(3.36)_3$ e (3.50), obtemos

$$-\int_0^T (\psi'(t), v)\theta'(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (f(\psi + h)(t), v)\theta(t)dt$$

$$= \alpha \int_0^T (h(t), v)\theta(t)dt. \qquad (3.51)$$

Aplicando a derivada no sentido das distribuições

$$\int_0^T \frac{d}{dt}(\psi'(t), v)\theta(t)dt + \int_0^T ((\psi(t), v))\theta(t)dt + \int_0^T (f(\psi + h)(t), v)\theta(t)dt$$

$$= \alpha \int_0^T (h(t), v)\theta(t)dt. \qquad (3.52)$$

De (3.52) e de (3.48), obtemos uma função $\psi : Q \to \mathbb{R}$ tal que

$$\left|\begin{array}{l}
\psi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega))\\
\dfrac{d}{dt}(\psi'(t), v) + ((\psi(t), v)) + (f(\psi + h)(t), v) = \alpha(h(t), v)\\
\text{em } \mathcal{D}'(0,T), \text{ para todo } v \in H_0^1(\Omega).
\end{array}\right. \qquad (3.53)$$

A igualdade (3.33) é provada de maneira análoga ao provado no teorema 2.2, as condições iniciais (3.34) é provada de maneira usual e a unicidade é provada usando o método dado por Visik, M.I. - Ladyzenskaja, O.A. [28].

Provaremos agora a igualdade (3.35). Para isso façamos $v = \psi'_\mu$ em (3.39)

$$\int_\Omega \psi''_\mu \psi'_\mu dx + \int_\Omega \nabla\psi_\mu \nabla\psi'_\mu dx + \int_\Omega f(\psi_\mu + h_\mu)\, \psi'_\mu dx = \alpha \int_\Omega h_\mu \psi'_\mu dx.$$

Assim

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}|\psi'_\mu(t)|^2 + \frac{1}{2}\|\psi_\mu(t)\|^2\right] = \alpha \int_\Omega h_\mu \psi'_\mu dx - \int_\Omega f(\psi_\mu + h_\mu)\, \psi'_\mu dx,$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}E(\psi_\mu;t) = \alpha\int_\Omega h_\mu \psi'_\mu dx - \int_\Omega f(\psi_\mu + h_\mu)\,\psi'_\mu dx. \tag{3.54}$$

Integrando de 0 a t e levando em conta as convergências obtidas, temos (3.35). Assim fica provado o teorema 3.2. □

Observação 3.3 *Para $h \in C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega))$ temos que o teorema 3.2 é válido pois*

$$C([0,T];L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T];H^{-1}(\Omega)) \subset C([0,T];L^2(\Omega)) \hookrightarrow L^2(0,T;L^2(\Omega)).$$

3.2 Primeiro Método do Ponto Fixo

Consideremos o problema

$$\left|\begin{array}{ll} u'' - \Delta u + f(u) = 0 & \text{em} \quad Q \\ u = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ u(T) = z^0,\ u'(T) = z^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.55}$$

onde $\{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, φ solução do problema (2.158) e f satisfazendo (3.1).

Temos que a solução de (3.55) pode ser escrita como

$$u = z + \phi + \psi \tag{3.56}$$

onde $z = z(x,t), \phi = \phi(x,t), \psi = \psi(x,t)$ são respectivamente as soluções de

$$\left|\begin{array}{ll} z'' - \Delta z + \alpha z = 0 & \text{em} \quad Q \\ z = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ z(T) = z^0,\ z'(T) = z^1 & \text{em} \quad \Omega, \end{array}\right. \tag{3.57}$$

$$\left|\begin{array}{ll} \phi'' - \Delta \phi + \alpha \phi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \phi = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \phi(T) = \phi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{3.58}$$

e

$$\left|\begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi + f(\psi + z + \phi) = \alpha(z+\phi) & \text{em} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{3.59}$$

De fato, a existência e unicidade das soluções z e ϕ dos problemas (3.57) e (3.58) é garantida graças a reversão do tempo e pelo teorema 2.11 do capítulo 2. E ainda temos que pertencem à classe

$$z, \phi \in C([0,T]; L^2(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^{-1}(\Omega)). \tag{3.60}$$

De (2.115) e (2.157) temos

$$\|z\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|z'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c\|\{z^0, z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \tag{3.61}$$

$$\|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|\phi'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq c\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}. \tag{3.62}$$

Para o sistema (3.59), temos o seguinte resultado

Lema 3.4 *Para todo* $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, $\{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *existe uma única solução* $\psi = \psi(x,t)$ *de (3.59) na classe*

$$\psi \in C([0,T]; H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; L^2(\Omega)). \tag{3.63}$$

Além disso, para todo $\varepsilon > 0$ *existe uma constante positiva* $c(\varepsilon) > 0$ *tal que*

$$\begin{aligned} &\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H_0^1(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \\ &\leq \varepsilon\left\{\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0, z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)}\right\} + c(\varepsilon). \end{aligned} \tag{3.64}$$

Demonstração: Da observação 3.3, basta considerarmos $h = z + \phi$ e em virtude da reversão do tempo, temos que (3.59) tem uma única solução na classe (3.63).

Agora vamos provar a estimativa (3.64). Com efeito, como vimos no teorema 3.2, a energia associada ao problema (3.59) é

$$E(\psi; t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\psi'(x,t)|^2 + |\nabla\psi(x,t)|^2\}dx, \ \forall t \in [0,T]. \tag{3.65}$$

Façamos a seguinte mudança de variáveis

$$\widehat{\psi}(t) = \psi(T-t). \tag{3.66}$$

Assim, fazendo esta mudança em (3.59) obtemos

$$\left| \begin{array}{ll} \widehat{\psi}'' - \Delta\widehat{\psi} + f(\widehat{\psi} + \widehat{z} + \widehat{\phi}) = \alpha(\widehat{z} + \widehat{\phi}) & \text{em} \quad Q \\ \widehat{\psi} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \widehat{\psi}(0) = \widehat{\psi}'(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.67}$$

Daí e do teorema 3.2 (na próxima desigualdade denotaremos a norma do $L^2(\Omega)$ por $\|\cdot\|$ para não confundir com o valor absoluto.)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(\widehat{\psi};t) &= -\int_0^T f(\widehat{\psi} + \widehat{z} + \widehat{\phi})\widehat{\psi}'dx + \alpha\int_0^T (\widehat{z} + \widehat{\phi})\widehat{\psi}'dx \\ &\leq c_1(\|\widehat{\psi}\| + \|\widehat{z}\| + \|\widehat{\phi}\|)\|\widehat{\psi}'\| + c_2\|\widehat{\psi}'\| + |\alpha|\|\widehat{z} + \widehat{\phi}\|\|\widehat{\psi}'\| \qquad (3.68) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega [(c_1^2 + |\alpha|^2)\|\widehat{z} + \widehat{\phi}\| + c_2^2]dx + \frac{c_1^2}{2}\lambda_1^2\int_\Omega \|\nabla\widehat{\psi}\|^2dx + 2\int_\Omega \|\widehat{\psi}'\|^2dx \\ &\leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1 + E(\widehat{\psi};t)\right\} \end{aligned}$$

$$\forall\, t \in [0,T]$$

onde $c = \max\{c_1^2 + |\alpha|^2, c_2^2 \text{ med } \Omega, c_1^2\lambda_1^2, 4\}$ com $c_1 = \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $c_2 = \|f(0)\|$, λ_1 o primeiro autovalor de $-\Delta$ em $H_0^1(\Omega)$.

De (3.68) temos o seguinte

$$\frac{d}{dt}E(\widehat{\psi};t) - cE(\widehat{\psi};t) \leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1\right\}.$$

Multipliquemos a desigualdade acima por e^{-ct} e integremos de 0 a t obtendo

$$E(\widehat{\psi};t) \leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1\right\}\left(\frac{-1}{c}e^{-cs}\right)\Bigg|_0^t.$$

Daí e do fato que $t \leq T$ temos

$$E(\widehat{\psi};t) \leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1\right\}. \tag{3.69}$$

Por outro lado,

$$E(\widehat{\psi};t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\widehat{\psi}'(t)|^2 + c|\nabla\widehat{\psi}(t)|^2\}dx$$

$\forall t \in [0,T]$. Em particular para $(T-t) \in [0,T]$, isto é,

$$
\begin{aligned}
E(\widehat{\psi}; T-t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\widehat{\psi}'(T-t)|^2 + |\nabla\widehat{\psi}(T-t)|^2\}dx \\
&= \frac{1}{2}\int_\Omega \{|\psi'(t)|^2 + |\nabla\psi(t)|^2\}dx = E(\psi;t).
\end{aligned}
$$

Daí e de (3.69) temos

$$
\left|\begin{array}{l}
E(\psi;t) \leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1\right\} \\
\forall t \in [0,T]; \forall\{\varphi^0,\varphi^1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega), \{z^0,z^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)
\end{array}\right. \tag{3.70}
$$

para $c > 0$ suficientemente grande.

Agora de (3.90), (3.61), (3.62) e (3.70) obtemos

$$
\left|\begin{array}{l}
\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + \|u'\|^2_{L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leq \\
\qquad \leq c\left\{\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0,z^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} + 1\right\} \\
\forall\, t \in [0,T]; \forall\,\{\varphi^0,\varphi^1\} \in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega), \{z^0,z^1\} \in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)
\end{array}\right. \tag{3.71}
$$

para $c > 0$ suficientemente grande.

Para provarmos (3.64), escrevemos a equação correspondente a ψ como segue

$$
\psi'' - \Delta\psi + \alpha\psi = \alpha(\psi + z + \phi) - f(\psi + z + \phi) = \alpha u - f(u).
$$

Pelo teorema 3.2 temos

$$
E(\psi;t) \leq c\|\alpha u - f(u)\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))}, \forall\, t \in [0,T] \tag{3.72}
$$

para alguma constante $c > 0$ dependendo de α e T.

De (3.1) deduzimos que, para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um $c(\varepsilon) > 0$ suficientemente grande tal que

$$
E(\psi;t) \leq \varepsilon\|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c(\varepsilon), \forall\, t \in [0,T]. \tag{3.73}
$$

De fato, de (3.1) temos que para todo $\varepsilon_1 > 0$, existe um $N(\varepsilon_1) > 0$ tal que

$$
|\alpha s - f(s)| < \varepsilon_1|s|, \;\forall\, |s| > N.
$$

Se $s \in [-N, N]$ então $f \in L^\infty[-N, N], f' \in L^\infty[-N, N]$ o que implica que $f \in C[-N, N]$, isto é,

$$|f(s) \leq \|f\|_{L^\infty[-N,N]}, \forall\, s \in [-N, N].$$

Desta duas desigualdades resulta que

$$\begin{aligned}\|\alpha u(t) - f(u(t))\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq \varepsilon_1^2 \|u(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + c_1(\varepsilon_1)\\ &\leq \varepsilon_1^2 \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c_1(\varepsilon_1).\end{aligned}$$

Daí, tomando o supremo essencial e $\varepsilon_1 = \dfrac{\sqrt{\varepsilon}}{c}$, $\varepsilon > 0$ arbitrário, temos que

$$c\|\alpha u(t) - f(u(t))\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} \leq \varepsilon \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c(\varepsilon),$$

o que prova (3.73).

De (3.73) e (3.71) temos

$$\begin{aligned} E(\psi; t) &\leq \varepsilon \|u\|^2_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega))} + c(\varepsilon) \qquad (3.74)\\ &\leq \varepsilon \left\{ \|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^2_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \|\{z^0, z^1\}\|^2_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \right\} + c(\varepsilon)\end{aligned}$$

o que prova o lema 3.4. □

Observação 3.5 *O sistema (1) possui uma única solução com dado* $\{y^0, y^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ *e* f *satisfazendo (3.1). A prova disto é análoga a do problema (3.55).*

Teorema 3.6 *Seja* $T_0 > 0$ *tal que a controlabilidade exata de (1) é válida para* $f \equiv 0$ *no espaço* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *com controle em* $L^2(\Sigma)$ *para* $T > T_0$*. Então o sistema (1) é também exatamente controlável nestes espaços para* $T > T_0$ *e para qualquer* f *satisfazendo (3.1). Isto é, para cada dado* $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$*, existe um controle* $v \in L^2(\Sigma)$ *tal que a solução* y *do problema (1) verifica*

$$y(T) = z^0,\ y'(T) = z^1$$

para $T > T_0$ *e para qualquer* f *satisfazendo (3.1).*

Demonstração: Fixamos um estado arbitrário $\{z^0, z^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$.

Construímos agora o operador não linear

$$\begin{array}{rccc} \mu: & H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \rightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ & \{\varphi^0, \varphi^1\} & \mapsto & \mu\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{u'(0), -u(0)\} \end{array} \tag{3.75}$$

onde $u = u(x,t)$ é a única solução de (3.55).

Observe que o operador μ está bem definido de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ em $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$ pois (3.55) tem solução dada por (3.90).

Para provar a controlabilidade exata de (1) é suficiente provar que o operador μ é sobrejetor. Para isso, definamos o operador

$$\begin{array}{rccc} K: & H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \rightarrow & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ & \{\varphi^0, \varphi^1\} & \mapsto & K\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \end{array} \tag{3.76}$$

Temos que este operador é contínuo. Com efeito, consideremos os seguintes problemas

$$\left| \begin{array}{ll} \eta'' - \Delta\eta + \alpha\eta = 0 & \text{em} \quad Q \\ \eta = \dfrac{\partial \chi}{\partial \nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \eta(T) = \eta'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{3.77}$$

e

$$\left| \begin{array}{ll} \xi'' - \Delta\xi + f(\xi + z + \eta) = \alpha(z+\eta) & \text{em} \quad Q \\ \xi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \xi(T) = \xi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array} \right. \tag{3.78}$$

onde χ é solução de

$$\left| \begin{array}{ll} \chi'' - \Delta\chi + \alpha\chi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \chi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \chi(0) = \chi^0,\ \chi'(0) = \chi^1 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{3.79}$$

Subtraíndo (3.78) de (3.59) temos

$$\left| \begin{array}{l} (\psi - \xi)'' - \Delta(\psi - \xi) + f(\psi + z + \phi) - f(\xi + z + \eta) = \alpha(\phi - \eta) \\ (\psi - \xi) = 0 \\ (\psi - \xi)(T) = (\psi - \xi)'(T) = 0. \end{array} \right. \tag{3.80}$$

Para o sistema (3.80) temos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(\psi-\xi;t) &= \int_\Omega [f(\xi+z+\eta)-f(\psi+z+\phi)]\,(\psi'-\xi')dx \\
&+ \alpha\int_\Omega (\phi-\eta)(\psi'-\xi')dx \\
&\leq c_1(\|\psi-\xi\|+\|\phi-\eta\|)\|\psi'-\xi'\|+\alpha\|\phi-\eta\|\|\psi'-\xi'\| \\
&\leq \frac{1}{2}(c_1^2+|\alpha|^2)\|\phi-\eta\|^2+\frac{3}{2}\|\psi'-\xi'\|^2+\frac{c_1^2}{2}\|\psi-\xi\|^2 \\
&\leq c\left\{\|\{\varphi^0-\chi^0,\varphi^1-\chi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}+E(\psi-\xi;t)\right\}.
\end{aligned}
$$

Pelo fato que $E(\psi-\xi;T)=0$, fazendo uma reversão do tempo e usando a desigualdade de Gronwall, temos

$$E(\psi-\xi;t)\leq c\left\{\|\{\varphi^0-\chi^0,\varphi^1-\chi^1\}\|^2_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\right\},\ \forall\, t\in[0,T]. \tag{3.81}$$

Em particular, para $t=0$, obtemos

$$\|K\{\varphi^0,\varphi^1\}-K\{\chi^0,\chi^1\}\|_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq c\|\{\varphi^0,\varphi^1\}-\{\chi^0,\chi^1\}\|_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)},$$

o que implica que o operador K é contínuo.

Para a compacidade de K, vamos mostrar que K leva limitados de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ em relativamente compactos de $H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$. De fato, consideremos a bola $B_\alpha\subset H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ limitada. Logo pelo Lema 3.4, $K(B_\alpha)$ é limitada em $L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$. Pelo Teorema 1.13

$$L^2(\Omega)\times H_0^1(\Omega)\overset{c}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

então

$$\overline{K(B_\alpha)}^{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \text{ é compacto em } H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega).$$

Logo o operador K é compacto, o que prova a afirmação feita em (3.76).

Vamos provar que o operador μ é sobrejetor, isto é, dados $\{y^0,y^1\}\in L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)$, existe $\{\varphi^0,\varphi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ tal que

$$\mu\{\varphi^0,\varphi^1\}=\{y^1,-y^0\}. \tag{3.82}$$

Para provarmos (3.82), podemos escrever o operador μ como segue

$$\begin{aligned}
\mu\{\varphi^0,\varphi^1\} &= \{\psi'(0),-\psi(0)\}+\{\phi'(0),-\phi(0)\}+\{z'(0),-z(0)\}\\
&= K\{\varphi^0,\varphi^1\}+\Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}+\{z'(0),-z(0)\} \qquad (3.83)
\end{aligned}$$

$\forall\,\{\varphi^0,\varphi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$.

Como vimos na demonstração do teorema 2.12, Λ é um isomorfismo de $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\rightarrow H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)$. Assim, a equação (3.82) pode ser reescrita como segue

$$K\{\varphi^0,\varphi^1\}+\Lambda\{\varphi^0,\varphi^1\}+\{z'(0),-z(0)\}=\{y^1,-y^0\},$$

ou equivalentemente,

$$\{\varphi^0,\varphi^1\}=-\Lambda^{-1}K\{\varphi^0,\varphi^1\}+\Lambda^{-1}\{y^1-z'(0),-y^0+z(0)\}. \qquad (3.84)$$

A expressão (3.84), nos induz a definir o seguinte operador

$$\left|\begin{array}{l}
\Theta: H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\rightarrow H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)\\
\Theta\{\varphi^0,\varphi^1\}=-\Lambda^{-1}K\{\varphi^0,\varphi^1\}+\Lambda^{-1}\{y^1-z'(0),-y^0+z(0)\}.
\end{array}\right. \qquad (3.85)$$

O operador Θ acima definido tem um ponto fixo. Vamos comprovar isto utilizando o teorema de Schauder. De fato, sendo o operador K compacto, temos que o operador Θ também é compacto.

Vamos mostrar que existe um $M>0$ tal que

$$\|\Theta\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq M,\ \forall\{\varphi^0,\varphi^1\}\in H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega),$$

com

$$\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\leq M. \qquad (3.86)$$

Com efeito, de (3.64) com $\varepsilon=\dfrac{1}{2c_1\|\Lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega),H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))}}$ e de (3.61) temos

$$\begin{aligned}
\|\Theta\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &\leq \|\Lambda^{-1}K\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\
&+ \|\Lambda^{-1}\{y^1-z'(0),-y^0+z(0)\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}\\
&\leq \frac{1}{2}\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}+c \qquad (3.87)
\end{aligned}$$

onde c depende apenas de $\{y^0, y^1\}, \{z^0, z^1\}$.

Tomando $M \geq 2c > 0$ temos de (3.86) e (3.87)

$$\begin{aligned}\|\Theta\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &\leq \frac{1}{2}\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}M \\ &\leq \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M = M.\end{aligned}$$

Aplicando o teorema de Schauder, temos que o operador Θ possui um ponto fixo, isto é,

$$\Theta\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\varphi^0, \varphi^1\} \tag{3.88}$$

o que prova nossa afirmação.

De (3.88) e da definição de Θ temos

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} = -\Lambda^{-1}K\{\varphi^0, \varphi^1\} + \Lambda^{-1}\{y^1 - z'(0), -y^0 + z(0)\},$$

isto é,

$$\{\psi'(0), -\psi(0)\} + \{\phi'(0), -\phi(0)\} + \{z'(0), -z(0)\} = \{y^1, -y^0\}$$

e por (3.83) temos

$$\mu\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

provando (3.82).

Por definição do operador μ e de (3.82) temos

$$\{u'(0), -u(0)\} = \{y^1, -y^0\}$$

o que prova

$$u(0) = y^0 \text{ e } u'(0) = y^1 \tag{3.89}$$

onde u é a única solução de (3.55).

Considerando-se

$$v = \frac{\partial\varphi}{\partial\nu} \text{ em } \Sigma \tag{3.90}$$

no problema (1) sujeito aos dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, temos que tal problema possui única solução y. Observemos que de (3.55) e (3.89) resulta que u é também solução do problema (1). Logo, pela unicidade de soluções vem que $y = u$. Conseqüentemente de $(3.55)_3$ concluímos que

$$y(T) = z^0, \;\; y'(T) = z^1, \quad \forall\, T > T_0.$$

$\square$

Capítulo 4

Controlabilidade Exata na Fronteira: Caso Superlinear

Neste capítulo desejamos resolver o seguinte problema de controlabilidade local para o problema (1), onde f é superlinear: "Dado $T_0 > 0$, para todo $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ tal que a única solução y do problema (1) satisfaz $y(T) = y'(T) = 0, \ \forall T > T_0$."

Para resolver este problema, assumiremos que $f \in W^{1,\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ satisfaz

$$f(0) = 0 \tag{4.1}$$

$$\left| \begin{array}{l} \exists\, c > 0, p > 1 : |f'(s)| \leq c|s|^{p-1} \ \forall\, s \in \mathbb{R} \\ \text{com} \begin{cases} p \leq 2 \text{ se } n = 1 \\ p < 1 + \frac{2}{n} \text{ se } n \geq 2. \end{cases} \end{array} \right. \tag{4.2}$$

4.1 Segundo Método do Ponto Fixo

Consideremos o problema

$$\left| \begin{array}{lll} u'' - \Delta u + f(u) = 0 & \text{em} & Q \\ u = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \nu} & \text{sobre} & \Sigma \\ u(T) = u'(T) = 0 & \text{em} & \Omega \end{array} \right. \tag{4.3}$$

onde φ é solução de

$$\left|\begin{array}{ll} \varphi'' - \Delta\varphi = 0 & \text{em} \quad Q \\ \varphi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \varphi(0) = \varphi^0, \ \varphi'(0) = \varphi^1 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.4}$$

com $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ e f satisfazendo (4.2).

Temos que a solução de (4.3) pode ser escrita como

$$u = h + \psi \tag{4.5}$$

onde $h = h(x,t), \psi = \psi(x,t)$ são respectivamente as soluções de

$$\left|\begin{array}{ll} h'' - \Delta h = 0 & \text{em} \quad Q \\ h = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\nu} & \text{sobre} \quad \Sigma \\ h(T) = h'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega \end{array}\right. \tag{4.6}$$

e

$$\left|\begin{array}{ll} \psi'' - \Delta\psi + f(\psi + h) = 0 & \text{em} \quad Q \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \psi(T) = \psi'(T) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array}\right. \tag{4.7}$$

Com efeito, o sistema (4.6) tem solução na classe (3.60) e a estimativa (3.62) é válida, como vimos no capítulo anterior.

Para o sistema (4.7) temos o seguinte resultado:

Lema 4.1 *Se f satisfaz (4.1) e (4.2) então existe uma constante $M > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ tal que para todo $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ verificando*

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq M \tag{4.8}$$

existe uma única solução $\psi = \psi(x,t)$ de (4.7) na classe

$$\psi \in C_s([0,T]; H_0^\varepsilon(\Omega)) \cap C_s^1([0,T]; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.9}$$

Mais ainda, temos a seguinte estimativa

$$\|\psi\|_{L^\infty(0,T;H_0^\varepsilon(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^\infty(0,T;H^{-1+\varepsilon}(\Omega))} \leq c\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \tag{4.10}$$

para alguma constante $c > 0$ a qual não depende de $\{\varphi^0, \varphi^1\}$.

Demonstração: Fazendo a seguinte mudança de variáveis

$$\widehat{\psi}(t) = \psi(T - t) \tag{4.11}$$

temos que o problema (4.7) se reescreve como

$$\left| \begin{array}{ll} \widehat{\psi}'' - \Delta \widehat{\psi} + f(\widehat{\psi} + \widehat{h}) = 0 & \text{em} \quad Q \\ \widehat{\psi} = 0 & \text{sobre} \quad \Sigma \\ \widehat{\psi}(0) = \widehat{\psi}'(0) = 0 & \text{em} \quad \Omega. \end{array} \right. \tag{4.12}$$

Vamos mostrar que existe um $\tau > 0$ tal que o problema (4.12) tem uma única solução fraca $\widehat{\psi}$ na classe

$$\widehat{\psi} \in C_s([0, \tau[; H_0^{\varepsilon}(\Omega)) \cap C_s^1([0, \tau[; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.13}$$

Para isto utilizaremos o método do Faedo-Galerkin.

Consideremos o operador $A = -\Delta : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ com domínio $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Observação 4.2 *Temos que $H_0^{2-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ com imersão compacta e $H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)$ é separável, portanto, $H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)$ possui uma base.*

Seja $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ base de $H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)$ e $V_m = [w_1, ..., w_m]$. Devemos obter uma $\widehat{\psi}_m(t) \in V_m$, tal que

$$\left| \begin{array}{l} \langle \widehat{\psi}_m''(t), w_j \rangle + \langle A\widehat{\psi}_m(t), w_j \rangle + \int_\Omega f(\widehat{\psi}_m(t) + \widehat{h}(t))\, w_j \, dx = 0 \\ \psi_m(0) = 0, \;\; \psi_m'(0) = 0. \end{array} \right. \tag{4.14}$$

A existência local em $[0, t_m]$ é garantido pela teoria de equações diferenciais lineares.

Dada uma solução local $\widehat{\psi}_m$ de (4.14) introduzimos a energia

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\psi}_m}(t) &= \frac{1}{2}\{\langle \widehat{\psi}_m'(t), A^{-1+\varepsilon}\widehat{\psi}_m'(t) \rangle + \langle \widehat{\psi}_m(t), A^{\varepsilon}\widehat{\psi}_m(t) \rangle\} \\ &= \frac{1}{2}\{\|A^{(-1+\varepsilon)/2}\widehat{\psi}_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|A^{\varepsilon/2}\widehat{\psi}_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2\}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Em (4.15) o primeiro (respectivamente o segundo) $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a dualidade entre $H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$ e $H_0^{1-\varepsilon}(\Omega)$ (respectivamente $H_0^{\varepsilon}(\Omega)$ e $H^{-\varepsilon}(\Omega)$).

Temos ainda que $(E_{\widehat{\psi}_m}(t))^{1/2}$ é uma norma no espaço $H_0^{\varepsilon}(\Omega) \times H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$, equivalente a usual (veja Lions-Magenes [15]), isto é,

$$\begin{aligned} E_{\widehat{\psi}_m}^{1/2}(t) &= \left[\frac{1}{2} \{ \| A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} + \| A^{\varepsilon/2} \widehat{\psi}_m(t) \|^2_{L^2(\Omega)} \} \right]^{1/2} \\ &\approx \left\{ \frac{1}{2} \| \widehat{\psi}'_m(t) \|^2_{H^{-1+\varepsilon}(\Omega)} + \frac{1}{2} \| \widehat{\psi}_m(t) \|^2_{H_0^{\varepsilon}(\Omega)} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Observação 4.3 *Para* $0 < \varepsilon < 1$ *temos*

$$A^{1-\varepsilon} \in \mathcal{L}(H_0^{2-\varepsilon}(\Omega), H^{\varepsilon}(\Omega))$$

$$A^{-1+\varepsilon} \in \mathcal{L}(H^{\varepsilon}(\Omega), H_0^{2-\varepsilon}(\Omega)).$$

Temos que

$$\widehat{\psi}'_m(t) \in V_m \subset H_0^{2-\varepsilon}(\Omega) \hookrightarrow H^{\varepsilon}(\Omega)$$

então faz sentido calcular

$$A^{-1+\varepsilon} \widehat{\psi}'_m(t) \in H_0^{2-\varepsilon}(\Omega).$$

Portanto de $(4.14)_1$ e da observação acima, temos

$$\begin{gathered} \langle \widehat{\psi}''_m(t), A^{-1+\varepsilon} \widehat{\psi}'_m(t) \rangle + \langle A \widehat{\psi}_m(t), A^{-1+\varepsilon} \widehat{\psi}'_m(t) \rangle \\ + \int_\Omega f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t)\, A^{-1+\varepsilon} \widehat{\psi}'_m(t) dx = 0. \end{gathered}$$

Assim

$$\frac{d}{dt} E_{\widehat{\psi}_m}(t) = - \int_\Omega A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t)\, A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(t) dx. \tag{4.17}$$

De (4.1) e de (4.2) temos

$$|f(t)| \leq \frac{c}{p} |t|^p, \ \ \forall\, t \in \mathbb{R} \tag{4.18}$$

e

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq c(|s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1}) |s_1 - s_2| \ \ \forall\, s_1, s_2 \in \mathbb{R}. \tag{4.19}$$

De (4.17), da equivalência de normas (4.16), (4.18) e pelo fato que $L^{2/p}(\Omega) \hookrightarrow H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$ (vide Lema 1.15), temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E_{\widehat{\psi}_m}(t) &\leq |A^{(-1+\varepsilon)/2}f(\widehat{\psi}_m+\widehat{h})(t)||A^{(-1+\varepsilon)/2}\widehat{\psi}_m'(t)| \\
&\leq c\|f(\widehat{\psi}_m+\widehat{h})(t)\|_{H^{-1+\varepsilon}(\Omega)}E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t) \\
&\leq c\|f(\widehat{\psi}_m+\widehat{h})(t)\|_{L^{2/p}(\Omega)}E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t) \\
&\leq c|\widehat{\psi}_m(t)+\widehat{h}|^p E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t) \\
&\leq c|\widehat{\psi}_m(t)|^p E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t) + c|\widehat{h}(t)|^p E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t)dt \\
&\leq c\left[\|\widehat{\psi}_m(t)\|^p_{H_0^\varepsilon}E^{1/2}_{\widehat{\psi}}(t) + c|\widehat{h}(t)|^p E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t)\right] \\
&\leq c\left[E^{p/2}_{\widehat{\psi}_m}(t)E^{1/2}_{\widehat{\psi}_m}(t) + |\widehat{h}(t)|^{2p} + E_{\widehat{\psi}_m}(t)\right],
\end{aligned}$$

isto é,

$$\frac{d}{dt}E_{\widehat{\psi}_m}(t) \leq c\left[E^{\frac{p+1}{2}}_{\widehat{\psi}_m}(t) + E_{\widehat{\psi}_m}(t) + |h(t)|^{2p}\right]. \tag{4.20}$$

Multiplicando (4.20) por e^{-ct}, integrando de 0 a t e de (3.62) obtemos

$$E_{\widehat{\psi}_m}(t) \leq k_1 + k_2\int_0^t E^{\frac{p+1}{2}}_{\widehat{\psi}_m}(s)ds, \tag{4.21}$$

onde $k_1 = ce^{cT}\|\{\varphi^0,\varphi^1\}\|^{2p}_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)}$ e $k_2 = ce^{cT}$.

Fazendo

$$\zeta(t) = k_1 + k_2\int_0^t E^{\frac{p+1}{2}}_{\widehat{\psi}_m}(s)ds \tag{4.22}$$

temos de (4.21) e (4.22)

$$\begin{aligned}
E_{\widehat{\psi}_m}(t) &\leq \zeta(t) &(4.23)\\
\zeta'(t) &= k_2E^{\frac{p+1}{2}}_{\widehat{\psi}_m}(t) &(4.24)\\
\zeta(0) &= k_1. &(4.25)
\end{aligned}$$

Por hipótese temos

$$1 < p < 1 + \frac{2}{n} \;\Leftrightarrow\; 1 < \frac{p+1}{2} < \frac{3}{2}. \tag{4.26}$$

De (4.23), (4.24) e (4.26) temos

$$E^{\frac{p+1}{2}}_{\widehat{\psi}_m}(t) \leq \zeta^{\frac{p+1}{2}}(t) \Leftrightarrow \frac{-2}{p-1}\frac{d}{dt}\zeta^{-\frac{p-1}{2}}(t) \leq k_2.$$

Integrando de 0 a t e levando em conta (4.25) temos

$$\zeta^{-\frac{p-1}{2}}(t) \geq k_1^{-\frac{p-1}{2}} - \frac{p-1}{2}k_2 t. \tag{4.27}$$

Por outro lado,

$$k_1^{-\frac{p-1}{2}} - \frac{p-1}{2}k_2 t \geq 0, \quad \forall\, t \in \left[0, \frac{2}{(p-1)k_2 k_1^{(p-1)/2}}\right].$$

Seja τ_1, $0 < \tau_1 < \frac{2}{(p-1)k_2 k_1^{(p-1)/2}}$ tal que

$$k_1^{-\frac{p-1}{2}} - \frac{p-1}{2}k_2 t > 0 \quad \forall\, t \in [0, \tau_1].$$

Daí e de (4.27), temos que para todo $t \in [0, \tau_1]$

$$\zeta(t) \leq \left(\frac{1}{k_1^{-\frac{p-1}{2}} - \frac{p-1}{2}k_2\tau_1}\right)^{\frac{2}{p-1}} = k_3.$$

De (4.23) temos

$$E_{\widehat{\psi}_m}(t) \leq k_3,$$

seja $\tau_0 = \min\{\tau_1, T\}$ então

$$\frac{1}{2}\|\widehat{\psi}'_m(t)\|^2_{H^{-1+\varepsilon}(\Omega)} + \frac{1}{2}\|\widehat{\psi}_m(t)\|^2_{H_0^{\varepsilon}(\Omega)} \leq k_3, \quad \forall\, t \in [0, \tau_0].$$

Logo

$$(\widehat{\psi}_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, \tau_0; H_0^\varepsilon(\Omega)) \tag{4.28}$$

$$(\widehat{\psi}'_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, \tau_0; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.29}$$

De (4.28) e pelo fato que $A = -\Delta : H^\varepsilon(\Omega) \to H^{-2+\varepsilon}(\Omega)$ é contínua, temos que

$$(A\widehat{\psi}_m) \text{ é limitada em } L^\infty(0, \tau_0; H^{-2+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.30}$$

Agora, multiplicando $(4.14)_1$ por $\theta \in \mathcal{D}(0, \tau_0)$ e integrando de 0 a τ_0. Obtemos

$$\begin{aligned} -\int_0^{\tau_0} \langle \widehat{\psi}'_m(t), w_j\rangle \theta'(t)dt + \int_0^{\tau_0} \langle A\widehat{\psi}_m(t), w_j\rangle \theta(t)dt \\ + \int_0^{\tau_0}\int_\Omega f(\widehat{\psi}_m(t) + \widehat{h}(t))\, w_j\, \theta(t)dxdt = 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

Das estimativas (4.29) e (4.30) podemos passar ao limite nos termos lineares de (4.31). Vamos verificar o termo não linear:

Sabendo que

$$H_0^\varepsilon(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1+\varepsilon}(\Omega)$$

e pondo

$$W = \{\psi \in L^2(0,T;H_0^\varepsilon(\Omega)); \psi' \in L^2(0,T;H^{-1+\varepsilon}(\Omega))\}$$

munido da topologia

$$\|\psi\|_W = \|\psi\|_{L^2(0,T;H_0^\varepsilon(\Omega))} + \|\psi'\|_{L^2(0,T;H^{-1+\varepsilon}(\Omega))},$$

resulta de (4.28) e (4.29) que $(\widehat{\psi}_m)$ é limitada em W. Logo pelo teorema de Aubin-Lions obtemos uma subseqüência de $\widehat{\psi}_m$ que ainda denotaremos por $\widehat{\psi}_m$ tal que

$$\widehat{\psi}_m \to \widehat{\psi} \ \text{ forte em } L^2(0,\tau_0;L^2(\Omega)). \tag{4.32}$$

Em particular,

$$\widehat{\psi}_m \to \widehat{\psi} \ \text{ forte em } L^2(0,t;L^2(\Omega)), \ \ t \in [0,\tau_0]. \tag{4.33}$$

Agora, da desigualdade de Hölder e de (4.19) temos

$$\begin{aligned}
&\left|\int_0^{\tau_0}\int_\Omega (f(\phi_\mu+h)(t) - f(\phi+h)(t))\, w_j\, \theta(t)dxdt\right| \leq \\
&\leq \int_0^{\tau_0}\int_\Omega |f(\widehat{\psi}_m+\widehat{h})(t) - f(\widehat{\psi}+\widehat{h})(t)|\, |w_j|\, |\theta(t)|dxdt \\
&\leq \int_0^{\tau_0} \|f(\widehat{\psi}_m+\widehat{h})(t) - f(\widehat{\psi}+\widehat{h})(t)\|_{L^{2/p}(\Omega)}\, \|w_j\|_{L^{2/(2-p)}(\Omega)}\, |\theta(t)|dt \\
&\leq \int_0^{\tau_0} (\|\widehat{\psi}_m+\widehat{h}\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\psi}+\widehat{h}\|^{p-1}_{L^2(\Omega)})\, \|\widehat{\psi}_m-\widehat{\psi}\|_{L^2(\Omega)}\, \|w_j\|_{L^{2/(2-p)}(\Omega)}\, |\theta(t)|dt
\end{aligned}$$

Daí, de (4.29) e (4.30) podemos passar ao limite em (4.31) quando $m \to \infty$ e obtemos

$$\begin{aligned}
-\int_0^{\tau_0} \langle \widehat{\psi}'(t), w_j\rangle \theta'(t)dt + \int_0^{\tau_0} \langle A\widehat{\psi}(t), w_j\rangle \theta(t)dt \\
+ \int_0^{\tau_0}\int_\Omega f(\widehat{\psi}(t)+\widehat{h}(t))\, w_j\, \theta(t)dxdt = 0
\end{aligned} \tag{4.34}$$

para todo $\theta \in \mathcal{D}(0,\tau_0)$.

Após cálculos diretos obtemos de (4.34) que

$$\widehat{\psi}'' - \Delta\widehat{\psi} + f(\widehat{\psi} + \widehat{h}) = 0 \text{ em } L^{\infty}(0, \tau_0; H^{-2+\varepsilon}(\Omega)).$$

Da expressão acima, de (4.29) e (4.28) temos, respectivamente,

$$\widehat{\psi}'' \in L^{\infty}(0, \tau_0; H^{-2+\varepsilon}(\Omega))$$

$$\widehat{\psi}' \in L^{\infty}(0, \tau_0; H^{-1+\varepsilon}(\Omega))$$

$$\widehat{\psi} \in L^{\infty}(0, \tau_0; H_0^{\varepsilon}(\Omega))$$

e portanto, da observação 1.21 e do Lema 1.22 temos

$$\widehat{\psi} \in C_s([0, \tau_0]; H_0^{\varepsilon}(\Omega)) \cap C_s^1([0, \tau_0]; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.35}$$

A unicidade da solução é provada usando o método dado por Visik, M.I. - Ladyzenskaja, O.A. [28].

Em seguida passamos a considerar um intervalo máximal no qual existe solução para (4.12). Dessa forma temos:

$$\widehat{\psi} \in C_s([0, \tau_{max}[; H_0^{\varepsilon}(\Omega)) \cap C_s^1([0, \tau_{max}[; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)), \tag{4.36}$$

onde $\tau = \tau_{max} = \sup \mathcal{T}$ com $\mathcal{T} = \{\tau_0 > 0; \psi$ é a solução fraca de (4.12) em $[0, \tau_0]\}$.

De (4.13) e de (4.11) temos que (4.7) admite uma única solução fraca ψ na classe

$$\psi \in C_s((T - \tau, T]; H_0^{\varepsilon}(\Omega)) \cap C_s^1((T - \tau, T]; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)). \tag{4.37}$$

Além disso, uma das seguintes afirmações é verdadeira

$$\tau > T \tag{4.38}$$

$$\lim_{t \to T - \tau} (\|\psi\|_{H_0^{\varepsilon}(\Omega)} + \|\psi'(t)\|_{H^{-1+\varepsilon}(\Omega)}) = +\infty. \tag{4.39}$$

Vamos provar que vale (4.38) para $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ suficientemente pequeno, obtendo simultaneamente a estimativa (4.10). De fato, integrando (4.17) de 0 a t, obtemos

$$E_{\widehat{\psi}_m}(t) = -\int_0^t \int_{\Omega} A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(s)\, A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(s) dx ds. \tag{4.40}$$

Agora, da equivalência de normas e de (4.19) temos

$$\int_0^t \int_\Omega \left| A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t) - A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(t) \right|^2 dxdt \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^t \int_\Omega \left| A^{(-1+\varepsilon)/2} \left[f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t) - f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(t) \right] \right|^2 dxdt \\
&\leq c \int_0^t \| f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t) - f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(t) \|^2_{L^{2/p}(\Omega)} dt \\
&\leq \int_0^t (\|\widehat{\psi}_m + \widehat{h}\|^{p-1}_{L^2(\Omega)} + \|\widehat{\psi} + \widehat{h}\|^{p-1}_{L^2(\Omega)})^2 \, \|\widehat{\psi}_m - \widehat{\psi}\|^2_{L^2(\Omega)} dt.
\end{aligned}$$

Daí, de (4.28) e (4.33) temos que

$$\int_0^t \int_\Omega A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t) dxdt \to \int_0^t \int_\Omega A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(t) dxdt. \tag{4.41}$$

De (4.29) e da equivalência de normas, resulta que

$$A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m \overset{*}{\rightharpoonup} A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}' \text{ em } L^\infty(0, \tau_0; L^2(\Omega))$$

daí e de (4.41) podemos passar limite no segundo membro de (4.40).

Multipliquemos (4.40) por $\theta \geq 0$, $\theta \in C[0, \tau_0]$ e integremos de 0 a τ_0. Assim temos

$$\frac{1}{2} \|\widehat{\psi}'_m \theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0; H^{-1+\varepsilon}(\Omega))} + \frac{1}{2} \|\widehat{\psi}_m \theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0; H^\varepsilon_0(\Omega))} =$$

$$= -\int_0^{\tau_0} \theta(t) \int_0^t \left(A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(s), A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(s) \right) dsdt. \tag{4.42}$$

Como

$$\widehat{\psi}'_m \theta^{1/2} \rightharpoonup \widehat{\psi}' \theta^{1/2} \text{ em } L^2(0, \tau_0; H^{-1+\varepsilon}(\Omega) \tag{4.43}$$

$$\widehat{\psi}_m \theta^{1/2} \rightharpoonup \widehat{\psi} \theta^{1/2} \text{ em } L^2(0, \tau_0; H^\varepsilon_0(\Omega) \tag{4.44}$$

$$\int_0^{\tau_0} \theta(t) \int_0^t \left(A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi}_m + \widehat{h})(t), A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(s) \right) dsdt \to$$

$$\int_0^{\tau_0} \theta(t) \int_0^t \left(A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(t), A^{(-1+\varepsilon)/2} \widehat{\psi}'_m(s) \right) dsdt. \tag{4.45}$$

Tomando o limite inferior em (4.42) temos de (4.43), (4.44) e (4.45) que

$$\frac{1}{2}\|\widehat{\psi}'\theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0;H^{-1+\varepsilon}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\widehat{\psi}\theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0;H^{\varepsilon}_0(\Omega))} \leq$$

$$\leq \liminf \left\{ \frac{1}{2}\|\widehat{\psi}'_m\theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0;H^{-1+\varepsilon}(\Omega))} + \frac{1}{2}\|\widehat{\psi}_m\theta^{1/2}\|^2_{L^2(0,\tau_0;H^{\varepsilon}_0(\Omega))} \right\}$$

$$= -\int_0^{\tau_0} \theta(t) \int_0^t \left(A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(s), A^{(-1+\varepsilon)/2}\widehat{\psi}'(s) \right) dsdt,$$

isto é,

$$\frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} \|\widehat{\psi}'(t)\|^2_{H^{-1+\varepsilon}(\Omega)}\theta(t)dt + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_0} \|\widehat{\psi}(t)\|^2_{H^{\varepsilon}_0(\Omega)}\theta(t)dt \leq$$

$$\leq -\int_0^{\tau_0} \theta(t) \int_0^t \left(A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(s), A^{(-1+\varepsilon)/2}\widehat{\psi}'(s) \right) dsdt,$$

para todo $\theta \geq 0$. Logo

$$E_{\widehat{\psi}}(t) \;\leq\; -\int_0^t \int_\Omega A^{(-1+\varepsilon)/2} f(\widehat{\psi} + \widehat{h})(s)\, A^{(-1+\varepsilon)/2}\widehat{\psi}'(s)dxds. \tag{4.46}$$

De (4.46) temos

$$E_{\widehat{\psi}}(t) \leq \int_0^t \left[cE_{\widehat{\psi}}(s) + cE^{(p+1)/2}_{\widehat{\psi}}(s) + c^{2p}|\widehat{h}(s)|^{2p} \right] ds, \tag{4.47}$$

de (4.47) e (3.62) temos

$$E_{\widehat{\psi}}(t) \leq \int_0^t \left[cE_{\widehat{\psi}}(s) + cE^{(p+1)/2}_{\widehat{\psi}}(s) + c^{2p}\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^{2p}_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)} \right] ds \tag{4.48}$$

De (4.48) e pelo Lema de Gronwall, temos

$$E_{\widehat{\psi}}(t) \leq c^{2p}\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^{2p}_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\, t\, e^{ct}\, e^{\int_0^t cE^{(p-1)/2}_{\widehat{\psi}}(s)ds}, \quad \forall\, t \in [0, \tau[. \tag{4.49}$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis em (4.49) temos

$$E_{\psi}(t) \leq c^{2p}\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^{2p}_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)}\, (T - t)\, e^{c(T-t)}\, e^{\int_t^T cE^{(p-1)/2}_{\psi}(s)ds}, \quad \forall\, t \in]T - \tau, T],$$

isto é,

$$E_{\psi}(t)e^{-c\int_t^T E^{(p-1)/2}_{\psi}(s)ds} \leq c\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^{2p}_{H^1_0(\Omega)\times L^2(\Omega)},$$

ou ainda, de (4.8) temos que

$$E_{\psi}(t)\frac{e^{-c\int_t^T E^{(p-1)/2}_{\psi}(s)ds}}{M^{2p}} \leq c. \tag{4.50}$$

De (4.50) concluímos que se $M > 0$ é suficientemente pequeno e $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in B_M$, então $E_\psi(t) \in L^\infty(0, T)$ e temos a seguinte estimativa

$$E_\psi(t) \leq c\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|^{2p}_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \tag{4.51}$$

onde $c = c(M) > 0$.

Logo (4.39) não é válido e portanto $\tau > T$. Assim

$$\psi \in C_s([0, T]; H_0^\varepsilon(\Omega)) \cap C_s^1([0, T]; H^{-1+\varepsilon}(\Omega)).$$

Daí, tomando o supremo essencial sobre $[0, T]$ em (4.51), obtemos a estimativa (4.10) para todo $\{\varphi^0, \varphi^1\}$ satisfazendo (4.8) com $M > 0$ suficientemente pequeno. $\square$

Observação 4.4 *O sistema (1) possui uma única solução com dado* $\{y^0, y^1, v\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Sigma)$ *e* f *satisfazendo (4.1) e (4.2). A prova disto é análoga a do problema (4.3).*

Teorema 4.5 *Seja* $T_0 > 0$ *tal que a controlabilidade exata de (1) é válida para* $f \equiv 0$ *no espaço* $L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *com controle em* $L^2(\Sigma)$ *para* $T > T_0$. *Assumimos que* f *satisfaça (4.1) e (4.2). Então existe* $\delta > 0$ *tal que se os dados iniciais* $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$ *verificam*

$$\|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} < \delta$$

existe um controle $v \in L^2(\Sigma)$ *tal que a solução de (1) satisfaz*

$$y(T) = y'(T) = 0.$$

Demonstração: Consideremos B_M a bola em $H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ com raio $M > 0$ e centrada na origem.

Definímos o operador não linear

$$\begin{array}{rccc} \mu : & B_M & \to & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ & \{\varphi^0, \varphi^1\} & \mapsto & \mu\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{u'(0), -u(0)\} \end{array} \tag{4.52}$$

onde $u = u(x,t)$ é a única solução de (4.3).

Vamos provar que o operador μ é sobrejetor, isto é, dados $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, existe $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que

$$\mu\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{y^1, -y^0\}. \tag{4.53}$$

Para isso, definamos o operador

$$\begin{array}{rlcl} K: & B_M \subset H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) & \to & H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ & \{\varphi^0, \varphi^1\} & \mapsto & K\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\psi'(0), -\psi(0)\}. \end{array} \tag{4.54}$$

Temos que este operador é contínuo e compacto. De fato, a continuidade é provada de maneira análoga ao feito na demonstração do teorema 3.6. E para a compacidade, basta tomarmos $s = -1 + \varepsilon$ no teorema 1.13 para obtermos $H^{-1+\varepsilon}(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega)$ e $s = \varepsilon$ para termos $H_0^\varepsilon(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} L^2(\Omega)$. Assim

$$K(B_M) \subset H^{-1+\varepsilon}(\Omega) \times H_0^\varepsilon(\Omega) \overset{c}{\hookrightarrow} H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega).$$

Do Lema 4.1 e da compacidade acima, temos que o operador K é compacto.

Agora, para provarmos (4.53), podemos escrever o operador μ como segue

$$\begin{aligned} \mu\{\varphi^0, \varphi^1\} &= \{\psi'(0), -\psi(0)\} + \{h'(0), -h(0)\} \\ &= K\{\varphi^0, \varphi^1\} + \Lambda\{\varphi^0, \varphi^1\} \end{aligned} \tag{4.55}$$

para todo $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in B_M$.

Levando em conta que o operador Λ é um isomorfismo, a equação (4.53) pode ser escrita como segue

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} = -\Lambda^{-1} K\{\varphi^0, \varphi^1\} + \Lambda^{-1}\{y^1, -y^0\}. \tag{4.56}$$

A expressão dada em (4.56) nos induz a definir o seguinte operador

$$\left| \begin{array}{l} \Theta : B_M \to H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ \Theta\{\varphi^0, \varphi^1\} = -\Lambda^{-1} K\{\varphi^0, \varphi^1\} + \Lambda^{-1}\{y^1, -y^0\}. \end{array} \right. \tag{4.57}$$

O operador Θ acima definido possui um ponto fixo. Provaremos isto utilizando o Teorema de Schauder. Com efeito, sendo o operador K compacto, temos que o operador Θ também é compacto.

Vamos mostrar que existe um $r \in (0, M]$ tal que

$$\|\Theta\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq r, \ \forall\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \tag{4.58}$$

com

$$\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq r. \tag{4.59}$$

De fato, de (4.10) temos

$$\begin{aligned} \|\Theta\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} &\leq \gamma\|K\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &+ \gamma\|\{y^1, -y^0\}\|_{H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega)} \\ &\leq c\,\gamma\, r^p + \gamma\|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \end{aligned} \tag{4.60}$$

para todo $\{\varphi^0, \varphi^1\} \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ tal que $\|\{\varphi^0, \varphi^1\}\|_{H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)} \leq r$ com

$$\gamma = \|\Lambda^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^{-1}(\Omega)\times L^2(\Omega), H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega))}. \tag{4.61}$$

Assim, é suficiente escolher $r \in (0, M]$ tal que

$$r < \min\left(M, \left(\frac{1}{\gamma\, c}\right)^{1/(p-1)}\right) \tag{4.62}$$

sempre e quando

$$\|\{y^0, y^1\}\|_{L^2(\Omega)\times H^{-1}(\Omega)} \leq \frac{r - \gamma\, c\, r^p}{\gamma} \tag{4.63}$$

o que prova (4.58).

Aplicando o teorema de Schauder, temos que o operador Θ possui um ponto fixo, isto é,

$$\Theta\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{\varphi^0, \varphi^1\} \tag{4.64}$$

o que prova nossa afirmação.

De (4.64) e da definição de Θ temos

$$\{\varphi^0, \varphi^1\} = -\Lambda^{-1}K\{\varphi^0, \varphi^1\} + \Lambda^{-1}\{y^1, -y^0\},$$

isto é,

$$\{\psi'(0), -\psi(0)\} + \{h'(0), -h(0)\} = \{y^1, -y^0\}$$

e por (4.55) temos

$$\mu\{\varphi^0, \varphi^1\} = \{y^1, -y^0\}$$

provando (4.53).

Da definição do operador μ e de (4.53) temos

$$\{u'(0), -u(0)\} = \{y^1, -y^0\}$$

provando que

$$u(0) = y^0 \text{ e } u'(0) = y^1 \tag{4.65}$$

com u solução de (4.3).

Considerando-se

$$v = \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \text{ em } \Sigma \tag{4.66}$$

no problema (1) sujeito aos dados iniciais $\{y^0, y^1\} \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, temos que tal problema possui única solução y. Observemos que de (4.3) e (4.65) resulta que u é também solução do problema (1). Logo, pela unicidade de soluções vem que $y = u$ conseqüentemente de $(4.3)_3$ concluímos que

$$y(T) = y'(T) = 0, \quad \forall\, T > T_0.$$

$\square$

Bibliografia

[1] ADAMS, R. A.: **Sobolev Spaces**. Academic Press, New York, 1975.

[2] BRÉZIS, H.: **Análisis Funcional, Teoría y Aplicaciones**. Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1984.

[3] BRÉZIS, H.: **Operateurs maximaux monotones et semigroups de contractions dans les spaces de Hilbert**. North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1973.

[4] BRUMER, P., SHAPIRO, M: **Laser control of chemical reactions**. Scientific American, pp. 34-39, 1995.

[5] CAVALCANTI, M.M., DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume I, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[6] CAVALCANTI, M.M., DOMINGOS CAVALCANTI, V.N.: **Iniciação à Teoria das distribuições e aos Espaços de Sobolev**. Volume II, DMA/UEM, Maringá, 2000.

[7] CHEWNING, W.C.: **Controllability of Nonlinear Wave Eqaution in Several Space Variables**. (S.I.A.M. J. Control and Optimization, vol. 14, nº 1, 1976, pp. 19-25).

[8] FATTORINI H.O.: **Local Controllability of a Nonlinear Wave Equation** (Math. Systems Theory, vol. 9, 1975, pp. 36-40).

[9] HÖRMANDER, L.: **Linear partial differential operators.** Springer Verlang, 1969.

[10] LASIECKA, I., TATARU, D.: **Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping**. Lecture Notes in Pure and Applied Maths, 142, Dekker, New York, 1993.

[11] LIONS. J.-L.: **Contrôlabilité de Systèmes Distribués** (C.R. Acad. Scl. Paris, T. 302, Series 1, 1986, pp. 471-475).

[12] LIONS. J.-L.: **Exact Controllability, Stabilization and Pertubations for Distributed Systems** (S.I.A.M. Review, vol. 30, 1988, pp. 1-68).

[13] LIONS. J.-L.: **Contrôlabilité Exacte Pertubations et Stabilisation de Systèmes Distribués**, Masson, Paris, 1988.

[14] LIONS. J.-L.: **Problèmes aux Limites dans les Équations aux Derivées Partielles**. Les Press de l'Université de Montreal, Canadá, 1962.

[15] LIONS. J.L., MAGENES. E.: **Non-Homogeneous boudary Value Problems and Applications.**, Vol. I. Springer-Verlang Berlin Heidelberg, New York, 1972.

[16] MARKUS. L.: **Controllability of Nonlinear Processes** (S.I.A.M. J. Control, vol. 3, 1965, pp. 78-90).

[17] MEDEIROS, L. A.: **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Textos e Métodos Matemáticos 16, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1983.

[18] MEDEIROS, L. A., MELLO, E.A.: **A IntegraL de Lebesgue**. Textos e Métodos Matemáticos 18, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1989.

[19] MEDEIROS, L. A., RIVERA, P.H.: **Espaços de Sobolev e Aplicações às Equações Diferenciais Parciais**. Textos e Metodos Matemáticos 9, Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 1977.

[20] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas elípticos não homogêneos)**. Rio de Janeiro, IM-UFRJ. 2000.

[21] MEDEIROS, L. A., MILLA MIRANDA, M.: **Solutions for the equation of nolinear vibrations in Sobolev spaces of fractionary order**. Editora Campus Ltda, Rio de Janeiro, 1987.

[22] MILLA MIRANDA, M. **Trace for the dual of Sobolev Spaces,** Bol. Soc. Paranaense de Matemática, v.11, n.2, p.131-157, 1992.

[23] PALOMINO, J.A.S.: **Controlabilidade Exata da Equação de Ondas com Coeficientes Variáveis**. Instituto de Matemática - UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

[24] RAVIART, P. A., THOMAS, J.M.: **Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivéis Partielles**. Masson, Paris, 1983.

[25] RUSSELL. D.L.: **Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations. Recent Progress and Open Questions** (S.I.A.M. Review, vol. 20, 1978, pp. 639-739).

[26] SIMON, J.: **Compact Sets in the Space $\mathbf{L^p(0,T;B)}$**. (Annali di Matematica pura ed aplicata,(IV) Vol. CXLVI, 1987, pp.65-96).

[27] TEMAN, R.: **Navier-Stokes equations, theory and numerical analysis**. North Holland, Amsterdan, 1979.

[28] VISIK, M.I. & LADYZHENSKAJA, O.A. : **On a bondary value problem for partial differential equations and certain class of operator equations**. A.M.S. translations, Series2, Vol.1, 1958.

[29] ZEIDLER, E.: **Nolinear Functional Analysis and its Application I. Fixed-Point Theorems**. Spriger-Verlag, New York, 1990.

[30] ZEIDLER, E.: **Nolinear Functional Analysis and its Application II/A**. Spriger-Verlag, New York, 1990.

[31] ZEIDLER, E.: **Nolinear Functional Analysis and its Application II/B**. Spriger-Verlag, New York, 1990.

[32] ZUZUA. E.: **Controlabilité exacte de systèmes d''evolution non linéares** (C. R. Acad. Scl. Paris, T. 306, Series 1, 1988, pp. 129-132).

[33] ZUZUA. E.: **Exact Controllability for Semilinear Wave Equation**. J. Math. Purés et appli., 69, 1990, p. 1-31.